Vd2: C ={8, 15, 7,4}, D={2, 9,5,7}

R1:CxD; R1={(x,y)| x chia hết cho y}

- ⇨ R1={(8,2)(15,5)(7,7)(4,2)}

R2: CxD; R2={(x,y)| x + y>12}

- ⇨ R2 = {(8,9)(8,5)(8,7)(15,2)(15,9)(15,7)(15,5)(7,9)(7,7)}

  ~~R2~~ = {(8,2)(7,2)(7,5)(4,2)(4,5)(4,7)}

Vd3:

A={a,b,c,d}

R:AxA; R={(a,a),(a,b),(b,b),(b,d),(c,d),(d,a),(d,d)} = >không phản xạ vì (c,c) không thuộc R, không phi phản xạ, có tính phản xứng, không đối xứng

R1:AxA; R1={(a,a),(a,b),(c,c),(b,b),(b,d),(c,d),(d,a),(d,d)} = > có tính phản xạ, không phi phản xạ

R2:AxA; R2={(a,b),(b,d),(c,d),(d,a), (d,c),(d,d)} => có tính phi phản xạ, không đối xứng vì thiếu phần tử (b,a), không phản xứng vì (c,d) và (d,c) cùng thuộc R2

Vd4:

A={a,b,c,d}

R,R1:AxA; R={(a,a),(a,b),(b,b),(b,d),(c,d),(d,a),(d,d)} = R^1

R1={(b,c),(ca),(c,c),(d,a)}

R1°R = {(a,c)(b,c)(b,a)(c,a)(d,a)}

R°R1= {(b,d)(c,a)(c,b)(c,d)(d,a)(d,b)}

R^2 = R°R = {(a,a)(a,b)(a,d)(b,d)(b,a)(c,a)(c,d)(d,a)(d,b)(b,b)(d,d)}

$R^3 = R^2 \circ R$ => $M_{R^2 \circ R} = M_R \otimes M_{R^2} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

=>R^3 = {aa,ab,ad,ba,bb,bd,ca,cb,cd,da,db,dd}

$M_R = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $M_{R^2} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Vd5:

A={a,b,c,d}; R:AxA

R={(a,a),(a,b),(b,b),(b,a),(b,d),(c,d),(d,a),(d,d)}

R_{px} = R∪{(c,c)} là bao đóng phản xạ của R

$R_{đx}$ = R∪{(b,a),(d,b),(d,c),(a,d)}

R_{bc} = R∪{(a,d)(b,a)(c,a)(d,b)} => vẫn thiếu (c,b) => chưa bắc cầu

- ⇨ R_{bc} = R∪{(a,d)(b,a)(c,a)(d,b)(c,b)}

+ Thuật toán Đơn giản tìm bao đóng bắc cầu của quan hệ 2 ngôi R trên tập A, |A|=n:

B1: Tìm M_R
B2: Tìm M_R^2 , M_R^3 , …, M_R^n
B3: Tìm $M_{Rbc} = M_R \vee M_R^2 \vee M_R^3 \vee \ldots \vee M_R^n$

vd:

A={a,b,c,d}; R:AxA

R={(a,a),(a,b),(b,b),(b,d),(c,d),(d,a),(d,d)}

$$M_R = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad M_{R^2} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$M_{R^3} = M_{R^2 \circ R} = M_R \otimes M_{R^2} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$M_{R^4} = M_{R^3 \circ R} = M_R \otimes M_{R^3} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$M_{R_{bc}} = M_{R^1} \vee M_{R^2} \vee M_{R^3} \vee M_{R^4} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

=> R_{bc} = {aa,ab,ad,ba,bb,bd,ca,cb,cd,da,db,dd} vd:

- Tìm bao đóng bắc cầu của R sau bằng thuật toán Warshall:

A={a,b,c,d}; R:AxA

R={(a,a),(a,b),(b,b),(b,d),(c,d),(d,a),(d,d)}

- Bước 1: Tìm M_R => W_0

- Bước 2: Tìm W_k , k = 1,2,3…,n

    Tìm W_k từ W_{k-1} , k = 1,..,n theo quy tắc sau:

    - Giữ nguyên những phần tử đã bằng 1 trong W_{k-1}

- Giữ nguyên hàng k, cột k của W_{k-1}
- Xác định những phần tử w_{ij} còn lại bằng cách gióng vuông góc sang hàng k và cột k tương ứng được 2 giá trị x,y; sau đó tính $w_{ij} = x \wedge y$

- Bước 3: Return: Ma trận biểu diễn $M_{Rbc} = W_n$

$$M_R = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = W_0$$

k=1:

$$W_1 = (w_{ij})^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

k=2:

$$W_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

k=3:

$W_3 = W_2$

k=4:

$$W_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = M_{Rbc}$$

=> R_{bc} = {aa,ab,ad,ba,bb,bd,ca,cb,cd,da,db,dd}

3,56 và -5,56

R={(x,y)| x=a,b và y=c,b}

- Phản xạ: x = a,b có cùng phần thập phân là b với chính nó =>(x,x) thuộc R với mọi số thực x => R là phản xạ (1)

- Đối xứng: Nếu (x,y) thuộc R => x có phần thập phân giống y => y có phần thập giống x => (y,x) thuộc R => R đối xứng (2)

- Bắc cầu: Nếu (x,y) thuộc R và (y,z) thuộc R => x có cùng phần thập phân với y và y có cùng phần thập phân với z => x có cùng phần thập phân với z => (x,z) thuộc R => R là bắc cầu (3)

Từ 1,2,3 có R là quan hệ tương đương.

vd:

R1 :ZxZ; R1 = {(a,b)| a|b }

R1 có tương đương ko?

R1 không tương đương vì nó không có tính đối xứng, cụ thể:

Xét (x,y) thuộc R1 => x<y => y không thể nhỏ hơn x => (y,x) không thuộc R1 => R1 không đối xứng.

vd:

R2: ZxZ; R2 = {(x,y)| x = y (mod 3)} : quan hệ đồng dư theo modul 3

= {(1,4),(2,11),(3,3)…}

R2 có tương đương ko?

- đối xứng: Nếu (x,y) thuộc R2 => x chia cho 3 có phần dư giống phần dư của y chia cho 3 => y chia 3 có phần dư giống phần dư của x chia cho 3 => (y,x) thuộc R2 => R2 đối xứng

- phản xạ: với mọi số nguyên x , x chia 3 có phần dư bằng phần dư của chính nó chia cho 3, => (x,x) thuộc R2 => R2 phản xạ

- bắc cầu: Nếu x chia cho 3 có phần dư giống y chia cho 3 và y chia cho 3 có phần dư giống z chia cho 3 => x chia cho 3 có phần dư giống z chia cho 3 => R2 bắc cầu

=> R2 là quan hệ tương đương

vd:

A= {-12,-11,…,11,12}

R2: AxA; R2 = {(x,y)| x = y (mod 3)} : quan hệ đồng dư theo modul 3

R2 là quan hệ tương đương

$[8]_{R2}$ = {x | (8,x) thuộc R2 ⇔x %3 = 2 }={ -10, -7, -4, -1, 2, 5, 8, 11}= A1

= $[2]_{R2}$ = $[5]_{R2}$

p = 3.q + r (r =0,1,2)

-1 = 3(-1) +2

$[4]_{R2}$ = {x| x%3=1 } = {10,7,4,1,-2,-5,-8,-11} = $[7]_{R2}$ = $[-8]_{R2}$ =… = A2

$[3]_{R2}$ = {-12,-9,-6,-3,0,3,6,9,12} = A3

=> A1 ∪A2 ∪ A3 =A (1)

và A1, A2, A3 rời nhau (giao nhau từng đôi một bằng rỗng) (2)

A1, A2, A3 khác tập rỗng (3)

Từ 1,2,3 => {A1,A2,A3} là 1 phân hoạch của tập A

A= {-12,-11,…,11,12}

Xét R3 = {(x,y)| x và y có cùng giá trị tuyệt đối}

A1={12,-12}

A2={11, -11}

A3 = {10,-10}

A4 = {-9,9}

A5 ={-8,8}

A6 = {-7,7}

…

A12 = {1,-1}

A13 ={0}

- Quan hệ thứ tự bộ phận:

vd1: R:$Z^+ \times Z^+$

R = {(x,y) | x|y (x là ước của y)}

R là quan hệ thứ tự vì:

- phản xạ: một số nguyên x là ước của chính nó => R phản xạ (1)
- phản đối xứng: với x khác y, nếu x là ước của y thì y không là của x => R phản đối xứng (2)
- bắc cầu: Nếu x là ước của y và y là ước của z thì x là ước của z => R bắc cầu (3)

Từ 1,2,3 có R là quan hệ thứ tự bộ phân.

vd2: S = {p | p là một tập hợp các phần tử}

R1: S×S p={1,2,3} ; q={1,2,3,4} =>(p,q) thuộc R1 vì p $\subseteq$ q nhưng (q,p) không thuộc R1 vì q không là con của p => R1 không đối xứng

R1 = {(p,q)| p $\subseteq$ q}

R1 có là quan hệ thứ tự ko?

R1 là quan hệ thứ tự vì:

- phản xạ: Một tập p luôn là tập con của chính nó => R1 phản xạ (1)

- phản đối xứng: Nếu p khác q và p là tập con của q thì q không là con của p => R1 phản đối xứng (2)

- bắc cầu: Nếu p là con của q và q là con của z thì p cũng là con của z => R1 bắc cầu (3)

Từ 1,2,3 có R1 là quan hệ thứ tự.

- Dàn đầy đủ:

vd1: A = {1,2,3,…,10}

R={(x,y) | x <=y}

Tập (A, <=) có là dàn đầy đủ không?

- Quan hệ "<=" là quan hệ thứ tự bộ phân trên A

Với 2 phần tử bất kỳ x,y thuộc A ta phải tìm ra:

- Cận trên nhỏ nhất của x,y là c= max(x,y) và có thuộc A

- Cận dưới lớn nhất của x,y là d=min(x,y) và có thuộc A

=> (A, <=) là dàn đầy đủ

(3,8) => cận dưới lớn nhất là 3 = min(3,8)

cận trên nhỏ nhất là 8 = max(3,8)

(2,4) => cận trên nhỏ nhất là 4 = max(2,4)

cận dưới lớn nhất là 2 = min(2,4)

vd2: A = {1,2,3,…,10}

R2: AxA; R2 = {(x,y) | x|y}

(A, R2) có là dàn đầy đủ ko?

- Quan hệ R2 là một quan hệ thứ tự (đã cm)
- Với 2 phần tử bất kỳ x,y thuộc A ta phải tìm ra:
  + Cận trên nhỏ nhất của x,y là c= ? và có thuộc A ?
  + Cận dưới lớn nhất của x,y là d=? và có thuộc A ?

Xét: x=2,y=7 => cận trên nhỏ nhất là 14 => không thuộc A (1)

cận dưới lớn nhất là 1 => có thuộc A (2)

Từ 1,2 => (A,R2) không là dàn đầy đủ do 14 không thuộc A

(Z^+, R2) có là dàn đầy đủ vì :

- R2 là quan hệ thứ tự trên Z^+
- Với 2 phần tử bất kỳ x,y thuộc Z^+ luôn có:
  + cận dưới lớn nhất là c = UCLN (x,y) và c thuộc Z^+
  + cận trên nhỏ nhất là d = BCNN(x,) và d thuộc Z^+

=> (Z^+, R2) là dàn đầy đủ.

vd3: S ={p | p là một tập hợp}

R3:SxS;   R3 = {(p,q)| p $\subseteq$ q}

(S,R3) có là dàn đầy đủ ko?

- R3 là quan hệ thứ tự

- Với 2 phần tử p,q bất kỳ thuộc S:

  + cận dưới lớn nhất là c = tập lớn nhất mà là con của cả p và q= p∩q và c thuộc S

  + cận trên nhỏ nhất là z = tập nhỏ nhất mà chứa cả p và q = p∪q và z thuộc S

=> là dàn đầy đủ.