

Univerza v Ljubljani  
Fakulteta za matematiko in fiziko

Finančni praktikum

**Algoritem za reševanje dvostopenjskega  
problema nahrbtnika z dinamičnim  
programiranjem**

Jakob Zarnik, Tin Markon

Mentorja: prof. dr. Sergia Cabello Justo, asist. dr. Janoš Vidali

Ljubljana, 2020

## **Kazalo**

<b>1</b>	<b>Uvod</b>	<b>3</b>
<b>2</b>	<b>Formulacija in lastnosti problema</b>	<b>3</b>
<b>3</b>	<b>Nadaljne delo</b>	<b>5</b>
	<b>Literatura</b>	<b>6</b>

**Povzetek**

V nalogi bova obravnavala reševanje dvostopenjskega problema nahrbtnika z dinamičnim programiranjem. Za izdelavo algoritma bova uporabila programski jezik Python.

## 1 Uvod

Dvostopenjski programi omogočajo modeliranje situacij, kjer glavni odločevalec, v nadaljevanju poimenovan investitor, optimizira svoja sredstva s tem, da neposredno upošteva odziv posrednika na njegovo odločitev o višini vložka. V primeru dvostopenjskega problema nahrbtnika (Bilevel Knapsack Problem), v nadaljevanju BKP, investitor določi prostornino nahrbtnika z namenom maksimizacije dobička, med tem ko se posrednik sooča z 0-1 problemom nahrbtnika s prostornino določeno s strani investitorja. BKP je ustrezen za modeliranje problema »ustreznega financiranja«, kjer posameznik (tj. investitor), svoja sredstva razdeli med netvegano naložbo s fiksnim donosom (npr. varčevalni račun, državna obveznica) in bolj tvegano naložbo, preko posrednika kot je banka ali bančni posrednik (broker). Ta kupi delnice ali obveznice z namenom maksimizacije svojega dobička s tem, da upošteva omejitve finančnih sredstev (prostornina nahrbtnika) investitorja in ustvari donos z ustrezno izbiro investicij. Podobno uporabo modeliranja lahko opazimo na področju upravljanja s proizvodi, kjer se podjetje odloča koliko enot izdelkov naj prodaja samo in koliko preko posrednika.

BKP je mešan celoštevilski dvostopenjski problem predstavljen s strani Dempe in Richter, ki sta za rešitev predstavila "branch-and-bound" okvir (tj. rezveji in omeji). V najini nalogi najprej razširiva potrebne in zadostne pogoje za obstoj optimalne rešitve. Nato predlagava enostaven in učinkovit algoritem dinamičnega programiranja za reševanje problema. V nasprotju s pristopom Dempe in Richter, kjer je beležen seznam nedominantnih rešitev, tukaj beležimo samo objektivne funkcijske vrednosti za oba, investitorja in posrednika, tekom dinamičnega procesa.

## 2 Formulacija in lastnosti problema

V nahrbtnik s prostornino oz kapaciteto  $y$ , ki jo določi investitor, vsakemu predmetu  $j$  določimo utež oz. volumen  $a_j$ , zaslužek posrednika  $c_j$  in zaslužek investitorja  $d_j$ . Ceno enote prostornine nahrbtnika označimo s  $t$ . Z danim  $y$ , posrednik izbere podmnožico predmetov, ki upošteva prostorsko omejitev. To nam da dvostopenjski program

$$\text{BKP} = \begin{cases} \text{Max}_{y,x} f^1(y, x) = dx + ty \\ \text{s.t. } \underline{b} \leq y \leq \bar{b} \\ \text{Max}_x f^2(x) = cx \\ \text{s.t. } ax \leq y \text{ and } x \in \{0, 1\}^n \end{cases}$$

kjer so  $a$ ,  $c$  in  $d$  celoštevilске vrednosti in  $a$ ,  $c$ ,  $d$ ,  $\underline{b}$  in  $\bar{b}$  nenegativne. V najini nalogi so z

$$S = \{(x, y) \in \{0, 1\}^n \times [\underline{b}, \bar{b}] : ax \leq y\}$$

označene omejitve, s

$$P(y) = \{x \in \text{Arg max}\{cx' : ax' \leq y, x' \in \{0, 1\}^n\}\}$$

označimo posrednikovo racionalno izbiro množice (za fiksen  $y$ ) in z

$$IR = \{(x, y) | (x, y) \in S, x \in P(y)\}$$

induktiven del, preko katerega investitor optimizira svojo funkcijo.

Dvostopenjski program obstaja v dveh različicah. Optimističen primer, ko je racionalna množica ni singleton (enolična), posrednik izbere tisto rešitev, ki maksimizira zaslužek investitorja. Dobljena rešitev se imenuje močna rešitev. V pesimističnem primeru pa investitor predvideva, da kadar ima posrednik več možnosti izbire množice, izbere tisto, ki minimizira investitorjev zaslužek. Tako dobimo šibko rešitev.

**Trditev 1** (Dempe in Richter). *Če je cena enote prostornine (enota  $t$ ) nepozitivna, potem obstaja optimalna rešitev BKP.*

Naslednja trditev poveže ceno prostornine z investitorjevim razmerjem med zaslužkom in utežjo predmeta.

**Trditev 2.** *Naj bo  $\underline{b} = 0$  in  $t < 0$ . Če je  $|t| > \max_{1 \leq j \leq n} (\frac{d_j}{a_j})$ , potem je  $(y^*, x^*) = (0, 0_n)$  optimalna rešitev.*

*Dokaz.* Naj bo  $(x, y)$  možna rešitev za dan BKP. Najprej z razširitvijo pogoja  $ax \leq y$  s  $t$  ( $t < 0$ ) dobimo  $(ta + d)x \geq ty + dx = f^1(y, x)$ . Nato, ker je  $ta_j + d_j < 0$  za  $j = 1, \dots, n$  in  $x \in \{0, 1\}^n$ , sledi, da je  $(ta + d)x \leq 0$ , torej  $f^1(y, x) \leq 0$ . Vidimo, da ker je  $(y^*, x^*) = (0, 0_n)$  možna rešitev danega BKP, v katerem je  $f^1(y, x) = 0$ , je ta rešitev tudi optimalna.  $\square$

Če je  $\infty > \bar{b} \geq \sum_{i=1}^n a_i$  in  $t > 0$ , potem je optimalna rešitev trivialna:  $x^* = (1, \dots, 1)$  in  $y^* = \bar{b}$ . Če sta  $d$  in  $c$  kolinearna ( $d = \alpha c$ , kjer  $\alpha > 0$ ) in  $t \geq 0$ , potem je reševanje BKP enako reševanju problema nahrbtnika s kapaciteto  $\bar{b}$  za posrednika.

**Definicija 1.** *Diskreten dvostopenjski problem nahrbtnika (BKPD) je dvostopenjski problem nahrbtnika v katerem je spremenljivka, ki jo določi investitor diskretna.*

**Trditev 3.** *Če je  $t \leq 0$ , potem je vsaka optimalna rešitev  $(y^*, x^*)$  za BKPD, tudi optimalna rešitev za BKP.*

*Če je  $t > 0$  in če optimalna rešitev za BKP obstaja, potem je optimalna tudi za BKPD.*

*Dokaz.*  $t \leq 0$ : Iz **Trditve 1** sledi, da optimalna rešitev  $(y^*, x^*)$  obstaja. Dodatno,  $\text{IR}(\text{BKPd}) \subset \text{IR}(\text{BKP})$  in iz Dempe in Richtera sledi, da je  $y^*$  celo število.

$t > 0$ : Direktno iz (ii) v Dempe in Richtera.  $\square$

Iz **Trditve 3** sledi, da je reševanje BKP ekvivalentno reševanju BKPd, ko je  $t$  negativen. Če je  $t$  pozitiven in optimalna rešitev obstaja (glej Izrek 4 v Dempe in Richtera), je ta dosežena v točki  $(\bar{b}, x^*)$ , kjer je  $x^* \in P(\bar{b})$ . Pomni, da optimalna rešitev BKPd vedno obstaja. Torej, če BKP ima optimalno rešitev, to lako dobimo z reševanjem zaporedja problemov nahrbtnika, ki vsebuje binarne spremenljivke, eno za vsako možno vrednost  $y$ . Algoritem, opisan v naslednjem poglavju, uporabi to lastnost.

### 3 Nadaljne delo

V nadaljevanju bova s programskim jezikom Python napisala program, ki s pomočjo dinamičnega programiranja izračuna optimalno rešitev  $(y^*, x^*)$  glede na naključno generirane podatke. S pomočjo primerov iz dokumenta bova preverila tudi da program deluje pravilno.

## Literatura

- [1] L. Brotcorne, S. Hanafi, R. Mansi (2009). *A dynamic programming algorithm for the bilevel knapsack problem* Elsevier: Operations Research Letters 37, 215–218.
- [2] S. Dempe, K. Richter (2000). *Bilevel programming with Knapsack constraint* European Newspaper of Operations Research 8, 93–107.