江南大学

# 第五章 插值法

## 第二节 几种常用插值多项式求法

# 5.2.1 Lagrange插值公式

由于插值多项式 $\varphi_n(x)\in P_n[x]$，而 $P_n[x]=span[1,x,\cdots,x^n]$ 是一个 $n+1$ 维线性空间。如果 $l_0(x),l_1(x),\cdots,l_n(x)$ 是 $P_n[x]$ 的一组基函数，且满足：

（1）$l_i(x)$ 是阶数不超过 $n$ 次的多项式，$i=0,1,\cdots,n$；

（2）$l_i(x_j)=\delta_{ij}=\begin{cases}1, & i=j\\ 0, & i\neq j\end{cases}$ （5.2.1）

则称 $l_0(x),l_1(x),\cdots,l_n(x)$ 为以 $x_0,x_1,\cdots,x_n$ 为插值节点的**基本插值多项式**，简称基函数。

**注：** 可证明$l_0(x),l_0(x)\cdots,l_0(x)$线性无关

# 基函数构造

由条件（1）可知：$l_i(x) = k_i \prod_{k=0,k\neq i}^{n} (x - x_k)$ （$i = 0,1,\cdots,n$）。

再由条件（2）知：$1 = l_i(x_i) = k_i \prod_{k=0,k\neq i}^{n} (x_i - x_k)$ ，即

$$k_i = \frac{1}{\prod_{k=0,k\neq i}^{n} (x_i - x_k)} 。$$

因此基本插值多项式为

$$l_i(x) = \prod_{j=0,j\neq i}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j} \qquad （5.2.2）$$

于是，在基函数 $l_0(x), l_1(x), \cdots, l_n(x)$ 的基础上，以 $y_0, y_1, \cdots, y_n$ 为线性组合系数，可得

$$\varphi_n(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i \cdot l_i(x)$$

显然，$\varphi_n(x_j) = \sum_{i=0}^{n} y_i \cdot l_i(x_j) = y_j$ （$j = 0,1,\cdots,n$），即满足插值条件。

# Lagrange插值公式

这种通过基本插值多项式（或基函数）构造插值多项式的方法就称为 **Lagrange 插值法**，所获得的插值多项式就称为 **Lagrange 插值公式**，记为 $L_n(x)$，即

$$L_n(x)=\sum_{i=0}^{n} y_i \cdot l_i(x)=\sum_{i=0}^{n}\left(y_i \prod_{j=0,j\neq i}^{n}\frac{x-x_j}{x_i-x_j}\right) \tag{5.2.3}$$

**注：**基函数与函数值无关，只与插值节点有关。

# Lagrange插值例题

例1　已知x=1, 4, 9 的平方根值，用抛物插值公式，求 $\sqrt{7}$

$$p_2(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} y_0 + \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} y_1 + \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} y_2$$

$x_0=1,\ x_1=4,\ x_2=9$　　　$y_0=1,\ y_1=2,\ y_2=3$

$$p_2(7) = \frac{(7-4)(7-9)}{(1-4)(1-9)} * 1 + \frac{(7-1)(7-9)}{(4-1)(4-9)} * 2 + \frac{(7-1)(7-4)}{(9-1)(9-4)} * 3$$

$$= 2.7$$

## 例2 已知f (x)的观测数据

| x | 0 | 1 | 2 | 4 |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| f (x) | 1 | 9 | 23 | 3 |

## 构造Lagrange插值多项式

**解 四个点可构造三次Lagrange插值多项式:基函数为**

$$l_0(x)=\frac{(x-1)(x-2)(x-4)}{(0-1)(0-2)(0-4)}=-\frac{1}{8}x^3+\frac{7}{8}x^2-\frac{7}{4}x+1$$

$$l_1(x)=\frac{(x-0)(x-2)(x-4)}{(1-0)(1-2)(1-4)}=\frac{1}{3}x^3-2x^2+\frac{8}{3}x$$

$$l_2(x)=\frac{(x-0)(x-1)(x-4)}{(2-0)(2-1)(2-4)}=-\frac{1}{4}x^3+\frac{5}{4}x^2-x$$

江南大学

$$l_3(x)=\frac{(x-0)(x-1)(x-2)}{(4-0)(4-1)(4-2)}=\frac{1}{24}x^3-\frac{1}{8}x^2+\frac{1}{12}x$$

**Lagrange插值多项式为**

$$L_3(x)=\sum_{k=0}^{3}y_k l_k(x)$$

$$=l_0(x)+9l_1(x)+23l_2(x)+3l_3(x)$$

$$=-\frac{11}{4}x^3+\frac{45}{4}x^2-\frac{1}{2}x+1$$

**例 5.2.1：** 给定函数表如下

| $x$ | … | 0.1 | 0.2 | 0.3 | 0.4 | 0.5 | … |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y=e^x$ | … | 1.1052 | 1.2214 | 1.3499 | 1.4918 | 1.6487 | … |

试用线性插值与抛物插值求 $e^{0.354}$ 的近似值，并估计截断误差。

**解：** 在插值计算中，为减少极端误差，一般选择离 $x$ 较近的点作为节点（即选取节点的就近原则）

在本题中由于 $x=0.354$，介于 0.3 与 0.4 之间，故作线性插值时取 $x_0=0.3$，$x_1=0.4$，由 Lagrange 插值公式可得线性公式为：

$$\boxed{0.4}$$

$$L_1(x)=1.3499\cdot\frac{x-\boxed{0.3}}{0.3-0.4}+1.4918\cdot\frac{x-0.3}{0.4-0.3}$$

于是，线性插值公式所得近似值为 $e^{0.354}\approx L_1(0.354)=1.4265$。

而误差由公式（5.1.5）可得：

$$|R_1(0.354)|=\left|\frac{f''(\xi)}{2!}(0.354-0.3)\cdot(0.354-0.4)\right|$$

$$=\left|\frac{e^{\xi}}{2!}\times 0.054\times 0.046\right|\le\frac{e^{0.4}}{2}\times 0.054\times 0.046=0.001853。$$

对 $x=0.354$，按照节点就近选取原则，抛物插值选取的节点是 $x_0=0.3$， $x_1=0.4$，$x_2=0.5$，故抛物插值公式为：

$$L_2(0.354)=1.3499\frac{(x-0.4)(x-0.5)}{(0.3-0.4)(0,3-0.5)}+1.4918\frac{(x-0.3)(x-0.5)}{(0.4-0.3)(0.4-0.5)}$$

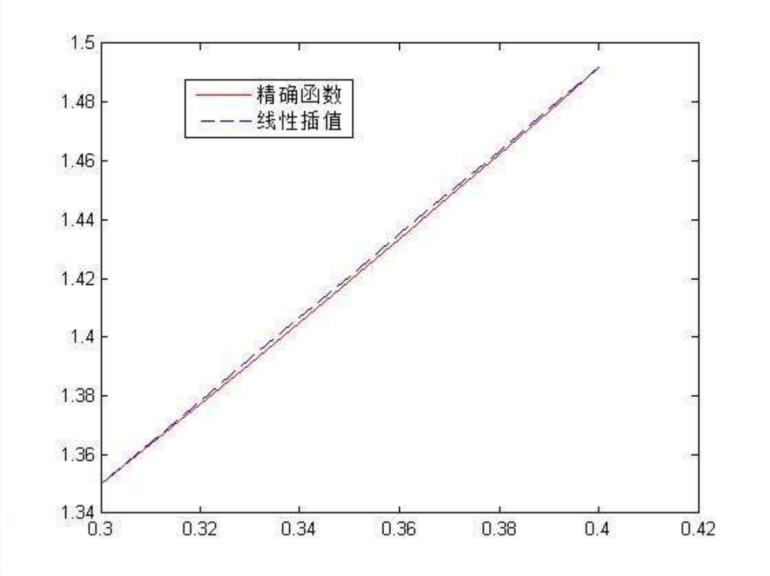
$$+1.6487\frac{(x-0.3)(x-0.4)}{(0.5-0.3)(0.5-0.4)}$$

于是用抛物插值公式所得近似值为：

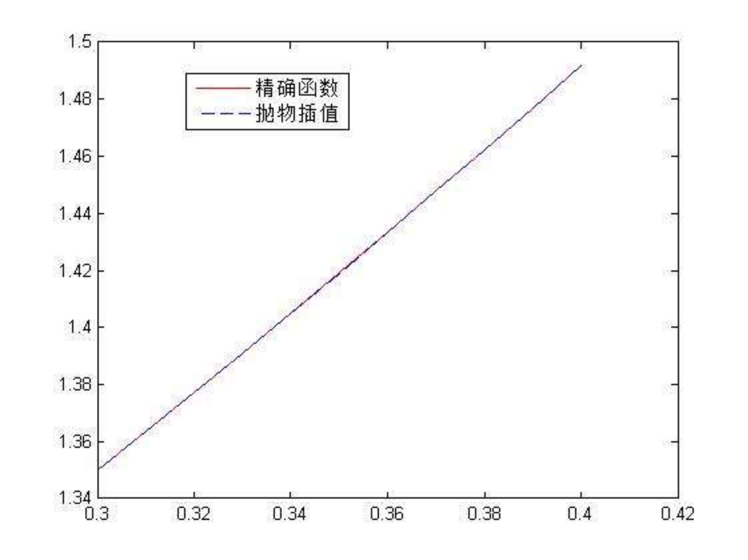
$$e^{0.354}\approx L_2(0.354)=1.4247$$

由公式（5.1.5）可计算得：

$$|R_1(0.354)| \le \frac{e^{0.5}}{3!} \times 0.054 \times 0.046 \times 0.146 = 0.00009966$$ 。




实际计算误差0.0018




实际计算误差9.2549e-05

# 5.2.2 Newton插值公式

Lagrange 插值虽然易算，但若要增加一个节点时，全部基函数 $l_i(x)$ 都需要重新算过。

将 $L_n(x)$ 改写成 $a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)(x-x_1) + \cdots + a_n(x-x_0)\cdots(x-x_{n-1})$ 的形式，希望每加一个节点只附加一项上去即可。

### A 差商

**定义 5.2.1：** 给定函数 $f(x)$ 及一系列互不相同的点 $x_0, x_1, \cdots, x_n, \cdots$，称

$$f[x_i, x_j] = \frac{f(x_i) - f(x_j)}{x_i - x_j}$$

为 $f(x)$ 关于点 $x_i, x_j$ 的**一阶差商**，也称均差。

# 差商定义

称一阶差商的差商 $f[x_i,x_j,x_k]=\dfrac{f[x_i,x_j]-f[x_j,x_k]}{x_i-x_k}$ 为函数 $f(x)$ 关于点 $x_i,x_j,x_k$ 的二阶差商。

称 $f[x_0,x_1,\cdots,x_k]=\dfrac{f[x_0,x_1,\cdots,x_{k-1}]-f[x_1,\cdots,x_k]}{x_0-x_k}$ 为函数 $f(x)$ 关于点 $x_0,x_1,\cdots,x_n$ 的 $k$ 阶差商。

$f(x)$ 的零阶差商即为 $f(x)$ 的函数值，即 $f[x_i]=f(x_i)$。

如果有重点，如 $x_i$ 为重点，即 $x_i=x_{i+1}$，从定义中容易看到：如果 $f(x)$ 在 $f(x)$ $x_i$ 点可导，则

$$\lim_{x\to x_i}\frac{f(x_i)-f(x)}{x_i-x}=f'(x_i)$$

因此规定：$f[x_i,x_i]=f'(x_i)$。

江南大学

# 差商性质

性质 5.2.1：

（1）各阶差商都具有线性性质，即若 $f(x)=a\varphi(x)+b\psi(x)$，其中 $a$，$b$ 为常数，则对任意正整数 $k$ 均有：

$$f[x_0,x_1,\cdots,x_k]=a\varphi[x_0,x_1,\cdots,x_k]+b\psi[x_0,x_1,\cdots,x_k];$$

（2）$f(x)$ 的 $k$ 阶差商 $f[x_0,x_1,\cdots,x_k]$ 可表示成 $f(x_0),f(x_1),\cdots,f(x_k)$ 的线性组合，且

$$f[x_0,\cdots,x_k]=\sum_{i=0}^{k}\frac{f(x_i)}{w'_{k+1}(x_i)}$$

其中，$w_{k+1}(x)=\prod_{j=0}^{k}(x-x_j)$，$w'_{k+1}(x_i)=\prod_{j=0,\,j\neq i}^{k}(x_i-x_j)$；

（3）$f(x)$ 的各阶差商均具有对称性，即改变节点的位置（或次序），差商不变；

（4）若 $f(x)$ 是 $n$ 次多项式，则一阶差商 $f[x,x_i]$ 为 $n-1$ 次多项式。

江南大学

# 差商表计算各阶差商

| $x_i$ | $f[x_i]$ | $f[x_i,x_{i+1}]$ | $f[x_i,x_{i+1},x_{i+2}]$ | $f[x_i,x_{i+1},x_{i+2}]$ |
|---|---|---|---|---|
| $x_0$ | $f(x_0)$ | | | |
| $x_1$ | $f(x_1)$ | $f[x_0,x_1]$ | | |
| $x_2$ | $f(x_2)$ | $f[x_1,x_2]$ | $f[x_0,x_1,x_2]$ | |
| $x_3$ | $f(x_3)$ | $f[x_2,x_3]$ | $f[x_1,x_2,x_3]$ | $f[x_0,x_1,x_2,x_3]$ |
| … | … | | … | |

$$\frac{f[x_1,x_2]- f[x_0,x_1]}{x_2 - x_0}$$

例3 求 $f(x_i)= x^3$在节点 $x$=0, 2, 3, 5, 6上的各阶差商值

解：计算得如下表

| $x_i$ | $f[x_i]$ | $f[x_i,x_{i+1}]$ | $f[x_i,x_{i+1},x_{i+2}]$ | $f[x_i,x_{i+1},x_{i+2},x_{i+2}]$ |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | | | |
| 2 | 8 | $\frac{8-0}{2-0}=4$ | | |
| 3 | 27 | $\frac{27-8}{3-2}=19$ | $\frac{19-4}{3-0}=5$ | |
| 5 | 125 | $\frac{125-27}{5-3}=49$ | $\frac{49-19}{5-2}=10$ | $\frac{10-5}{5-0}=1$ |
| 6 | 216 | $\frac{216-125}{6-5}=91$ | $\frac{91-49}{6-3}=14$ | $\frac{14-10}{6-2}=1$ |

# 差商公式

**B Newton 插值公式**

根据差商定义，有

$$f(x)=f(x_0)+(x-x_0)f[x,x_0]$$

$$f[x,x_0]=f[x_0,x_1]+(x-x_1)f[x,x_0,x_1]$$

$$f[x,x_0,x_1]=f[x_0,x_1,x_2]+(x-x_2)f[x,x_0,x_1,x_2]$$

$$\cdots$$

$$f[x,x_0,\ldots,x_{n-1}]=f[x_0,x_1,\ldots,x_n]+(x-x_n)f[x,x_0,\ldots,x_n]$$

将上面的 $n$ 个等式两边分别乘以 1，$(x-x_0)$，$(x-x_0)(x-x_1)$，$\cdots$，$w_n(x)$，然后将等式左右两边相加可得：

$$f(x)=\underline{f(x_0)+(x-x_0)f[x_0,x_1]+(x-x_0)(x-x_1)f[x_0,x_1,x_2]+\cdots}$$

$$\underline{+f[x_0,x_1,\cdots,x_n]w_n(x)}+\underline{f[x,x_0,x_1,\cdots,x_n]w_{n+1}(x)}$$

则有

$$f(x)=N_n(x)+R_n(x) \quad (5.2.6)$$

显然，$N_n(x)$是不超过$n$次的多项式，$R_n(x_i)=0$，且满足

$$N_n(x_i)=f(x_i)=y_i \quad (i=0,1,\cdots,n)。$$

这种由差商求插值多项式的方法就称为 **Newton 插值方法**。求得的插值公式（5.2.4）就称为 **Newton 插值公式**。

**注：**可以看出，牛顿插值公式计算方便，增加一个插值点，只要多计算一项，而$N_n(x)$的各项系数恰好是各阶差商值，很有规律

# 差商与导数

由插值多项式的唯一性可知 $N_n(x) = L_n(x)$，只是算法不同故其余项也相同，即

$$\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} w_{n+1}(x) = R_n(x) = f[x, x_0, x_1, \cdots, x_n] w_{n+1}(x)$$

可得

$$\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} = f[x, x_0, x_1, \cdots, x_n] \approx N_n[x, x_0, x_1, \cdots, x_n] \qquad (5.2.7)$$

当 $f(x)$ 未知情况下，利用 Newton 插值多项式近似计算 $f(x)$ 所产生的误差（插值余项）的估计问题可通过公式（5.2.7）得到解决，即 $R_n(x) \approx N_n[x, x_0, x_1, \cdots, x_n] w_{n+1}(x)$

注：$f[x_0, x_1, \cdots, x_n] = \dfrac{f^{(n)}(\xi)}{n!}$

江南大学

**例4　已知 $f(x) = x^7 + x^4 + 3x + 1$**

**求 $f[2^0, 2^1, \ldots 2^7]$ 及 $f[2^0, 2^1, \ldots 2^7, 2^8]$**

**分析：本题 $f(x)$是一个多项式, 故应利用差商的性质**

**解:　　由差商与导数之间的关系**

# Newton插值公式计算

Newton 插值公式可下表计算。$n$ 次 Newton 插值公式 $N_n(x)$ 为表中对角线上的差商值与右端因式乘积之和。

表 5.2.2 差商表

| $x_i$ | $y_i$ | 1 阶差商 | 2 阶差商 | … | $n$ 阶差商 | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $x_0$ | $y_0$ | | | | | $1$ |
| $x_1$ | $y_1$ | $f[x_0,x_1]$ | | | | $x-x_0$ |
| $x_2$ | $y_2$ | $f[x_1,x_2]$ | $f[x_0,x_1,x_2]$ | | | $(x-x_0)(x-x_1)$ |
| $x_3$ | $y_3$ | $f[x_2,x_3]$ | $f[x_1,x_2,x_3]$ | … | | |
| … | … | … | … | … | | |
| $x_n$ | $y_n$ | $f[x_{n-1},x_n]$ | $f[x_{n-2},x_{n-1},x_n]$ | … | $f[x_0,x_1,\cdots,x_n]$ | $\prod_{j=0}^{n-1}(x-x_j)$ |

## 例5 求$\sqrt{7}$的值估计其误差

解：作函数 $f(x)=\sqrt{x}$

取 $x_0=4$，$x_1=9$，$x_2=6.25$，建立差商表

| $x$ | $f(x)$ | $f[x_i,x_{i+1}]$ | $f[x_i,x_{i+1},x_{i+2}]$ |
|---|---|---|---|
| 4 | 2 | | |
| 9 | 3 | $\dfrac{3-2}{9-4}=0.2$ | |
| 6.25 | 2.5 | $\dfrac{2.5-3}{6.25-9}=0.18182$ | $\dfrac{0.18182-0.2}{6.25-4}=-0.00808$ |

$$N_2(7)=2+(7-4)*0.2+(7-4)*(7-9)*(-0.00808)=2.64848$$

**例 5.2.2：** 已知 $x$ 与 $y$ 的函数表如下

| $x$ | 0.40 | 0.55 | 0.65 | 0.80 | 0.90 | 1.05 |
|---|---|---|---|---|---|---|

根据 $x$ 与 $y$ 的函数表作如下的差商表：

| $x$ | $y$ | 1 阶差商 | 2 阶差商 | 3 阶差商 | 4 阶差商 | 5 阶差商 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0.40 | 0.41075 | | | | | |
| 0.55 | 0.57815 | 1.11600 | | | | |
| 0.65 | 0.69675 | 1.18600 | 0.28000 | | | |
| 0.80 | 0.88811 | 1.27573 | 0.35892 | 0.19730 | | |
| 0.90 | 1.02652 | 1.38410 | 0.43348 | 0.21303 | 0.03146 | |
| 1.05 | 1.25385 | 1.51553 | 0.52572 | 0.23060 | 0.03514 | 0.00566 |

可得五次 Newton 插值公式为

$$N_5(x) = 0.41075 + 1.11600(x-0.4) + 0.28000(x-0.4)\cdot(x-0.55)$$
$$+0.19730(x-0.4)\cdot(x-0.55)\cdot(x-0.65)$$
$$+0.03146(x-0.4)\cdot(x-0.55)\cdot(x-0.65)\cdot(x-0.80)$$
$$+0.00566(x-0.4)\cdot(x-0.55)\cdot(x-0.65)\cdot(x-0.80)\cdot(x-0.90)$$

于是， $f(0.596) \approx N_5(0.596) = 0.63192$，

将 $f(0.596) \approx 0.63192$ 放上表做最后一行差商（如上表）可得误差为

| $x$ | $y$ | 1 阶差商 | 2 阶差商 | 3 阶差商 | 4 阶差商 | 5 阶差商 | 6 阶差商 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0.40 | 0.41075 | | | | | | |
| 0.55 | 0.57815 | 1.11600 | | | | | |
| 0.65 | 0.69675 | 1.18600 | 0.28000 | | | | |
| 0.80 | 0.88811 | 1.27573 | 0.35892 | 0.19730 | | | |
| 0.90 | 1.02652 | 1.38410 | 0.43348 | 0.21303 | 0.03146 | | |
| 1.05 | 1.25385 | 1.51553 | 0.52572 | 0.23060 | 0.03514 | 0.00566 | |
| 0.596 | 0.63192 | 1.36989 | 0.47908 | 0.228627 | 0.03654 | 0.03043 | 0.12638 |

$$R_5(0.596) = 0.12638 \cdot 0.196 \cdot 0.046 \cdot (-0.054) \cdot (-0.204) \cdot (-0.304) \cdot (-0.454)$$

$$\approx 0.173239 \times 10^{-5}$$

注：Newton插值误差计算 $R_n(x) \approx N_n[x, x_0, x_1, \cdots, x_n] w_{n+1}(x)$

# 5.2.3 艾尔米特（Hermite）插值

Lagrange与Newton插值的不足：

- 均满足插值条件 $L_n(x_i) = N_n(x_i) = f(x_i), i = 0, 1, \cdots, n$

即在插值节点上有相同的函数值——”过点”

- 但在插值节点上 $y = f(x)$ 与 $y = L_n(x)$ 一般不相切，即 $f'(x_i) \neq L_n'(x_i)$——”光滑性较差”

已知函数 $y=f(x)$ 在 $n+1$ 个互异节点 $x_0, x_1, \cdots, x_n$ 处的函数值 $y_0, y_1, \cdots, y_n$ 以及导数值 $y_0', y_1', \cdots, y_n'$，要求次数不超过 $2n+1$ 的多项式 $H(x)$，使得

$$\begin{cases} H(x_i) = y_i \\ H'(x_i) = y_i' \end{cases} \quad (i = 0, 1, \cdots, n) \tag{5.2.22}$$

满足条件（5.2.22）的多项式 $H(x)$ 称为Hermite插值多项式

# 差商方法求解Hermite插值

**例 6** 已知函数 $y=f(x)$ 的数据如下表.

| $i$ | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|
| $x_i$ | $-1$ | 0 | 1 |
| $y_i$ | $-1$ | 0 | 1 |
| $y'_i$ | | 0 | |

求一次数不超过三的 Hermite 插值多项式 $H_3(x)$，使 $H_3(x_i)=y_i$，$(i=0,1,2)$，$H'_3(x_1)=y_1'$.

差商表

| $i$ | $x_i$ | $f(x_i)$ | 差商 | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | | $f[x_i,x_{i+1}]$ | $f[x_i,x_{i+1},x_{i+2}]$ | $f[x_i,x_{i+1},x_{i+2},x_{i+3}]$ |
| 0 | $-1$ | $-1$ | | | |
| 1 | 0 | 0 | 1 | | |
| 1 | 0 | 0 | 0 | $-1$ | |
| 2 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |

注：在重节点 $x_1$ 处的差商 $f[x_1,x_1]=f'(x_1)$.

江南大学

$$H_3(x) = f(x_0) + f[x_0, x_1](x - x_0) + f[x_0, x_1, x_1]$$
$$\cdot (x - x_0)(x - x_1) + f[x_0, x_1, x_1, x_2]$$
$$\cdot (x - x_0)(x - x_1)^2$$
$$= -1 + 1 \cdot (x+1) + (-1) \cdot (x+1)x$$
$$+ 1 \cdot (x+1)x^2 = x^3.$$

插值余项

$$R_n(x) = \frac{f^{(4)}(\xi)}{4!}(x - x_0)(x - x_1)^2(x - x_2)$$
$$= f[x, x_0, x_1, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1)^2(x - x_2)$$