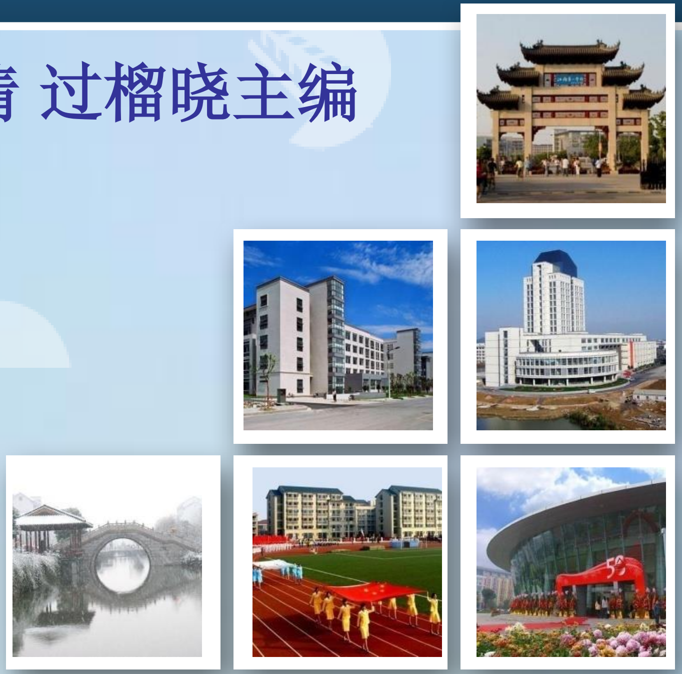
江南大学

数值分析

教材：《数值计算方法》唐旭清 过榴晓主编



课程教学简介

1. 总学时（64）：

理论学时（48），实验学时（16）

2. 开设实验项目数8：

偶数周周五的课，地点理学院机房316

3. 课程考核方式：

期末考试成绩、实验成绩、平时成绩分别占60%，25%，15%

4. 上机编程软件：

Dev-C++, 上交.cpp原代码作为实验成绩

钉钉班级群

数值分析信计2101-21... 培训

此二维码365天内有效(2024年09月03日前)

钉钉扫一扫群二维码，立即加入群聊

- 课件ppt
- 每周作业布置（两周一交）
- 教师（殷萍）和助教（张芳）均在群（课堂疑问，上交作业联系，请假~~~）

各班课代表

信计2101张冬临

信计2102 万杰

信计2103江承恩

江南大学

参考教材

1. 李庆扬.数值分析[M].北京：清华大学出版社，2008.

2. 徐树方，高立，张平文.数值线性代数[M].北京：北京大学出版社，2013.

3. 王仁宏.数值逼近[M].北京：高等教育出版社，2012.

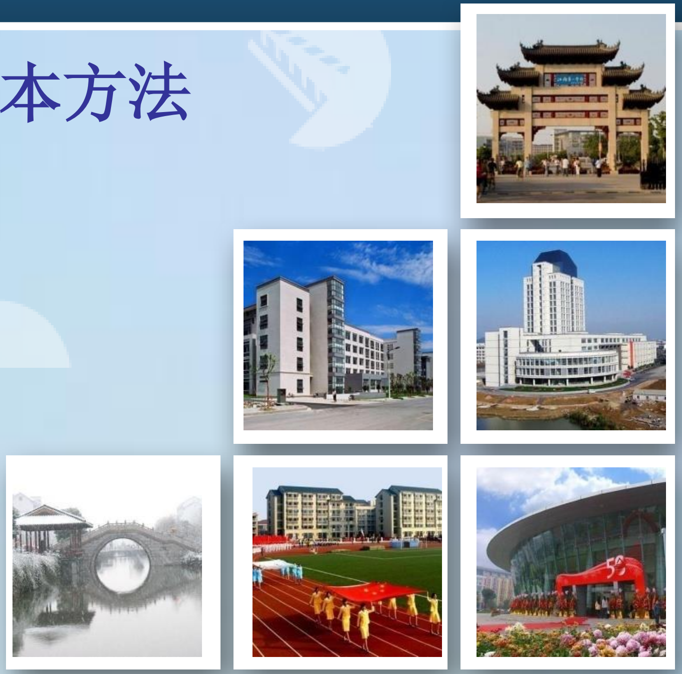
4. 李荣华，刘播.微分方程数值解法[M].北京：高等教育出版社，2009.

江南大学

江南大学

第一节

数值计算方法的任务与基本方法



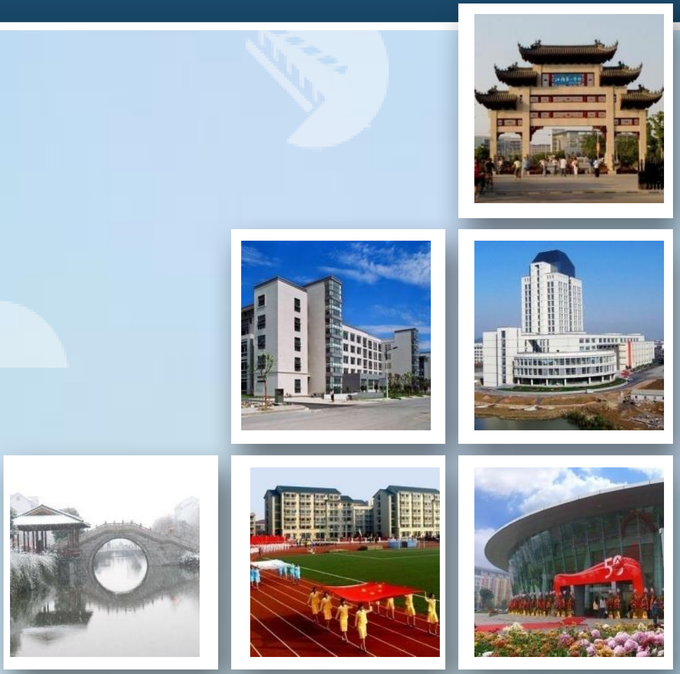
数值计算方法的根本任务是研究算法，即包括算法构成与算法分析（近似、离散解）

构造算法的原则是要以计算机所能执行运算为依据，尽可能节省机器内存和运算工作量（代码实现）

算法分析是分析算法的理论依据、应用范围、收敛性、稳定性、误差估计及计算的空间和事件复杂度等（蝴蝶效应）

第二节

误差及有关概念



1.2.1误差的来源及分类

实际问题的近似求解过程图

实际问题 → 建立数学模型 → 确定数值计算方法 → 编程并计算近似解

数学模型与实际问题之间出现的这种误差称为模型误差

由观测产生的误差称之为观测误差

系统误差

由数学问题转化为数值问题产生的误差，称之为截断误差

例如，用 e^x 的幂级数展开式 $e^x=\sum_{i=0}^{\infty}\frac{x^i}{i!}$ 来计算 e^x 的值

方法误差

由计算机字位而产生的误差称为舍入误差

1.2.2误差的描述

A. 绝对误差与绝对误差限

设x^*是准确值（或精确值）x的一个近似值，则称$e^*=x^*-x$为近似值x^*的绝对误差，简称误差。

存在某个正数$\varepsilon^*>0$，使得：

$$|e^*|=|x^*-x|\le\varepsilon^*$$

这个ε^*就称为近似值x^*的绝对误差限.

x的取值范围：

$$x^*-\varepsilon^*\le x\le x^*+\varepsilon^* \quad 或 \quad x=x^*\pm\varepsilon^*$$

对于同一个准确值x而言，e^*或ε^*越小，近似值x^*就越精确，

注：

有两个测量值$x=15\pm2$和$y=1000\pm5$

B. 相对误差与相对误差限

设 x^* 是准确值 x 的一个近似值，e^* 是它的绝对误差，则称：

$$e_r^* = \frac{e^*}{x} = \frac{x^* - x}{x}$$

为近似值 x^* 的相对误差。

注: 相对误差通常取 $e_r^* = \frac{e^*}{x^*} = \frac{x^* - x}{x^*}$

与绝对误差一样，相对误差也只能估计其上限。如果存在正数 ε_r^*，使得：

$$|e_r^*| = \left|\frac{e^*}{x^*}\right| \le \varepsilon_r^*$$

则称 ε_r^* 为近似值 x^* 的相对误差限。

有两个测量值 $x = 15 \pm 2$ 和 $y = 1000 \pm 5$

C. 精确位数与有效数字（有效数字与绝对误差的关系）

定义 1.2.1： 如果近似值 x^* 的误差绝对值不超过某一位数字所在数字位的半个单位，且该数字到 x^* 的第一位非零数字共有 n 位，则称用 x^* 近似 x 时具有 n 位有效数字，简称 x^* 有 n 位有效数字。

例如，因圆周率 π 分别满足：

$$|\pi-3.1416| \le \frac{1}{2}\times 10^{-4}, \quad |\pi-3.14159| \le \frac{1}{2}\times 10^{-5}$$

则 π 的近似值 3.1416 具有 5 位有效数字，而 3.14159 具有 6 位有效数字。

注：$$|\pi - 3.1416| \le 3.1416 - 3.1415926$$

$$= 0.0000074 \le \frac{1}{2} \times 10^{-4}$$

江南大学

科学计数法

在计算机中参加运算的数值通常进行标准化表示，即将数值表示成如下形式：

$$x = \pm 0.a_1 a_2 \cdots a_n \cdots \times 10^m \qquad (1.2.7)$$

其中 m 位整数，$a_1, a_2, a_3, \cdots$ 为 0,1，…，9 中的数字，且 $a_1 \neq 0$。此种表示法也称为科学计数法。

定义 1.2.2： 如果 x 的近似值 x^* 满足不等式（1.2.9），则 x^* 具有 n 位有效数字。

$$|x^* - x| \leq \frac{1}{2} \times 10^{m-n} \qquad (1.2.9)$$

江南大学

注：经四舍五入得到的数字或（1.2.7）的规格化形式后，小数点后的有效位数才能反映出有效位数的多少

如果不是通过四舍五入得到，那么它的数字并不都是有效数字，同时它的数字位数并不等于该数的有效数字的位数

例 1.2.3： 设 $x=1000$，它的两个近似值分别为：$x_1^*=999.9$ 和 $x_2^*=1000.1$，其误差绝对值均为 $|x_1^*-x|=|x_2^*-x|=0.1$，但 $x_1^*=999.9=0.9999\times10^3$，从而 $m=3$；而 $|x_1^*-x|=0.1\le\frac{1}{2}\times10^0=\frac{1}{2}\times10^{3-n}$，可得 $n=3$，由定义 1.2.2 知：x_1^* 具有 3 位有效数字。同理可知，x_2^* 具有 4 位有效数字。

江南大学

例1 42.195， 0.0375551， **8.00033**， 2.71828，按四舍五入写出上述各数具有四位有效数字的近似数.

例2 设$x=\pi=3.1415926\ldots$， 求近似值$x^*=3.1415$的有效数字

例1 42. 195， 0. 0375551， **8. 00033**， 2. 71828，按四舍五入写出上述各数具有四位有效数字的近似数.

42. 20

0. 03756

8. 000

2. 718

例2 设$x=\pi=3.1415926\ldots$， 求近似值$x^*=3.1415$的有效数字

解1：$x^*=3.1415$的**绝对误差限**0.0005，它是x的小数后**第3位**的半个单位，故近似值$x^*=3.1415$准确到小数点后第3位.

故近似值$x^*=3.1415$只有4位有效数字

解2： 若取近似值$x^*=3.1415$，绝对误差是0.0000926…，有

$$\left|x-x^*\right|=0.0000926\cdots\leq 0.5\times 10^{-3}=0.5\times 10^{1-4}$$

即$m=1,n=4$，故近似值$x^*=3.1415$只有4位有效数字.

相对误差限与有效数字的关系

定理 1.2.1： 设x^*是x的近似值，它的表达式为（1.2.8），则x^*的有效数字与x^*的相对误差之间有如下关系：

（1）若x^*具有n位有效数字时，x^*的相对误差

$$\left|e_r^*\right| \le \frac{1}{2a_1} \times 10^{-n+1} \qquad (1.2.10)$$

（2）若x^*的相对误差限

$$\varepsilon_r \le \frac{1}{2(a_1+1)} \times 10^{-n+1} \qquad (1.2.11)$$

则x^*至少具有n位有效数字。

注：近似值的有效数字越多（即 越大），相对误差（限）就越小；反之，相对误差（限）越小，则（1.2.11）式右端项中的 就有可能越大，有效数字位数就有可能越多

例3 指出下列各数具有几位有效数字，及其绝对误差限和相对误差限：

－0.002 00　　　　9 000.00

例3 指出下列各数具有几位有效数字，及其绝对误差限和相对误差限：

－0.002 00 9 000.00

解：$x1^*=$ －0.002 00有n=3位有效数字，

它的科学计数法的表达式是 -0.200×10^{-2} ，其中$a_1=2$，m= -2

绝对误差限 $0.5\times 10^{-5}=0.5\times 10^{-2-3}=0.5\times 10^{m-n}$

相对误差限$\varepsilon_r=$ $$\frac{1}{2\times 2}\times 10^{-3+1}=0.0025$$

$x_2^*=9\,000.00$有n=6位有效数字

它的科学计数法的表达式是0.900000×10^{4},其中$a_1=9$，m=4

绝对误差限 $0.5\times 10^{-2}=0.5\times 10^{m-n}$

相对误差限为$\varepsilon_r=$ $$\frac{1}{2\times 9}10^{-6+1}=0.000\,000\,56$$

本节重点：

1. 如何确定有效数字位数
2. 从有效数字得绝对误差限和相对误差限