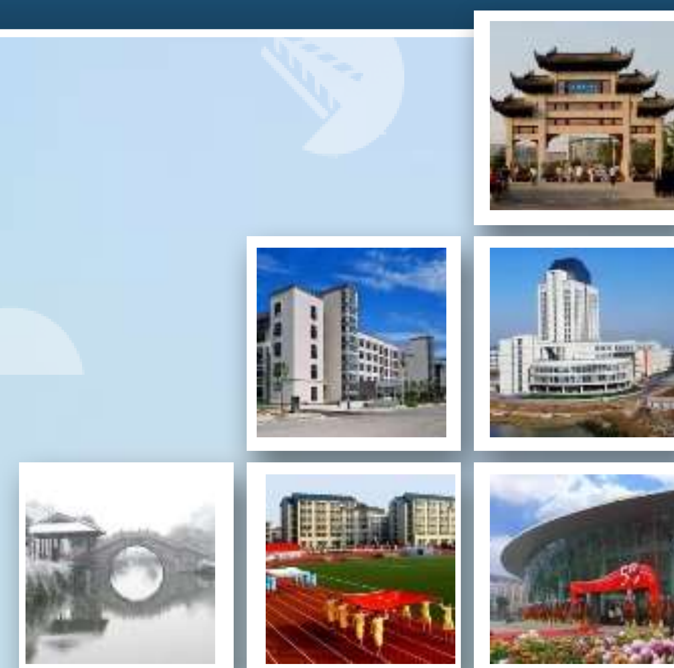
江南大学

第三章 解线性方程组的迭代法



江南大学

第三章 解线性方程组的迭代法

第一节 迭代法的基本概念

3.1.1迭代法的一般形式

一般地，若 $x^{(k)}$ 的计算公式为

$$\begin{cases} x^{(k)} = F_k(x^{(k-1)}, x^{(k-2)}, \cdots, x^{(k-m)}) \\ x^{(0)}, x^{(1)}, \cdots, x^{(m-1)}\text{已知}, k = m, m+1, \cdots \end{cases} \tag{3.1.1}$$

式中 $x^{(k)}$ 与 $x^{(k-1)}, x^{(k-2)}, \cdots, x^{(k-m)}$ 相关，此称为 **m 步迭代法**。

当 $m=1$ 时，即 $x^{(k)}$ 只与 $x^{(k-1)}$ 有关，此时（3.1.1）式变成了：

$$\begin{cases} x^{(k)} = F(x^{(k-1)}) \\ x^{(0)}\text{已知}, \quad k = 1, 2, \cdots \end{cases} \tag{3.1.2}$$

此称为**单步迭代法**。

江南大学

若 $F(x^{(k-1)})$ 是线性的，即（3.1.2）式为：

$$\begin{cases} x^{(k)} = M_{k-1}x^{(k-1)} + g_{k-1} \\ x^{(0)}\text{已知}, \quad k = 1, 2, \cdots \end{cases} \tag{3.1.3}$$

其中 $M_{k-1} \in R^{n\times n}$， $x^{(k-1)}, g_{k-1} \in R^n$，称为**单步线性迭代法**，其中 M_{k-1} 称为**迭代矩阵**。

在（3.1.3）中，若 M_k 和 g_k 都与 k 无关，即

$$\begin{cases} x^{(k)} = Mx^{(k-1)} + g \\ x^{(0)}\text{已知}, \quad k = 1, 2, \cdots \end{cases} \tag{3.1.4}$$

则称此为**单步定常线性迭代法**。

对 n 阶线性方程组

$$Ax = b \tag{3.1.5}$$

构造同解方程组

$$x = Mx + g \tag{3.1.6}$$

对任取的 $x^{(0)} \in R^n$，代入（3.1.6）构成迭代公式：

$$\begin{cases} x^{(k)} = Mx^{(k-1)} + g \\ x^{(0)}\text{已知}, k = 1, 2, \cdots \end{cases} \tag{3.1.7}$$

于是产生近似解向量序列 $\{x^{(k)}\}$。当 k 充分大时，以 $x^{(k)}$ 作为方程组（3.1.5）的近似解。

这就是求解线性方程的单步定常线性迭代法，简称**简单迭代法**，其中 M 称为**迭代矩阵**，$\{x^{(k)}\}$ 称为**迭代序列**。

3.1.2向量序列与矩阵序列的收敛性

定义 3.1.1: 设$\{x^{(k)}\}$为$R^n(C^n)$中的向量序列，$\|\cdot\|$为$R^n(C^n)$上的一个范数。若存在$x\in R^n$，满足：$\lim\limits_{k\to\infty}\|x^{(k)}-x\|=0$，则称向量序列$\{x^k\}$收敛于$x$，或称向量序列$\{x^k\}$是收敛的，同时$x$称为向量序列$\{x^k\}$的极限，记作$\lim\limits_{k\to\infty}x^{(k)}=x$。

定理 3.1.1: R^n中向量序列$\{x^{(k)}\}$收敛于R^n中的向量x，当且仅当

$$\lim_{k\to\infty}x_i^{(k)}=x_i,\quad i=1,2,\cdots,n$$

其中$x^{(k)}=(x_1^{(k)},x_2^{(k)},\cdots,x_n^{(k)})^T$，$i=1,2,\cdots,n$，$x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T$。

定理 3.1.1 表明向量序列的收敛性等价于向量分量构成的n个数列的收敛性。

江南大学

定义 3.1.2: 设$\{A^{(k)}\}$为$R^{n\times n}(C^{n\times n})$中的方阵序列，$\|\cdot\|$为$R^{n\times n}(C^{n\times n})$上的一个范数。若存在$n$阶方阵$A\in R^{n\times n}(C^{n\times n})$满足: $\lim\limits_{k\to\infty}\|A^{(k)}-A\|=0$，则称$n$阶方阵序列$\{A^{(k)}\}$收敛于$A$，或称矩阵序列$\{A^{(k)}\}$是收敛的，同时$A$称为矩阵序列$\{A^{(k)}\}$的极限，记作$\lim\limits_{k\to\infty}A^{(k)}=A$。

定理 3.1.2： 设 $A^{(k)}=(a_{ij}^{(k)})_{n\times n}$ ($k=1,2,\cdots$)， $A=(a_{ij})_{n\times n}$ 均为 n 阶方阵，则 $\lim\limits_{k\to\infty}A^{(k)}=A$ 的充分必要条件是$\lim\limits_{k\to\infty}a_{ij}^{(k)}=a_{ij}$， $i,j=1,2,\cdots,n$。

定理 3.1.2 也表明矩阵序列的收敛性等价于对应元素序列的收敛性。

如果线性方程组(3.1.5)能构成迭代公式(3.1.7),从而产生近似解序列$\{x^{(k)}\}$。当$\{x^{(k)}\}$收敛时，不妨设$\lim\limits_{k\to\infty} x^{(k)} = x$。则在（3.1.7）等式两边取极限有：

$$x = \lim_{k\to\infty} x^{(k+1)} = \lim_{k\to\infty}[Mx^{(k)} + g] = Mx + g$$

从而$\{x^{(k)}\}$的极限x满足（3.1.6），即x就是原方程组（3.1.5）的唯一解。

定义 3.1.3: 若迭代公式(3.1.7)产生的序列$\{x^{(k)}\}$是收敛的，则称此简单迭代法是收敛的；否则，就称简单迭代法是发散的。

研究内容：1.如何建立迭代格式？（向量序列的收敛条件？）

2.收敛速度？

3.误差估计？

例1 用迭代法求解线性方程组

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 3 \\ -2x_1 + 5x_2 = 3 \end{cases}$$

解 构造方程组的等价方程组

$$\begin{cases} x_1 = -x_1 - x_2 + 3 \\ x_2 = 2x_1 - 4x_2 + 3 \end{cases}$$

据此建立迭代公式

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = -x_1^{(k)} - x_2^{(k)} + 3 \\ x_2^{(k+1)} = 2x_1^{(k)} - 4x_2^{(k)} + 3 \end{cases}$$

取 $x_1^{(0)} = x_2^{(0)} = 0$

计算得

$$\begin{cases} x_1^{(1)} = 3 \\ x_2^{(1)} = 3, \end{cases} \quad \begin{cases} x_1^{(2)} = -3 \\ x_2^{(2)} = -3, \end{cases} \quad \begin{cases} x_1^{(3)} = 9 \\ x_2^{(3)} = 9, \end{cases} \quad \begin{cases} x_1^{(4)} = -15 \\ x_2^{(4)} = -15, \end{cases} \quad \begin{cases} x_1^{(5)} = 33 \\ x_2^{(5)} = 33, \end{cases} \cdots$$

迭代解离精确解 $x_1 = 1, x_2 = 1$ 越来越远 迭代不收敛