习题四解答

1、用幂法求解下列矩阵的按模最大的特征值及相应的特征向量，取 $x^{(0)}=(1,1,1)^T$ ，要求至少迭代 6 次。

（1）$\begin{bmatrix} 11 & 8 & 1 \\ 3 & -5 & -2 \\ 1 & -2 & 2 \end{bmatrix}$；　（2）$\begin{bmatrix} 4 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & 2 \\ 1 & -2 & 3 \end{bmatrix}$。

解：（1）按算法 4.1：取初值 $y^{(0)}=x^{(0)}=(1,1,1)^T$ ， $\alpha=1$；列表如下：

k	$x^{(k)}$			α_k	$y^{(k)}$		
	$x_1^{(k)}$	$x_2^{(k)}$	$x_3^{(k)}$		$y_1^{(k)}$	$y_2^{(k)}$	$y_3^{(k)}$
0	1	1	1	1	1	1	1
1	20	−4	1	20	1	−0.200	0.0500
2	9.4500	3.9000	1.5000	9.4500	1.0000	0.4127	0.1587
3	14.4603	0.6190	0.4921	14.4603	1.0000	0.0428	0.0340
4	11.3764	2.7179	0.9824	11.3764	1.0000	0.2389	0.0864
5	12.9976	1.6328	0.6949	12.9976	1.0000	0.1256	0.0535
6	12.0584	2.2650	0.8557	12.0584	1.0000	0.1878	0.0710

则最大特征值近似值 $\lambda_1 \approx 12.0584$，对应特征向量$\mu_1 \approx x^{(6)} = (12.0584,2.2650,0.8557)^T$

$u_1 \approx x^{(6)} = (12.0584, 2.2650, 0.8557)^T$

（2）按算法 4.1：取初值 $y^{(0)}=x^{(0)}=(1,1,1)^T$ ， $\alpha=1$；列表如下：

k	$x^{(k)}$			α_k	$y^{(k)}$		
	$x_1^{(k)}$	$x_2^{(k)}$	$x_3^{(k)}$		$y_1^{(k)}$	$y_2^{(k)}$	$y_3^{(k)}$
0	1	1	1	1	1	1	1
1	4	4	2	4	1	1	0.5
2	3.5	3	0.5	3.5	1	0.8571	0.1429
3	3.2857	1.8571	−0.2857	3.2857	1	0.5652	−0.0870
4	3.3478	0.5217	−0.3913	3.3478	1	0.1158	−0.1169
5	3.7273	−0.7662	0.3377	3.7273	1	−0.2056	0.0906
6	4.2962	−1.4355	1.6829	4.2962	1	−0.3341	0.3917

则最大特征值近似值 $\lambda_1 \approx 4.2962$

对应近似特征向量$u_1 \approx x^{(6)} = (4.2962, -1.4355, 1.6829)^T$ 。

2、用反幂法求矩阵

$$A=\begin{bmatrix}4 & 1 & 4\\ 1 & 10 & 1\\ 4 & 1 & 10\end{bmatrix}$$

的接近 12 的特征值及相应的特征向量，取 $x^{(0)}=(1,0,0)^T$，要求有四位有效数字。

解： 作 $B=A-12I$ 的 Doolittle 分解得：

$$A-12I=\begin{pmatrix}-8 & 1 & 4\\ 1 & -2 & 1\\ 4 & 1 & -2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ -0.125 & 1 & 0\\ -0.5 & -0.8 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-8 & 1 & 4\\ 0 & -1.875 & 1.5\\ 0 & 0 & 1.2\end{pmatrix}=LU$$

取初值 $y^{(0)}=x^{(0)}/1=(1,0,0)^T$；由 $Lz=y^{(0)}$; $Ux^{(1)}=z$,算法 4.3 计算列表如下：

k	$y_1^{(k)}$	$y_2^{(k)}$	$y_3^{(k)}$	$x_1^{(k)}$	$x_2^{(k)}$	$x_3^{(k)}$	α_k	λ_k
0	1	0	0					12
1	0.3334	0.6667	1	0.1667	0.3333	0.5	0.5	14
2	0.5385	0.5385	1	0.7778	0.7778	1.4444	1.4444	12.6923
3	0.5263	0.5791	1	0.7692	0.8463	1.4615	1.4615	12.6842
4	0.5263	0.5789	1	0.7807	0.8421	1.4824	1.4825	12.6746
5	0.5266	0.5680	1	0.7771	0.8422	1.4753	1.4753	12.6778

$|\lambda_5-\lambda_4|<10^{-3}$，迭代 5 次得接近 12 的四位有效数字的特征值 $\lambda_1=12.6778$

而特征向量为 $u_1\approx\dfrac{x^{(5)}}{\alpha^{(5)}}=(0.5267,0.5709,1)^T$

3、用带 Aitken 加速的幂法计算第 1 题中矩阵的按模最大的特征值与相应的特征向量，要求有四位有效数字。

解：（1）由算法 4.2 可得计算结果如下： 比较题 1(1)多右侧一列 Aitken 加速序列，计算公式为 $\lambda_2=\alpha_0-\dfrac{(\alpha_1-\alpha_0)^2}{\alpha_2+\alpha_0-2\alpha_1}=13.2166$

k	$x^{(k)}$			α_k	$y^{(k)}$			λ_k
	$x_1^{(k)}$	$x_2^{(k)}$	$x_3^{(k)}$		$y_1^{(k)}$	$y_2^{(k)}$	$y_3^{(k)}$	

0	1	1	1	1	1	1	1	
1	20	-4	1	20	1	-0.2	0.0500	
2	9.4500	3.9000	1.5000	9.4500	1.0000	0.4127	0.1587	13.2166
3	14.4603	0.6190	0.4921	14.4603	1.0000	0.0428	0.0340	12.8470
4	11.3764	2.7179	0.9824	11.3764	1.0000	0.2389	0.0864	12.5514
5	12.9976	1.6328	0.6949	12.9976	1.0000	0.1256	0.0535	12.4390
6	12.0584	2.2650	0.8557	12.0584	1.0000	0.1878	0.0710	12.4029

由$|\lambda_6-\lambda_5|=0.0361<0.1$，$\lambda\approx\lambda_6=12.4$具有三位有效数字，相应的特征向量为对应特征向量$x^{(6)}=(12.0854,2.2650,0.8557)^T$。从$\alpha_k$与$\lambda_k$的比较可知，Aitken 方法可加速幂法的收敛。

（2）由算法 4.2 可得计算结果如下： 比较题 1(2)多右侧一列 Aitken 加速序列，计算公式为$\lambda_2=\alpha_0-\dfrac{(\alpha_1-\alpha_0)^2}{\alpha_2+\alpha_0-2\alpha_1}=3.5714$等

列表如下：

k	$x^{(k)}$			α_k	$y^{(k)}$			λ_k
	$x_1^{(k)}$	$x_2^{(k)}$	$x_3^{(k)}$		$y_1^{(k)}$	$y_2^{(k)}$	$y_3^{(k)}$	
0	1	1	1	1	1	1	1	
1	4	4	2	4	1	1	0.5	
2	3.5	3	0.5	3.5	1	0.8571	0.1429	3.5714
3	3.2857	1.8571	-0.2857	3.2857	1	0.5652	-0.0870	3.1250
4	3.3478	0.5217	-0.3913	3.3478	1	0.1158	-0.1169	3.3339
5	3.7273	-0.7662	0.3377	3.7273	1	-0.2056	0.0906	3.2736
6	4.2962	-1.4355	1.6829	4.2962	1	-0.3341	0.3917	2.5878
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
24	4.4780	0.3819	2.5192	4.4780	1	0.0853	0.5626	4.4745
25	4.4773	0.3810	2.5172	4.4773	1	0.0851	0.5622	4.4765

由$|\lambda_{24}-\lambda_{25}|=0.0020<0.01$，$\lambda\approx\lambda_{25}=4.4765$具有三位有效数字，相应的特征向量为对应特征向量$x^{(6)}=(4.4773,0.3810,2.5172)^T$。该矩阵求模最大特征值，Aitken 方法无明显加速收敛作用。

4、用 Jacobi 古典方法求下列对称矩阵的全部特征值与特征向量，要求$E(A^{(k)})<10^{-3}$。

（1）$\begin{bmatrix}4&1&0\\1&2&1\\0&1&1\end{bmatrix}$；（2）$\begin{bmatrix}4&2&2\\2&5&1\\2&1&6\end{bmatrix}$。

解：（1）按 Jacobi 算法 4.4，全部特征值为$\lambda_1\approx0.3004$，$\lambda_2\approx4.4605$，$\lambda_3\approx2.2391$

对应特征向量$u_1\approx(0.1531,-0.5665,0.8097)^T$，

$u_2 \approx (-0.9018, -0.4153, 0.1200)^T$， $u_3 \approx (0.4042, -0.7118, -0.5744)^T$

（1） 全部特征值为 $\lambda_1 \approx 4.4865$， $\lambda_2 \approx 2.1259$， $\lambda_3 \approx 8.3876$

对应特征向量 $u_1 \approx (0.1555, -0.7172, 0.6793)^T$，

$u_2 \approx (-0.8281, 0.4696, 0.3062)^T$， $u_3 \approx (-0.5386, -0.5149, -0.6669)^T$

5、已知方阵 A 如下，先用幂法作适当步数（如 2 步或 3 步），然后按原点平移的加速方法，求模最大的特征值及相应的特征向量，要求特征值有四位有效数字， $x^{(0)} = (1, 0, 0)^T$ 。

$$A = \begin{bmatrix} -4 & -3 & -7 \\ 2 & 3 & 2 \\ 4 & 2 & 7 \end{bmatrix}$$

解：使用幂法算法 4.1：取 $x^{(0)} = (1, 0, 0)^T$，

$$y^{(k)} = \frac{x^{(k)}}{x_r^{(k)}}, \left|x_r^{(k)}\right| = \max_{1 \le i \le n}\left\{\left|x_i^{(k)}\right|\right\}, x^{(k+1)} = Ay^{(k)}, \quad k = 0, 1, 2, \cdots, \lambda_1 \approx x_r^{(k+1)}, \quad u_1 \approx x^{(k+1)}$$

幂法求解结果如下：，

k	$x^{(k)}$			α_k	$y^{(k)}$		
	$x_1^{(k)}$	$x_2^{(k)}$	$x_3^{(k)}$		$y_1^{(k)}$	$y_2^{(k)}$	$y_3^{(k)}$
0	1	0	0	1	1	0	0
1	-4	2	4	4	-1	0.5	1
2	-4.5	1.5	4	-4.5	1	0.3333	-0.8889
3	3.2222	-0.7778	-2.8888	3.2222	1	0.2414	0.8965

矩阵 A 按模最大特征值近似值为 3.2222

取 $\lambda_0 = 3.2222$， 作 $B = A - \lambda_0 I$，用原点平移法和反幂法求矩阵 B 的最小特征值，按

算法 4.3，数值结果如下：仍取 $x^{(0)} = (1, 0, 0)^T$

k	$x^{(k)}$			α_k	$y^{(k)}$			λ_k
	$x_1^{(k)}$	$x_2^{(k)}$	$x_3^{(k)}$		$y_1^{(k)}$	$y_2^{(k)}$	$y_3^{(k)}$	
0	1	0	0	1	1	0	0	4.22222
1	8.0272	−0.7366	−8.1089	−8.1089	−0.9899	0.0908	1	3.09888
2	4.9872	−0.1152	−4.9545	4.9872	1	−0.0231	−0.9935	3.42271
3	−4.5247	0.0226	4.5156	−4.5247	1	−0.0050	−0.9980	3.00119
4	−4.5015	0.0045	4.4995	−4.5015	1	−0.0010	−0.9996	3.00005
5	−4.5033	0.0008	4.5029	−4.5033	1	−0.0002	−0.9999	3.00014

$\left|\lambda_4 - \lambda_5\right| = 0.00009 < 10^{-4}$，迭代 5 次得 $\lambda \approx 3.00014$，

特征向量为$u \approx y^{(4)} = (1, -0.0002, -0.9999)^T$

6、设矩阵A的特征值满足：$\lambda_1 > \lambda_2 \geq \lambda_3 \geq \cdots \geq \lambda_n \geq 0$。求证：当取$\lambda_0 = (\lambda_2 + \lambda_n)/2$时，用原点平移的加速方法求$\lambda_1$的收敛速度加快。

证明：当取$\lambda_0 = (\lambda_2 + \lambda_n)/2$ 则由条件$\lambda_1 > \lambda_2 \geq \lambda_3 \geq \cdots \geq \lambda_n \geq 0$，有

$$0 < \frac{\lambda_2 - \lambda_0}{\lambda_1 - \lambda_0} = \frac{\lambda_2 - \lambda_n}{2\lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_n} = \frac{\lambda_2 - \lambda_n}{\lambda_1 - \lambda_n + \lambda_1 - \lambda_2} < \frac{\lambda_2 - \lambda_n}{\lambda_1 - \lambda_n} < \frac{\lambda_2}{\lambda_1}$$

则原点平移法，当取$\lambda_0 = (\lambda_2 + \lambda_n)/2$求$\lambda_1$可使收敛速度加快。

7、用 Householder 变换将下列矩阵化成相似的拟上三角阵

$$\begin{bmatrix} -4 & -3 & -7 \\ 2 & 3 & 2 \\ 4 & 2 & 7 \end{bmatrix}。$$

解：对$k=1$确定变换$H_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & R_1 \end{pmatrix}$，$\alpha_{21}^{(1)} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$，其中$R_1$为 2 阶初等反射矩阵，且使

$R_1 \alpha_{21}^{(1)} = -\sigma_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$，$\sigma_1 = \left\| \alpha_{21}^{(1)} \right\| = \sqrt{20} \approx 4.472136$，

$$H = H_1 A H_1 = \begin{pmatrix} -4 & 7.602634 & -0.447217 \\ -4.472136 & 7.800003 & -0.399999 \\ 0 & -0.399999 & 2.200000 \end{pmatrix}。$$

8、设λ是实对称矩阵A的特征值，相应地特征向量为u，且$\|u\|_2 = 1$，若存在正交矩阵P使得$Pu = e_1 = (1, 0, 0, \cdots, 0)^T$，求证：矩阵$B = PAP^T$的第 1 行第 1 列除$\lambda$外，其余元素均为 0。

证明：因为$B = PAP^T$， 所以$B^T = \left(PAP^T\right)^T = P^T AP$ 又$A = A^T$，,故B为对称矩阵。

设λ和x是A的特征值及对应的特征向量，则$Ax = \lambda x$。由P为正交阵，且$Px = e_1$，

故$Be_1 = PAP^T Px = PAx = \lambda Px = \lambda e_1$，即$Be_1 = \lambda e_1$，

所以$b_{21} = b_{31} = \cdots = b_{n1} = 0$，得证。

9、用 QR 方法求下列矩阵的全部特征值。

（1）$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}$；（2）$\begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$。

解：(1)按 QR 算法：$\begin{cases} A^{(k)} = Q_k R_k \\ A^{(k+1)} = R_k Q_k \end{cases}$，$k = 0,1,2,\cdots$

$$A = A^{(0)} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix} = Q_0 R_0$$

$$= \begin{bmatrix} -0.8944 & -0.4260 & -0.1361 \\ 0.4472 & -0.8520 & -0.2722 \\ 0 & -0.3043 & 0.9526 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2.2361 & 0.4472 & 0.4472 \\ 0 & -3.2863 & -2.0692 \\ 0 & 0 & 3.5382 \end{bmatrix}$$

$$A^{(1)} = R_0 Q_0$$
$$= \begin{bmatrix} 2.2000 & 0.4355 & 0.6086 \\ -1.4696 & 3.4296 & -1.0766 \\ 0 & -1.0767 & 3.3705 \end{bmatrix}$$

按（4.3.1）算法 $A^{(k)} \xrightarrow{k \longrightarrow \infty} \begin{bmatrix} 4.5214 & 0.0000 & 0.0000 \\ 0.0000 & 2.2393 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.0000 & 2.2393 \end{bmatrix}$

所以 A 的特征值为4.5214， 2.2393 ， 2.2393

（2）类似，A 的全部特征值近似为3.7321，2.0000，0.2679。