



江南大学

第五章 插值法

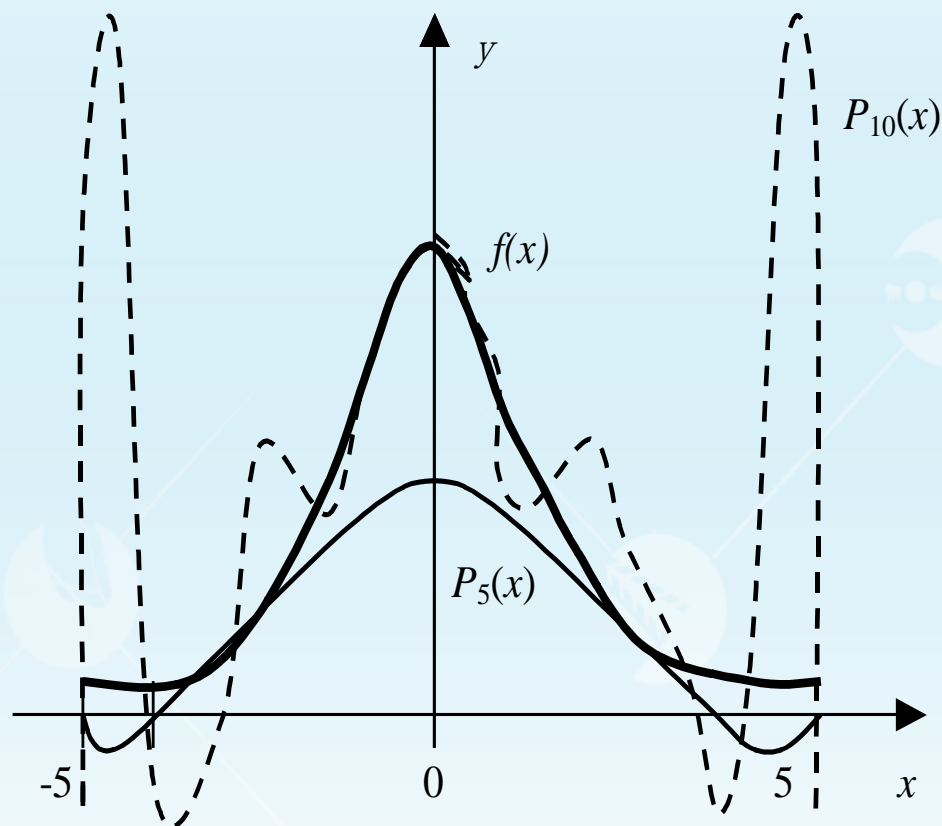
第三节 分段低次插值



龙格 (Runge) 现象

考察函数 $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$, $-5 \leq x \leq 5$

当 n 增大时, $P_n(x)$ 在两端
会发出激烈的振荡, 这
就是所谓**龙格现象**



$P_5(x)$ 和 $P_{10}(x)$ 的图像



分段低次插值思想

龙格现象表明, 在大范围内使用高次插值, 逼近的效果往往是不理想的。



采用分段插值的方法, 将插值区间分成若干个小的区间, 在每个小区间进行低次插值, 然后相互连接, 这种把插值区间分段的方法就是分段低次插值法。



5.3.1 分段线性插值

分段线性插值就是通过插值节点用折线段连接起来逼近 $f(x)$ 。

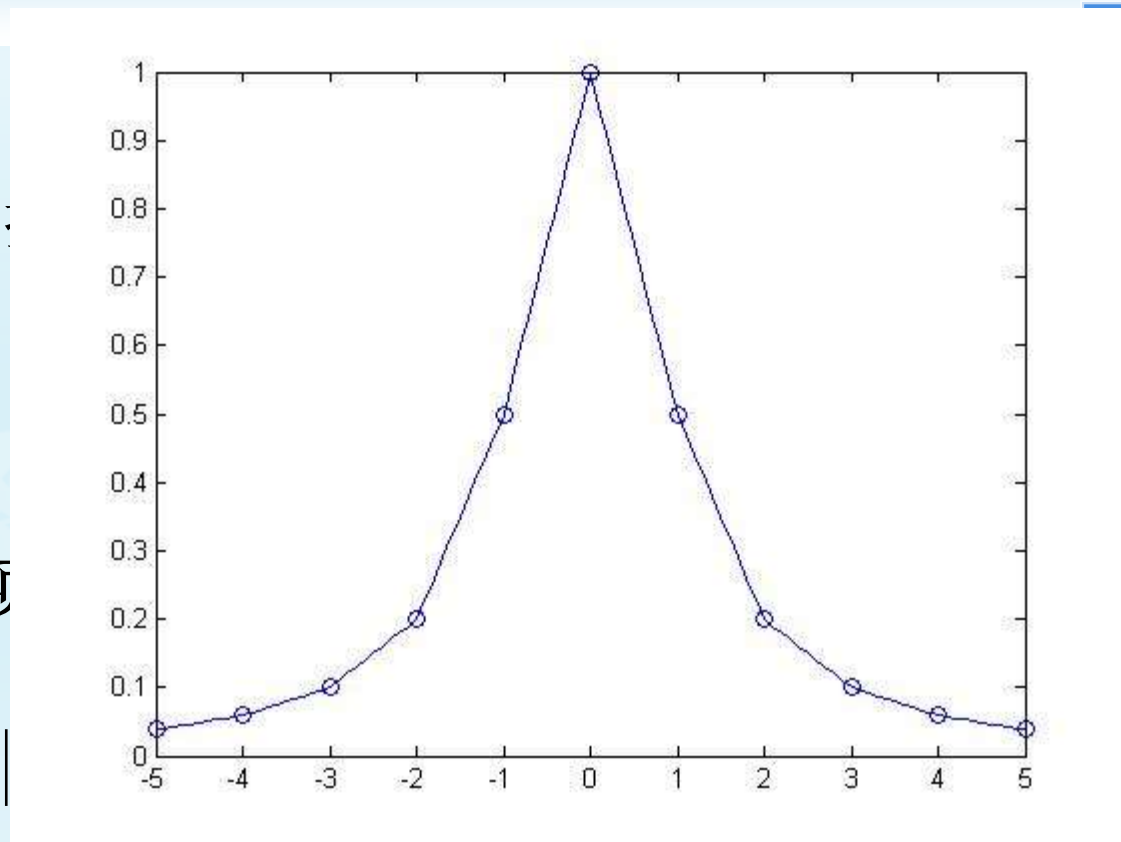
- 设 $f(x)$ 在 $n + 1$ 个节点 $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ 上的函数值为 $f(x_0), f(x_1), \cdots, f(x_n)$
- 在每个小区间 $[x_k, x_{k+1}] (k = 0, 1, \cdots, n - 1)$ 上作线性插值

$$S_i(x) = \frac{x - x_{k+1}}{x_k - x_{k+1}} f(x_k) + \frac{x - x_k}{x_{k+1} - x_k} f(x_{k+1}) \quad (x_k \leq x \leq x_{k+1})$$



在几何上就是用：
替代曲线

由线性插值的余项
上有误差估计式



其中 $h_i = x_{i+1} - x_i$

定理 5.3.1: 如果 $f(x) \in C^2[a, b]$, 则分段线性插值函数 $L_h(x)$ 的余项为

$$|R_n(x)| = |f(x) - L_h(x)| \leq \frac{h^2}{8} M$$

其中 $h = \max_{1 \leq i \leq n} \{h_i = x_i - x_{i-1}\}$, $M = \max_{x \in [a, b]} |f''(x)|$ 。



例1 已知 $f(x)$ 在四个节点上的函数值如下表所示

x_i	30	45	60	90
$f(x_i)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1

求 $f(x)$ 在区间 $[30, 90]$ 上的分段连续线性插值函数 $S(x)$

解： 将插值区间 $[30, 90]$ 分成连续的三个小区间

$[30, 45], [45, 60], [60, 90]$

- $S(x)$ 在区间 $[30, 45]$ 上的线性插值为

$$S(x) = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} f(x_0) + \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} f(x_1) = \frac{\sqrt{2} - 1}{30} x + \frac{3}{2} - \sqrt{2}$$



- $S(x)$ 在区间 $[45, 60]$ 上的线性插值为

$$S(x) = \frac{x - x_2}{x_1 - x_2} f(x_1) + \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} f(x_2) = \frac{\sqrt{3} - \sqrt{2}}{30} x + 2\sqrt{2} - \frac{3}{2}\sqrt{3}$$

- $S(x)$ 在区间 $[60, 90]$ 上的线性插值为

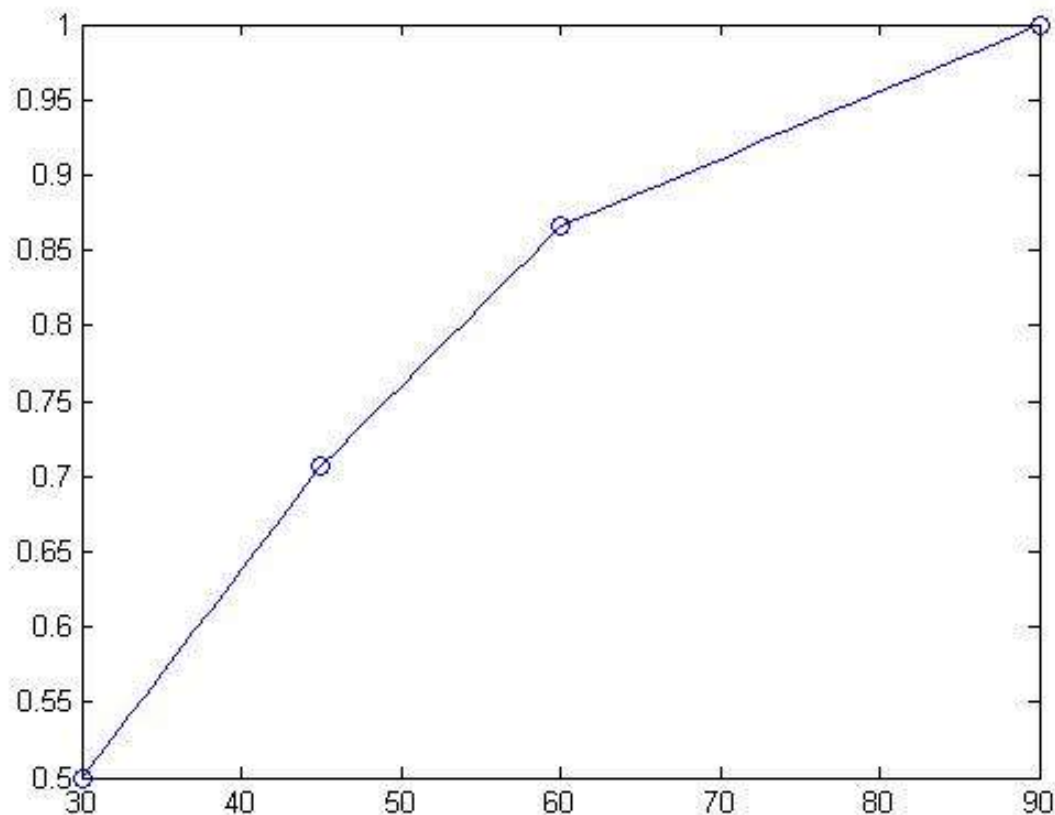
$$S(x) = \frac{x - x_3}{x_2 - x_3} f(x_2) + \frac{x - x_2}{x_3 - x_2} f(x_3) = \frac{2 - \sqrt{3}}{60} x + \frac{3\sqrt{3}}{2} - 2$$





将各小区间的线性插值函数连接在一起，得

$S(x)$



≤ 45

≤ 60

$x \leq 90$



江南大学

5.3.2 分段三次Hermite插值



分段线性插值在节点处不可导。为了保证分段插值函数一阶可导，在节点处加入一阶导数条件，作分段三次Hermite插值

若插值函数 H

(1) $H_h(x_i)$

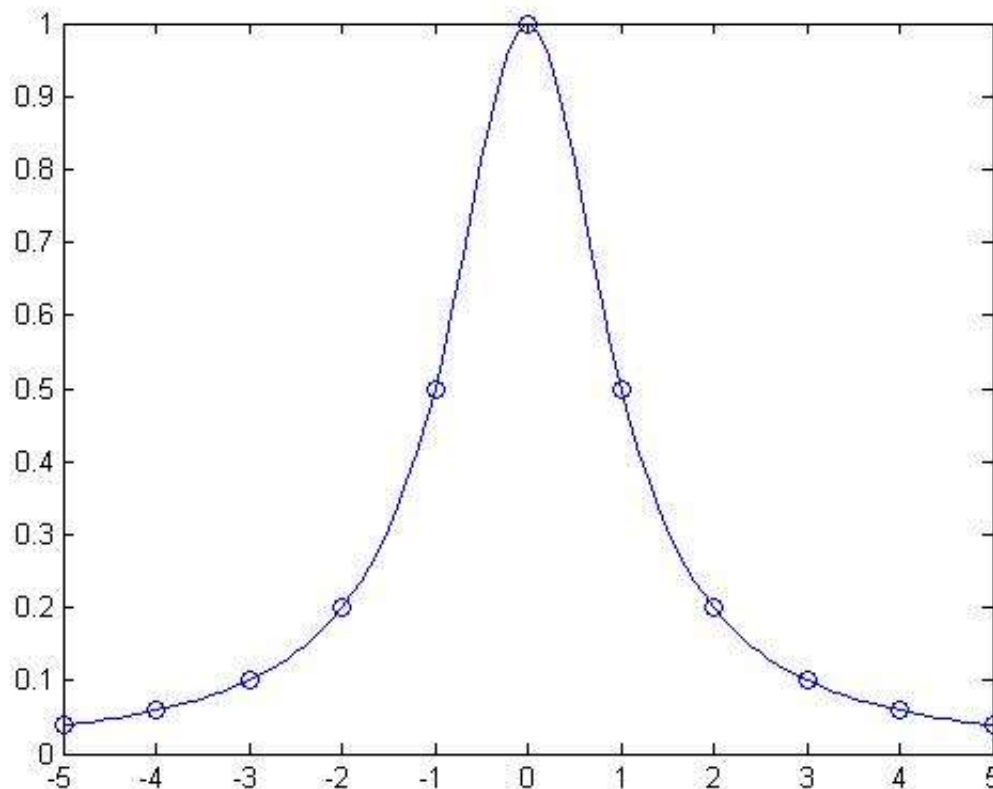
(2) $H_h'(x_i)$

则称 $H_h(x)$ 为区间

定理 5.3.3: 若

足

其中 $h = \max_{1 \leq i \leq n} \{h_i\}$ 。



(x) 满





5.3.3 三次样条

分段线性插值和分段三次Hermite插值往往不能满足某些工程技术的高精度要求，如在船体、飞机等外形曲线的设计中。这就要求分段插值函数在整个区间上具有连续的二阶导数。。

(一) 一般提法

设函数定义在区间 $[a, b]$ 上，给定 $n+1$ 个节点和一组与之对应的函数值，若函数满足：

(1) 在每个节点上满足

$$S(x_i) = f(x_i) \quad (i=0, 1, \dots, n)$$

(2) 在每个小区间 $[x_{i-1}, x_i]$ ($i=1, 2, \dots, n$) 上是一个三次多项式。

(3) 在 $[a, b]$ 上有连续的二阶导数

则称 $S(x)$ 为三次样条插值函数。





三次样条待定系数

三次样条插值函数 $S(x)$ 是一个分段三次多项式, 要求出 $S(x)$, 在每个小区间 $[x_{i-1}, x_i]$ 上要确定4个待定参数

$$S_i(x) = A_i + B_i x + C_i x^2 + D_i x^3, i = 1, 2, \dots, n$$

其中四个待定系数为 A_i, B_i, C_i, D_i , 子区间共有 n 个
所以要确定 $S(x)$ 需要 $4n$ 个待定系数。



三次样条条件



另一方面, 要求分段三次多项式 $S(x)$ 及其导数 $S'(x)$ 和 $S''(x)$ 在整个插值区间 $[a, b]$ 上连续, 即满足条件

(1) 插值条件

$$S(x_i) = f(x_i) \quad i = 0, 1, \dots, n$$

(2) 连续性条件

$$S(x_i - 0) = S(x_i + 0)$$

$$S'(x_i - 0) = S'(x_i + 0) \quad i = 1, 2, \dots, n-1$$

$$S''(x_i - 0) = S''(x_i + 0)$$

上述二式共给出了 $4n-2$ 个条件



三次样条边界条件



因此还需要**2个条件**才能确定 $S(x)$, 通常在区间端点上

$a = x_0, b = x_n$ 各加一个条件, 称为**边界条件**, 常用边

界条件有三种类型。

第一种类型: 给定两端点 $f(x)$ 的一阶导数值:

$$S'(x_0) = f'(x_0), S'(x_n) = f'(x_n)$$

第二种类型: 给定两端点 $f(x)$ 的二阶导数值:

$$S''(x_0) = f''(x_0), S''(x_n) = f''(x_n)$$

特例, $S''(x_0) = S''(x_n) = 0$ 称为**自然边界条件**

第三种类型: 当 $f(x)$ 是以为 $x_n - x_0$ 周期的函数时,

当 $f(x_0) = f(x_n)$ 时,

$$S'(x_0 + 0) = S'(x_n - 0), S''(x_0 + 0) = S''(x_n - 0)$$



(二) 三次样条插值函数求法

设 $S(x)$ 在节点 x_i 处的二阶导数为

$$S''(x_i) = M_i \quad (i = 0, 1, \dots, n)$$

因为在子区间 $[x_{i-1}, x_i]$ 上 $S(x) = S_i(x)$ 是三次多项式,

所以 $S''(x)$ 在此小区间上是 x 的线性函数,

且因为 $S''(x_{i-1}) = M_{i-1}$, $S''(x_i) = M_i$ $x \in [x_{i-1}, x_i]$

用线性插值, 可知其表达式为

$$S''_i(x) = M_{i-1} \frac{x - x_i}{x_{i-1} - x_i} + M_i \frac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}}$$

记 $h_i = x_i - x_{i-1}$, 则有 $S''_i(x) = M_{i-1} \frac{x_i - x}{h_i} + M_i \frac{x - x_{i-1}}{h_i}$



连续两次积分得

$$S_i(x) = M_{i-1} \frac{(x_i - x)^3}{6h_i} + M_i \frac{(x - x_{i-1})^3}{6h_i} + A_i(x_i - x) + B_i(x - x_{i-1})$$

其中, A_i, B_i 为积分常数,

可利用插值条件 $S(x_{i-1}) = f(x_{i-1}), S(x_i) = f(x_i)$, 求得

$$\begin{aligned} S_i(x) &= M_{i-1} \frac{(x_i - x)^3}{6h_i} + M_i \frac{(x - x_{i-1})^3}{6h_i} \\ &+ \left(y_{i-1} - \frac{M_{i-1}}{6} h_i^2 \right) \frac{(x_i - x)}{h_i} + \left(y_i - \frac{M_i}{6} h_i^2 \right) \frac{(x - x_{i-1})}{h_i} \quad (5.3.15) \\ &(x \in [x_{i-1}, x_i], i = 1, 2, \dots, n) \end{aligned}$$





由上讨论可知, 只要确定 M_0, M_1, \dots, M_n 这 $n+1$ 个值, 就可定出三次样条插值函数 $S(x)$ 。

为了求出 $M_i (i = 0, 1, \dots, n)$, 利用一阶导数在子区间连接点上连续条件 $S'(x_i - 0) = S'(x_i + 0)$, 得

$$\frac{h_i}{h_i + h_{i+1}} M_{i-1} + 2M_i + \frac{h_{i+1}}{h_i + h_{i+1}} M_{i+1} = \frac{6}{h_i + h_{i+1}} \left(\frac{y_{i+1} - y_i}{h_{i+1}} - \frac{y_i - y_{i-1}}{h_i} \right)$$



若记

$$\begin{cases} \mu_i = \frac{h_i}{h_i + h_{i+1}} \\ \lambda_i = \frac{h_{i+1}}{h_i + h_{i+1}} = 1 - \mu_i \\ g_i = \frac{6}{h_i + h_{i+1}} (f[x_i, x_{i+1}] - f[x_{i-1}, x_i]) = 6f[x_{i-1}, x_i, x_{i+1}] \end{cases} \quad (5.3.17)$$

则所得方程可简写成

$$\mu_i M_{i-1} + 2M_i + \lambda_i M_{i+1} = g_i \quad (i = 1, 2, \dots, n-1) \quad (5.3.16)$$

即

$$\begin{cases} \mu_1 M_0 + 2M_1 + \lambda_1 M_2 = g_1 \\ \mu_2 M_1 + 2M_2 + \lambda_2 M_3 = g_2 \\ \dots \\ \mu_{n-1} M_{n-2} + 2M_{n-1} + \lambda_{n-1} M_n = g_{n-1} \end{cases}$$





这是一个含有 $n+1$ 个未知数、 $n-1$ 个方程的线性方程组. 要完全确定 $M_i (i = 0, 1, \dots, n)$ 的值还需要补充两个条件, 这两个条件通常根据实际问题的需要, 根据插值区间 $[a, b]$ 的两个端点处的边界条件来补充。边界条件的种类很多, 常见的有以下3种:



第一种边界条件三次样条插值

第一种边界条件：即已知插值区间两端的一阶导数值：

$$S'(x_0) = f'(x_0), S'(x_n) = f'(x_n)$$

由条件 $S'(x_0) = f'(x_0) = y'_0$ 得

$$2M_0 + M_1 = \frac{6}{h_1} \left(\frac{y_1 - y_0}{h_1} - y'_0 \right) \quad (5.3.18)$$

同理, 由条件 $S'(x_n) = f'(x_n) = y'_n$ 得

$$M_{n-1} + 2M_n = \frac{6}{h_n} \left(y'_n - \frac{y_n - y_{n-1}}{h_n} \right) \quad (5.3.19)$$





将式 (5.3.16) 和式 (5.3.18) 以及式 (5.3.19) 合在一起即得确定 M_0, M_1, \dots, M_n 的线性方程组

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & & & \\ \mu_1 & 2 & \lambda_1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \mu_{n-1} & 2 & \lambda_{n-1} \\ & & & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_0 \\ M_1 \\ \vdots \\ M_{n-1} \\ M_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_0 \\ g_1 \\ \vdots \\ g_{n-1} \\ g_n \end{bmatrix} \quad (5.3.21)$$

其中

$$\begin{cases} g_0 = \frac{6}{h_1} (f[x_0, x_1] - y'_0) \\ g_n = \frac{6}{h_n} (y'_n - f[x_{n-1}, x_n]) \end{cases} \quad (5.3.20)$$



第二种边界条件三次样条插值

第二种边界条件:即已知插值区间两端的二阶导数值:

$$S''(x_0) = y_0'', S''(x_n) = y_n''$$

由于在区间端点处二阶导数

$$M_0 = y_0'', M_n = y_n''$$

所以方程 (5.3.16) 中实际上只包含有 $n-1$ 个未知数

M_1, M_2, \dots, M_{n-1} , 从而得方程组

$$\begin{bmatrix} 2 & \lambda_1 & & & \\ \mu_2 & 2 & \lambda_2 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \mu_{n-2} & 2 & \lambda_{n-2} \\ & & & \mu_{n-1} & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ \vdots \\ M_{n-2} \\ M_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_1 - \mu_1 y_0'' \\ g_2 \\ \vdots \\ g_{n-2} \\ g_{n-1} - \lambda_{n-1} y_n'' \end{bmatrix} \quad (5.3.22)$$



第三种边界条件三次样条插值



第三种边界条件: 由 $S''(x_0 + 0) = S''(x_n - 0)$ 与

$S'(x_0 + 0) = S'(x_n - 0)$, 可得

$$M_0 = M_n$$

和 $\lambda_n M_1 + \mu_n M_{n-1} + 2M_n = g_n \quad (5.3.23)$

其中
$$\begin{cases} \mu_n = \frac{h_n}{h_1 + h_n} \\ \lambda_n = \frac{h_1}{h_1 + h_n} = 1 - \mu_n \\ g_n = \frac{6}{h_1 + h_n} (f[x_0, x_1] - f[x_{n-1}, x_n]) \end{cases}$$



将式 (5.3.16), (5.3.23) 合在一起, 即得关于 M_1, M_2, \dots, M_n 的线性方程组。

$$\begin{bmatrix} 2 & \lambda_1 & & & \mu_1 \\ \mu_2 & 2 & \lambda_2 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \mu_{n-1} & 2 & \lambda_{n-1} \\ \lambda_n & & & \mu_n & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ \vdots \\ M_{n-1} \\ M_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \\ \vdots \\ g_{n-1} \\ g_n \end{bmatrix} \quad (5.3.24)$$

利用线性代数知识, 可以证明方程组 (5.3.21), (5.3.22) 和 (5.3.24) 的系数矩阵都是非奇异的, 因此有惟一解。



例 5.3.1: 给定函数表如下

x	1	2	4	5
$y = f(x)$	1	3	4	2

求满足边界条件 $S'(1) = 2$, $S'(5) = 1$ 的三次样条插值函数 $S(x)$ 。

解: 将这些值代入, 求得 λ_i , μ_i 和 g_i 如下表

i	x_i	y_i	h_i	λ_i	μ_i	g_i
0	1	1				0
1	2	3	1	1/3	2/3	-3
2	4	4	2	2/3	1/3	-5
3	5	2	1			18

$$\mu_i = \frac{h_i}{h_i + h_{i+1}}; \quad \lambda_i = 1 - \mu_i = \frac{h_{i+1}}{h_i + h_{i+1}}; \quad (5.3.17)$$

$$g_i = \frac{6}{h_i + h_{i+1}} \left(\frac{y_{i+1} - y_i}{h_{i+1}} - \frac{y_i - y_{i-1}}{h_i} \right) = 6f[x_{i-1}, x_i, x_{i+1}]$$

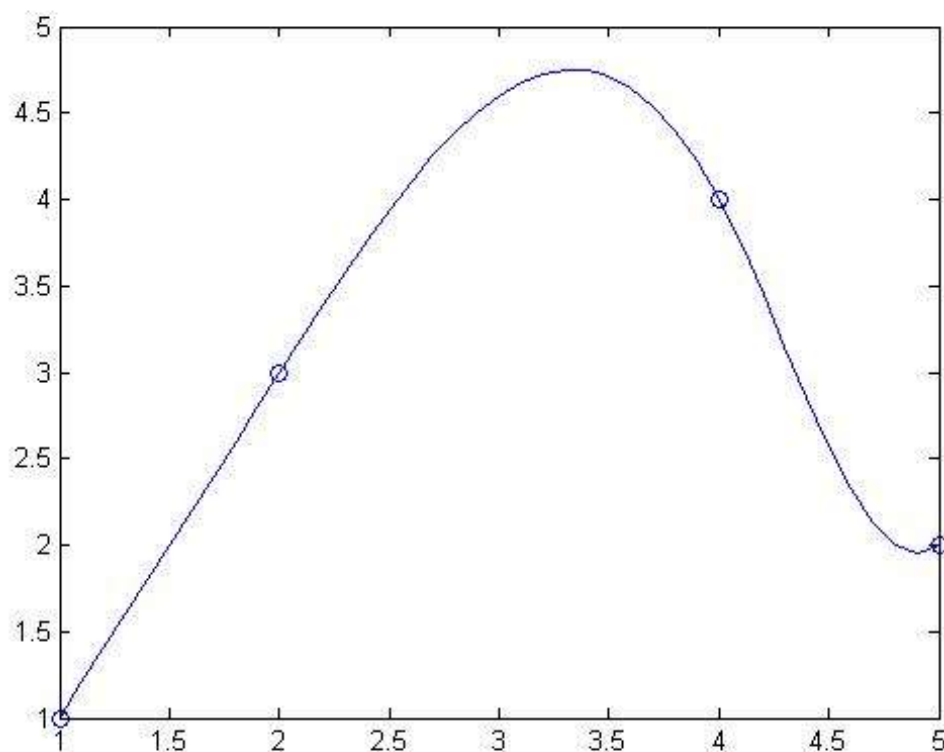
$$g_0 = \frac{6}{h_1} \left(\frac{y_1 - y_0}{h_1} - y'_0 \right), \quad g_n = \frac{6}{h_n} \left(y'_n - \frac{y_n - y_{n-1}}{h_n} \right) \quad (5.3.20)$$



将 M_i 代入(5.3.15)式,即可获得各区间上 $S(x)$ 的表达式。例如, $x_0 = 1, x_1 = 2, h_1 = 1$,

$y_0 = 1, y_1 = 3, M_0 = \frac{1}{35}, M_1 = -\frac{2}{35}$, 则 $S(x)$ 在区间 $[x_0, x_1] = [1, 2]$ 是:

同
 S



次样条插值函数 $S(x)$ 为



江南大学



例 5.3.2: 如果将例 5.3.1 中边界条件换成自然边界条件 $S''(1) = S''(5) = 0$ ，即， $M_0 = M_3 = 0$ 。将 λ_i ， μ_i 和 g_i 代入 (5.3.22) 可得方程组

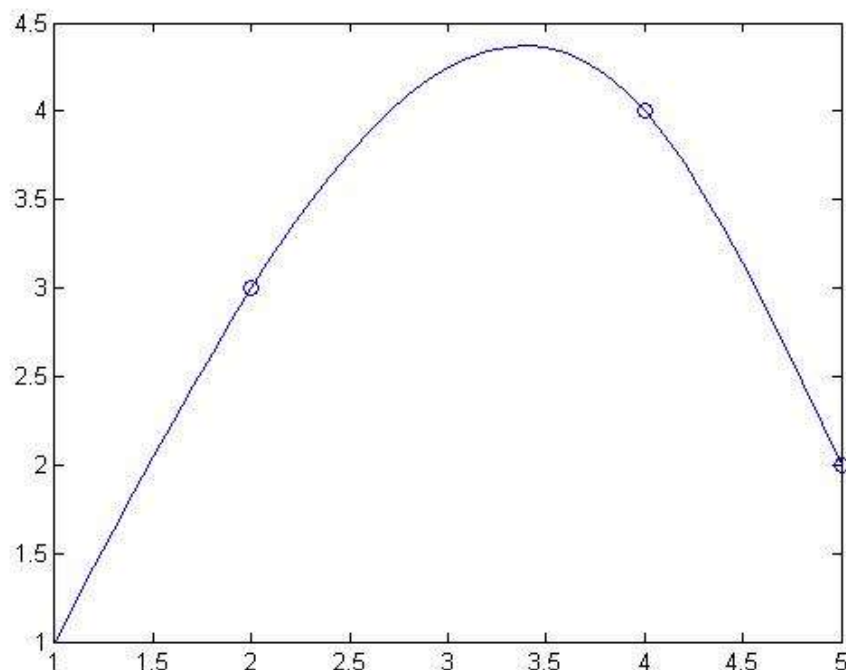
$$\begin{pmatrix} 2 & 2/3 \\ 2/3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M_1 \\ M_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -5 \end{pmatrix}$$

解得：， $M_1 = -\frac{3}{4}$ ， $M_2 = -\frac{9}{4}$ 。

将 M_i 代入 (5.3.15) 式，即可获得各区间上 $S(x)$ 的表达式。例如， $x_0 = 1$ ， $x_1 = 2$ ， $h_1 = 1$ ，

$y_0 = 1$ ， $y_1 = 3$ ， $M_0 =$

同理可求 $S(x)$ 在
故可将区间 $[1, 2]$ 与 $[2,$



式是相同的，

三次样条插值求解步骤



(1) 根据给定的点 (x_i, y_i) ($i = 0, 1, 2, \dots, n$) 及相应的边界条件计算 h_i , λ_i , μ_i 和 g_i 。代入 线性方程组 (5.3.21) 或 (5.3.22) 或 (5.3.24), 求出参数 M_i 。具体的解线性方程组的方法可采取第二章介绍的线性方程组的直接解法去求解, 如对边界条件 (1) 和 (2) 可采用三对角线性方程组的追赶法求解, 而对边界条件 (3) 可采用 Doolittle 分解的方法求解;

(2) 将求得的参数 M_i 代入 (5.3.15), 即可获得三次样条插值函数 $S(x)$ 的分段表达式。





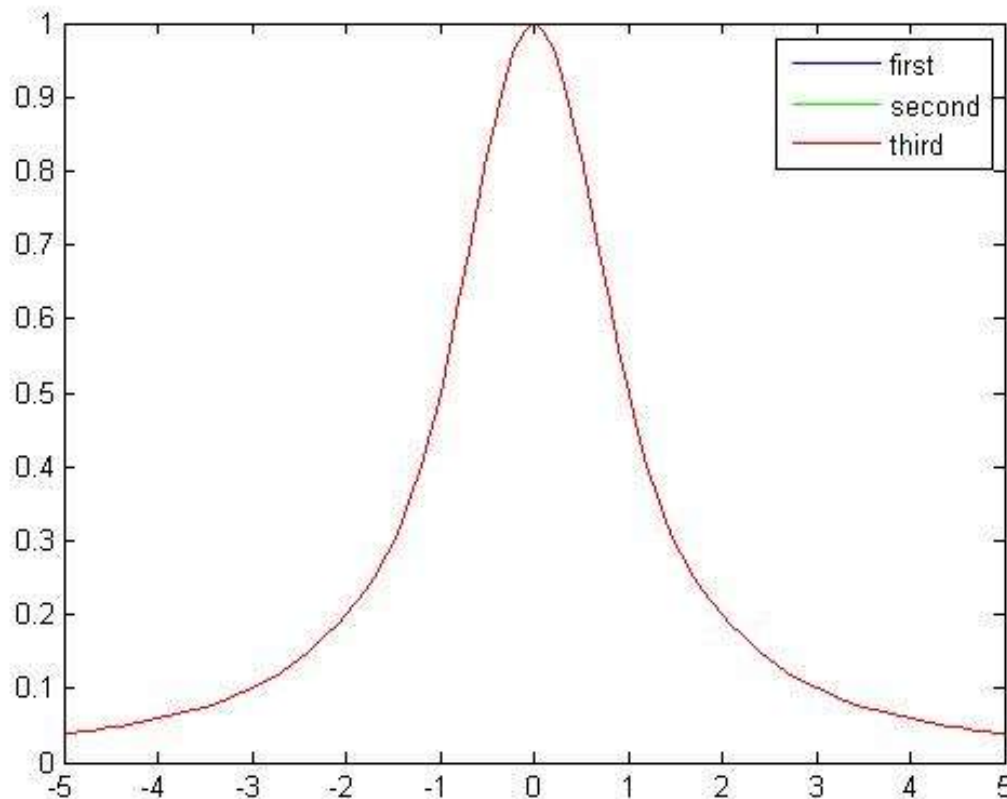
定理 5.3.5: 若 $f(x) \in C^4[a, b]$, $S(x)$ 是 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上的三次样条函数, 则

$$\|f^{(k)}(x) - S^{(k)}(x)\|_{\infty} \leq c_k h^{4-k} \|f^{(4)}(x)\|_{\infty}$$

其中: $h = \max_{1 \leq i \leq n} h_i$

$$\beta = \frac{\max_{1 \leq i \leq n} h_i}{\min_{1 \leq i \leq n} h_i}$$

注: 用三点逐渐加细, 相应的导数误差因此三次



β^{-1} , 其中

而且当节
函数,
龙格现象。



江南大学



本章小结

本章介绍的插值法是实用性很强的方法。它们解决的实际问题虽然各式各样，但抽象为数学问题却有它的共性，即**利用已知的数据去寻求某个较为简单的函数 $P(x)$ 来逼近 $f(x)$** 。插值法给出了寻求这种近似函数的原则，以及构造近似函数的几种具体方法。插值法要求近似函数在已知的数据点必须与 $f(x)$ 完全一致，。





插值法中的**拉格朗日插值多项式**是研究数值微积分与微分方程数值解的重要工具。**牛顿插值多项式**是拉格朗日插值多项式的变形，具有承袭性，比拉格朗日插值多项式节省计算量。**分段低次多项式插值**由于具有良好的稳定性与收敛性，且算法简单，便于应用。特别是应用广泛的**三次样条插值**，不但有较好的稳定性和收敛性，而且具有较好的光滑性，从而满足了许多实际问题的要求。

