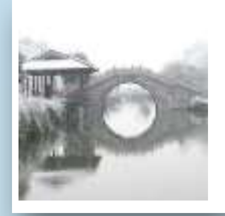
江南大学

第九章 常微分方程数值解法



常微分方程定义

包含自变量、未知函数及未知函数的导数或微分的方程称为微分方程。在微分方程中，自变量的个数只有一个，称为常微分方程。自变量的个数为两个或两个以上的微分方程叫偏微分方程。微分方程中出现的未知函数最高阶导数的阶数称为微分方程的阶数。

但能求解的常微分方程仍然是有限的，大多数的常微分方程是不可能给出解析解。譬如

$$y' = x^2 + y^2$$

一阶常微分方程

一阶常微分方程的初值问题

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = f(x,y), \quad a \le x \le b \\ y(a) = y_0 \end{cases} \qquad (9.0.1)$$

函数 $f(x,y)$ 连续，且关于 y 满足利普希兹(Lipschitz)条件，即存在常数 L，使得

$$|f(x,y) - f(x,\bar{y})| \le L|y - \bar{y}|$$

则初值问题（9.0.1）的**解存在且唯一**

常微分方程数值求解

所谓**微分方程的数值解法**，求问题(9.0.1)的解 $y(x)$ 在一系列节点

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_N = b$$

处的近似值 $y(x_k)$ 的近似值 y_k（$k = 1, 2, \cdots, N$）的方法。

节点间距 $h_k = x_{k+1} - x_k$ 称为由 x_k 到 x_{k+1} 的步长（$k = 1, 2, \cdots, N$）

通常用**等距节点**，即 $h_k = h$，即 $x_k = x_0 + kh$，其中 $x_0 = a$，$h = \dfrac{b-a}{N}$

数值解法需要把连续性的问题加以离散化，从而求出离散节点的数值解。

数值求解方法的分类——导数方法

（1）差商近似导数的方法

向前差商 $\dfrac{y(x_{k+1})-y(x_k)}{h}$ 替代 $y'(x_k)$ 代入(9.0.1)

$$\frac{y(x_{k+1})-y(x_k)}{h}\approx f(x_k,y(x_k))\quad（k=0,1,\cdots）$$

化简得 $$y(x_{k+1})\approx y(x_k)+hf(x_k,y(x_k))\quad（k=0,1,\cdots）$$

用近似值 $y_k\approx y(x_k)$，则

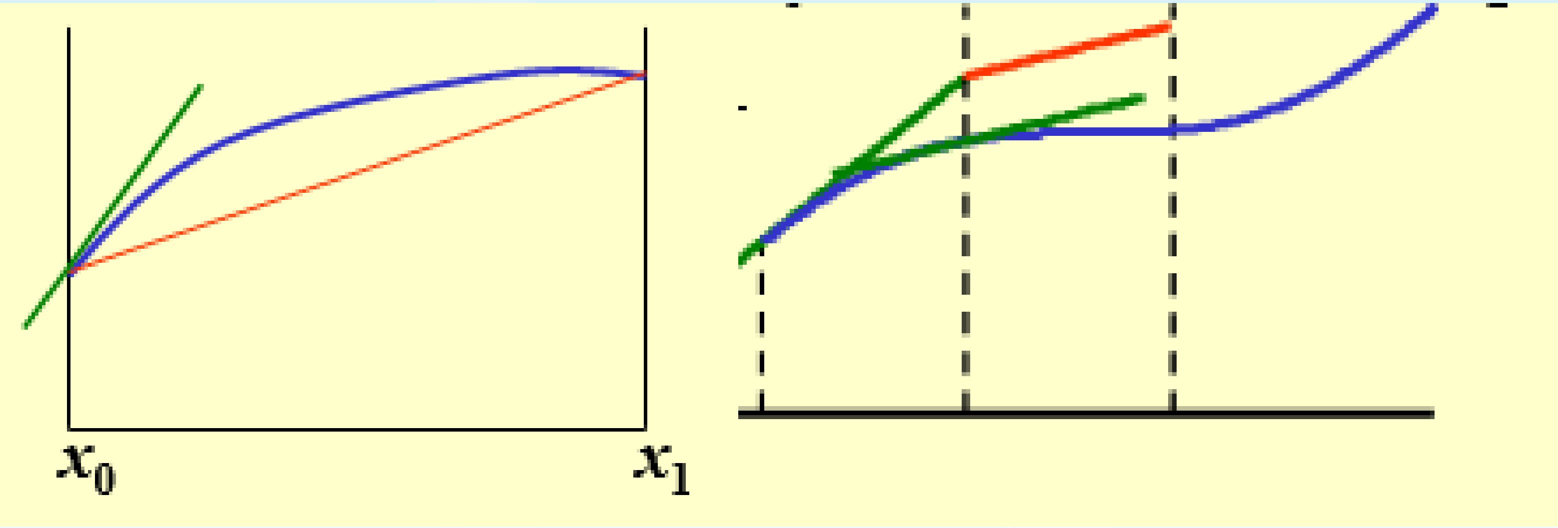
$$y_{k+1}=y_k+hf(x_k,y_k)\quad（k=0,1,\cdots）\qquad（9.0.2）$$

数值求解方法的分类——导数方法

初值问题（9.0.1）就转化为下列的离散化格式问题

$$\begin{cases} y_{k+1} = y_k + hf(x_k, y_k) \\ y_0 = y(a) \end{cases} \quad (k = 0, 1, \cdots) \qquad (9.0.3)$$

式（9.0.3）也称为初值问题（9.0.1）的**差分方程初值问题**。



几何解释

数值求解方法的分类——积分方法

（2）数值积分方法

对初值问题（9.0.1）的微分方程两端积分，可得

$$y(x_{k+1})-y(x_k)=\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x,y(x))dx \quad（k=0,1,\cdots） \qquad （9.0.4）$$

右端积分采用取左端点的矩形公式，即

$$\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x,y(x))dx \approx hf(x_k,y_k)$$

用近似值 $y_k \approx y(x_k)$，则

$$y_{k+1}=y_k+hf(x_k,y_k) \quad（k=0,1,\cdots）$$

数值求解方法的分类——Taylor近似方法

（3）Taylor 多项式近似法

$$\boxed{y(x_{k+1}) = y(x_k + h) \approx y(x_k) + hy'(x_k)} = y(x_k) + hf(x_k, y(x_k))$$

用近似值 $y_k \approx y(x_k)$，则

$$y_{k+1} = y_k + hf(x_k, y_k) \quad (k = 0, 1, \cdots)$$

第九章 常微分方程数值解法

第一节 Euler方法与改进的Euler方法

9.1.1 Euler方法

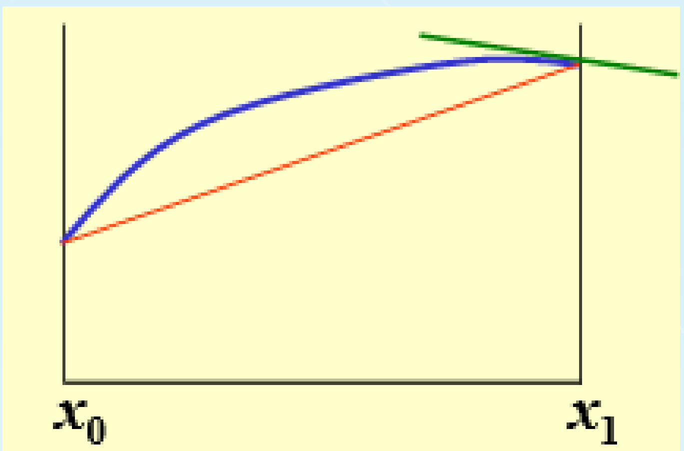
向前差商 $\dfrac{y(x_{k+1})-y(x_k)}{h}$ 近似导数 $y'(x_k)$ 求问题(9.0.1)的数值解称为 Euler 方法

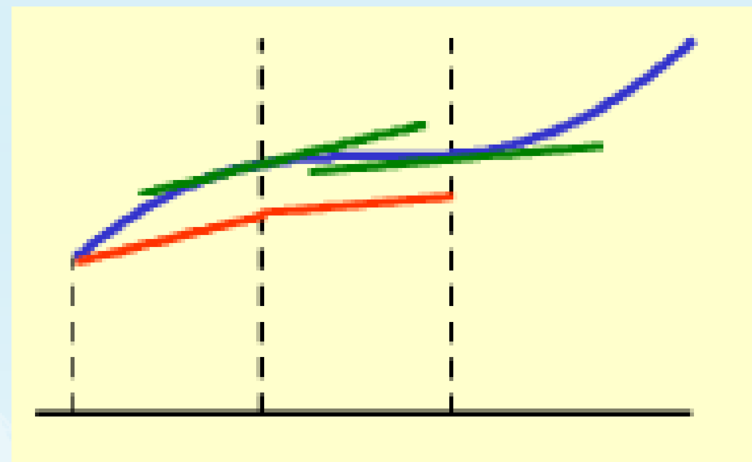
$$\begin{cases} y_{k+1}=y_k+hf(x_k,y_k) \\ y_0=y(a) \end{cases} \quad (k=0,1,\cdots) \qquad (9.1.1)$$

向后差商 $\dfrac{y(x_{k+1})-y(x_k)}{h}$ 近似导数 $y'(x_{k+1})$ 求问题(9.0.1)的数值解称为向后 Euler 方法

$$\begin{cases} y_{k+1}=y_k+hf(x_{k+1},y_{k+1}) \\ y_0=y(a) \end{cases} \quad (k=0,1,\cdots) \qquad (9.1.2)$$

向后Euler法的几何解释





隐式法的迭代求解

由于未知量 y_{k+1} 同时出现在**向后 Euler 公式**左右两端不能直接求得，向后 Euler 方法也称为 Euler 隐式法

一般 Euler 隐式法可用如下的迭代公式求解

$$\begin{cases} y_{k+1}^{(0)} = y_k + hf(x_k, y_k) \\ y_{k+1}^{(n+1)} = y_k + hf(x_{k+1}, y_{k+1}^{(n)}) \end{cases} \quad (n = 0,1,2,\cdots) \qquad (9.1.3)$$

一般在实际计算时，取 $n=0$。第一个式子给出的值 $y_{k+1}^{(0)}$ 称为 y_{k+1} 的**预测值**，第二个式子给出的值 $y_{k+1}^{(1)}$ 称为 y_{k+1} 的**校正值**，相应的方法也称为**预测-校正法**

注：隐式法中的非线性方程也可采用二分法，newton法求解

Euler法求解例题

例 9.1.1： 给定初值问题

$$\begin{cases} y' = -2y - 4x, & (0 \le x \le 1) \\ y(0) = 2 \end{cases}$$

取 $h = 0.1$。试用显式 Euler 法和隐式 Euler 法求初值问题的数值解，并与精确解进行比较。

解： 由于初值问题中的微分方程为线性微分方程，容易求得其**精确解**为

$$y = y(x) = e^{-2x} - 2x + 1 \quad (0 \le x \le 1)$$

显式 Euler 迭代公式为

$$y_{k+1} = y_k + hf(x_k, y_k) = (1-2h)y_k - 4hx_k$$

隐式 Euler 迭代公式为

$$y_{k+1} = y_k + hf(x_{k+1}, y_{k+1}) = y_k - 4hx_{k+1} - 2hy_{k+1}，\text{即 } y_{k+1} = \frac{y_k - 4hx_{k+1}}{1+2h}$$

取 $h=0.1$，计算结果见表 9-1-1。

表 9-1-1：例 9.1.1 的 Euler 法与精确解的比较表

x_k	显式 Euler 法	隐式 Euler 法	精确解
0.0	2.000000	2.000000	2.000000
0.1	1.600000	1.633333	1.678131
0.2	1.240000	1.294444	1.270320
0.3	0.912000	0.978704	0.948812
0.4	0.609600	0.682253	0.649329
0.5	0.327680	0.401878	0.367879
0.6	0.062144	0.134898	0.101194
0.7	-0.190285	-0.120918	-0.153403
0.8	-0.432228	-0.367432	-0.398103
0.9	-0.665782	-0.606193	-0.634701
1.0	-0.892626	-0.838494	-0.864665

与精确解相比，显式 Euler 法和隐式 Euler 法的精度都不高

9.1.2 Euler方法的误差估计

单步法的一般形式为

$$y_{k+1} = y_k + h\varphi(x_k, y_k, x_{k+1}, y_{k+1}, h) \qquad (9.1.4)$$

定义 9.1.2： 在不考虑舍入误差的情况下，问题式（9.1）的精确解 $y(x_{k+1})$ 与数值解 y_{k+1} 之差称为整体截断误差，记为

$$e_{k+1} = y(x_{k+1}) - y_{k+1}$$

定义 9.1.1： 设 $y(x)$ 是问题（9.1）的精确解，则

$$R_{k+1} = y(x_{k+1}) - y(x_k) - h\varphi(x_k, y(x_k), x_{k+1}, y(x_{k+1}), h) \qquad (9.1.5)$$

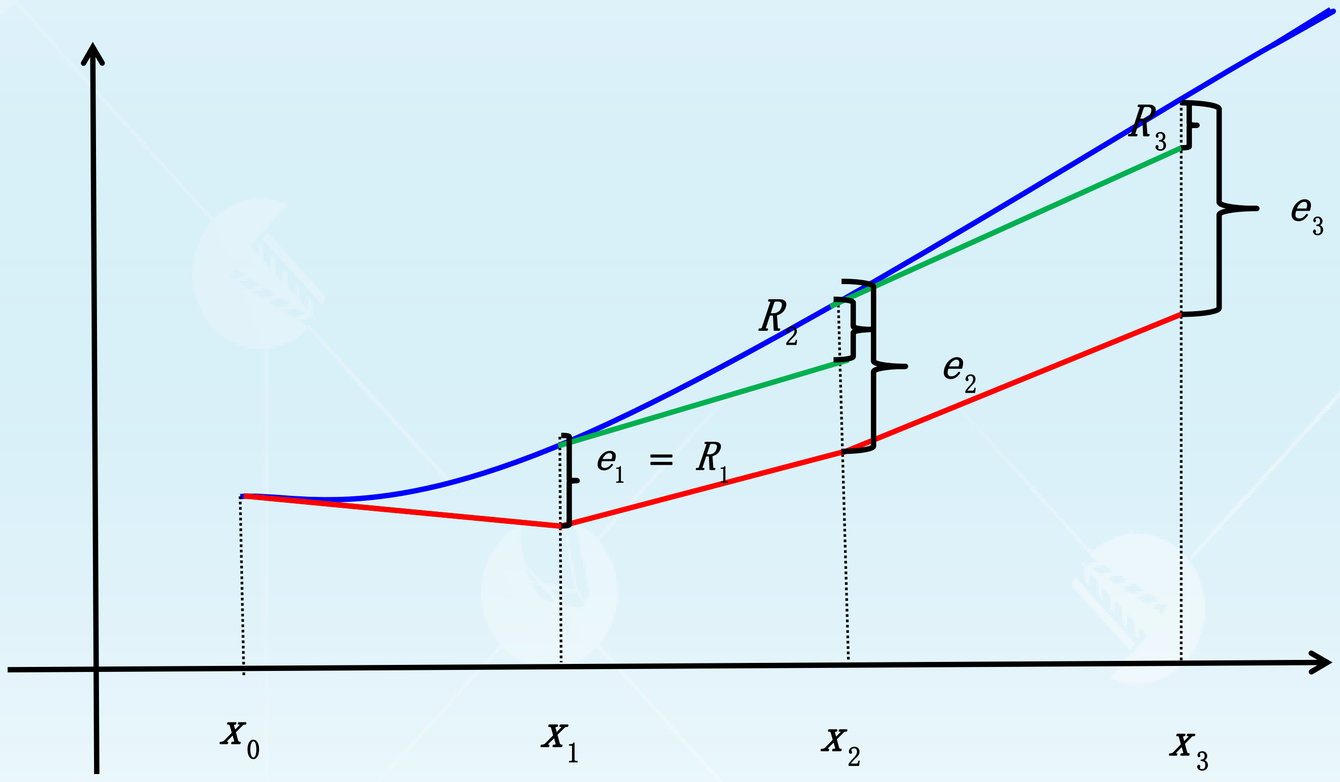
称为单步法（9.1.4）的局部截断误差，简称截断误差。

注：记 $\bar{y}_{k+1} = y(x_k) - h\varphi(x_k, y(x_k), x_{k+1}, y(x_{k+1}), h)$，

则整体误差 $e_{k+1} = \underbrace{y(x_{k+1}) - \bar{y}_{k+1}}_{R_{k+1}} + \bar{y}_{k+1} - y_{k+1}$

江南大学

整体误差和局部误差说明



Euler方法的局部误差

如 Euler 法是显式的，且

$$\varphi(x_k, y_k, x_{k+1}, y_{k+1}, h) = f(x_k, y_k)$$

而向后 Euler 方法是隐式的，且

$$\varphi(x_k, y_k, x_{k+1}, y_{k+1}, h) = f(x_{k+1}, y_{k+1})$$

Euler 法的局部截断误差

$$R_{k+1} = y(x_{k+1}) - y(x_k) - hf(x_k, y(x_k)) = y(x_k + h) - y(x_k) - hy'(x_k)$$

$$= \frac{1}{2}h^2 y''(x_k) + O(h^3) = O(h^2)$$

江南大学

向后Euler方法的局部误差

向后 Euler 法的局部截断误差

$$R_{k+1}=y(x_{k+1})-y(x_k)-hf(x_{k+1},y(x_{k+1}))=y(x_k+h)-y(x_k)-hy'(x_k+h)$$

$$=y(x_k+h)-y(x_k)-h[y'(x_k)+y''(x_k)h+O(h^2)]$$

$$=\frac{1}{2}h^2y''(x_k)+O(h^3)-h^2y''(x_k)$$

$$=-\frac{1}{2}h^2y''(x_k)+O(h^3)=O(h^2)$$

Euler方法的整体误差

$$e_{k+1}=y(x_{k+1})-\overline{y}_{k+1}+\overline{y}_{k+1}-y_{k+1}$$

$$\leq R_{k+1}+e_k-h(\varphi(x_k,y(x_k),x_{k+1},y(x_{k+1}),h)-\varphi(x_k,y_k,x_{k+1},y_{k+1},h))$$

$$\leq R_{k+1}+e_k-h(f(x_k,y(x_k))-f(x_k,y_k))$$

$$\boxed{|e_{k+1}|\leq|R_{k+1}|+(1+hL)|e_k|}$$

$$\leq|R_{k+1}|+(1+hL)|R_k|+\cdots+(1+hL)^{k-1}|R_2|+(1+hL)^k|e_1|$$

$$O(1/h)$$

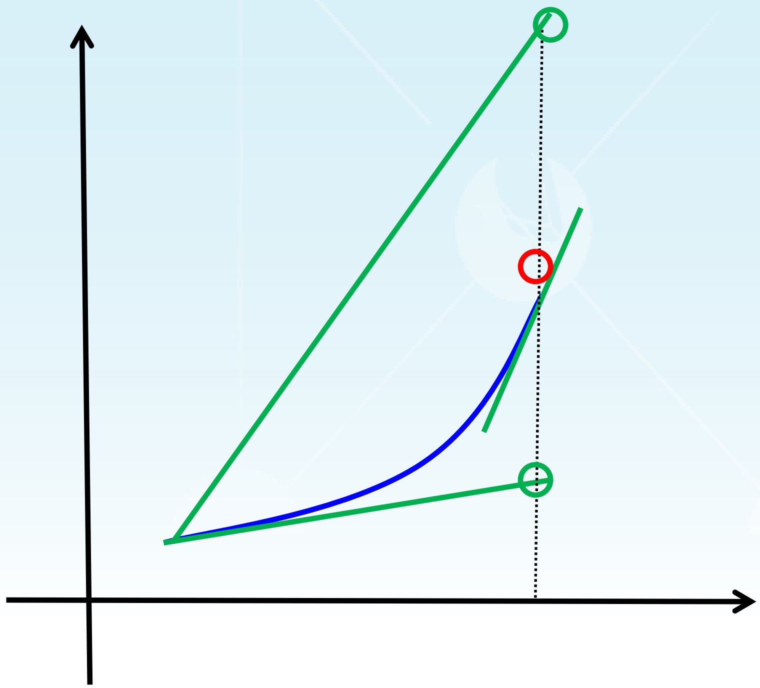
$$\leq\frac{Mh^2}{2}\boxed{\sum_{n=0}^{k}(1+hL)^n}\leq\frac{hM(e^{L(b-a)}-1)}{2L}$$

注：其中$e_1=R_1$，Euler方法的局部误差$|R_{k+1}|=|\frac{h^2}{2}f''(\xi_k)|\leq\frac{h^2}{2}M$

梯形格式

Euler 法和向后 Euler 法的算术平均是**梯形格式**

$$y_{k+1}=y_k+\frac{h}{2}[f(x_k,y_k)+f(x_{k+1},y_{k+1})] \qquad (9.1.8)$$



梯形格式的局部误差

数值积分方法将微分方程离散化时，若用梯形公式计算式（9.4）中之右端积分，即

$$\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x, y(x))dx \approx \frac{h}{2}[f(x_k, y(x_k)) + f(x_{k+1}, y(x_{k+1}))]$$

亦可得梯形公式

$$y_{k+1} = y_k + \frac{h}{2}[f(x_k, y_k) + f(x_{k+1}, y_{k+1})] \qquad (9.1.8)$$

$$R_{k+1} = y(x_{k+1}) - y(x_k) - \frac{h}{2}[f(x_k, y(x_k)) + f(x_{k+1}, y(x_{k+1}))]$$

$$= -\frac{h^3}{12} y'''(\xi)$$ （利用梯形公式的误差（7.1.10））

9.1.3 改进的Euler方法

梯形公式也是**隐式格式**，一般需用迭代法求解，迭代公式为

$$\begin{cases} y_{k+1}^{(0)} = y_k + hf(x_k, y_k) \\ y_{k+1}^{(n+1)} = y_k + \dfrac{h}{2}[f(x_k, y_k) + f(x_{k+1}, y_{k+1}^{(n)})] \end{cases} \quad (n = 0, 1, \cdots) \qquad (9.1.9)$$

用公式（9.1.9）求解时，每步只迭代一次，即采用**预测-校正法**

于是就可导出一种新的方法——**改进的 Euler 法**

$$\begin{cases} \bar{y}_{k+1} = y_k + hf(x_k, y_k) \\ y_{k+1} = y_k + \dfrac{h}{2}[f(x_k, y_k) + f(x_{k+1}, \bar{y}_{k+1})] \end{cases} \qquad (9.1.10)$$

为便于编制程序上机，式（9.1.10）常改写成

$$
\begin{cases}
y_p = y_k + hf(x_k, y_k) \\
y_q = y_k + hf(x_k + h, y_p) \\
y_{k+1} = (y_p + y_q)/2
\end{cases}
\tag{9.1.11}
$$

方法	优点	缺点
Euler 方法（9.1.1）	计算简单	阶数低
向后 Euler 方法（9.1.2）	稳定性最好	阶数低，计算量大
梯形方法（9.1.8）	阶数提高	计算量大
改进的 Euler 法（9.1.10）	阶数提高，计算简单	稳定性介于 Euler 法和向后 Euler 法间

注：Euler方法和向后Euler方法是一阶的，梯形方法和改进的Euler法是二阶的

改进Euler法的例题

例 9.1.1：给定初值问题

$$\begin{cases} y' = -2y - 4x, & (0 \le x \le 1) \\ y(0) = 2 \end{cases}$$

取 $h = 0.1$。试用显式 Euler 法和隐式 Euler 法求初值问题的数值解，并与精确解进行比较。

例 9.1.2：用改进 Euler 法求解例 9.1.1。

解：按式（9.1.11）

$$y_p = y_k + hf(x_k, y_k) = y_k + 0.1(-2y_k - 4x_k) = 0.8y_k - 0.4x_k$$

$$y_q = y_k + 0.1 \cdot [-4x_{k+1} - 2y_p]$$

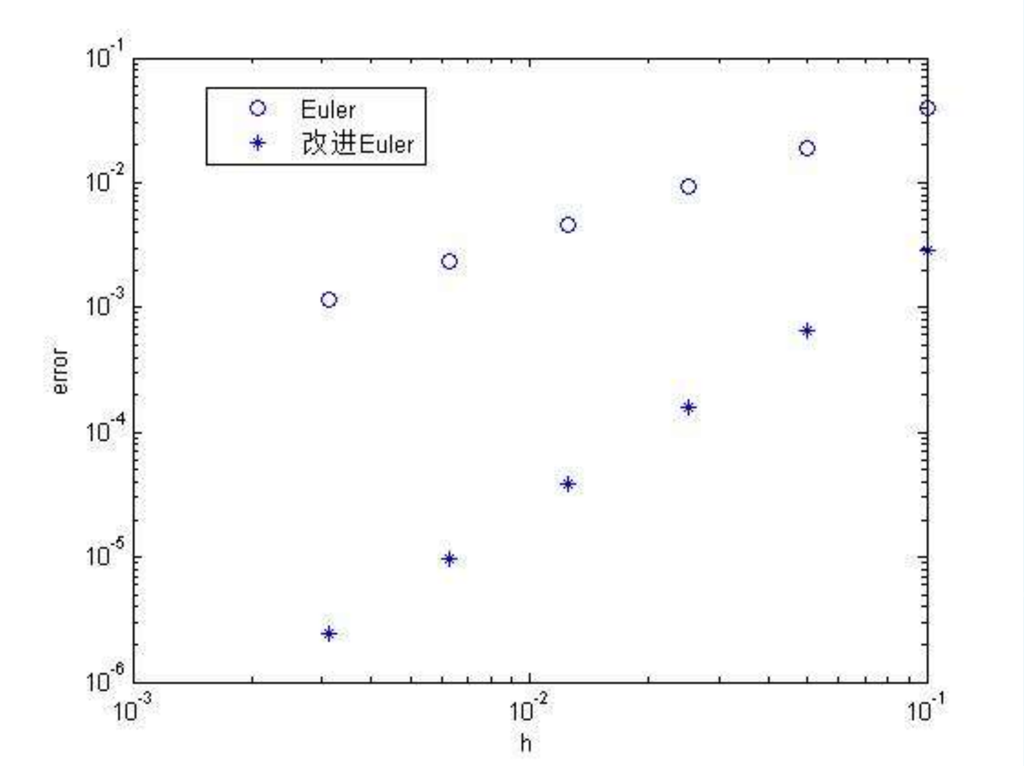
$$y_{k+1} = (y_p + y_q)/2$$

表 9-1-2：　例 9.1.2 中改进 Euler 法与精确解的比较表

x_k	y_k	$y(x_k)$	$y(x_k)-y_k$
0	2.000000	2.000000	0.000000
0.1	1.620000	1.678131	-0.001269
0.2	1.272400	1.270320	-0.002080
0.3	0.951368	0.948812	-0.002556
0.4	0.652122	0.649329	-0.002793
0.5	0.370740	0.367879	-0.002860
0.6	0.104007	0.101194	-0.002812
0.7	-0.150715	-0.153403	-0.002689
0.8	-0.395586	-0.398103	-0.002518
0.9	-0.632380	-0.634701	-0.002321
1.0	-0.862552	-0.864665	-0.002113

改进 Euler 法的精度明显**高于**显式 Euler 法和隐式 Euler 法

Euler法和改进的Euler方法收敛速度比较



例2 对初值问题 $\begin{cases} y' + y = 0 \\ y(0) = 1 \end{cases}$

证明用梯形公式求得的近似解为 $y_n = \left(\dfrac{2-h}{2+h}\right)^n$ $x_n = nh$

并证明当步长h→0时, y_n 收敛于精确解 e^{-x_n}

证明：解初值问题的梯形公式为

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}[f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, y_{n+1})]$$

$\because$ $f(x,y) = -y$

$\therefore$ $y_{n+1} = y_n + \dfrac{h}{2}[-y_n - y_{n+1}]$

整理成显式 $y_{n+1} = \left(\dfrac{2-h}{2+h}\right) y_n$ 反复迭代, 得到

$$y_{n+1} = \left(\frac{2-h}{2+h}\right) y_n = \left(\frac{2-h}{2+h}\right)^2 y_{n-1} = \left(\frac{2-h}{2+h}\right)^3 y_{n-2} = \ldots = \left(\frac{2-h}{2+h}\right)^{n+1} y_0$$

$\because$ $y_0 = 1$ $\therefore$ $y_n = \left(\dfrac{2-h}{2+h}\right)^n$

$$y_n=\left(\frac{2-h}{2+h}\right)^n$$

由于$x_n = nh$，有

$$\lim_{h\to 0} y_n = \lim_{h\to 0}\left(\frac{2-h}{2+h}\right)^{\frac{x_n}{h}} = \lim_{h\to 0}\frac{\left(1-\frac{h}{2}\right)^{\left(-\frac{2}{h}\right)\left(-\frac{x_n}{2}\right)}}{\left(1+\frac{h}{2}\right)^{\left(\frac{2}{h}\right)\left(\frac{x_n}{2}\right)}} = \frac{e^{-\frac{x_n}{2}}}{e^{\frac{x_n}{2}}} = e^{-x_n}$$

$$\therefore \quad \lim_{h\to 0} y_n = e^{-x_n}$$