

PHƯƠNG PHÁP ĐẾM

VD: Có bao nhiêu mật khẩu gồm 6 chữ hoặc số?

62	62				
----	----	--	--	--	--

$A = \{26 \text{ chữ cái thường}, 26 \text{ chữ cái hoa}, 10 \text{ chữ số}\} = 62$
phần tử

Nhiệm vụ tạo 1 mật khẩu độ dài 6 từ các phần tử thuộc tập A được thực hiện bằng cách thực hiện lần lượt **tất cả** 6 nhiệm vụ sau:

Nv1: tạo ra phần tử ở vị trí thứ 1 của MK \Rightarrow 62 cách

Nv2: tạo ra phần tử ở vị trí thứ 2 của MK \Rightarrow 62 cách

...

Nv6: tạo ra phần tử ở vị trí thứ 6 của MK \Rightarrow 62 cách

6 nhiệm vụ trên là độc lập với nhau

Vậy theo nguyên lý nhân ta có: số cách thực hiện nhiệm vụ tạo ra mật khẩu thoả mãn đề bài là :

$$\text{scNV1} \cdot \text{scNV2} \cdot \text{scNV3} \dots \text{scNV6} = 62^6$$

Bài toán 1: Có bao nhiêu xâu bit có độ dài ≥ 5 và ≤ 9

Bt 2: Có bao nhiêu xâu tam phân (được tạo bởi các phần tử 0,1,2) độ dài 12 hoặc có 2 phần tử đầu là 01 hoặc có 3 phần tử cuối là 221?

									2	2	1
--	--	--	--	--	--	--	--	--	---	---	---

Lực lượng của tập $|A| = |\{0,1,2\}| = 3$ phần tử

Nhiệm vụ tạo ra 1 xâu tam phân thoả mãn đề bài là : thực hiện hoặc NV1 hoặc NV2 sau:

-NV1: tạo xâu tam phân độ dài 12 mà có 2 phần tử đầu là 01 $\Rightarrow 3^{10}$

- NV2: tạo xâu tam phân độ dài 12 mà có 3 phần tử cuối là 221 $\Rightarrow 3^9$

Khi thực hiện NV1 hoặc NV2 sẽ tạo ra đồng thời loại xâu tam phân sau:

0	1								2	2	1
---	---	--	--	--	--	--	--	--	---	---	---

tức là xâu tam phân có 2 phần tử đầu là 01 và có 3 phần tử cuối là 221 $\Rightarrow 3^7$

Theo nguyên lý bù trừ, số xâu tam phân TMĐB là:

$$\begin{aligned} & \text{scNV1} + \text{scNV2} - \text{scNVĐT} \\ & = 3^{10} + 3^9 - 3^7 \end{aligned}$$

Định nghĩa : Hàm trần của số thực x , ký hiệu $\lceil x \rceil$, là số nguyên nhỏ nhất mà lớn hơn hoặc bằng x .

vd: $\lceil 3,7 \rceil = 4$

Hàm nền (sàn) của số thực x , ký hiệu $\lfloor x \rfloor$, là số nguyên lớn nhất mà vẫn nhỏ hơn hoặc bằng x .

vd: $\lfloor 5,4 \rfloor = 5$

Bt3: Cần tuyển ít nhất bao nhiêu sinh viên vào 1 lớp để đảm bảo có ít nhất 5 bạn cùng quê với nhau, biết số tỉnh thành của VN là 64?

Gọi x là số sv cần tuyển. Theo nguyên lý Dirichlet có x là số nguyên nhỏ nhất đảm bảo:

$$\lceil x / 64 \rceil = 5$$

$$\Rightarrow x = 4 \cdot 64 + 1 = 257 \text{ sv}$$

Số chỉnh hợp chập r của n là bao nhiêu?

Để tạo ra 1 chỉnh hợp chập r của **n** thì ta phải thực hiện n việc:

NV1: tạo ra phần tử thứ 1 của chỉnh hợp $\Rightarrow n$

NV2: tạo ra phần tử thứ 2 của chỉnh hợp $\Rightarrow n-1$

...

NVn: tạo ra phần tử thứ n của chỉnh hợp $\Rightarrow n-r+1$

Theo NLN, có số chỉnh hợp chập r của n là:

$$\begin{aligned} \text{scNV1}.\text{scNV2}....\text{scNVn} &= n(n-1)(n-2)...(n-r+1) \\ &= n!/(n-r)! \end{aligned}$$

1 hoán vị của tập n phần tử chính là 1 chỉnh hợp chập n của n

Số HV của n là $P(n,n) = n!$

TỔ HỢP LẶP

1, Chỉnh hợp lặp:

ĐN: Một chỉnh hợp lặp chập r của n là một cách lấy có thứ tự r phần tử từ tập có n loại phần tử trong đó mỗi loại phần tử có $\geq r$ phần tử và **cho phép lặp phần tử khi lấy**.

Số chỉnh hợp lặp chập r của n là: n^r

vd: Có thể xây dựng được bao nhiêu **hàm** từ tập A vào tập B biết $|A|=5$ và $|B|=8$?

Định nghĩa: Hàm f , ký hiệu $f:A \rightarrow B$ là một quy tắc ứng với mỗi phần tử của A cho ta 1 phần tử duy nhất của B

Hàm số: $f(x): \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

vd: Có thể xây dựng được bao nhiêu **hàm** từ tập A vào tập B biết $|A|=5$ và $|B|=8$?

Để xây dựng 1 hàm $f: A \rightarrow B$ thực hiện lần lượt cả 5 việc sau:

NV1: tìm ảnh cho phần tử thứ 1 của tập A $\Rightarrow 8$

NV2: tìm ảnh cho phần tử thứ 2 của tập A $\Rightarrow 8$

NV3: tìm ảnh cho phần tử thứ 3 của tập A $\Rightarrow 8$

NV4: tìm ảnh cho phần tử thứ 4 của tập A $\Rightarrow 8$

NV5: tìm ảnh cho phần tử thứ 5 của tập A $\Rightarrow 8$

Theo NLN, có số hàm f là:

$$NV1.NV2.NV3.NV4.NV5 = 8^5$$

$$A = \{a,b,c,d,e\} \quad B = \{1,2,3,4,5,6,7,8\}$$

$$f: A \rightarrow B$$

$$a,b,c,d,e \Rightarrow (1,2,5,5,5) : f1$$

$\Rightarrow (2,1,5,5,5) :f3$

$\Rightarrow (3,3,3,3,3) :f2$

	1\$	2\$	5\$	10\$	20\$	50\$	100\$	
1	2			1		1	1	{ 1,1,10,50,100} ={ 1,10,50,1,100}
2							5	{ 100,100,100,100,100}
3		1	2		2			{ 2,5,5,20,20}
4				4		1		
...								

	1\$	2\$	5\$	10\$	20\$	50\$	100\$	
1	**			*		*	*	{ 1,1,10,50,100} ={ 1,10,50,1,100}
2							*****	{ 100,100,100,100,100}
3		*	**		**			{ 2,5,5,20,20}
4				*****		*		
...								

1, **|||*||*|*

2, |||||*****

3, |*|**||**||

4, |||*****||*|

5, |**||***||| : 2 tờ 2\$ và 3 tờ 10\$

=> Có bao nhiêu xâu khác nhau độ dài 11 chứa 5 ngôi sao và 6 thanh đứng? => có **$C(11,5)$**

Vậy số cách lấy 5 tờ tiền từ thùng có 7 loại tiền khác nhau (mỗi loại có ≥ 5 tờ) là $C(11,5) = C(7-1+5,5)$

mà Số cách chọn 5 tờ giấy bạc = số tổ hợp lặp chập 5 của 7

Số tổ hợp lặp chập 5 của 7 = $C(7-1+5,5)$

Số tổ hợp lặp chập r của n = $C(n-1+r,r)$

Nhiệm vụ A: tạo ra 1 xâu độ dài 11 chứa 5 ngôi sao và 6 thanh đứng.

Để thực hiện nhiệm vụ A phải thực hiện lần lượt 2 nhiệm vụ sau:

NV1: xếp đồng thời 5 ngôi sao vào 11 vị trí $\Rightarrow C(11,5)$

NV2: xếp đồng thời 6 thanh đứng vào 6 vị trí còn lại $\Rightarrow 1$ cách

Theo NLN có số cách thực hiện nhiệm vụ A là:

$$sc_{NV1}.sc_{NV2} = C(11,5)$$

$S = \{\text{có 7 loại phần tử}\} = \{1,2,5,10,20,50,100\}$

mỗi loại phần tử có ≥ 5 phần tử

Chọn ra 5 tờ giấy bạc = chọn ra 5 phần tử từ tập S thứ tự không quan trọng cho phép lặp = chọn đồng thời 5 phần tử từ tập S cho phép lặp

\Rightarrow Một nhiệm vụ chọn ra 5 tờ giấy bạc là một tổ hợp lặp chập 5 của 7

\Rightarrow Số cách chọn 5 tờ giấy bạc là số cách thực hiện nhiệm vụ = **số tổ hợp lặp chập 5 của 7**

Định nghĩa : Một tổ hợp lặp chập r của n là một cách chọn đồng thời r phần tử từ tập có n loại phần tử khác nhau và

cho phép lặp khi chọn, trong đó mỗi loại phần tử có $\geq r$ phần tử

Số tổ hợp lặp chập r của $n = C(n-1+r, r)$

Bài tập ví dụ:

Phương trình sau có bao nhiêu nghiệm nguyên không âm?

$$x + y + z + t = 25 \quad (*)$$

(0,1,5,19)

(25,0,0,0)

(1,1,1,22)...

Có 1 hộp đựng 4 loại bóng bay (đỏ, xanh, vàng, tím), mỗi loại có ≥ 25 quả bóng. Có bao nhiêu cách lấy ra từ hộp đó 25 quả bóng bay?

Trong mỗi cách lấy 25 quả bóng bay ra khỏi hộp

gọi x là số bóng đỏ

y là số bóng xanh

z là số bóng vàng

t là số bóng tím

$$\Rightarrow x + y + z + t = 25$$

Một cách lấy 25 quả bóng là 1 bộ nghiệm của phương trình (*)

Số cách lấy 25 quả bóng từ hộp có 4 loại bóng khác nhau cho phép lặp là số nghiệm nguyên không âm của phương trình (*) (1)

mà Số cách lấy 25 quả bóng từ hộp có 4 loại bóng khác nhau cho phép lặp = số tổ hợp lặp chập 25 của 4 (2)

Từ (1) và (2) có số nghiệm nguyên ko âm của phương trình (*) là số tổ hợp lặp chập 25 của 4 = $C(n-1+r,r)$

$n = 4$ (số loại phần tử khác nhau), $r = 25$ (số phần tử lấy ra)

$$\Rightarrow C(4-1+25,25) = C(28,25) = C(28,3) = 28!/(3!25!)=$$

NV1: chọn ra đồng thời 4 vị trí từ 11 vị trí để xếp 4 chữ S
 $\Rightarrow C(11,4)$

NV2: chọn ra đồng thời 4 vị trí từ 7 vị trí để xếp 4 chữ I

$$\Rightarrow C(7,4)$$

NV3: chọn ra đồng thời 2 vị trí từ 3 vị trí để xếp 2 chữ P

$$\Rightarrow C(3,2)$$

NV4: chọn ra đồng thời 1 vị trí từ 1 vị trí để xếp 1 chữ M

$$\Rightarrow 1$$

Số xâu thoả mãn đề bài là

$$NV1.NV2.NV3.NV4 = C(11,4).C(7,4) .C(3,2)$$

Hệ thức truy hồi

Ví dụ: Có bao nhiêu xâu nhị phân độ dài 12 không chứa 2 số 0 liên kề nhau?

Giải

Gọi a_n là số xâu nhị phân độ dài n tmđb

\Rightarrow Có dãy số $(a_n) = (a_0, a_1, a_2, \dots, a_{12}, \dots, a_{n-1}, a_n, \dots)$

Xâu độ dài n tmđb : hoặc có dạng A hoặc có dạng B sau

A: xâu nhị phân độ dài n tmđb có số 0 ở cuối cùng

		...		1	0
--	--	-----	--	---	---

Để tạo xâu A, phải thực hiện NV1 và NV2 sau:

NV1: tạo xâu độ dài $n-2$ không có 2 số 0 kề nhau : a_{n-2}

NV2: tạo 2 phần tử cuối của xâu là 10 : 1 cách

=> Theo NLN, số xâu $A = NV1.NV2 = a_{n-2}$

B: xâu nhị phân độ dài n tmđb có số 1 ở cuối cùng

		...			1
--	--	-----	--	--	---

Để tạo xâu B thì phải thực hiện NV1' và NV2' sau:

NV1': tạo xâu nhị phân độ dài $n-1$ tmđb : a_{n-1}

NV2': tạo phần tử cuối của xâu là số 1 : 1 cách

Theo NLN có số xâu $B = NV1'.NV2' = a_{n-1}$

Theo NLC thì số xâu nhị phân độ dài n tmđb là:

$$a_n = \text{số xâu A} + \text{số xâu B}$$

$$\mathbf{a_n = a_{n-2} + a_{n-1} , n \geq 2}$$

$$\mathbf{a_{12} = ?}$$

$$\mathbf{a_0 = 1}$$

$$\mathbf{a_1 = \text{số nhị phân độ dài 1 không chứa 2 số 0 kề nhau} = 2}$$

$$\{0,1\}$$

$a_2 =$ số xâu nhị độ dài 2 không chứa 2 số 0 kề nhau $= 3$

$\{01, 10, 11\}$

$(1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, \dots)$

$a_{12} = 377$

111111111101

010111111111

Hệ thức truy hồi của dãy số Fibonacci

$a_n = a_{n-1} + a_{n-2}, n \geq 2 (n_0)$

với điều kiện đầu $a_0 = a_1 = 1$

$\Rightarrow A = (1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \dots)$ là dãy số Fibonacci được gọi là 1 lời giải của HTTH Fibonacci

$B = (2, 4, 6, 10, 16, 26, \dots)$ cũng thoả mãn HTTH Fibonacci nên B cũng được gọi là 1 lời giải của HTTH Fibonacci

$$\{3,5,7,1\}=\{5,1,3,7\}=\{5,5,1,3,3,7\}$$

$$(3,5,7,1) \neq (5,1,3,7) \neq (5,5,1,3,3,7)$$

$$(a_n) = (a_0, a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n, \dots)$$

$$a_n = 2.a_{n-1} - a_{n-2} \quad (n \geq 2) \quad (*)$$

$$1, a_n = 3n = (0, 3, 6, 9, 12, \dots)$$

$$\Rightarrow a_{n-1} = 3.(n-1)$$

$$a_{n-2} = 3.(n-2)$$

$$\text{Xét } 2.a_{n-1} - a_{n-2} = 2.3.(n-1) - 3.(n-2) = 3n = a_n$$

$$\Rightarrow \text{Dãy } a_n = 3n \text{ tm } (*) \Rightarrow \text{là nghiệm của } (*)$$

Số tiền ban đầu là $M_0 = 1\text{tr}$, lãi suất gửi tiết kiệm mỗi tháng là 8%, hỏi sau 24 tháng thì số tiền thu được là bao nhiêu (biết ko rút lãi định kỳ)

$$\text{Tháng 1: } M_1 = M_0 + P\%.M_0$$

$$\text{Tháng 2: } M_2 = M_1 + P\%.M_1$$

...

Tháng 5: $M_5 = M_4 + P\%.M_4$

=> Tổng quát Tháng n: $M_n = M_{n-1} + P\%.M_{n-1} ()$**

$M_{24} = ?$

Gọi M_n là số tiền thu được sau n tháng

=> $(M_n) = (M_0, M_1, M_2, M_3, \dots, M_{24}, \dots, M_n, \dots)$

Tìm nghiệm tổng quát của HTTH (**): $M_n = f(n) = r^n M_0$

Ví dụ 2: Có bao nhiêu xâu ngũ phân $\{0,1,2,3,4\}$ độ dài 10 chứa số lẻ lần số 4?

1234213000, 4441111111...

Gọi số xâu ngũ phân độ dài n chứa số lẻ lần số 4 là b_n

=> $(b_n) = (b_0, b_1, b_2, \dots, b_{10}, \dots, b_{n-1}, b_n, \dots)$

Để tạo 1 xâu ngũ phân độ dài n thoả mãn đề bài ta phải thực hiện hoặc NV1, hoặc NV2 sau:

NV1: tạo xâu ngũ phân độ dài n chứa số lẻ lần số 4 mà kết thúc bởi số 4

		...			4
--	--	-----	--	--	---

Để thực hiện NV1, ta phải thực hiện lần lượt cả 2 nhiệm vụ sau:

NV1.1: tạo xâu ngũ phân độ dài $n-1$ chứa số chẵn lần số 4

mà số xâu ngũ phân độ dài $n-1$ chứa số chẵn lần số 4 =
số xâu ngũ phân độ dài $n-1$ bất kỳ - số xâu ngũ phân độ
dài $n-1$ chứa số lẻ lần số 4 = $5^{n-1} - b_{n-1}$

NV1.2: thêm phần tử cuối là 4 vào xâu cần tạo

=> theo NL nhân có số xâu của NV1 = NV1.1 * NV1.2
= NV1.1 = $5^{n-1} - b_{n-1}$ (1)

NV2: tạo xâu ngũ phân độ dài n chứa số lẻ lần số 4 mà kết thúc bởi số $a \neq 4$

		...			$a \neq 4$
--	--	-----	--	--	------------

{0,1,2,3}

Để thực hiện NV2 ta phải thực hiện lần lượt cả 2 NV sau:

NV2.1: tạo xâu ngũ phân độ dài $n-1$ chứa số lẻ lần số 4 :
 b_{n-1}

NV2.2: thêm số $a \neq 4$ vào cuối xâu : 4

=> theo NL nhân có số xâu ngũ phân tạo được từ NV2

$$= NV2.1 * NV2.2$$

$$= 4b_{n-1} \quad (2)$$

=> Theo NL cộng số xâu ngũ phân độ dài n tmđb = NV1
+NV2 (3)

Từ (1),(2),(3) có số xâu ngũ phân độ dài n chứa số lẻ lần số 4 là

$$b_n = 5^{n-1} - b_{n-1} + 4b_{n-1}$$

$$b_n = 5^{n-1} + 3b_{n-1} \quad n \geq 1$$

=> cần tìm b_{10}

b_0 = số xâu ngũ phân độ dài 0 chứa số lẻ lần số 4 = 0

b_1 = số xâu ngũ phân độ dài 1 chứa số lẻ lần số 4 = 1

$$\Rightarrow b_2 = 5^1 + 3b_1 = 5 + 3 = 8$$

b_2 = số xâu ngũ phân độ dài 2 chứa số lẻ lần số 4 = 8

$$\Rightarrow b_3 = 5^{2+} + 3b_2 = 25 + 24 = 49$$

$$\Rightarrow b_{10} =$$

Hệ thức truy hồi tuyến tính hệ số hằng số bậc k:

bậc 2: $a_n = 4a_{n-2}, n \geq 2$

bậc 3: $b_n = 5b_2 - 6b_{n-3}, n \geq 3$

Một số loại HTTH không tuyến tính:

$$c_n = 5(c_{n-1})^3$$

$$r^3 - c_1 r^2 - c_2 r - c_3 = 0$$

$$r^3 - 6r^2 + 11r - 6 = 0 \Rightarrow r = 1, 2, 3$$

Nghiệm tổng quát của HTTH có dạng:

$$a_n = \alpha_1 + \alpha_2 2^n + \alpha_3 3^n$$