习题五解答

1、 已知 $y=f(x)$ 的函数表如下：

x	1	2	3
y	1	-1	2

试求 $f(x)$ 的 Lagrange 抛物插值多项式，并计算 $f(1.5)$ 的近似值。

解：由 Lagrange 插值公式可得抛物插值公式为

$$
\begin{aligned}
L_2(x) &= \sum_{i=0}^{2}(y_i \cdot \prod_{j=0,\, j\neq i}^{2} \frac{x-x_i}{x_i-x_j}) \\
&= y_0 \frac{x-x_1}{x_0-x_1}\cdot\frac{x-x_2}{x_0-x_2} + y_1 \frac{x-x_0}{x_1-x_0}\cdot\frac{x-x_2}{x_1-x_2} + y_0 \frac{x-x_0}{x_2-x_0}\cdot\frac{x-x_1}{x_2-x_1} \\
&= 0.4x^2 - 9.5x + 8
\end{aligned}
$$

所以，$f(1.5) \approx L_2(1.5) = -0.625$。

2、 已知函数表如下：

x	...	10	11	12	13	...
$y=\ln x$	...	2.3026	2.3979	2.4849	2.5649	...

试分别用线性插值、抛物插值和三次插值计算 $\ln 11.85$ 的近似值，并估计相应的截断误差。

解：$x=11.85$,介于 11 和 12 之间，由 Lagrange 插值得线性插值公式为

$$L_1(x) = 2.3979\frac{x-12}{11-12} + 2.4849\frac{x-11}{12-11}$$

故：$L_1(11.85) = 2.47185$

截断误差为：

$$
\begin{aligned}
|R_1(11.85)| &\le \left|\frac{f''(12)}{2}(11.85-11)(11.85-12)\right| \\
&\le 4.427\times 10^{-4}
\end{aligned}
$$

取 $x0=11, x1=12, x2=13$ 由 Lagrange 插值公式可得抛物插值公式为

$$
\begin{aligned}
L_2(x) &= 2.3979\cdot\frac{x-12}{11-12}\cdot\frac{x-13}{11-13} + 2.4849\cdot\frac{x-11}{12-11}\cdot\frac{x-13}{12-13} + 2.5649\cdot\frac{x-11}{13-11}\cdot\frac{x-12}{13-12} \\
&= 0.0035x^2 + 0.1675x + 0.9789
\end{aligned}
$$

故：$L_2(11.85) = 2.47229$

截断误差为：

$$\left|R_2(11.85)\right| \le \left|\frac{f^{(3)}(13)}{3!}(11.85-11)(11.85-12)(11.85-13)\right|$$
$$\le 2.2246\times 10^{-5}$$

选取三次插值点为 10，11，12，13，则：

$$L_3(x)=2.3026\cdot\frac{x-11}{10-11}\cdot\frac{x-12}{10-12}\cdot\frac{x-13}{10-13}+2.3979\cdot\frac{x-10}{11-10}\cdot\frac{x-12}{11-12}\cdot\frac{x-13}{11-13}$$
$$+2.4849\cdot\frac{x-10}{12-10}\cdot\frac{x-11}{12-11}\cdot\frac{x-13}{12-13}+2.5649\cdot\frac{x-10}{13-10}\cdot\frac{x-11}{13-11}\cdot\frac{x-12}{13-12}$$

故：$L_3(11.85)=2.472328$

截断误差为：

$$\left|R_3(11.85)\right| \le \left|\frac{f^{4}(13)}{4!}(11.85-10)(11.85-11)(11.85-12)(11.85-13)\right|$$
$$\le 4.7487\times 10^{-6}$$

3、 设 $l_i(x)$（$i=0,1,\cdots,n$）是 $n+1$ 个互异节点 $x_0,x_1,\cdots,x_n$ 的 n 次基本插值多项式，证明：

（1）对任一不超过 n 次多项式 $g(x)$，都有 $\sum_{i=0}^{n} g(x_i)l_i(x)\equiv g(x)$；

（2）对 $i=0,1,\cdots,n$ 有：$l_i(x)=w(x)/[(x-x_i)w'(x_i)]$，其中 $w(x)=\prod_{j=0}^{n}(x-x_j)$。

解： $\mathrm{g}(x)$ 为不超过 n 次的多项式 $x_0,x_1,\cdots,x_n$ 为 $n+1$ 个互异节点，对 $\mathrm{g}(x)$，由定理 5.1.1 得，存在唯一的不超过 n 次的插值多项式 $\varphi_n(x)$，$\varphi_n(x)=\sum_{i=0}^{n} g(x_i)l_i(x)$，使得

$$g(x)=\varphi_n(x)+R_n(x),\ R_n(x)=\frac{g^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}w_{n+1}(x),$$

$$\because g^{(n+1)}(\xi)=0,\therefore R_n(x)=0,\therefore g(x)=\varphi_n(x)=\sum_{i=0}^{n} g(x_i)l_i(x)$$

（2）$l_i(x)$ 是 $n+1$ 个互异节点 $x_0,x_1,\cdots,x_n$ 的 n 次基本插值多项式，

则 $l_i(x)=\prod_{i=0,j\ne i}^{n}\frac{x-x_i}{x_i-x_j}$，

令 $w(x)=(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_n)=\prod_{j=0}^{n}(x-x_j)$

$w'(x_i)=(x-x_0)\cdots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\cdots(x-x_n)=\prod_{j=0,\,j\neq i}^{n}(x_i-x_j)$

则插值基多项式可以改写为：$l_i(x)=\dfrac{w(x)}{(x-x_i)w'(x_i)}$，得证。

4、 试推导等距节点的 Lagrange 插值公式，其中节点满足 $a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$，$x_i=a+ih$ （$i=0,1,\cdots,n$），$h=(b-a)/n$，$x=a+th$。

解：对于 Lagrange 插值公式，其一般形式为：

$$\begin{aligned}L_n(x)&=\sum_{i=0}^{n}y_il_i(x)\\&=\sum_{i=0}^{n}y_i\frac{(x-x_0)\cdots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\cdots(x-x_n)}{(x_i-x_0)\cdots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\cdots(x_i-x_n)}\end{aligned}\qquad(*1)$$

不妨设 $x_i=a+ih,(i=0,1,2,\cdots,n\text{为常数})$，$x_0=a,x_1,\cdots,x_n=b$ 为给定节点，其距离均为 $h=\dfrac{b-a}{n}$，称为步长，此时（*1）式可转化为

$$\begin{aligned}L_n(x)&=\sum_{i=0}^{n}y_i\frac{(x-x_0)\cdots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\cdots(x-x_n)}{ih(i-1)h\cdots h(-h)\cdots(n-i)h}\\&=\sum_{i=0}^{n}y_i\frac{(x-x_0)\cdots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\cdots(x-x_n)}{(-1)^{n-i}(n-i)!i!h^n}\end{aligned}\qquad(*2)$$

在（*2）式中令 $x=x_0+th$，则

$$\begin{aligned}L_n(x)&=\sum_{i=0}^{n}y_i\frac{t(t-1)\cdots(t-i+1)(t-i-1)\cdots(t-n)}{(-1)^{n-i}(n-i)!i!}\\&=\sum_{i=0}^{n}y_i\frac{1}{(-1)^{n-i}(n-i)!i!}\prod_{\substack{j=0\\j\neq i}}^{n}(t-j)\end{aligned}$$

5、 已知函数表如下：

x	0	1	3	4	6
$y=f(x)$	0	-7	5	8	14

试分别用二次、三次 Newton 插值多项式计算 $f(3.2)$ 的近似值，并估计相应的截断误差。

解：x 与 y 的函数表作如下差商表：

x	y	一阶差商	二阶差商	三阶差商		

0	0					1
1	-7	-7				x-0
3	5	6	13/3			x(x-1)
4	8	3	-1	-4/3		x(x-1)(x-3)
6	14	3	0	1/5		
3.2	8.1067	2.10475	1.119	5.595		
3.2	6.229	2.775	0.28125	1.40625	0.5483	

所以：

$$N_2(x)=0-7x+\frac{13}{3}x(x-1)$$

$$N_3(x)=0-7x+\frac{13}{3}x(x-1)-\frac{4}{3}x(x-1)(x-3)$$

带入求值可得：

$$N_2(3.2)=8.1067; N_3(3.2)=6.229$$

分别将二次与三次插值所得值代入上表作差商，为做表方便将两次差商计算放于同一张表内，经计算得到：

二次插值误差为：$R_2(3.2)=5.595\times(-2.8)\times(-0.8)\times0.2=2.50656$；

三次插值误差为：$R_3(3.2)=0.5483\times(-2.8)\times(-0.8)\times0.2\times2.2=0.5404$。

6、 对于给定的函数表如下：

x	0.0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6
$y=\cos x$	1.00000	0.99500	0.98007	0.95534	0.92106	0.87758	0.82534

(1) 试构造向前差分和向后差分表；

(2) 试分别用二次、三次和四次 Newton 向前插值多项式计算 $\cos 0.048$ 的近似值，并估计相应的截断误差。

解：作向前差分表如下：

x_i	y_i	Δy_i	$\Delta^2 y_i$	$\Delta^3 y_i$	$\Delta^4 y_i$	$\Delta^5 y_i$
0.0	1.0000	-0.00500	-0.00993	0.00013	0.00012	-0.00002
0.1	0.9950	-0.01493	-0.00980	0.00025	0.00010	-0.00001
0.2	0.98007	-0.02473	-0.00955	0.00035	0.00009	
0.3	0.95534	-0.03428	-0.00920	0.00044		
0.4	0.92106	-0.04348	-0.00876			
0.5	0.87758	-0.05224				
0.6	0.82534					

向后插值公式类似，二阶向前插值为例：

取 $x_0=0.0, x_1=0.1, x_2=0.2$，则由向前插值公式并代入为上表差分的值，得：

$$\begin{aligned} N_2(x) &= f_0+t\Delta f_0+\frac{t(t-1)}{2!}\Delta^2 f_0 = 1-0.005t-0.00993\frac{t(t-1)}{2!} \\ &= 1+\frac{0.048}{0.1}\times(-0.005)+\frac{0.048}{0.1}\times(0.048-1)\times 0.5\times(-0.00993) \\ &= 0.998839264 \end{aligned}$$

误差估计得：

$\left|R_4(0.048)\right| \le \frac{1}{5!}0.1^5\left|0.48(0.48-1)(0.48-2)(0.48-3)(0.48-4)\right| = 0.2804\times 10^{-6}$。余类推。

7、 设 $x_0, x_1, \cdots, x_n$ 为 $n+1$ 个互异的节点，$h_i(x)$ 和 $H_i(x)$（$i=0,1,\cdots,n$）为这些节点的 Hermite 插值基函数。试证明：(1) $\sum_{i=0}^{n} h_i(x)\equiv 1$；(2) $\sum_{i=0}^{n}\left[x_i h_i(x)+H_i(x)\right]\equiv x$。

证明：(1) 设 $x_0, x_1, \cdots, x_n$ 为 $n+1$ 个互异的节点，不妨设 $x_0<x_1<\cdots<x_i\cdots<x_n$，令 $y=f(x)\equiv 1$，$y_i\equiv 1$，$y_i'\equiv 0$，由定理 5.2.1 得，存在次数不超过 $2n+1$ 次多项式 $H(x)$，有 $R_{2n+1}(x)=f(x)-H(x)=\frac{f^{(2n+2)}(\xi)}{(2n+2)!}\omega_{n+1}^2(x)=0,\quad \xi\in\left[x_0,x_n\right]$

则 $1\equiv f(x)=H(x)=\sum_{i=0}^{n}\left[y_i h_i(x)+y_i' H_i(x)\right]=\sum_{i=0}^{n} y_i h_i(x)$，所以 $\sum_{i=0}^{n} y_i h_i(x)\equiv 1$

(2)令 $y=f(x)=x$，则 $y_i\equiv x_i$，$y_i'=1$，由定理 5.2.1 有

$$R_{2n+1}(x)=f(x)-H(x)=\frac{f^{(2n+2)}(\xi)}{(2n+2)!}\omega_{n+1}^2(x)=0,\quad \xi\in\left[x_0,x_n\right]$$

则 $x=f(x)=H(x)=\sum_{i=0}^{n}\left[y_i h_i(x)+y_i' H_i(x)\right]=\sum_{i=0}^{n}\left[x_i h_i(x)+H_i(x)\right]$

所以 $\sum_{i=0}^{n}\left[x_i h_i(x)+H_i(x)\right]\equiv x$。

8、 已知函数表如下：

x	0	1	3
y	0	1	1
y'	0	1	2

试分别用 Hermite 插值基函数和 Newton 插值公式求满足条件的插值多项式，并计算在 $x=2.6$ 的函数近似值，估计相应的误差。

解：（1）n=2，Hermite 插值公式为

$$h_0(x)=\left(1-2\frac{x-0}{(0-1)(0-3)}\right)\left(\frac{(x-1)(x-3)}{(0-1)(0-3)}\right)^2=\frac{1}{9}(1-\frac{2}{3}x)((x-1)(x-3))^2;$$

$$h_1(x)=\left(1-2\frac{x-1}{(1-0)(1-3)}\right)\left(\frac{(x-0)(x-3)}{(1-0)(1-3)}\right)^2=\frac{1}{4}(2-x)x^2(x-3)^2;$$

$$h_2(x)=\left(1-2\frac{x-3}{(3-0)(3-1)}\right)\left(\frac{(x-0)(x-1)}{(3-0)(3-1)}\right)^2=\frac{1}{36}(2-\frac{x}{3})x^2(x-1)^2;$$

$$H_0(x)=\frac{1}{9}(x-0)((x-1)(x-3))^2;$$

$$H_1(x)=\frac{1}{4}(x-1)x^2(x-3)^2;$$

$$H_2(x)=\frac{1}{36}(x-3)x^2(x-1)^2;$$

Hermite 插值公式为

$$\begin{aligned}H(x)&=\sum_{i=0}^{2}[y_ih_i(x)+y'_i\,H_i(x)]\\&=\frac{1}{108}x^5+\frac{25}{108}x^4-\frac{161}{108}x^3+\frac{9}{4}x^2\\&=0.00926x^5+0.2315x^4-1.4907x^3+2.25x^2\end{aligned}$$

所以， $f(2.6)=0.687$，相应误差为

$$R_5(2.6)\approx\frac{f^6(\xi)}{6!}\omega^2(2.6)=\frac{f^6(\xi)}{720}2.6^2\times(2.6-1)^2\times(2.6-3)^2=0.0231f^6(\xi)$$

（2）Newton 插值公式

x_i	$f[x_i]$	一阶差商	二阶差商	三阶差商	四阶差商	五阶差商	
0	0						1
0	0	0					x
1	1	1	1				x^2
1	1	1	0	-1			x^2(x-1)
3	1	0	-0.5	-0.1667	0.2778		x^2(x-1)^2
3	1	2	1	0.7500	0.3056	0.00926	x^2(x-1)^2(x-3)
2.6	0.687	0.7825	3.0438	1.2773	0.3296	0.00924	5.8855x10^(-6)

可得五次 Newton 插值公式为

$$N_5(x)=x^2-x^2(x-1)+\frac{5}{18}x^2(x-1)^2+\frac{1}{108}x^2(x-1)^2(x-3)$$
$$=\frac{1}{108}x^5+\frac{25}{108}x^4-\frac{161}{108}x^3+\frac{4}{9}x^2$$

所以，$f(2.6)=0.687$，误差估计为

$$R_5(2.6)\approx N_5(2.6,0,0,1,1,3,3)\omega_6(x)=-1.6296\cdot 10^{-5}$$

9、 求不超过 4 次的多项式 $p(x)$，使其满足插值条件如下表：

x	0	1	2
$p(x)$	0	2	1
$p'(x)$		0	-1

解：建立差商表用牛顿插值法，或待定系数法可得满足条件的插值公式

$$p(x)=\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{2}x^3-\frac{7}{4}x^2+4x$$

10、设 $S(x)$ 是区间 $[0,2]$ 上的分段三次样条函数，且

$$S(x)=\begin{cases} x^3+x^2, & x\in[0,1] \\ 2x^3+ax^2+bx+c, & x\in[1,2] \end{cases}$$

试求常数 a，b 和 c。

解：由连续性，$a+b+c=0$

一阶导数连续性，$2a+b=-1$

一阶导数连续性，$12+2a=8$，可得 $a=-2$，$b=3, c=-1$。

11、对于给定的插值条件

x	0	1	2	3
y	0	1	-1	3

试在区间 $[0,3]$ 上分别求满足下列边界条件的三次样条函数：

(1) $S'(0)=1$，$S'(3)=2$；

(2) 自然边界条件：$S''(0)=S''(3)=0$。

解：（1）取 $S(x)$ 在 x_i 处的一阶导数 $m_i\left(i=0,1,2,3\right)$ 作为参数，$y_0'=1, y_3'=2,$ 由

（5.3.16），取 $h_i=1$ 有

$\mu_i = \frac{h_{i-1}}{h_{i-1}+h_i} = \frac{1}{2}, \lambda_i = 1-\mu_i = \frac{1}{2}$, 得

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0.5 & 2 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0.5 & 2 & 0.5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} M_0 \\ M_1 \\ M_2 \\ M_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 0 \\ 0 \\ 12 \end{pmatrix}，解得 \begin{pmatrix} M_0 \\ M_1 \\ M_2 \\ M_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3.7333 \\ 1.4667 \\ -2.1333 \\ 7.0667 \end{pmatrix}$$

可得

$$S(x) = \begin{cases} 1.3777x^3 - 1.8666x^2 + 1.9999x, x \in [0,1] \\ -0.6001x^3 + 2.5338x^2 - 5.4009x + 4.4673, x \in [1,2] \\ 1.5334x^3 - 10.2672x^2 + 26.2015x - 24.6015, x \in [2,3] \end{cases}$$

（2） $x_0 = 0, x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 3,$ 取 $S(x)$ 在 x_i 处的二阶导数 $M_i\left(i = 0,1,2,3\right)$ 作为参数，由（5.3.16）得 $\mu_i = \frac{h_{i-1}}{h_{i-1}+h_i} = \frac{1}{2}, \lambda_i = 1-\mu_i = \frac{1}{2},$ 由自然边界条件

$M_i\left(i = 0,1,2,3\right)$，$M_0 = M_3 = 0$ 得 $\begin{bmatrix} 2 & 0.5 \\ 0.5 & 2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} M_1 \\ M_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix} M_1 \\ M_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -20.4 \\ 3.6 \end{pmatrix}$，于是

$$S(x) = \begin{cases} -3.4x^3 + 4.4x, x \in [0,1] \\ 4x^3 - 20.4x^2 + 41.6x - 30.4, x \in [1,2] \\ -0.6x^3 + 5.4x^2 - 11.6x + 5.4, x \in [2,3] \end{cases}$$

12、设 $x_0, x_1, \cdots, x_n$ 为 n+1 个互异的插值节点，且 $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_i \cdots < x_n = b$，$(i = 0,1,2,\cdots,n)$，其中 $f(x) \in C^2[a,b]$，$S(x)$ 是 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上的三次样条函数，若 $f(x_i) = S(x_i)$，证明：

$$\int_a^b S''(x)\left[f''(x) - S''(x)\right]dx = S''(b)\left[f'(b) - S'(b)\right] - S''(a)\left[f'(a) - S'(a)\right]。$$

证明：

$$
\begin{aligned}
左边&=\int_a^b S''(x)\left[f''(x)-S''(x)\right]\mathrm{d}x \\
&=\int_a^b S''(x)\mathrm{d}\left[f'(x)-S'(x)\right] \\
&=\sum_{i=0}^{n-1}\int_{x_i}^{x_{i+1}} S''(x)\mathrm{d}\left[f'(x)-S'(x)\right] \\
&=\sum_{i=0}^{n-1}\left\{S''(x)\left[f'(x)-S'(x)\right]\Big|_{x=x_i}^{x_{i+1}}-\int_{x_i}^{x_{i+1}}\left[f'(x)-S'(x)\right]\mathrm{d}S''(x)\right\} \\
&=\sum_{i=0}^{n-1}S''(x)\left[f'(x)-S'(x)\right]\Big|_{x=x_i}^{x_{i+1}}-\sum_{i=0}^{n-1}\int_{x_i}^{x_{i+1}}S'''(x)\mathrm{d}\left[f(x)-S(x)\right] \\
&=S''(b)\left[f'(b)-S'(b)\right]-S''(a)\left[f'(a)-S'(a)\right]-\sum_{i=0}^{n-1}S'''(\frac{x_i+x_{i+1}}{2})\left[f(x)-S(x)\right]\Bigg|_{x=x_i}^{x_{i+1}} \\
&=S''(b)\left[f'(b)-S'(b)\right]-S''(a)\left[f'(a)-S'(a)\right]=右边
\end{aligned}
$$

得证。