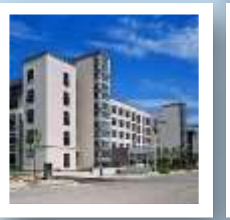
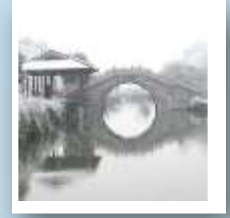
江南大学

第二章 线性方程组的直接解法

第四节 矩阵三角分解及其在解方程组中的应用



2.4.1 Gauss消去过程的矩阵表示

由线性代数（或高等代数）的相关知识知：消元过程等价于用一系列初等矩阵去左乘增广矩阵，因此可以通过初等矩阵来表示

第一步：

$$l_{i1}=\frac{a_{i1}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}}\quad (i=2,\ldots\ldots,n)$$

$$L_1=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -l_{21} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ -l_{31} & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -l_{n1} & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

得到 $L_1\left[A^{(1)},b^{(1)}\right]=\left[A^{(2)},b^{(2)}\right]$

江南大学

第二步：

$$l_{i2} = \frac{a_{i2}^{(2)}}{a_{22}^{(2)}} \quad (i = 3, \ldots\ldots, n).$$

$$L_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -l_{32} & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & -l_{n2} & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

得到 $L_2\left[A^{(2)}, b^{(2)}\right] = \left[A^{(3)}, b^{(3)}\right]$

第k步： $$l_{ik} = \frac{a_{ik}^{(k)}}{a_{kk}^{(k)}} \quad (i = k+1, \ldots\ldots, n)$$

$$L_k = \begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & -l_{k+1,k} & 1 & & \\ & & \vdots & & \ddots & \\ & & -l_{n,k} & \cdots & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

得到 $L_k\left[A^{(k)}, b^{(k)}\right] = \left[A^{(k+1)}, b^{(k+1)}\right]$

第 $n-1$ 步

$$L_{n-1}L_{n-2}\cdots L_1\left[A^{(1)},b^{(1)}\right]=\begin{bmatrix} a_{11}^{(1)}, & a_{12}^{(1)}, & \cdots, & a_{1n}^{(1)}, & b_1^{(1)} \\ & a_{22}^{(2)}, & \cdots, & a_{2n}^{(2)}, & b_2^{(2)} \\ & & \ddots & \vdots & \vdots \\ & & & a_{nn}^{(n)}, & b_n^{(n)} \end{bmatrix}$$

$$=\left[A^{(n)},b^{(n)}\right] \qquad (2.4.1)$$

因为 $L_k^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & l_{k+1,k} & 1 & & \\ & & \vdots & & \ddots & \\ & & l_{nk} & \cdots & \cdots & 1 \end{bmatrix}$

$$\text{从而 } L = (L_{n-1}L_{n-2}\cdots L_2L_1)^{-1} = L_1^{-1}L_2^{-1}\cdots L_{n-1}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ l_{n1} & l_{n2} & l_{n3} & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

（2.4.1）式可记为

$$\left[A^{(1)},b^{(1)}\right]=L\left[A^{(n)},b^{(n)}\right] \quad 或 \quad A=LA^{(n)},b=Lb^{(n)} \qquad （2.4.3）$$

其中 L 是对角线上元素为 1 的下三角形矩阵，也称为单位下三角形矩阵，$A^{(n)}$ 为上三角形矩阵。

2.4.2 矩阵的三角分解

定义 2.4.1：对 n 阶矩阵 $A \in R^{n \times n}$，若存在单位下三角形矩阵 L 及上三角形矩阵 U，使得

$$A = LU \qquad (2.4.4)$$

则称 LU 为矩阵 A 的杜利特尔（Doolittle），也称 LU 分解。

定理 2.4.1：设 A 为 n 阶方阵，若 A 的顺序主子式 A_i（$i = 1, 2, \ldots, n-1$）均不为零，则矩阵 A 存在唯一的 Doolittle 分解。

例2 根据Gauss消去法作LU分解$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & -1 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & -1 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{l_{21}=0,\, l_{31}=2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & -1 \\ 0 & -4 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{l_{32}=-1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}, U = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

江南大学

例3 下述矩阵能否LU分解？若能分解，分解是否唯一？

$$A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 4 & 1\\ 4 & 6 & 7\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 2 & 2 & 1\\ 3 & 3 & 1\end{bmatrix}, C=\begin{bmatrix}1 & 2 & 6\\ 2 & 5 & 15\\ 6 & 15 & 46\end{bmatrix}$$

因为C的1阶和2阶顺序主子式均不为0，由定理2.4.1知，C的LU分解存在且唯一

设A能分解，则有

$$A = LU = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ 0 & u_{22} & u_{23} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 1 \\ 4 & 6 & 7 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 4 & l_{32} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & u_{33} \end{pmatrix}$$

第三行第二列左=8，右=6矛盾

A不能分解

设B能分解，则有

$$B = LU = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ 0 & u_{22} & u_{23} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & l_{32} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & u_{33} \end{pmatrix}$$

第三行第三列左边=1，右边=3-l_{32} + u_{33}

可分解，分解不唯一

矩阵LU分解的求法

矩阵 A 的 LU 分解的求法

$$\begin{bmatrix} a_{11}, & a_{12}, & \cdots, & a_{1n} \\ a_{21}, & a_{22}, & \cdots, & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1}, & a_{n2}, & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} = A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ l_{n1} & l_{n2} & l_{n3} & \cdots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{11}, & u_{12}, & \cdots & u_{1n} \\ & u_{22}, & \cdots & u_{2n} \\ & & \ddots & \\ & & & u_{nn} \end{bmatrix} \quad (2.4.8)$$

$$\Rightarrow a_{ij} = \sum_{k=1}^{\min\{i,j\}} l_{ik} u_{kj}$$

江南大学

$$a_{1j} = u_{1j} \quad (j = 1,2,\ldots,n)$$

$$a_{ij} = \begin{cases} \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik}u_{kj} + u_{ij}, j \geq i \\ \sum_{k=1}^{j} l_{ik}u_{kj},\ j < i \end{cases} \quad (i = 2,3,\ldots,n) \qquad (2.4.9)$$

由此可得计算l_{ij}和u_{ij}的公式如下：

$$\begin{cases} u_{1j} = a_{1j}, \quad j = 1,2,\ldots,n \\ l_{ij} = \dfrac{a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{ik}u_{kj}}{u_{jj}}, \quad j = 1,2,\ldots,n; i = j+1,\ldots,n \\ u_{ij} = a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik}u_{kj}, \quad i = 2,3,\ldots,n; j = i,\ldots,n \end{cases} \qquad (2.4.10)$$

计算l_{ij}和u_{ij}的过程是按第一行，第一列，第二行，第二列，------，顺序进行。具体步骤如下：

（1）计算U的第一行和U的第一列：$u_{1j}=a_{1j}$（$j=1,2,\ldots,n$），$l_{i1}=\dfrac{a_{i1}}{a_{11}}$（$i=2,\ldots,n$）；

（2）计算U的第r行，L的第r列（$r=2,3,\ldots,n$）：

$$u_{rj}=a_{rj}-\sum_{k=1}^{r-1}l_{rk}u_{kj}\quad(j=r,r+1,\ldots,n);\quad \boxed{u_{ir}}=\frac{(a_{ir}-\sum_{k=1}^{r-1}l_{ik}u_{kr})}{u_{rr}}\quad(i=r+1,\ldots,n)$$

l_{ir}

$a_{11}(u_{11})$	$a_{12}(u_{12})$	$a_{13}(u_{13})$	$\cdots$	$a_{1n}(u_{1n})$
$a_{21}(l_{21})$	$a_{22}(u_{22})$	$a_{23}(u_{23})$	$\cdots$	$a_{2n}(u_{2n})$
$a_{31}(l_{31})$	$a_{32}(l_{32})$	$a_{33}(u_{33})$	$\cdots$	$a_{3n}(u_{3n})$
$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
$a_{n1}(l_{n1})$	$a_{n2}(l_{n2})$	$a_{n3}(l_{n3})$	$\cdots$	$a_{nn}(u_{nn})$

图 2-4-1：矩阵 A 的 Doolittle 分解的紧凑形式图

其计算次序从矩阵 的左上角向右下角方向分层计算，且在每层中，先行后列

例 2.3.1： 求矩阵 A 的 Doolittle 分解，其中

$$A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 1 & 4 & 9 & 16\\ 1 & 8 & 27 & 64\\ 1 & 16 & 81 & 256\end{bmatrix}。$$

解： 由紧凑格式

1 (1)	2 (2)	3 (3)	4 (4)
1 (1)	4 (2)	9 (6)	16 (12)
1 (1)	8 (3)	27 (6)	64 (24)
1 (1)	16 (7)	81 (6)	256 (24)

就得到 A 的 Doolittle 分解式为：

$$A=LU=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 0 & 0\\ 1 & 3 & 1 & 0\\ 1 & 7 & 6 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 0 & 2 & 6 & 12\\ 0 & 0 & 6 & 24\\ 0 & 0 & 0 & 24\end{bmatrix}$$

2.4.3 线性方程组的直接三角分解法

如果 n 阶线性方程组 $Ax=b$ 的系数矩阵 A 的 Doolittle 分解存在，即 $A=LU$，

则解方程组 $Ax=b$ 等价于求解两个三角形方程组 $Ly=b$ 与 $Ux=y$

$$Ly=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ l_{n1} & l_{n2} & l_{n3} & \cdots & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} \tag{2.4.11}$$

$$y_k=\begin{cases} b_1, k=1 \\ \mathrm{b}_k-\sum_{j=1}^{k-1} l_{kj}y_j, k=2,3,\dots,n \end{cases} \tag{2.4.12}$$

其计算次序是： $y_1 \to y_2 \to \cdots \to y_n$

$$Ux = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & \cdots & u_{1n} \\ 0 & u_{22} & \cdots & u_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & u_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} \tag{2.4.13}$$

$$x_k = \begin{cases} \dfrac{y_n}{u_{nn}}, k = n \\ \dfrac{y_k - \sum\limits_{j=k+1}^{n} u_{kj} x_j}{u_{kk}}, k = n-1, \ldots, 1 \end{cases} \tag{2.4.14}$$

其计算次序是：$x_n \to x_{n\text{-}1} \to \cdots \to x_1$

$a_{11}(u_{11})$	$a_{12}(u_{12})$	$a_{13}(u_{13})$	…	$a_{1n}(u_{1n})$	$b_1(y_1)$
$a_{21}(l_{21})$	$a_{22}(u_{22})$	$a_{23}(u_{23})$	…	$a_{2n}(u_{2n})$	$b_2(y_2)$
$a_{31}(l_{31})$	$a_{32}(l_{32})$	$a_{33}(u_{33})$	…	$a_{3n}(u_{3n})$	$b_3(y_3)$
…	…	…	…	…	…
$a_{n1}(l_{n1})$	$a_{n2}(l_{n2})$	$a_{n3}(l_{n3})$	…	$a_{nn}(u_{nn})$	$b_n(y_n)$

图 2-4-2：求解线性方程组 $Ax=b$ 的三角分解法的紧凑格式图

例 2.3.2：求解方程组 $Ax=b$，其中 A 为例 2.3.1 中 A，$b=(2,10,44,190)^T$。

解：由线性方程的紧凑格式：

1 (1)	2 (2)	3 (3)	4 (4)	2 (2)
1 (1)	4 (2)	9 (6)	16 (12)	10 (8)
1 (1)	8 (3)	27 (6)	64 (24)	44(18)
1 (1)	16 (7)	81 (6)	256 (24)	190 (24)

由回代过程（即 $Ux=y$）得：$x_4=1, x_3=-1, x_2=1, x_1=1$

三角分解法和Gauss消去法比较

注：1.线性方程组的三角分解法计算量与 Gauss 消去法的计算量基本相同，即乘除法运算也是$\frac{1}{3}n^3$数量级

2.相同 A，不同b 计算。用三角分解法解具有相同系数的方程组 $Ax=(b_1,b_2,\cdots,b_m)$ 时仅需增加 n^2 次乘除运算

2.4.4 解三对角方程组的追赶法

线性方程组 $Ax=d$，其中系数矩阵 A 的形状如下：

$$A=\begin{bmatrix} a_1 & b_1 & & & \\ c_2 & a_2 & b_2 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & a_{n-1} & b_{n-1} \\ & & & c_n & a_n \end{bmatrix} \tag{2.4.15}$$

称（2.4.15）式表示的矩阵为三对角矩阵

定理 2.4.2 设矩阵（2.4.15）满足下列条件：

$$\begin{cases} |a_1| > |b_1| > 0 \\ |a_i| \ge |b_i| + |c_i|, b_i c_i \ne 0, i = 2,3,\ldots,n-1 \\ |a_n| > |c_n| \end{cases} \qquad (2.4.17)$$

对角占优

则矩阵 A 可以分解为：

$$A = LU = \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ l_2 & 1 & & & \\ & l_3 & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & l_n & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 & b_1 & & & \\ & u_2 & b_2 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & b_{n-1} \\ & & & & u_n \end{bmatrix} \qquad (2.4.18)$$

其中 b_i（$i = 1,2,\ldots,n-1$）为矩阵 A 所给出，且分解式唯一的。

按乘法展开

$$\begin{cases} a_1 = u_1 \\ c_i = l_i u_{i-1} \quad ,i = 2,3,\ldots,n \\ a_i = b_{i-1} l_i + u_i \end{cases}$$

则可计算

$$\begin{cases} u_1 = a_1 \\ l_i = \dfrac{c_i}{u_{i-1}} \quad ,i = 2,3,\cdots,n \\ u_i = a_i - b_{i-1} l_i \end{cases} \qquad (2.4.19)$$

式（2.4.19）的计算过程如下：

$$u_1 \to l_2 \to u_2 \to l_3 \to u_3 \to \cdots \to l_n \to u_n$$

$$
\begin{bmatrix} a_1 & b_1 & & & \\ c_2 & a_2 & b_2 & & \\ & \ddots & \ddots & & \\ & & c_{n-1} & a_{n-1} & b_{n-1} \\ & & & c_n & a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ l_2 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & l_n & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 & b_1 & & \\ & u_2 & b_2 & \\ & & \ddots & b_{n-1} \\ & & & u_n \end{bmatrix}
$$

$$=LU$$

解Ax=d 的步骤　　**由Ly=d 解出y　又由Ux=y解出x**

由 $Ly=d$ 得

$$\begin{cases} y_1 = d_1 \\ y_k = d_k - l_k y_{k-1} \end{cases} \tag{2.4.20}$$

其中 $k=2,3,\cdots,n$

由 $Ux=y$ 得

$$\begin{cases} x_n = \dfrac{y_n}{u_n} \\ x_k = \dfrac{y_k - b_k x_{k+1}}{u_k} \end{cases} \tag{2.4.21}$$

其中 $k=n-1,\cdots,2,1$

按上述过程求解三对角方程组的方法称为**追赶法**

求解三对角方程组 $Ax=d$ 的追赶法的具体算法如下：

算法 2.1：

（1）$u_1=a_1, y_1=d_1$；

（2）对 $i=2,3,\cdots,n$ 逐次计算，$l_i=\dfrac{c_i}{u_{i-1}}$，$u_i=a_i-b_{i-1}l_i$，$y_i=d_i-l_iy_{i-1}$；

计算 l_i,u_i,y_i 的过程即为追的过程

（3）$x_n=\dfrac{y_n}{u_n}$；

（4）对 $i=n-1,\cdots,2,1$ 逐次计算：$x_i=\dfrac{(y_i-b_ix_{i+1})}{u_i}$；

计算 x_i 的过程即为赶的过程

（5）输出 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T$

江南大学

例 2.3.3：用追赶法解方程组 $Ax=d$，其中

$$A=\begin{bmatrix}-2 & 1 & 0 & 0\\ 1 & -2 & 1 & 0\\ 0 & 1 & -2 & 1\\ 0 & 0 & 1 & -2\end{bmatrix},\quad d=\begin{bmatrix}1\\ 1\\ 0\\ -1\end{bmatrix}$$

解：由算法 2.1 之（1）与（2）可得：

$$u_1=-2,\quad y_1=1;$$

$$l_2=\frac{1}{(-2)}=-\frac{1}{2},\quad u_2=-2-1\times(-\frac{1}{2})=-\frac{3}{2},\quad y_2=1-(-\frac{1}{2})\times 1=\frac{3}{2};$$

$$l_3=\frac{1}{(-\frac{3}{2})}=-\frac{2}{3},\quad u_3=-2-1\times\left(-\frac{2}{3}\right)=-\frac{4}{3},\quad y_3=0+\frac{2}{3}\times\frac{3}{2}=1;$$

$$l_4=\frac{1}{(-\frac{4}{3})}=-\frac{3}{4},\quad u_4=-2-1\times(-\frac{3}{4})=-\frac{5}{4},\quad y_4=-1-(-\frac{3}{4})\times 1=-\frac{1}{4}\text{。}$$

江南大学

再由算法 2.1 之（3），（4）可得：

$$x_4=\frac{y_4}{u_4}=\frac{1}{5},\quad x_3=\frac{(1-1\times\frac{1}{5})}{(-\frac{4}{3})}=-\frac{3}{5},$$

$$x_2=\frac{\frac{3}{2}-1\times(-\frac{3}{5})}{(-\frac{3}{2})}=-\frac{7}{5},\quad x_1=\frac{1-1\times(-\frac{7}{5})}{(-2)}=-\frac{6}{5}。$$

线性方程组的紧凑格式的分解对三对角方程组有效

$$\begin{bmatrix} -2(-2) & 1(1) & 0(0) & 0(0) & 1(1) \\ 1(-\frac{1}{2}) & -2(-\frac{3}{2}) & 1(1) & 0(0) & 1(\frac{3}{2}) \\ 0(0) & 1(-\frac{2}{3}) & -2(-\frac{4}{3}) & 1(1) & 0(1) \\ 0(0) & 0(0) & 1(-\frac{3}{4}) & -2(-\frac{5}{4}) & -1(-\frac{1}{4}) \end{bmatrix}$$