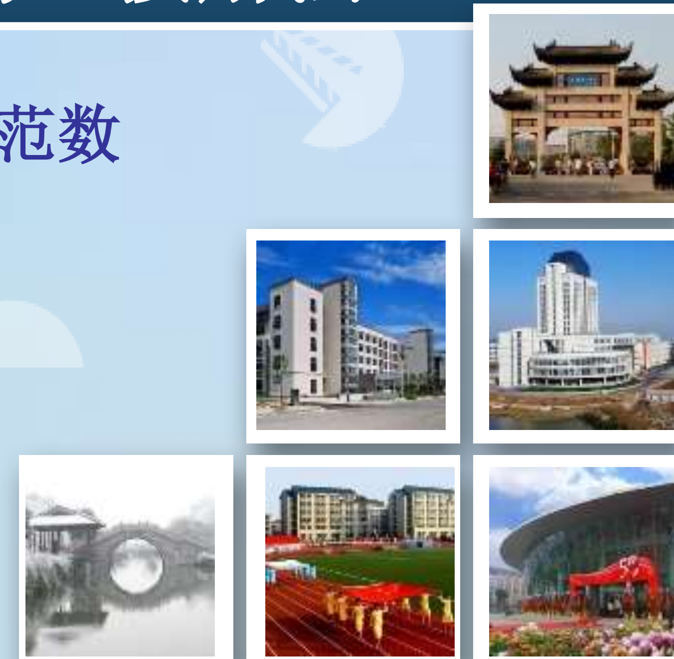
第二章 线性方程组的直接解法

第六节矩阵、向量和连续函数的范数



2.6.1 范数的一般概念

定义 2.6.1：设 X 是数域 K 上的一个线性空间，在其定义一个实值函数 $\|\cdot\|$，且任意 $u,v\in X$ 及 $k\in K$，满足下列性质：

（1） 正定性：$\|u\|\geq 0$，且 $\|u\|=0\Leftrightarrow u=\theta$（注：$\theta$ 表示线性空间中零元素）；

（2） 齐次性：$\|ku\|=|k|\|u\|$；

（3） 三角不等式：$\|u+v\|\leq\|u\|+\|v\|$。

则称 $\|\cdot\|$ 为 X 上的范数，同时定义了范数的线性空间就也称为赋范线性空间。

2.6.3 向量范数

几种常用向量范数：$\forall x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T\in R^n$（或$C^n$）

（1） 2-范数

$$\|x\|_2=\left(\sum_{i=1}^{n}|x_i|^2\right)^{\frac{1}{2}} \tag{2.6.8}$$

（2） 1-范数

$$\|x\|_1=\sum_{i=1}^{n}|x_i| \tag{2.6.9}$$

（3） ∞-范数

$$\|x\|_\infty=\max_{1\le i\le n}\{|x_i|\} \tag{2.6.10}$$

上面三种常用向量范数可统一为下列的 $p-$ 范数：

$$\|x\|_p=\left(\sum_{i=1}^{n}|x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}},\quad p\in[1,+\infty)$$

江南大学

例1 设x=(1, 0, -1, 2)^T, 计算 $\|x\|_1, \|x\|_\infty, \|x\|_2$

解: $\|x\|_1$ **=1+0+|-1|+2=4**

$$\|x\|_\infty = \max(1,0,|-1|,2) = 2$$

$$\|x\|_2 = \sqrt{1^2 + 0^2 + (-1)^2 + 2^2} = \sqrt{6}$$

定义 2.6.4： 设$\|\cdot\|_\alpha$和$\|\cdot\|_\beta$是线性空间X上的两个范数。如果存在常数$c_2>c_1>0$，使得

$$\forall u\in X,\quad c_1\|u\|_\alpha\le\|u\|_\beta\le c_2\|u\|_\alpha \tag{2.6.11}$$

则称范数$\|\cdot\|_\alpha$和$\|\cdot\|_\beta$是等价的。

定理 2.6.5： R^n上所有的范数都是等价的。

江南大学

2.6.4 矩阵范数

定义 2.6.5： 若 $\forall A \in R^{n\times n}$，对应一个实数 $\|A\|$，且 $\forall A,B \in R^{n\times n}, k \in R$，满足以下性质：

（1） 非负性：$\|A\| \ge 0$，且 $\|A\| = 0 \Leftrightarrow A = \theta$；

（2） 齐次性：$\|kA\| = |k|\|A\|$；

（3） 三角不等式成立：$\|A+B\| \le \|A\| + \|B\|$；

（4） 相容性条件：$\|AB\| \le \|A\| \times \|B\|$；

则称 $\|\cdot\|$ 为 $R^{n\times n}$ 上的一个矩阵范数。

例 2.6.8： 设 $A = \left(a_{ij}\right)_{n\times n} \in R^{n}$，定义：

$$\|A\|_F = \left(\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \left| a_{ij} \right|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \qquad (2.6.13)$$

称为矩阵的 Frobenius 范数

定义 2.6.6： 对于给定 R^n 上的向量范数 $\|x\|$ 和 $R^{n\times n}$ 上的范数 $\|A\|$，若满足：

$$\forall x \in R^n, A \in R^{n\times n}，有 \|Ax\| \le \|A\|\cdot\|x\| \tag{2.6.14}$$

则称矩阵范数 $\|\cdot\|$ 与向量范数 $\|\cdot\|$ 是相容的。而式（2.6.14）也称为矩阵范数与向量范数的相容性条件。

定理 2.6.6： 设 $\|\cdot\|$ 是 R^n 上任一个向量范数，则 $\forall A \in R^{n\times n}$，定义：

$$\|A\| = \sup_{x\neq\theta}\left\{\frac{\|Ax\|}{\|x\|}\right\} = \sup_{\|x\|=1}\{\|Ax\|\} \tag{2.6.15}$$

则（2.6.15）式定义的 $\|A\|$ 是 $R^{n\times n}$ 上的一种范数， 称为向量范数诱导的矩阵范数

定理 2.6.7： 设 $A=(a_{ij})_{n\times n}\in R^{n\times n}$，则

（1）矩阵的行范数：

$$\|A\|_{\infty}=\max_{1\le i\le n}\left\{\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|\right\} \tag{2.6.17}$$

（2）矩阵的列范数

$$\|A\|_{1}=\max_{1\le j\le n}\left\{\sum_{i=1}^{n}|a_{ij}|\right\} \tag{2.6.18}$$

（3）矩阵的谱范数

$$\|A\|_{2}=\sqrt{\rho(A^{T}A)} \tag{2.6.19}$$

注：$\rho(A^TA)=\lambda_{max}(A^TA)$。若矩阵$A$对称，则$\|A\|_2=\rho(A)$。

例2 计算方阵 $A=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 4\\ 0 & -2 & 4\end{bmatrix}$ 的三种范数

解

$$\|A\|_1=\max_{1\le j\le 3}\sum_{i=1}^{3}|a_{ij}|=\max\{1,4,8\}=8$$

$$\|A\|_\infty=\max_{1\le i\le 3}\sum_{j=1}^{3}|a_{ij}|=\max\{1,6,6\}=6$$

$$\|A\|_2=\sqrt{\lambda_{\max}(A^{\mathrm{T}}A)}$$ 先计算

$$A^{\mathrm{T}}A=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 2 & -2\\ 0 & 4 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 4\\ 0 & -2 & 4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 8 & 0\\ 0 & 0 & 32\end{bmatrix}$$

所以 $\lambda_{\max}(A^{\mathrm{T}}A)=32$ ，从而 $\|A\|_2=\sqrt{32}=4\sqrt{2}$