第七章 数值积分与数值微分

第三节 Romberg求积公式






逐次分半梯形求积法算法简单，但精度较差，收敛速度较慢，但可以利用梯形法算法简单的优点，形成一个新算法，这就是Romberg(龙贝格)求积公式。龙贝格公式又称逐次分半加速法。

7.3.1 Richardson外推法

复合梯形公式的截断误差

$$I[f]-T_n = R_{T_n}[f] = a_1h^2 + a_2h^4 + \cdots + a_kh^{2k} + \cdots \qquad (7.3.1)$$

其中系数 a_k（$k=1,2,\cdots$）与步长 h 无关，称为**欧拉-麦克劳林**（**Euler-Maclaurin**）公式。

截断误差公式（7.3.1）表明其**误差为** $O(h^2)$。

若记 $I=I[f]$，$I_1(h)=T_n$，上式可记为

$$I - I_1(h) = a_1h^2 + a_2h^4 + \cdots + a_kh^{2k} + \cdots \qquad (7.3.2)$$

若用 αh 代替（7.3.2）式中的 h，可得

$$I - I_1(\alpha h) = a_1(\alpha h)^2 + a_2(\alpha h)^4 + \cdots + a_k(\alpha h)^{2k} + \cdots \qquad (7.3.3)$$

将式（7.3.3）减去式（7.3.2）的α^2倍，可得

$$I-I_1(\alpha h)-\alpha^2[I-I_1(h)]=\underline{a_2(\alpha^4-\alpha^2)h^4}+a_3(\alpha^6-\alpha^2)h^6+\cdots+a_k(\alpha^{2k}-\alpha^2)h^{2k}+\cdots$$

取α满足$|\alpha|\neq 1$，将上式两边除以$1-\alpha^2$，可得

$$I-\boxed{\frac{I_1(\alpha h)-\alpha^2 I_1(h)}{1-\alpha^2}}=b_2h^4+b_3h^6+\cdots+b_kh^{2k}+\cdots$$

记$I_2(h)=\dfrac{I_1(\alpha h)-\alpha^2 I_1(h)}{1-\alpha^2}$，则上式可记为

$$I-I_2(h)=b_2h^4+b_3h^6+\cdots+b_kh^{2k}+\cdots \qquad （7.3.5）$$

式（7.3.5）表明：以$I_2(h)$作为计算量I的近似值，其误差至少为$O(h^4)$。

定理 7.3.1： 若 $I(h)$ 是要计算量 I 的近似值，其误差可表示为

$$I - I(h) = a_1 h^{P_1} + a_2 h^{P_2} + \cdots + a_k h^{P_k} + \cdots$$

其中自然数 $P_1, P_2, \cdots, P_k, \cdots$ 与 h 无关，且满足 $P_1 < P_2 < \cdots < P_k < \cdots$。定义算法序列 $\{I_m(h)\}$ 如下：

$$I_1(h) = I(h),\ \boxed{I_m(h) = \frac{I_{m-1}(\alpha h) - \alpha^{P_{m-1}} I_{m-1}(h)}{1 - \alpha^{P_{m-1}}}} \quad (m = 2, 3, \cdots)$$

其中 α 满足 $|\alpha| \neq 1$。则以 $I_m(h)$ 作为计算量 I 的近似值，其误差至少为 $O(h^{P_m})$。

定理 7.3.1 表明：随着 m 的增大，收敛到计算量 I 的速度越来越快。这种方法就称为**理查森(Richardson)外推法**。

7.3.2 Romberg求积公式

$$I_{m+1}(h)=\frac{I_m(\alpha h)-\alpha^{P_m}I_m(h)}{1-\alpha^{P_m}}$$

把理查森(Richardson)外推法应用到式（7.3.1）（这里 $P_k=2k$），取 $\alpha=\frac{1}{2}$ 可得

$$I_{m+1}\left(\frac{b-a}{2^k}\right)=\frac{I_m\left(\frac{b-a}{2^{k+1}}\right)-\left(\frac{1}{2}\right)^{2m}I_m\left(\frac{b-a}{2^k}\right)}{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{2m}}=\frac{4^m\cdot I_m\left(\frac{b-a}{2^{k+1}}\right)-I_m\left(\frac{b-a}{2^k}\right)}{4^m-1}$$

记 $T_m^{(k)}=I_{m+1}\left(\frac{b-a}{2^k}\right)$，则上式可记为

$$T_m^k=\frac{4^m\cdot T_{m-1}^{(k+1)}-T_{m-1}^{(k)}}{4^m-1}\qquad（7.3.8）$$

其中 $m=1,2,\cdots$，$k=0,1,2,\cdots$，且有 $I-I_{m+1}(h)=O(h^{2(m+1)})$。式（7.3.8）就称为 Romberg 求积公式。

Romberg求积公式

其中T_0^k（$k=0,1,2,\cdots$），序列值$\{T_0^{(k)}\}$就是 T 值序列T_{2^k}，用逐次分半复合梯形计算公式计算。

$$S_{2^k}=\frac{4T_0^{(k+1)}-T_0^{(k)}}{3}=T_1^{(k)}$$，序列值$\{T_1^{(k)}\}$就是 Simpson 值序列$\{S_{2^k}\}$。

注：$T_1=\frac{b-a}{2}(f(a)+f(b)),T_2=\frac{b-a}{4}(f(a)+2f(\frac{a+b}{2})+f(b))$

$$S_1=\frac{4T_2-T_1}{3}=\frac{b-a}{6}(f(a)+4f(\frac{a+b}{2})+f(b))$$

$$C_{2^k}=\frac{4^2S_{2^{k+1}}-S_{2^k}}{4^2-1}=\frac{4^2T_1^{(k+1)}-T_1^{(k)}}{4^2-1}=T_2^{(k)}$$，即序列值$\{T_2^{(k)}\}$就是 Cotes 值序列$\{C_{2^k}\}$。

$S_1=\frac{b-a}{6}(f(a)+4f(\frac{a+b}{2})+f(b))$，$S_2=\frac{b-a}{12}(f(a)+4f(a+h)+2f(a+2h)+4f(a+3h)+f(b))$

$$C_1=\frac{16S_2-S_1}{15}=\frac{b-a}{90}(7f(a)+32f(a+h)+12f(a+2h)+32f(a+3h)+7f(b))$$

江南大学

Romberg 求积公式的计算过程可列表如下：

表 7-3-1：Romberg 求积公式的计算过程表

k	$T_0^{(k)}$	$T_1^{(k-1)}$	$T_2^{(k-2)}$	$T_3^{(k-3)}$	
0	①$T_0^{(0)}$（T_1）				
1	②$T_0^{(1)}$（T_2）	③$T_1^{(0)}$（S_1）			
2	④$T_0^{(2)}$（T_4）	⑤$T_1^{(1)}$（S_2）	⑥$T_2^{(0)}$（C_1）		
3	⑦$T_0^{(3)}$（T_8）	⑧$T_1^{(2)}$（S_4）	⑨$T_2^{(1)}$（C_2）	⑩$T_3^{(0)}$（R_1）	
…	…	…	…	…	…

表 7-3-1 中的计算次序是：按行从上到下，每行是从左至右，即先后次序为$T_0^{(0)}$，$T_0^{(1)}$，$T_1^{(0)}$，$T_0^{(2)}$，$T_1^{(1)}$，…等

若$\left|T_k^{(0)}-T_{k-1}^{(0)}\right|\leq\varepsilon$，则输出$T_k^{(0)}$终止（**停止准则**）

例 7.3.1：利用 Romberg 求积公式计算例 7.2.2 中积分 $I[f]=\int_0^1 \frac{\sin x}{x}dx$ 的近似值。

解：由函数表 7-2-1，按算法 7.1 可计算：$T_0^{(0)}=0.920735492$，$T_0^{(1)}=0.939793285$，$T_0^{(2)}=0.944513522$，$T_0^{(3)}=0.945690864$。按算法 7.3 可得下表。

表 7-3-2：例 7.3.1 中 Romberg 求积公式的计算过程表

k	$T_0^{(k)}$	$T_1^{(k-1)}$	$T_2^{(k-2)}$	$T_3^{(k-3)}$
0	①0.920735492			
1	②0.939793285	③0.946145882		
2	④0.944513522	⑤0.946086934	⑥0.946083004	
3	⑦0.945690864	⑧0.946083311	⑨0.946083069	⑩0.94608307

$T_3^{(0)}$ 具有 **8** 位有效数字，这比复合梯形公式的计算结果 $T_0^{(3)}$ 只有 **3** 位有效数字的精度提高了很多。

例1　用龙贝格算法计算定积分$I=\int_0^1 \frac{4}{1+x^2}\mathrm{d}x$

要求相邻两次龙贝格值的偏差不超过10^{-5}

解：由题意　$a=0, b=1, f(x)=\frac{4}{1+x^2}$

$$T_1=\frac{1}{2}\left[f(0)+f(1)\right]=\frac{1}{2}(4+2)=3$$

$$T_2=\frac{1}{2}T_1+\frac{1}{2}f(\tfrac{1}{2})=\frac{1}{2}\times 3+\frac{1}{2}\times\frac{16}{5}=3.1$$

$$S_1=\frac{4}{3}T_2-\frac{1}{3}T_1=3.1333$$

$$T_4=\frac{1}{2}T_2+\frac{1}{4}\left[f(\tfrac{1}{4})+f(\tfrac{3}{4})\right]=\frac{1}{2}\times 3.1+\frac{1}{4}(3.764+2.56)=3.13118$$

$$S_2=\frac{4}{3}T_4-\frac{1}{3}T_2=3.14157$$

$$C_1=\frac{16}{15}S_2-\frac{1}{15}S_1=3.14212$$

$$T_8 = \frac{1}{2}T_4 + \frac{1}{8}\left[f(\tfrac{1}{8}) + f(\tfrac{3}{8}) + f(\tfrac{5}{8}) + f(\tfrac{7}{8})\right] = 3.13899$$

$$S_4 = \frac{4}{3}T_8 - \frac{1}{3}T_4 = 3.14159$$

$$C_2 = \frac{16}{15}S_4 - \frac{1}{15}S_2 = 3.14159$$

$$R_1 = \frac{64}{63}C_2 - \frac{1}{63}C_1 = 3.14158$$

$$T_{16} = \frac{1}{2}T_8 + \frac{1}{16}\left[f(\tfrac{1}{16}) + f(\tfrac{3}{16}) + f(\tfrac{5}{16}) + f(\tfrac{7}{16}) + f(\tfrac{9}{16}) + f(\tfrac{11}{16}) + f(\tfrac{13}{16}) + f(\tfrac{15}{16})\right] = 3.14094$$

$$S_8 = \frac{4}{3}T_{16} - \frac{1}{3}T_8 = 3.14159$$

$$C_4 = \frac{16}{15} S_8 - \frac{1}{15} S_4 = 3.14159$$

$$R_2 = \frac{64}{63} C_4 - \frac{1}{63} C_2 = 3.14159$$

由于 $\left| R_2 - R_1 \right| \leq 0.00001$ ，于是有

$$I = \int_0^1 \frac{4}{1+x^2} \mathrm{d}x \approx 3.14159$$

江南大学