第二章 线性方程组的直接解法

第三节 Gauss主元素消去法






例 2.3.1： 解方程组

$$\begin{cases} 0.00001x_1 + 2x_2 = 1 \\ 2x_1 + 3x_2 = 2 \end{cases}$$

准确到小数第 9 位的精确解为：$x_1 = 0.250001875$，$x_2 = 0.499998749$。

若用四位浮点十进制数，按 Gauss 主元素消去法求解，则有：

对增广矩阵作初等变换

$$\begin{pmatrix} 0.00001 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0.00001 & 2 & 1 \\ 0 & -400000 & -200000 \end{pmatrix}$$

回代可解得：$x_2 = 0.5000$, $x_1 = 0.0000$，其结果严重失真。

造成这种现象的原因就是用小主元素带来了大的舍入误差，再经传播，误差变得更大

令 $\delta^1 = |x_1^* - x_1|, \delta^2 = |x_2^* - x_2|$，由原方程组的第一式可得：$10^{-5}(x_1^* - x_1) + 2(x_2^* - x_2) = 0$，或

$\delta_1 = 2 \times 10^5 \delta_2$

2.3.1列主元素法

原线性方程用增广矩阵表示

$$[A,b]=\left[A^{(1)},b^{(1)}\right]=\begin{bmatrix} a_{11}^{(1)}, & a_{12}^{(1)}, & \cdots & a_{1n}^{(1)}, & b_1^{(1)} \\ a_{21}^{(1)}, & a_{22}^{(1)}, & \cdots & a_{2n}^{(1)}, & b_2^{(1)} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1}^{(1)}, & a_{n2}^{(1)}, & \cdots & a_{nn}^{(1)}, & b_n^{(1)} \end{bmatrix} \qquad (2.3.1)$$

列主元素法的具体步骤如下：

第一步： 在第一列中选取绝对值最大的元，$\left|a_{p1}^{(1)}\right| = \max\limits_{1\le i\le n}\left\{\left|a_{i1}^{(1)}\right|\right\}$，将（2.3.1）中第一行与第 p 行互换。为方便起见，记行互换后的增广矩阵仍为$\left[A^{(1)},b^{(1)}\right]$，然后进行消去法的第一步

$$\left[A^{(2)},b^{(2)}\right]=\begin{bmatrix} a_{11}^{(1)}, & a_{12}^{(1)}, & \cdots & a_{1n}^{(1)}, & b_1^{(1)} \\ & a_{22}^{(2)}, & \cdots & a_{2n}^{(2)}, & b_2^{(2)} \\ & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ & a_{n2}^{(2)}, & \cdots & a_{nn}^{(2)}, & b_n^{(2)} \end{bmatrix}$$

第二步： 在矩阵$\left[A^{(2)},b^{(2)}\right]$的第二列元素$a_{i2}^{(2)}$（$i=2,\cdots,n$）中选主元素$a_{q2}^{(2)}$，使$\left|a_{q2}^{(2)}\right|=\max\limits_{2\le j\le n}\left\{\left|a_{j2}^{(2)}\right|\right\}$，将矩阵$\left[A^{(2)},b^{(2)}\right]$的第二行与第$q$行互换，再进行第二步消元，得矩阵$\left[A^{(3)},b^{(3)}\right]$。

如此经过$n-1$步，增广矩阵（2.3.1）将被化为上三角形形式：

$$\left[A^{(n)},b^{(n)}\right]=\begin{bmatrix} a_{11}^{(1)}, & a_{12}^{(1)}, & a_{13}^{(1)}, & \cdots & a_{1n}^{(1)}, & b_1^{(1)} \\ & a_{22}^{(2)}, & a_{23}^{(2)}, & \cdots & a_{2n}^{(2)}, & b_2^{(2)} \\ & & a_{33}^{(3)} & \cdots & a_{3n}^{(3)} & b_3^{(3)} \\ & & & \ddots & \vdots & \vdots \\ & & & & a_{nn}^{(n)} & b_n^{(n)} \end{bmatrix}$$

其对应的三角形方程组为：$A^{(n)}x=b^{(n)}$，由最后一个方程开始逐次回代就得到全部解。

我们用Gauss列主元素法再解例2.3.1，第一列应选2为主元，作行交换得：

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = 2 \\ 10^{-4} \times 0.1000 x_1 + 2x_2 = 1 \end{cases}$$

对增广矩阵作初等变换

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 0.00001 & 2 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

回代可得：$x_2 = 0.5000, x_1 = 0.2500$

例 1 用 Gauss 列主元素消去法解方程组

$$\begin{bmatrix} -3 & 2 & 6 \\ 10 & -7 & 0 \\ 5 & -1 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 4 \\ 7 \\ 6 \end{bmatrix}.$$

解 第一步列主元为 10.

先将第一行与第二行交换,再消去 x_1,得

$$\begin{bmatrix} 10 & -7 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{10} & 6 \\ 0 & \frac{5}{2} & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 7 \\ \frac{61}{10} \\ \frac{5}{2} \end{bmatrix}.$$

第二步列主元为$\frac{5}{2}$.

将第二行与第三行交换，再消去 x_2，得

$$\begin{bmatrix} 10 & -7 & 0 \\ 0 & \frac{5}{2} & 5 \\ 0 & 0 & \frac{31}{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ \frac{5}{2} \\ \frac{31}{5} \end{bmatrix}$$

回代求解得 $x_3=1$，$x_2=-1$，$x_1=0$.

2.3.2全元素法

如果不是按列选主元，而是在全体待选系数$a_{ij}^{(k)}$（$i,j=k,k+1,\dots,n$）中选取主元，所得到的就是全主元素法

第一步：在全体系数$a_{ij}^{(1)}$（$i,j=1,2,\dots,n$）中选的绝对值最大的元素作为主元，并通过行与列的互换把这个元素换到$a_{11}^{(1)}$的位置上，并进行第一次消元，可得到矩阵$\left[A^{(2)},b^{(2)}\right]$

第二步：在$\left[A^{(2)},b^{(2)}\right]$中$a_{ij}^{(2)}$（$i,j=2,3,\dots,n$）中选的绝对值最大的元素作为主元，类似于第一步的操作，作第二次消元，可得矩阵$\left[A^{(3)},b^{(3)}\right]$；

如此继续下去，直到进行了$n-1$次消元后，得到与方程组（2.1.1）同解的上三角形方程组，再由回代过程求解。

江南大学

例 2.3.2： 用全元素法，求解线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 6 \\ 12x_1 - 3x_2 + 3x_3 = 15 \\ -18x_1 + 3x_2 - x_3 = -15 \end{cases}$$

计算过程中保留 3 位小数。

解：记 $\left[A^{(1)}, b^{(1)}\right] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 12 & -3 & 3 & 15 \\ -18 & 3 & -1 & -15 \end{bmatrix}$。按全元素法，其求解过程如下：

（1）交换 $\left[A^{(1)}, b^{(1)}\right]$ 第 1 和第 3 两行可得

$$\begin{bmatrix} -18 & 3 & -1 & -15 \\ 12 & -3 & 3 & 15 \\ 1 & 1 & 1 & 6 \end{bmatrix};$$

江南大学

（2）在（1）的基础上，进行第 1 次消元可得：

$$\left[A^{(2)}, b^{(2)}\right]=\begin{bmatrix} -18 & 3 & -1 & -15 \\ 0 & -1 & 2.333 & 5 \\ 0 & 1.167 & 0.944 & 5.167 \end{bmatrix};$$

（3）交换 $\left[A^{(2)}, b^{(2)}\right]$ 第 2 和第 3 两列可得

$$\begin{bmatrix} -18 & -1 & 3 & -15 \\ 0 & 2.333 & -1 & 5 \\ 0 & 0.944 & 1.167 & 5.167 \end{bmatrix};$$

（4）在（3）的基础上，进行第 2 次消元可得：

$$\left[A^{(3)}, b^{(3)}\right]=\begin{bmatrix} -18 & -1 & 3 & -15 \\ 0 & 2.333 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 1.572 & 3.144 \end{bmatrix}。$$

由回代过程可求：$x_2=2.000, x_3=3.000, x_1=1.000$

江南大学

列全主元素法比较

例2 用八位浮点十进制解方程组

$$\begin{cases} 10^{-9}x_1 + x_2 = 1 \\ x_1 + x_2 = 2 \end{cases}$$

精确解为 $x_1 = 1.00000000100\cdots, x_2 = 0.99999999899\cdots$

$$\begin{pmatrix} 10^{-9} & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{l_{21}=10^9} \begin{pmatrix} 10^{-9} & 1 & 1 \\ 0 & -10^9 & -10^9 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow x_2 = 1, x_1 = 0(Gauss\text{消去法})$$

$$\begin{pmatrix} 10^{-9} & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 10^{-9} & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{l_{21}=10^{-9}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow x_2 = 1, x_1 = 1\text{（列主元素法）}$$

例3 该方程组的等价形式

$$\begin{cases} x_1 + 10^9 x_2 = 10^9 \\ x_1 + x_2 = 2 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 10^9 & 10^9 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{列主元素法}} \begin{pmatrix} 1 & 10^9 & 10^9 \\ 0 & -10^9 & -10^9 \end{pmatrix} \Rightarrow x_2 = 1, x_1 = 0$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 10^9 & 10^9 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{完全元素法}} \begin{pmatrix} 10^9 & 1 & 10^9 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 10^9 & 1 & 10^9 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow x_1 = 1, x_2 = 1$$

江南大学

列主元素法：比 Gauss 消去法略稳定，但不保证稳定，是求解中小型稠密线性方程组的最好直接解法之一

全主元素法：列变换改变了 x_i 的顺序，须记录交换次序，解完后再换回来，因而程序比较复杂，且计算时间较长，但保证稳定