PHÒNG GD&ĐT QUẬN HỒNG BÀNG
TRƯỜNG THCS HỒNG BÀNG

CHUYÊN ĐỀ MÔN TOÁN

BỒI DƯỠNG HỌC SINH GIỎI

ĐƯỜNG THẲNG SIM-SƠN TRONG TAM GIÁC

Tác giả: ĐOÀN QUỐC VIỆT

Đơn vị: Trường THCS Hồng Bàng

Tháng 8 năm 2016

1. Lời nói đầu:

Nhà toán học người Scotland là Robert Simson (1687 – 1768) đã tìm ra một đường thẳng đẹp xuất hiện trong tam giác khi nội tiếp một đường tròn. Người ta đặt tên cho đường thẳng đó là đường thẳng Simson (Sim – Sơn).

Chuyên đề này, tôi xin giới thiệu về đường thẳng Simson trong tam giác và các tính chất, những ứng dụng cơ bản của nó nhưng được giới hạn trong chương trình toán THCS.

Mặc dù đã có nhiều bài viết hay về đường thẳng Simson nhưng chủ yếu là kiến thức của THPT nên tôi mạnh dạn trao đổi với đồng nghiệp về chuyên đề này. Rất mong đồng nghiệp có ý kiến đóng góp đề nội dung chuyên đề tốt hơn. Tôi xin chân thành cảm ơn.

2. Nội dung đường thẳng Simson trong tam giác:

a) Khái niệm đường thẳng Simson.

Bài toán 1:

Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O), gọi M là một điểm trên cung BC không chứa điểm A. Gọi A’, B’, C’ lần lượt là hình chiếu của điểm M trên BC, AC, AB. Khi đó: ba điểm A’, B’, C’ nằm trên một đường thẳng. (gọi là đường thẳng d_M)

Chứng minh:

Ta có A’BC’M là tứ giác nội tiếp

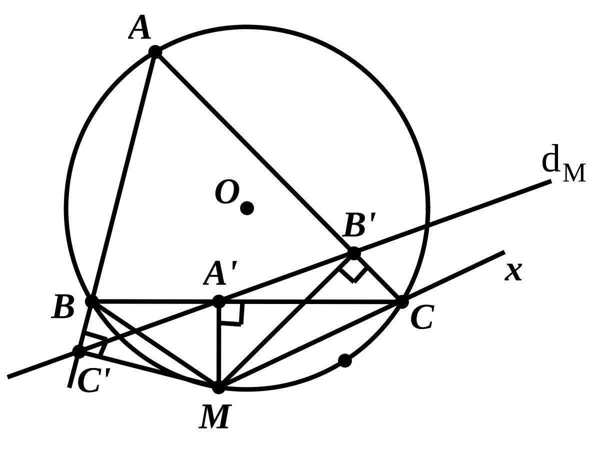
$\Rightarrow MA'C' = MBC'$ (1)

Do tứ giác ABMC nội tiếp nên

$MBC' = ACM$ (2)

Do tứ giác A’B’CM nội tiếp nên

$MA'B = B'Cx$ (3)



Từ (1), (2) và (3) ta có: $MA'C' + MA'B' = ACM + B'Cx = 180^0$

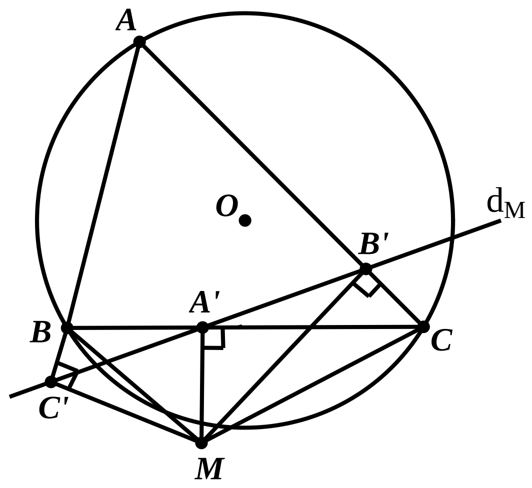
Vì thế A’, B’, C’ cùng nằm trên một đường thẳng (gọi tên là đường thẳng d_M)

Đảo lại ta có bài toán sau:

Bài toán 2 :

Cho tam giác ABC nội tiếp (O), lấy M là một điểm nằm trong góc BAC. Gọi A’, B’, C’ lần lượt là hình chiếu của điểm M trên BC, AC, AB sao cho A’, B’, C’ thẳng hàng (cùng nằm trên đường thẳng d_M) Khi đó, M nằm trên BC không chứa điểm A.

Chứng minh:



Do tứ giác A’B’CM nội tiếp nên:

$$A'MC = A'B'A \quad (1)$$

Do tứ giác A’BC’M nội tiếp nên

$$A'MB = A'C'B \quad (2)$$

Ta có:

$$BAC + BMC = BAC + A'MC + A'MB$$

Kết hợp với (1) và (2) thì: $BAC + BMC = BAC + A'B'A + A'C'B = 180^0$.

(định lý tổng 3 góc của một tam giác)

Vì thế ABMC là tứ giác nội tiếp. Suy ra $M \in BC$.

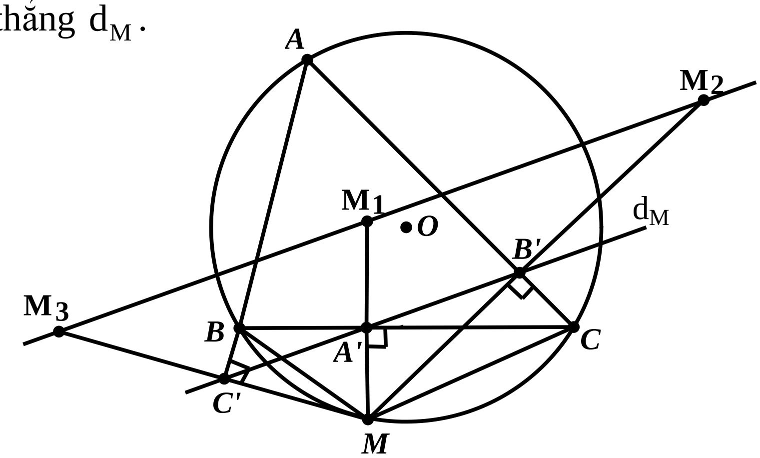
Kết luận:

Người ta gọi d_M là đường thẳng Simson của điểm M đối với đỉnh A của tam giác ABC nội tiếp (O).

b) Tính chất:

Tính chất 1: Nếu tam giác ABC nội tiếp (O), trên cung nhỏ BC lấy điểm M. Gọi $M_1;\ M_2; M_3$ lần lượt là các điểm đối xứng của điểm M qua ba cạnh BC, AC, AB. Khi đó ba điểm $M_1;\ M_2; M_3$ nằm trên cùng một đường thẳng và đường thẳng đó song song với đường thẳng d_M.

Chứng minh:



Vì B’C’ là đường trung bình của ΔMM_2M_2 nên $M_2M_3 // d_M$ (1)

Vì A’C’ là đường trung bình của ΔMM_1M_3 nên $M_1M_3 // d_M$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra ba điểm $M_1;\ M_2; M_3$ nằm trên cùng một đường thẳng và đường thẳng đó song song với đường thẳng d_M.

Người ta gọi đường thẳng đó là đường thẳng Steiner.

Tính chất 2: Nếu tam giác ABC nội tiếp (O) có AM là đường kính của (O) khi đó đường thẳng Simson d_M sẽ trùng với BC.

Chứng minh (hiển nhiên)

Tính chất 3: Nếu tam giác ABC vuông tại A, tam giác ABC nội tiếp (O) và M là điểm chính giữa cung BC không chứa điểm A thì đường thẳng Simson d_M sẽ đi qua tâm O.

Chứng minh:

Vì M là điểm chính giữa của cung BC nên A’ trùng với O. Do đó d_M sẽ đi qua O.

Tính chất 4: Nếu tam giác ABC nội tiếp (O). Đường thẳng Simson của điểm C đối với đỉnh A của tam giác ABC là đường cao CH.

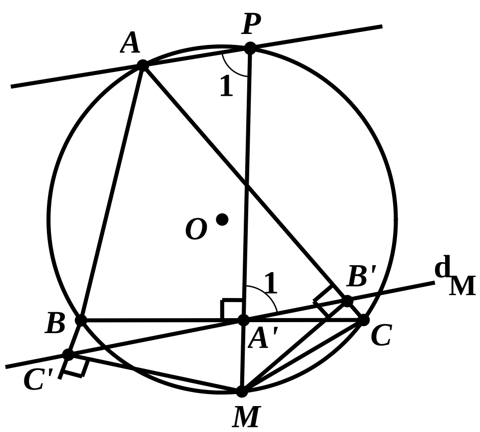
Chứng minh:

Khi M trùng với C thì B’ trùng với C và A’ trùng với C.

Vì thế d_M trùng với đường cao CH.

c) Ứng dụng của đường thẳng Simson trong tam giác:

Bài 1.1: Cho tam giác ABC nội tiếp (O), lấy M là một điểm trên cung BC không chứa điểm A. Từ M kẻ đường thẳng vuông góc với BC cắt (O) tại điểm thứ hai là P. Chứng minh rằng AP // d_M.



Lời giải:

Do $P_1 = ACM$ (hai góc nội tiếp cùng chắn ABM)

Do tứ giác A’B’CM nội tiếp nên $A'_1 = ACM$ (2)

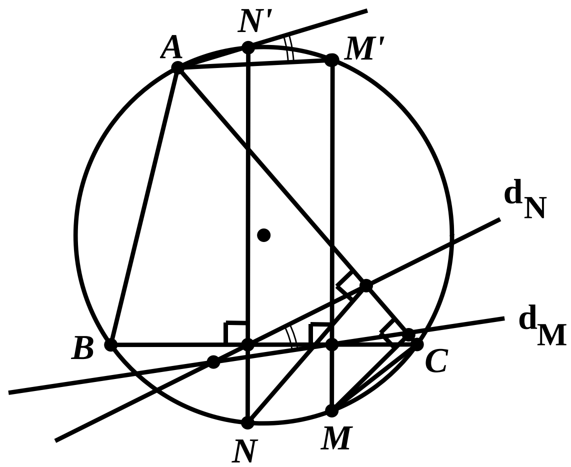
Từ (1) và (2) suy ra $P_1 = A'_1 \Rightarrow AP // d_M$.

Nhận xét:

Nếu cũng trên cung BC lấy thêm điểm N khác điểm M, ta chú ý tính chất giữa góc tạo bởi hai đường thẳng tương ứng song song thì sẽ được bài toán mới:

Bài 1.2: Cho tam giác ABC nội tiếp (O), trên cung BC không chứa điểm A lấy hai điểm M và N phân biệt. Từ M và N kẻ các đường thẳng cùng vuông góc với BC cắt (O) lần lượt tại M' và N'. Chứng minh góc nhọn tạo bởi d_M và d_N bằng nửa số đo của cung MN.

Lời giải:



Theo bài 1.1 thì $d_M // AM'$ và $d_N // AN'$

Vì thế, $d_M, d_N = N'AM'$

mà $N'AM' = \frac{1}{2}\text{sd } M'N' = \frac{1}{2}\text{sd } MN$

(chú ý rằng hình thang nội tiếp đường tròn là hình thang cân)

Suy ra $d_M, d_N = \frac{1}{2}\text{sd } MN$.

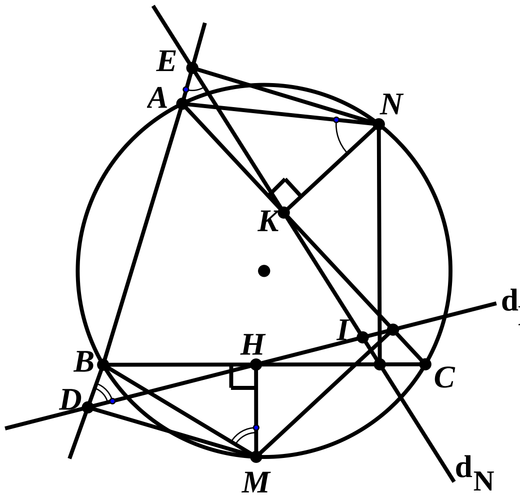
Nhận xét: Nếu số đo của cung MN không đổi thì số đo góc nhọn tạo bởi d_M và d_N sẽ không đổi. Ta có bài toán mới sau:

Bài 1.3: Cho tam giác ABC nội tiếp (O), lấy hai điểm M, N phân biệt trên cung BC không chứa điểm A. Chứng minh rằng: khi hai điểm M, N thay đổi sao cho MN không đổi thì góc tạo bởi d_M và d_N không đổi.

Nhận xét: Bài 1.3 chính là cách hỏi khác của bài 1.2, nếu bây giờ ta thử thay đổi vị trí của hai điểm M và N nằm ở hai cung khác nhau xem bài toán đó còn đúng không? Sử dụng phần mềm sketchpad để dự đoán, ta thấy bài toán mới là:

Bài 1.4: Cho tam giác ABC nội tiếp (O) lấy điểm M trên cung BC nhỏ, lấy điểm N trên cung BC lớn. Gọi d_M là đường thẳng Simson của điểm M ứng với đỉnh A tam giác ABC, gọi d_N là đường thẳng Simson của điểm N ứng với đỉnh C của tam giác ABC. Chứng minh rằng khi M, N di chuyển mà độ dài MN không đổi thì góc tạo bởi d_M và d_N không đổi.

Lời giải:



Do tứ giác AKNE nội tiếp nên

$AEK = ANK = 90 - NAC$ (1)

Do tứ giác BDMH nội tiếp nên

$BDH = BMH = 90^0 - CBM$ (2)

Cộng vế với vế của (1) và (2)

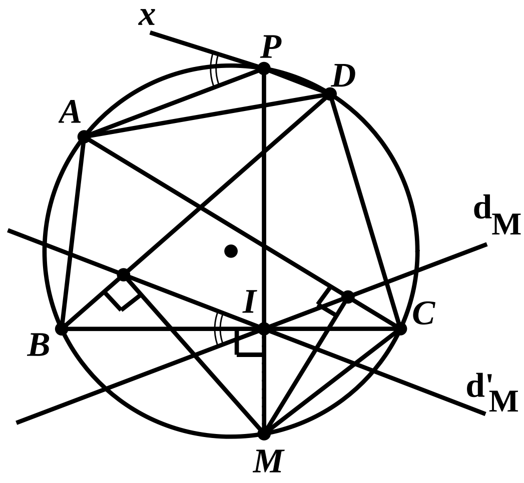
ta được $180^0 - EID = 180^0 - \left(NAC + CBM\right)$

Suy ra $EID = \dfrac{1}{2}\text{sd } MN$ (không đổi)

Nhận xét: Vẫn ý tưởng của bài 1.1 nhưng xét hai đường thẳng Simson của cùng điểm M với hai tam giác cùng nội tiếp (O) khác nhau, ta có bài toán hay như sau:

Bài 1.5: Cho tứ giác ABCD nội tiếp (O), lấy M là điểm bất kì trên cung BC không chứa điểm A. Gọi d_M là đường thẳng Simson của điểm M ứng với đỉnh A tam giác ABC còn d'_M là đường thẳng Simson của điểm M ứng với đỉnh B của tam giác DBC. Chứng minh góc nhọn tạo bởi d_M và d'_M bằng nửa số đo cung AD.

Lời giải:



Từ M kẻ đường thẳng vuông góc với BC

Cắt BC tại I và cắt (O) tại điểm thứ 2 là P

(như hình vẽ)

Sử dụng kết quả bài 1.1 thì:

d_M // AP và d'_M// DP

Do đó $I = APx = \dfrac{1}{2}\text{sd } AD$.

Như vậy, góc nhọn tạo bởi d_M và d'_M bằng nửa số đo cung AD.

Nhận xét: Bài toán 1.1 đã giúp chúng ta xử lý được nhiều bài toán phức tạp, nếu kết hợp giữa bài 1.1 và tính chất 1 ta có bài toán hay như sau:

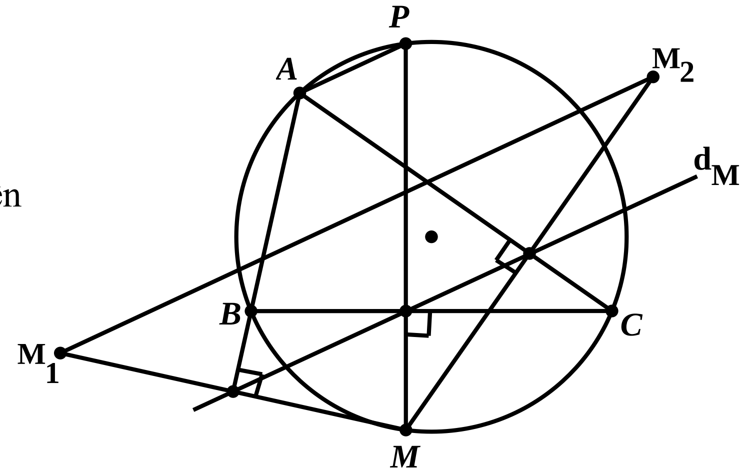
Bài 1.6: Cho tam giác ABC nội tiếp (O), lấy M là điểm trên cung BC không chứa điểm A. Từ M kẻ đường thẳng vuông góc với BC và cắt (O) tại điểm thứ hai là P. Gọi $M_1;M_2$ lần lượt là 2 điểm đối xứng với điểm M qua AB và AC. Chứng minh rằng AP // M_1M_2.

Lời giải:

Theo tính chất 1 thì đường thẳng M_1M_2 là đường thẳng Steiner nên M_1M_2 // d_M.

Theo bài 1.1 thì d_M // AP

Từ đó AP // M_1M_2.



Nhận xét:

Để tìm hiểu mối quan hệ của đường thẳng Steiner với đường thẳng Simson d_M ta theo dõi bài tập sau:

Bài 2.1: Cho tam giác ABC nội tiếp (O), gọi H là trực tâm của tam giác ABC, lấy M là một điểm trên cung BC không chứa điểm A. Gọi $M_1;M_2$ lần lượt là 2 điểm đối xứng với điểm M qua AB và AC. Chứng minh M_1M_2 đi qua điểm H.

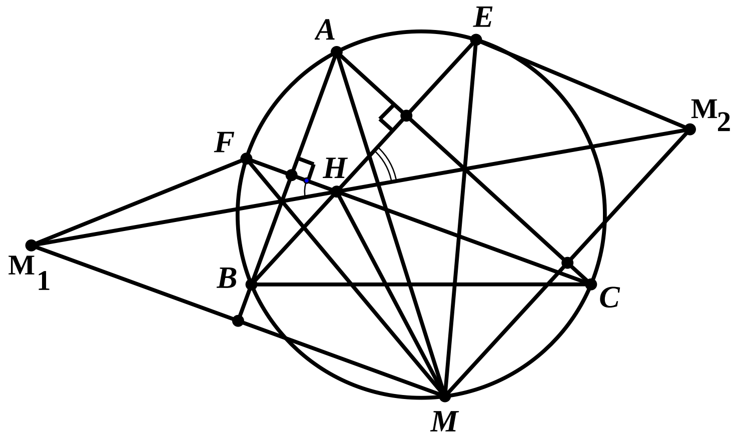
Lời giải:

Kéo dài CH cắt (O) tại F

BH cắt (O) tại E.

Suy ra:

E và H đối xứng với nhau qua AC, F và H đối xứng với nhau qua AB.



Suy ra: MM_1FH là hình thang cân có AB là trục đối xứng.

MM_2EH là hình thang cân có AC là trục đối xứng.

Suy ra $M_1HF = MFH = MAC$

$$M_2HE = MEH = MAB$$

$$\Rightarrow M_1HF + FHE + M_2HE = MAC + FHE + MAB = 180^0$$

Từ đó $M_1; H; M_2$ thẳng hàng.

Nhận xét: Thay đổi cách hỏi của bài 2.1 ta có bài toán mới sau :

Bài 2.2: Cho tam giác ABC nội tiếp (O), lấy M là một điểm trên cung BC không chứa điểm A. Gọi $M_1; M_2$ lần lượt là 2 điểm đối xứng với điểm M qua AB và AC. Chứng minh M_1M_2 luôn đi qua một điểm cố định khi M di chuyển trên cung BC. (Olympic toán – Nhật Bản – 1996).

Lời giải :

Bạn đọc tự chứng minh.

Tương tự 2.2 ta có bài toán sau:

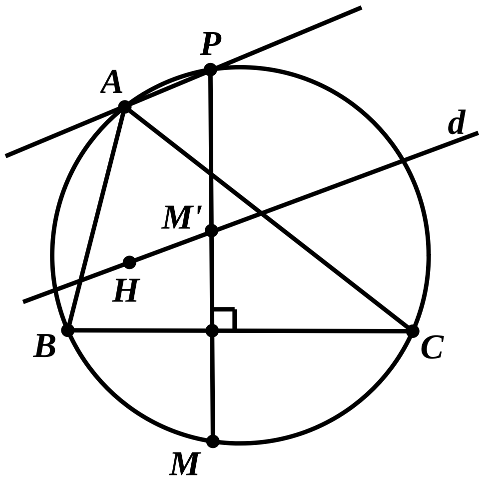
Bài 2.3: Cho tam giác ABC nội tiếp (O), lấy M là một điểm chuyển động trên cung BC không chứa điểm A. Lấy M' là điểm đối xứng với M qua BC, gọi P là giao điểm thứ hai của MM' với (O). Chứng minh khi M chuyển động trên cung BC thì đường thẳng đi qua M' và song song với AP luôn đi qua một điểm cố định.

Lời giải :

Áp dụng kết quả bài 1.6 thì AP song song với đường thẳng Steiner của M.

Do đường thẳng Steiner của M luôn đi qua M' nên d chính là đường thẳng Steiner.

Theo kết quả bài 2.2 thì đường thẳng d sẽ đi qua trực tâm H cố định của tam giác ABC.



Nhận xét: Nếu hình vẽ của bài 2.1 được vẽ thêm đường thẳng Steiner ta phát hiện ra một bài toán mới:

Bài 2.4: Cho tam giác ABC nội tiếp (O), lấy M là một điểm trên cung BC không chứa điểm A. Gọi H là trực tâm của tam giác ABC. Chứng minh đường thẳng Simson d_M đi qua trung điểm của MH.

Lời giải:

Lấy M_1 đối xứng với M qua AB

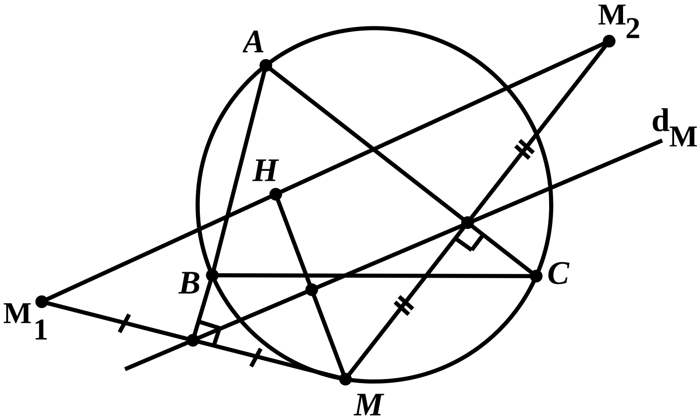
Lấy M_2 đối xứng với M qua AC

Đường thẳng Simson d_M chứa

đường trung bình của ΔMM_1M_2

Từ đó suy ra d_M đi qua trung

điểm của MH.



Nhận xét:

Đặc biệt bài 1.6 ta có bài toán sau:

Bài 3.1: Cho tam giác ABC nội tiếp (O), lấy M là điểm nằm trên cung BC, N là điểm nằm trên cung AC sao cho MN đi qua O. Chứng minh: $d_M \perp d_N$.

Lời giải:

Do tứ giác ADNK nội tiếp

$\Rightarrow AKD = AND = 90^0 - NAD$

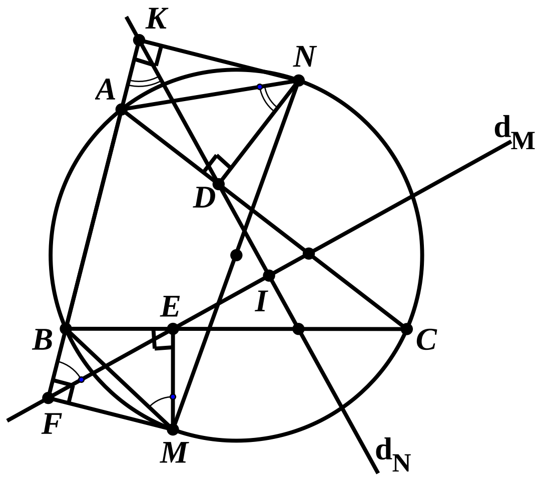
Do tứ giác BEMF nội tiếp

$\Rightarrow BFE = BME = 90^0 - MBE$

Ta có:

$$AKD + BFE = 180^0 - \left(NAD + MBE\right)$$

$$= 180^0 - \frac{1}{2}\text{sd NCM} = 90^0.$$



Như vậy $d_M \perp d_N$.

Nhận xét: Đảo lại bài toán 3.1 ta có bài toán sau:

Bài 3.2: Cho tam giác ABC nội tiếp (O), lấy điểm M trên cung BC không chứa điểm A, lấy điểm N trên cung AC không chứa điểm B sao cho $d_M \perp d_N$. Chứng minh rằng MN là đường kính của (O).

Lời giải:

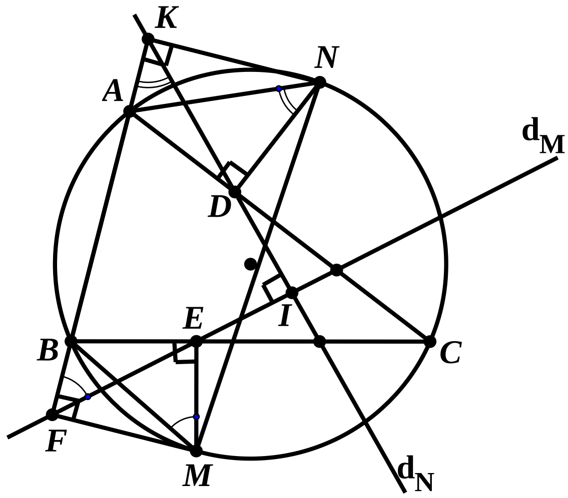
Do $d_M \perp d_N$ nên $IEK + EIK = 90^0$

$\Rightarrow ANF + BMK = 90^0$

$\Rightarrow \left(90^0 - NAC\right) + \left(90^0 - MBC\right) = 90^0$

$\Rightarrow NAC + MBC = 90^0$

$\Rightarrow \frac{1}{2}\text{sd } NC + \frac{1}{2}\text{sd } MC = 90^0$



$\Rightarrow \text{sd } NC + \text{sd } MC = 180^0 \Rightarrow$ MN là đường kính của (O).

Nhận xét: Phát triển bài 3.1 ta có bài toán sau:

Bài 3.3: Cho tam giác ABC vuông tại A nội tiếp (O). Lấy điểm M trên cung AC không chứa điểm B, kẻ đường kính MN. Gọi E, F là hình chiếu của điểm M trên AB, AC. Gọi điểm H, I lần lượt là hình chiếu của N trên AC, AB. Chứng minh $EH \perp IF$.

Lời giải:

Do MN là đường kính, áp dụng kết quả của bài tập 3.1 thì $d_M \perp d_N$.

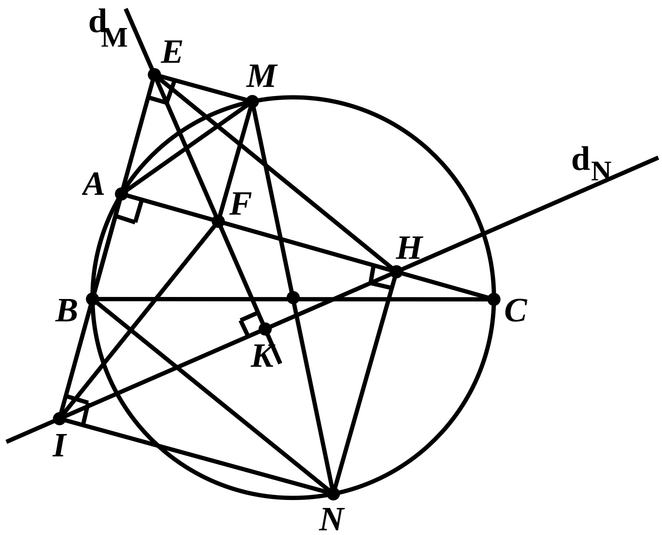
Suy ra $EKI = 90^0$

Xét tam giác EIH có

HA và EK là hai đường cao

suy ra F là trực tâm của ΔEHI

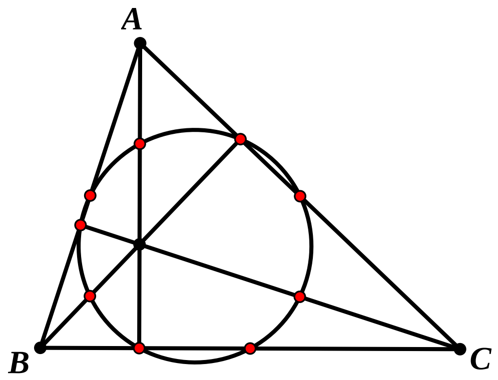
Vậy $EH \perp IF$.



Nhận xét: Dùng phần mềm Sketchpad ta dự đoán điểm I trong bài 3.1 là điểm nằm đường tròn Euler của tam giác ABC. Vì thế ta có bài toán sau:

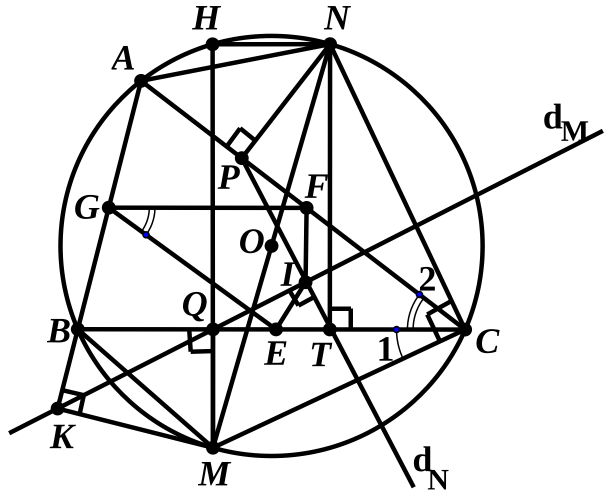
Bài 3.4: Cho tam giác ABC nội tiếp (O), lấy M thuộc cung BC không chứa điểm A, N là điểm trên cung AC không chứa điểm B sao cho MN là đường kính của (O). Gọi I là giao điểm của d_M và d_N. Chứng minh I nằm trên đường tròn Euler của tam giác ABC.

Ghi chú: Đường tròn Euler là đường tròn đi qua 9 điểm của tam giác: 3 chân đường cao, 3 trung điểm của ba cạnh, 3 trung điểm của đoạn nối ba đỉnh đến trực tâm.



Lời giải.

Gọi E, F, G lần lượt là trung điểm của BC, AC, AB.



Suy ra $FGE = C$ (1)

Theo bài 3.1 thì $QIT = 90^0$.

Gọi $MQ \cap (O) = \{H\}$.

Do MN là đường kính nên

$MHN = 90^0$, lại có $MQC = 90^0 \Rightarrow HN // BC$.

Suy ra BQ = TC và ET = EQ

$\Rightarrow QIE = IQE = BQK = BMK = 90^0 - KBM = 90^0 - C - C_1$.

Ta có $FIP = IPC = TNC = 90^0 - C - C_2$.

Suy ra $FIE = 90^0 + QIE + FIP = 90^0 + \left(90^0 - C - C_1\right) + \left(90^0 - C - C_2\right)$

$= 180^0 - C = 180^0 - FGE$ (do (1)) Suy ra tứ giác GFIE nội tiếp.

Vậy giao điểm I nằm trên đường thẳng Euler của tam giác ABC.

d) Các bài tập đề nghị :

Bài 1. Cho tứ giác ABCD nội tiếp đường tròn (O). Gọi d_A; d_B; d_C; d_D là 4 đường thẳng Simson của lần lượt A, B, C, D với tam giác chứa ba đỉnh còn lại.

Chứng minh rằng : d_A; d_B; d_C; d_D đồng quy.

Bài 2. Cho tứ giác ABCD nội tiếp (O). Gọi H là trực tâm của tam giác ABD và I là giao điểm của $d_A; d_B$. Chứng minh H, I, C thẳng hàng.

Bài 3. Cho tam giác ABC nội tiếp (O), lấy M là một điểm trên cung BC không chứa A. Vẽ lần lượt ba đường tròn (A, AM); (B, BM); (C, CM). Giả sử $(A) \cap (B) = \{P\}$, $(B) \cap (C) = \{Q\}$, $(C) \cap (A) = \{K\}$.Chứng minh P, Q, K thẳng hàng.

Bài 4. Cho tam giác ABC nội tiếp (O), lấy P là điểm trên cung BC nhỏ, Q là điểm trên cung AC nhỏ, R là điểm trên cung AB nhỏ. Ba đường thẳng $d_P; d_Q; d_R$ cắt nhau tại X, Y, Z. Chứng minh: ΔXYZ và ΔPQR đồng dạng.

Bài 5. Cho tam giác ABC nội tiếp (O), lấy điểm P thuộc cung nhỏ BC, gọi $d_P \cap AB = \{M\}$, $d_P \cap AC = \{N\}$, lấy D là điểm đối xứng với C qua N. Gọi K là giao điểm của BN với MD. Chứng minh : $d_P \perp PK$.

Bài 6. Cho tam giác ABC nội tiếp (O), lấy M là điểm trên cung BC không chứa điểm A. Gọi D, E, H thứ tự là hình chiếu vuông góc của M trên các cạnh BC, CA, AB. Chứng minh rằng $\frac{BC}{MD} = \frac{CA}{ME} + \frac{AB}{MH}$.

------------ Hết ------------