# 习题一解答

1、按四舍五入原则，求下列各数的具有四位有效数字的近似值：

168.957；3.00045；73.2250；0.00152632

**解：**

$$168.957 \approx 0.1690 \times 10^3$$

$$3.00045 \approx 0.3000 \times 10^1$$

$$73.2250 \approx 0.7323 \times 10^2$$

$$0.00152632 \approx 0.1526 \times 10^{-2}$$

2、下列各数都是对准确值进行四舍五入得到的近似值，试分别指出它们的绝对误差限、相对误差限以及有效数字的位数：

$$x_1^* = 0.0315; x_2^* = 0.3015; x_3^* = 31.50; x_4^* = 5000; x_5^* = 5 \times 10^3$$

**解：** $x_1^* = 0.0315$：绝对误差限为 $\varepsilon_1^* = 0.500 \times 10^{-4}$；相对误差限为

$$\varepsilon_{1r}^* = \frac{0.500 \times 10^{-4}}{0.0315} = 0.1587\%$$

有效数字是 3 位。

$x_2^* = 0.3015$：绝对误差限为 $\varepsilon_2^* = 0.5000 \times 10^{-4}$；相对误差限为

$$\varepsilon_{2r}^* = \frac{0.5000 \times 10^{-4}}{0.3015} = 0.01587\%$$

有效数字是 4 位。

$x_3^* = 31.50$：绝对误差限为 $\varepsilon_3^* = 0.500 \times 10^{-2}$；相对误差限为

$$\varepsilon_{3r}^* = \frac{0.500 \times 10^{-2}}{31.50} = 0.01587\%$$

有效数字是 4 位。

$x_4^* = 5000$：绝对误差限为 $\varepsilon_4^* = 0.5000$；相对误差限为

$$\varepsilon_{4r}^* = \frac{0.5000}{5000} = 0.0001000\%$$

有效数字是 4 位。

$x_5^* = 5 \times 10^3$：绝对误差限为 $\varepsilon_5^* = 0.500 \times 10^3$；相对误差限为

$$\varepsilon_{5r}^* = \frac{0.500 \times 10^3}{5 \times 10^3} = 10\%$$

有效数字是 1 位。

3、设 $y_0 = 28$，按递推公式 $y_n = y_{n-1} - \frac{1}{100}\sqrt{783} (n = 1,2,3,\cdots)$，计算 $y_{100}$，若取 $\sqrt{783} \approx 27.982$（5 位有效数字），试问计算 $y_{100}$ 将产生的误差是多少？其数值稳定性又如何？

**解**：由$\sqrt{783} \approx 27.982$，其中取 5 位有效数字，可得其绝对误差限为$0.50000 \times 10^{-3}$。再由递推公式$y_n = y_{n\text{-}1} - \frac{1}{100}\sqrt{783}(n = 1,2,3,\cdots)$知：

$$\left|e(y_n^*)\right| = \left|y_n - y_n^*\right| = \left|\left(y_{n\text{-}1} - \frac{1}{100}\sqrt{783}\right) - \left(y_{n-1}^* - \frac{1}{100}\sqrt{783}\right)\right|$$

$$= \left|y_{n-1} - y_{n-1}^*\right| = \left|e(y_{n-1}^*)\right| = \cdots = \left|e(y_1^*)\right| \le \frac{0.5000 \times 10^{-3}}{100} = 0.5000 \times 10^{-5}$$

因此有$\left|e(y_{100}^*)\right| \le 0.5000 \times 10^{-5}$。

由于$\left|e(y_n^*)\right| = \left|e(y_1^*)\right|$（$n = 2,3,\cdots$），因此误差不会扩大，即由此递推公式进行计算所获得的数值计算值是稳定的。

4、下列各题怎样计算才合理？

（1）$1 - \cos 1^0$（用 4 位函数表求三角函数);

（2）$\ln(30 - \sqrt{30^2 - 1})$(开方用 6 位函数表)；

（3）$\int_N^{N+1} \frac{dx}{1 + x^2}$(其中$N$充分大)；

（4）$\frac{1 - \cos x}{\sin x}$（其中$|x|$充分小）。

**解**：（1）由于$\cos 1^0$与 1 非常接近，按照数值计算的基本原则应避免它们直接相减。合理的计算方式是:；$1 - \cos 1^0 = 2\sin^2 0.5^0 = 0.05023$；

（2）由于$\sqrt{30^2 - 1}$与 30 非常接近，按照数值计算的基本原则应避免它们直接相减。合理的计算方式是：$\ln(30 - \sqrt{30^2 - 1}) = -\ln(30 + \sqrt{30^2 - 1}) = -4.09407$；

（3）由$\int_N^{N+1} \frac{dx}{1 + x^2} = \arctan(N+1) - \arctan(N)$，当$N$充分大时，$\arctan(N+1)$与$\arctan(N)$非常接近，按照数值计算的基本原则应避免它们直接相减。合理的计算方式是：$\arctan(N+1) - \arctan(N) = \arctan(1/(N^2 + N + 1))$；

（4）当$|x|$充分小时，按照数值计算的基本原则应避免它们直接相减。合理的计算方式是：$\frac{1 - \cos x}{\sin x} = \tan(x/2)$；

5、设$s = \frac{1}{2}gt^2$，假设$g$是准确的，而对$t$的测量有$\pm 0.1$秒的误差，试问当$t$增大时，$s$的绝对误差与相对误差如何变化？

**解**：由$t$的测量有$\pm 0.1$秒的误差知：$\varepsilon(t^*) = 0.1$。于是有

$$e(s^*) \approx gt^* e(t^*)$$

因此，随着$t$的增大，$s$的绝对误差也会增大。进一步，有

$$e_r(s^*) \approx \frac{gt^* e(t^*)}{s^*} = \frac{gt^* e(t^*)}{\frac{1}{2} g\left(t^*\right)^2} = \frac{2e(t^*)}{t^*} = 2e_r(t^*)$$

因此，随着$t$的增大，$s$的相对误差会减少，且$s$的相对误差约为观测值$t$的相对误差的 2 倍。

6、计算球的体积时，为使其相对误差限为 1%，试求球半径的相对误差最大为多少？

**解**：由$V = \frac{4}{3}\pi R^3$知：$e(V^*) \approx \left.\frac{dV}{dR}\right|_{r=R^*} e(R^*) = 4\pi\left(R^*\right)^2 e(R^*)$。于是

$$e_r(V^*) = \frac{e(V^*)}{V^*} \approx \frac{4\pi\left(R^*\right)^2 e(R^*)}{\frac{4\pi}{3}\left(R^*\right)^3} = 3e_r(R^*)$$

当$\left|e_r(V^*)\right| \le 0.01$时，有$\left|e_r(R^*)\right| \approx \frac{1}{3}\left|e_r(V^*)\right| \le 0.3333\%$。

7、用秦九韶法计算 $p_3(x) = 2x^3 + 7x^2 - 9$ 在 $x = -2$ 处的值，并用（1.4.3）式给出计算过程。

**解**：由题给条件知：$a_3 = 2$，$a_2 = 7$，$a_1 = 0$，$a_0 = -9$，且$x = -2$。于是，依照秦九韶法的计算过程如下：

（1）$u_3 = a_3 = 2$；

（2）$u_2 = u_3 x + a_2 = 3$；

（3）$u_1 = u_2 x + a_1 = -6$；

（4）$u_0 = u_1 x + a_0 = 3$

因此，$p_3(-2) = u_0 = 3$，且总的乘法运算次数为 3。

8、对于积分 $I_n = \int_0^1 x^n e^{x-1} dx$　（$n = 0, 1, 2, \cdots$）

（1）验证 $I_0 = 1 - e^{-1}$，$I_n = 1 - nI_{n-1}$（$n = 0, 1, 2, \cdots$）；

（2）若取 $e^{-1} \approx 0.3697$，按递推公式 $I_n = 1 - nI_{n-1}$，用四位有效数字计算 $I_0, I_1, \cdots$，$I_9$, 并证明这种算法是不稳定的。

（3）若反向递推计算时，这种算法的数值稳定性又将如何？试给出误差分析加以说明。

**解**：（1）$I_0 = \int_0^1 e^{x-1} dx = 1 - e^{-1}$；由分部积分法知：

$$I_n = \int_0^1 x^n e^{x-1} dx = 1 - n\int_0^1 x^{n-1} e^{x-1} dx = 1 - nI_{n-1}$$

即有 $I_n = 1 - nI_{n-1}$（$n = 0, 1, 2, \cdots$）。

（2）若取 $e^{-1} \approx 0.3697$，则可得递推公式如下：

$$\begin{cases} I_n = 1 - nI_{n-1} \\ I_0 = 1 - e^{-1} = 0.6303 \end{cases}$$

计算结果表见下表

| $n$ | $I_n$ | $n$ | $I_n$ |
|---|---|---|---|
| 0 | 0.6303 | 5 | 0.3640 |
| 1 | 0.3697 | 6 | -1.184 |
| 2 | 0.2606 | 7 | 9.288 |
| 3 | 0.2182 | 8 | -73.30 |
| 4 | 0.1272 | 9 | 660.7 |

由于 $e_n^* = -(I_n - I_n^*) = -\ 1 - nI_{n-1}\ +\ 1 - nI_{n-1}^*\ = -ne_{n-1}^*$，可得 $e_n^* = (-1)^n n! e_0^*$。容易看到：随着 $n$ 的增大，误差的绝对值 $\left|e_n^*\right| = n!\left|e_0^*\right|$ 也在不断增大。因此，该算法是不稳定的。

（3）若反向递推计算时，其递推公式为 $I_{n-1} = \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n} I_n$。于是

$$e_{n-1}^* = -(I_{n-1} - I_{n-1}^*) = -\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n} I_n\right) + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n} I_n^*\right) = -\frac{1}{n} e_n^*$$

从而，可推得：$e_0^* = \dfrac{(-1)^n}{n!} e_n^*$，即每迭代一次，误差的绝对值都会减少。因此该算法是稳定的。

9、已知 $\pi = 3.141592654\cdots$，

（1）若其近似值取 5 位有效数字，则该近似值是多少？相应地，绝对误差限是多少？

（2）若其近似值精确到小数点后面 6 位，则该近似值是多少？绝对误差限又是多少？

（3）若其近似值绝对误差限为 $0.5 \times 10^{-5}$，则近似值是多少？其近似值有效数字是多少？

**解：**（1）若其近似值取 5 位有效数字，则该近似值是 $\pi = 0.31416 \times 10^1$，且相应地误差限是 $0.50000 \times 10^{-4}$；

（2）若其近似值取 6 位有效数字，则该近似值是 $\pi = 0.314159 \times 10^1$，且相应地误差限是 $0.50000 \times 10^{-5}$；

（3）若其近似值绝对误差限为 $0.5 \times 10^{-5}$，则近似值是 $\pi = 3.14159$，且有效数字至少是 6 位。