江南大学

第七章 数值积分与数值微分

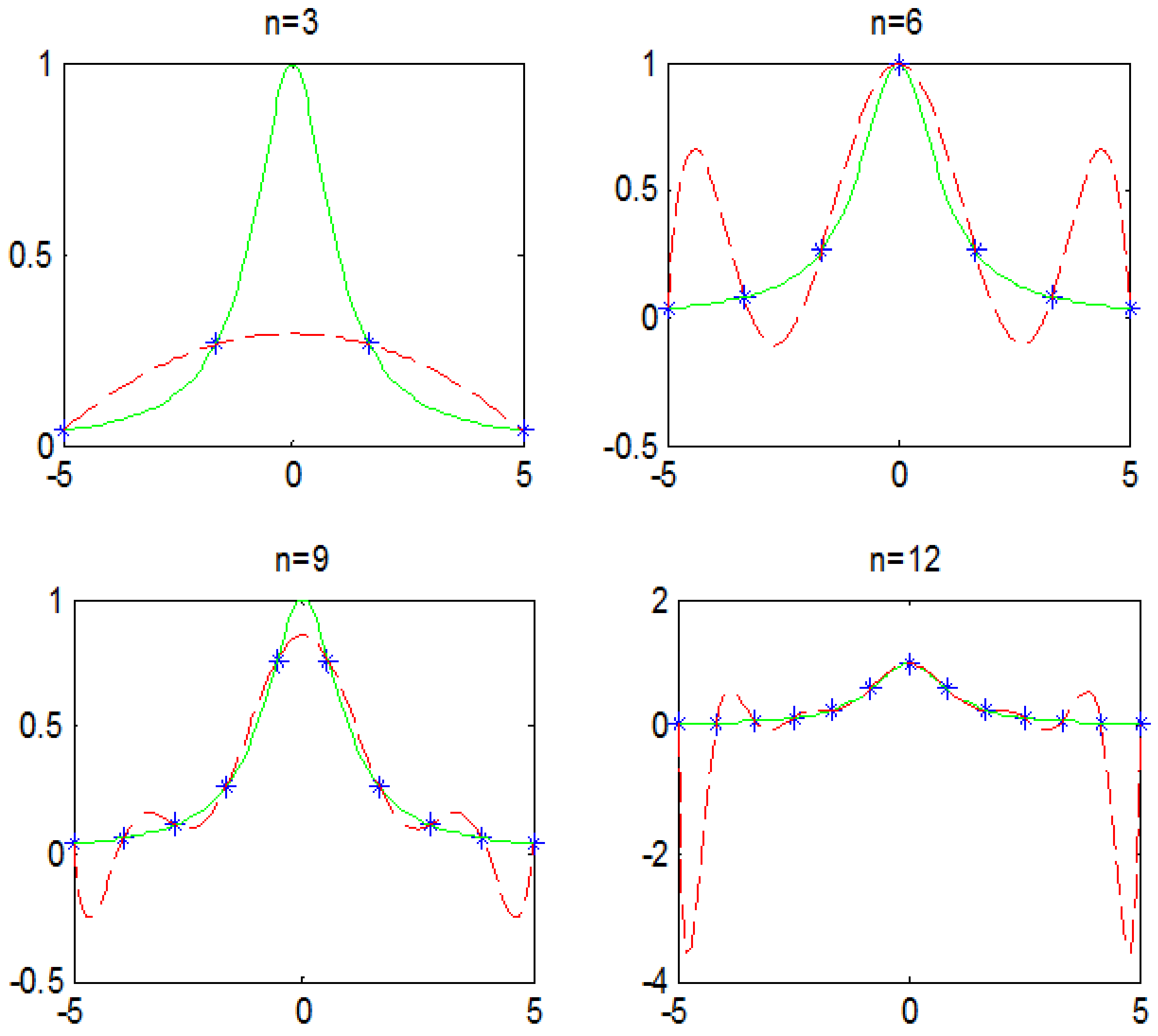
第二节 复合求积公式






高次插值的Runge现象

函数 $f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$ 的 $L_n(x)$ 插值图象



江南大学

实际应用中，通常将积分区间分成若干个小区间，在每个小区间上采用低阶求积公式，然后把所有小区间上的计算结果加起来得到整个区间上的求积公式，这就是复合求积公式的基本思想。常用的复合求积公式有复合梯形公式和复合Simpson公式。

7.2.1 复合梯形公式

积分区间$[a,b]$分成n等份，记$h=\dfrac{b-a}{n}$，$x_k=a+k\cdot h$ （$k=0,1,\cdots,n$）

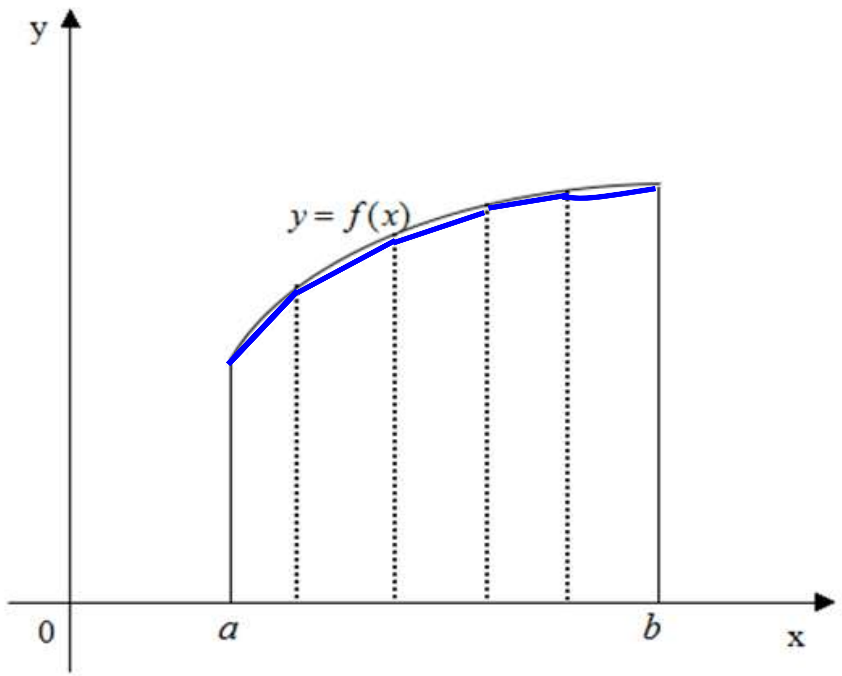


图 7-2-1：复合梯形公式几何示意图

在每个小区间$[x_{k-1},x_k]$（$k=1,2,\cdots,n$）上使用梯形公式

$$\int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)dx \approx \frac{h}{2}[f(x_{k-1})+f(x_k)]$$

江南大学

复合梯形公式和误差

$$I[f]=\int_a^b f(x)\cdot dx=\sum_{k=1}^{n}\int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)\cdot dx\approx\sum_{k=1}^{n}\frac{h}{2}[f(x_{k-1})+f(x_k)]$$

$$=\frac{h}{2}[f(a)+f(b)+2\sum_{k=1}^{n-1}f(x_k)]\triangleq T_n \qquad (7.2.1)$$

如果 $f(x)\in C^2[a,b]$，则复合梯形公式（7.2.1）的截断误差为

$$R_{T_n}[f]=-\sum_{k=1}^{n}\frac{f''(\xi_k)}{12}\cdot h^3=-\frac{nh^3}{12}[\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f''(\xi_k)]$$

$$=-\frac{nh^3}{12}f''(\xi)$$ （连续函数介值定理）

$$=-\frac{b-a}{12}h^2f''(\xi)$$

其中 $\xi\in(a,b)$。

注：复合梯形公式是数值稳定和收敛的。

江南大学

7.2.2 复合Simpson公式

将积分区间$[a,b]$分成$n=2m$等份，记$h=\dfrac{b-a}{n}$， $x_k=a+k\cdot h$ （$k=0,1,\cdots,n$）

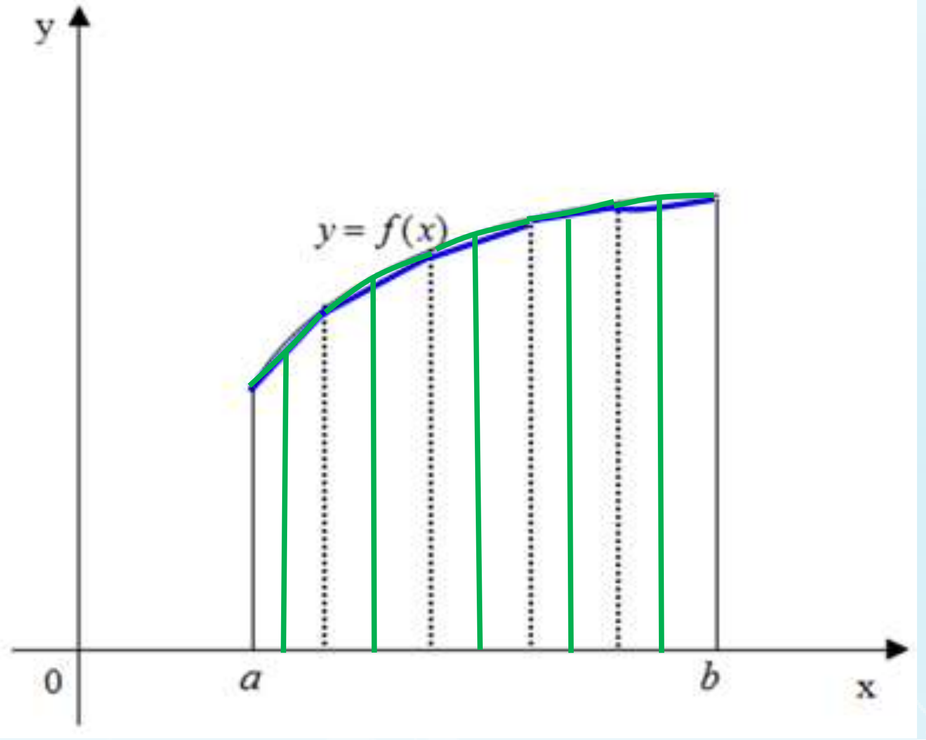
在每个小区间$[x_{2(k-1)},x_{2k}]$（$k=1,2,\cdots,m$）上使用 Simpson 公式

$$\int_{x_{2(k-1)}}^{x_{2k}} f(x)dx \approx \frac{h}{3}[f(x_{2(k-1)})+4f(x_{2k-1})+f(x_{2k})]$$

$$I[f]=\int_a^b f(x)\cdot dx=\sum_{k=1}^{m}\int_{x_{2(k-1)}}^{x_{2k}} f(x)\cdot dx \approx \sum_{k=1}^{m}\frac{h}{3}[f(x_{2(k-1)})+4f(x_{2k-1})+f(x_{2k})]$$

$$=\frac{h}{3}[f(a)+f(b)+2\sum_{k=1}^{m-1}f(x_{2k})+4\sum_{k=1}^{m}f(x_{2k-1})]\triangleq S_m \qquad (7.2.3)$$

江南大学



若 $f(x)\in C^4[a,b]$，则复合 Simpson 公式（7.2.3）的截断误差为

$$R_{S_m}[f]=-\frac{b-a}{180}h^4 f^{(4)}(\xi) \qquad (7.2.4)$$

其中 $\xi\in(a,b)$。

注：复合Simpson公式是数值稳定和收敛的。

7.2.3 复合Cotes公式

将积分区间$[a,b]$分成$n=4m$等份，记$h=\dfrac{b-a}{n}$，$x_k=a+k\cdot h$ （$k=0,1,\cdots,n$）

$$\int_{x_{4(k-1)}}^{x_{4k}} f(x)dx \approx \frac{2h}{45}[7f(x_{4(k-1)})+32f(x_{4k-3})+12f(x_{4k-2})+32f(x_{4k-1})+7f(x_{4k})]$$

$$I[f]\approx\sum_{k=1}^{m}\frac{2h}{45}[7f(x_{4(k-1)})+32f(x_{4k-3})+12f(x_{4k-2})+32f(x_{4k-1})+7f(x_{4k})]$$

$$=\frac{2h}{45}[7f(a)+7f(b)+32\sum_{k=1}^{m}f(x_{4k-3})+12\sum_{k=1}^{m}f(x_{4k-2})+32\sum_{k=1}^{m}f(x_{4k-1})+14\sum_{k=1}^{m-1}f(x_{4k})]$$

$$\triangleq C_m \qquad (7.2.5)$$

若$f(x)\in C^6[a,b]$，则复合 Cotes 公式（7.2.5）的截断误差为

$$R_{C_m}[f]=-\frac{2(b-a)}{945}h^6f^{(6)}(\xi) \qquad (7.2.6)$$

其中$\xi\in(a,b)$。

注：复合Cotes公式是数值稳定和收敛的。

复合求积公式的余项表明，复合梯形公式、复合simpson公式与复合cotes公式所得近似值的余项和步长的关系依次为 $O(h^2)$、$O(h^4)$、$O(h^6)$。因此当h→0（即n→∞）时，T_n, S_n, C_n 都收敛于积分真值，且收敛速度一个比一个快。

例1 依次用n=8的复合梯形公式、n=8的复合simpson公式计算定积分 $I=\int_0^1 \frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$

解:首先计算出所需各节点的函数值, n=8时,

$$h=\frac{1}{8}=0.125$$

由复合梯形公式可得如下计算公式:

$$T_8=\frac{1}{16}\left[f(0)+2f(0.125)+2f(0.25)+2f(0.375)+2f(0.5)\right.$$

$$\left.+2f(0.625)+2f(0.75)+2f(0.875)+f(1)\right]$$

$$=0.9456909$$

由复合simpson公式可得如下计算公式

$$S_4 = \frac{1}{24}[f(0) + f(1) + 2(f(0.25) + f(0.5) + f(0.75))$$
$$+ 4(f(0.125) + f(0.375) + f(0.625) + f(0.875))]$$
$$= 0.9460832$$

（积分准确值I=0. 9460831）

这两种方法都需要提供9个点上的函数值，计算量基本相同，然而精度却差别较大，同积分的准确值（是指每一位数字都是有效数字的积分值）比较，复合梯形法只有两位有效数字(T_8=0. 9456909)，而复合simpson法却有六位有效数字。

例 用复合梯形公式 T_8 、复合 Simpson 公式 S_4 、复合 Cotes 公式 C_2 计算积分 $\int_1^9 \sqrt{x}dx$

$$T_8 = \frac{1}{2}[\sqrt{1} + \sqrt{9} + 2\sum_{k=1}^{7} f(x_k)], \quad x_k = 1 + k$$

$$S_4 = \frac{1}{3}[\sqrt{1} + \sqrt{9} + 2\sum_{k=1}^{3} f(x_{2k}) + 4\sum_{k=1}^{4} f(x_{2k-1})], \quad x_k = 1 + k$$

$$C_2 = \frac{2}{45}[7\sqrt{1} + 7\sqrt{9} + 32\sum_{k=1}^{2} f(x_{4k-3}) + 12\sum_{k=1}^{2} f(x_{4k-2}) + 32\sum_{k=1}^{2} f(x_{4k-1}) + 14\sum_{k=1}^{1} f(x_{4k})]$$

$$x_k = 1 + k$$

例2　　用复合梯形公式计算定积分

$$I = \int_0^1 e^x \mathrm{d}x$$ 问区间[0, 1]应分多少等份

才能使误差不超过 $\frac{1}{2}\times 10^{-5}$

解：取 $f(x)=e^x$，则 $f''(x)=e^x$，又区间长度b−a=1，对复合梯形公式有余项

$$|R_T(x)| = \left| -\frac{b-a}{12} h^2 f''(\eta) \right| \le \frac{1}{12}\left(\frac{1}{n}\right)^2 e \le \frac{1}{2}\times 10^{-5}$$

即 $n^2 \ge \frac{e}{6}\times 10^5$，n≥212. 85，取n=213，即将区间[0, 1]分为213等份时，用复合梯形公式计算误差不超过 $\frac{1}{2}\times 10^{-5}$ 。

例 7.2.1： 分别利用复合梯形公式和复合 Simpson 公式计算积分

$$I=\int_0^1 e^{-x}dx$$

的近似值，要求计算结果具有四位有效数字，问区间 $[0,1]$ 的等分数 n 应至少取多少？

解： 因为当 $x\in[0,1]$ 时，$0.3<e^{-1}\le e^{-x}\le 1$，于是 $0.3<\int_0^1 e^{-x}dx<1$。若要求计算结果具有四位有效数字，即要求计算误差不超过 $\frac{1}{2}\times 10^{-4}$。

而对 $x\in[0,1]$，$\left|f^{(k)}(x)\right|=e^{-x}\le 1$ （$k=1,2,\cdots$）。于是，利用复合梯形公式计算，必须有

$$\left|R_{T_n}[f]\right|=\frac{1}{12}h^2\left|f''(\xi)\right|\le\frac{1}{12n^2}<\frac{1}{2}\times 10^{-4}$$

可得 $n>40.8$，即至少取 $n=41$，才能保证计算结果具有四位有效数字。

类似地，若改用复合 Simpson 公式计算，必须有

$$\left|R_{S_m}[f]\right|=\frac{1}{180}h^4\left|f^{(4)}(\xi)\right|\le\frac{1}{180n^4}<\frac{1}{2}\times 10^{-4}$$

可得 $n>3.2$，即至少取 $n=4$，才能保证计算结果具有四位有效数字。

此表明：在相同的计算精度要求下，复合 Simpson 公式比复合梯形公式的优越。

例 7.2.2：利用复合梯形公式计算积分

$$I[f]=\int_0^1 \frac{\sin x}{x}dx$$

的近似值，使截断误差不超过 $\frac{1}{2}\times 10^{-3}$。进一步，若取相同的步长 h，改用复合 Simpson 公式和复合 Cotes 公式计算，求它们的近似值和截断误差分别是多少？

解：由于 $f(x)=\frac{\sin x}{x}=\int_0^1 \cos(tx)dt$，因此

$$f^{(k)}(x)=\int_0^1 \frac{d^k[\cos(tx)]}{dx^k}dt=\int_0^1 t^k\cos(tx+k\frac{\pi}{2})dt$$

$$\left|f^{(k)}(x)\right|\le\int_0^1 t^k\left|\cos(tx+k\frac{\pi}{2})\right|dt\le\int_0^1 t^k dt=\frac{1}{k+1}$$

根据公式（7.2.2），为使截断误差不超过 $\frac{1}{2}\times 10^{-3}$，只需步长 h 满足：

$$\frac{(1-0)\cdot h^2}{12}\left|f''(\xi)\right| \le \frac{h^2}{12}\cdot\frac{1}{3} \le \frac{1}{2}\cdot 10^{-3} \qquad (\xi\in(0,1))$$

从而 $h \le 0.1342$。取 $h=\frac{1}{8}=0.1250<0.1342$，即 $n=8$，作如下的函数表：

表 7-2-1：步长 $h=0.1250$ 的 $f(x)=\frac{\sin x}{x}$ 函数表

k	x_k	$f(x_k)=\frac{\sin x_k}{x_k}$	k	x_k	$f(x_k)=\frac{\sin x_k}{x_k}$
0	0.000	1.000000000	5	0.625	0.936155637
1	0.125	0.997397867	6	0.750	0.908851680
2	0.250	0.989615837	7	0.875	0.877192574
3	0.375	0.976726744	8	1.000	0.841470985
4	0.500	0.958851077			

江南大学

由复合梯形公式（7.2.1）计算可得

$$T_8=\frac{h}{2}[f(0)+f(1)+2\sum_{k=1}^{7}f(x_k)]=0.945690864$$

若采用步长 $h=0.1250$，利用复合 Simpson 公式（7.2.3）来计算，此时 $m=4$，于是有

$$S_4=\frac{h}{3}[f(0)+f(1)+2\sum_{k=1}^{3}f(x_{2k})+4\sum_{k=1}^{4}f(x_{2k-1})]=0.946083311。$$

相应地截断误差为 $\left|R_{S_4}[f]\right|=\frac{1-0}{180}h^4\left|f^{(4)}(\xi)\right|\le\frac{1}{180\cdot5}0.125^4=\underline{0.271267\cdot10^{-6}}$

若采用步长 $h=0.1250$，利用复合 Cotes 公式（7.2.5）来计算，此时 $m=2$，于是有

$$C_2=\frac{2h}{45}[7f(0)+7f(1)+32\sum_{k=1}^{2}f(x_{4k-3})+12\sum_{k=1}^{2}f(x_{4k-2})+32\sum_{k=1}^{2}f(x_{4k-1})+14f(x_4)]$$

$$=0.946083069。$$

相应地截断误差为

$$\left|R_{C_2}[f]\right|=\frac{2\cdot(1-0)}{945}h^6\left|f^{(6)}(\xi)\right|\le\frac{2}{945\cdot7}0.125^6=\underline{0.115335\cdot10^{-8}}。$$

江南大学

7.2.4 复合求积公式的逐次分半算法

（1）复合梯形公式的逐次分半算法

考虑问题：当将积分区间一分为二时，复合梯形公式 T_{2^m} 与 $T_{2^{m-1}}$ 的关系（承袭法思想）

由于采用对积分区间逐次分半方法，第 $m-1$ 次计算的区间内节点是第 m 次计算的区间内偶数节点，因此在计算 T_{2^m} 时只需计算在第 m 次分割的新增节点处的函数值

将积分区间 $[a,b]$ 分成 $n=2^m$（$m=0,1,2,\cdots$）等份，记 $h_m=\dfrac{b-a}{2^m}$，$x_k=a+k\cdot h_m$（$k=0,1,\cdots,n$）。

江南大学

逐次分半复合梯形公式

$$T_{2^m}=\frac{h_m}{2}[f(a)+f(b)+2\sum_{k=1}^{2^m-1}f(a+kh_m)]$$

$$=\frac{h_m}{2}[f(a)+f(b)+2\sum_{k=1}^{2^{m-1}-1}f(a+2kh_m)+2\sum_{k=1}^{2^{m-1}}f(a+(2k-1)h_m)]$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{h_{m-1}}{2}[f(a)+f(b)+2\sum_{k=1}^{2^{m-1}-1}f(a+kh_{m-1})]+h_m\sum_{k=1}^{2^{m-1}}f(a+(2k-1)h_m)]$$

于是得到递推公式：

$$T_{2^m}=\frac{1}{2}T_{2^{m-1}}+h_m\sum_{k=1}^{2^{m-1}}f(a+(2k-1)h_m)] \qquad (7.2.8)$$

江南大学

注：$\dfrac{T - T_{2^{m-1}}}{T - T_{2^m}} \approx 4 \Rightarrow \dfrac{T_{2^m} - T_{2^{m-1}}}{T - T_{2^m}} \approx 3$

如果 $f(x) \in C^2[a,b]$，$\left|R_{T_{2^m}}[f]\right| \approx \dfrac{1}{3}\left|T_{2^m} - T_{2^{m-1}}\right|$ （7.2.9）

梯形公式的逐次分半递推公式计算**终止准则**：若给定数值积分的计算误差限 ε，则当 $\left|T_{2^m} - T_{2^{m-1}}\right| \le 3\varepsilon$ 时计算停止，并认为 T_{2^m} 是满足精度要求的积分近似值

例 用梯形公式的逐次分半的算法计算积分 $\int_1^9 \sqrt{x}dx$，要求误差不超过 $\dfrac{1}{2}\times 10^{-4}$

$$T_1 = \frac{8}{2}[\sqrt{1} + \sqrt{9}] = 16$$

$$T_2 = \frac{1}{2}T_1 + \frac{8}{2}[\sqrt{5}] = 16.944272$$

$$T_4 = \frac{1}{2}T_2 + \frac{8}{4}[\sqrt{3} + \sqrt{7}] = 17.227740$$

$$T_8 = \frac{1}{2}T_4 + \frac{8}{8}[\sqrt{2} + \sqrt{4} + \sqrt{6} + \sqrt{8}] = 17.306000$$

$$T_{16} = \frac{1}{2}T_8 + \frac{8}{16}\left[\sqrt{\frac{3}{2}} + \sqrt{\frac{5}{2}} + \sqrt{\frac{7}{2}} + \sqrt{\frac{9}{2}} + \sqrt{\frac{11}{2}} + \sqrt{\frac{13}{2}} + \sqrt{\frac{15}{2}} + \sqrt{\frac{17}{2}}\right] = 17.326420$$

例 用梯形公式的逐次分半算法计算积分 $I=\int_0^1 \frac{\sin x}{x}dx$

$$T_1=\frac{b-a}{2}[f(a)+f(b)]=\frac{1}{2}[f(0)+f(1)]$$

$$T_2=\frac{1}{2}T_1+\frac{1}{2}f(\frac{1}{2})$$

$$T_4=\frac{1}{2}T_2+\frac{1}{4}[f(\frac{1}{4})+f(\frac{3}{4})]$$

$$T_8=\frac{1}{2}T_4+\frac{1}{8}[f(\frac{1}{8})+f(\frac{3}{8})+f(\frac{5}{8})+f(\frac{7}{8})]$$

江南大学