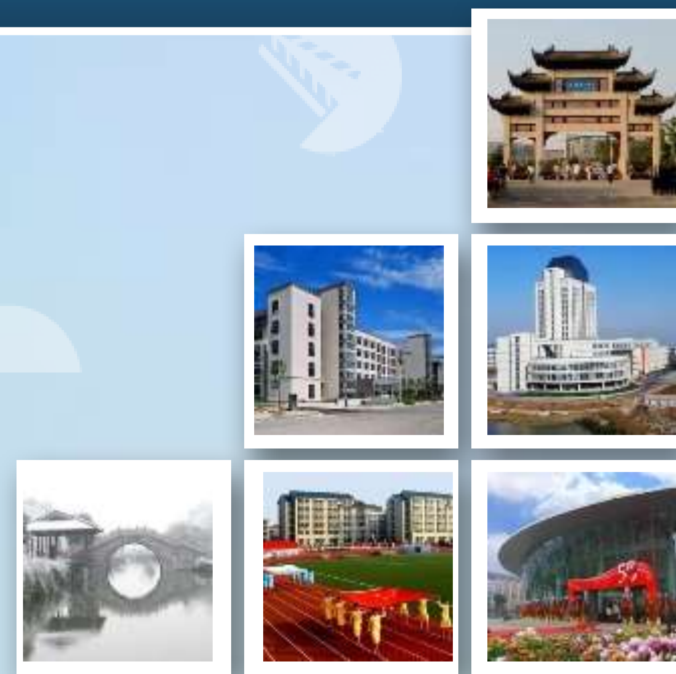
江南大学

第三节 函数的最佳平方逼近

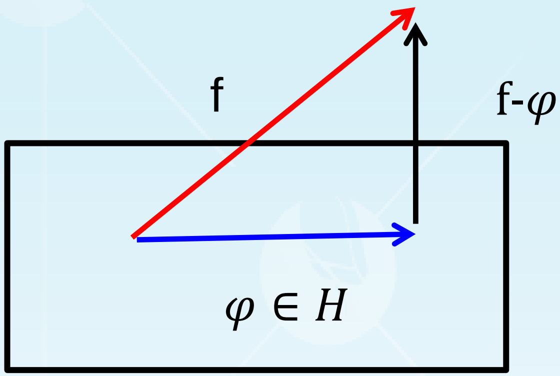


连续函数最佳平方逼近

定义6.3.1 设$f(x) \in C[a,b]$，$H = \text{span}\{\phi_0, \cdots, \phi_m\} \subset C[a,b]$，若存在$\varphi(x) \in H$，满足

$$\int_a^b \omega(x)[f(x)-\varphi(x)]^2 dx = \min_{\Phi(x)\in H} \int_a^b \omega(x)[f(x)-\Phi(x)]^2 dx,$$

则称$\varphi(x)$为函数$f(x)$在集合H上的**最佳平方逼近函数**.



注：$\|f-\varphi\|_2^2 = \int_a^b w(x)[f(x)-\varphi(x)]^2\, dx$

平均误差$\overline{R}[\varphi] = \frac{1}{b-a}\int_a^b \omega(x)[f(x)-\varphi(x)]^2 dx = \frac{1}{b-a}(f-\varphi, f-\varphi)$

$$= \frac{1}{b-a}(f-\varphi, f)$$

最佳平方逼近多项式

设$f(x) \in C[a,b]$， 如果n次多项式$\varphi(x) = \sum_{j=0}^{m} a_j x^j$满足

$$\int_a^b \omega(x)[f(x) - \varphi(x)]^2 dx = \min_{\Phi(x)\in P_m} \int_a^b \omega(x)[f(x) - \Phi(x)]^2 dx,$$

则称$\varphi(x)$为$f(x)$在$[a,b]$上的n次**最佳平方逼近多项式.**

注：逼近论中的核心定理——Weierstrass逼近定理
设$f(x) \in C[a,b]$，则对任何$\varepsilon > 0$，总存在一个多项式$P(x)$，使

$$max_{a\le x\le b}|f(x) - P(x)| < \varepsilon$$

连续函数最佳平方逼近求解

问题归结为求$\varphi(x)=\sum_{k=0}^{m}a_k\phi_k$，即求系数$a_k$，使得

$S(a_0,\cdots,a_m)=\int_a^b\omega(x)\left[f(x)-\sum_{k=0}^{m}a_k\phi_k\right]^2\mathrm{d}x$ 取得极小值.

$$\because\quad \frac{\partial S}{\partial a_j}(a_0,\cdots,a_m)=-2\int_a^b\omega(x)\left[f(x)-\sum_{k=0}^{m}a_k\phi_k\right]\phi_j\mathrm{d}x=0,$$

可见，$$\left(f(x)-\sum_{k=0}^{m}a_k\phi_k,\ \phi_j\right)=0,\quad j=0,1,\cdots,m.$$

$$\therefore\begin{bmatrix}(\phi_0,\phi_0) & (\phi_0,\phi_1) & \cdots & (\phi_0,\phi_m)\\ (\phi_1,\phi_0) & (\phi_1,\phi_1) & \cdots & (\phi_1,\phi_m)\\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots\\ (\phi_m,\phi_0) & (\phi_m,\phi_1) & \cdots & (\phi_m,\phi_m)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a_0\\ a_1\\ \vdots\\ a_m\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}(f,\phi_0)\\ (f,\phi_1)\\ \vdots\\ (f,\phi_m)\end{bmatrix},$$

此方程组称为**法方程.**

江南大学

计算步骤

定理 6.3.1： 正则方程组（6.3.4）存在唯一解 $(a_0, a_1, \cdots, a_m)$，且相应的函数

$$\varphi(x) = \sum_{k=0}^{m} a_k \varphi_k(x)$$

满足关系式（6.3.2），即它是函数 $f(x)$ 在 H 中关于权函数 $\omega(x)$ 的最佳平方逼近函数。

①写出法方程组（正则方程组）的系数矩阵和右端项

②求解线性方程组的解，即基函数对应系数a_k

③计算平均误差$\frac{1}{b-a}(f-\varphi, f-\varphi) = \frac{1}{b-a}(||f||_2^2 - \sum_{k=0}^{m} a_k (f, \varphi_k))$

例题

例6.3.1： 求 $f(x) = \sin \pi x$ 在[0,1]上的二次最佳平方逼近多项式，并计算平均误差

解： 这里 $\omega(x) \equiv 1$。若取 $\varphi_0(x)=1$，$\varphi_1(x)=x$，$\varphi_2(x)=x^2$，$H=Span\{1,x,x^2\}$。

$$(\varphi_0,\varphi_0)=\int_0^1 dx=1,\quad (\varphi_0,\varphi_1)=\int_0^1 xdx=\frac{1}{2},\quad (\varphi_0,\varphi_2)=(\varphi_1,\varphi_1)=\int_0^1 x^2dx=\frac{1}{3}$$

$$(\varphi_1,\varphi_2)=\int_0^1 x^3dx=\frac{1}{4},\quad (\varphi_2,\varphi_2)=\int_0^1 x^4dx=\frac{1}{5},\quad (f,\varphi_0)=\int_0^1 \sin \pi x dx=\boxed{\frac{2}{\pi}}$$

$$(f,\varphi_1)=\int_0^1 x\sin \pi x dx=\boxed{\frac{1}{\pi}},\quad (f,\varphi_2)=\int_0^1 x^2\sin \pi x dx=\boxed{\frac{\pi^2-4}{\pi^3}}$$

因此正则方程组为：

$$\boxed{\begin{cases} a_0+\frac{1}{2}a_1+\frac{1}{3}a_2=\frac{2}{\pi} \\ \frac{1}{2}a_0+\frac{1}{3}a_1+\frac{1}{4}a_2=\frac{1}{\pi} \\ \frac{1}{3}a_0+\frac{1}{4}a_1+\frac{1}{5}a_2=\frac{\pi^2-4}{\pi^3} \end{cases}}$$

其解为

$$a_0=\frac{12\pi^2-120}{\pi^3}，\quad a_1=-\frac{60\pi^2-720}{\pi^3}，\quad a_2=\frac{60\pi^2-720}{\pi^3}$$

因此 $f(x)=\sin x$ 在 $[0,\pi]$ 上的二次最佳平方逼近多项式为

$$\varphi(x)=\frac{12\pi^2-120}{\pi^3}-\frac{60\pi^2-720}{\pi^3}x+\frac{60\pi^2-720}{\pi^3}x^2。$$

相应地，其平均误差为

$$\overline{R}[\varphi]=\int_0^1[f(x)-\varphi(x)]^2\,dx=(f-\varphi,f-\varphi)$$

$$=(f,f)-\sum_{i=0}^{2}a_i(f,\varphi_i)$$

$$=\int_0^1\sin^2\pi x\,dx-\left(\frac{12\pi^2-120}{\pi^3}\boxed{\frac{2}{\pi}}-\frac{60\pi^2-720}{\pi^3}\boxed{\frac{1}{\pi}}+\frac{60\pi^2-720}{\pi^3}\boxed{\frac{\pi^2-4}{\pi^3}}\right)$$

$$=\frac{1}{2}-\frac{24\pi^4-480\pi^2+2880}{\pi^6}$$

最佳平方逼近中的条件数

一般地，求函数$f(x)\in C[0,1]$的在$\Phi=\mathrm{span}\{1,x,\cdots,x^n\}$中关于$\rho(x)=1$的$n$次最佳平方逼近多项式，可得法方程系数矩阵

$$G=\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \cdots & \frac{1}{n} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \cdots & \frac{1}{n+1} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \frac{1}{n} & \frac{1}{n+1} & \cdots & \frac{1}{2n+1} \end{bmatrix},$$

称为*Hilbert*矩阵，是著名的病态矩阵.

注：Hilbert矩阵的条件数$O((1+\sqrt{2})^{4n}/\sqrt{n})$

```
>> cond(hilb(15))

ans =

2.8346e+17
```

用正交函数族求最佳平方逼近

设$f(x) \in C[a,b]$，$\mathrm{H} = \mathrm{span}\{\phi_0, \cdots, \phi_m\} \subset C[a,b]$，$\phi_0, \cdots, \phi_m$是正交函数族，则

$$\begin{bmatrix} (\phi_0,\phi_0) & & & \\ & (\phi_1,\phi_1) & & \\ & & \ddots & \\ & & & (\phi_m,\phi_m) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (f,\phi_0) \\ (f,\phi_1) \\ \vdots \\ (f,\phi_m) \end{bmatrix}$$

$$a_k = (f,\phi_k) / (\phi_k,\phi_k),$$

$$\varphi(x) = \sum_{k=0}^{m} a_k \phi_k(x) = \sum_{k=0}^{m} \frac{(f,\phi_k)}{\|\phi_k\|_2^2} \phi_k(x).$$

正交函数族求最佳平方逼近的例题

例 求$f(x)=e^x$在[-1, 1]上的三次最佳平方逼近多项式.

解 $(f,p_0)=\int_{-1}^{1}e^x\mathrm{d}x\approx 2.3504,\quad (f,p_1)=\int_{-1}^{1}\boxed{x}e^x\mathrm{d}x\approx 0.7358,$

$$(f,p_2)=\int_{-1}^{1}\boxed{\left(\frac{3}{2}x^2-\frac{1}{2}\right)}e^x\mathrm{d}x\approx 0.1431,$$

$$(f,p_3)=\int_{-1}^{1}\boxed{\left(\frac{5}{2}x^3-\frac{3}{2}x\right)}e^x\mathrm{d}x\approx 0.02013.$$

$$a_0^*=\boxed{\frac{1}{2}}(f,p_0)\approx 1.1752,\qquad a_1^*=\boxed{\frac{3}{2}}(f,p_1)\approx 1.1036,$$

$$a_2^*=\boxed{\frac{5}{2}}(f,p_2)\approx 0.3578,\qquad a_3^*=\boxed{\frac{7}{2}}(f,p_3)\approx 0.07046.$$

$$s^*(x)=1.1752p_0+1.1036p_1+0.3578p_2+0.07046p_3$$

$$=0.9963+0.09980x+0.5367x^2+0.1762x^3.$$