《 数值分析 》期中考试卷

使用专业、班级__________ 学号__________ 姓名__________

题 数	一	二	三	四	五	六	总 分
得 分							

本题得分	

一、填空题 〖每空 2 分，共计 24 分〗

1. $x^*=2.142$ 作为准确值 $x=2.139$ 的近似值，它具有___3___位有效数字。

2. 设 $x^*>0$，x^* 的相对误差为 δ，则 $\ln x^*$ 的误差是___δ___。

3. 设 $A=\begin{pmatrix}-2 & -1\\ 1 & 2\end{pmatrix}$，则 $\|A\|_1=$___3___，$\|A\|_\infty=$___3___，$\|A\|_2=$___3___。

4. 设 $f(x)=x^3+x+1$，则 $f[0,1,2]=$___3___，$f[0,1,2,3]=$___1___。

5. 设非奇异矩阵 $A=(a_{ij})_{n\times n}$，$a_{ii}\neq 0$（$i=1,2,\cdots,n$）将 A 分裂成 $A=D-L-U$，则 Gauss-Seidel 迭代矩阵是___$(D-L)^{-1}U$___。

6. 当 N 充分大时，计算 $\int_N^{N+1}\frac{1}{1+x^2}dx$ 的合理公式是___$\arctan\frac{1}{1+N(N+1)}$___

7. 设近似值 $x_0=\sqrt{2}\approx 1.41$（三位有效数字），

则用递推式 $x_n=2x_{n-1}+41.2$, ($n=1,2,\cdots$)计算的算法是___不稳定___(稳定或不稳定)，它的误差是___$2^n\times\frac{1}{2}\times10^{-2}$___

8. 设迭代格式 $x^{(k+1)}=Mx^{(k)}+g$，其中 $M=\begin{bmatrix}0.5 & 0\\ 7 & 0.9\end{bmatrix}$，$g=\begin{bmatrix}20\\30\end{bmatrix}$，则该迭代___收敛___（收敛或发散）。

本题得分	

二、填空题 〖每空 2 分，共计 10 分〗

1. 用列主元素消去法解线性方程组 $\begin{cases}3x_1-x_2+3x_3=-1\\ -7x_1+2x_2-9x_3=0\\ -6x_1-3x_2+x_3=1\end{cases}$，第一次消元选取的主元素是

（ B ）。

A 3　　B -7

C -6　　D -9

2. 通过点 (x_0,y_0)，(x_1,y_1) 的 Lagrange 插值基函数 $l_0(x)$，$l_1(x)$ 满足(D)。

A $l_0(x_0)=0$，$l_1(x_1)=0$　　B $l_0(x_0)=0$，$l_1(x_1)=1$

C $l_0(x_0)=1$，$l_1(x_1)=0$　　D $l_0(x_0)=1$，$l_1(x_1)=1$

3. 设 $s=\frac{1}{2}gt^2$，假定 g 是准确的，而对 t 的测量有误差。当 t 增加时，s 的绝对误差和相对误差分别（ B ）。

A 增大，增大　　B 增大，减少

C 减少，增大　　D 减少，减少

4. 解线性方程组 $Ax=b$ 迭代法 $x^{(k+1)}=Bx^{(k)}+f$ 收敛的充要条件是（ B ）。

A $\rho(B)\le 1$　　B $\rho(B)<1$

C $\rho(A)\le 1$　　D $\rho(A)<1$

5. 矩阵 $\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 3 & 2\\ 4 & 8 & 3\end{pmatrix}$ 的 LU 分解情况是（ B ）。

A 能分解但不唯一　　B 能分解且唯一

C 不能分解　　D 无法确定

考试形式开卷（ ）、闭卷（ ），在选项上打（√）

开课教研室________ 命题教师________ 命题时间________ 使用学期________ 总张数________ 教研室主任审核签字________

本题得分	

三、用直接三角分解法解 $\begin{bmatrix}1&2&3\\2&3&5\\4&2&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\4\\1\end{bmatrix}$，并写出 L 和 U 矩阵。

〖15 分〗

线性方程的紧凑格式

$$\begin{array}{c|ccc} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & -1 & -1 & 0 \\ 4 & 6 & -5 & -7 \end{array}$$

$$L=\begin{bmatrix}1&0&0\\2&1&0\\4&6&1\end{bmatrix},\quad U=\begin{bmatrix}1&2&3\\0&-1&-1\\0&0&-5\end{bmatrix}$$

由 $Ux=y$

$$\begin{bmatrix}1&2&3\\0&-1&-1\\0&0&-5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\0\\-7\end{bmatrix}$$

得 $\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{3}{5}\\-\frac{7}{5}\\\frac{7}{5}\end{bmatrix}$

本题得分	

四、给定数据表

x	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6
$f(x)$	9	6	5	3	2	4

用二次插值计算 $f(0.31)$ 的近似值。〖15 分〗

取 $x_0=0.2$，$x_1=0.3$，$x_2=0.4$

作差商表

x	y	1阶差商	2阶差商
0.2	6		
0.3	5	−10	
0.4	3	−20	−50

$$N_2(x)=6-10(x-0.2)-50(x-0.2)(x-0.3)$$

$$f(0.31)\approx N_2(0.31)=4.845$$

本题得分	

五、设线性方程组

$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 + x_3 = 10, \\ -x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 12, \\ 4x_1 + 2x_2 + x_3 = 16, \end{cases}$$

（1）写出 Jacobi 迭代法、Gauss-Seidel 迭代法解该方程组的迭代公式；〖6 分〗

（2）考察用 Gauss-Seidel 解该方程组的收敛性。〖12 分〗

(1) Jacobi
$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = 0.5x_2^{(k)} + 0.5x_3^{(k)} - 5 \\ x_2^{(k+1)} = 0.5x_1^{(k)} - 1.5x_3^{(k)} + 6 \\ x_3^{(k+1)} = -4x_1^{(k)} - 2x_2^{(k)} + 16 \end{cases}$$

Gauss-seidel
$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = 0.5x_2^{(k)} + 0.5x_3^{(k)} - 5 \\ x_2^{(k+1)} = 0.5x_1^{(k+1)} - 1.5x_3^{(k)} + 6 \\ x_3^{(k+1)} = -4x_1^{(k+1)} - 2x_2^{(k+1)} + 16 \end{cases}$$

(2) 由
$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = 0.5x_2^{(k)} + 0.5x_3^{(k)} - 5 \\ x_2^{(k+1)} = 0.25x_2^{(k)} - 1.25x_3^{(k)} + 3.5 \\ x_3^{(k+1)} = -2.5x_2^{(k)} + 0.5x_3^{(k)} + 29 \end{cases}$$

得 $M_{GS} = \begin{bmatrix} 0 & 0.5 & 0.5 \\ 0 & 0.25 & -1.25 \\ 0 & -2.5 & 0.5 \end{bmatrix}$,

$|\lambda - M_{GS}E| = \lambda(\lambda^2 - 0.75\lambda - 3)$

则 $\rho(M_{GS}) = \frac{0.75 \pm \sqrt{12.5625}}{2} > 1$

得 G-S法发散

本题得分	

六、用最小二乘拟合方法求一形如 $y = ax + bx^3$（a，b 为常数）的经验公式，其中数据表如下：

x	-2	-1	0	1	2
y	-8.99	-1.51	0.001	1.47	9.02

〖18 分〗

取 $\varphi_0(x) = x$, $\varphi_1(x) = x^3$

得 $(\varphi_0, \varphi_0) = \sum_{i=1}^{5} x_i^2 = 10$, $(\varphi_0, \varphi_1) = \sum_{i=1}^{5} x_i^4 = 34$

$(\varphi_1, \varphi_1) = \sum_{i=1}^{5} x_i^6 = 130$

$(y, \varphi_0) = \sum_{i=1}^{5} y_i x_i = 39$, $(y, \varphi_1) = \sum_{i=1}^{5} y_i x_i^3 = 147.06$

得正则方程组

$$\begin{bmatrix} (\varphi_0, \varphi_0) & (\varphi_0, \varphi_1) \\ (\varphi_1, \varphi_0) & (\varphi_1, \varphi_1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (y, \varphi_0) \\ (y, \varphi_1) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 10 & 34 \\ 34 & 130 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 39 \\ 147.06 \end{bmatrix}$$

得 $a \approx 0.4858$, $b \approx 1.0042$

则拟合曲线为 $y = 0.4858x + 1.0042x^3$