习题七解答

1、 分别用梯形公式、Simpson 公式和 Cotes 公式计算下列积分。

$$I=\int_0^1 xe^x\big/(1+x)^2\,dx\text{ 。}$$

并估计计算值的误差。

解：（1）梯形公式：$I[f]=\int_0^1\frac{xe^x}{(1+x)^2}dx\approx\frac{h}{2}[f(0)+f(1)]=0.33978$

误差：$R_1[f]=-\frac{f''(\xi)}{12}h^3\le\frac{1}{6}$

（2）Simpson 公式：$I[f]=\int_0^1\frac{xe^x}{(1+x)^2}dx\approx\frac{h}{3}[f(0)+4f(\frac{1}{2})+f(1)]=0.35752$

误差：$R_2[f]=-\frac{f^{(4)}(\xi)}{90}h^5\le\frac{11}{720}$

（3）Cotes 公式：

$$I[f]=\int_0^1\frac{xe^x}{(1+x)^2}dx\approx\frac{2h}{45}[7f(0)+32f(h)+12f(2h)+32f(3h)+7f(1)]=0.35909$$

误差：$R_4[f]=-\frac{8}{945}f^{(4)}(\xi)h^7\le\frac{103}{107520}$ 。

2、 若要求精确达到$1/2\times10^{-4}$，试分别用复合梯形公式、复合 Simpson 公式和复合 Cotes 公式计算上题的积分近似值。

解：（1）复合梯形公式：若精度达到$\frac{1}{2}\times10^{-4}$ ，则有：

$$\left|R_{T_n}[f]\right|=\frac{1}{12}h^2\left|f''(\xi)\right|=\frac{1}{12n^2}\left|f''(\xi)\right|\le\frac{1}{6n^2}<\frac{1}{2}\times10^{-4}$$

解得：$n>57.7$ ，即至少保证$n=58$，才能保证计算结果具有四位有效数字.则：

$$I[f]=\int_0^1\frac{xe^x}{(1+x)^2}dx\approx\frac{h}{2}[f(0)+f(1)+2\sum_{k=0}^{57}f(x_k)]=0.3591$$

（2）复合 Simpson 公式：若精度达到$\frac{1}{2}\times10^{-4}$ ，则有：

$$\left|R_{Sm}[f]\right| = \frac{1}{180}h^4\left|f^{(4)}(\xi)\right| = \frac{1}{180n^4}\left|f^{(4)}(\xi)\right| \le \frac{11}{45n^4} < \frac{1}{2}\times 10^{-4}$$

解得：$n > 8.36$ ，即至少保证 $n = 10 = 2m$，才能保证计算结果具有四位有效数字.

$$\text{则：}\ I[f] = \int_0^1 \frac{xe^x}{(1+x)^2}dx \approx \frac{h}{3}[f(0)+f(1)+2\sum_{k=1}^{4} f(x_{2k})+4\sum_{k=1}^{5} f(x_{2k-1})] = 0.3580$$

（3） 复合 Cotes 公式：若精度达到$\frac{1}{2}\times 10^{-4}$ ，则有：

$$\left|R_{Cm}[f]\right| = \frac{2}{945}h^6\left|f^{(6)}(\xi)\right| = \frac{2}{945n^6}\left|f^{(6)}(\xi)\right| \le \frac{412}{105n^6} < \frac{1}{2}\times 10^{-4}$$

解得:$n > 6.54$,即至少保证 $n = 8 = 4m$,才能保证计算结果具有四位有效数字.则：

$$I[f] \approx \frac{2h}{45}[7f(0)+7f(1)+32\sum_{k=1}^{2} f(x_{4k-3})+12\sum_{k=1}^{2} f(x_{4k-2})+32\sum_{k=1}^{2} f(x_{4k-1})+14\sum_{k=1}^{1} f(x_{4k})]$$

=0.3591

3、 试分别用复合梯形公式和复合 Simpson 公式计算积分$\int_0^3 e^x \sin x\, dx$，要求截断误差不超过$1/2\times 10^{-4}$，问各需计算多少个节点上的函数值。

解：（1）复合梯形公式：若精度达到$\frac{1}{2}\times 10^{-4}$ ，则有：

$$\left|R_{T_n}[f]\right| = \frac{1}{12}h^2\left|f''(\xi)\right| = \frac{3}{4n^2}\left|f''(\xi)\right| \le \frac{3\times 40.11602}{4n^2} < \frac{1}{2}\times 10^{-4}$$

解得:$n > 775.71$,即至少保证 $n = 776$,才能保证计算结果具有四位有效数字.则：

$$I[f] \approx \frac{h}{2}[f(0)+f(3)+2\sum_{k=0}^{775} f(x_k)] = 11.8594785072883$$

需要计算 777 个节点

（2）复合 Simpson 公式：若精度达到$\frac{1}{2}\times 10^{-4}$ ，则有：

$$\left|R_{Sm}[f]\right| = \frac{1}{180}h^4\left|f^{(4)}(\xi)\right| = \frac{81}{180n^4}\left|f^{(4)}(\xi)\right| \le \frac{81\times 1.73502}{180n^4} < \frac{1}{2}\times 10^{-4}$$

解得：$n > 11.18$,即至少保证 $n = 12 = 2m$,才能保证计算结果具有四位有效数字.

$$\text{则：}\ I[f] \approx \frac{h}{3}[f(0)+f(3)+2\sum_{k=1}^{6} f(x_{2k})+4\sum_{k=1}^{7} f(x_{2k-1})] = 11.990091101317$$

需要计算 25 个节点。

4、 试分别用 $n=8$ 的复合梯形公式和复合 Simpson 公式计算积分 $\int_0^1 e^{-x^2}dx$ 的近似值，并估计误差。

解：（1）复合梯形公式：

$$I[f]\approx\frac{h}{2}[f(0)+f(1)+2\sum_{k=0}^{7}f(x_k)]=0.745865614845695$$

则精度：$R_{T_n}[f]=-\frac{1}{12}h^2f^{"}(\xi)=-\frac{1}{12n^2}f^{"}(\xi)\le\frac{2}{12\times8^2}=0.0026042$

（2）复合 Simpson 公式：

$$I[f]\approx\frac{h}{3}[f(0)+f(1)+2\sum_{k=1}^{8}f(x_{2k})+4\sum_{k=1}^{9}f(x_{2k-1})]=0.748848502164118$$

$$R_{Sm}[f]=-\frac{1}{180}h^4f^{(4)}(\xi)=-\frac{1}{180n^4}f^{(4)}(\xi)\le\frac{7.41948}{180\times8^4}=0.0000100633$$

5、设 $f''(x)<0$， $x\in[a,b]$，试证明使用梯形公式计算积分 $\int_a^b f(x)dx$ 所获得的近似值小于精确值。

证明：由定理 7.1.1，$R_1[f]=\int_a^b f(x)dx-T=-\frac{f^{//}(\xi)}{12}h^3$，其中 $h=b-a$， $\xi\in(a,b)$

由条件 $f''(x)<0$， $x\in[a,b]$，则 $R_1[f]=\int_a^b f(x)dx-T>0$ 。

所以 $T<\int_a^b f(x)dx$，即使用梯形公式计算积分 $\int_a^b f(x)dx$ 所获得的近似值小于精确值。

6、 求下列近似求积公式的代数精度

（1） $\int_0^1 f(x)dx\approx1/3\cdot\left[2f\left(1/4\right)-f\left(1/2\right)+2f\left(3/4\right)\right]$；

（2） $\int_0^1 xf(x)dx\approx1/3\cdot\left[2f\left(1/4\right)-f\left(1/2\right)+2f\left(3/4\right)\right]$

解：（1）①当 $f\left(x\right)=1$ 时，左 $=\int\limits_0^1 dx=1=\frac{1}{3}[2\times1-1+2\times1]=$ 右边

②当 $f\left(x\right)=x$ 时，左 $=\int\limits_0^1 xdx=\frac{1}{2}=\frac{1}{3}[2\times\frac{1}{4}-\frac{1}{2}+2\times\frac{3}{4}]=$ 右边

③当 $f(x)=x^2$ 时，左 $=\int_0^1 x^2dx=\frac{1}{3}=\frac{1}{3}[2\times\frac{1}{16}-\frac{1}{4}+2\times\frac{9}{16}]=$ 右边

④当 $f(x)=x^3$ 时，左 $=\int_0^1 x^3dx=\frac{1}{4}=\frac{1}{3}[2\times\frac{1}{64}-\frac{1}{8}+2\times\frac{27}{64}]=$ 右边

⑤当 $f(x)=x^4$ 时，左 $=\int_0^1 x^4dx=\frac{1}{5}\neq\frac{1}{3}[2\times\frac{1}{256}-\frac{1}{16}+2\times\frac{81}{256}]=$ 右边

故代数精度为 3

（2）当 $f(x)=1$ 时，左 $=\int_0^1 xdx=\frac{1}{2}\neq\frac{1}{3}[2\times1-1+2\times1]=\frac{1}{3}$ 右边

故代数精度为 0

7、 在区间 $[-1,1]$ 上求点 x_1,x_2,x_3 以及待定系数 C，使求积公式

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx\approx C\left[f(x_1)+f(x_2)+f(x_3)\right]$$

具有三次代数精度，并求其代数精度。

解：由题设，

$$\begin{cases}2=3C\\0=C[x_1+x_2+x_3]\\\frac{2}{3}=C[x_1{}^2+x_2{}^2+x_3{}^2]\\0=C[x_1{}^3+x_2{}^3+x_3{}^3]\end{cases}$$ 解得：$$\begin{cases}C=\frac{2}{3}\\x_1=\frac{\sqrt{2}}{2}\\x_2=-\frac{\sqrt{2}}{2}\\x_3=0\end{cases}$$，代数精度为 3

8、 设计算 $u_0(h)$ 的近似计算公式如下

$$u_0(h)=J+a_1h+a_2h^3+a_3h^5+\cdots$$

试用 Richardson 外推原理建立近似计算 J 的外推公式。

解：由 $u_0(h)=J+a_1h+a_2h^3+a_3h^5+\cdots$

有 $u_0(h)-J=a_1h+a_2h^3+a_3h^5+\cdots$ （*1）

$$u_0\left(\frac{h}{2}\right)-J=a_1\frac{h}{2}+a_2\left(\frac{h}{2}\right)^3+a_3\left(\frac{h}{2}\right)^5+\cdots \quad （*2）$$

2（*2）-（*1）可得

$$J-\left[2u_0\left(\frac{h}{2}\right)-u_0(h)\right]=\frac{3}{4}a_2h^3+\frac{15}{16}a_3h^5+\frac{63}{64}a_3h^7+\cdots$$

可用 Richardson 外推原理建立近似计算 J 的误差为 $O\left(h^3\right)$ 一次外推公式：

$$J^{(1)}(h)=2u_0\left(\frac{h}{2}\right)-u_0\left(h\right);$$

类似可得 $J^{(2)}(h)=\dfrac{8J^{(1)}\left(\frac{h}{2}\right)-J^{(1)}\left(h\right)}{7}$ 的误差为 $O\left(h^5\right)$ 的外推公式；

一般算法，$J^{(i)}(h)=\dfrac{2^{2i-1}J^{(i-1)}\left(\frac{h}{2}\right)-J^{(i-1)}\left(h\right)}{2^{2i-1}-1}$，$i=1,2,\cdots$ 的误差为 $O\left(h^{2i+1}\right)$

9、 试用梯形公式的逐次分半的算法计算下列积分，要求误差不超过 $1/2\times10^{-4}$，其中 $\int_0^1\frac{4}{1+x^2}dx$。

解： 由梯形公式的逐次分半误差公式 $\left|R_{T_{2}^{m}}[f]\right|\approx\frac{1}{3}\left|T_{2^m}-T_{2^{m-1}}\right|<\frac{1}{2}\cdot10^{-4}$，

$T_{2^0}=\frac{1}{2}[f(0)+f(1)]=3$，$T_{2^m}=\frac{1}{2}T_{2^{m-1}}+\frac{1}{2^m}\sum_{k=1}^{2^{m-1}}f((2k-1)\frac{1}{2^m})$

计算列表

T_{2^m} 中 m 值	递推公式值	差值
0	3.0000000000	
1	3.1000000000	0.100000000
2	3.131196471	0.031176471
3	3.138988494	0.007812024
4	3.140940612	0.001953118
5	3.141429893	0.000488281
6	3.141551963	0.000122070

$$\int_0^1\frac{4}{1+x^2}dx\approx3.141551963$$

10、试用 Romberg 求积公式计算上题 9。

解： 由 Romberg 求积公式可得

$$T_m^{(k)}=\frac{4^m T_{m-1}^{(k+1)}T_{m-1}^{(k)}}{4^m-1}$$

因为 $T_0^0=\frac{1}{2}[f(0)+f(1)]=3$，$T_0^{\mathrm{k}}=\frac{1}{2}\left\{T_0^{\mathrm{k\text{-}1}}+\sum_{i=1}^{2^{k-1}}f[a+(i-\frac{1}{2})]\right\}$

Romberg 求积公式计算表

k	$T_0^{(k)}$	$T_1^{(k-1)}$	$T_2^{(k-2)}$	$T_3^{(k-3)}$	$T_4^{(k-4)}$	$T_5^{(k-5)}$
0	3					
1	3.10000000	3.13333333				
2	3.13117647	3.14156863	3.14211765			
3	3.13898849	3.14159250	3.14159409	3.14158578		
4	3.14094161	3.14159265	3.14159266	3.14159263	3.1415926	
5	3.14142989	3.14159265	3.14159265	3.14159265	3.1415926	3.1415926

11、试判别下列近似求积公式中是否为 Gauss 型求积公式，并指明其代数精度：

（1）$\int_{-1}^{1} f(x)dx \approx 2/3\cdot\left[f(-1)+f(0)+f(1)\right]$；

（2）$\int_{-1}^{1} f(x)dx \approx 1/3\cdot\left[f(-1)+4f(0)+f(1)\right]$；

（3）$\int_{0}^{2} f(x)dx \approx 1/9\cdot\left[5f(1-\sqrt{0.6})+8f(0)+5f(1+\sqrt{0.6})\right]$；

（4）$\int_{0}^{1} f(x)dx \approx 1/3\cdot\left[2f(1/4)-f(1/2)+2f(3/4)\right]$

解：（1）-（4）均不为 Gauss 型求积公式。

12、试确定下列求积公式中的节点和求积系数，使其为 Gauss 型求积公式，并求其代数精度：

（1）$\int_{0}^{1} f\left(x\right)dx \approx A_0 f\left(x_0\right)+A_1 f\left(x_1\right)$；

（2）$\int_{0}^{1} \sqrt{x} f\left(x\right)dx \approx A_0 f\left(x_1\right)+A_1 f\left(x_2\right)$；

（3）$\int_{-1}^{1} f\left(x\right)dx \approx A_0 f\left(x_0\right)+A_1 f\left(x_1\right)+A_2 f\left(x_2\right)$；

（4）$\int_{0}^{2} x^2 f\left(x\right)dx \approx A_0 f\left(x_0\right)+A_1 f\left(x_1\right)+A_2 f\left(x_2\right)$

解：（1）先求 2 次正交多项式。由 $\varphi_0(x)=1;\alpha_1=\dfrac{(x\varphi_0,\varphi_0)}{(\varphi_0,\varphi_0)}=\dfrac{\int_0^1 xdx}{\int_0^1 1dx}=\dfrac{1}{2}$，即 $\varphi_1(x)=x-\dfrac{1}{2}$

$$\alpha_2=\frac{(x\varphi_1,\varphi_1)}{(\varphi_1,\varphi_1)}=\frac{\int_0^1 x(x-\frac{1}{2})^2 dx}{\int_0^1 (x-\frac{1}{2})^2 dx}=\frac{1}{2};\beta_2=\frac{(\varphi_1,\varphi_1)}{(\varphi_0,\varphi_0)}=\frac{\int_0^1 (x-\frac{1}{2})^2 dx}{\int_0^1 1dx}=\frac{1}{12}$$

故
$$\varphi_2(x)=(x-\frac{1}{2})^2-\frac{1}{12}$$

令 $$\varphi_2(x)=0$$

即得高斯点： $$x=\pm\frac{1}{2\sqrt{3}}+\frac{1}{2}$$

代入求积公式得： $$\begin{cases} A_0+A_1=1 \\ (-\frac{1}{2\sqrt{3}}+\frac{1}{2})A_0+(\frac{1}{2\sqrt{3}}+\frac{1}{2})A_1=\frac{1}{2} \end{cases}$$

解之得： $$\begin{cases} A_0=\frac{1}{2} \\ A_1=\frac{1}{2} \end{cases}$$

故求积公式为：

$$\int_0^1 f(x)dx\approx\frac{1}{2}[f(-\frac{1}{2\sqrt{3}}+\frac{1}{2})+f(\frac{1}{2\sqrt{3}}+\frac{1}{2})]$$

由定理 7.4.1 知，其至少有三次代数精度。

当 $f(x)=x^4$ 时，经计算得，左边不等于右边，即所求求积公式具有三次代数精度。

（2）先求 2 次正交多项式。

由 $\varphi_0(x)=1;\alpha_1=\frac{(x\varphi_0,\varphi_0)}{(\varphi_0,\varphi_0)}=\frac{\int_0^1\sqrt{x}\cdot xdx}{\int_0^1\sqrt{x}dx}=0.6$，即 $\varphi_1(x)=x-0.6$

$$\alpha_2=\frac{(x\varphi_1,\varphi_1)}{(\varphi_1,\varphi_1)}=\frac{\int_0^1\sqrt{x}\cdot x\cdot(x-0.6)^2dx}{\int_0^1\sqrt{x}\cdot(x-0.6)^2dx}=\frac{0.0234}{0.0457}=0.5111;$$

$$\beta_2=\frac{(\varphi_1,\varphi_1)}{(\varphi_0,\varphi_0)}=\frac{\int_0^1\sqrt{x}\cdot(x-0.6)^2dx}{\int_0^1\sqrt{x}dx}=\frac{0.0457}{0.6667}=0.0686$$

故 $$\varphi_2(x)=(x-\alpha_2)\varphi_1(x)-\beta_2\varphi_0(x)$$

得 $$\varphi_2(x)=x^2-1.1111x+0.2$$

得高斯点： $$x_1=0.2381,\ x_2=0.8211$$

代入求积公式得：
$$\begin{cases} A_0 + A_1 = 0.6667 \\ 0.2381A_0 + 0.8211A_1 = 0.4 \end{cases}$$

解之得：
$$\begin{cases} A_0 = 0.2775 \\ A_1 = 0.3891 \end{cases}$$

故求积公式为：

$$\int_0^1 \sqrt{x} f(x) dx \approx 0.2775 f(0.2381) + 0.3891 f(0.8211)$$

由定理 7.4.1 知，其至少有三次代数精度（matlab 验算亦得）。

当 $f(x) = x^4$ 时，经计算得，左边不等于右边，即所求求积公式具有三次代数精度。

（3）$x_0 = -\sqrt{15}/5$，$x_1 = 0$，$x_2 = \sqrt{15}/5$，$A_0 = A_2 = 5/9$，$A_1 = 8/9$，5 次代数精度；

（4）求 3 次正交多项式。由 $\varphi_0(x) = 1; \alpha_1 = \dfrac{(x\varphi_0, \varphi_0)}{(\varphi_0, \varphi_0)} = \dfrac{\int_0^2 x^2 \cdot x dx}{\int_0^2 x^2 dx} = 1.5$，$\varphi_1(x) = x - 1.5$，

$$\alpha_2 = \frac{(x\varphi_1, \varphi_1)}{(\varphi_1, \varphi_1)} = \frac{\int_0^2 x^2 \cdot x \cdot (x-1.5)^2 dx}{\int_0^2 x^2 \cdot (x-1.5)^2 dx} = \frac{7/15}{0.4} = \frac{7}{6}; \quad \beta_2 = \frac{(\varphi_1, \varphi_1)}{(\varphi_0, \varphi_0)} = \frac{\int_0^2 x^2 \cdot (x-1.5)^2 dx}{\int_0^2 x^2 dx} = \frac{0.4}{8/3} = 0.15$$

故
$$\varphi_2(x) = (x - \alpha_2)\varphi_1(x) - \beta_2\varphi_0(x) = x^2 - \frac{8}{3}x + 1.6$$

$$\alpha_3 = \frac{(x\varphi_2, \varphi_2)}{(\varphi_2, \varphi_2)} = \frac{\int_0^2 x^2 \cdot x \cdot (x^2 - \frac{8}{3}x + 1.6)^2 dx}{\int_0^2 x^2 \cdot (x^2 - \frac{8}{3}x + 1.6)^2 dx} = \frac{0.0881}{0.0814} = 1.0828;$$

$$\beta_3 = \frac{(\varphi_2, \varphi_2)}{(\varphi_1, \varphi_1)} = \frac{\int_0^2 x^2 \cdot (x^2 - \frac{8}{3}x + 1.6)^2 dx}{\int_0^2 x^2 (x-1.5)^2 dx} = \frac{0.0814}{0.4} = 0.2035$$

$$\begin{aligned} \varphi_3(x) &= (x - \alpha_3)\varphi_2(x) - \beta_3\varphi_1(x) \\ &= x^3 - 3.7495x^2 + 4.284x - 1.42725 \end{aligned}$$

得高斯点：$x_0 = 0.5895,\ x_1 = 1.3058,\ x_2 = 1.8542$

代入求积公式得：
$$\begin{cases} A_0+A_1+A_2=2.6667 \\ 0.5895A_0+1.3058A_1+1.8542A_2=4 \\ 0.5895^2A_0+1.3058^2A_1+1.8542^2A_2=6.4 \end{cases}$$

解之：
$$\begin{cases} A_0=0.2391 \\ A_1=1.1711 \\ A_2=1.2565 \end{cases}$$

故求积公式为：

$$\int_0^2 x^2 f(x)dx \approx 0.2391f(0.5895)+1.1711f(1.3058)+1.2565f(1.8542)$$

由定理 7.4.1 知，其至少有 5 次代数精度。

13、使用 Gauss-Laguerre 求积公式计算下列积分，其中 $n=2$（取三个节点）。

（1）$\int_0^\infty e^{-10x}\sin x dx$；

（2）$\int_0^\infty e^{-x}\big/\left(1+e^{-2x}\right)dx$。

解：（1）由表 7.4.2，取 3 个节点，0.4157745568，2.2942803603，6.2899450829

Ai 系数 0.7110930099，0.2785177336，0.0103892565

$$f(x)=e^{-9x}\sin x$$

$$\int_0^\infty e^{-x}f(x)dx \approx A_0f(x_0)+A_1f(x_1)+A_2f(x_2)$$
$$=0.006808970152564$$

n=2，结果为 0.006808970152564

（2） 由表 7.4.2，取 3 个节点，0.4157745568，2.2942803603，6.2899450829

Ai 系数 0.7110930099，0.2785177336，0.0103892565

$$f(x)=\frac{1}{1+e^{-2x}}$$

$$\int_0^\infty e^{-x}f(x)dx \approx A_0f(x_0)+A_1f(x_1)+A_2f(x_2)$$
$$=0.781509605132786$$

n=2，结果为 0.781509605132786

14、使用 Gauss- Hermite 求积公式计算积分

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\cos x\, dx,$$

取节点个数分别为 2 和 3。

解：（1）由表 7.4.3，取 2 个节点，$x_i, i=0,1$为 ± 0.7071067812，$A_i, i=0,1$为 0.8862269255

$f(x)=\cos x$，$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} f\left(x\right) dx \approx A_0 f\left(x_0\right)+A_1 f\left(x_1\right)$=1.347498463773154

（2）由表 7.4.3，取 3 个节点，$x_i, i=0,1,2$ 为 0 和± 1.2247448714，$A_i, i=0,1,2$ 系数 1.1816359006 和 0.2954089752

$f(x)=\cos x$，$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} f\left(x\right) dx \approx A_0 f\left(x_0\right)+A_1 f\left(x_1\right)+A_2 f\left(x_2\right)$ =1.382033071412991

15、应用 Gauss-Chebyshev 求积公式计算积分 $I=\int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}\ dx$，取节点个数分别为 $2,3$。

解：（1）由（7.4.11）式，n=1, $I=\int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}\ dx=\int_{-1}^{1} \frac{1-x^2}{\sqrt{1-x^2}} dx \approx A_0 f(x_0)+A_1 f(x_1)$

$$f(x)=1-x^2,\quad x_0=\cos\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2},\ x_1=\cos\frac{3\pi}{4}=-\frac{\sqrt{2}}{2},\ A_0=A_1=\frac{\pi}{2},$$

$$I \approx A_0 f(x_0)+A_1 f(x_1)=1.570796326794897$$

（2）由（7.4.11）式，n=2

$$I=\int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}\ dx=\int_{-1}^{1} \frac{1-x^2}{\sqrt{1-x^2}} dx \approx A_0 f(x_0)+A_1 f(x_1)+A_2 f(x_2)$$

$$f(x)=1-x^2,\ x_0=\cos\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2},\ x_1=\cos\frac{3\pi}{6}=0,\ x_2=\cos\frac{5\pi}{6}=-\frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$A_0=A_1=A_2=\frac{\pi}{3},\ I \approx A_0 f(x_0)+A_1 f(x_1)+A_2 f(x_2)=1.570796326794897$$

16、应用 5 点 Gauss-Chebyshev 求积公式计算积分 $I=\int_{-1}^{1} 6x\big/\sqrt{1-x^2}\ dx$。

解：由（7.4.11）式，取 5 个节点 n=4

$$I=\int_{-1}^{1} \frac{6x}{\sqrt{1-x^2}} dx \approx A_0 f(x_0)+A_1 f(x_1)+A_2 f(x_2)+A_3 f(x_3)+A_4 f(x_4)$$

其中，$f(x)=6x^2$，$x_k=\cos\frac{(2\mathrm{k}+1)\pi}{10}$，$A_k=\frac{\pi}{5}$, $k=0,1,2,3,4$，

$$I \approx 9.424777960769378$$

17、用两点公式与三点公式求 $f\left(x\right)=1\big/(1+x)^2$ 在 $x=1.0,1.2$ 处的导数值，并估计误差，$f\left(x\right)$ 的值由下表给出：

x	1.0	1.1	1.2	1.3
$f(x)$	0.2500	0.2268	0.2066	0.1890

解：两点公式：$f'(1.0)\approx -0.2320$，$f'(1.2)\approx -0.2020$；

三点公式：$f'(1.0)\approx -0.2470$，$f'(1.2)\approx -0.1890$。