江南大学

第三节

数值计算中的误差传播

1.3.1基本运算中的误差估计

一元函数$f(x)$，x为准确值,x^*为近似值,由Taylor公式

$$f(x)-f(x^*)=f'(x^*)(x-x^*)+\frac{f''(\xi)}{2}(x-x^*)^2,\ \xi\text{在}x,x^*\text{之间},$$

得$f(x^*)$的误差

$$e^*(f(x^*))\approx f'(x^*)e^*(x^*).$$

得$f(x^*)$的相对误差

$$e_r^*(f(x^*))\approx\frac{f'(x^*)e^*(x^*)}{f(x^*)}.$$

解 y 与参量 $x_{1,} \cdots, x_n$ 的函数关系为：

$$y = f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$$

记 $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 的近似值为 $(x_1^*, x_2^*, \cdots, x_n^*)$，相应的解为：

$$y^* = f(x_1^*, x_2^*, \cdots, x_n^*)$$

$$-e^*(y^*) = y - y^* = f(x_1, x_2, \cdots, x_n) - f(x_1^*, x_2^*, \cdots, x_n^*)$$

$$\approx \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f(x_1^*, x_2^*, \cdots, x_n^*)}{\partial x_i}(x_i - x_i^*)$$

$$= -\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f(x_1^*, x_2^*, \cdots, x_n^*)}{\partial x_i} e^*(x_i^*)$$

总体绝对误差与各自变量绝对误差的关系

$$e^*(y^*) \approx \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f(x_1^*, x_2^*, \cdots, x_n^*)}{\partial x_i} e^*(x_i^*) \qquad (1.3.3)$$

总体相对误差与各自变量相对误差的关系

$$e_r^*(y^*) = \frac{e^*(y^*)}{y^*} \approx \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f(x_1^*, x_2^*, \cdots, x_n^*)}{\partial x_i} \cdot \frac{e^*(x_i^*)}{y^*}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f(x_1^*, x_2^*, \cdots, x_n^*)}{\partial x_i} \cdot \frac{x_i^*}{f(x_1^*, x_2^*, \cdots, x_n^*)} \cdot e_r^*(x_i^*) \qquad (1.3.4)$$

和、差、积和商的误差公式

$$\begin{cases} e^*(x_1 \pm x_2) = e^*(x_1) \pm e^*(x_2) \\ e_r^*(x_1 \pm x_2) = \dfrac{x_1}{x_1 \pm x_2} e_r^*(x_1) \pm \dfrac{x_2}{x_1 \pm x_2} e_r^*(x_2) \end{cases} \tag{1.3.5}$$

$$\begin{cases} e^*(x_1 x_2) \approx x_2 e^*(x_1) + x_1 e^*(x_2) \\ e_r^*(x_1 x_2) \approx e_r^*(x_1) + e_r^*(x_2) \end{cases} \tag{1.3.6}$$

$$\begin{cases} e^*\left(\dfrac{x_1}{x_2}\right) \approx \dfrac{1}{x_2} e^*(x_1) - \dfrac{x_1}{x_2^2} e^*(x_2) \\ e_r^*\left(\dfrac{x_1}{x_2}\right) \approx e_r^*(x_1) - e_r^*(x_2) \end{cases} \tag{1.3.7}$$

例 1.3.1：设 $y=x^n$，求 y 的相对误差与 x 的相对误差之间的关系。

解：$e^*(y) \approx nx^{n-1}e^*(x)$，

$$e_r^*(y) = \frac{e^*(y)}{y} \approx \frac{ne^*(x)}{x} = ne_r^*(x)$$

例1 设 $x>0$，x 的相对误差为 δ，求 $\ln x$ 的误差

解：$e^*(y) \approx \frac{1}{x}e^*(x) = e_r^*(x) = \delta$

江南大学

例2 计算球体积，要使相对误差限为 1%，问度量半径 R 时允许的相对误差限是多少？

例3 设 $s=\frac{1}{2}gt^2$，假定 g 是准确的，而对 t 的测量有 ± 0.1 秒的误差，证明当 t 增加时 s 的绝对误差增加，而相对误差却减少 .

江南大学

例2 计算球体积，要使相对误差限为 1%，问度量半径 R 时允许的相对误差限是多少？

解： 体积计算公式$V=\dfrac{4}{3}\pi R^3$

$$e^*(V)\approx 4\pi R^2 e^*(R)$$

$$e_r^*(V)\approx \frac{4\pi R^2 e^*(R)}{V}=\frac{3}{R}e^*(R)=3e_r^*(R)$$

则$e_r^*(R)\approx \dfrac{e_r^*(V)}{3}=\dfrac{1}{300}$

例3 设 $s=\frac{1}{2}gt^2$，假定 g 是准确的，而对 t 的测量有 ± 0.1 秒的误差，证明当 t 增加时 s 的绝对误差增加，而相对误差却减少．

解： $e^*(s) \approx gte^*(t)$

$$e_r^*(s)=\frac{e^*(s)}{s}\approx\frac{gte^*(t)}{\frac{1}{2}gt^2}=\frac{2e^*(t)}{t}$$

由上述 s 的绝对误差 $e(s)$ 与其相对误差 $e_r(s)$ 的表达式易知，当 t 增加时，$e(s)$ 增，而 $e_r(s)$ 减少．

1.3.2算法的数值稳定性

例 1.3.2 计算积分值：$I_n=\int_0^1\frac{x^n}{x+5}dx(x=0,1,2\cdots)$

解：由关系式

$$I_n+5I_{n-1}=\int_0^1\frac{x^n}{x+5}dx+\int_0^1\frac{5x^{n-1}}{x+5}dx=\int_0^1 x^{n-1}dx=\frac{1}{n}\quad（n\geq 1）$$

算法一：

$$\begin{cases} I_0=\int_0^1\frac{1}{x+5}dx=\ln 1.2=0.18232156 \\ I_n=\frac{1}{n}-5I_{n-1} \end{cases}$$

算法二：

$$\begin{cases} I_n\approx\frac{1}{2}\left[\frac{1}{5(n+1)}+\frac{1}{6(n+1)}\right]=\frac{11}{60(n+1)} \\ I_{k-1}=\frac{1}{5}(\frac{1}{k}-I_k) \end{cases}$$

江南大学

计算结果

n	I_n（按算法一）	I_n（按算法二）
0	0.182321550	0.182321550
1	0.088392250	0.088392216
2	0.058038750	0.058038920
3	0.043139580	0.043138734
4	0.034302100	0.034306330
5	0.028489500	0.028468352
6	0.024219170	0.024324908
7	0.021761290	0.021232602
8	0.016993550	0.018836988
9	0.030143360	0.016926172
10	-0.050716800	0.015369139
11	0.344493090	0.014063394
12	-1.63914220	0.013016361
13	8.27263410	0.011841270
14	-41.4346000	0.012222222

注：按算法一可得到 I_{10}^* 错误，算法二 I_0^* 8位有效数字

舍入误差在计算过程中的传播

算法一

$$e_n^* = -(I_n - I_n^*) = -\left(\frac{1}{n} - 5I_{n-1}\right) + \left(\frac{1}{n} - 5I_{n-1}^*\right) = -5e_{n-1}^* \quad （n = 1,2,\cdots）$$

$$e_n^* = (-5)^n e_0^*$$

算法二

$$e_{k-1}^* = -\frac{1}{5}e_k^*,$$

$$e_0^* = (-\frac{1}{5})^n e_n,$$

计算过程中舍入误差不增长的算法就称为此算法具有数值稳定性，否则就称为数值不稳定

例4 . 序列$\{y_n\}$满足递推关系

$$y_n = 10y_{n-1} - 1 \quad (n = 1, 2, \cdots).$$

若 $y_0 = \sqrt{2} \approx 1.41$(三位有效数字),计算到 y_{10} 时误差有多大?这个计算过程稳定吗?

解 因 $y_0 = \sqrt{2}, y_0^* = 1.41$,而

$$|y - y_0^*| \leqslant \frac{1}{2} \times 10^{-2} = \delta,$$

于是有

$$|y_1 - y_1^*| = |10y_0 - 1 - 10y_0^* + 1| = 10|y_0 - y_0^*| \leqslant 10\delta,$$

$$|y_2 - y_2^*| = |10y_1 - 1 - 10y_1^* + 1| = 10|y_1 - y_1^*| \leqslant 10^2\delta.$$

类推有，

$$|y_{10}-y_{10}^{*}|\leqslant 10^{10}\delta.$$

即计算到 y_{10}，其误差限为 $10^{10}\delta$，亦即若在 y_0 处有误差限为 δ，则

y_{10} 的误差限将扩大 10^{10} 倍，可见这个计算过程是不稳定的．

例5 设 $Y_0=28$,按递推公式

$$Y_n=Y_{n-1}-\frac{1}{100}\sqrt{783}\quad(n=1,2,\cdots)$$

计算到 Y_{100} .若取 $\sqrt{783}\approx27.982$(五位有效数字),试问计算 Y_{100} 将有多大误差?

例5 设 $Y_0=28$,按递推公式

$$Y_n=Y_{n-1}-\frac{1}{100}\sqrt{783}\quad(n=1,2,\cdots)$$

计算到 Y_{100}.若取 $\sqrt{783}\approx27.982$(五位有效数字),试问计算 Y_{100} 将有多大误差?

解 设 $Y=\sqrt{783}, Y^*=27.983$,

$$\delta=|Y-Y^*|\leqslant\frac{1}{2}\times10^{-3},$$

$$|Y_1-Y_1^*|=\left|\left(28-\frac{1}{100}\sqrt{783}\right)-\left(28-\frac{1}{100}\times27.983\right)\right|$$

$$\leqslant\frac{1}{100}\delta,$$

$$|Y_2 - Y_2^*| = \left|\left[Y_1 - \frac{1}{100}\times\sqrt{783}\right] - \left[Y_1^* - \frac{1}{100}\times 27.983\right]\right|$$

$$= \left|(Y_1 - Y^*) - \frac{1}{100}(Y - Y^*)\right|$$

$$\leqslant \frac{1}{100}\delta + \frac{1}{100}\delta = \frac{2}{100}\delta.$$

仿此可得

$$|Y_n - Y_n^*| \leqslant \frac{n}{100}\delta.$$

则 $$|Y_{100} - Y_{100}^*| \leqslant \frac{100}{100}\delta = \delta = \frac{1}{2}\times 10^{-3}.$$

即计算 Y_{100} 的误差限不超过$\frac{1}{2}\times 10^{-3}$.

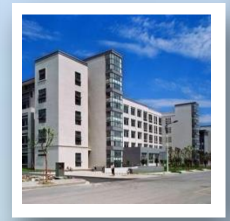
本节重点：

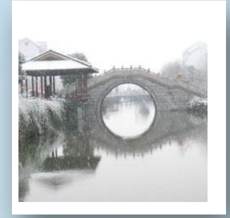
1. 总体的误差（相对误差）和各自变量误差（相对误差）的关系
2. 数值算法是否稳定的判别

江南大学

第四节

设计算法应注意的问题





1.4.1避免两个相近的数相减

由相对误差估计式（1.3.5）

x^*与y^*非常接近时，近似值x^*-y^*的相对误差可能变得很大；

$$z=\sqrt{1001}-\sqrt{1000}\approx 31.64-31.62=0.02$$

为了避免相近两数相减，可改变其计算公式，或替换为等价的计算公式，常用的等价替换公式有

当$|x|$接近于 0 时，有$1-\cos x=2\sin^2\frac{x}{2}$，$\frac{1-\cos x}{\sin x}=\frac{\sin x}{1+\cos x}$等；

当x充分大时，有$\sqrt{x+1}-\sqrt{x}=\frac{1}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}$，$\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}=\frac{1}{x(x+1)}$等；

补充公式

$$\lg x_1 - \lg x_2 = \lg \frac{x_1}{x_2}$$

当x很大时可作相应的变换

$$arctg(x+1) - arctgx = arctg\frac{1}{1+x(x+1)}$$

例1 求解$x^2-16x+1=0.$

$$x_1=8+\sqrt{63},\quad x_2=8-\sqrt{63}$$

$$\sqrt{x+1}-\sqrt{x}=\frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}$$

例2 计算$A=10^7(1-\cos 2^\circ).$

$$1-\cos x=2\sin^2\frac{x}{2}$$

例3 当 N 充分大时，怎样求 $\int_N^{N+1} \frac{1}{1+x^2} \mathrm{d}x$？

解 因 $\int_N^{N+1} \frac{1}{1+x^2} \mathrm{d}x = \arctan(N+1) - \arctan N$，当 N 充分大时，$\arctan(N+1)$ 与 $\arctan N$ 是两个相近的数，应避免直接相减，故选取算法如下：

$$\int_N^{N+1} \frac{1}{1+x^2} \mathrm{d}x = \arctan(N+1) - \arctan N$$

$$= \arctan \frac{1}{1+N(N+1)}.$$

1.4.2绝对值太小的数不宜作除数

由误差估计式（1.3.7）知计算

$$z^* = \frac{x^*}{y^*}$$

当 $\left|y^*\right|$ 很小时，近似值 z^* 的绝对误差 $e^*\left(z^*\right)$ 可能很大

不宜把绝对值太小的数作为除数

1.4.3避免大数“吃”小数的现象

$$a = 10^9 + 1 = 0.1 \times 10^{10} + 0.0000000001 \times 10^{10}$$

如果计算机上用的是 8 位有效数字，则可算出 $a = 0.10000000 \times 10^{10}$，此即所谓大数“吃”小数

例 1.4.1： 求解二次方程 $x^2 - (10^9 + 1)x + 10^9 = 0$

解： 利用多项式的因式分解容易求出，此方程的两个根为 $x_1 = 10^9, x_2 = 1$。但在计算机上计算时，采用求根公式可得：$x = \dfrac{(10^9 + 1) \pm \sqrt{(10^9 + 1)^2 - 4 \times 10^9}}{2}$，若计算机采用 8 位有效数字运算，可得 $10^9 + 1 \approx 10^9$，$\sqrt{(10^9 + 1)^2 - 4 \times 10^9} \approx 10^9$，如此可得 $x_1 = 10^9, x_2 = 0$，显然 x_2 不是此二次方程的解。

1.4.4简化计算步骤，提高计算效率

$$P(x) = 2x^4 + 3x^3 - 3x^2 + 5x - 1$$

算法一：$P(\frac{1}{2}) = 2 * \frac{1}{2} * \frac{1}{2} * \frac{1}{2} * \frac{1}{2} + 3 * \frac{1}{2} * \frac{1}{2} * \frac{1}{2}$

$$-3 * \frac{1}{2} * \frac{1}{2} + 5 * \frac{1}{2} - 1 = \frac{5}{4}$$

算法二：$p(x) = -1 + x*(5 - 3x + 3x^2 + 2x^3)$

$$= -1 + x*(5 + x*(-3 + 3x + 2x^2))$$

$$= -1 + x*(5 + x*(-3 + x*(3 + 2*x)))$$

$$p_n(x)=a_nx^n+\cdots+a_1x+a_0$$

直接计算总共需要 $\frac{n(n+1)}{2}$ 次乘法和 n 次加法

秦久韶法

从里往外一层层的计算 $p_n(x)=(\cdots(a_nx+a_{n-1})x+a_{n-2})x+\cdots+a_1)x+a_0$

$$\begin{cases} u_n=a_n \\ u_k=u_{k+1}x+a_k \quad (k=n\text{-}1,\cdots,2,1,0) \\ p_n(x)=u_0 \end{cases}$$

只要 n 次乘法和 n 次加法

注：秦九韶（1208年—1268年），字道古，鲁郡（今河南范县）人。南宋著名数学家，与李冶、杨辉、朱世杰并称宋元数学四大家。国外也称霍纳Horner算法（1819年）

江南大学 JIANGNAN UNIVERSITY

例4：$x^{255}=x\ x^2\ x^4\ x^8\ x^{16}\ x^{32}\ x^{64}\ x^{128}$

原先要做254次乘法现只需14次即可

本节重点:

如何避免两个相近的数相减（变换公式，双精度double）

本章小结

误差在数值计算中是不可避免的，误差的传播和积累直接影响到计算结果的精度。在研究算法的同时，必须注重误差分析，使建立起来的算法科学有效。

误差的表示法有绝对误差和相对误差两种。

在表示一个近似数时，要用到有效数字的概念，这在数值计算中非常有用，有效数字是由绝对误差决定的。

通常用函数的泰勒展开对误差进行估计。