习题课

第1章-第6章

习题一

3、设 $y_0=28$，按递推公式 $y_n=y_{n-1}-\frac{1}{100}\sqrt{783}(n=1,2,3,\cdots)$，计算 y_{100}，若取 $\sqrt{783}\approx 27.982$（5 位有效数字），试问计算 y_{100} 将有多达误差？其数值稳定性又如何？

$$|\sqrt{783}-27.982|\le \frac{1}{2}\times 10^{-3} := \delta$$

$$|y_n^*-y_n|=|y_{n-1}^*-\frac{1}{100}\times 27.982-(y_{n-1}-\frac{1}{100}\sqrt{783})|$$

$$\le |y_{n-1}^*-y_{n-1}|+\frac{1}{100}|\sqrt{783}-27.982|$$

$$\le |y_{n-1}^*-y_{n-1}|+\frac{1}{100}\delta \le |y_{n-2}^*-y_{n-2}|+\frac{2}{100}\delta \quad \le \frac{n}{100}\delta$$

$$|y_{100}^*-y_{100}|\le \delta=\frac{1}{2}\times 10^{-3}$$

4、下列各题怎样计算才合理？

（1）$1-\cos 1^0$（用 4 位函数表求三角函数）;

（2）$\ln(30-\sqrt{30^2-1})$(开方用 6 位函数表）;

（3）$\int_N^{N+1}\frac{dx}{1+x^2}$(其中 N 充分大）;

（4）$\frac{1-\cos x}{\sin x}$（其中$|x|$充分小）。

(1)$2\sin^2\frac{\pi}{360}$

(2) $\ln\frac{1}{30+\sqrt{30^2-1}}=-\ln(30+\sqrt{30^2-1})$

(3) $\arctan\frac{1}{1+N(N+1)}$

(4) $\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{\sin x}=\tan\frac{x}{2}$

习题二

1、用 Gauss 消去法解下列方程组。

（1）$\begin{cases} 2x_1+6x_2-4x_3=4 \\ x_1+4x_2-5x_3=3 \\ 6x_1-x_2+18x_3=2 \end{cases}$；　　（2）$\begin{cases} 2x_1+x_2+2x_3=6 \\ 4x_1+3x_2+x_3=11 \\ 6x_1+x_2+5x_3=13 \end{cases}$。

消去过程：

$$\begin{pmatrix} 2 & 6 & -4 & 4 \\ 1 & 4 & -5 & 3 \\ 6 & -1 & 18 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 6 & -4 & 4 \\ 0 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & -19 & 30 & -10 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 6 & -4 & 4 \\ 0 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & -27 & 9 \end{pmatrix}$$

回代过程：

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4}{3} \\ 0 \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

3、用三角分解法的紧凑格式解下列方程组，并写出 L，U 矩阵。

（1）$\begin{bmatrix}5&7&9&10\\6&8&10&9\\7&10&8&7\\5&7&6&5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\end{bmatrix}$；（2）$\begin{bmatrix}1&2&3&4\\1&4&9&16\\1&6&27&64\\1&8&81&256\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\10\\44\\190\end{bmatrix}$。

紧凑格式

$$\begin{array}{ccccc}
5(5) & 7(7) & 9(9) & 10(10) & 1(1)\\
6(\frac{6}{5}) & 8(-\frac{2}{5}) & 10(-\frac{4}{5}) & 9(-3) & 1(-\frac{1}{5})\\
7(\frac{7}{5}) & 10(-\frac{1}{2}) & 8(-5) & 7(-\frac{17}{2}) & 1(-\frac{1}{2})\\
5(1) & 7(0) & 6(\frac{3}{5}) & 5(\frac{1}{10}) & 1(\frac{3}{10})
\end{array}$$

$$L=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\\frac{6}{5}&1&0&0\\\frac{7}{5}&-\frac{1}{2}&1&0\\1&0&\frac{3}{5}&1\end{pmatrix}$$

$$U=\begin{pmatrix}5&7&9&10\\0&-\frac{2}{5}&-\frac{4}{5}&-3\\0&0&-5&-\frac{17}{2}\\0&0&0&\frac{1}{10}\end{pmatrix}$$

$$Ux=y\text{得}x=\begin{pmatrix}20\\-12\\-5\\3\end{pmatrix}$$

5、用追赶法解三角方程组。

（1）$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 2.5 \end{bmatrix}$$；

紧凑格式

$$\begin{pmatrix} 2(2) & -1(-1) & 0(0) & 0(0) & 0(0) \\ -1(-\frac{1}{2}) & 2(\frac{3}{2}) & -1(-1) & 0(0) & 1(1) \\ 0(0) & -1(-\frac{2}{3}) & 2(\frac{4}{3}) & -1(-1) & 0(\frac{2}{3}) \\ 0(0) & 0(0) & -1(-\frac{3}{4}) & 2(\frac{5}{4}) & 2.5(3) \end{pmatrix}$$

$$y=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{2}{3} \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{4}{3} & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{5}{4} \end{pmatrix} x = y，\text{得}x=\begin{pmatrix} \frac{11}{10} \\ \frac{11}{5} \\ \frac{23}{10} \\ \frac{12}{5} \end{pmatrix}$$

6、分别用平方根法和改进平方根法

（1）$\begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$；

平方根法 $l_{11}=\sqrt{2}, A=\begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & l_{22} & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & l_{32} & l_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \sqrt{2} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & l_{22} & l_{32} \\ 0 & 0 & l_{33} \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$l_{22}=\sqrt{\frac{3}{2}}, A=\begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \sqrt{\frac{3}{2}} & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & l_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \sqrt{2} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \sqrt{\frac{3}{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & 0 & l_{33} \end{pmatrix}$

$$\frac{1}{2}-\left(-\frac{1}{\sqrt{6}}\right)\left(-\frac{1}{\sqrt{6}}\right)=\frac{1}{3}, \quad l_{33}=\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$A=\begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \sqrt{\frac{3}{2}} & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \sqrt{2} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \sqrt{\frac{3}{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}=LL^T$$

$Ly=b$, 得 $y=\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{2}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$

$L^T x=y$, 得 $x=\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

改进平方根法$d_{11}=2, A=\begin{pmatrix}1&0&0\\-\frac{1}{2}&1&0\\-\frac{1}{2}&l_{32}&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&0&0\\0&d_{22}&0\\0&0&d_{33}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}\\0&1&l_{32}\\0&0&1\end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix}2&0\\0&1\end{pmatrix}-2\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{3}{2}&-\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

$$d_{22}=\frac{3}{2}, A=\begin{pmatrix}1&0&0\\-\frac{1}{2}&1&0\\-\frac{1}{2}&-\frac{1}{3}&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&0&0\\0&\frac{3}{2}&0\\0&0&d_{33}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}\\0&1&-\frac{1}{3}\\0&0&1\end{pmatrix}$$

$$\frac{1}{2}-\frac{3}{2}\left(-\frac{1}{3}\right)\left(-\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{3},\ \mathrm{d}_{33}=\frac{1}{3}$$

$$A=\begin{pmatrix}1&0&0\\-\frac{1}{2}&1&0\\-\frac{1}{2}&-\frac{1}{3}&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&0&0\\0&\frac{3}{2}&0\\0&0&\frac{1}{3}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}\\0&1&-\frac{1}{3}\\0&0&1\end{pmatrix}=LDL^T$$

$Ly=b$,得$y=\begin{pmatrix}1\\\frac{1}{2}\\\frac{2}{3}\end{pmatrix}$

$L^Tx=D^{-1}y$,得$\mathrm{x}=\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}$

7、设 $x=(1,-2,3)^T$， $y=(0,2,3)^T$，试计算 x 与 y 的三种常用范数。

$||x||_1 = 6, ||x||_2 = \sqrt{14}, ||x||_\infty = 3$

8、设 $A=\begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & \text{[redacted]} \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}$，试计算 $\|A\|_\infty$， $\|A\|_1$， $\|A\|_2$，

$||A||_\infty = 3, ||A||_1 = 5,$

$$A^T A = \begin{pmatrix} 5 & -4 & 0 \\ -4 & 9 & -2 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$|\lambda I - A| = (\lambda - 3)(\lambda^2 - 12\lambda + 3) = 0$$

$||A||_2 = \sqrt{6 + \sqrt{33}}$

习题三

1、用 Jacobi 迭代法和 Gauss-Seidel 迭代法求解方程组（准确到小数点后三位），取 $x^{(0)}=(0,0,0)^T$。

（1）$\begin{bmatrix} 7 & 1 & 2 \\ 2 & 8 & 2 \\ 2 & 2 & 9 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 10 \\ 8 \\ 6 \end{bmatrix}$；（2）$\begin{bmatrix} 8 & -3 & 2 \\ 4 & 11 & -1 \\ 2 & 1 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 20 \\ 33 \\ 12 \end{bmatrix}$。

J法

$x_1^{(k+1)}$ =（$-x_2^{(k)}-2x_3^{(k)}+10$）/7

$x_2^{(k+1)}$ =（$-2x_1^{(k)}-2x_3^{(k)}+8$）/8

$x_3^{(k+1)}$ =（$-2x_1^{(k)}-2x_2^{(k)}+6$）/9

GS法

$x_1^{(k+1)}$ =（$-x_2^{(k)}-2x_3^{(k)}+10$）/7

$x_2^{(k+1)}$ =（$-2x_1^{(k+1)}-2x_3^{(k)}+8$）/8

$x_3^{(k+1)}$ =（$-2x_1^{(k+1)}-2x_2^{(k+1)}+6$）/9

2、已知方程组为

$$\begin{cases}10x_1+4x_2+4x_3=13\\4x_1+10x_2+8x_3=11\\4x_1+8x_2+10x_3=25\end{cases}$$

（1）分别求出 J 法，GS 法和 SOR 法（取 $\omega=1.35$）的计算公式；

（2）对任意初始值，（1）中各迭代法是否收敛？

（3）对 $x^{(0)}=(0,0,0)^T$，对（2）中收敛的各迭代法给出误差估计式。

(1) *J*法

$x_1^{(k+1)}$ = （$-4x_2^{(k)}-4x_3^{(k)}+13$）/10

$x_2^{(k+1)}$ = （$-4x_1^{(k)}-8x_3^{(k)}+11$）/10

$x_3^{(k+1)}$ = （$-4x_1^{(k)}-8x_2^{(k)}+25$）/10

GS法

$x_1^{(k+1)}$ = （$-4x_2^{(k)}-4x_3^{(k)}+13$）/10

$x_2^{(k+1)}$ = （$-4x_1^{(k+1)}-8x_3^{(k)}+11$）/10

$x_3^{(k+1)}$ = （$-4x_1^{(k+1)}-8x_2^{(k+1)}+25$）/10

SOR法

$x_1^{(k+1)}$ = $-0.35x_1^{(k)}+1.35$（$-4x_2^{(k)}-4x_3^{(k)}+13$）/10

$x_2^{(k+1)}$ = $-0.35x_2^{(k)}+1.35$（$-4x_1^{(k+1)}-8x_3^{(k)}+11$）/10

$x_3^{(k+1)}$ = $-0.35x_3^{(k)}+1.35$（$-4x_1^{(k+1)}-8x_2^{(k+1)}+25$）/10

（2）$A=\begin{pmatrix}10&4&4\\4&10&8\\4&8&10\end{pmatrix}$ 对称矩阵，

且三个顺序主子式 $|A_1|=10>0,|A_2|=84>0,|A_3|=296>0$

*GS*收敛

$$2D - A = \begin{pmatrix} 10 & -4 & -4 \\ -4 & 10 & -8 \\ -4 & -8 & 10 \end{pmatrix} := B$$

3个顺序主子式 $|B_1| = 10 > 0, |B_2| = 84 > 0, |B_3| = -216 < 0$

J法发散

$0 < w < 2$, SOR法收敛

（3）GS法

$$x_1^{(k+1)} = (-4x_2^{(k)} - 4x_3^{(k)} + 13)/10 = -\frac{2}{5}x_2^{(k)} - -\frac{2}{5}x_3^{(k)} + \frac{13}{10}$$

$$x_2^{(k+1)} = (-4x_1^{(k+1)} - 8x_3^{(k)} + 11)/10 = \frac{4}{25}x_2^{(k)} - \frac{16}{25}x_3^{(k)} + \frac{29}{50}$$

$$x_3^{(k+1)} = (-4x_1^{(k+1)} - 8x_2^{(k+1)} + 25)/10 = \frac{4}{125}x_2^{(k)} + \frac{84}{125}x_3^{(k)} + \frac{379}{250}$$

$$M_{GS} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{2}{5} & -\frac{2}{5} \\ 0 & \frac{4}{25} & -\frac{16}{25} \\ 0 & \frac{4}{125} & \frac{84}{125} \end{pmatrix}, \|M_{GS}\|_\infty = 0.8 \qquad x^{(1)} = \begin{pmatrix} \frac{13}{10} \\ \frac{29}{50} \\ \frac{379}{250} \end{pmatrix}, \|x^{(1)} - x^{(0)}\|_\infty = 1.516$$

$$\|x^{(k)} - x^*\|_\infty \le \frac{\|M_{GS}\|_\infty^k}{1 - \|M_{GS}\|_\infty} \|x^{(1)} - x^{(0)}\|_\infty = 7.58 \times 0.8^k$$

5、设线性方程组 $Ax=b$，其中

$$A=\begin{bmatrix}1 & a & 0\\ a & 1 & a\\ 0 & a & 1\end{bmatrix}, b\neq 0。$$

（1）当实数 a 取何值时，$Ax=b$ 的 GS 法一定收敛；

（2）当实数 a 取何值时，$Ax=b$ 的 J 法收敛。

$$(1)3个顺序主子式\begin{cases}|A_1|=1>0\\ |A_2|=1-a^2>0\\ |A_3|=1-2a^2>0\end{cases}$$

$$-\frac{\sqrt{2}}{2}<a<\frac{\sqrt{2}}{2}, GS收敛$$

$$(2)2D-A=\begin{pmatrix}1 & -a & 0\\ -a & 1 & -a\\ 0 & -a & 1\end{pmatrix}:=B$$

$$3个顺序主子式\begin{cases}|B_1|=1>0\\ |B_2|=1-a^2>0\\ |B_3|=1-2a^2>0\end{cases}$$

$$-\frac{\sqrt{2}}{2}<a<\frac{\sqrt{2}}{2}, J收敛$$

习题五

2、 已知函数表如下：

x	…	10	11	12	13	…
$y=\ln x$	…	2.3026	2.3979	2.4849	2.5649	…

试分别用线性插值、抛物插值和三次插值计算 $\ln 11.85$ 的近似值，并估计相应的截断误差。

取$x_0 = 11, x_1 = 12, y_0 = 2.3979, y_1 = 2.4849$

$$L_1(x) = y_0 \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} + y_1 \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = 2.3979(12 - x) + 2.4849(x - 11)$$

$$\ln 11.85 \approx L_1(11.85) = 2.47185$$

$$|R_1(11.85)| \le \max_{x\in[11,12]} \frac{|f''(x)|}{2!} |(11.85-11)(11.85-12)| = 5.2686\times 10^{-4}$$

取$x_0 = 11, x_1 = 12, x_2 = 13, y_0 = 2.3979, y_1 = 2.4849, y_2 = 2.5649$

$$L_1(x) = y_0 \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} + y_1 \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} + y_2 \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}$$

$$\ln 11.85 \approx L_2(11.85) = 2.47229625$$

$$|R_2(11.85)| \le \max_{x\in[11,13]} \frac{|f^{(3)}(x)|}{3!} |(11.85-11)(11.85-12)(11.85-13)| = 3.6721\times 10^{-5}$$

5、 已知函数表如下：

x	0	1	3	4	6
$y=f(x)$	0	-7	5	8	14

试分别用二次、三次和四次 Newton 插值多项式计算 $f(3.2)$ 的近似值，并估计相应的截断误差。

二次差值：

x	y	一阶	二阶
1	−7		
3	5	6	
4	8	3	−1

$N_2(x) = -7 + 6(x-1) - (x-1)(x-3)$

$f(3.2) \approx N_2(3.2) = 5.76$

x	y	一阶	二阶	三阶
1	−7			
3	5	6		
4	8	3	−1	
3.2	5.76	2.8	−0.1	0.4091

$|R_2(3.2)| \approx |N_2[1,3,4,3.2](3.2-1)(3.2-3)(3.2-4)| = 0.1440$

三次插值：

x	y	一阶	二阶	三阶
1	−7			
3	5	6		
4	8	3	−1	
6	14	3	0	0.2

$N_3(x) = 7 + 6(x-1) - (x-1)(x-3) + 0.2(x-1)(x-3)(x-4)$

$f(3.2) \approx N_3(3.2) = 5.6896$

x	y	一阶	二阶	三阶	四阶
1	−7				
3	5	6			
4	8	3	−1		
6	14	3	0	0.2	
3.2	5.6896	2.968	0.04	0.2	0

$|R_3(3.2)| \approx |N_3[1,3,4,6,3.2](3.2-1)(3.2-3)(3.2-4)(3.2-6)| = 0$

8、 已知函数表如下：

x	0	1	3
y	0	1	1
y'	0	1	2

试分别用 Hermite 插值基函数和 Newton 插值公式求满足条件的插值多项式，并计算在 $x=2.6$ 的函数近似值，估计相应的误差。

x	y	一阶	二阶	三阶	四阶	五阶
0	0					
0	0	0				
1	1	1	1			
1	1	1	0	-1		
3	1	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{6}$	$\frac{5}{18}$	
3	1	2	1	$\frac{3}{4}$	$\frac{11}{36}$	$\frac{1}{108}$

$$H_5(x) = x^2 - x^2(x-1) + \frac{5}{18}x^2(x-1)^2 + \frac{1}{108}x^2(x-1)^2(x-3)$$

$$y(2.6) \approx H_5(2.6) = 0.6870163$$

x	y	一阶	二阶	三阶	四阶	五阶	六阶
0	0						
0	0	0					
1	1	1	1				
1	1	1	0	-1			
3	1	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{6}$	$\frac{5}{18}$		
3	1	2	1	$\frac{3}{4}$	$\frac{11}{36}$	$\frac{1}{108}$	
2.6	0.6870	0.7825	3.04375	1.2773	0.3296	0.009248	4.3305×10^{-6}

$$|R_5(2.6)| \approx |N_5[0,0,1,1,3,3,2.6](2.6)^2(1.6)^2(-0.4)^2| \approx 1.1991\times10^{-5}$$

9、 求不超过 4 次的多项式 $p(x)$，使其满足插值条件如下表：

x	0	1	2
$p(x)$	0	2	1
$p'(x)$		0	-1

x	y	一阶	二阶	三阶	四阶
0	0				
1	2	2			
1	2	0	-2		
2	1	-1	-1	$\frac{1}{2}$	
2	1	-1	0	1	$\frac{1}{4}$

$$H_4(x) = 2x - 2x(x-1) + \frac{1}{2}x(x-1)^2 + \frac{1}{4}x(x-1)^2(x-2)$$

$$= \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{2}x^3 - \frac{7}{4}x^2 + 4x$$

10、已知函数表如下：

x	0	1	3	4
$y=f(x)$	0	1	81	196
$y'=f'(x)$	0	4	108	196

试求其分段 Hermite 插值多项式 $H(x)$，并估计相应的截断误差。

x	y	一阶	二阶	三阶	四阶	五阶	六阶	七阶
0	0							
0	0	0						
1	1	1	1					
1	1	4	3	2				
3	81	40	18	5	1			
3	81	108	34	8	1	0		
4	196	115	7	-9	$-\frac{17}{3}$	$-\frac{5}{3}$	$-\frac{5}{12}$	
4	196	196	81	74	$\frac{83}{3}$	$\frac{100}{9}$	$\frac{115}{36}$	$\frac{35}{36}$

$$H_7(x) = x^2 + 2x^2(x-1) + x^2(x-1)^2 - \frac{5}{12}x^2(x-1)^2(x-3)^2 + \frac{35}{36}x^2(x-1)^2(x-3)^2(x-4)$$

$$= \frac{35}{36}x^7 - \frac{145}{12}x^6 + \frac{335}{6}x^5 - \frac{2107}{18}x^4 + \frac{1345}{12}x^3 - \frac{155}{4}x^2$$

习题六

3、给定函数表

x	0	1	2	3	4
y	2.00	2.05	3.00	9.60	34.00

已知其经验公式为 $y=a+bx^2$ 。试采用最小二乘拟合方法确定常数 a 和 b 。

取基函数 $\varphi_0(x)=1, \varphi_1(x)=x^2$

$$(\varphi_0,\varphi_0)=5, (\varphi_0,\varphi_1)=\sum_{i=1}^{5} x_i^2=30, (\varphi_1,\varphi_1)=\sum_{i=1}^{5} x_i^4=354$$

$$(y,\varphi_0)=\sum_{i=1}^{5} y_i=50.65, (y,\varphi_1)=\sum_{i=1}^{5} x_i^2 y_i=644.45$$

正则方程组

$$\begin{pmatrix} 5 & 30 \\ 30 & 354 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 50.65 \\ 644.45 \end{pmatrix}$$

解得 $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1.6132 \\ 1.9572 \end{pmatrix}$

拟合公式 $y=-1.6132+1.9572x^2$

5、在某科学实验中，需要观察水份的渗透速度，测得时间 t（单位：秒）与水的重量 w（单位：克）的对应数据表如下：

t	1	2	4	8	16	32	64
w	4.22	4.02	3.85	3.59	3.44	3.02	2.59

已知 t 与 w 有关系式 $w=ct^{\lambda}$，试采用最小二乘拟合方法确定常数 c 和 λ。

对 $w=ct^{\lambda}$ 两边取以2为底的对数

$\log_2 w=\log_2 c+\lambda\log_2 t$

令 $\bar{w}=\log_2 w, \bar{t}=\log_2 t$，则 $\bar{w}=\log_2 c+\lambda\bar{t}:=a+b\bar{t}$

$\bar{t}$	0	1	2	3	4	5	6
$\bar{w}$	2.0772	2.0072	1.9449	1.8440	1.7824	1.5945	1.3730

取基函数 $\varphi_0(\bar{t})=1, \varphi_1(\bar{t})=\bar{t}$

$(\varphi_0,\varphi_0)=7, (\varphi_0,\varphi_1)=\sum_{i=1}^{7}\bar{t}_i=21, (\varphi_1,\varphi_1)=\sum_{i=1}^{7}\bar{t}_i^2=91$

$(\bar{w},\varphi_0)=\sum_{i=1}^{7}\bar{w}_i=12.6232, (\bar{w},\varphi_1)=\sum_{i=1}^{7}\bar{w}_i\bar{t}_i=34.7690$

正则方程组

$$\begin{pmatrix}7 & 21\\ 21 & 91\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\ b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}12.6232\\ 34.7690\end{pmatrix}$$

解得 $\begin{pmatrix}a\\ b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2.1354\\ -0.1107\end{pmatrix}$

$c=2^a=4.3956, \lambda=b=-0.1107$

$w=4.3956t^{-0.1107}$