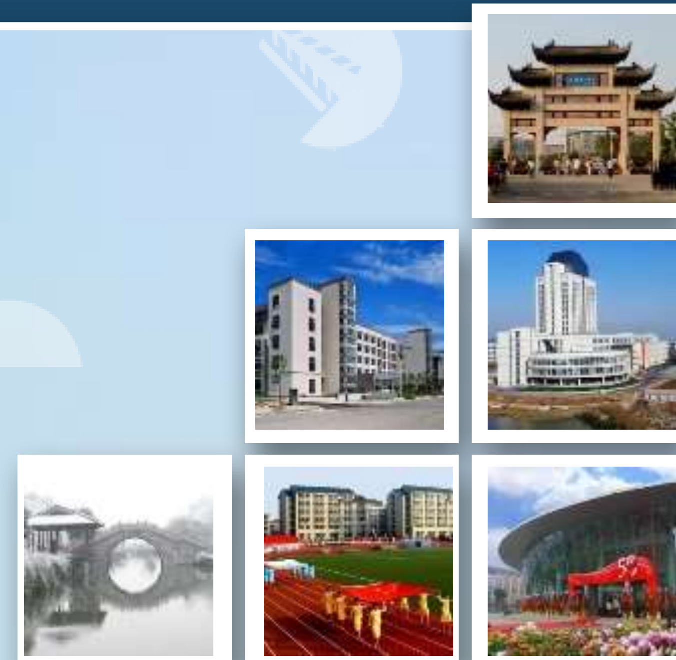
江南大学

第七章 数值积分与数值微分



精确计算 $f^{(n)}(x)$ 或 $\int_a^b f(x)dx$ 时的实际问题

(1) 被积函数f(x)并不一定能找到初等函数的有限形式表示的原函数F(x)，例如：

$$\int_0^1 \frac{\sin x}{x}dx \text{和} \int_0^1 e^{-x^2}dx$$

Newton-Leibnitz公式就无能为力了

(2) 还有被积函数f(x)的原函数能用初等函数表示，例如函数 $f(x)=x^2\sqrt{2x^2+3}$ 原函数很复杂

$$F(x)=\frac{1}{4}x^2\sqrt{2x^2+3}+\frac{3}{16}x\sqrt{2x^2+3}-\frac{9}{16\sqrt{2}}\ln(\sqrt{2}x+x^2\sqrt{2x^2+3})$$

江南大学

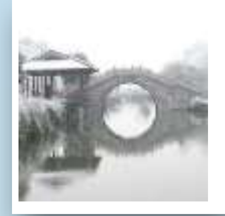
(3) 被积函数f(x)没有具体的解析表达式，其函数关系由表格或图形表示。

将积分区间细分,在每一个小区间内用简单函数代替复杂函数进行积分，这就是数值积分的思想。用插值多项式去代替被积函数f(x)进行积分是本章讨论数值积分的主要内容。

第七章 数值积分与数值微分

第一节 Newton-Cotes求积公式



7.1.1数值积分的基本思想

积分值 $I=\int_a^b f(x)dx$ 在几何解释为由x=a, x=b, y=0以及y=f(x)这四条边所围成的曲边梯形面积。

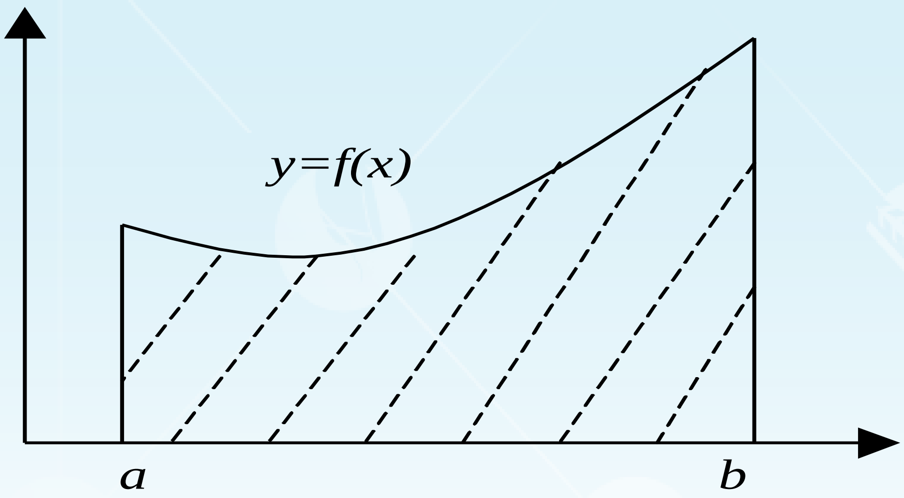


图 数值积分的几何意义

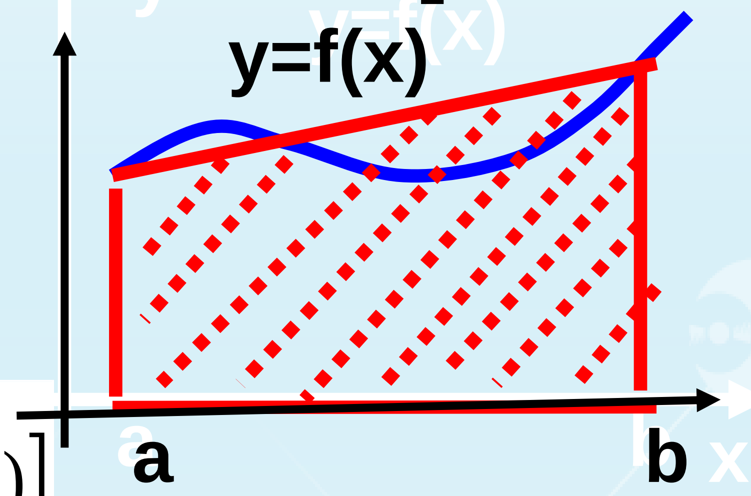
由积分中值定理可知，对于连续函数f(x)，在积分区间[a, b]内存在一点ξ，使得

$$\int_a^b f(x)dx = (b-a)f(\xi) \qquad \xi \in [a,b]$$

即所求的曲边梯形的面积恰好等于底为(b-a)，高为 $f(\xi)$ 的矩形面积。

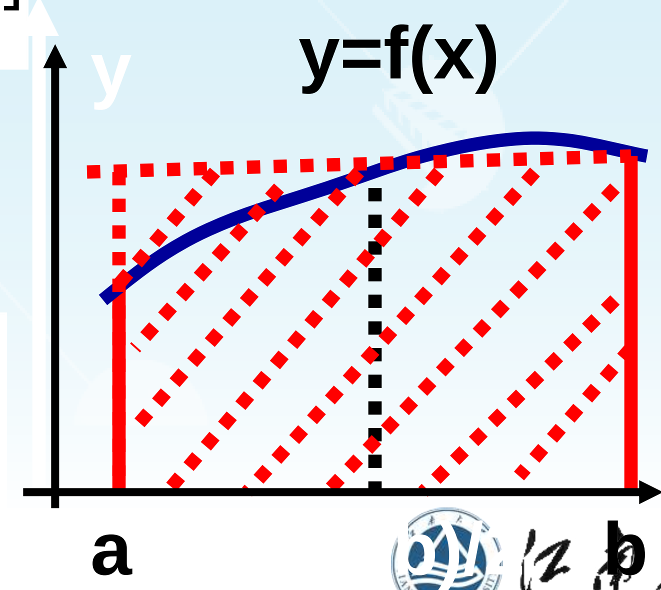
例如 $f(\xi)$ 分别取 $f(\xi)\approx\dfrac{f(a)+f(b)}{2}$ 和 $f(\xi)\approx f(\dfrac{a+b}{2})$

则分别得



①梯形公式

$$\int_a^b f(x)dx\approx\frac{1}{2}(b-a)\left[f(a)+f(b)\right]$$



②中矩形公式

$$\int_a^b f(x)dx\approx(b-a)f(\frac{a+b}{2})$$

先用某个简单函数 $\varphi(x)$近似逼近f(x), 用 $\varphi(x)$ 代替原被积函数f(x)，即 $\int_a^b f(x)dx \approx \int_a^b \varphi(x)dx$

由于多项式能很好地逼近连续函数, 且又容易计算积分, 因此将 $\varphi(x)$选取为插值多项式， 这样f(x)的积分就可以用其插值多项式的积分来近似代替 。

以下利用 Lagrange 插值多项式近似表达被积函数，推导插值型求积公式。

设积分区间$[a,b]$上的$n+1$个互异节点$x_0,x_1,\cdots,x_n$，则$f(x)$的不超过n次的 Lagrange 插值多项式可写成：

$$L_n(x)=\sum_{k=0}^{n} f(x_k)\cdot l_k(x)$$

其中$l_k(x)=\prod_{j=0,j\neq k}^{n}\frac{x-x_j}{x_k-x_j}$（$k=0,1,2,\cdots,n$）为 Lagrange 插值基函数。

相应的插值型求积公式为：$I[f]=\int_a^b f(x)dx\approx\int_a^b L_n(x)dx=\sum_{k=0}^{n} f(x_k)\cdot\boxed{\int_a^b l_k(x)dx}$

记$A_k=\int_a^b l_k(x)dx$（$k=0,1,2,\cdots,n$），显然A_k仅与节点集$\{x_k\}$有关，而与被积函数$f(x)$无关。于是上式就可变成：

$$I[f]=\int_a^b f(x)\cdot dx\approx\sum_{k=0}^{n}\boxed{A_k}f(x_k) \qquad (7.1.3)$$

江南大学

求积公式（7.1.3）的截断误差为：

$$R_n[f]=\int_a^b f(x)dx-\int_a^b L_n(x)dx=\int_a^b R_n(x)dx=\int_a^b \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}w_{n+1}(x)dx \qquad (7.1.4)$$

其中 $\omega_{n+1}(x)=\prod_{j=0}^{n}(x-x_j)$。

7.1.2Newton-Cotes求积公式

如果取区间 $[a,b]$ 上 $n+1$ 个等距节点 $x_0,x_1,\cdots,x_n$，即 $x_k=a+k\cdot h$，$h=\dfrac{b-a}{n}$，$k=0,1,2,\cdots,n$。

$$A_k=\int_a^b l_k(x)dx=\int_a^b\prod_{j=0,j\neq k}^{n}\frac{x-x_j}{x_k-x_j}dx$$

做变换 $x=a+th$

$$=\int_0^n\prod_{j=0,j\neq k}^{n}\frac{(t-j)h}{(k-j)h}hdt$$

$$=\frac{(-1)^{n-k}(b-a)}{n\cdot k!\cdot(n-k)!}\int_0^n\prod_{j=0,j\neq k}^{n}(t-j)dt:=(b-a)C_k^{(n)}$$

注：Cotes 系数 $C_k^{(n)}$ 仅与等分区间数 n 和 k 有关，而与积分区间 $[a,b]$ 及被积函数 $f(x)$ 无关，可查表得到。

于是求积公式（7.1.3）变成：

$$I[f]=\int_a^b f(x)dx \approx \boxed{(b-a)}\sum_{k=0}^{n} C_k^{(n)}\cdot f(x_k) \qquad (7.1.5)$$

求积公式（7.1.5）也称为 n 阶 **Newton-Cotes 公式**，其中 $\{C_k^{(n)}\}$ 称为 **Cotes 系数**。

Newton-Cotes 求积公式的截断误差为：

$$R_n[f]=\int_a^b \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\omega_{n+1}(x)dx=\frac{h^{n+2}}{(n+1)!}\int_0^n f^{(n+1)}(\xi)\cdot\prod_{j=0}^{n}(t-j)dt \qquad (7.1.6)$$

表 7-1-1：Cotes 系数表

n	$C_k^{(n)}$								
1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$							
2	$\frac{1}{6}$	$\frac{4}{6}$	$\frac{1}{6}$						
3	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$					
4	$\frac{7}{90}$	$\frac{32}{90}$	$\frac{12}{90}$	$\frac{32}{90}$	$\frac{7}{90}$				
5	$\frac{19}{288}$	$\frac{75}{288}$	$\frac{50}{288}$	$\frac{50}{288}$	$\frac{75}{288}$	$\frac{19}{288}$			
6	$\frac{41}{840}$	$\frac{216}{840}$	$\frac{27}{840}$	$\frac{272}{840}$	$\frac{27}{840}$	$\frac{216}{840}$	$\frac{41}{840}$		
7	$\frac{751}{17280}$	$\frac{3577}{17280}$	$\frac{1323}{17280}$	$\frac{2989}{17280}$	$\frac{2989}{17280}$	$\frac{1323}{17280}$	$\frac{3577}{17280}$	$\frac{751}{17280}$	
8	$\frac{989}{28350}$	$\frac{5888}{28350}$	$\frac{-928}{28350}$	$\frac{10496}{28350}$	$\frac{-4540}{28350}$	$\frac{10496}{28350}$	$\frac{-928}{28350}$	$\frac{5888}{28350}$	$\frac{989}{28350}$

当n = 8时，出现了负系数，从而影响稳定性和收敛性，因此实用的只是低阶公式。

性质 7.1.1： 对所有的自然数 n，有 $\sum_{k=0}^{n} C_k^{(n)} = 1$。

提示：$\sum_{k=0}^{n} l_k(x) = 1$

梯形公式

当 $n=1$ 时，$C_0^{(1)}=C_1^{(1)}=1/2$，$h=b-a$，因此对应的求积公式为：

$$I[f]=\int_a^b f(x)dx\approx\frac{b-a}{2}[f(a)+f(b)] \tag{7.1.7}$$

$$=\frac{h}{2}[f(a)+f(b)]:=T$$

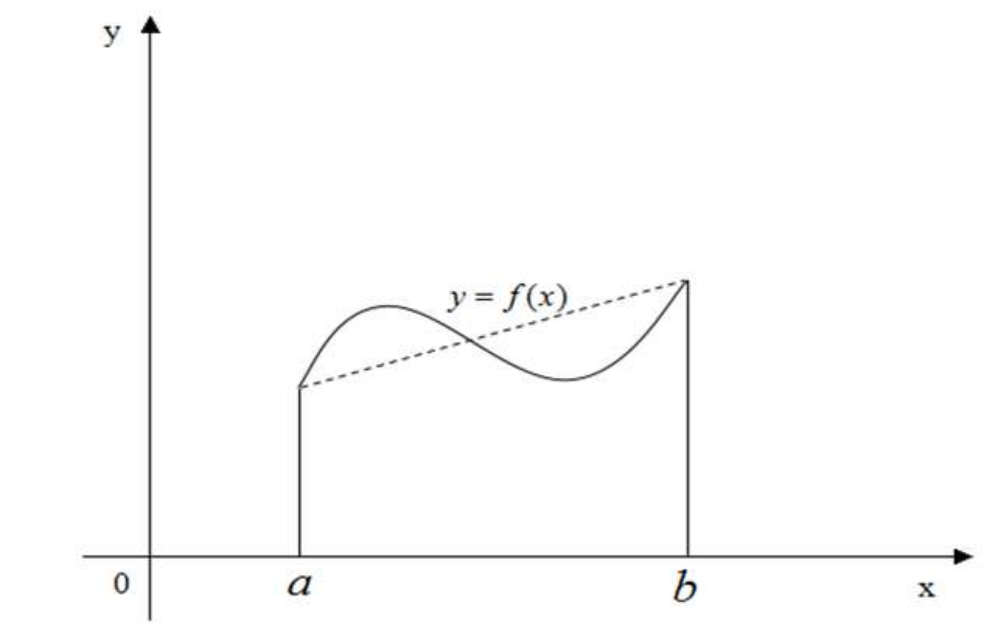


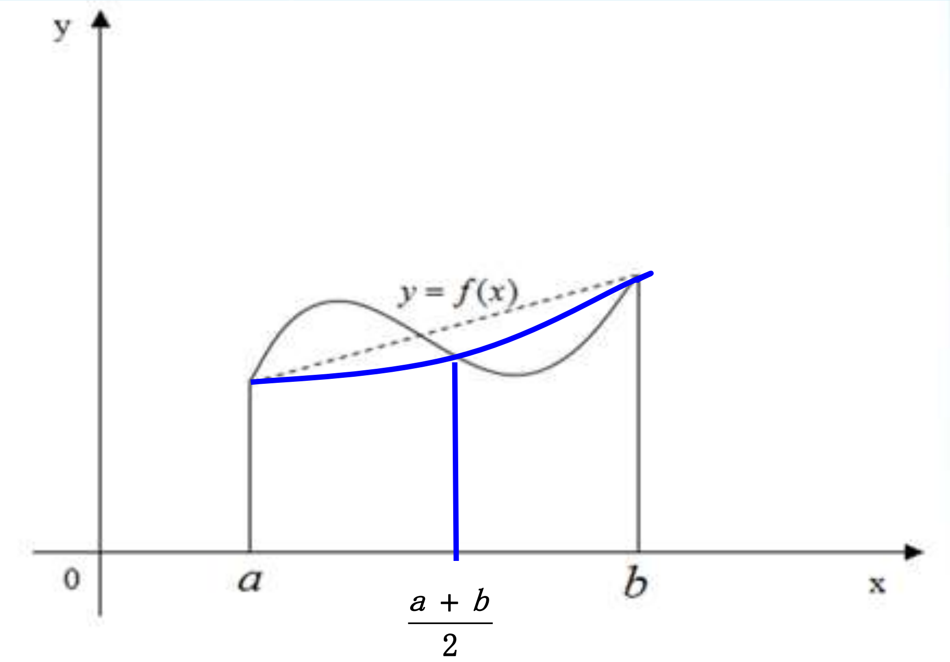
图 7-1-1：梯形公式几何示意图

Simpson公式

当 $n=2$ 时，$C_0^{(2)}=1/6$，$C_1^{(2)}=4/6$，$C_2^{(2)}=1/6$，$h=(b-a)/2$，因此对应的求积公式为：

$$I[f]=\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{6}[f(a)+4f(\frac{a+b}{2})+f(b)] \quad (7.1.8)$$

$$=\frac{h}{3}[f(a)+4f(\frac{a+b}{2})+f(b)]:=S$$



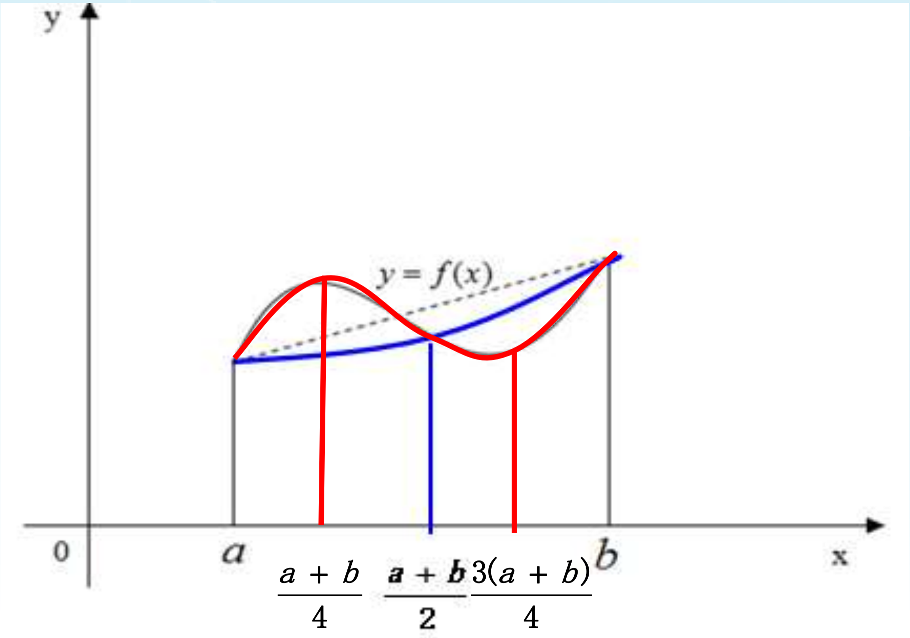
Cotes公式

当 $n=4$ 时，$C_0^{(4)}=7/90$，$C_1^{(4)}=32/90$，$C_2^{(4)}=12/90$，$C_3^{(4)}=32/90$，$C_4^{(4)}=7/90$，

$h=(b-a)/4$，因此对应的求积公式为：

$$I[f]\approx\frac{b-a}{90}[7f(a)+32f(a+h)+12f(a+2h)+32f(a+3h)+7f(b)] \qquad (7.1.9)$$

$$=\frac{2h}{45}[7f(a)+32f(a+h)+12f(a+2h)+32f(a+3h)+7f(b)]:=C$$



例1　分别用梯形公式、Simpson公式和Cotes公式计算定积分 $\int_{0.5}^{1}\sqrt{x}\,\mathrm{d}x$ 的近似值（计算结果取5位有效数字）

（1）　用梯形公式计算

$$\int_{0.5}^{1}\sqrt{x}\,\mathrm{d}x \approx \frac{1-0.5}{2}[f(0.5)+f(1)] = 0.25\times[0.70711+1] = 0.4267767 = 0.426777$$

（2）　用Simpson公式

$$\int_{0.5}^{1}\sqrt{x}\,\mathrm{d}x \approx \frac{1-0.5}{6}[\sqrt{0.5}+4\times\sqrt{(0.5+1)/2}+\sqrt{1}]$$

$$=\frac{1}{12}\times[0.707\,11+4\times0.866\,03+1] = 0.43093403 = 0.43093$$

江南大学

(3) 用Cotes公式计算，系数为

$$\frac{7}{90},\frac{32}{90},\frac{12}{90},\frac{32}{90},\frac{7}{90}$$

$$\int_{0.5}^{1}\sqrt{x}dx \approx \frac{1-0.5}{90}[7\times\sqrt{0.5}+32\times\sqrt{0.625}+12\times\sqrt{0.75}+32\times\sqrt{0.875}+7\times\sqrt{1}]$$

$$\frac{1}{180}\times[4.94975+25.29822+10.39223+29.93326+7]=0.43096$$

积分的准确值为

$$\int_{0.5}^{1}\sqrt{x}dx=\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\Big|_{0.5}^{1}=0.43096441$$

可见，三个求积公式的精度逐渐提高。

江南大学

例 7.1.1：当 $f(x)=1$，x，x^2，x^3，x^4，e^x 时，试分别利用梯形公式，Simpson 公式和 Cotes 公式计算区间 $[0,2]$ 上的积分值。

解：当 $f(x)=1$，x，x^2，x^3，x^4，e^x 时，积分区间 $[0,2]$ 上的梯形公式，Simpson 公式和 Cotes 公式的计算结果见表 7-1-2。

表 7-1-2：例 7.1.1 的计算结果与积分真值表

$f(x)$	1	x	x^2	x^3	x^4	e^x
梯形公式	2	2	4	8	16	8.389
Simpson 公式	2	2	2.667	4	5.667	6.421
Cotes 公式	2	2	2.667	4	6.400	6.389
积分真值	2	2	2.667	4	6.400	6.389

从表 7-1-2 中可以看到：与积分真值相比，当被积函数 $f(x)$ 分别取 1，x，x^2，x^3，x^4 和 e^x 时，Cotes 公式精度最高，Simpson 公式次之，而梯形公式最差。

7.1.3求积公式的误差估计

（1）梯形公式和 Simpson 公式的误差估计

求积公式（7.1.3）的截断误差为：

$$R_n[f]=\int_a^b f(x)dx-\int_a^b L_n(x)dx=\int_a^b R_n(x)dx=\int_a^b \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}w_{n+1}(x)dx \qquad (7.1.4)$$

其中 $\omega_{n+1}(x)=\prod_{j=0}^{n}(x-x_j)$。

当 $n=1$，$R_1[f]=\int_a^b \frac{f''(\eta)}{2!}(x-a)(x-b)dx$ （积分的第二中值定理可得：存在 $\xi\in(a,b)$ ）

$$=\frac{f''(\xi)}{2!}\int_a^b (x-a)(x-b)dx$$

$$=-\frac{f''(\xi)}{12}\cdot(b-a)^3=-\frac{f''(\xi)}{12}\cdot h^3$$

定理 7.1.1： 若 $f(x)\in C^2[a,b]$，则梯形公式（7.1.7）的误差为

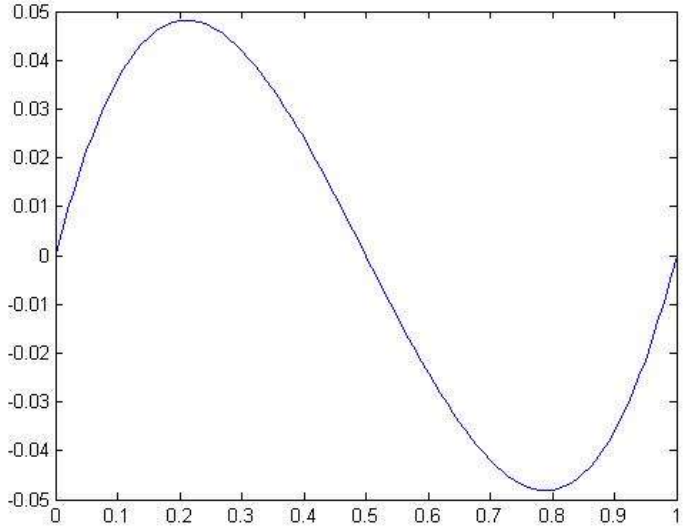
$$R_1[f]=-\frac{f''(\xi)}{12}\cdot h^3$$

其中 $h=b-a$，$\xi\in(a,b)$。

定理 7.1.2： 若 $f(x)\in C^4[a,b]$，则 Simp

$$R_2[f]=-\frac{f^{(4)}(\xi}{90}$$

其中 $h=\frac{b-a}{2}$，$\xi\in(a,b)$。



提示：$\int_a^b (x-a)(x-\frac{a+b}{2})(x-b)dx=0$

类似地，若 $f(x)\in C^6[a,b]$，可以证明 Cotes 公式（7.1.9）的误差为

$$R_4[f]=-\frac{8}{945}f^{(6)}(\xi)\cdot h^7 \qquad (7.1.12)$$

其中 $h=\frac{b-a}{4}$，$\xi\in(a,b)$。

江南大学

代数精度的定义

定义 7.1.1：若当 $f(x)$ 为任意次数不超过 m 的多项式时，求积公式

$$I[f]=\int_a^b f(x)\cdot dx \approx \sum_{k=0}^{n} A_k f(x_k)$$

均严格成立（即无截断误差），而对某个 $m+1$ 次的多项式，上积分公式不严格成立，则称此求积公式具有 m 次代数精度。

注：分别取 $f(x)=x^m, m=0,1,2,\cdots$，逐次检查公式是否精确成立。

一个求积公式能对多大次数的多项式f(x)成为准确等式，是衡量该公式的精确程度的重要指标

江南大学

例 1： 确定求积公式

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx \approx \frac{1}{9}[5f(1)+8f(0)+5f(-1)]$$

的代数精度

解： 因为 当 $f(x)=1$ 时，左 $=\int_{-1}^{1} dx = 2 = \frac{1}{9}[5\cdot 1+8\cdot 1+5\cdot 1] =$ 右

当 $f(x)=x$ 时，左 $=\int_{-1}^{1} xdx = 0 = \frac{1}{9}[5\cdot 1+8\cdot 0+5\cdot(-1)] =$ 右

当 $f(x)=x^2$ 时，左 $=\int_{-1}^{1} x^2dx = \frac{2}{3} \neq \frac{1}{9}[5\cdot 1^2+8\cdot 0^2+5\cdot(-1)^2] = \frac{10}{9} =$ 右

所以此求积公式的代数精度为 1。

例2　试确定一个至少具有2次代数精度的公式

$$\int_0^4 f(x)dx \approx Af(0)+Bf(1)+Cf(3)$$

解：要使公式具有2次代数精度，则对f(x)=1, x, x^2

求积公式准确成立，即得如下方程组。

$$\begin{cases} A+B+C=4 \\ B+3C=8 \\ B+9C=\dfrac{64}{3} \end{cases}$$

解之得，$A=\dfrac{4}{9}$，　$B=\dfrac{4}{3}$，　$C=\dfrac{20}{9}$

所求公式为：$\int_0^4 f(x)dx \approx \frac{1}{9}[4f(0)+12f(1)+20f(3)]$

例3　试确定求积系数A, B, C 使

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx \approx Af(-1) + Bf(0) + Cf(1)$$

具有最高的代数精度

解:分别取f(x)=1, x, x^2 使求积公式准确成立,即得如下方程组。

$$\begin{cases} A + B + C = 2 \\ -A \qquad + C = 0 \\ A \qquad + C = \dfrac{2}{3} \end{cases}$$

所得求积公式为: $\int_{-1}^{1} f(x)dx \approx \frac{1}{3}f(-1) + \frac{4}{3}f(0) + \frac{1}{3}f(1)$

对于f(x)=1, x, x^2, x^3都准确成立,对于f(x)=x^4 就不准确了，所以此求积公式 3 次代数精度。

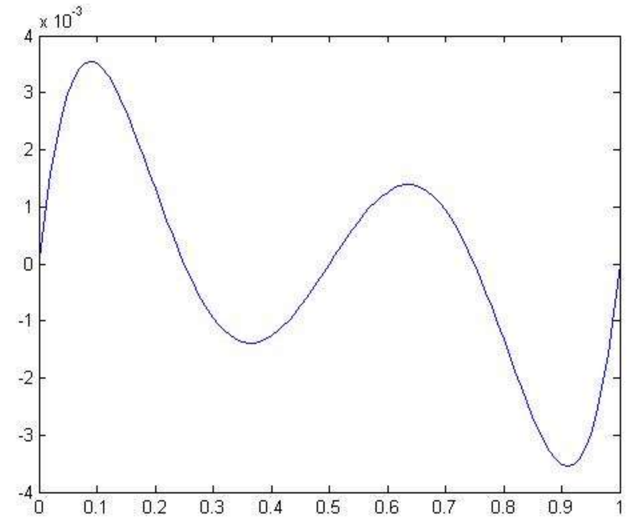
江南大学

插值型求积公式的代数精度

由求积公式截断误差

$$R_n[f]=\int_a^b f(x)dx-\int_a^b L_n(x)dx=\int_a^b R_n(x)dx$$

$\int_a^b f^{(n+1)}(\xi)$)



注：由 n 次插值多项式导出的求积公式至少有

定理 7.1.3： $2n$ 阶 Newton-Cotes 求积公式至少

提示： $\int_a^b w_{2n+1}(x)dx = 0$

注：Simpson 求积公式至少有 3 次代数精度，

Cotes 求积公式至少有 5 次代数精度。

注：当$n \geq 8$时，Newton-Cotes公式不稳定，当$n \to \infty$，Newton-Cotes公式不收敛