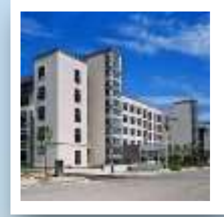
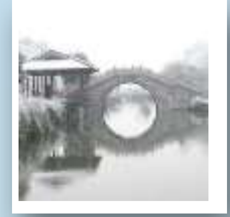
江南大学

第二章 线性方程组的直接解法

第一节 引言



对一般的n阶线性方程组 $Ax=b$

其中 $A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$， $x=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$， $b=\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$。

当$\det(A)\neq 0$（或A是非奇异矩阵），由克莱姆法则（Cramer）知，其解为：

$$x_i=\frac{\det(A_i)}{\det(A)} \qquad (i=1,2,\cdots,n)$$

计算量$n+1$个n阶矩阵行列式及n次除法计算，而每个n阶行列式计算需作$n!$次乘法

计算量过大

江南大学

解线性方程组的方法大致可分为两类：直接方法和迭代法

直接解法是指假设计算过程中不产生舍入误差，经过有限次运算求得方程组的精确解的方法（适用低阶稠密或特殊稀疏矩阵）

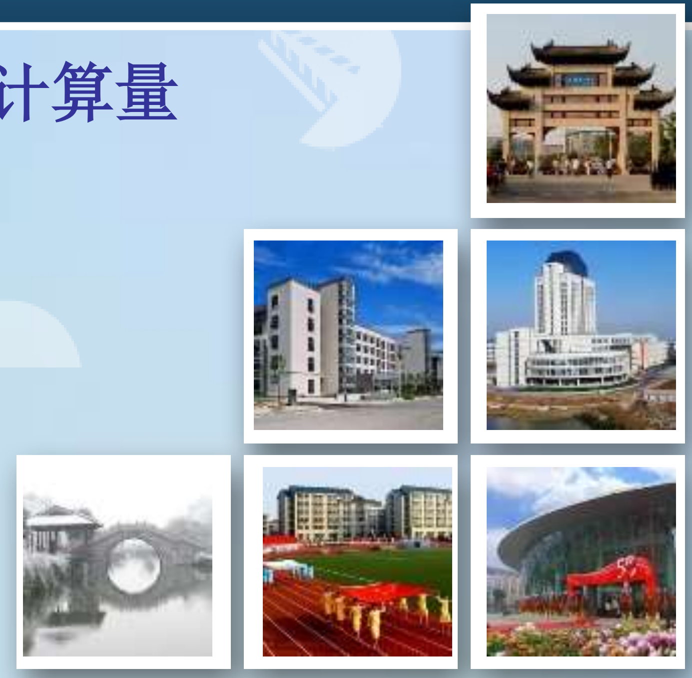
迭代法是从解的某个近似值出发，通过构造一个无穷序列去逼近精确解的方法（适用大型稀疏矩阵）

注：这里均假设其系数矩阵非奇异，方程组存在唯一解

江南大学

第二章 线性方程组的直接解法

第二节 Gauss消去法及计算量



2.2.1Gauss消去法

多元一次方程组的消去法将其系数矩阵化为三角形矩阵， 例如

$$\begin{cases} 7x_1+8x_2+11x_3=-3 \\ 5x_1+x_2-3x_3=-4 \\ x_1+2x_2+3x_3=1 \end{cases}$$

将第一个方程乘$\left(-\frac{5}{7}\right)$加到第二个方程，把第一个方程乘$\left(-\frac{1}{7}\right)$加到第三个方程上，消去第 2，3 个方程中的$x_1$，得

$$\begin{cases} 7x_1+8x_2+11x_3=-3 \\ -\frac{33}{7}x_2-\frac{26}{7}x_3=-\frac{13}{7} \\ \frac{6}{7}x_2+\frac{10}{7}x_3=\frac{10}{7} \end{cases}$$

再将第二个方程乘以（$\frac{2}{11}$）加到第三个方程上，消去第3个方程中的x_2，得

$$\begin{cases} 7x_1+8x_2+11x_3=-3 \\ -\frac{33}{7}x_2-\frac{76}{7}x_3=-\frac{13}{7} \\ -\frac{42}{77}x_3=\frac{84}{77} \end{cases}$$

求得 $x_3=-2, x_2=5, x_1=-3$

把原方程组化为一个等价的（即同解的）上三角形方程组，此过程称为线性方程组的消去过程或消元过程。而整个的求解方法就称为Gauss消去法。

例 1 用 Gauss 消去法解方程组

$$\begin{cases} 2x_1+3x_2+4x_3=6, \\ 3x_1+5x_2+2x_3=5, \\ 4x_1+3x_2+30x_3=32. \end{cases}$$

解 实际计算时，只须对增广矩阵

$$[\boldsymbol{A}^{(1)} \mid \boldsymbol{b}^{(1)}]=\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 4 & 6 \\ 3 & 5 & 2 & 5 \\ 4 & 3 & 30 & 32 \end{array}\right]$$

进行行初等变换.

得到

$$[\boldsymbol{A}^{(2)} \mid \boldsymbol{b}^{(2)}] = \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 4 & 6 \\ 0 & 0.5 & -4 & -4 \\ 0 & -3 & 22 & 20 \end{array}\right]$$

再进行行变换

得

$$[\boldsymbol{A}^{(3)} \mid \boldsymbol{b}^{(3)}] = \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 4 & 6 \\ & 0.5 & -4 & -4 \\ & & -2 & -4 \end{array}\right].$$

至此已产生三角形方程组

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 6, \\ 0.5x_2 - 4x_3 = -4, \\ -2x_3 = -4, \end{cases}$$

消去过程完结.

江南大学

然后实现回代过程,求出方程组的解：

$$x_3 = 2,$$

$$x_2 = \frac{-4 + 4x_3}{0.5} = 8,$$

$$x_1 = \frac{6 - 3x_2 - 4x_3}{2} = -13.$$

消元过程

记 $$A = A^{(1)} = \begin{bmatrix} a_{11}^{(1)}, & a_{12}^{(1)}, & \cdots, & a_{1n}^{(1)} \\ a_{21}^{(1)}, & a_{22}^{(1)}, & \cdots, & a_{2n}^{(1)} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1}^{(1)}, & a_{n2}^{(1)}, & \cdots, & a_{nn}^{(1)} \end{bmatrix}, \quad b = b^{(1)} = \begin{bmatrix} b_1^{(1)} \\ b_2^{(1)} \\ \vdots \\ b_n^{(1)} \end{bmatrix} \qquad (2.2.4)$$

第一步：设 $a_{11}^{(1)} \neq 0$，乘第一个方程 $(-l_{i1})$ 加到第 i 个方程上 $l_{i1} = \dfrac{a_{i1}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}}$ （$i = 2,3,\cdots,n$），

消去第 i 个方程中未知数 x_1 的项

$$\begin{cases} a_{11}^{(1)}x_1 + a_{12}^{(1)}x_2 + a_{13}^{(1)}x_3 + \cdots + a_{1n}^{(1)}x_n = b_1^{(1)} \\ \qquad a_{22}^{(2)}x_2 + a_{23}^{(2)}x_3 + \cdots + a_{2n}^{(2)}x_n = b_2^{(2)} \\ \qquad a_{32}^{(2)}x_2 + a_{33}^{(2)}x_3 + \cdots + a_{3n}^{(2)}x_n = b_3^{(2)} \\ \qquad \cdots \\ \qquad a_{n2}^{(2)}x_2 + a_{n3}^{(2)}x_3 + \cdots + a_{nn}^{(2)}x_n = b_n^{(2)} \end{cases}$$

其中 $a_{ij}^{(2)} = a_{ij}^{(1)} - l_{i1}a_{1j}^{(1)}$ （$(i, j = 2,3,\cdots,n)$），

$b_i^{(2)} = b_i^{(1)} - l_{i1}b_1^{(1)}$ （$i = 2,3,\cdots,n$）

江南大学

第二步：设 $a_{22}^{(2)} \neq 0$，乘第二个方程 $(-l_{i2})$ 加到第 i 个方程上 $l_{i2} = \dfrac{a_{i2}^{(2)}}{a_{22}^{(2)}}$（$i = 3,4,\cdots,n$），

消去第 i 个方程中未知数 x_2 的项

$$
\begin{cases}
a_{11}^{(1)}x_1 + a_{12}^{(1)}x_2 + a_{13}^{(1)}x_3 + \cdots + a_{1n}^{(1)}x_n = b_1^{(1)} \\
a_{22}^{(2)}x_2 + a_{23}^{(2)}x_3 + \cdots + a_{2n}^{(2)}x_n = b_2^{(2)} \\
a_{33}^{(3)}x_3 + \cdots + a_{3n}^{(3)}x_n = b_3^{(3)} \\
\vdots \\
a_{n3}^{(3)}x_3 + \cdots + a_{nn}^{(3)}x_n = b_n^{(3)}
\end{cases}
$$

其中 $a_{ij}^{(3)} = a_{ij}^{(2)} - l_{i2}a_{2j}^{(2)}$（$i, j = 3,4,\cdots,n$），

$b_i^{(3)} = b_i^{(2)} - l_{i2}b_2^{(2)}$（$i = 3,4,\cdots,n$）

江南大学

一般地，设第 $k-1$ 步消元后原方程组化为如下的同解方程组：

$$\begin{cases} a_{11}^{(1)}x_1 + a_{12}^{(1)}x_2 + a_{13}^{(1)}x_3 + \cdots + a_{1n}^{(1)}x_n = b_1^{(1)} \\ \quad a_{22}^{(2)}x_2 + \cdots + a_{2k}^{(2)}x_k + \cdots + a_{2n}^{(2)}x_n = b_2^{(2)} \\ \qquad\qquad \ddots \\ \qquad\qquad a_{kk}^{(k)}x_k + \cdots + a_{kn}^{(k)}x_n = b_k^{(k)} \\ \qquad\quad a_{k+1,k}^{(k)}x_k + \cdots + a_{k+1,n}^{(k)}x_n = b_{k+1}^{(k)} \\ \qquad\qquad \vdots \\ \qquad\qquad a_{nk}^{(k)}x_k + \cdots + a_{nn}^{(k)}x_n = b_n^{(k)} \end{cases}$$

第 k 步：设 $a_{kk}^{(k)} \neq 0$，乘第 k 个方程 $(-l_{ik})$ 加到第 i 个方程上 $l_{ik} = \dfrac{a_{ik}^{(k)}}{a_{kk}^{(k)}}$ （$i = k+1, \cdots, n$），

消去第 i 个方程中未知数 x_k 的项

$$
\begin{cases}
a_{11}^{(1)}x_1 + a_{12}^{(1)}x_2 + \cdots + a_{1k}^{(1)}x_k + a_{1k+1}^{(1)}x_{k+1} \cdots + a_{1n}^{(1)}x_n = b_1^{(1)} \\
\qquad a_{22}^{(2)}x_2 + \cdots + a_{2k}^{(2)}x_k + a_{2k+1}^{(2)}x_{k+1} \cdots + a_{2n}^{(2)}x_n = b_2^{(2)} \\
\qquad\qquad \ddots \\
\qquad\qquad a_{kk}^{(k)}x_k + a_{k,k+1}^{(k)}x_{k+1} \cdots + a_{kn}^{(k)}x_n = b_k^{(k)} \\
\qquad\qquad a_{k+1,k+1}^{(k+1)}x_{k+1} + \cdots + a_{k+1,n}^{(k+1)}x_n = b_{k+1}^{(k+1)} \\
\qquad\qquad\qquad \vdots \\
\qquad\qquad a_{n,k+1}^{(k+1)}x_{k+1} + \cdots + a_{nn}^{(k+1)}x_n = b_n^{(k+1)}
\end{cases}
\tag{2.2.8}
$$

$$
\boxed{
\begin{array}{l}
\text{其中 } a_{ij}^{(k+1)} = a_{ij}^{(k)} - l_{i,k}a_{k,j}^{(k)} \quad (i, j = k+1, \cdots, n), \\[2ex]
b_i^{(k+1)} = b_i^{(k)} - l_{i,k}b_k^{(k)} \quad (i = k+1, \cdots, n)
\end{array}
}
$$

直到第 $n-1$ 步，原方程就可以化为同解的上三角形方程组

$$\begin{cases} a_{11}^{(1)}x_1 + a_{12}^{(1)}x_2 + a_{13}^{(1)}x_3 + \cdots + a_{1n}^{(1)}x_n = b_1^{(1)} \\ \qquad a_{22}^{(2)}x_2 + \cdots + a_{2n}^{(2)}x_n = b_2^{(2)} \\ \qquad\qquad \ddots \\ \qquad\qquad a_{nn}^{(n)}x_n = b_n^{(n)} \end{cases}$$

回代过程

若 $a_{nn}^{(n)} \neq 0$，按变量的逆序逐步回代得线性方程组（2.2.1）的解

$$\begin{cases} x_n = \dfrac{b_n^{(n)}}{a_{nn}^{(n)}} \\ x_k = \dfrac{\left[b_k^{(k)} - \sum\limits_{l=k+1}^{n} a_{kl}^{(k)} x_l\right]}{a_{kk}^{(k)}} \end{cases} \tag{2.2.10}$$

其中 $k = n-1, n-2, \cdots, 2, 1$.

例2 设 A 是对称矩阵且 $a_{11} \neq 0$，经过 Gauss 消去法一步后，$\boldsymbol{A}$ 约化为

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \boldsymbol{a}_1^{\mathrm{T}} \\ 0 & \boldsymbol{A}_2 \end{bmatrix}.$$

证明 $\boldsymbol{A}_2$ 是对称矩阵.

例2 设 A 是对称矩阵且 $a_{11}\neq 0$，经过 Gauss 消去法一步后，$\boldsymbol{A}$ 约化为

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \boldsymbol{a}_1^{\mathrm{T}} \\ 0 & \boldsymbol{A}_2 \end{bmatrix}.$$

证明 $\boldsymbol{A}_2$ 是对称矩阵.

解 记 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})=(a_{ij}^{(1)})$. 经 Gauss 消元一步后，$\boldsymbol{A}_2$ 的元素为

$$a_{ij}^{(2)}=a_{ij}^{(1)}-\frac{a_{i1}^{(1)}}{a_{11}}a_{1j}^{(1)}.$$

因 $\boldsymbol{A}$ 是对称的，所以有 $a_{ij}^{(1)}=a_{ji}^{(1)}$，$a_{i1}^{(1)}=a_{j1}^{(1)}$，于是有

$$a_{ij}^{(2)}=a_{ji}^{(1)}-\frac{a_{j1}^{(1)}}{a_{11}}a_{1i}^{(1)}=a_{ji}^{(2)}.$$

故 $\boldsymbol{A}_2$ 是对称的.

江南大学

2.2.2Gauss消去法的计算量

其中 $a_{ij}^{(k+1)} = a_{ij}^{(k)} - l_{i,k} a_{k,j}^{(k)}$ （$i, j = k+1, \cdots, n$），

$b_i^{(k+1)} = b_i^{(k)} - l_{i,k} b_k^{(k)}$ （$i = k+1, \cdots, n$）

$l_{ik} = \dfrac{a_{ik}^{(k)}}{a_{kk}^{(k)}}$ （$i = k+1, \cdots, n$）

消元过程

乘法次数：$N_1 = \sum_{k=1}^{n-1} (n-k)(n-k+1) = \frac{n}{3}(n^2 - 1)$

除法次数：$N_2 = \sum_{k=1}^{n-1} (n-k) = \frac{n}{2}(n-1)$

注：所需计算公式

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2} \qquad \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

江南大学

回代过程

$$\begin{cases} x_n = \dfrac{b_n^{(n)}}{a_{nn}^{(n)}} \\ x_k = \dfrac{\left[b_k^{(k)} - \sum\limits_{l=k+1}^{n} a_{kl}^{(k)} x_l \right]}{a_{kk}^{(k)}} \end{cases}$$

乘除法次数：$N_3 = \sum\limits_{k=1}^{n} (n-k+1) = \dfrac{n}{2}(n+1)$

Gauss 消去法解 n 阶线性方程组所需的总的计算量为：

$$N = N_1 + N_2 + N_3$$

$$= \frac{n^3}{3} + n^2 - \frac{n}{3} = \frac{n^3}{3} + o(n^3)$$

Gauss消去法的优缺点

优点　简单易行

缺点　要求 $a_{kk}^{(k)}$（称为主元素）均不为零（$k=1,2,\cdots,n$），适用范围小，

数值稳定性差