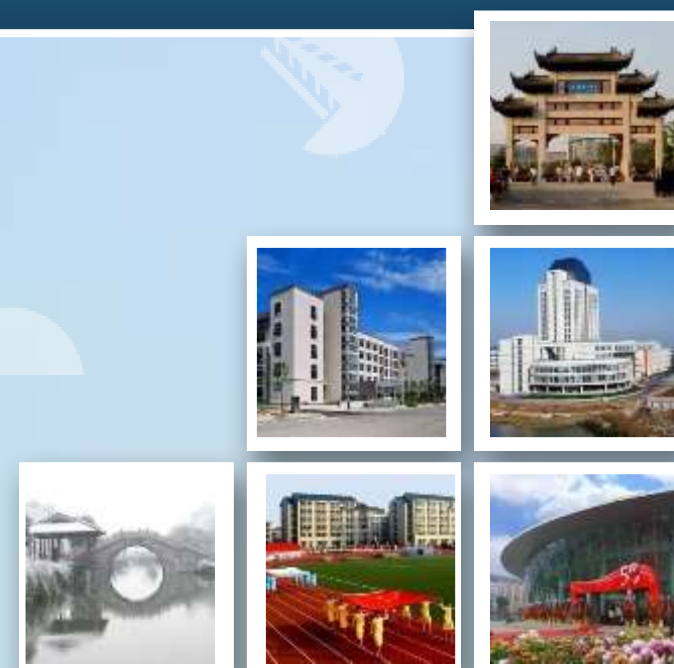
江南大学

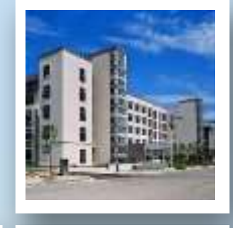
第八章 非线性方程和方程组的数值解法



江南大学

第八章 非线性方程和方程组的数值解法

第一节 引言



8.1.1 问题的背景

问题： 求 $f(x)=0$ 或多元非线性方程组 $f_i(x_1,x_2,\ldots,x_n)=0$， $i=1,2,\ldots,n$ 的解

求解方法及研究内容： 求解非线性方程一般不用直接法，而采用**迭代法**；迭代法的基本问题是收敛性、收敛速度和计算效率

与求解线性方程组的不同点： 同的初值可能有不同的收敛性态，有的初值使迭代收敛，而有的则不收敛

本章介绍方程的迭代解法，它仅限于求方程的实根。

运用迭代法求解方程的根应解决以下两个问题：

- 确定根的初值；
- 将进一步精确化到所需要的精度。

江南大学

8.1.2 一元方程的搜索法

对于一元非线方程

$$f(x)=0 \qquad (8.1.1)$$

如有满足 x^* 满足 $f(x^*)=0$，则称 x^* 为该**方程的解或根**，也称 x^* 为函数 $f(x)$ 的**零点或根**。

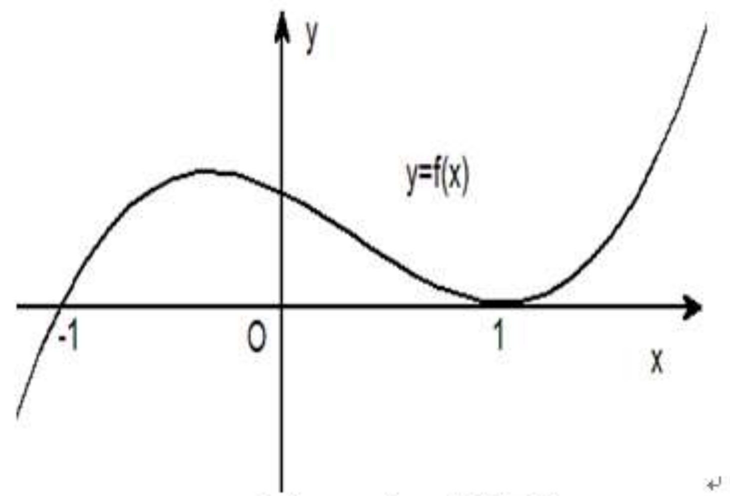


图 8-1-1：例 8.1.1 中函数的零点图

解析函数在根的两侧是否变号，取决于**根的重数**。

我们称点 x^* 是函数 $f(x)$ 的 m 重根，如果 $f(x)$ 在 x^* 领域上可表示为

$$f(x)=(x-x^*)^m g(x) \tag{8.1.2}$$

其中 m 是不小于 1 的正整数，$g(x^*)\neq 0$。

则当 m 为奇数时，$f(x)$ 在点 x^* 处变号，当 m 为偶数时不变号。

注：$g(x)$在x^*附近保号

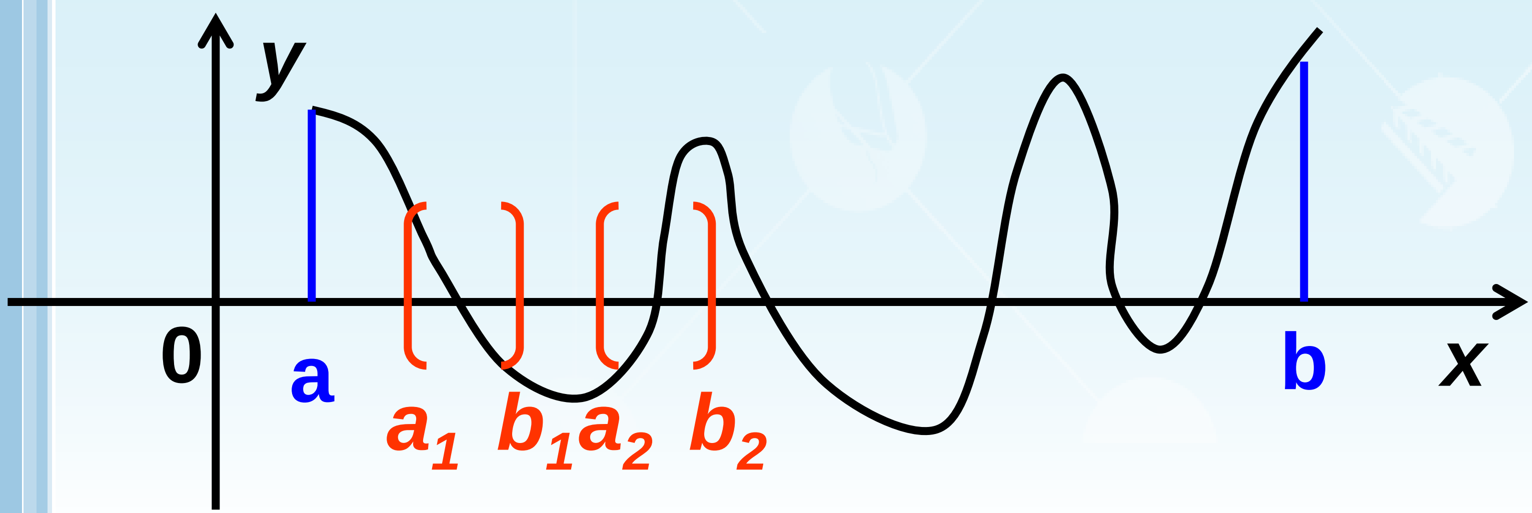
（8.1.2）等价于条件

$$f(x^*)=f'(x^*)=\cdots=f^{(m-1)}(x^*)=0, f^{(m)}(x^*)\neq 0 \tag{8.1.3}$$

提示：$f(x)=f(x^*)+f'(x^*)(x-x^*)+\frac{f^{(m-1)}(x^*)}{(m-1)!}(x-x^*)^{m-1}+\frac{f^{(m)}(\xi_x)}{(m)!}(x-x^*)^m$

搜索法

对于给定的f（x），设有根区间为[a, b]，从x_0=a出发，以步长h=(b-a)/n(n是正整数)，在[a, b]内取定节点：$a_i=a_0+kh$ (k=0, 1, 2, …, n)，从左至右检查f（x_i）的符号（连续函数的介值性定理）



例1 方程$f(x)=x^3-x-1=0$ 确定其有根区间

解：$f(0)<0$ $f(2)>0$

在区间（0，2）内至少有一个实根

设从$x=0$出发，取$h=0.5$为步长向右进行根的搜索，列表如下

x	0	0.5	1.0	1.5	2
f(x)	–	–	–	+	+

可以看出，在[1.0, 1.5]内必有一根

江南大学

8.1.3 二分法

原理： 设 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续，$f(a)f(b)<0$，则由连续函数的性质知 $f(x)=0$ 在 (a,b) 内至少有一个实根。$[a,b]$ 为 $f(x)=0$ 的有根区间。

特别地，$f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上单调，那么 $f(x)=0$ 在 (a,b) 内只有唯一的实根 x^*。

思想： 逐步将**有根区间分半**，通过**判别函数值的符号**进一步搜索有根区间。将有根区间缩小到充分小，从而求出满足给定精度的近似值。

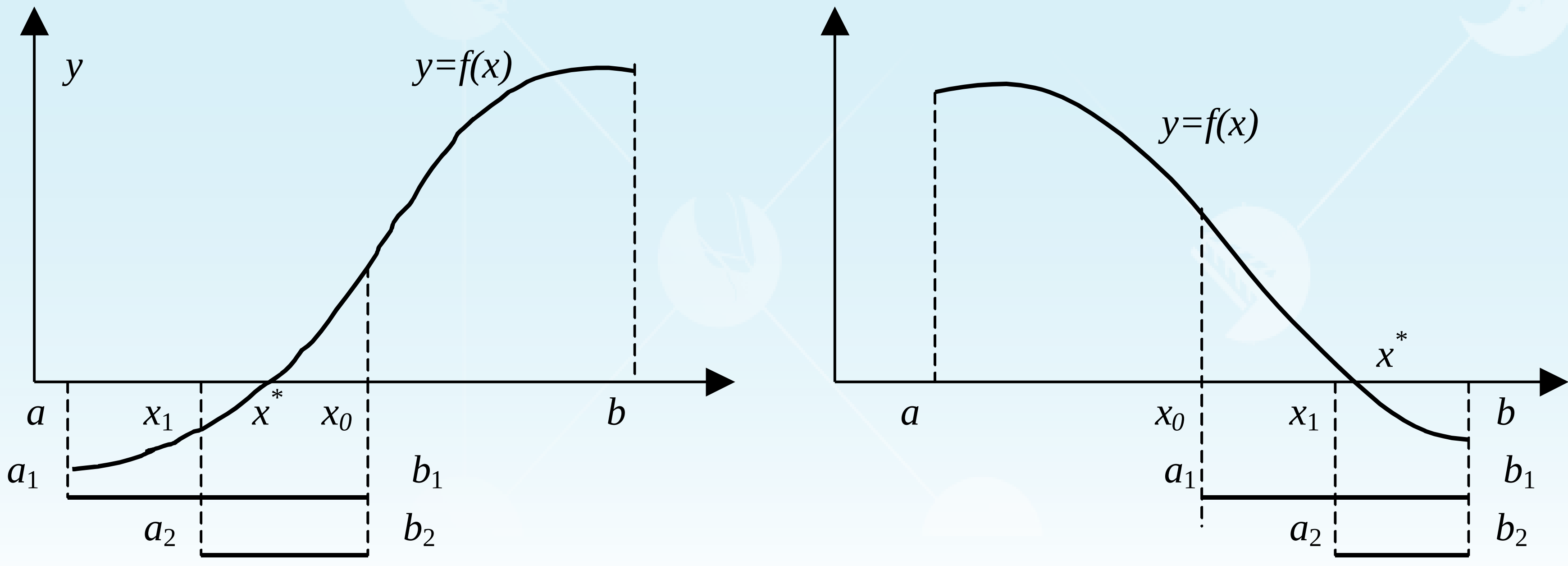
现采用以下步骤来求这根的近似值。

（1） 将区间$[a,b]$分半，记$x_0=(a+b)/2$，求$f(x_0)$。

若$|f(x_0)|<\delta$，则取$x^*\approx x_0$，否则进行下一步；

（2） 计算$f(a)f(x_0)$，若$f(a)f(x_0)>0$，则取$a_1=x_0, b_1=b$；

否则$a_1=a, b_1=x_0$；



（3）重复上述步骤，直到$|b_n - a_n| < \varepsilon$，则取$x^* \approx x_n = (a_n + b_n)/2$

$$\left|x^* - x_n\right| \le \frac{b_n - a_n}{2} = \frac{b - a}{2^{n+1}}$$

误差分析：$|x^* - x_n| < (b_n - a_n)/2 = (b-a)/2^{n+1}$ （8.1.4）

江南大学

例 8.1.2: 证明方程 $x^3-2x^2-4x-7=0$ 在[3,4]内只有一根。使用二分法求误差不超过 10^{-3} 的根的迭代多少次？

解： 设 $f($ …，

$f(3)f(4)<0$, … 而

$f(x)$ 在[3,4]上 …

为了使 x_n … 由

$(b-a)=1$，解 … 为

$x_9=3.632$。

k	a_k	$f(a_k)$	c_k	$f(c_k)$	b_k	$f(b_k)$
0	3	-	3.5	-	4	+
1	3.5	-	3.75	+	4	+
2	3.5	-	3.625	-	3.75	+
3	3.625	-	3.6875	+	3.75	+
4	3.625	-	3.6563	+	3.6875	+
5	3.625	-	3.6406	+	3.6563	+
6	3.625	-	3.6328	+	3.6406	+
7	3.625	-	3.6289	-	3.6328	+
8	3.6289	-	3.6309	-	3.6328	+
9	3.6309	-	$\boxed{3.6318}$		3.6328	+

二分法的优点是不管有根区间 $[a,b]$ 多大, 总能求出满足精度要求的根, 且对函数f(x)的要求不高, 只要连续即可, 计算亦简单; 它的局限性是只能用于求函数的实根, 不能用于求复根及偶数重根, 它的收敛速度与比值为 $\frac{1}{2}$ 的等比级数相同。