第二章 线性方程组的直接解法

第五节 平方根法与改进的平方根法






定义 2.5.1：设 $A=(a_{ij})_{n\times n}$ 是一个 n 阶对称矩阵。如果对任意向量 $x\in R^n$，都有

$$x^T Ax>0 \tag{2.5.1}$$

则称矩阵 A 是正定的。

定理 5.1：（对称正定矩阵的性质）如果 $A=(a_{ij})_{n\times n}$ 为对称正定矩阵，则

（1）A 是非奇异矩阵，且 A^{-1} 也是对称正定矩阵；

（2）记 A_k 为 A 的 k 阶顺序主子阵（即 A 的前 k 行 k 列元素组成的 k 阶方阵，$k=1,2,\cdots,n$），则 A_k 也是对称的正定矩阵；

（3）A 的所有特征值均大于零；

（4）对 $k=1,2,\cdots,n$，$\det(A_k)>0$，即 A 的顺序主子式都大于零。

2.5.1 平方根法——楚列斯基分解法

若 $\mathbf{A}$ 是对称矩阵，则其LU分解可写为 $\mathbf{A}=\mathbf{LU}=\mathbf{LDU}_0$

$$\mathbf{U}=\mathbf{DU}_0=\begin{bmatrix} u_{11} & & & \\ & u_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & u_{nn} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & u_{12}/u_{11} & \cdots & u_{1n}/u_{11} \\ & 1 & \cdots & u_{2n}/u_{22} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & 1 \end{bmatrix}$$

D和U_0分别为对角阵和单位上三角阵

由于是对称矩阵，有 $\mathbf{A}=\mathbf{A}^{\mathrm{T}}=\mathbf{U}_0^{\mathrm{T}}\mathbf{DL}^{\mathrm{T}}$

根据LU分解的唯一性 ⇨ $\mathbf{U}_0^{\mathrm{T}}=\mathbf{L}$

综上，对称矩阵可以分解为 $\boxed{\mathbf{A}=\mathbf{LDL}^{\mathrm{T}}}$

首先，对称矩阵可以做LDLT分解 $\mathbf{A}=\mathbf{LDL}^{\mathrm{T}}$

其中 $\mathbf{D}=\begin{bmatrix} u_{11} & & & \\ & u_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & u_{nn} \end{bmatrix}$

此外，因为是**正定矩阵**，有 $\mathbf{y}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}\mathbf{y}=\mathbf{y}^{\mathrm{T}}\mathbf{LDL}^{\mathrm{T}}\mathbf{y}=\mathbf{x}^{\mathrm{T}}\mathbf{D}\mathbf{x}>0$ ⇒ $\mathbf{D}$ 也是对称正定矩阵 ⇒ 对角线元素大于零

记作

$$\mathbf{D}=\begin{bmatrix} u_{11} & & & \\ & u_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & u_{nn} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \sqrt{u_{11}} & & & \\ & \sqrt{u_{22}} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \sqrt{u_{nn}} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \sqrt{u_{11}} & & & \\ & \sqrt{u_{22}} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \sqrt{u_{nn}} \end{bmatrix}=\mathbf{D}^{\frac{1}{2}}\mathbf{D}^{\frac{1}{2}}$$

综上，分解化为 $\boxed{\mathbf{A}=\mathbf{LD}^{\frac{1}{2}}\mathbf{D}^{\frac{1}{2}}\mathbf{L}^{\mathrm{T}}=\mathbf{L}_1\mathbf{L}_1^{\mathrm{T}},}$ $\mathbf{L}_1=\mathbf{LD}^{\frac{1}{2}}$ 其中 $\sqrt{u_{11}},\cdots,\sqrt{u_{nn}}$ 为下三角矩阵，其角线元素均大于零。

Cholesky（楚列斯基）分解，分解唯一

楚列斯基分解算法

$\boxed{\mathbf{A}=\mathbf{L}_1\mathbf{L}_1^{\mathrm{T}}}$ 其中A是对称正定阵， L_1是主对角元素大于0的下三角阵

$$\left[\begin{array}{c|c} a_{11} & A_{21}^T \\ \hline A_{21} & A_{22} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} l_{11} & \\ \hline L_{21} & L_{22} \end{array}\right]\left[\begin{array}{c|c} l_{11} & L_{21}^T \\ \hline & L_{22}^T \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} l_{11}^2 & l_{11}L_{21}^T \\ \hline l_{11}L_{21} & L_{21}L_{21}^T + L_{22}L_{22}^T \end{array}\right]$$

1. 计算l_{11}和L_{21}

$$l_{11} = \sqrt{a_{11}}, L_{21} = \frac{A_{21}}{l_{11}}$$

2. 计算L_{22}

$$L_{22}L_{22}^T = A_{22} - L_{21}L_{21}^T = \tilde{A}$$

3. n阶矩阵A变成n-1阶矩阵$\tilde{A}$，重复步骤1，2

例1 对矩阵$A=\begin{bmatrix}4 & -2 & 2\\ -2 & 2 & -4\\ 2 & -4 & 11\end{bmatrix}$楚列斯基分解

- $l_{11}=\sqrt{a_{11}}=2, A=\begin{bmatrix}2 & 0 & 0\\ -1 & l_{22} & 0\\ 1 & l_{32} & l_{33}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & -1 & 1\\ 0 & l_{22} & l_{32}\\ 0 & 0 & l_{33}\end{bmatrix}$
- $\begin{bmatrix}2 & -4\\ -4 & 11\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}-1\\ 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & -3\\ -3 & 10\end{bmatrix}$
- $l_{22}=1, A=\begin{bmatrix}2 & 0 & 0\\ -1 & 1 & 0\\ 1 & -3 & l_{33}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & -1 & 1\\ 0 & 1 & -3\\ 0 & 0 & l_{33}\end{bmatrix}$
- $10-(-3)(-3)=1, l_{33}=1, A=\begin{bmatrix}2 & 0 & 0\\ -1 & 1 & 0\\ 1 & -3 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & -1 & 1\\ 0 & 1 & -3\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$

2.5.2 改进的平方根法

$\boxed{A = LDL^T}$　　其中A是对称阵，L是单位下三角阵，D是对角阵

$$\left[\begin{array}{c|c} a_{11} & A_{21}^T \\ \hline A_{21} & A_{22} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} 1 & \\ \hline L_{21} & L_{22} \end{array}\right]\left[\begin{array}{c|c} d_{11} & \\ \hline & D_{22} \end{array}\right]\left[\begin{array}{c|c} 1 & L_{21}^T \\ \hline & L_{22}^T \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} d_{11} & d_{11}L_{21}^T \\ \hline d_{11}L_{21} & d_{11}L_{21}L_{21}^T + L_{22}D_{22}L_{22}^T \end{array}\right]$$

1. 计算d_{11}和L_{21}

   $d_{11} = a_{11}, L_{21} = \frac{A_{21}}{d_{11}}$

2. 计算L_{22}

   $L_{22}D_{22}L_{22}^T = A_{22} - d_{11}L_{21}L_{21}^T = \tilde{A}$

3. n阶矩阵A变成n-1阶矩阵$\tilde{A}$，重复步骤1，2

例2 对矩阵$A=\begin{bmatrix}4&-2&2\\-2&2&-4\\2&-4&11\end{bmatrix}$改进平方根法分解

- $d_{11}=4, A=\begin{bmatrix}1&0&0\\-\frac{1}{2}&1&0\\\frac{1}{2}&l_{32}&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4&0&0\\0&d_{22}&0\\0&0&d_{33}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\0&1&l_{32}\\0&0&1\end{bmatrix}$
- $\begin{bmatrix}2&-4\\-4&11\end{bmatrix}-4\begin{bmatrix}-\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&-3\\-3&10\end{bmatrix}$
- $d_{22}=1, A=\begin{bmatrix}1&0&0\\-\frac{1}{2}&1&0\\\frac{1}{2}&-3&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4&0&0\\0&1&0\\0&0&d_{33}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\0&1&-3\\0&0&1\end{bmatrix}$
- $10-1*(-3)(-3)=1, d_{33}=1, A=\begin{bmatrix}1&0&0\\-\frac{1}{2}&1&0\\\frac{1}{2}&-3&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\0&1&-3\\0&0&1\end{bmatrix}$

例3 用改进的平方根法解对称正定方程组$Ax=b$,其中

$$A=\begin{bmatrix}1&2&1&-3\\2&5&0&-5\\1&0&14&1\\-3&-5&1&15\end{bmatrix},b=\begin{bmatrix}1\\2\\16\\8\end{bmatrix}$$

- $d_{11}=1, A=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\2&1&0&0\\1&l_{32}&1&0\\-3&l_{42}&l_{43}&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&d_{22}&0&0\\0&0&d_{33}&0\\0&0&0&d_{44}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&2&1&-3\\0&1&l_{32}&l_{42}\\0&0&1&l_{43}\\0&0&0&1\end{bmatrix}$

- $\begin{bmatrix}5&0&-5\\0&14&1\\-5&1&15\end{bmatrix}-1*\begin{bmatrix}2\\1\\-3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&1&-3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&-2&1\\-2&13&4\\1&4&6\end{bmatrix}$

- $d_{22}=1, A=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\2&1&0&0\\1&-2&1&0\\-3&1&l_{43}&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&d_{33}&0\\0&0&0&d_{44}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&2&1&-3\\0&1&-2&1\\0&0&1&l_{43}\\0&0&0&1\end{bmatrix}$

- $\begin{bmatrix}13&4\\4&6\end{bmatrix}-1*\begin{bmatrix}-2\\1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-2&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}9&6\\6&5\end{bmatrix}$

- $d_{33}=9, A=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\2&1&0&0\\1&-2&1&0\\-3&1&\frac{2}{3}&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&9&0\\0&0&0&d_{44}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&2&1&-3\\0&1&-2&1\\0&0&1&\frac{2}{3}\\0&0&0&1\end{bmatrix}$

- $5-9*\frac{2}{3}*\frac{2}{3}=1, A=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\2&1&0&0\\1&-2&1&0\\-3&1&\frac{2}{3}&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&9&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&2&1&-3\\0&1&-2&1\\0&0&1&\frac{2}{3}\\0&0&0&1\end{bmatrix}$

方程转化为$Ax=LDL^Tx=b$，先求$Ly=b$,$y=\begin{bmatrix}1\\0\\15\\1\end{bmatrix}$

再求$L^Tx=D^{-1}y=\begin{bmatrix}1\\0\\\frac{5}{3}\\1\end{bmatrix}$,得$x=\begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\end{bmatrix}$