《 数值分析 》期末考试卷 （A、B）

使用专业、班级__________ 学号____________ 姓名________________

题 数	一	二	三	四	五	六	七	总 分
得 分								

本题得分	

一、填空题 〖每空×分，共计××分〗

1. 方程 $2^x-4x=0$ 的 Newton 迭代格式是 $x_{k+1}=x_k-\frac{2^{x_k}-4x_k}{2^{x_k}\ln 2-4}$

2. Newton-Cotes 公式的系数和 $\sum_{k=0}^{n}C_k^{(n)}=$ 1 。

3. Simpson 公式具有 3 次代数精度。

4. 用改进 Euler 法求解初值问题 $\begin{cases} y'=-2y+x^2+1 \\ y(1)=0 \end{cases}$ 的数值解，取h = 1.2时，算法是 不稳定 。（稳定或不稳定）

5. 若 x^* 是函数 $f(x)$ 的 m 重根，则满足 $f(x^*)=f'(x^*)=\cdots=f^{(m-1)}(x^*)=0$ 且 $f^{(m)}(x^*)\neq 0$ 。

6. 解一阶常微分方程初值问题的改进 Euler 法具有 2 阶精度。

本题得分	

二、单选题 〖每个×分，共计××分〗

1. 设 x^* 为方程 $x=\varphi(x)$ 的不动点，$\varphi'(x)$ 在 x^* 的邻近连续且(A),则不动点迭代法 $x_{k+1}=\varphi(x_k)$ 在 x^* 邻近具有局部收敛性。

A $|\varphi'(x^*)|<1$　　B $0<|\varphi'(x^*)|<1$

C $\varphi'(x^*)<1$　　D $\varphi'(x^*)\le 1$

2. 下列哪种说法正确(C)。

A Gauss-seidel 迭代法比 Jacobi 迭代法收敛快

B 等距节点多项式插值次数越高逼近效果越好

C 线性方程组的基本迭代法性质取决于迭代矩阵，与初值选取无关

D 非线性方程的基本迭代法性质取决于迭代函数，与初值选取无关

3. 显式 Euler 方法的绝对稳定区间是（ A ）。

A $-2\le\lambda h\le 0$　　B $-2.51\le\lambda h\le 0$

C $-2.785\le\lambda h\le 0$　　D $-\infty<\lambda h\le 0$

4. 迭代法 $x_{k+1}=\frac{2}{3}x_k+\frac{1}{x_k^2}$ 收敛于 $x^*=\sqrt[3]{3}$，此迭代序列是（ B ）阶收敛的。

A 一阶　　B 二阶

C 三阶　　D 四阶

考试形式开卷（ ）、闭卷（ ），在选项上打（√）

开课教研室_________ 命题教师_________ 命题时间_________ 使用学期_________ 总张数_________ 教研室主任审核签字_________

本题得分	

三、确定以下求积公式中的求积系数，使其代数精度尽量高，并指明所构造的求积公式所具有的代数精度：

$$\int_{-2h}^{2h} f(x)dx \approx A_{-1}f(-h)+A_0 f(0)+A_1 f(h)$$

取 $f(x)=1, x, x^2$ 代入得

$\int_{-2h}^{2h} 1\,dx = 4h = A_{-1}+A_0+A_1$

$\int_{-2h}^{2h} x\,dx = 0 = A_{-1}(-h)+A_1 h$ 　　得 $A_{-1}=A_1=\frac{8}{3}h$

$\int_{-2h}^{2h} x^2 dx = \frac{16}{3}h^3 = A_{-1}(-h)^2 + A_1 h^2$ 　　$A_0 = -\frac{4}{3}h$.

求积公式为 $\int_{-2h}^{2h} f(x)dx \approx \frac{8}{3}hf(-h) - \frac{4}{3}hf(0) + \frac{8}{3}hf(h)$

取 $f(x)=x^3$ 代入

左边 $= \int_{-2h}^{2h} x^3 dx = 0$，右边 $= \frac{8}{3}h(-h)^3 + \frac{8}{3}h\cdot h^3 = 0$

取 $f(x)=x^4$ 代入

左边 $= \int_{-2h}^{2h} x^4 dx = \frac{64}{5}h^5$，右边 $= \frac{8}{3}h(-h)^4 + \frac{8}{3}h\cdot h^4 = \frac{16}{3}h^5$

左边 $\neq$ 右边

所以求积公式代数精度 3

本题得分	

四、用 Romberg 求积公式计算 $\int_1^3 \frac{dx}{x}$，要求误差不超过 $\frac{1}{2}\times 10^{-4}$

$T_1 = \frac{b-a}{2}[f(a)+f(b)] = \frac{2}{2}[\frac{1}{1}+\frac{1}{3}] = \frac{4}{3} \approx 1.33333$

$T_2 = \frac{T_1}{2} + \frac{b-a}{2} f(x_1) = \frac{T_1}{2} + f(2) \approx 1.16667$

$T_4 = \frac{T_2}{2} + \frac{b-a}{4}(f(x_1)+f(x_3)) = \frac{T_2}{2} + \frac{2}{4}(f(\frac{3}{2})+f(\frac{5}{2}))$

$= \frac{67}{60} \approx 1.11667$

$T_8 = \frac{T_4}{2} + \frac{b-a}{8}[f(x_1)+f(x_3)+f(x_5)+f(x_7)]$

$= \frac{T_4}{2} + \frac{2}{8}(f(\frac{5}{4})+f(\frac{7}{4})+f(\frac{9}{4})+f(\frac{11}{4})) = \frac{1193}{1080}$

≈ 1.10463

列表 Romberg 求积

1.33333			
1.16667	1.11112		
1.11667	1.10000	1.09926	
1.10463	1.10062	1.10066	1.10068

本题得分	

五、用梯形公式求初值问题

$$\begin{cases} y' = -y \\ y(0) = 1 \end{cases}, 0 \le x \le 1$$

证明其近似解为$y_k = (\frac{2-h}{2+h})^k$，并且当h → 0时，收敛于该初值问题的精确解$y(x) = e^{-x}$。

梯形公式

$y_{k+1} = y_k + \frac{h}{2}[f(x_k, y_k) + f(x_{k+1}, y_{k+1})]$

$= y_k + \frac{h}{2}(-y_k - y_{k+1})$

得 $(1+\frac{h}{2})y_{k+1} = (1-\frac{h}{2})y_k$, $y_{k+1} = \frac{2-h}{2+h} y_k$

则 $y_k = (\frac{2-h}{2+h})^k y_0 = (\frac{2-h}{2+h})^k$

因为 $x_k = kh$，则

$\lim\limits_{h\to 0} y_k = \lim\limits_{h\to 0} (\frac{2-h}{2+h})^{\frac{x_k}{h}} = \lim\limits_{h\to 0}(1-\frac{2h}{2+h})^{(-\frac{2+h}{2h})(-\frac{2x_k}{2+h})}$

$= \lim\limits_{h\to 0} e^{-x_k}$

本题得分	

六、证明解 $f(x) = (x^3 - a)^2 = 0$ Newton 迭代公式是线性收敛的。

Newton迭代公式 $x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} = x_k - \frac{(x_k^3 - a)^2}{6(x_k^3 - a)x_k^2}$

$= x_k - \frac{x_k^3 - a}{6x_k^2}$

则 $\varphi(x) = x - \frac{x^3 - a}{6x^2} = \frac{5}{6}x + \frac{a}{6x^2}$，不动点 $x^* = \sqrt[3]{a}$

(1) $a \neq 0$ 时

$\varphi'(x) = \frac{5}{6} + \frac{a}{6}(-\frac{2}{x^3}) = \frac{5}{6} - \frac{a}{3x^3}$

$\varphi'(x^*) = \frac{5}{6} - \frac{a}{3a} = \frac{1}{2} \neq 0$，则 $0 < |\varphi'(x^*)| < 1$ 线性收敛

(2) $a = 0$ 时，$\varphi(x) = \frac{5}{6}x$，$\varphi'(x) = \frac{5}{6}$，则 $0 < |\varphi'(x^*)| < 1$ 线性收敛.

本题得分	

七、求改进 Euler 法的绝对稳定区间。

模型方程 $y' = \lambda y$，$\lambda < 0$

改进Euler法 $y_{k+1} = y_k + \frac{h}{2}[f(x_k, y_k) + f(x_{k+1}, \cancel{y_k + hf(x_k)})\ y_k + hf(x_k, y_k)]$

$= y_k + \frac{h}{2}[\lambda y_k + \lambda(y_k \cancel{+hf(x_k)} + hf(x_k, y_k))]$.

$= y_k + \frac{h}{2}[\lambda y_k + \lambda(y_k + \lambda h y_k)]$

$= y_k + \lambda h y_k + \frac{(\lambda h)^2}{2} y_k$

$= (1 + \lambda h + \frac{(\lambda h)^2}{2}) y_k$

$= E(\lambda h) y_k$

令 $|E(\lambda h)| \le 1$ 即 $|1 + \lambda h + \frac{(\lambda h)^2}{2}| \le 1$，得

$-2 \le \lambda h \le 0$