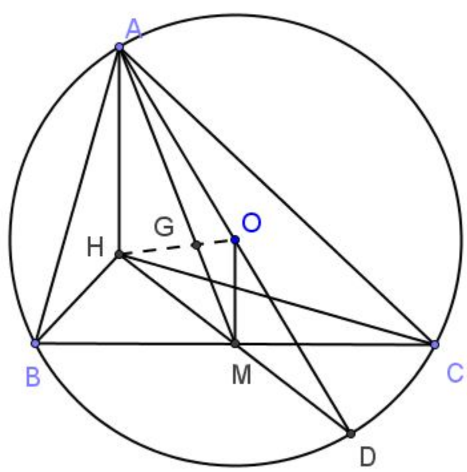
CÁC ĐỊNH LÝ HÌNH HỌC PHẲNG

1. Đường thẳng Euler.

Bài toán 1. ***Trong một tam giác thì trọng tâm, trực tâm và tâm đường tròn ngoại tiếp cùng nằm trên một đường thẳng. (Đường thẳng này được gọi là đường thẳng Euler của tam giác.)***

Hướng dẫn:

Cách 1. Cho tam giác ABC, gọi G, H, O lần lượt là trọng tâm, trực tâm và tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.



Gọi D là điểm đối xứng của A qua O. Khi đó BHCD là hình bình hành, suy ra trung điểm M của BC cũng là trung điểm của HD. Tam giác AHD có OM là đường trung bình, suy ra OM = ½ AH . Suy ra GM/GA = OM/AH = ½ . Suy ra ∆AHG □ ∆MOG (c.g.c)

Suy ra H,G, O thẳng hàng và GH = 2GO.

Nhận xét. Khi nói đến đường thẳng Euler thì ta chỉ cần cho đường thẳng đi qua hai trong 3 điểm trên. @

Cách 2. Ta có thể dùng phép vị tự như sau:

Thực hiện phép vị tự tâm G tỉ số k = -1/2. Ta có

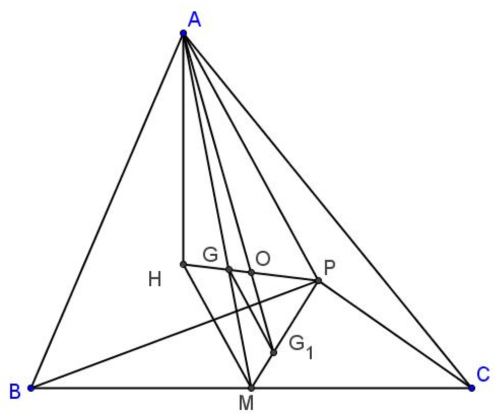
$A \mapsto M, B \mapsto N, C \mapsto P, \Delta ABC \mapsto \Delta MNP$ (Với M, N, P lần lượt là trung điểm của các cạnh BC, AC và AB)

Mà H là trực tâm của tam giác ABC, O là trực tâm của tam giác MNP. Nên $V_{(G,-1/2)} : H \mapsto O$

Do đó $\overrightarrow{GO} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{GH}$. Do đó G nằm giữa H, O và GH = 2GO. @

Bài toán 1.1. *Cho tam giác ABC có trọng tâm G, trực tâm H và tâm ngoại tiếp O. Gọi P là điểm đối xứng của H qua O. Gọi G_1, G_2, G_3 là trọng tâm của các tam giác PBC, PAC và PAB. Chứng minh rằng $G_1A = G_2B = G_3C$ và G_1A, G_2B , G_3C đồng quy.*

Hướng dẫn:



Chứng minh GG_1 song song với AP và $GG_1 = 1/3$ AP.

Hơn nữa GO = 1/3 OP. Suy ra A, O, G_1 thẳng hàng và $AG_1= 4/3$ AO.

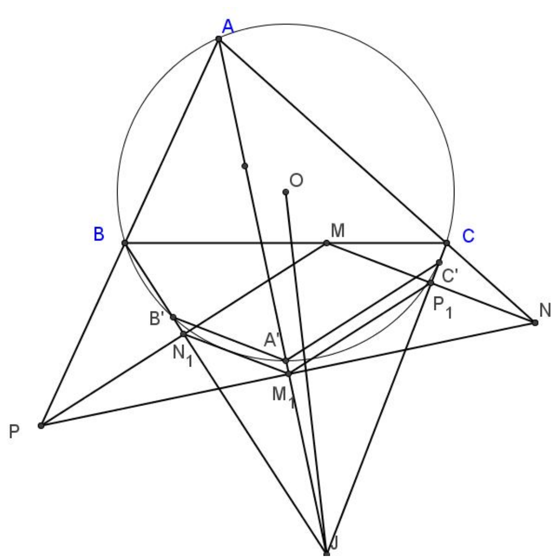
Chứng minh tương tự ta cũng có BG_2, CG_3 cùng đi qua O và $BG_2 = 4/3$ BO , $CG_3 = 4/3$ CO. @

Bài toán 1.2. *Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O). (J) là đường tròn bàng tiếp thuộc góc A của tam giác ABC.*

(J) tiếp xúc BC, AB, AC tai. M. N. P.

Chứng minh rằng OJ là đường thẳng Euler của tam giác MNP

Hướng dẫn:



Gọi M_1, N_1, P_1 là giao điểm của JA, JB, JC với PN, PM và MN. Khi đó M_1, N_1, P_1 lần lượt là trung điểm của PN, PM, MN. Do đó đường tròn Euler của tam giác MNP là đường tròn ngoại tiếp tam giác $M_1N_1P_1$.

Gọi A', B', C' là giao điểm của JA, JB và JC với đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

Khi đó ta có JB'.JB = JA'.JA = JC'.JC

Hơn nữa ta có $JB.JN_1 = JA.JM_1 = JC.JP_1$

Do đó $JN_1/JB' = JM_1/JA' = JP_1/JC'$

Suy ra M_1N_1 //A'B', P_1M_1 //A'C' và N_1P_1//B'C'

Từ đó ta có tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác $M_1N_1P_1$, tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác A'B'C' và J thẳng hàng. Suy ra tâm ngoại tiếp tam giác $M_1N_1P_1$ thuộc JO.

Mặt khác J là tâm ngoại tiếp của tam giác MNP.

Vậy JO là đường thẳng Euler của tam giác MPN. @

Bài toán 1.3. *Cho tam giác ABC ngoại tiếp đường tròn (I), với các đường cao AA', BB' và CC'. Gọi d_a, d_b, d_c là các đường thẳng Euler của các tam giác AB'C', BA'C' và CA'B'. Gọi d'_a, d'_b, d'_c là các đường thẳng đối xứng với d_a, d_b, d_c qua AI, BI và CI. Chứng minh d'_a, d'_b, d'_c đôi một song song.*

Hướng dẫn: Gọi B_1, C_1 đối xứng với B', C' qua AI, khi đó d'_a là đường thẳng Euler của tam giác AB_1C_1, mà B_1C_1 //BC, suy ra d'_a song song với đường thẳng Euler của tam giác ABC.

Chứng minh tương tự thì d'_b, d'_c song song với đường thẳng Euler của tam giác ABC. @

Bài toán 1.4. *Cho tam giác ABC có trực tâm H. Khi đó đường thẳng Euler của các tam giác HAB, HAC và HBC đồng quy.*

Hướng dẫn:Đồng quy tại trung điểm của OH. @

Đến nay người ta vẫn còn tìm ra những tính chất thú vị liên qua đến đường thẳng Euler, và năm 2006 thì kiến trúc sư người Hy Lạp Rostas Vittasko có đưa ra bài toán sau:

Bài toán 1.5. *Cho tứ giác ABCD nội tiếp có các đường chéo cắt nhau tại P. Khi đó đường thẳng Euler của các tam giác PAB, PBC, PCD, PAD đồng quy.*

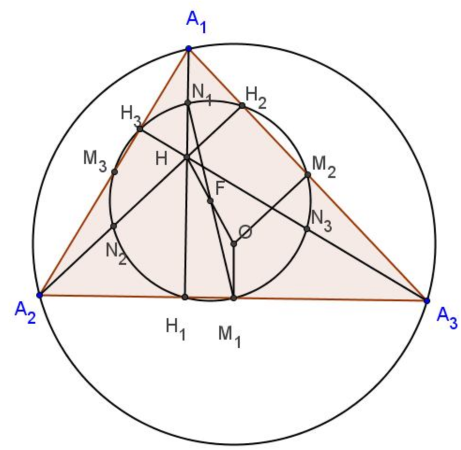
2. **Đường tròn Euler**

Bài toán 2. ***Trong một tam giác thì 9 điểm gồm: trung điểm của 3 cạnh, trung điểm của các đoạn thẳng nối từ trực tâm đến đỉnh, chân các đường cao thì cùng thuộc một đường tròn. (Người ta gọi là đường tròn 9 điểm hay đường tròn Euler)***

Hướng dẫn:

Cách 1. Gọi tam giác là $A_1A_2A_3$. Trung điểm các cạnh là M_1, M_2, M_3; chân các đường cao là H_1, H_2, H_3 và trung điểm các đoạn thẳng nối trực tâm H với các đỉnh là N_1, N_2, N_3. Ta chứng minh 9 điểm M_1, M_2, M_3, H_1, H_2, H_3, N_1, N_2, N_3 cùng thuộc một đường tròn.

Chứng minh các tứ giác $M_1M_2M_3H_1$ nội tiếp và $M_1M_2N_1M_3$ nội tiếp đường tròn đường kính M_1N_1.



Cách 2. Ta có thể dùng phép vị tự như sau:

Thực hiện phép vị tự tâm G tỉ số -1/2 thì

$\Delta A_1A_2A_3 \mapsto \Delta M_1M_2M_3 \Rightarrow (A_1A_2A_3) \mapsto (M_1M_2M_3)$

(Kí hiệu (XYZ) là đường tròn ngoại tiếp tam giác XYZ)

Do đó $O \mapsto F$ (F là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác $M_1M_2M_3$), suy ra $\overrightarrow{GF} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{GO} \Rightarrow \overrightarrow{HF} = \frac{1}{2}\overrightarrow{HO}$

Do đó H là tâm vị tự ngoài biến (O) thành (F).

Xét

$V_{(H;1/2)}: A_1 \mapsto N_1, A_2 \mapsto N_2, A_3 \mapsto N_3 \Rightarrow N_1, N_2, N_3 \in (F)$

Hơn nữa, nếu gọi H'_1, H'_2, H'_3 là giao điểm của A_1H, A_2H, A_3H với (O) thì:

$\overrightarrow{HH_1} = \frac{1}{2}\overrightarrow{HH'_1}, \overrightarrow{HH_2} = \frac{1}{2}\overrightarrow{HH'_2}, \overrightarrow{HH_3} = \frac{1}{2}\overrightarrow{HH'_3}$

Do đó $V_{(H,1/2)}: H'_1 \mapsto H_1, H'_2 \mapsto H_2, H'_3 \mapsto H_3 \Rightarrow H_1, H_2, H_3 \in (F)$

Vậy ta đã chứng minh được 9 điểm M_1, M_2, M_3, H_1, H_2, H_3, N_1, N_2, N_3 cùng thuộc một đường tròn và tâm là trung điểm của OH. @

Sau đây là một số tính chất của đường tròn Euler, xem như bài tập.

Bài toán 2.1. *Tâm đường tròn Euler là trung điểm của đọan thẳng nối trực tâm và tâm ngoại tiếp.*

Bài toán 2.2. *Cho tam giác ABC trực tâm H. Tia Hx cắt đường tròn Euler tại M và đường tròn ngoại tiếp tại N. Khi đó M là trung điểm của HN.*

Bài toán 2.3. *Cho tam giác ABC có trực tâm H. Khi đó đường tròn Euler của tam giác ABC cũng là đường tròn Euler của các tam giác HAB, HAC và HBC. (Từ bài toán 2.3 suy ra bài toán 1.4)*

Sau đây là một định lý rất hay của hình học tam giác.

Bài toán 2.4. (Định lý Feuerbach) *Trong một tam giác đường tròn Euler tiếp xúc với đường tròn nội tiếp và các đường tròn bàng tiếp.*

Chứng minh định lý Feuerbach dựa trên những công cụ mạnh, phép nghịch đảo, tuy nhiên vẫn có cách làm sơ cấp hơn. Sau đây là các bổ đề dùng để chứng minh định lý Feuerbach. Ta sử dụng các ký hiệu trong bài toán 2.

Bài toán 2.4.1. *Giả sử $A_1A_3 > A_2A_3$. Khi đó đường thẳng M_1T tiếp xúc với đường tròn Euler tại M_1 thì tạo với A_2A_3 một góc là $\alpha_2 - \alpha_3$.*

Bài toán 2.4.2. *Gọi D_1 là giao điểm của phân giác trong góc A_1 với A_2A_3. Gọi X_1P là tiếp tuyến đến đường tròn nội tiếp (I), X_1P' là tiếp tuyến của đường tròn bàng tiếp góc A (P, P' là các tiếp điểm). Khi đó PX_1P' song song với M_1T.*

Bài toán 2.4.3. *Gọi Q là giao điểm của M_1P với (I), khi đó Q cũng thuộc đường tròn Euler.*

Bài toán 2.4.4. *Hai đường tròn Euler và đường tròn nội tiếp giao nhau tại Q. Chứng minh rằng chúng có chung tiếp tuyến.*

Một số bài toán liên quan đến đường tròn Euler.

Bài toán 2.5. *(VMO 2009) Trong mặt phẳng cho hai điểm cố định A, B (A khỏc B). Một điểm C di động tròn mặt phẳng sao cho $\angle ACB = \alpha = const$ ($0^0 < \alpha < 1800$). Đường tròn tâm I nội tiếp tam giác ABC và tiếp xúc với AB, BC, CA lần lươt tại D, E, F. AI, BI cắt EF lần lượt tại M, N.*

a) *Chứng minh rằng: MN cú độ dài khụng đổi.*

b) *Chứng minh rằng: (DMN) luôn đi qua một điểm cố định khi C lưu động.*

Bài toán 2.6. *Cho tam giác ABC trung tuyến AM, O là tâm ngoại tiếp. Khi đó đường thẳng qua M vuông góc với AO tiếp xúc với đường tròn Euler của tam giác ABC.*

Bài toán 2.7. *Chứng minh rằng các đường thẳng d_a, d_b, d_c trong bài toán 1.3 đồng quy tại một điểm thuộc đường tròn Euler.*

Bài toán 2.8. *Tam giác ABC có các đường cao lần lượt là AD, BE và CF đồng quy tại trực tâm H. DE cắt CF tại M, DF cắt BE tại N. Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp của tam giác HBC. Chứng minh OA ⊥ MN.*

(HẾT PHẦN 1)

TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1] Trần Văn Tấn (Chủ biên), *Các chuyên đề hình học bồi dưỡng học sinh giỏi THCS*, NXB Giáo dục

[2] Roger A.Jonhson, *Advanced Euclidean Geometry*, Dover Publication, INC. NewYork

[3] Po-Shen Loh, *Collinearity and Concurrence*, Internet resources

[4] Cosmin Pohoata, *Harmonic Division and its Applications*, Internet resources

[5] Internet, các website www.mathlinks.ro , http://diendantoanhoc.net và http://mathscope.org