第五章 插值法

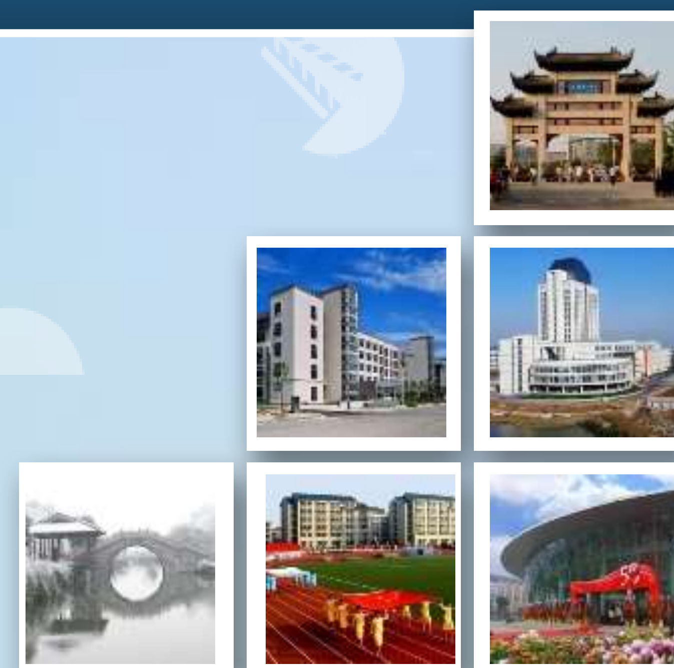


表 5.0.1 函数表

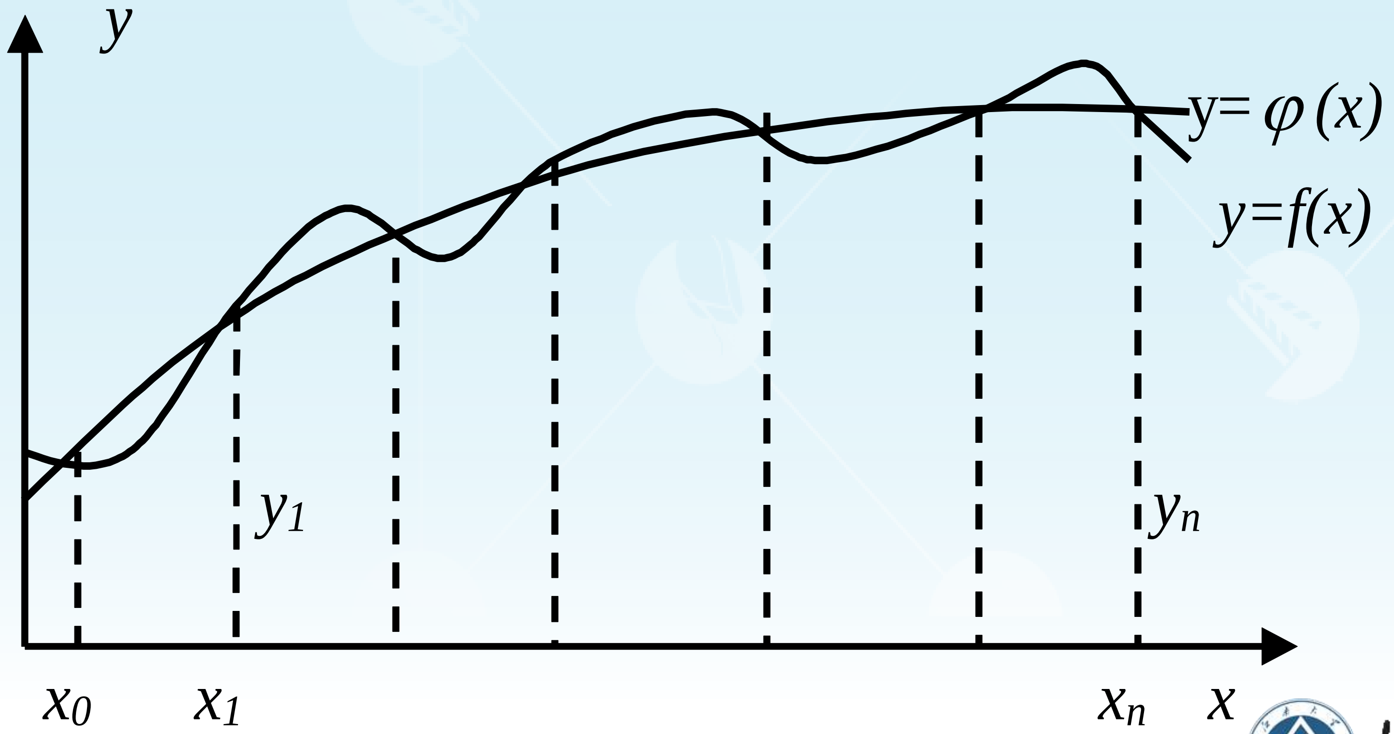
x	x_0	x_1	…	x_i	…	x_n
$y=f(x)$	y_0	y_1	…	y_i	…	y_n

需要构造一个简单函数或者便于计算的函数 $\varphi(x)$ 作为求函数 $y=f(x)$ 的近似表达式。

$$\boxed{\varphi(x_i)=f(x_i)=y_i}$$

这样确定方法就称为插值方法，相应的问题称为插值问题，其中条件式（5.0.1）称为**插值条件**。这样求解 $\varphi(x)$ 的方法就称为**插值法**，而函数 $f(x)$ 称为**被插值函数**，点 $x_0,x_1,\cdots,x_n$ 称为**插值节点**（或节点），区间 $[\min\limits_{1\le i\le n}\{x_i\},\max\limits_{1\le i\le n}\{x_i\}]$ 称为**插值区间**。

其几何意义如下图所示



江南大学

第五章 插值法

第一节 多项式插值问题的一般描述






5.1.1多项式插值问题

求一个至多n次的多项式

$$\varphi_n(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n\in P_n[x] \quad (5.1.1)$$

使其在给定点处满足插值条件

$$\varphi_n(x_i)=y_i \quad (i=0,1,\cdots,n) \quad (5.1.2)$$

其中$a_0,a_1,\cdots,a_n$为待定参数。

条件：无重合节点，即$i\neq j\Leftrightarrow x_i\neq x_j$

特别地，当$n=1$时，多项式插值问题也被称为**线性插值问题**，所获得的插值多项式也称为**线性插值公式**；当$n=2$时，多项式插值问题称为**抛物插值问题**，所获得的插值多项式也被称为**抛物插值公式**。

定理 满足插值条件（5.1.2）的 n 阶插值多项式（5.1.1）是存在的，并且是唯一的。

证明 将（5.1.1）带入（5.1.2）可得 $n+1$ 个方程的线性方程组

$$\begin{cases} a_0 + a_1 x_0 + \cdots + a_n x_0^n = y_0 \\ a_0 + a_1 x_1 + \cdots + a_n x_1^n = y_1 \\ \cdots \\ a_0 + a_1 x_n + \cdots + a_n x_n^n = y_n \end{cases} \tag{5.1.3}$$

从理论上说，线性方程组（5.1.3）的系数矩阵为 A，且

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \cdots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^n \end{vmatrix} = \prod_{0 \le i < j \le n} (x_j - x_i)$$

只要当节点 $x_0, x_1, \cdots, x_n$ 互不相同时，$\det(A) \neq 0$，即方程组（5.1.3）有唯一解。

惟一性说明，不论用何种方法来构造，也不论用何种形式来表示插值多项式，只要满足插值条件其结果都是相互恒等的。

5.1.2插值多项式的误差估计

插值多项式$\varphi_n(x)$与被插值函数$f(x)$之间的差

$$R_n(x) = f(x) - \varphi_n(x) \qquad (5.1.4)$$

称为由插值多项式$\varphi_n(x)$近似表达函数$f(x)$的**插值余项**，或称**插值多项式**$\varphi_n(x)$的误差。

定理 5.1.1: 设$n+1$个节点$x_0, x_1, \cdots, x_n$互不相同，设$a = \min\limits_{0\le i\le n}\{x_i\}$，$b = \max\limits_{0\le i\le n}\{x_i\}$，$\varphi_n(x)$是插值区间$[a,b]$上过这组节点的插值多项式。若$f(x)$在$[a,b]$上具有$n+1$阶连续导数，则存在唯一的不超过$n$次的插值多项式$\varphi_n(x)$，使得$f(x) = \varphi_n(x) + R_n(x)$，且

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} w_{n+1}(x) \qquad (5.1.5)$$

其中 $\xi \in (a,b)$，$w_{n+1}(x) = \prod\limits_{i=0}^{n}(x - x_i)$。

提示： 构造辅助函数$\Phi(t) = f(t) - \varphi_n(t) - \frac{R_n(x)}{w_{n+1}(x)} w_{n+1}(t)$有$n+2$个零点，加Roll定理

- 对于线性插值，其误差为

$$R(x) = f(x) - \varphi_1(x) = \frac{1}{2} f''(\xi)(x - x_0)(x - x_1) \qquad \xi \in (a, b)$$

- 对于抛物插值（二次插值），其误差为

$$R(x) = f(x) - \varphi_2(x) = \frac{1}{6} f'''(\xi)(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) \quad \xi \in (a, b)$$

注：不能确定 ξ，估计 $\max\limits_{a \le x \le b} |f^{(n+1)}(x)| = M_{n+1}$，则 $|R_n(x)| \le \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} |w_{n+1}(x)|$

当 $f(x)$ 是次数不大于 n 的多项式时 $R_n(x) = 0$，插值准确

江南大学