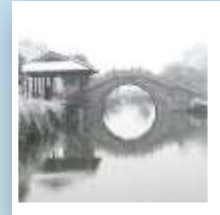
江南大学

第八章 非线性方程和方程组的数值解法

第二节 一元方程的基本迭代法



8.2.1 基本迭代法及其收敛性

$$f(x)=0 \Leftrightarrow x=\varphi(x)$$（等价变换）

$f(x)$的根 $\Leftrightarrow$ $\varphi(x)$的不动点

构造迭代过程 $x_{k+1}=\varphi(x_k)$， $k=0,1,2,\ldots$。（8.2.3）

对于给定的初始值 x_0，由此生成的数列 $\{x_k\}$。

式（8.2.3）称为**基本迭代公式**，$\varphi(x)$ 称为**迭代函数**。

由于收敛点 x^* 满足 $x^*=\varphi(x^*)$，故称 x^* 为 $\varphi(x)$ 的**不动点**，（8.2.3）也称为**不动点迭代公式**。

例 8.2.1： 求 $f(x)=x^3-x-1=0$ 的一个实根。

解： 把它转换成两种等价形式

$$x=\varphi_1(x)=\sqrt[3]{x+1},\quad x=\varphi_2(x)=x^3-1$$

对应的基本迭代法分别为

（1） $x_{k+1}=\sqrt[3]{x_k+1}$ （$k=0,1,2,\ldots$）；（2） $x_{k+1}=x_k^3-1$ （$k=0,1,2,\ldots$）

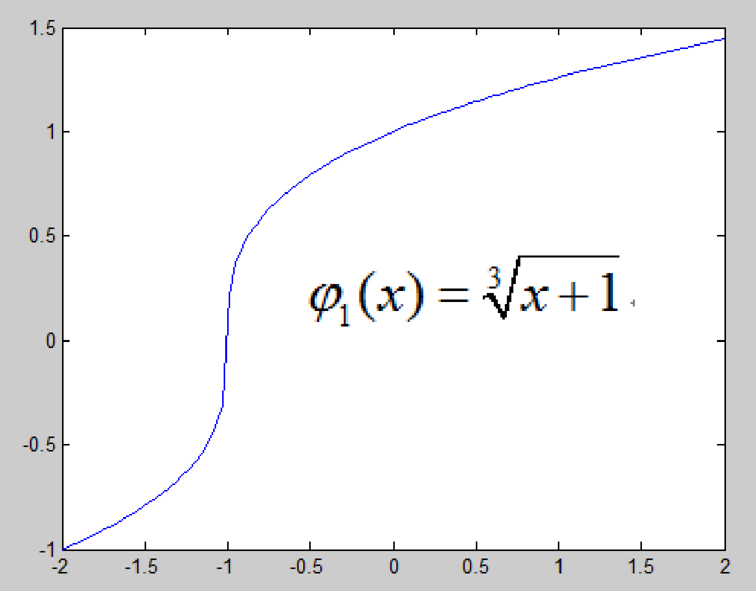
取 $x_0=1.5$，此方程有唯一实根 $x^*=1.3247179572447$。

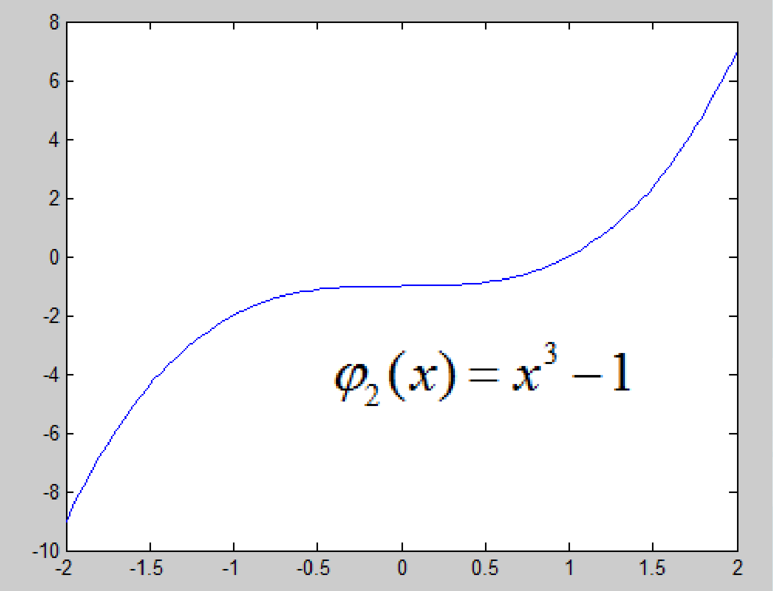
表 8-2-1：例 8.2.1 中两种方法的比较表

k	0	1	2	…	11
方法（1）的 x_k	1.5	1.35720881	1.33086096	…	1.32471796
方法（2）的 x_k	1.5	2.37500000	12.3964844	…	$\to\infty$

方法（1）收敛，方法（2）发散。

江南大学





基本迭代法的收敛性质与迭代函数 $\varphi(x)$ 的选取有关

例 8.2.2： 求 $f(x)=x^2-2=0$ 的根 $x^*=\pm\sqrt{2}$ 的近似值。

解： 把它转换成等价形式 $x=\varphi(x)=\frac{1}{2}(x+\frac{2}{x})$，

基本的迭代法为 $x_{k+1}=\frac{1}{2}(x_k+\frac{2}{x_k}),\quad k=0,1,2,\ldots$

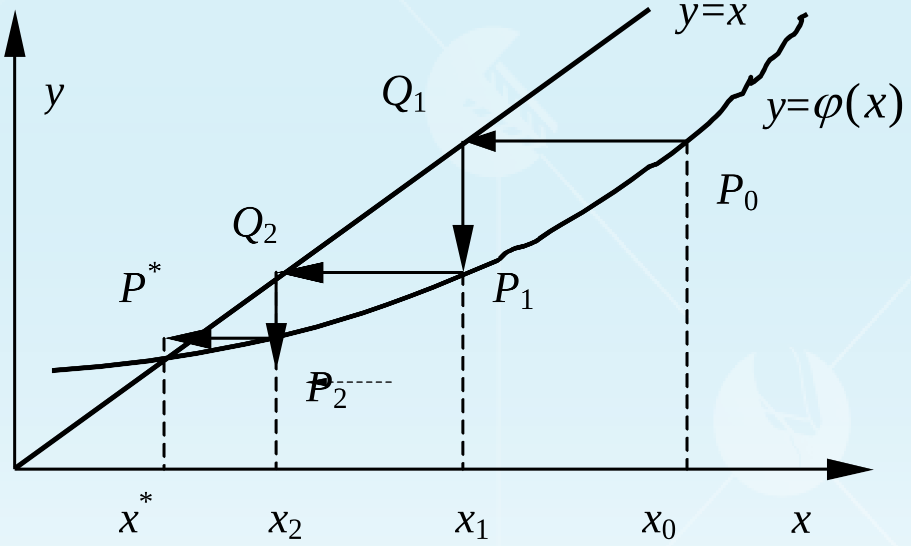
取初值 $x_0=\pm1.0$，迭代结果分别收敛到 $x^*=\pm\sqrt{2}$，如表 8-2-2 所示。

表 8-2-2：例 8.2.2 中两实根的迭代法的计算表

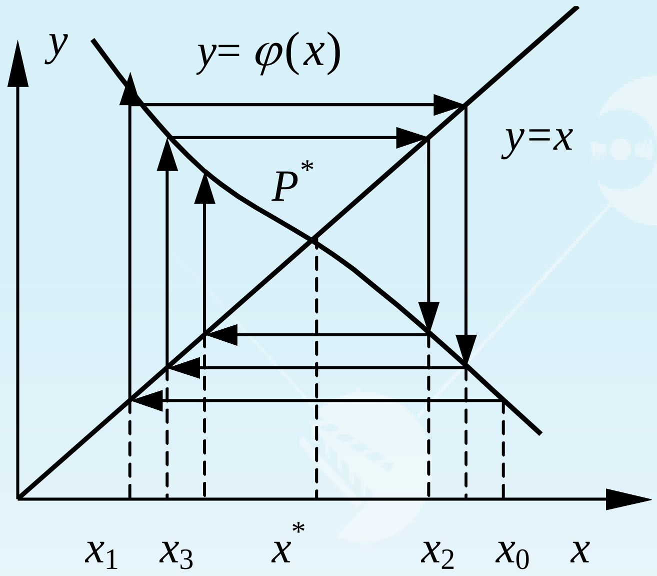
k	0	1	2	3	4	5
x_k	1.0	1.5	1.41666667	1.41421569	1.41421356	1.41421356
x_k	-1.0	-1.5	-1.41666667	-1.41421569	-1.41421356	-1.41421356

基本迭代法的收敛性质与初值 x_0 的选取有关

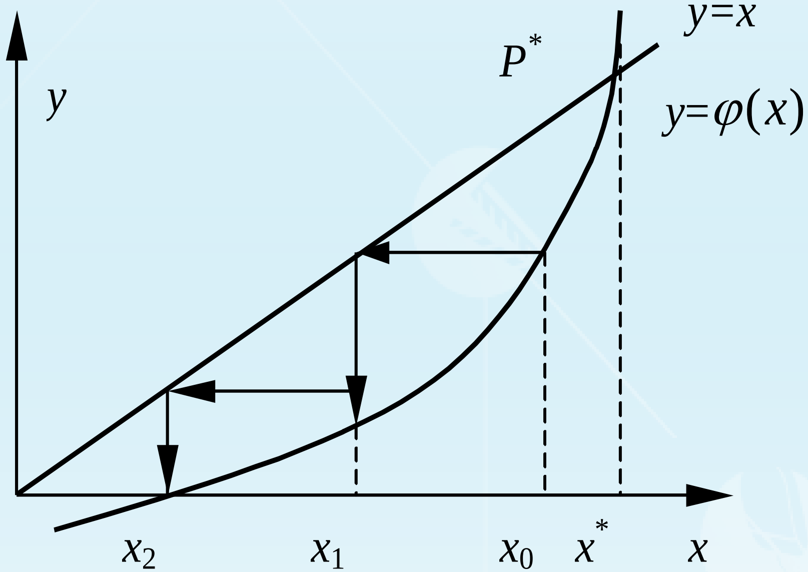
问题：此方法的收敛条件？



$$0 < \varphi'(x^*) < 1$$

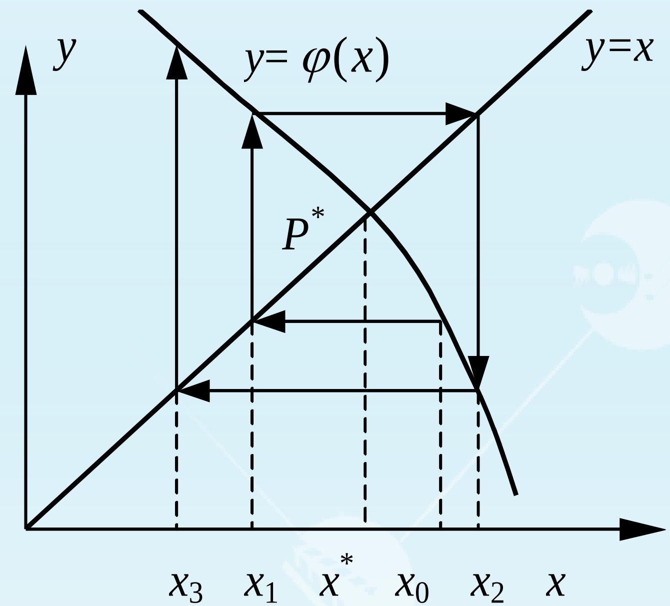


$$-1 < \varphi'(x^*) < 0$$



$$\varphi'(x^*) > 1$$

(c)



$$\varphi'(x^*) < -1$$

(d)

简单迭代法收敛基本定理

定理 8.2.1： 设函数 $\varphi(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，并且满足

（1）映内性 $a \le \varphi(x) \le b, \quad \forall x \in [a,b]$ （8.2.4）

（2）压缩性 存在常数 $0 < L < 1$（L 为压缩系数），使得

$$|\varphi(x)-\varphi(y)| \le L|x-y|, \quad \forall x, y \in [a,b] \tag{8.2.5}$$

则（1）函数 $\varphi(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上存在**唯一的不动点** x^*。

（2）对于任何初值 $x_0 \in [a,b]$，由迭代法（8.2.3）生成的点 x_k 都在区间 $[a,b]$ 中，并且**收敛**到 x^*，即 $\{x_k\}_{k=0}^{\infty} \subset [a,b]$，$\lim\limits_{k\to\infty} x_k = x^*$。其中，$\{x_k\}_{k=0}^{\infty} \subset [a,b]$ 称为迭代的适定性。

（3）这时有**误差估计式**

$$|x_k - x^*| \le \frac{L}{1-L}|x_k - x_{k-1}| \tag{8.2.6}$$

提示：（1）构造$\psi(x) = x - \varphi(x)$连续函数介值定理证明存在性，压缩性证明唯一性；

（2）考察$|x_k - x^*| = |\varphi(x_{k-1}) - \varphi(x^*)| \le L|x_{k-1} - x^*| \le L^k|x_0 - x^*|$;

（3）$|x_{k+P} - x_k| \le |x_{k+P} - x_{k+p-1}| + \cdots + |x_{k+1} - x_k|, p \to \infty$

收敛基本定理的说明

注 （1）（8.2.5）可用更强的条件

$$|\varphi'(x)| \le L < 1, \quad \forall x \in (a,b) \qquad (8.2.8)$$

由微分中值定理，对任何 $x, y \in [a,b]$ 都有

$|\varphi(x)-\varphi(y)| = |\varphi'(\zeta)||x-y| \le L|x-y|$，从而条件（8.2.5）成立

若 $|\varphi'(x)| > 1, \quad \forall x \in (a,b)$，则迭代发散

（2）**迭代终止准则**通常采用 $\dfrac{|x_k - x_{k-1}|}{1+|x_k|} < \varepsilon \qquad (8.2.9)$

其中的 $\varepsilon > 0$ 为给定的相对误差容限。

（3）几何解释

（4）式（8.2.6）是事后误差估计，**事前误差估计是** $|x_k - x^*| \le \dfrac{L^k}{1-L}|x_1 - x_0|$

注：（4）中L越小，收敛越快，证明与事后误差估计类似

收敛判别的例题

例 8.2.3： 对于例 8.2.1 中的两种迭代法，讨论它们的收敛性。

解： 方法（1）： 迭代函数及其导数分别为 $\varphi_1(x)=\sqrt[3]{x+1}$ 和 $\varphi_1'(x)=\frac{1}{3}(x+1)^{(-2/3)}$。易知 $\varphi_1(x)$ 在区间[1,2]上满足映内性和压缩性条件：

$$\varphi_1(x)\in[1.26,1.45],|\varphi_1'(x)|\le 0.21<1,\quad \forall\ x\in[1,2]$$

因此根据定理 8.2.1，对于任何初值 $x_0\in[1,2]$，迭代法（1）都能收敛到区间[1,2]上的唯一不动点 $x^*\approx 1.32471796$。

方法（2）：迭代函数以及导数分别为 $\varphi_2(x)=x^3-1$ 和 $\varphi_2'(x)=3x^2$。显然，$\varphi_2(x)$ 不满足定理 8.2.1 的条件。特别地，在 x^* 的邻域内有 $\varphi_2'(x)>1$。 该迭代必定发散。

例2　对方程$x^5-4x-2=0$构造收敛的迭代格式，求其最小正根，计算过程保留4位小数。

解　容易判断[1, 2]是方程的有根区间，且在此区间内 $f'(x)=5x^4-4>0$，所以此方程在区间[1, 2]有且仅有一根。将原方程改写成以下两种等价形式。

① $x=\dfrac{x^5-2}{4}$，即 $\varphi(x)=\dfrac{x^5-2}{4}$，　$|\varphi'(x)|=\dfrac{5x^4}{4}>1$　$x\in[1,2]$

不满足收敛条件。

② $x=\sqrt[5]{4x+2}$，即 $\varphi(x)=\sqrt[5]{4x+2}\in[1.43,1.59]$，

$$|\phi'(x)|=\frac{4}{5\sqrt[5]{(4x+2)^4}}<\frac{4}{5\sqrt[5]{(4+2)^4}}\approx 0.8<1\quad x\in[1,2]$$

此时迭代公式满足迭代收敛条件。

例 用迭代法求方程 $f(x)=x^2-x-1=0$ 的根

解 因 $f(1.5)=-0.25<0$， $f(2)=1>0$，有根区间 $[1.5,2]$

（1） $x=\sqrt{x+1}=\varphi_1(x)$，且 $\varphi_1(x)\in[1.5,2]$， $|\varphi_1'(x)|=\dfrac{1}{2\sqrt{x+1}}\le\dfrac{1}{2\sqrt{2.5}}=\dfrac{1}{3.162}$

（2） $x=1+\dfrac{1}{x}=\varphi_2(x)$，且 $\varphi_2(x)\in[1.5,2]$， $|\varphi_1'(x)|=\dfrac{1}{x^2}\le\dfrac{1}{1.5^2}=\dfrac{1}{2.25}$

根据定理 8.2.1，任取 $x_0\in[1.5,2]$，由这两种等价方程所构造的**迭代法都收敛**，且**第一种所产生的迭代序列收敛较快**

江南大学

8.2.2 局部收敛性和收敛阶

注：定理 8.2.1 为**全局收敛性定理**，可将$[a,b]$缩小，定义局部收敛性

定义 8.2.1：设x^*是$\varphi(x)$的不动点，对于某个$\delta>0$，称闭区间$[x^*-\delta,x^*+\delta]$为x^*的一个邻域，记作

$$N(x^*,\delta)=[x^*-\delta,x^*+\delta]$$

若存在x^*的一个邻域$N(x^*,\delta)$，使得对任何初值$x_0\in N(x^*,\delta)$，由迭代法（8.2.3）生成的序列满足适定性$\{x_k\}_{k=0}^{\infty}\subset N(x^*,\delta)$，且有$\lim\limits_{k\to\infty}x_k=x^*$，则称迭代法（8.2.3）是**局部收敛**的。

定理 8.2.2：设x^*为$\varphi(x)$的不动点。若$\varphi'(x)$在x^*的某个领域上连续，并且有$|\varphi'(x^*)|<1$，则不动点迭代法（8.2.3）局部收敛。

提示：（1）压缩性利用连续函数局部有界性推得，$\exists\delta>0,L<1,s.t.|\varphi(x)|\le L<1,\forall x\in N(x^*,\delta)$

（2）映内性$\varphi(x)\in N(x^*,\delta),\forall x\in N(x^*,\delta)$

收敛阶定义和线性判别定理

定义 8.2.2： 设序列 $\{x_k\}_{k=0}^{\infty}$ 收敛到 x^*，记误差 $e_k=x_k-x^*$，若存在常数 $p\geq 1$ 和 $c\neq 0$，使得

$$\lim_{k\to\infty}\frac{|e_{k+1}|}{|e_k|^p}=c \tag{8.2.11}$$

则称 $\{x_k\}_{k=0}^{\infty}$ 为 p **阶收敛**，c 称为渐近误差常数。当 $p=1$ 时称为**线性收敛**，当 $p>1$ 时称为**超线性收敛**，当 $p=2$ 时称为二**次收敛或平方收敛**。

数p的大小反映了迭代法收敛的速度的快慢，p愈大，则收敛的速度愈快，故迭代法的收敛阶是对迭代法收敛速度的一种度量。

推论 8.2.1： 若定理 8.2.2 中还有 $\varphi'(x^*)\neq 0$，即 $\varphi'(x^*)$ 满足 $0<|\varphi'(x^*)|<1$，则不动点迭代法（8.2.3）是**线性收敛的**。

提示：$\lim\limits_{k\to\infty}\frac{|e_{k+1}|}{|e_k|}=\lim\limits_{k\to\infty}\frac{|\varphi(x_k)-\varphi(x^*)|}{|x_k-x^*|}=\lim\limits_{k\to\infty}|\varphi'(\xi_k)|=|\varphi'(x^*)|\neq 0$

一般收敛阶判别定理

定理 8.2.3：设 x^* 为 $\varphi(x)$ 的不动点，若有整数 $p \geq 2$，使得 $\varphi^{(p)}(x)$ 在 x^* 的某邻域上连续，其满足

$$\varphi^{(l)}(x^*) = 0 \ (l = 1, 2, \ldots, p-1), \quad \varphi^{(p)}(x^*) \neq 0 \tag{8.2.12}$$

则不动点迭代法（8.2.3）局部收敛。并且迭代误差 $e_k = x_k - x^*$，满足

$$\lim_{k\to\infty} \frac{e_{k+1}}{e_k^p} = \frac{\varphi^{(p)}(x^*)}{p!} \tag{8.2.13}$$

从而方法是 p **阶收敛**的。

提示：$e_{k+1} = \varphi(x_k) - \varphi(x^*) = \varphi'(x^*)(x_k - x^*) + \cdots + \frac{\varphi^{(p-1)}(x^*)}{(p-1)!}(x_k - x^*)^{p-1} + \frac{\varphi^{(p)}(\xi_k)}{p!}(x_k - x^*)^p = \frac{\varphi^{(p)}(\xi_k)}{p!}(x_k - x^*)^p$

$$\lim_{k\to\infty} \frac{e_{k+1}}{e_k^p} = \frac{\varphi^{(p)}(x^*)}{p!} \neq 0$$

收敛阶判别定理的应用

例 8.2.4：求方程 $f(x)=xe^x-1=0$ 的根。

解：此方程等价于 $x=\varphi(x)=e^{-x}$。作函数 $y=x$ 和 $y=e^{-x}$ 的图像，见图 8-2-2。显然，$\varphi(x)$ 只有一个不动点 $x^*>0$。

因为对任何 $x>0$ 都有 $0<|\varphi'(x)|=e^{-x}<1$，所以由推论 8.2.1 可知，迭代法 $x_{k+1}=e^{-x_k}$ 是线性收敛的。

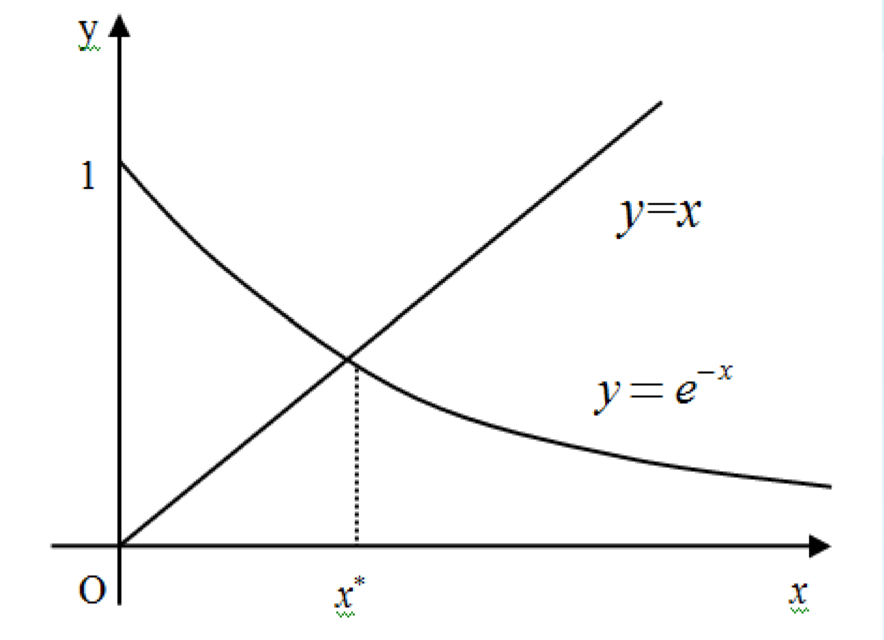


表 8-2-3：例 8.2.4 中迭代计算数值表

k	0	1	…	28	29
x_k	0.5	0.606530660	…	0.567143282	0.567143295

例 8.2.5：对于例 8.2.2 中的方程 $f(x)=x^2-2=0$，求它的根 $f(x)=x^2-2=0$ 的近似值。

解：在例 8.2.2 中，迭代函数 $\varphi(x)=\frac{1}{2}(x+\frac{2}{x})$，它的 1，2 阶导数分别为

$$\varphi'(x)=\frac{1}{2}(1-\frac{2}{x^2}),\ \varphi'(x^*)=0$$

$$\varphi''(x)=\frac{2}{x^3},\ \varphi''(x^*)=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\neq 0$$

从而，由定理 8.2.3 可知，迭代法 $x_{k+1}=\frac{1}{2}(x_k+\frac{2}{x_k})$ **平方收敛**。

现在改用迭代函数 $\varphi(x)=x-\frac{1}{2}(x^2-2)$。显然 $x=\varphi(x)$ 与 $f(x)=0$ 等价。这时

$$\varphi'(x)=1-x,\ \varphi'(\sqrt{2})\approx -0.414214$$

根据推论 8.2.1，对于 $x^*=\sqrt{2}$，迭代法

$$x_{k+1}=x_k-\frac{1}{2}(x_k{}^2-2) \tag{8.2.14}$$

线性收敛。

表 8-2-4：例 8.2.5 中平方收敛法比线性收敛法比较表

k	0	…	5	…	20
平方收敛方法 x_k	±1.0	…	±1.41421356	…	
线性收敛方法 x_k	1.0	…	1.41689675	…	1.41421356

平方收敛比线性收敛快得多。

$\varphi'(x)=1-x,\varphi'(-\sqrt{2})\approx -2.414214$，只要初值 $x_0\neq-\sqrt{2}$，迭代法（8.2.14）不可能收敛到 $x^*\neq-\sqrt{2}$。

局部收敛总结

若 x^* 是 $\varphi(x)$ 的不动点，$\varphi'(x)$ 在 x^* 的某个领域上连续

$0<|\varphi'(x^*)|<1$，那么迭代法（8.2.3）局部线性收敛；

$|\varphi'(x^*)|=1$ 为临界情况，这时或者局部线性收敛，或者不收敛；

$|\varphi'(x^*)|>1$ 时，肯定不收敛。

为了使迭代过程收敛或提高收敛的速度, 可设法

① 提高初值的精度以减少迭代的次数

② 提高收敛的阶数 p