

Univerza v Ljubljani
Fakulteta za matematiko in fiziko

Finančni praktikum

**Algoritem za reševanje dvostopenjskega
problema nahrbtnika z dinamičnim
programiranjem**

Jakob Zarnik, Tin Markon

Mentorja: prof. dr. Sergia Cabello Justo, asist. dr. Janoš Vidali

Ljubljana, 2020

Kazalo

1	Uvod	3
2	Formulacija in lastnosti problema	3
3	Opis programa	5
4	Primeri	8
5	Časovna zatevnost	8
	Literatura	9

Povzetek

V nalogi obravnavava reševanje dvostopenjskega problema nahrbtnika z dinamičnim programiranjem. Najprej problem opiševa in ga teoretično formulirava, nato pa za reševanje izdelava algoritem v programskem jeziku *Python*. Preizkusiva ga na primerih z znano rešitvijo in izmeriva njegovo časovno zatevnost na naključno generiranih podatkih.

1 Uvod

Dvostopenjski programi omogočajo modeliranje situacij, kjer glavni odločevalec, v nadaljevanju poimenovan investitor, optimizira svoja sredstva s tem, da neposredno upošteva odziv posrednika na njegovo odločitev o višini vložka. V primeru dvostopenjskega problema nahrbtnika (Bilevel Knapsack Problem), v nadaljevanju BKP, investitor določi prostornino nahrbtnika z namenom maksimizacije dobička, med tem ko se posrednik sooča z 0-1 problemom nahrbtnika s prostornino določeno s strani investitorja. BKP je ustrezen za modeliranje problema »ustreznega financiranja«, kjer posameznik (tj. investitor), svoja sredstva razdeli med netvegano naložbo s fiksnim donosom (npr. varčevalni račun, državna obveznica) in bolj tvegano naložbo, preko posrednika kot je banka ali bančni posrednik (broker). Ta kupi delnice ali obveznice z namenom maksimizacije svojega dobička s tem, da upošteva omejitve finančnih sredstev (prostornina nahrbtnika) investitorja in ustvari donos z ustrezno izbiro investicij. Podobno uporabo modeliranja lahko opazimo na področju upravljanja s proizvodi, kjer se podjetje odloča koliko enot izdelkov naj prodaja samo in koliko preko posrednika.

BKP je mešan celoštevilski dvostopenjski problem predstavljen s strani Dempe in Richter, ki sta za rešitev predstavila "branch-and-bound" okvir (tj. razveji in omeji). V najini nalogi najprej razširiva potrebne in zadostne pogoje za obstoj optimalne rešitve. Nato predlagava enostaven in učinkovit algoritem dinamičnega programiranja za reševanje problema. V nasprotju s pristopom Dempe in Richter, kjer je beležen seznam nedominantnih rešitev, tukaj beležimo samo ciljne funkcijske vrednosti za oba, investitorja in posrednika, tekom dinamičnega procesa.

2 Formulacija in lastnosti problema

V nahrbtniku s prostornino oz kapaciteto y , ki jo določi investitor, vsakemu predmetu j določimo utež oz. volumen a_j , zaslužek posrednika c_j in zaslužek investitorja d_j . Ceno enote prostornine nahrbtnika označimo s t . Z danim y , posrednik izbere podmnožico predmetov, ki upošteva prostorsko omejitev. To nam da dvostopenjski program

$$\text{BKP} = \begin{cases} \text{Max}_{y,x} f^1(y, x) = dx + ty \\ \text{s.t. } \underline{b} \leq y \leq \bar{b} \\ \text{Max}_x f^2(x) = cx \\ \text{s.t. } ax \leq y \text{ and } x \in \{0, 1\}^n \end{cases}$$

kjer so a , c in d celoštevilске vrednosti in a , c , d , \underline{b} in \bar{b} nenegativne. V najini nalogi so z

$$S = \{(x, y) \in \{0, 1\}^n \times [\underline{b}, \bar{b}] : ax \leq y\}$$

označene omejitve, s

$$P(y) = \{x \in \text{Arg max}\{cx' : ax' \leq y, x' \in \{0, 1\}^n\}\}$$

označimo posrednikovo racionalno izbiro množice (za fiksen y) in z

$$IR = \{(x, y) | (x, y) \in S, x \in P(y)\}$$

induktiven del, preko katerega investitor optimizira svojo funkcijo.

Dvostopenjski program obstaja v dveh različicah. Optimističen primer, ko racionalna množica ni singleton (enolična), posrednik izbere tisto rešitev, ki maksimizira zaslužek investitorja. Dobljena rešitev se imenuje močna rešitev. V pesimističnem primeru pa investitor predvideva, da kadar ima posrednik več enakovrednih možnosti izbire množice, izbere tisto, ki minimizira investitorjev zaslužek. Tako dobimo šibko rešitev.

Trditev 1 (Dempe in Richter). *Če je cena enote prostornine (enota t) nepozitivna, potem obstaja optimalna rešitev BKP.*

Naslednja trditev povezuje ceno prostornine z investitorjevim razmerjem med zaslužkom in utežjo predmeta.

Trditev 2. *Naj bo $\underline{b} = 0$ in $t < 0$. Če je $|t| > \max_{1 \leq j \leq n} (\frac{d_j}{a_j})$, potem je $(y^*, x^*) = (0, 0_n)$ optimalna rešitev.*

Dokaz. Naj bo (x, y) možna rešitev za dan BKP. Najprej z razširitvijo pogoja $ax \leq y$ s t ($t < 0$) dobimo $(ta + d)x \geq ty + dx = f^1(y, x)$. Nato, ker je $ta_j + d_j < 0$ za $j = 1, \dots, n$ in $x \in \{0, 1\}^n$, sledi, da je $(ta + d)x \leq 0$, torej $f^1(y, x) \leq 0$. Vidimo, da ker je $(y^*, x^*) = (0, 0_n)$ možna rešitev danega BKP, v katerem je $f^1(y, x) = 0$, je ta rešitev tudi optimalna. \square

Če je $\infty > \bar{b} \geq \sum_{i=1}^n a_i$ in $t > 0$, potem je optimalna rešitev trivialna: $x^* = (1, \dots, 1)$ in $y^* = \bar{b}$. Če sta d in c kolinearna ($d = \alpha c$, kjer $\alpha > 0$) in $t \geq 0$, potem je reševanje BKP enako reševanju problema nahrbtnika s kapaciteto \bar{b} za posrednika.

Definicija 1. *Diskreten dvostopenjski problem nahrbtnika (BKPD) je dvostopenjski problem nahrbtnika v katerem je spremenljivka, ki jo določi investitor diskretna.*

Trditev 3. *Če je $t \leq 0$, potem je vsaka optimalna rešitev (y^*, x^*) za BKPD, tudi optimalna rešitev za BKP.*

Če je $t > 0$ in če optimalna rešitev za BKP obstaja, potem je optimalna tudi za BKPD.

Dokaz. $t \leq 0$: Iz **Trditve 1** sledi, da optimalna rešitev (y^*, x^*) obstaja. Dodatno, $\text{IR}(\text{BKPd}) \subset \text{IR}(\text{BKP})$ in iz Dempe in Richter sledi, da je y^* celo število.

$t > 0$: Direktno iz (ii) v Dempe in Richter. \square

Iz **Trditve 3** sledi, da je reševanje BKP ekvivalentno reševanju BKPd, ko je t negativen. Če je t pozitiven in optimalna rešitev obstaja (glej Izrek 4 v Dempe in Richter), je ta dosežena v točki (\bar{b}, x^*) , kjer je $x^* \in P(\bar{b})$. Pomni, da optimalna rešitev BKPd vedno obstaja. Torej, če BKP ima optimalno rešitev, to lako dobimo z reševanjem zaporedja problemov nahrbtnika, ki vsebuje binarne spremenljivke, eno za vsak možno vrednost y . Algoritem, opisan v naslednjem poglavju, uporabi to lastnost.

3 Opis programa

S programskim jezikom *Python* sva napisala program, ki s pomočjo dinamičnega programiranja izračuna optimalno rešitev (y^*, x^*) glede na naključno generirane podatke. S pomočjo primerov iz dokumenta sva preverila, če program deluje pravilno. Z uporabo algoritma lahko izračunamo rešitev tako v primeru optimističnega, kot tudi pesimističnega primera. V najslabšem scenariju ima časovno zahtevnost $\theta(n\bar{b})$, kar v zadnjem poglavju, s testom na naključnih podatkih, tudi pokaževa. Iz **Trditve 3** je razvidno, da je reševanje problema BKP ekvivalentno reševanju posrednikovega problema nahrbtnika za vsako celo število iz intervala $[\underline{b}, \bar{b}]$. Algoritem v svojem teku jemlje obe ciljni funkciji. To dosežemo z dvema fazama, ki sta podrobneje opisani spodaj.

Forward phase

Prva faza je sestavljena iz dveh zank: zunanja zanka s koraki $k \in [1, \dots, n]$ in notranja zanka vezana na celoštevilsko kapaciteto nahrbtnika $y \in [\underline{b}, \bar{b}]$. Med to fazo sta generirani dve tabeli. Prva vsebuje optimalne vrednosti sledilca

$$f_k^2(y) = \max \left\{ \sum_{j=1}^k c_j x_j : \sum_{j=1}^k a_j x_j \leq y, x \in \{0, 1\}^k \right\}$$

druga pa optimalne vrednosti investitorja

$$\tilde{f}_k^1(y) = \max \left\{ \sum_{j=1}^k d_j x_j : x \in P(y) \right\}$$

na vsakem koraku k in za vsako kapaciteto y . Za graditev teh tabel z dinamičnim programiranjem se rekurzija izvede za vse vrednosti y med 0 in \bar{b} in za vsak predmet. Opomniti je treba, da funkcija $\tilde{f}_k^1(y)$ ne upošteva

ceno prostornine nahrbtnika, in je torej $\tilde{f}_k^1(y) = f_k^1(y) + ty$.

```

1: for  $k = 2, \dots, n$  and  $y = 0, \dots, \bar{b}$  do
2:   if  $y < a_k$  then
3:      $f_k^2(y) = f_{k-1}^2(y)$  and  $\tilde{f}_k^1(y) = \tilde{f}_{k-1}^1(y)$ 
4:   else
5:      $f_k^2(y) = \max(f_{k-1}^2(y), f_{k-1}^2(y - a_k) + c_k)$ 
6:     if  $f_{k-1}^2(y) \neq f_{k-1}^2(y - a_k) + c_k$  then
7:        $\tilde{f}_k^1(y) = \tilde{f}_{k-1}^1(y)$  if  $f_k^2(y) = f_{k-1}^2(y)$ 
8:        $\tilde{f}_k^1(y) = \tilde{f}_{k-1}^1(y - a_k) + d_k$  if  $f_k^2(y) = f_{k-1}^2(y - a_k) + c_k$ 
9:     else
10:       $\tilde{f}_k^1(y) = \max(\tilde{f}_{k-1}^1(y), \tilde{f}_{k-1}^1(y - a_k) + d_k)$  (Opt.)
11:       $\tilde{f}_k^1(y) = \max(\tilde{f}_{k-1}^1(y), \tilde{f}_{k-1}^1(y - a_k) + d_k)$  (Pes.)
12:     end if
13:   end if
14: end for

```

V prvem koraku (tj. $k = 1$) gledamo samo prvi predmet x_1 . Optimalna rešitev investitorja in sledilca, za vsako kapaciteto y , je izračunana na sledeč način:

$$f_1^2(y) = \begin{cases} 0 & \text{for } y = 0, \dots, a_1 - 1 \\ c_1 & \text{for } y = a_1, \dots, \bar{b} \end{cases}$$

$$\tilde{f}_1^1(y) = \begin{cases} 0 & \text{for } y = 0, \dots, a_1 - 1 \\ d_1 & \text{for } y = a_1, \dots, \bar{b} \end{cases}$$

Sledilec izbere prvi predmet, samo če je dana kapaciteta zadostna. Funkcija za prvi korak je poimenovana `prvi_predmeti` in se nahaja v datoteki `BKP.py`.

Za $k > 1$ se za generiranje sledilčeve tabele uporabi rekurzija v 3. vrstici algoritma. Investitorjeva tabela je generirana glede na moč seznama sledilčeve optimalne rešitve. Če je sledilčeva rešitev enolična, je investorjeva funkcija dana 7. in 8. vrstici, v nasprotnem primeru pa v 10. (optimističen scenarij) ali 11. (pesimističen scenarij) vrstici.

Funkcijo opisano z zgornjo psevdokodo sva poimenovala `generiranje_tabel` se nahaja v datoteki `BKP.py`. Vrne nam dva seznama n seznamov, prvega za investitorja in drugega za sledilca.

Backtracking phase

Druga faza je uporabljena za iskanje optimalne rešitve (y^*, x^*) , ki ustreza optimalni vrednosti določeni v prejšnji fazi. Optimalna kapaciteta y je generirana z n -tim stolpcem tabele investitorja (Opozoriti je potrebno, da se v programskem jeziku *Python* indeksi elementov seznama začnejo z 0. Uporabila sva tabele velikosti $n \times (n + 1)$, torej dejansko gledamo $(n + 1) - ti$ stolpec.), kot je opisano v naslednji trditvi.

Trditev 4. Naj bo (x^*, y^*) optimalna rešitev BKPd.

- Če je $t \leq 0$, potem $\tilde{f}_n^1(y^*) + ty^* = \text{Max} \left\{ \tilde{f}_n^1(y^*) + ty : y \in \{\underline{b}, \underline{b} + 1, \dots, \bar{b}\} \right\}$
- Če je $t > 0$, sta možnosti dve: (i) $\text{Max} \left\{ \tilde{f}_n^1(y) + t(y + 1) \right\} \leq \tilde{f}_n^1(\bar{b}) + t\bar{b}$, je (\bar{b}, x^*) optimalna rešitev BKP, kjer je $x^* \in P(y^*)$ in $y^* = \bar{b}$; ali (ii) BKP nima optimalne rešitve.

Iz optimalne rešitve vodje y^* backtracking phase uporabi rekurzijo dinamičnega programiranja povezano z investitorjevim in sledilčevim problemom. Postopek v obliki psevdokode za to fazo je predstavljen spodaj.

```

1:  $y \leftarrow y^*$ 
2: for  $f_{k-1}^2(y) \neq f_{k-1}^2(y - a_k) + c_k$  do
3:   if  $y = 3$  then
4:     if  $f_k^2(y) = f_{k-1}^2(y)$  then
5:        $x_k^* = 0$ 
6:     else
7:        $x_k^* = 1$  and  $y \leftarrow y - a_k$ 
8:     end if
9:   else
10:    if  $\tilde{f}_k^1(y) = \tilde{f}_{k-1}^1(y)$  then
11:       $x_k^* = 0$ 
12:    else
13:       $x_k^* = 1$  and  $y \leftarrow y - a_k$ 
14:    end if
15:  end if
16: end for
17: if  $f_1^2(y) = 0$  then
18:    $x_1^* = 0$ 
19: else
20:    $x_1^* = 1$ 
21: end if

```

Če se vodja sooča z enakovrednimi odločitvami, lahko spremenljivka x_k^* lahko zavzame vrednost 0 ali 1. Vrednost x_1^* , ki ni odvisna od rekurzije, je nastavljena na 0, če je $f_1^2(y) = 0$, in 1 v nasprotnem primeru. Če y^* ni enoličen, je za iskanje optimalne rešitve backtracking postopek uporabljen za vsak y^* .

Python koda za opisano fazo se nahaja v datoteki `BKP.py`, funkcija `optimalna_resitvev`. Vrne nam optimalno rešitev v obliki seznama izbranih predmetov in optimalen kapital. Če problem nima optimalne rešitve, nam to sporoči. Za lažje razumevanje so spremenljivke poimenovane nazorno.

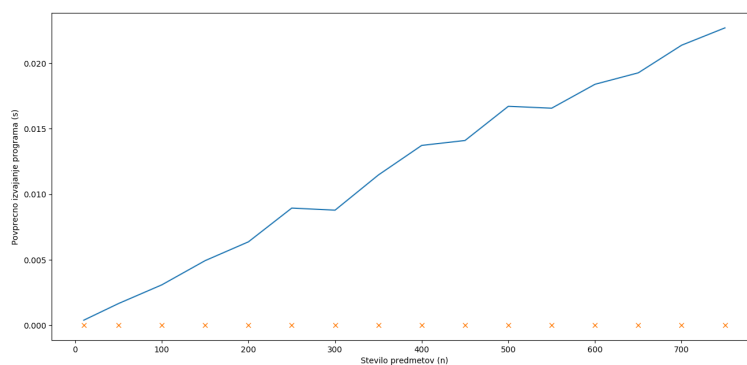
4 Primeri

Za lažje testiranje algoritma na praktičnih problemih sva izdelala Class **BKP**, definiran v **BKP.py**. Objekt predstavlja željen BKP, saj ima za attribute vse potrebne parametre. Tako za vsak obravnavan problem izdelamo objekt, na katerem lahko uporabimo algoritem.

Testna primera sva si sposodila iz članka [1] in sta navedena na koncu datoteke **BKP.py**. **bkp_primer1** nima optimalne rešitve, **bkp_primer2** pa nam vrne $([0, 0, 0, 1], 1)$, kar je v obeh primerih pravilno.

5 Časovna zatevnost

V teoriji je časovna zatevnost algoritma linearna: $\theta(n\bar{b})$. To sva preverila na naključno generiranih podatkih. Za različna števila n (št. predmetov), fiksni y (omejitev kapitala), fiksni m (max omejitev uteži predmetov) in fiksni t (cena enote kapitala), sva algoritem pognala stokrat in izračunala povprečen čas. Spodnji graf prikazuje povprečen čas, ki ga algoritem potrebuje za izračun rešitve v odvisnosti od števila predmetov. Razberemo lahko, da predpostavka o linearnosti drži. Graf z vsak n z \times prikazuje tudi varianco vektorjev koristnosti investitorja in sledilca.



Slika 1: Časovna zatevnost

Literatura

- [1] L. Brotcorne, S. Hanafi, R. Mansi (2009). *A dynamic programming algorithm for the bilevel knapsack problem* Elsevier: Operations Research Letters 37, 215–218.
- [2] S. Dempe, K. Richter (2000). *Bilevel programming with Knapsack constraint* European Newspaper of Operations Research 8, 93–107.