第八章 非线性方程和方程组的数值解法

第三节 一元方程Newton迭代法

8.3.1 Newton迭代法及其收敛性

原理：将非线性方程线性化——Taylor 展开

用点 x_k 处的一阶 Taylor 展开近似 $f(x^*)$：

$$0 = f(x^*) \approx f(x_k) + f'(x_k)(x^* - x_k)$$

忽略高次项，用其线性部分作为函数f(x)的近似，

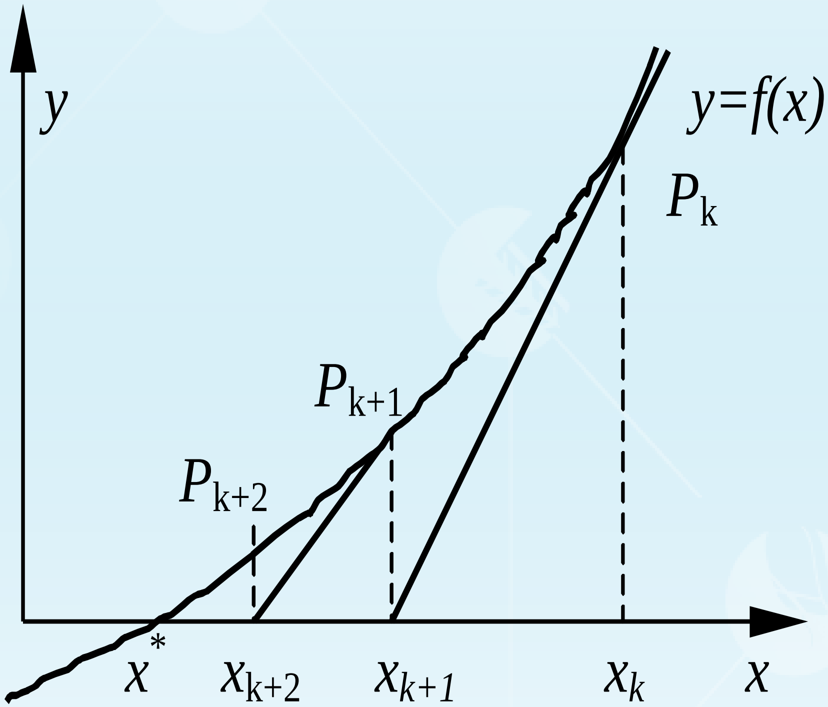
$$\text{解出 } x^* \approx x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

右端看成新的迭代值 x_{k+1}， $x_{k+1} = x_k - \dfrac{f(x_k)}{f'(x_k)}$， $k = 0, 1, 2, \cdots$ (8.3.1)

称为 Newton 迭代法，其中 $\varphi(x) = x - \dfrac{f(x)}{f'(x)}$ 称为 Newton 迭代函数

江南大学

几何解释



过 $(x_k, f(x_k))$ 作曲线 $f(x)$ 的切线

$$y - f(x_k) = f'(x_k)(x - x_k)$$

Newton 迭代法也称为**切线法**

Newton迭代法求解例题

例 8.3.1：用牛顿法求解例 8.2.4 和例 8.2.6 的方程 $f(x)=xe^x-1=0$。

解：对应（8.3.1）的 Newton 迭代为

$$x_{k+1}=x_k-\frac{x_k e^{x_k}-1}{(1+x_k)e^{x_k}}=x_k-\frac{x_k-e^{-x_k}}{1+x_k},\ k=0,1,2,\cdots$$

仍取初始值 $x_0=0.5$，终止准则用式（8.2.9），计算结果列于表 8-3-1。

表 8-3-1：例 8.3.1 的迭代计算值

k	0	1	2	3	4
x_k	0.5	0.571020440	0.567155569	0.567143291	0.567143290

牛顿法的收敛速度比例 8.2.4 中的线性收敛方法快得多

Newton迭代法局部收敛定理

定理 8.3.1： 设 x^* 满足 $f(x^*)=0$，若 $f'(x^*)\neq 0$，并且 $f''(x)$ 在 x^* 的邻域上连续，则牛顿迭代法（8.3.1）在点 x^* 处**局部收敛**并且有

（x^* 是函数 $f(x)$ 的单根）

$$\lim_{k\to\infty}\frac{e_{k+1}}{e_k^2}=\frac{f''(x^*)}{2f'(x^*)} \qquad (8.3.2)$$

其中，$e_k=x_k-x^*$ 为迭代误差，从而牛顿法至少二**次收敛**。

证： 牛顿迭代函数为 $\varphi(x)=x-\dfrac{f(x)}{f'(x)}$

容易求出 $\varphi'(x)=1-\dfrac{[f'(x)]^2-f(x)f''(x)}{[f'(x)]^2}=\dfrac{f(x)f''(x)}{[f'(x)]^2}$ （8.3.3）

由于 $f'(x^*)\neq 0$，所以 $\varphi'(x^*)=0$。于是，由定理 8.2.2 得知牛顿迭代法（8.3.1）**局部收敛**。

点 x_k 处 Taylor 展开

$$0 = f(x^*) = \underline{f(x_k) + f'(x_k)(x^*} \underline{- x_k}) + \frac{f''(\zeta_k)}{2}(x^* - x_k)^2$$

牛顿迭代法（8.3.1）等价于 $\underline{f(x_k) - f'(x_k)x_k} = -f'(x_k)x_{k+1}$

把它代入上式，得到 $0 = f'(x_k)(x^* - x_{k+1}) + \frac{f''(\zeta_k)}{2}(x^* - x_k)^2$

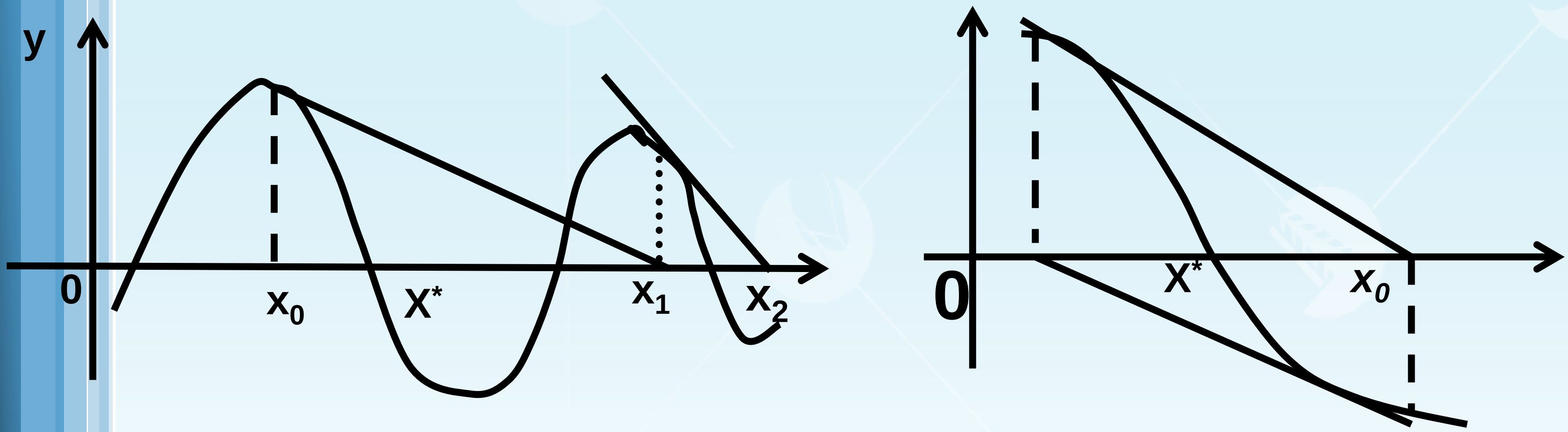
亦即 $\frac{e_{k+1}}{e_k^2} = \frac{f''(\zeta_k)}{2f'(x_k)}$

令 $k \to \infty$，由局部收敛性可知 $x_k \to x^*$，同时 $\zeta_k \to x^*$

注：例8.3.1$f(x) = xe^x - 1 = 0$和例8.2.5$f(x) = x^2 - 2 = 0$采用Newton迭代法具有二次收敛性

Newton迭代法不收敛情况

不满足迭代条件时，可能导致迭代值远离根的情况而找不到根或死循环的情况



Newton迭代法全局收敛初值选取

定理($Newton$法收敛的充分条件)

设$f \in C^2[a,b]$,若

(1) $f(a)f(b)<0$(有根)

(2) $f'(x) \neq 0, x \in [a,b]$(保证单根)

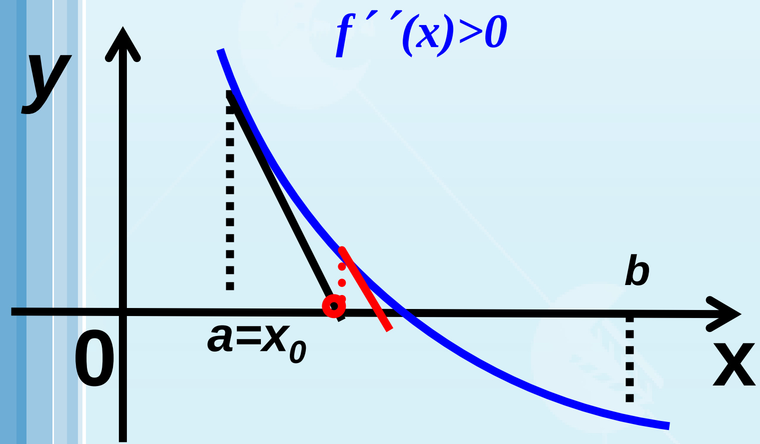
(3) f''不变号, $x \in [a,b]$(保证凹凸性不变)

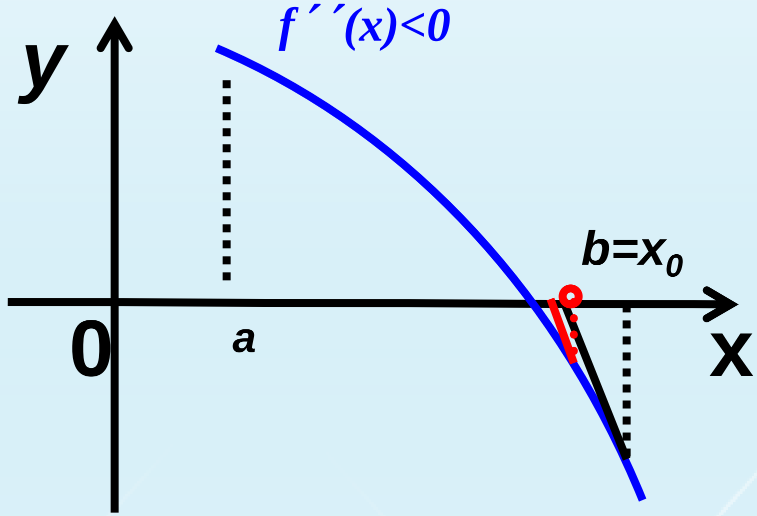
(4) 选取$x_0 \in [a,b]$使得$f(x_0)f''(x_0) > 0$

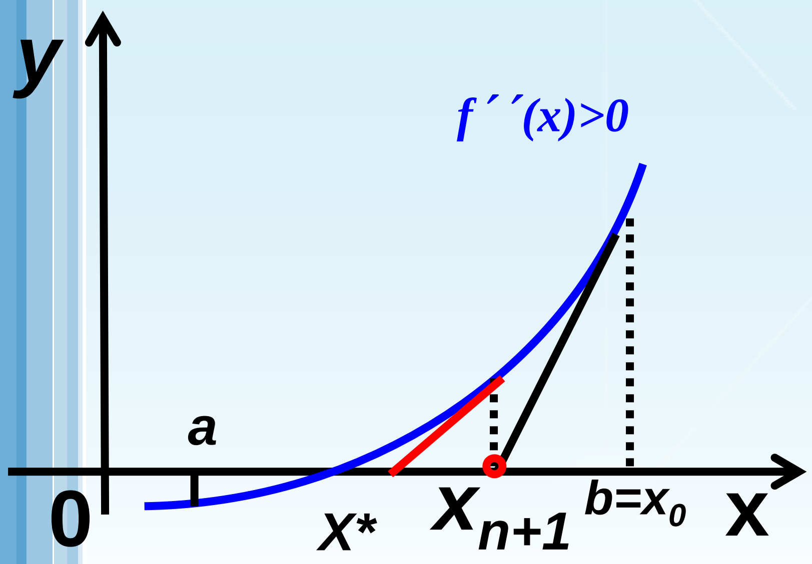
则$Newton$法产生的序列$\{x_k\}$收敛于$f(x)=0$在$[a,b]$上的唯一根

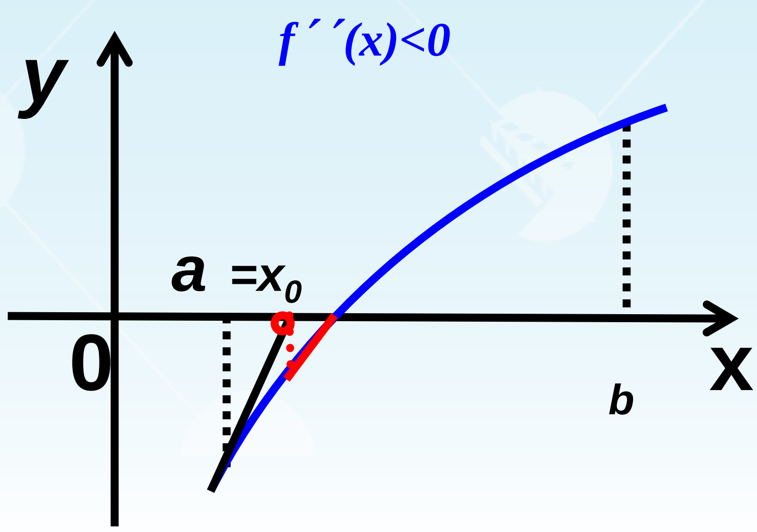
提示:序列$\{x_k\}$单调性和有界$e_{k+1} = \frac{f''(\xi_k)}{2f'(x_k)} e_k^2$, ξ_k介于x_k和x^*间

江南大学


f´´(x)>0
y
0
a=x0
b
x


f´´(x)<0
y
0
a
b=x0
x


f´´(x)>0
y
0
a
X*
xn+1
b=x0
x


f´´(x)<0
y
0
a =x0
b
x

Newton迭代法全局收敛例题

例 8.3.2：设有常数 $c>0$，对方程 $x^2-c=0$ 使用 Newton 迭代法求算术根 $\sqrt{c}$。试证：取任何初值 $x_0>0$，迭代都收敛到 $\sqrt{c}$。

证：容易推出，这里的 Newton 迭代法为

$$x_{k+1}=\frac{1}{2}(x_k+\frac{c}{x_k})\ ,\ k=0,1,2,\cdots \qquad (8.3.4)$$

$$x_{k+1}-\sqrt{c}=\frac{1}{2x_k}(x_k{}^2-2x_k\sqrt{c}+c)=\frac{1}{2x_k}(x_k-\sqrt{c})^2$$

对任何 $x_0>0$，都有 $x_k\geq\sqrt{c}\ \ (k=1,2,\cdots)$

$$x_k-x_{k+1}=\frac{1}{2x_k}(x_k{}^2-c)\geq 0,\quad k=1,2,\cdots$$

因此 $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ 是有下界的非增序列，从而有极限 x^*.

对（8.3.4）的两边取极限，得到 $(x^*)^2-c=0$。因为 $x_k>0$，故有 $x^*=\sqrt{c}$.

江南大学

8.3.2重根时的Newton迭代改善-1

Newton迭代法求解$f(x)=0$的m重根时，只具有线性收敛速度，即
$\lim\limits_{k\to\infty}\frac{e_{k+1}}{e_k}=\frac{m-1}{m}$

还可令$\mu(x)=f(x)/f'(x)$，若x^*是$f(x)$的m重根，则

$$\mu(x)=\frac{(x-x^*)g(x)}{mg(x)+(x-x^*)g'(x)},$$

故x^*是$\mu(x)=0$的单根.

对$\mu(x)$用牛顿法得

$$x_{k+1}=x_k-\frac{f(x_k)f'(x_k)}{[f'(x_k)]^2-f(x_k)f''(x_k)},\quad(8.3.7)$$

仍平方收敛.

注：（8.3.7）由$x_{k+1}=x_k-\frac{\mu(x_k)}{\mu'(x_k)}$推得

重根时的Newton迭代改善-2

m重根情形, $f(x)=(x-x*)^m g(x)$，牛顿法不是平方收敛，可将迭代法改为

$$x_{k+1}=x_k-m\frac{f(x_k)}{f'(x_k)}, \qquad (8.3.8)$$

仍平方收敛.

注：$\psi(x)=x-m\frac{f(x)}{f'(x)}$，证明$\psi'(x^*)=0, \psi''(x^*)\neq 0$,其中$f(x)=(x-x^*)^m g(x)$

例 用上述三种方法求$x^4-4x^2+4=0$的二重根$x^*=\sqrt{2}$.

解： (1) 牛顿法 $x_{k+1}=x_k-\dfrac{x_k^2-2}{4x_k}$;

(2) (8. 3. 8) $x_{k+1}=x_k-\dfrac{x_k^2-2}{2x_k}$;

(3) (8. 3. 7) $x_{k+1}=x_k-\dfrac{x_k(x_k^2-2)}{x_k^2+2}$.

k	x_k	(1)	(2)	(3)
0	x_0	1.5	1.5	1.5
1	x_1	1.458333333	1.416666667	1.411764706
2	x_2	1.436607143	1.414215686	1.414211438
3	x_3	1.425497619	1.414213562	1.414213562

8.3.3 离散Newton法

Newton 迭代法(8.3.1)的每一步都要**计算函数的导数值**，工作量比较大。

离散 Newton 法的基本思想是，用割线的斜率（即差商）代替 Newton 迭代法（8.3.1）中切线的斜率。

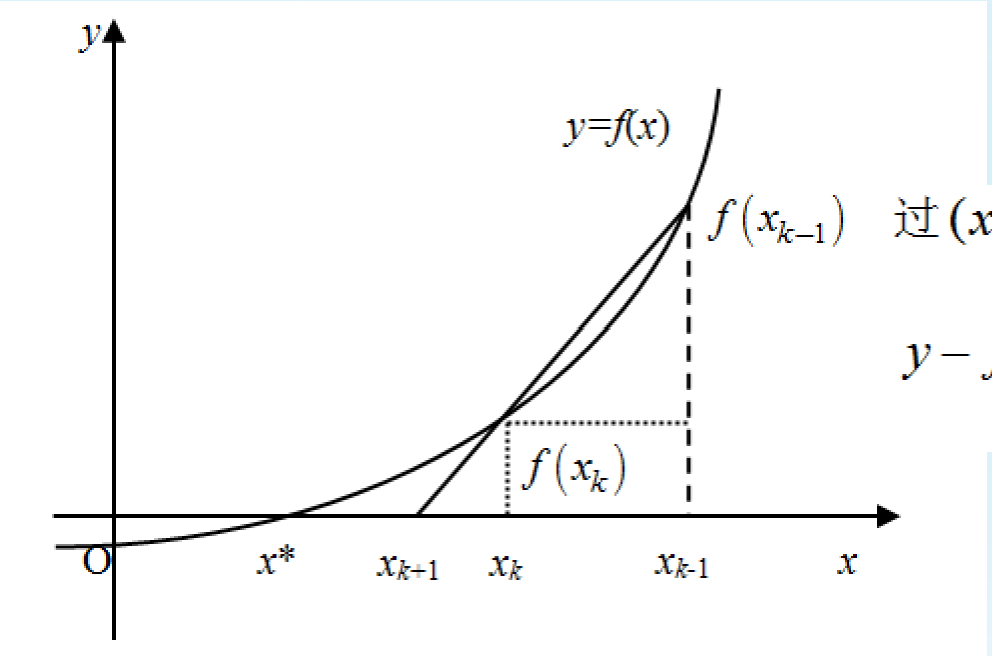
$$f'(x_k) \approx \frac{f(x_k) - f(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}}$$

离散 Newton 迭代法

$$x_{k+1} = x_k - \frac{x_k - x_{k-1}}{f(x_k) - f(x_{k-1})} f(x_k) \text{ , } k = 1, 2, \cdots \qquad (8.3.9)$$

江南大学

几何解释



过 $(x_{k-1}, f(x_{k-1}))$，$(x_k, f(x_k))$ 作直线

$$y - f(x_k) = \frac{f(x_k) - f(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}}(x - x_k)$$

离散 Newton 法也称为**弦截法或割线法**.

离散Newton法例题

例 8.3.4： 用离散牛顿法来解例 8.3.1 中方程 $f(x)=xe^x-1=0$。

解： 这时，对应（8.3.9）的迭代法为

$$x_{k+1}=x_k-\frac{x_k-x_{k-1}}{x_ke^{x_k}-x_{k-1}e^{x_{k-1}}}(x_ke^{x_k}-1)\ ,\ k=1,2,\cdots$$

取初始值 $x_0=0.3$ ，$x_1=0.5$，仍用终止准则（8.2.9），计算结果如表 8-3-4

表 8-3-4：例 8.3.4 的迭代计算值

k	0	1	2	…	5	6
x_k	0.3	0.5	0.583756848	…	0.567143300	0.567143290

注： 需要**两个初始值** x_0 和 x_1，这两个初始值应尽量取在方程根 x^* 的附近

离散 Newton 法的收敛速度比二次收敛的牛顿法稍慢些，但比线性收敛的方法快得多

（具有局部收敛性，并且收敛阶 $p=(1+\sqrt{5})/2=1.618$，即离散 Newton 法是**超线性收敛的**）