Exemple de résolution d'un système de Cramer

Résolution du système linéaire :

$$\begin{pmatrix}1 & -1 & 2 & 1\\2 & -3 & 5 & 2\\3 & 2 & 1 & 2\\1 & 1 & -1 & -3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\3\\0\\0\end{pmatrix}$$

Étape de descente :

$$\begin{pmatrix}1 & -1 & 2 & 1\\2 & -3 & 5 & 2\\3 & 2 & 1 & 2\\1 & 1 & -1 & -3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\3\\0\\0\end{pmatrix}\qquad \begin{matrix}L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1\\L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1\\L_4 \leftarrow L_4 - L_1\end{matrix}\quad \begin{pmatrix}1 & -1 & 2 & 1\\0 & -1 & 1 & 0\\0 & 5 & -5 & -1\\0 & 2 & -3 & -4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\\-3\\-1\end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix}L_3 \leftarrow L_3 + 5L_2\\L_4 \leftarrow L_4 + 2L_2\end{matrix}\quad \begin{pmatrix}1 & -1 & 2 & 1\\0 & -1 & 1 & 0\\0 & 0 & 0 & -1\\0 & 0 & -1 & -4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\\2\\1\end{pmatrix}$$

$$L_3 \leftrightarrow L_4\quad \begin{pmatrix}1 & -1 & 2 & 1\\0 & -1 & 1 & 0\\0 & 0 & -1 & -4\\0 & 0 & 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\\2\end{pmatrix}$$

$$L_4 \leftarrow L_4 + 0L_3\quad \begin{pmatrix}1 & -1 & 2 & 1\\0 & -1 & 1 & 0\\0 & 0 & -1 & -4\\0 & 0 & 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\\2\end{pmatrix}$$

Étape de remontée :

$$\begin{pmatrix}1 & -1 & 2 & 1\\0 & -1 & 1 & 0\\0 & 0 & -1 & -4\\0 & 0 & 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\\2\end{pmatrix}\qquad \begin{matrix}L_1 \leftarrow L_1 + L_4\\L_2 \leftarrow L_2 - 0L_4\\L_3 \leftarrow L_3 - 4L_4\end{matrix}\quad \begin{pmatrix}1 & -1 & 2 & 0\\0 & -1 & 1 & 0\\0 & 0 & -1 & 0\\0 & 0 & 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\1\\-7\\2\end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix}L_1 \leftarrow L_1 + 2L_3\\L_2 \leftarrow L_2 + L_3\end{matrix}\quad \begin{pmatrix}1 & -1 & 0 & 0\\0 & -1 & 0 & 0\\0 & 0 & -1 & 0\\0 & 0 & 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-11\\-6\\-7\\2\end{pmatrix}$$

$$L_1 \leftarrow L_1 - L_2\quad \begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\0 & -1 & 0 & 0\\0 & 0 & -1 & 0\\0 & 0 & 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-5\\-6\\-7\\2\end{pmatrix}$$

Étape de résolution :

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-5\\ -6\\ -7\\ 2\end{pmatrix} \quad \begin{matrix}L_2 \leftarrow -L_2\\ L_3 \leftarrow -L_3\\ L_4 \leftarrow -L_4\end{matrix} \quad \begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-5\\ 6\\ 7\\ -2\end{pmatrix}$$

La matrice A a été transformée en la matrice Identité.
La solution se lit dans la colonne des seconds membres.

$$S=\{(-5,6,7,-2)\}$$