习题六解答

1、给定函数表

x	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
y	5.1234	5.3057	5.5680	5.9378	6.4370	7.0978	7.9493	9.0253	10.3627

试求二次最小二乘拟合多项式。

解：设拟合函数的二次多项式为 $P_2(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$

由于 n=9,m=2,将数据带入法方程组(6.1.3)，可得

$$\begin{aligned} &9a_0 + 4.5a_1 + 2.85a_2 = 62.807 \\ &4.5a_0 + 2.85a_1 + 2.025a_2 = 35.2074 \\ &2.85a_0 + 2.025a_1 + 1.5333a_2 = 23.9442 \end{aligned}$$

解得 $a_0 = 5.3052, a_1 = -1.8230, a_2 = 8.1629$，故二次最小二乘拟合多项式为

$P_2(x) = 5.3052 - 1.8230\,x + 8.1629\,x^2$

2、某化工厂在某种技术革新中需要醋酸热容 c_p 和绝对温度 T（^oK）的关系，已知 5 组试验数据结果如下：

T	293	313	343	363	383
c_p	28.98	30.20	32.90	35.90	38.30

试求：（1）通过描点法确定醋酸热容 c_p 与绝对温度 T 的多项式逼近的经验公式的类型；（2）利用最小二乘法计算这一经验公式。

解：（1）描点呈线性回归的经验公式；

（2）$C_p = -2.4359 + 0.1053T$

3、给定函数表

x	0	1	2	3	4
y	2.00	2.05	3.00	9.60	34.00

已知其经验公式为 $y = a + bx^2$。试采用最小二乘拟合方法确定常数 a 和 b。

解：取 $\varphi_0(x) = 1, \varphi_1(x) = x^2$，所以法方程组矩阵形式为

$$\begin{bmatrix}(\varphi_0,\varphi_0) & (\varphi_0,\varphi_1)\\ (\varphi_1,\varphi_0) & (\varphi_1,\varphi_1)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a\\ b\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}(y,\varphi_0)\\ (y,\varphi_1)\end{bmatrix}$$

即

$$\begin{bmatrix}5 & 30\\ 30 & 354\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a\\ b\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}50.65\\ 644.45\end{bmatrix}$$

解得$a=-1.6131, b=1.9572$;

4、利用最小二乘拟合方法求一形如 $y=a+bx^3$（a，b 为常数）的经验公式，其中数据表如下

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	-28.49	-8.99	-1.51	0.001	1.47	9.02	28.42

解: 取加权系数$\omega_i=1$，根据线性最小二乘法的一般形式，正则方程组可写为:

$$\begin{bmatrix}(\varphi_0,\varphi_0) & (\varphi_0,\varphi_1)\\ (\varphi_1,\varphi_0) & (\varphi_1,\varphi_1)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a\\ b\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}(y,\varphi_0)\\ (y,\varphi_1)\end{bmatrix}$$

其中: $\varphi_0(x)=1, \varphi_1(x)=x^3$

根据表中数据及经验公式，得:

$$\varphi_0=[1,1,1,1,1,1,1]^T;\varphi_1=[-27,-8,-1,0,1,8,27]^T$$
$$y=[-28.49,-8.99,-1.51,0.001,1.47,9.02,28.42]^T$$

带入正则方程组，有:

$$\begin{bmatrix}7 & 0\\ 0 & 1588\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a\\ b\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-0.079\\ 1683.63\end{bmatrix}$$

解之得: $a=-0.0113, b=1.0602$。

5、在某科学实验中，需要观察水份的渗透速度，测得时间t（单位：秒）与水的重量w（单位：克）的对应数据表如下:

t	1	2	4	8	16	32	64
w	4.22	4.02	3.85	3.59	3.44	3.02	2.59

已知t与w有关系式$w=ct^{\lambda}$，试采用最小二乘拟合方法确定常数c和λ。

解: $\ln w=\lambda\ln t+\ln c$，得数据表

$\ln t$	0	0.6931	1.3863	2.0794	2.7726	3.4657	4.1589

$\ln \omega$	1.4398	1.3913	1.3481	1.2782	1.2355	1.1053	0.9517

将此表数据带入正则方程组，得

$$\begin{cases} 7a_0 + 14.5561a_1 = 8.7497 \\ 14.5561a_0 + 43.7212a_1 = 16.7048 \end{cases},$$

$a_0 = \ln c = 1.4802$， $a_1 = \lambda = -0.1107$， 得 $c = 4.3938$， $\lambda = -0.1107$

6、已知数据对 (x_i, y_i)（$i = 0,1,2,\cdots,m$），及拟合这批数据的非线性数学模型为

$$y = y(x) = c_0 e^{-c_1 x}$$

其中 c_0 和 c_1 为常数。试求解下列问题：（1）如何将非线性模型线性化？（2）写出线性化模型中待定系数的法方程，并求解此法方程；（3）写出线性拟合函数。

解：(1) 等式两边取对数；（2）见书（6.1.3）式计算；（3）$\ln y = -c_1 x + \ln c_0$。

7、利用正交函数簇计算下列函数的最小二乘三次拟合多项式，其中 $x_k = 0.25k$， $w_k \equiv 1$， $k = 0,1,2,3,4$。

（1） $f(x) = \sin(2\pi x)$；（2） $f(x) = \ln(1+x^2)$；（3） $f(x) = e^{-x^2}$。

解：（1） $21.333x^3 - 32x^2 + 10.667x$；

（2） $-0.4470x^3 + 1.1204x^2 - 0.0103x$；

（3） $0.5714x^3 - 1.235x^2 + 0.0319x + 0.9999$。

8、求下列函数在指定区间上关于 $f(x)$ 的二次最佳平方逼近多项式，并计算其平均误差。

（1）$f(x) = \sqrt{x}$，$x \in [0,1]$；（2）$f(x) = \cos\left(\dfrac{\pi}{2}x\right)$，$x \in [0,1]$；（3）$f(x) = e^x$，$x \in [0,1]$。

解： （1） $-0.5714x^2 + 1.3714x + 0.1714$，误差 0.40816×10^{-5}；

（2） $-0.8346x^2 - 0.2091x + 1.0194$，误差 0.70257×10^{-5}；

（3） $-0.8392x^2 + 0.8511x + 1.0130$，误差 0.27835×10^{-5}。

9、证明第一类 Chebyshev 多项式 $T_n(x) = \cos(n \arccos x)$（$x \in [-1,1]$）是 n 次多项式，且首项系数为 2^{n-1}（$n = 2,3,\cdots$）。

证明：按一类 Chebyshev 多项式的递推公式： $T_0(x) = 1, T_1(x) = x,$

$T_n(x) = 2xT_{n-1}(x) - T_{n-2}(x)$， $n = 2,3,\cdots$， 可知， $T_n(x)$（$x \in [-1,1]$）是 n 次多项式，且

首项系数为$2^{n-1}, n=2,3,\cdots$。

10、利用第一类 Chebyshev 关于权函数$\omega(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$的正交多项式，求函数

$$f(x)=\arctan x,\quad x\in[-1,1]$$

的三次最佳平方逼近多项式。

解： Chebyshev 多项式关于权函数$\omega(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$，在$[-1,1]$上正交多项式系

$\varphi_0(x)=T_0(x)=1$；$\varphi_1(x)=T_1(x)=x$；

$\varphi_2(x)=T_2(x)=2x^2-1$；$\varphi_3(x)=T_3(x)=4x^3-3x$。

于是，可计算

$$(\varphi_0,\varphi_0)=\pi\ ,\ (\varphi_k,\varphi_k)=\frac{\pi}{2}\quad(k=1,2,3);$$

$$(f,\varphi_0)=\int_{-1}^{1}\frac{\arctan x}{\sqrt{1-x^2}}dx=0;$$

$$(f,\varphi_1)=\int_{-1}^{1}\frac{x\cdot\arctan x}{\sqrt{1-x^2}}dx=1.301290284568219;$$

$$(f,\varphi_2)=\int_{-1}^{1}\frac{(2x^2-1)\arctan x}{\sqrt{1-x^2}}dx=0;$$

$$(f,\varphi_3)=\int_{-1}^{1}\frac{(4x^3-3x)\cdot\arctan x}{\sqrt{1-x^2}}dx=-0.074422038554780。$$

因此，由式（6.3.9）可得正则方程组之解为

$$a_0=\frac{(f,\varphi_0)}{(\varphi_0,\varphi_0)}=0;$$

$$a_1=\frac{(f,\varphi_1)}{(\varphi_1,\varphi_1)}=0.828427124745965;$$

$$a_2=\frac{(f,\varphi_2)}{(\varphi_2,\varphi_2)}=0;$$

$$a_3=\frac{(f,\varphi_3)}{(\varphi_3,\varphi_3)}=-0.047378541243876。$$

由式（6.3.10）可得函数$f(x)=\arctan x$在$[-1,1]$上的三次最佳平方逼近多项式为

$$\begin{aligned}\varphi(x)&=a_0\varphi_0(x)+a_1\varphi_1(x)+a_2\varphi_2(x)+a_3\varphi_3(x)\\&=-0.18951x^3+0.97056x\end{aligned}$$