

Univerza v Ljubljani
Fakulteta za matematiko in fiziko

Finančni praktikum

**Algoritem za reševanje dvostopenjskega
problema nahrbtnika z dinamičnim
programiranjem**

Jakob Zarnik, Tin Markon

Mentorja: prof. dr. Sergia Cabello Justo, asist. dr. Janoš Vidali

Ljubljana, 2020

Kazalo

1	Uvod	3
2	Formulacija in lastnosti problema	3
3	Načrt za nadalnje delo	5
	Literatura	6

Povzetek

V nalogi bova obravnavala reševanje dvostopenjskega problema nahrbtnika z dinamičnim programiranjem. Za izdelavo algoritma bova uporabila programski jezik Python.

1 Uvod

Dvostopenjski programi omogočajo modeliranje situacij, kjer glavni odločevalec, v nadaljevanju poimenovan investitor, optimizira svoja sredstva s tem, da neposredno upošteva odziv posrednika na njegovo odločitev o višini vložka. V primeru dvostopenjskega problema nahrbtnika (Bilevel Knapsack Problem), v nadaljevanju BKP, investitor določi prostornino nahrbtnika z namenom maksimizacije dobička, med tem ko se posrednik sooča z 0-1 problemom nahrbtnika s prostornino določeno s strani investitorja. BKP je ustrezen za modeliranje problema »ustreznega financiranja«, kjer posameznik (tj. investitor), svoja sredstva razdeli med netvegano naložbo s fiksnim donosom (npr. varčevalni račun, državna obveznica) in bolj tvegano naložbo, preko posrednika kot je banka ali bančni posrednik (broker). Ta kupi delnice ali obveznice z namenom maksimizacije svojega dobička s tem, da upošteva omejitve finančnih sredstev (prostornina nahrbtnika) investitorja in ustvari donos z ustrezno izbiro investicij. Podobno uporabo modeliranja lahko opazimo na področju upravljanja s proizvodi, kjer se podjetje odloča koliko enot izdelkov naj prodaja samo in koliko preko posrednika.

BKP je mešan celoštevilski dvostopenjski problem predstavljen s strani Dempe in Richter, ki sta za rešitev predstavila "branch-and-bound" okvir (tj. razveji in omeji). V najini nalogi najprej razširiva potrebne in zadostne pogoje za obstoj optimalne rešitve. Nato predlagava enostaven in učinkovit algoritem dinamičnega programiranja za reševanje problema. V nasprotju s pristopom Dempe in Richter, kjer je beležen seznam nedominantnih rešitev, tukaj beležimo samo ciljne funkcijske vrednosti za oba, investitorja in posrednika, tekom dinamičnega procesa.

2 Formulacija in lastnosti problema

V nahrbtniku s prostornino oz kapaciteto y , ki jo določi investitor, vsakemu predmetu j določimo utež oz. volumen a_j , zaslužek posrednika c_j in zaslužek investitorja d_j . Ceno enote prostornine nahrbtnika označimo s t . Z danim y , posrednik izbere podmnožico predmetov, ki upošteva prostorsko omejitev. To nam da dvostopenjski program

$$\text{BKP} = \begin{cases} \text{Max}_{y,x} f^1(y, x) = dx + ty \\ \text{s.t. } \underline{b} \leq y \leq \bar{b} \\ \text{Max}_x f^2(x) = cx \\ \text{s.t. } ax \leq y \text{ and } x \in \{0, 1\}^n \end{cases}$$

kjer so a , c in d celoštevilске vrednosti in a , c , d , \underline{b} in \bar{b} nenegativne. V najini nalogi so z

$$S = \{(x, y) \in \{0, 1\}^n \times [\underline{b}, \bar{b}] : ax \leq y\}$$

označene omejitve, s

$$P(y) = \{x \in \text{Arg max}\{cx' : ax' \leq y, x' \in \{0, 1\}^n\}\}$$

označimo posrednikovo racionalno izbiro množice (za fiksen y) in z

$$IR = \{(x, y) | (x, y) \in S, x \in P(y)\}$$

induktiven del, preko katerega investitor optimizira svojo funkcijo.

Dvostopenjski program obstaja v dveh različicah. Optimističen primer, ko racionalna množica ni singleton (enolična), posrednik izbere tisto rešitev, ki maksimizira zaslužek investitorja. Dobljena rešitev se imenuje močna rešitev. V pesimističnem primeru pa investitor predvideva, da kadar ima posrednik več enakovrednih možnosti izbire množice, izbere tisto, ki minimizira investitorjev zaslužek. Tako dobimo šibko rešitev.

Trditev 1 (Dempe in Richter). *Če je cena enote prostornine (enota t) nepozitivna, potem obstaja optimalna rešitev BKP.*

Naslednja trditev povezuje ceno prostornine z investitorjevim razmerjem med zaslužkom in utežjo predmeta.

Trditev 2. *Naj bo $\underline{b} = 0$ in $t < 0$. Če je $|t| > \max_{1 \leq j \leq n} (\frac{d_j}{a_j})$, potem je $(y^*, x^*) = (0, 0_n)$ optimalna rešitev.*

Dokaz. Naj bo (x, y) možna rešitev za dan BKP. Najprej z razširitvijo pogoja $ax \leq y$ s t ($t < 0$) dobimo $(ta + d)x \geq ty + dx = f^1(y, x)$. Nato, ker je $ta_j + d_j < 0$ za $j = 1, \dots, n$ in $x \in \{0, 1\}^n$, sledi, da je $(ta + d)x \leq 0$, torej $f^1(y, x) \leq 0$. Vidimo, da ker je $(y^*, x^*) = (0, 0_n)$ možna rešitev danega BKP, v katerem je $f^1(y, x) = 0$, je ta rešitev tudi optimalna. \square

Če je $\infty > \bar{b} \geq \sum_{i=1}^n a_i$ in $t > 0$, potem je optimalna rešitev trivialna: $x^* = (1, \dots, 1)$ in $y^* = \bar{b}$. Če sta d in c kolinearna ($d = \alpha c$, kjer $\alpha > 0$) in $t \geq 0$, potem je reševanje BKP enako reševanju problema nahrbtnika s kapaciteto \bar{b} za posrednika.

Definicija 1. *Diskreten dvostopenjski problem nahrbtnika (BKPD) je dvostopenjski problem nahrbtnika v katerem je spremenljivka, ki jo določi investitor diskretna.*

Trditev 3. *Če je $t \leq 0$, potem je vsaka optimalna rešitev (y^*, x^*) za BKPD, tudi optimalna rešitev za BKP.*

Če je $t > 0$ in če optimalna rešitev za BKP obstaja, potem je optimalna tudi za BKPD.

Dokaz. $t \leq 0$: Iz **Trditve 1** sledi, da optimalna rešitev (y^*, x^*) obstaja. Dodatno, $\text{IR}(\text{BKPd}) \subset \text{IR}(\text{BKP})$ in iz Dempe in Richter sledi, da je y^* celo število.

$t > 0$: Direktno iz (ii) v Dempe in Richter. \square

Iz **Trditve 3** sledi, da je reševanje BKP ekvivalentno reševanju BKPd, ko je t negativen. Če je t pozitiven in optimalna rešitev obstaja (glej Izrek 4 v Dempe in Richter), je ta dosežena v točki (\bar{b}, x^*) , kjer je $x^* \in P(\bar{b})$. Pomni, da optimalna rešitev BKPd vedno obstaja. Torej, če BKP ima optimalno rešitev, to lako dobimo z reševanjem zaporedja problemov nahrbtnika, ki vsebuje binarne spremenljivke, eno za vsak možno vrednost y . Algoritem, opisan v naslednjem poglavju, uporabi to lastnost.

3 Načrt za nadaljnje delo

V nadaljevanju bova s programskim jezikom Python napisala program, ki s pomočjo dinamičnega programiranja izračuna optimalno rešitev (y^*, x^*) glede na naključno generirane podatke. S pomočjo primerov iz dokumenta bova preverila tudi da program deluje pravilno. S pomočjo algoritma lahko izračunamo rešitev v primeru optimističnega primera, kot tudi pesimističnega. V najslabšem scenariju ima časovno zahtevnost $\theta(n\bar{b})$. Iz **Trditve 3** je razvidno, da je reševanje problema BKP ekvivalentno reševanju posrednikovega problema nahrbtnika za vsako celo število iz intervala $[\underline{b}, \bar{b}]$. Algoritem v svojem teku jemlje obe ciljni funkciji. To dosežemo z dvema fazama, ki sta podrobneje opisani spodaj.

Forward phase

Prva faza je sestavljena iz dveh zank in nam na vsakem koraku zgenerira maksimalno vrednost nahrbtnika, če v njega dodamo še k -ti predmet. To naredimo za vsako kapaciteto y . Opomniti je treba, da funkcija $\tilde{f}_k^1(y)$ ne upošteva ceno prostornine nahrbtnika, in je torej $\tilde{f}_k^1(y) = f_k^1(y) + ty$

Backtracking phase

Druga faza je uporabljena za iskanje optimalne rešitve (y^*, x^*) , ki ustreza optimalni vrednosti določeni iz prejšnje faze. Optimalna kapaciteta y je generirana z n -tim stolpcem tabele investitorja.

Literatura

- [1] L. Brotcorne, S. Hanafi, R. Mansi (2009). *A dynamic programming algorithm for the bilevel knapsack problem* Elsevier: Operations Research Letters 37, 215–218.
- [2] S. Dempe, K. Richter (2000). *Bilevel programming with Knapsack constraint* European Newspaper of Operations Research 8, 93–107.