第三章 解线性方程组的迭代法

第二节 几种常用的单步定常线性迭代法






3.2.1雅可比（Jacobi）迭代法

给定方程组 $Ax=b$ 或

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2 \\ \qquad\cdots\qquad\qquad\cdots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=b_n \end{cases} \tag{3.2.1}$$

其中系数矩阵 A 是非奇异的，$b\neq 0$。

不妨设 $a_{ii}\neq 0, i=1,2,\cdots,n$，将式（3.2.1）变形为

$$\begin{cases} x_1=\dfrac{1}{a_{11}}(-a_{12}x_2-a_{13}x_3-\cdots-a_{1n}x_n+b_1) \\ x_2=\dfrac{1}{a_{22}}(-a_{21}x_1-a_{23}x_3-\cdots-a_{2n}x_n+b_2) \\ \qquad\cdots\qquad\qquad\cdots \\ x_n=\dfrac{1}{a_{nn}}(-a_{n1}x_1-a_{n2}x_2-\cdots-a_{nn-1}x_{n-1}+b_n) \end{cases} \tag{3.2.2}$$

可建立如下的迭代公式

$$
\begin{cases}
x_1^{(k+1)} = \dfrac{1}{a_{11}}(-a_{12}x_2^{(k)} - a_{13}x_3^{(k)} - \cdots - a_{1n}x_n^{(k)} + b_1) \\
x_2^{(k+1)} = \dfrac{1}{a_{22}}(-a_{21}x_1^{(k)} - a_{23}x_3^{(k)} - \cdots - a_{2n}x_n^{(k)} + b_2) \\
\quad \cdots \qquad \cdots \\
x_n^{(k+1)} = \dfrac{1}{a_{nn}}(-a_{n1}x_1^{(k)} - a_{n2}x_2^{(k)} - \cdots - a_{nn-1}x_{n-1}^{(k)} + b_n) \\
x^{(0)} = (x_1^{(0)}, \cdots, x_n^{(0)})^T \text{已知} k = 0, 1, 2, \cdots
\end{cases}
\qquad (3.2.3)
$$

按定义 3.1.3 知：如果迭代序列$\{x^{(k)}\}$收敛于x^*，则x^*就是原方程组（3.2.1）的解。

迭代公式（3.2.3）称为线性方程组(3.2.1)的**雅可比(Jacobi)迭代法**，简称 J 法。

为将（3.2.3）变成矩阵形式，将系数矩阵

$$A=\begin{bmatrix} a_{11}, a_{12}, \cdots, a_{1n} \\ a_{21}, a_{22}, \cdots, a_{2n} \\ \cdots \quad \cdots \\ a_{n1}, a_{n2}, \cdots, a_{nn} \end{bmatrix}$$

分解为：

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & & & & \\ & a_{22} & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & a_{nn} \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} 0 & & & & \\ -a_{21} & 0 & & & \\ -a_{31} & -a_{32} & 0 & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \\ -a_{n1} & -a_{n2} & -a_{n3} & \cdots -a_{nn-1} & 0 \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} 0 & -a_{12} & -a_{13} & \cdots & -a_{1n} \\ & \ddots & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 0 & -a_{n-1n} \\ & & & & 0 \end{bmatrix}$$

$$=D-L-U \tag{3.2.4}$$

从而（3.2.3）可记为 $Dx^{(k+1)}=(L+U)x^{(k)}+b$，即

$$x^{(k+1)}=D^{-1}(L+U)x^{(k)}+D^{-1}b$$

若记 $M_J=D^{-1}(L+U)$，$g_J=D^{-1}b$，则上式记为 $x^{(k+1)}=M_Jx^{(k)}+g_J$。

解方程组 $Ax=b$ 的 Jacobi 迭代法的矩阵形式为：

$$\begin{cases} x^{(k+1)}=M_Jx^{(k)}+g_J \\ x^{(0)}=(x_1^{(0)},x_2^{(0)},\cdots,x_n^{(0)})^T \text{已知} \ k=0,1,2,\cdots \end{cases} \tag{3.2.5}$$

其中 M_J 也称为 **Jacobi 迭代法的迭代矩阵**，其对角线元素全为 0。

例 3.2.1： 试用 Jacobi 迭代法求解方程组 $Ax=b$，其中

$$A=\begin{bmatrix} 10 & 3 & 1 \\ 2 & -10 & 3 \\ 1 & 3 & 10 \end{bmatrix},\quad b=\begin{bmatrix} 14 \\ -5 \\ 14 \end{bmatrix}$$

要求保留到小数点后四位数，取 $x^{(0)}=(0,0,0)^T$。

江南大学

解：由于 A 是严格对角占优，则 A 是非奇异的，且容易获得 Jacobi 迭代法的迭代公式为：

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = [-3x_2^{(k)} - x_3^{(k)} + 14]/10 \\ x_2^{(k+1)} = [-2x_1^{(k)} - 3x_3^{(k)} - 5]/(-10) \\ x_3^{(k+1)} = [-x_1^{(k)} - 3x_2^{(k)} + 14]/10 \\ x_1^{(0)} = (0,0,0)^T, k = 0,1,\cdots \end{cases}$$

或变成矩阵形式为：

$$\begin{cases} x^{(k+1)} = M_J x^{(k)} + g_J \\ x^{(0)} = (0,0,0)^T, k = 0,1,2,\cdots \end{cases}$$

其中 $M_J = D^{-1}(L+U) = \begin{bmatrix} 0 & -0.3 & -0.1 \\ 0.2 & 0 & 0.3 \\ -0.1 & 0.3 & 0 \end{bmatrix}$，$g_J = \begin{bmatrix} 1.4 \\ 0.5 \\ 1.4 \end{bmatrix}$。

由 $x^{(0)} = (0,0,0)^T$，可得 $x^{(1)} = M_J x^{(0)} + g_J = (1.4, 0.5, 1.4)^T$

表 3-2-1：例 3.2.1 的计算结果表

k	$x^{(k)}$	k	$x^{(k)}$
1	$(1.4,0.5,1.4)^T$	8	$(0.9984,0.9985,0.9984)^T$
2	$(1.11,1.20,1.11)^T$	9	$(1.0006,0.9992,1.0006)^T$
3	$(0.929,1.055,0.929)^T$	10	$(1.0002,1.0003,1.0002)^T$
4	$(0.9906,0.9645,0.9906)^T$	11	$(0.9999,1.0002,0.9999)^T$
5	$(1.0116,0.9553,1.0116)^T$	12	$(0.9999,1.0001,0.9999)^T$
6	$(1.0123,1.0058,1.0123)^T$	13	$(1.0000,1.0001,1.0000)^T$
7	$(0.9970,1.0062,0.9970)^T$	14	$(1.0000,1.0001,1.0000)^T$

从表 3-2-1 中可以看出：随着迭代法次数增大，迭代结果越来越接近精确解。当$k=13$时，迭代序列稳定在$x^{(13)}=(1.0000,1.0001,1.0000)^T$。

3.2.2高斯-赛德尔(Gauss-Seidel)迭代法

若 $a_{kk} \neq 0$ （$k=1,2,\cdots,n$），对 Jacobi 迭代公式（3.2.3）作如下修正：

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = [-a_{12}x_2^{(k)} - a_{13}x_3^{(k)} - \cdots - a_{1n}x_n^{(k)} + b_1]/a_{11} \\ x_2^{(k+1)} = [-a_{21}x_1^{(k+1)} - a_{23}x_3^{(k)} - \cdots - a_{2n}x_n^{(k)} + b_2]/a_{22} \\ \vdots \\ x_i^{(k+1)} = [-a_{i1}x_1^{(k+1)} - \cdots - a_{ii-1}x_{i-1}^{(k+1)} - a_{ii+1}x_{i+1}^{(k)} - \cdots - a_{in}x_n^{(k)} + b_i]/a_{ii} \\ \vdots \\ x_n^{(k+1)} = [-a_{n1}x_1^{(k+1)} - a_{n2}x_2^{(k+1)} - \cdots - a_{nn-1}x_{n-1}^{(k+1)} + b_n]/a_{nn} \\ x^{(0)} = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \cdots, x_n^{(0)})^T \text{已知，} \ k=0,1,2,\cdots \end{cases} \qquad (3.2.6)$$

一旦求出变量x_i的某个新值$x_i^{(k+1)}$后，就改用新值$x_i^{(k+1)}$替代老值$x_i^{(k)}$进行计算

式（3.2.6）就称为 **Gauss-Seidel 迭代公式**，相应的方法就称为 **Gauss-Seidel 迭代法**，简称 GS 法。

若将（3.2.6）写成矩阵形式，即可变成

$$Dx^{(k+1)}=b+Lx^{(k+1)}+Ux^{(k)} \text{ 或 } (D-L)x^{(k+1)}=b+Ux^{(k)}\text{。}$$

因 $D-L$ 为非奇异矩阵，于是得到 GS 法迭代公式的矩阵形式：

$$\begin{cases} x^{(k+1)}=M_{GS}x^{(k)}+g_{GS} \\ x^{(0)}\text{已知，}\ k=0,1,2,\cdots \end{cases} \qquad (3.2.7)$$

其中 $M_{GS}=(D-L)^{-1}U, g_{GS}=(D-L)^{-1}b$。而 M_{GS} 也称为 Gauss-Seidel 迭代矩阵。

例 3.2.2：在例 3.2.1 中，若改用 GS 法的话，其计算公式为

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = [-3x_2^{(k)} - x_3^{(k)} + 14]/10 \\ x_2^{(k+1)} = [-2x_1^{(k+1)} - 3x_3^{(k)} - 5]/(-10) \\ x_3^{(k+1)} = [-x_1^{(k+1)} - 3x_2^{(k+1)} + 14]/10 \\ x^{(0)} = (0,0,0)^T \end{cases}$$

表 3-2-2：例 3.2.2 的计算结果表

k	$x_1^{(k)}$	$x_2^{(k)}$	$x_3^{(k)}$
1	1.4000	0.7800	1.0260
2	1.0634	1.0205	0.9875
3	0.9950	0.9953	1.0019
4	1.0012	1.0008	0.9997
5	0.9998	0.9999	1.0000
6	1.0000	1.0000	1.0000

表明在求解例 3.2.1 中方程组问题时，GS 法比 J 法收敛得快。但是两种方法都存在收敛性问题，有例子表明 GS 法收敛时，J 法可能不收敛；J 法收敛时，GS 法可能不收敛。

江南大学

3.2.3 超松弛迭代法（SOR方法）

迭代过程的加速具有重要意义。逐次超松弛迭代（Successive Over relaxatic Method，简称SOR方法）法，可以看作是带参数的高斯—塞德尔迭代法，实质上是高斯-塞德尔迭代的一种加速方法。

超松弛迭代法的基本思想

这种方法是将前一步的结果 $x_i^{(k)}$ 与高斯-塞德尔迭代方法的迭代值 $\tilde{x}_i^{(k+1)}$ 适当加权平均，是解大型稀疏矩阵方程组的有效方法之一，有着广泛的应用。

(1) 用高斯—塞德尔迭代法定义辅助量。

$$\tilde{x}_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}}\left[b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j^{(k)}\right], (i = 1,2,\dots,n)$$

(2) 把 $x_i^{(k+1)}$取为 $x_i^{(k)}$与 $\tilde{x}_i^{(k+1)}$的加权平均，即

$$x_i^{(k+1)} = (1-\omega)x_i^{(k)} + \omega\tilde{x}_i^{(k+1)} = x_i^{(k)} + \omega(\tilde{x}_i^{(k+1)} - x_i^{(k)})$$

合并表示为:

$$\boxed{x_i^{(k+1)} = (1-\omega)x_i^{(k)} + \frac{\omega}{a_{ii}}(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j^{(k)})}$$

式中系数ω称为松弛因子，当ω=1时，便为高斯-塞德尔迭代法。为了保证迭代过程收敛，要求0<ω< 2。 当0<ω< 1时，低松弛法；当1<ω< 2时称为超松弛法。通常统称为超松弛法(SOR)。

超松弛迭代法的矩阵表示

将A分裂成A=D-L-U, 则超松弛迭代公式用矩阵表示为

$$\boxed{x^{(k+1)} = (1-\omega)x^{(k)} + \omega D^{-1}(b + Lx^{(k+1)} + Ux^{(k)})}$$

或 $$Dx^{(k+1)} = (1-\omega)Dx^{(k)} + \omega(b + Lx^{(k+1)} + Ux^{(k)})$$

故 $$(D-\omega L)x^{(k+1)} = \left[(1-\omega)D + \omega U\right]x^{(k)} + \omega b$$

显然对任何一个ω值,(D+ωL)非奇异, (因为假设 $a_{ii} \neq 0, i = 1,2,\cdots,n$)于是超松弛迭代公式为

$$\boxed{x^{(k+1)} = (D-\omega L)^{-1}\left[(1-\omega)D + \omega U\right]x^{(k)} + \omega(D-\omega L)^{-1}b}$$

江南大学

令 $\boxed{M_{SOR}=(D-\omega L)^{-1}[(1-\omega)D+\omega U]}$

$$\boxed{g_{SOR}=\omega(D-\omega L)^{-1}b}$$

则超松弛迭代公式可写成

$$\boldsymbol{x}^{(k+1)}=\boldsymbol{M}_{SOR}\boldsymbol{x}^{(k)}+\boldsymbol{g}_{SOR}$$

例 3.2.3： 方程组

$$\begin{cases} 4x_1 + 3x_2 \qquad = 24 \\ 3x_1 + 4x_2 - x_3 = 30 \\ \qquad - x_2 + 4x_3 = -24 \end{cases}$$

的精确解 $x = (3, 4, -5)$。如果取 $\omega = 1$ 的 SOR 迭代法（即 GS 法）计算公式是：

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = -0.75 x_2^{(k)} + 6 \\ x_2^{(k+1)} = -0.75 x_1^{(k+1)} + 0.25 x_3^{(k)} + 7.5 \\ x_3^{(k+1)} = 0.25 x_2^{(k+1)} - 6 \end{cases}$$

若用 $\omega = 1.25$，SOR 方法的计算公式为

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = -0.25 x_1^{(k)} - 0.9375 x_2^{(k)} + 7.5 \\ x_2^{(k+1)} = -0.9375 x_1^{(k+1)} - 0.25 x_2^{(k)} + 0.3125 x_3^{(k)} + 9.375 \\ x_3^{(k+1)} = 0.3125 \boxed{x_1^{(k+1)}} - 0.25 \boxed{x_3^{(k+1)}} - 7.5 \end{cases}$$

$\boxed{x_2^{(k+1)}}$ $\boxed{x_3^{(k)}}$

如果都取 $x^{(0)}=(1,1,1)^T$ 。当 $\omega=1$ 时，迭代 7 次可得

$$x^{(7)}=(3.0134110,3.9888241,-5.0027940)^T$$

而当 $\omega=1.25$ 时，迭代 7 次有 $x^{(7)}=(3.0000498,4.0002586,-5.0003486)^T$ 。

如果要求达到 7 位有效数字的要求，即 $\varepsilon=\dfrac{1}{2}\times10^{-6}$，GS 法要迭代 35 次，SOR 方法（$\omega=1.25$）只要迭代 14 次，显然 $\omega=1.25$ 收敛要快得多。