习题三解答

1、用 J 法和 GS 法求解方程组（准确到小数点后三位），取 $x^{(0)}=(0,0,0)^T$ 。

（1）$\begin{bmatrix}7 & 1 & 2\\2 & 8 & 2\\2 & 2 & 9\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}10\\8\\6\end{bmatrix}$；　（2）$\begin{bmatrix}8 & -3 & 2\\4 & 11 & -1\\2 & 1 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}20\\33\\12\end{bmatrix}$。

解：（1）由于此线性方程组的系数矩阵为严格对角占优矩阵，因此对应的 J 法和 GS 法都是收敛的。其中：J 法的迭代公式如下：

$$\begin{cases}x_1^{(k+1)}=\left[-x_2^{(k)}-2x_3^{(k)}+10\right]\big/7\\x_2^{(k+1)}=\left[-2x_1^{(k)}-2x_3^{(k)}+8\right]\big/8\\x_3^{(k+1)}=\left[-2x_1^{(k)}-2x_2^{(k)}+6\right]\big/9\\x^{(0)}=(0,0,0)^T\end{cases}$$

GS 法的迭代公式如下：

$$\begin{cases}x_1^{(k+1)}=\left[-x_2^{(k)}-2x_3^{(k)}+10\right]\big/7\\x_2^{(k+1)}=\left[-2x_1^{(k+1)}-2x_3^{(k)}+8\right]\big/8\\x_3^{(k+1)}=\left[-2x_1^{(k+1)}-2x_2^{(k+1)}+6\right]\big/9\\x^{(0)}=(0,0,0)^T\end{cases}$$

J 法和 GS 法求解方程组结果见下表（注：浮点数到小数点后四位）：

计算结果表

k	J 法中 $x^{(k)}$	GS 法中 $x^{(k)}$
1	$(1.4286,1.0000,0.6667)^T$	$(1.4286,0.6429,0.2063)^T$
2	$(1.0952,0.4762,0.1270)^T$	$(1.2778,0.6290,0.2429)^T$
3	$(1.3243,0.6944,0.3175)^T$	$(1.2693,0.6219,0.2464)^T$
4	$(1.2387,0.5896,0.2181)^T$	$(1.2693,0.6211,0.2466)^T$
5	$(1.2820,0.6358,0.2604)^T$	$(1.2694,0.6210,0.2466)^T$
6	$(1.2633,0.6144,0.2405)^T$	
7	$(1.2721,0.6240,0.2494)^T$	
8	$(1.2682,0.6196,0.2453)^T$	
9	$(1.2700,0.6216,0.2472)^T$	
10	$(1.2692,0.6207,0.2463)^T$	
11	$(1.2695,0.6211,0.2467)^T$	
12	$(1.2694,0.6209,0.2465)^T$	
13	$(1.2694,0.6210,0.2466)^T$	

从上表中可以看出：J 法迭代 13 次可稳定于 $x^{(13)}=(1.2694,0.6210,0.2466)^T$（即从 14 次开始一直往后都是这一结果），因此近似解为 $x^*=(1.269,0.621,0.247)^T$ 。同理，GS 法迭代 5 次可稳定于 $x^{(5)}=(1.2694,0.6210,0.2466)^T$ ，即得近似解为 x^* 。

（2）由于此线性方程组的系数矩阵为严格对角占优矩阵，因此对应的 J 法和 GS 法都是收敛的。其中：J 法的迭代公式如下：

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = \left[3x_2^{(k)} - 2x_3^{(k)} + 20\right]\big/8 \\ x_2^{(k+1)} = \left[-4x_1^{(k)} + x_3^{(k)} + 33\right]\big/11 \\ x_3^{(k+1)} = \left[-2x_1^{(k)} - x_2^{(k)} + 12\right]\big/4 \\ x^{(0)} = (0,0,0)^T \end{cases}$$

GS 法的迭代公式如下：

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = \left[3x_2^{(k)} - 2x_3^{(k)} + 20\right]\big/8 \\ x_2^{(k+1)} = \left[-4x_1^{(k+1)} + x_3^{(k)} + 33\right]\big/11 \\ x_3^{(k+1)} = \left[-2x_1^{(k+1)} - x_2^{(k+1)} + 12\right]\big/4 \\ x^{(0)} = (0,0,0)^T \end{cases}$$

J 法和 GS 法求解方程组结果见下表（注：浮点数到小数点后四位）：

计算结果表

k	J 法中 $x^{(k)}$	GS 法中 $x^{(k)}$
1	$(2.5000,3.0000,3.0000)^T$	$(2.5000,2.0909,1.2273)^T$
2	$(2.8750,2.3636,1.0000)^T$	$(2.9773,2.0289,1.0041)^T$
3	$(3.1364,2.0455,0.9716)^T$	$(3.0098,1.9968,0.9959)^T$
4	$(3.0241,1.9478,0.9205)^T$	$(2.9998,1.9997,1.0002)^T$
5	$(3.0003,1.9840,1.0010)^T$	$(2.9998,2.0001,1.0001)^T$
6	$(2.9938,2.0000,1.0038)^T$	$(3.0000,2.0000,1.0000)^T$
7	$(2.9990,2.0026,1.0031)^T$	
8	$(3.0002,2.0006,0.9998)^T$	
9	$(3.0003,1.9999,0.9997)^T$	
10	$(3.0000,1.9999,0.9999)^T$	
11	$(3.0000,2.0000,1.0000)^T$	

从上表中可以看出：J 法迭代 11 次可稳定于 $x^{(11)} = (3.0000,2.0000,1.0000)^T$（即从 12 次开始一直往后都是这一结果），因此近似解为 $x^* = (3.000,2.000,1.000)^T$，而此线性方程组的精确解为 $x = (3,2,1)^T$。同理，GS 法迭代 6 次可稳定于 $x^{(6)} = (3.0000,2.0000,1.0000)^T$，即得近似解为 x^*。

2、已知方程组为

$$\begin{cases} 10x_1 + 4x_2 + 4x_3 = 13 \\ 4x_1 + 10x_2 + 8x_3 = 11 \\ 4x_1 + 8x_2 + 10x_3 = 25 \end{cases}$$

（1）分别求出 J 法，GS 法和 SOR 法（取 $\omega = 1.35$）的计算公式；

（2）对任意初始值，（1）中各迭代法是否收敛？

（3）当 $x^{(0)} = (0,0,0)^T$ 时，给出 GS 迭代法（注：若其收敛的话）的误差估计式。

解：（1）J 法的迭代公式如下：

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = \left[-4x_2^{(k)} - 4x_3^{(k)} + 13\right]/10 \\ x_2^{(k+1)} = \left[-4x_1^{(k)} - 8x_3^{(k)} + 11\right]/10 \\ x_3^{(k+1)} = \left[-4x_1^{(k)} - 8x_2^{(k)} + 25\right]/10 \\ x^{(0)} = (0,0,0)^T \end{cases}$$

GS 法的迭代公式如下：

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = \left[-4x_2^{(k)} - 4x_3^{(k)} + 13\right]/10 \\ x_2^{(k+1)} = \left[-4x_1^{(k+1)} - 8x_3^{(k)} + 11\right]/10 \\ x_3^{(k+1)} = \left[-4x_1^{(k+1)} - 8x_2^{(k+1)} + 25\right]/10 \\ x^{(0)} = (0,0,0)^T \end{cases}$$

当$\omega = 1.35$时，SOR 法的迭代公式如下：

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = (1-\omega)x_1^{(k)} + \omega\left[-4x_2^{(k)} - 4x_3^{(k)} + 13\right]/10 \\ x_2^{(k+1)} = (1-\omega)x_2^{(k)} + \omega\left[-4x_1^{(k+1)} - 8x_3^{(k)} + 11\right]/10 \\ x_3^{(k+1)} = (1-\omega)x_3^{(k)} + \omega\left[-4x_1^{(k+1)} - 8x_2^{(k+1)} + 25\right]/10 \\ x^{(0)} = (0,0,0)^T \end{cases}$$

（2）由于此线性方程组的系数矩阵

$$A = \begin{bmatrix} 10 & 4 & 4 \\ 4 & 10 & 8 \\ 4 & 8 & 10 \end{bmatrix}$$

为对称矩阵，且$a_{11} = a_{22} = a_{33} = 10 > 0$。因$A$的一阶、二阶和三阶顺序主子式满足

$$|A_1| = a_{11} = 10 > 0，|A_2| = 84 > 0，|A| = 296 > 0$$

从而A是对称正定矩阵，由定理 3.3.6 知：（1）中的 GS 法和 SOR 法都是收敛的。进一步

$$2D - A = \begin{bmatrix} 10 & -4 & -4 \\ -4 & 10 & -8 \\ -4 & -8 & 10 \end{bmatrix}$$

其的一阶、二阶和三阶顺序主子式满足

$$|(2D-A)_1| = 10 > 0，|(2D-A)_2| = 84 > 0，|(2D-A)| = -216 < 0$$

即$2D - A$不是对称正定矩阵，由定理 3.3.5 知：（1）中的 J 法是发散的。

（3）由于 GS 法的迭代收敛，且

$$M_{GS} = (D-L)^{-1}U = \begin{bmatrix} 0 & -0.4 & -0.4 \\ 0 & 0.16 & -0.64 \\ 0 & 0.032 & 0.672 \end{bmatrix}，x^{(0)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}，x^{(1)} = \begin{bmatrix} 1.3000 \\ 0.5800 \\ 1.5160 \end{bmatrix}$$

由于$\|M_{GS}\|_2 = \rho(M_{GS}) = 0.416 + 0.64^2 \cdot \sqrt{0.11} = 0.55185$，且

$$\left\|x^{(1)} - x^{(0)}\right\|_2 = \sqrt{1.3^2 + 0.58^2 + 1.516^2} = 2.07958$$

因此，GS 法的迭代法的误差估计式为

$$\left\|x^{(k)}-x^*\right\|_2 \le \frac{\|M\|_2^k}{1-\|M\|_2}\cdot\left\|x^{(1)}-x^{(0)}\right\|_2 = 4.64037\times 0.55185^k$$

其中 x^* 为线性方程组的精确解。

3、分别用 GS 迭代法与 SOR 法（$\omega=1.25$）求解方程组

$$\begin{cases} 5x_1+2x_2+x_3=-12 \\ -x_1+4x_2+2x_3=20 \\ 2x_1-3x_2+10x_3=3 \end{cases}$$

（1）取 $x^{(0)}=(1,1,1)^T$，迭代 7 次，并比较它们的计算结果；

（2）取 $\|\cdot\|_\infty$ 范数，试求出 GS 法与 SOR 法（$\omega=1.25$）的误差估计式。

解：GS 迭代法的迭代公式如下：

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)}=\left[-2x_2^{(k)}-x_3^{(k)}-12\right]/5 \\ x_2^{(k+1)}=\left[x_1^{(k+1)}-2x_3^{(k)}+20\right]/4 \\ x_3^{(k+1)}=\left[-2x_1^{(k+1)}+3x_2^{(k+1)}+3\right]/10 \\ x^{(0)}=(1,1,1)^T \end{cases}$$

当 $\omega=1.25$ 时，SOR 法的迭代公式如下：

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)}=-0.25x_1^{(k)}+1.25\left[-2x_2^{(k)}-x_3^{(k)}-12\right]/5 \\ x_2^{(k+1)}=-0.25x_2^{(k)}+1.25\left[x_1^{(k+1)}-2x_3^{(k)}+20\right]/4 \\ x_3^{(k+1)}=-0.25x_3^{(k)}+1.25\left[-2x_1^{(k+1)}+3x_2^{(k+1)}+3\right]/10 \\ x^{(0)}=(1,1,1)^T \end{cases}$$

（1）迭代 7 次的计算结果如下表：

计算结果表

k	GS 法中 $x^{(k)}$	SOR 法中 $x^{(k)}$
1	$(-3.0000,3.7500,2.0250)^T$	$(-4.0000,4.1250,2.6719)^T$
2	$(-4.3050,2.9113,2.0344)^T$	$(-4.7305,2.0706,1.6661)^T$
3	$(-3.9714,2.9900,1.9913)^T$	$(-3.2692,3.6694,2.1518)^T$
4	$(-3.9942,3.0058,2.0006)^T$	$(-4.5554,2.5642,1.9375)^T$
5	$(-4.0024,2.9991,2.0002)^T$	$(-3.6276,3.2644,2.0217)^T$
6	$(-3.9997,3.0000,1.9999)^T$	$(-4.2307,2.8483,1.9953)^T$
7	$(-4.0000,3.0000,2.0000)^T$	$(-3.8653,3.0829,1.9986)^T$

从上表中可以看出：GS 法迭代 7 次可稳定于 $x^{(7)}=(-4.0000,3.0000,2.0000)^T$（即从 8 次开始一直往后都是这一结果），因此近似解已经时此线性方程组的精确解 $x=(-4,3,2)^T$。但是，SOR 法迭代 7 次结果为 $x^{(7)}=(-3.8653,3.0829,1.9986)^T$。显然，在本题的计算结果中 SOR 法不如 GS 法。

（2）由于本题中的系数矩阵是严格对角占优的，GS 迭代法和 SOR 迭代法都是收敛的。

由

$$M_{GS}=(D-L)^{-1}U=\begin{bmatrix}0 & -0.4 & -0.2\\ 0 & -0.1 & -0.55\\ 0 & 0.05 & -0.125\end{bmatrix},\quad x^{(0)}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix},\quad x^{(1)}=\begin{bmatrix}-3.0000\\3.7500\\2.0250\end{bmatrix}$$

由于$\|M_{GS}\|_\infty=0.65$，于是 GS 法的迭代法的误差估计式为

$$\|x^{(k)}-x^*\|_\infty\le\frac{\|M_{GS}\|_\infty^k}{1-\|M_{GS}\|_\infty}\cdot\|x^{(1)}-x^{(0)}\|_\infty=11.4286\times0.65^k$$

其中x^*为线性方程组的精确解。

由

$$M_{SOR}=(D-\omega L)^{-1}[(1-\omega)D+\omega U]=\begin{bmatrix}-\frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{4}\\ -\frac{5}{64} & -\frac{13}{32} & -\frac{45}{64}\\ \frac{17}{512} & -\frac{7}{256} & -\frac{231}{512}\end{bmatrix}$$

$$x^{(0)}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix},\quad x^{(1)}=\begin{bmatrix}-3.0000\\3.7500\\2.0250\end{bmatrix}$$

由于$\|M_{SOR}\|_\infty=1.1875>1$，不能给出 SOR 迭代法的误差估计式。

4、若用 J 法求解方程组

$$\begin{bmatrix}a & -1 & -3\\ -1 & a & -2\\ -3 & -2 & a\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{bmatrix}$$

试讨论实数a的取值与 J 法收敛性的关系。

解：由于此线性方程组的系数矩阵

$$A=\begin{bmatrix}a & -1 & -3\\ -1 & a & -2\\ -3 & -2 & a\end{bmatrix}$$

为对称矩阵。由定理 3.3.5 知：只有当$a_{11}=a_{22}=a_{33}=a>0$，且A和$2D-A$均是对称正定矩阵时，J 法才收敛，因此a必须满足：

$$\begin{cases}|A_1|=a>0\\ |A_2|=a^2-1>0\\ |A|=a^3-14a-12>0\end{cases},\quad\begin{cases}|(2D-A)_1|=a>0\\ |(2D-A)_2|=a^2-1>0\\ |2D-A|=a^3-14a+12>0\end{cases}$$

从而可得a满足：$a>1$且$a^3-14a-12>0$。进一步，有：$a>4.1131$。

5、设线性方程组$Ax=b$，其中

$$A=\begin{bmatrix}1 & a & 0\\ a & 1 & a\\ 0 & a & 1\end{bmatrix}, b\neq 0\text{。}$$

（1）当实数a取何值时，$Ax=b$的 GS 法一定收敛；

（2）当实数a取何值时，$Ax=b$的 J 法收敛。

解：由于此线性方程组的系数矩阵A为对称矩阵，且$a_{11}=a_{22}=a_{33}=1>0$，因此由定理 3.3.6 知：只有A为对称正定矩阵时，GS 法才收敛，因此a必须满足

$$\begin{cases}|A_1|=1>0\\ |A_2|=1-a^2>0\\ |A|=1-2a^2>0\end{cases}$$

可得：当$-0.5<a<0.5$时，GS 法收敛。

（2）由定理 3.3.5 知：只有当A和$2D-A$均是对称正定矩阵时，J 法才收敛。因此a除满足$-0.5<a<0.5$外，还必须满足：

$$\begin{cases}|(2D-A)_1|=1>0\\ |(2D-A)_2|=1-a^2>0\\ |2D-A|=1-2a^2>0\end{cases}$$

从而可得：当$-0.5<a<0.5$时，J 法收敛。

6、分别用 J 法和 GS 法求解方程组

$$\begin{cases}20x_1+2x_2+3x_3=24\\ x_1+8x_2+x_3=12\\ 2x_1-3x_2+15x_3=30\end{cases}$$

取$x^{(0)}=(0,0,0)^T$，问迭代是否收敛（说明理由）？若收敛，问需要迭代多少次，才能保证各分量误差绝对值小于10^{-6}？

解：由于此线性方程组的系数矩阵为严格对角占优矩阵，因此对应的 J 法和 GS 法都是收敛的。其中：J 法的迭代公式如下：

$$\begin{cases}x_1^{(k+1)}=\left[-2x_2^{(k)}-3x_3^{(k)}+24\right]/20\\ x_2^{(k+1)}=\left[-x_1^{(k)}-x_3^{(k)}+12\right]/8\\ x_3^{(k+1)}=\left[-2x_1^{(k)}+3x_2^{(k)}+30\right]/15\\ x^{(0)}=(0,0,0)^T\end{cases}$$

相应地，$M_J=D^{-1}(L+U)=\begin{bmatrix}0 & -\frac{1}{10} & -\frac{3}{20}\\ -\frac{1}{8} & 0 & -\frac{1}{8}\\ -\frac{2}{15} & \frac{1}{5} & 0\end{bmatrix}$，$\|M_J\|_\infty=\frac{1}{3}$，$x^{(1)}=\begin{bmatrix}1.2\\ 1.5\\ 2\end{bmatrix}$。从而，当

$$\left\|x^{(k)}-x^*\right\|_\infty \le \frac{\left\|M_J\right\|_\infty^k}{1-\left\|M_J\right\|_\infty}\cdot\left\|x^{(1)}-x^{(0)}\right\|_\infty = \frac{1}{3^{k-1}} < 10^{-6}$$

可得 $k > 1+6/\lg 3 = 13.5754$，即 J 法迭代 14 次，可保证各分量误差绝对值小于 10^{-6}。

GS 法的迭代公式如下：

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = \left[-2x_2^{(k)} - 3x_3^{(k)} + 24\right]/20 \\ x_2^{(k+1)} = \left[-x_1^{(k+1)} - x_3^{(k)} + 12\right]/8 \\ x_3^{(k+1)} = \left[-2x_1^{(k+1)} + 3x_2^{(k+1)} + 30\right]/15 \\ x^{(0)} = (0,0,0)^T \end{cases}$$

$$M_{GS} = (D-\omega L)^{-1}[(1-\omega)D+\omega U] = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{10} & -\frac{3}{20} \\ 0 & \frac{1}{80} & \frac{17}{160} \\ 0 & \frac{19}{1200} & -\frac{1}{800} \end{bmatrix}，\left\|M_J\right\|_\infty = \frac{1}{4}，\ x^{(1)} = \begin{bmatrix} 1.2 \\ 1.35 \\ 2.19 \end{bmatrix}。$$

从而，当

$$\left\|x^{(k)}-x^*\right\|_\infty \le \frac{\left\|M_J\right\|_\infty^k}{1-\left\|M_J\right\|_\infty}\cdot\left\|x^{(1)}-x^{(0)}\right\|_\infty = \frac{2.92}{4^k} < 10^{-6}$$

可得 $k > (\lg 2.92+6)/\lg 4 = 10.7388$，即 GS 法迭代 11 次，可保证各分量误差绝对值小于 10^{-6}。

7、设有方程组

$$\begin{bmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 2 & -3 & 10 \\ -1 & 4 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \\ 3 \\ 20 \end{bmatrix}$$

讨论用 J 法及 GS 法的收敛性。适当交换方程的次序，结果怎样？

解：J 法的迭代矩阵为

$$M_J = D^{-1}(L+U) = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \\ \frac{2}{3} & 0 & \frac{10}{3} \\ \frac{1}{2} & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

可得：$f_{M_J}(\lambda) = \lambda^3 + \frac{211}{30}\lambda + \frac{2}{5}$。再由 $\frac{df_{M_J}(\lambda)}{d\lambda} = 3\lambda^2 + \frac{211}{30} > 0$ 及 $f_{M_J}(\lambda) \in (-\infty,+\infty)$ 知：$f_{M_J}(\lambda) = 0$ 有唯一实根介于 $-0.0568460 \sim -0.0568459$ 之间，另外两个根是一对共轭复数，因此 $\rho(M_J) = 2.6527 > 1$，即 J 法是发散的。

GS 法的迭代矩阵为

$$M_{GS}=(D-L)^{-1}U=\begin{bmatrix}0 & -\frac{2}{5} & -\frac{1}{5}\\ 0 & -\frac{4}{15} & \frac{16}{5}\\ 0 & \frac{1}{3} & -\frac{13}{2}\end{bmatrix}$$

可得：$f_{M_{GS}}(\lambda)=\lambda\cdot\left[\lambda+\frac{203+\sqrt{38809}}{60}\right]\cdot\left[\lambda+\frac{203-\sqrt{38809}}{60}\right]$，解得三个特征值分别为

$\lambda_1=0$，$\lambda_{2,3}=\frac{-203\pm\sqrt{38809}}{60}$，于是 $\rho(M_J)=2.5820>1$，即 GS 法是发散的。

若交换方程组中第二和第三两个方程的位置，即变为下列方程组

$$\begin{bmatrix}5 & 2 & 1\\ -1 & 4 & 2\\ 2 & -3 & 10\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}12\\ 20\\ 3\end{bmatrix}$$

由于其系数矩阵是严格对角占优的，从而相应的 J 迭代法和 GS 迭代法都是收敛的。

8、方程组 $Ax=b$，其中 $A=\begin{bmatrix}1 & a\\ 4a & 1\end{bmatrix}, x, b\in R^2$。试用简单迭代法收敛的充要条件求出使 J 法和 GS 法均收敛的 a 的范围。

解：由 J 法的迭代矩阵为

$$M_J=D^{-1}(L+U)=\begin{bmatrix}0 & -a\\ -4a & 0\end{bmatrix}$$

可得：$f_{M_J}(\lambda)=\lambda^2-4a^2$，易得 $\rho(M_J)=2|a|$。再由定理 3.3.2 知：J 法收敛的充要条件是 $2|a|<1$，即 $|a|<\frac{1}{2}$。

同理，GS 法的迭代矩阵为

$$M_{GS}=(D-L)^{-1}U=\begin{bmatrix}0 & -a\\ 0 & 4a^2\end{bmatrix}$$

可得：$f_{M_{GS}}(\lambda)=\lambda^2-4a^2$，易得 $\rho(M_{GS})=4|a|^2$。再由定理 3.3.2 知：GS 法收敛的充要条件是 $4|a|^2<1$，即 $|a|<\frac{1}{2}$。

综上，J 法和 GS 法均收敛的 a 的范围是：$|a|<\frac{1}{2}$。

9、分别用最速下降法和 CG 法求解方程组

$$\begin{bmatrix}4 & 3 & 0\\ 3 & 4 & -1\\ 0 & -1 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}24\\ 30\\ -24\end{bmatrix}。$$

解： 由 $A=\begin{bmatrix}4 & 3 & 0\\ 3 & 4 & -1\\ 0 & -1 & 4\end{bmatrix}$，构造 $\varphi(x_1,x_2,x_3)=\frac{1}{2}x^T Ax-b^T x$

$$=2x_1^2+2x_2^2+2x_3^2+3x_1x_2-x_2x_3-24x_1-30x_2+24x_3。$$

于是 $\nabla\varphi(x_1,x_2,x_3)=(4x_1+3x_2-24,3x_1+4x_2-x_3-30,-x_2+4x_3+24)^T$。取 $x^{(0)}=(0,0,0)^T$，按(3.4.6)和(3.4.7)计算有：

$$d^{(0)}=r^{(0)}=-\nabla\varphi(x^{(0)})=(24,30,-24)^T;$$

$$\lambda_0=\frac{(r^{(0)},d^{(0)})}{(d^{(0)},Ad^{(0)})}=0.1469;$$

$$x^{(1)}=x^{(0)}+\lambda_0 d^{(0)}=\left(3.5258,4.4072,-3.5258\right)^T;$$

$$r^{(1)}=-\nabla\varphi(x^{(1)})=\left(-3.3247,-1.7320,-5.4897\right)^T;$$

$$\beta_0=-\frac{(r^{(1)},Ad^{(0)})}{(d^{(0)},Ad^{(0)})}=0.0215;$$

$$d^{(1)}=r^{(1)}+\beta_0 d^{(0)}=(-2.8079,-1.0859,-6.0065)^T;$$

$$\lambda_1=\frac{(r^{(1)},d^{(1)})}{(d^{(1)},Ad^{(1)})}=0.2378;$$

$$x^{(2)}=x^{(1)}+\lambda_1 d^{(1)}=(2.8580,4.1490,-4.9542)^T;$$

$$r^{(2)}=-\nabla\varphi(x^{(2)})=(0.1210,-0.1241,-5.7479)^T;$$

$$\beta_1=-\frac{(r^{(2)},Ad^{(1)})}{(d^{(1)},Ad^{(1)})}=-0.7047;$$

$$d^{(2)}=r^{(2)}+\beta_1 d^{(1)}=(2.0998,0.6411,-1.5152)^T;$$

$$\lambda_2=\frac{(r^{(2)},d^{(2)})}{(d^{(2)},Ad^{(2)})}=0.2309;$$

$$x^{(3)}=x^{(2)}+\lambda_2 d^{(2)}=(3.3427,4.2970,-5.3040)^T;$$

$$r^{(3)}=-\nabla\varphi(x^{(3)})=(-2.2619,-2.5201,1.5130)^T;$$

$$\beta_2=-\frac{(r^{(3)},Ad^{(2)})}{(d^{(2)},Ad^{(2)})}=1.5499;$$

$$d^{(3)}=r^{(3)}+\beta_2 d^{(2)}=(0.9925,-1.5265,-0.8353)^T;$$

$$\lambda_3=\frac{(r^{(3)},d^{(3)})}{(d^{(3)},Ad^{(3)})}=0.0767;$$

$$x^{(4)}=x^{(3)}+\lambda_3 d^{(3)}=(3.4188,4.1800,-5.3368)^T\ \ldots\ldots$$

如此计算下去，可得 $x^{(11)}=(3.0000,4.0000,-5.0000)^T$，而所求方程组的精确解为 $(3,4,-5)^T$。

10、已知方程组 $Ax=b$，其中 $A=\begin{bmatrix}2 & 1\\1 & 2\end{bmatrix}, b=\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}$。有迭代公式

$$x^{(k+1)}=x^{(k)}+\omega[Ax^{(k)}-b]$$

试问：（1）取什么范围的 ω 值能使迭代法收敛；

（2）ω 取什么值时，可使迭代收敛速度最快？（$x^{(0)}$ 取任何值）。

解：（1）由迭代公式容易获得其迭代矩阵为：

$$M=\begin{bmatrix}1-2\omega & -\omega\\-\omega & 1-2\omega\end{bmatrix}$$

相应的特征多项式为 $f_M(\lambda)=[\lambda-(1-\omega)]\cdot[\lambda-(1-3\omega)]$，可得特征值为

$$\lambda_1=1-\omega，\lambda_2=1-3\omega$$

当 $\rho(M)=\max\{|1-\omega|,|1-3\omega|\}<1$ 时，即当 $0<\omega<2/3$ 时，此迭代法收敛；

（2）进一步，当 $\min\limits_{\omega\in(0,2/3)}\rho(M)=\min\limits_{\omega\in(0,2/3)}\left\{\max\{|1-\omega|,|1-3\omega|\}<1\right\}$ 时，可使迭代收敛速度最快。此时 $\omega=0.5$，$\rho(M)=0.5$。