习题二解答

1、用 Gauss 消去法解下列方程组。

（1）$\begin{cases} 2x_1+6x_2-4x_3=4 \\ x_1+4x_2-5x_3=3 \\ 6x_1-x_2+18x_3=2 \end{cases}$；　　（2）$\begin{cases} 2x_1+x_2+2x_3=6 \\ 4x_1+3x_2+x_3=11 \\ 6x_1+x_2+5x_3=13 \end{cases}$。

解：

（1）由$\left[A^{(1)},b^{(1)}\right]=\begin{bmatrix} 2 & 6 & -4 & 4 \\ 1 & 4 & -5 & 3 \\ 6 & -1 & 18 & 2 \end{bmatrix}$。消元过程：

第一次消元后可得：

$$\left[A^{(2)},b^{(2)}\right]=\begin{bmatrix} 2 & 6 & -4 & 4 \\ 0 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & -19 & 30 & -10 \end{bmatrix}$$

第二次消元后可得：

$$\left[A^{(3)},b^{(3)}\right]=\begin{bmatrix} 2 & 6 & -4 & 4 \\ 0 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & -27 & 9 \end{bmatrix}$$

回代过程：$x_3=-\dfrac{1}{3}$；$x_2=0$；$x_1=\dfrac{4}{3}$。

（2）由$\left[A^{(1)},b^{(1)}\right]=\begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 & 6 \\ 4 & 3 & 1 & 11 \\ 6 & 1 & 5 & 13 \end{bmatrix}$。消元过程：

第一次消元后可得：

$$\left[A^{(2)},b^{(2)}\right]=\begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & -2 & -1 & -5 \end{bmatrix}$$

第二次消元后可得：

$$\left[A^{(3)},b^{(3)}\right]=\begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -7 & -7 \end{bmatrix}$$

回代过程：$x_3=1$；$x_2=2$；$x_1=1$。

2、分别用列主元素法和全主元素法解方程组。

$$\begin{cases} 0.2641x_1 + 0.1735x_2 + 0.8642x_3 = -0.7521 \\ 0.9411x_1 - 0.0175x_2 + 0.1463x_3 = 0.6310 \\ -0.8641x_1 - 0.4243x_2 + 0.0711x_3 = 0.2501 \end{cases}。$$

解：由$\left[A^{(1)}, b^{(1)}\right] = \begin{bmatrix} 0.2641 & 0.1735 & 0.8642 & -0.7521 \\ 0.9411 & -0.0175 & 0.1463 & 0.6310 \\ -0.8641 & -0.4243 & 0.0711 & 0.2501 \end{bmatrix}$。

（1）列主元素法。消元过程如下：

首先，通过交换第 1 行和第 3 行，经第一次消元后可得：

$$\left[A^{(2)}, b^{(2)}\right] = \begin{bmatrix} 0.9411 & -0.0175 & 0.1463 & 0.6310 \\ 0 & 0.1784 & 0.8231 & -0.9292 \\ 0 & -0.4404 & 0.2054 & 0.8295 \end{bmatrix}$$

其次，通过交换第 2 行和第 3 行，经第二次消元可得：

$$\left[A^{(3)}, b^{(3)}\right] = \begin{bmatrix} 0.9411 & -0.0175 & 0.1463 & 0.6310 \\ 0 & -0.4404 & 0.2054 & 0.8295 \\ 0 & 0 & 0.9063 & -0.5932 \end{bmatrix}$$

回代过程：$x_3 = -0.6545$；$x_2 = -2.1887$；$x_1 = 0.7316$。

（2）全主元素法。消元过程如下：

首先，通过交换第 1 行和第 3 行，经第一次消元后可得：

$$\left[A^{(2)}, b^{(2)}\right] = \begin{bmatrix} 0.9411 & -0.0175 & 0.1463 & 0.6310 \\ 0 & 0.1784 & 0.8231 & -0.9292 \\ 0 & -0.4404 & 0.2054 & 0.8295 \end{bmatrix}$$

其次，通过交换第 2 列和第 3 列，经第二次消元可得：

$$\left[A^{(3)}, b^{(3)}\right] = \begin{bmatrix} 0.9411 & 0.1463 & -0.0175 & 0.6310 \\ 0 & 0.8231 & 0.1784 & -0.9292 \\ 0 & 0 & -0.4849 & 1.0614 \end{bmatrix}$$

回代过程：$x_2 = -2.1889$；$x_3 = -0.6545$；$x_1 = 0.7316$。

3、用三角分解法的紧凑格式解下列方程组，并写出 L，U 矩阵。

（1）$\begin{bmatrix} 5 & 7 & 9 & 10 \\ 6 & 8 & 10 & 9 \\ 7 & 10 & 8 & 7 \\ 5 & 7 & 6 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$；（2）$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 9 & 16 \\ 1 & 6 & 27 & 64 \\ 1 & 8 & 81 & 256 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 10 \\ 44 \\ 190 \end{bmatrix}$。

解：（1）由紧凑格式

5 (5)	7 (7)	9 (9)	10 (10)	1(1)
6 (1.2)	8 (-0.4)	10(-0.8)	9 (-3)	1(-0.2)
7 (1.4)	10 (-0.5)	8 (-5)	7(-8.5)	1(-0.5)
5 (1)	7 (0)	6 (0.6)	5 (0.1)	1(0.3)

可得：

$$L=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\1.2&1&0&0\\1.4&-0.5&1&0\\1&0&0.6&1\end{bmatrix},\quad U=\begin{bmatrix}5&7&9&10\\0&-0.4&-0.8&-3\\0&0&-5&-8.5\\0&0&0&0.1\end{bmatrix}$$

由回代过程（即$Ux=y$）有：

$$U\quad y=\begin{bmatrix}5&7&9&10&1\\0&-0.4&-0.8&-3&-0.2\\0&0&-5&-8.5&-0.5\\0&0&0&0.1&0.3\end{bmatrix}$$

可得：$x_4=3$，　$x_3=-5$，$x_2=-12$ $x_1=20$。

（2）由紧凑格式

1 (1)	2 (2)	3 (3)	4 (4)	2 (2)
1 (1)	4 (2)	9 (6)	16 (12)	10 (8)
1 (1)	6 (2)	27 (12)	64 (36)	44(26)
1 (1)	8 (3)	81 (5)	256 (36)	190 (34)

可得：

$$L=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\1&1&0&0\\1&2&1&0\\1&3&5&1\end{bmatrix},\quad U=\begin{bmatrix}1&2&3&4\\0&2&6&12\\0&0&12&36\\0&0&0&36\end{bmatrix}$$

由回代过程（即$Ux=y$）有：

$$U\quad y=\begin{bmatrix}1&2&3&4&2\\0&2&6&12&8\\0&0&12&36&26\\0&0&0&36&34\end{bmatrix}$$

可得：$x_4=17/18$，　$x_3=-2/3$，$x_2=1/3$，$x_1=-4/9$。

4、对于n阶可逆矩阵A，若能通过初等行变换将增广矩阵 A,I_n 化成 I_n,B ，其中I_n是n阶单位矩阵，则 $B=A^{-1}$。此中求 A^{-1} 的方法称为 Gauss-Jordan 消去法，试用 Gauss-Jordan 消去法求下列矩阵的逆。

（1）$\begin{bmatrix}1&1&-1\\2&1&0\\1&-1&0\end{bmatrix}$；　　　（2）$\begin{bmatrix}2&2&-3\\1&-1&0\\-1&2&1\end{bmatrix}$。

解：

（1）由$\left[A_1, I\right]=\begin{bmatrix}1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0\\ 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 2 & -2 & 1 & 0\\ 0 & -2 & 1 & -1 & 0 & 1\end{bmatrix}$

$$\to\begin{bmatrix}1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & -2 & 2 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2/3 & -1/3\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0 & 1/3 & 1/3\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1/3 & -2/3\\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2/3 & -1/3\end{bmatrix}$$

因此，$A_1^{-1}=\begin{bmatrix}0 & 1/3 & 1/3\\ 0 & 1/3 & -2/3\\ -1 & 2/3 & -1/3\end{bmatrix}$。

（2）由$\left[A_2, I\right]=\begin{bmatrix}2 & 2 & -3 & 1 & 0 & 0\\ 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0\\ -1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & -7 & 1 & -6 & -4\end{bmatrix}$

$\to\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 1/7 & 8/7 & 3/7\\ 0 & 1 & 0 & 1/7 & 1/7 & 3/7\\ 0 & 0 & 1 & -1/7 & 6/7 & 4/7\end{bmatrix}$。因此，$A_2^{-1}=\begin{bmatrix}1/7 & 8/7 & 3/7\\ 1/7 & 1/7 & 3/7\\ -1/7 & 6/7 & 4/7\end{bmatrix}$。

5、用追赶法解三角方程组。

（1）$\begin{bmatrix}2 & -1 & 0 & 0\\ -1 & 2 & -1 & 0\\ 0 & -1 & 2 & -1\\ 0 & 0 & -1 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 1\\ 0\\ 2.5\end{bmatrix}$；（2）$\begin{bmatrix}4 & -1 & 0 & 0 & 0\\ -1 & 4 & -1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 4 & -1 & 0\\ 0 & 0 & -1 & 4 & -1\\ 0 & 0 & 0 & -1 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\\ x_5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}100\\ 200\\ 200\\ 200\\ 100\end{bmatrix}$。

解：（1）由题给条件知：$a_1=a_2=a_3=a_4=2$，$b_1=b_2=b_3=-1=c_2=c_3=c_4$，$d_1=d_3=0$，$d_2=1$，$d_4=2.5$。由算法 2.1 可得：$u_1=2$，$y_1=0$；

$$l_2=\frac{-1}{2}=-\frac{1}{2},\ u_2=2-(-1)\times\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{2},\ y_2=1-\left(-\frac{1}{2}\right)\times 0=1;$$

$$l_3=\frac{-1}{\frac{3}{2}}=-\frac{2}{3},\ u_3=2-(-1)\times\left(-\frac{2}{3}\right)=\frac{4}{3},\ y_3=0-\left(-\frac{2}{3}\right)\times 1=\frac{2}{3};$$

$$l_4=\frac{-1}{\frac{4}{3}}=-\frac{3}{4},\ u_4=2-(-1)\times\left(-\frac{3}{4}\right)=\frac{5}{4},\ y_4=2.5-\left(-\frac{3}{4}\right)\times\frac{2}{3}=3。$$

$$x_4=\frac{3}{\frac{5}{4}}=\frac{12}{5},\ x_3=\frac{\frac{2}{3}-(-1)\times\frac{12}{5}}{\frac{4}{3}}=\frac{23}{10},$$

$$x_2=\frac{1-(-1)\times\frac{23}{10}}{\frac{3}{2}}=\frac{11}{5}，\quad x_1=\frac{0-(-1)\times\frac{11}{5}}{2}=\frac{11}{10}。$$

（2）由题给条件知：$a_1=a_2=a_3=a_4=a_5=4$，$b_1=b_2=b_3=b_4=-1$，$c_2=c_3=c_4=c_5=-1$，$d_1=d_5=100$，$d_2=d_3=d_4=200$。由算法 2.1 可得：$u_1=4$，$y_1=100$；

$$l_2=\frac{-1}{4}=-\frac{1}{4}，\quad u_2=4-(-1)\times\left(-\frac{1}{4}\right)=\frac{15}{4}，\quad y_2=200-\left(-\frac{1}{4}\right)\times100=225；$$

$$l_3=\frac{-1}{\frac{15}{4}}=-\frac{4}{15}，\quad u_3=4-(-1)\times\left(-\frac{4}{15}\right)=\frac{56}{15}，\quad y_3=200-\left(-\frac{4}{15}\right)\times225=260；$$

$$l_4=\frac{-1}{\frac{56}{15}}=-\frac{15}{56}，\quad u_4=4-(-1)\times\left(-\frac{15}{56}\right)=\frac{209}{56}，\quad y_4=200-\left(-\frac{15}{56}\right)\times260=\frac{3775}{14}；$$

$$l_5=\frac{-1}{\frac{209}{56}}=-\frac{56}{209}，\quad u_5=4-(-1)\times\left(-\frac{56}{209}\right)=\frac{780}{209}，$$

$$y_5=100-\left(-\frac{56}{209}\right)\times\frac{3775}{14}=\frac{36000}{209}。$$

$$x_5=\frac{\frac{36000}{209}}{\frac{780}{209}}=\frac{600}{13}，\quad x_4=\frac{\frac{3775}{14}-(-1)\times\frac{600}{13}}{\frac{209}{56}}=\frac{1100}{13}，$$

$$x_3=\frac{260-(-1)\times\frac{1100}{13}}{\frac{56}{15}}=\frac{1200}{13}，\quad x_2=\frac{225-(-1)\times\frac{1200}{13}}{\frac{15}{4}}=\frac{1100}{13}，$$

$$x_1=\frac{100-(-1)\times\frac{1100}{13}}{4}=\frac{600}{13}。$$

6、分别用平方根法和改进平方根法求解方程组。

（1）$\begin{bmatrix}2&-1&-1\\-1&2&0\\-1&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}$；　（2）$\begin{bmatrix}4&2.4&2&3\\2.4&5.44&4&5.8\\2&4&5.21&7.45\\3&5.8&7.45&19.66\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}12.280\\16.928\\22.957\\50.945\end{bmatrix}$。

解：（1）**平方根法：** $l_{11}=\sqrt{a_{11}}=\sqrt{2}$，$l_{21}=\frac{-1}{\sqrt{2}}=-\frac{\sqrt{2}}{2}=l_{31}$；$l_{22}=\sqrt{a_{22}-l_{21}^2}=\frac{\sqrt{6}}{2}$，

$l_{32}=\dfrac{a_{32}-l_{31}l_{21}}{l_{22}}=-\dfrac{\sqrt{6}}{6}$；$l_{33}=\sqrt{a_{33}-l_{31}^2-l_{32}^2}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$。

$y_1=\dfrac{b_1}{l_{11}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，$y_2=\dfrac{b_2-l_{21}y_1}{l_{22}}=\dfrac{\sqrt{6}}{6}$，$y_3=\dfrac{b_3-l_{31}y_1-l_{32}y_2}{l_{33}}=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$

$x_3=\dfrac{y_3}{l_{33}}=2$，$x_2=\dfrac{y_2-l_{32}x_3}{l_{22}}=1$，$x_1=\dfrac{y_1-l_{21}x_2-l_{31}x_3}{l_{11}}=2$。

改进平方根法：

当$k=1$时，$d_1=a_{11}=2$，$u_{21}=-1=u_{31}$，$l_{21}=-0.5=l_{31}$；

当$k=2$时，$d_2=1.5$，$u_{32}=-0.5$，$l_{32}=-\dfrac{1}{3}$；

当$k=3$时，$d_3=\dfrac{1}{3}$；。

$y_1=b_1=1$，$y_2=b_2-l_{21}y_1=0.5$，$y_3=b_3-l_{31}y_1-l_{32}y_2=\dfrac{2}{3}$

$x_3=\dfrac{y_3}{d_3}=2$，$x_2=\dfrac{y_2}{d_2}-l_{32}x_3=1$，$x_1=\dfrac{y_1}{d_1}-l_{21}x_2-l_{31}x_3=2$。

（2）**平方根法：**$l_{11}=\sqrt{a_{11}}=2$，$l_{21}=1.2$，$l_{31}=1$，$l_{41}=1.5$；$l_{22}=\sqrt{a_{22}-l_{21}^2}=2$，$l_{32}=\dfrac{a_{32}-l_{31}l_{21}}{l_{22}}=1.4$，$l_{42}=\dfrac{a_{42}-l_{41}l_{21}}{l_{22}}=2$；$l_{33}=\sqrt{a_{33}-l_{31}^2-l_{32}^2}=1.5$，$l_{43}=\dfrac{a_{43}-l_{41}l_{31}-l_{42}l_{32}}{l_{33}}=2.1$；$l_{44}=\sqrt{a_{44}-l_{41}^2-l_{42}^2-l_{43}^2}=3$。

$y_1=\dfrac{b_1}{l_{11}}=6.140$，$y_2=\dfrac{b_2-l_{21}y_1}{l_{22}}=4.780$，$y_3=\dfrac{b_3-l_{31}y_1-l_{32}y_2}{l_{33}}=6.750$，$y_4=\dfrac{b_4-l_{41}y_1-l_{42}y_2-l_{43}y_3}{l_{44}}=6.000$

$x_4=\dfrac{y_4}{l_{44}}=2.000$，$x_3=\dfrac{y_3-l_{43}x_4}{l_{33}}=1.700$，$x_2=\dfrac{y_2-l_{32}x_3-l_{42}x_4}{l_{22}}=-0.800$，$x_1=\dfrac{y_1-l_{21}x_2-l_{31}x_3-l_{41}x_4}{l_{11}}=1.200$。

改进平方根法：

当$k=1$时，$d_1=a_{11}=4$，$u_{21}=2.4$，$u_{31}=2$，$u_{41}=3$，$l_{21}=0.6$，$l_{31}=0.5$，$l_{41}=0.75$；

当$k=2$时，$d_2=4$，$u_{32}=2.8$，$u_{42}=4$，$l_{32}=0.7$，$l_{42}=1$；

当$k=3$时，$d_3=2.25$，$u_{43}=3.15$，$l_{43}=1.4$；

当$k=4$时，$d_4=9$。

$y_1=b_1=12.28$，$y_2=b_2-l_{21}y_1=9.56$，$y_3=b_3-l_{31}y_1-l_{32}y_2=10.125$，

$y_4 = b_4 - l_{41}y_1 - l_{42}y_2 - l_{43}y_3 = 18$

$x_4 = \dfrac{y_4}{d_4} = 2.000$，$x_3 = \dfrac{y_3}{d_3} - l_{43}x_4 = 1.700$，$x_2 = \dfrac{y_2}{d_2} - l_{32}x_3 - l_{42}x_4 = -0.800$，

$x_1 = \dfrac{y_1}{d_1} - l_{21}x_2 - l_{31}x_3 - l_{41}x_4 = 1.200$。

7、设 $x = \left(1, -2, 3\right)^T$，$y = (0,2,3)^T$，试计算 x 与 y 的三种常用范数。

解： 有条件可得：$\|x\|_1 = |1| + |-2| + |3| = 6$，$\|x\|_2 = \sqrt{1^2 + (-2)^2 + 3^3} = \sqrt{14}$，$\|x\|_\infty = \max\{|1|, |-2|, |3|\} = 3$；$\|y\|_1 = |0| + |2| + |3| = 5$，$\|x\|_2 = \sqrt{0^2 + 2^2 + 3^3} = \sqrt{13}$，$\|x\|_\infty = \max\{|0|, |2|, |3|\} = 3$。

8、设 $A = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}$，试计算 $\|A\|_\infty$，$\|A\|_1$，$\|A\|_2$，以及 $cond_\infty(A)$，$cond_1(A)$，$cond_2(A)$。

解： 有所给条件可得：

$\|A\|_\infty = \max\{|-2| + |1| + |0|, |-1| + |2| + |0|, |0| + |-2| + |1|\} = 3$；

$\|A\|_1 = \max\{|-2| + |-1| + |0|, |1| + |2| + |-2|, |0| + |0| + |1|\} = 5$；

由 $A^TA = \begin{bmatrix} 5 & -4 & 0 \\ -4 & 9 & -2 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}$，可得

$$f_{A^TA}(\lambda) = \lambda^3 - 15\lambda^2 + 39\lambda - 9 = (\lambda - 6 + \sqrt{33})(\lambda - 3)(\lambda - 6 - \sqrt{33})$$

令 $f_{A^TA}(\lambda) = 0$，可得：$\lambda_1 = 6 - \sqrt{33}$，$\lambda_2 = 3$，$\lambda_3 = 6 + \sqrt{33}$。因此

$$\|A\|_2 = \sqrt{\rho(A^TA)} = \sqrt{6 + \sqrt{33}}\ 。$$

由 $A^{-1} = \begin{bmatrix} -2/3 & 1/3 & 0 \\ -1/3 & 2/3 & 0 \\ -2/3 & 4/3 & 1 \end{bmatrix}$，于是：

$$cond_\infty(A) = \|A\|_\infty \cdot \|A^{-1}\|_\infty = 3 \cdot 3 = 9$$

$$cond_1(A) = \|A\|_1 \cdot \|A^{-1}\|_1 = 5 \cdot \frac{7}{3} = \frac{35}{3}$$

$$cond_2(A) = \|A\|_2 \cdot \|A^{-1}\|_2 = \sqrt{\frac{\lambda_{\max}(A^TA)}{\lambda_{\min}(A^TA)}} = \sqrt{\frac{6 + \sqrt{33}}{6 - \sqrt{33}}} = 2\sqrt{3} + \sqrt{11}$$

9、证明矩阵的 F-范数与向量 2-范数相容。

证明： 略。

10、设 $A=A^T$，若 A 是可逆的，试证明 $cond_2(A)=\left|\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right|$，其中 λ_1 和 λ_2 分别是矩阵 A 的按模最大和最小的特征值。

证明：假设 A 的所有特征值为 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$，其中 λ_1 和 λ_2 分别是矩阵 A 的按模最大和最小的特征值。由条件 A 是可逆的，则 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 均不为零。再由 $A=A^T$，可知 $A^TA=A^2$，因此由矩阵特征值的性质知：A^TA 的所有特征值为 $\lambda_1^2,\lambda_2^2,\cdots,\lambda_n^2$，且 λ_1^2 和 λ_2^2 分别是矩阵 A^TA 的按模最大和最小的特征值。故有

$$cond_2(A)=\|A\|_2\cdot\|A^{-1}\|_2=\sqrt{\frac{\lambda_{\max}(A^TA)}{\lambda_{\min}(A^TA)}}=\sqrt{\frac{|\lambda_1^2|}{|\lambda_2^2|}}=\left|\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right|。$$

11、设 $A=\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix}2 & -1\\ 1 & 2\end{bmatrix}$

（1）证明 A 是正交阵，且 $cond_2(A)=1$；

（2）计算 $cond_\infty(A)$。

（1）证明：因 $A^TA=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$，因此 A 是正交阵。并且 A^TA 的特征值为 1 和 1，于是：

$$cond_2(A)=\|A\|_2\cdot\|A^{-1}\|_2=\sqrt{\frac{\lambda_{\max}(A^TA)}{\lambda_{\min}(A^TA)}}=\sqrt{\frac{1}{1}}=1。$$

（2）解：由 $A^{-1}=A^T=\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix}2 & 1\\ -1 & 2\end{bmatrix}$，可得：

$$cond_\infty(A)=\|A\|_\infty\cdot\|A^{-1}\|_\infty=\frac{3}{\sqrt{5}}\times\frac{3}{\sqrt{5}}=1.8。$$

12、设有方程组 $Ax=b$，其中

$$A=\begin{bmatrix}-2 & 1 & 0\\ -1 & 2 & 0\\ 0 & -2 & 1\end{bmatrix}，\quad b=\left(-1,1,-1\right)^T$$

已知它有精确解 $x=\left(1,1,1\right)^T$。如果右端常数项 b 有小扰动 $\|\delta b\|=\frac{1}{2}\times10^{-6}$，试估算由此引起解的相对误差。

解：由第 8 题结果及题给条件可得三种范数下的解的相对误差估算如下：

$$\frac{\|\delta x\|_\infty}{\|x\|_\infty}\le cond_\infty(A)\times\frac{\|\delta b\|_\infty}{\|b\|_\infty}=9\times\frac{1}{1}\times\frac{1}{2}\times10^{-6}=0.450000\times10^{-5}$$

$$\frac{\|\delta x\|_1}{\|x\|_1}\le cond_1(A)\times\frac{\|\delta b\|_1}{\|b\|_1}=\frac{35}{3}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times10^{-6}=0.194444\times10^{-5}$$

$$\frac{\|\delta x\|_2}{\|x\|_2} \le cond_2(A) \times \frac{\|\delta b\|_2}{\|b\|_2} = (2\sqrt{3}+\sqrt{11}) \times \frac{1}{\sqrt{3}} \times \frac{1}{2} \times 10^{-6} = 0.195743 \times 10^{-5}\text{。}$$

13、已知方程组

$$\begin{cases} x_1 + 0.99x_2 = 1 \\ 0.99x_1 + 0.98x_2 = 1 \end{cases}$$

的精确解为 $x_1 = 100$， $x_2 = -100$ 。

（1）计算系数矩阵的∞-条件数。

（2）若取 $x_1^* = (1,0)^T$， $x_2^* = (100.5, -99.5)^T$，分别计算残量 $r_i = b - Ax_i^*$（$i = 1,2$），试从（2.7.7）式来分析计算结果。

解：（1）由条件： $A = \begin{bmatrix} 1 & 0.99 \\ 0.99 & 0.98 \end{bmatrix}$， $A^{-1} = \begin{bmatrix} -980 & 990 \\ 990 & -1000 \end{bmatrix}$，因此

$$cond_\infty(A) = \|A\|_\infty \cdot \|A^{-1}\|_\infty = 1.99 \times 1990 = 3960.1\text{。}$$

（2）由题给条件可得： $r_1 = b - Ax_1^* = (0, 0.01)^T$， $r_2 = b - Ax_2^* = (-0.995, -0.985)^T$ 。记 $x = (100, -100)^T$，因此有：

$$\frac{\|x - x_1^*\|_\infty}{\|x\|_\infty} = \frac{100}{100} = 1\text{，且 } \frac{\|x - x_1^*\|_\infty}{\|x\|_\infty} \le cond_\infty(A) \cdot \frac{\|r_1\|_\infty}{\|b\|_\infty} = 39.601$$

$$\frac{\|x - x_2^*\|_\infty}{\|x\|_\infty} = \frac{0.5}{100} = 0.005\text{，且 } \frac{\|x - x_2^*\|_\infty}{\|x\|_\infty} \le cond_\infty(A) \cdot \frac{\|r_2\|_\infty}{\|b\|_\infty} = 3940.2995$$

从上面的计算结果可以看到：用 x_1^* 近似表示精确解 x 的相对误差达到 100%，而 x_2^* 近似表示精确解 x 的相对误差为 0.5%，前者相对误差远远大于后者，说明用 x_2^* 表示 x 的近似解比用 x_1^* 表示 x 的近似解的精度要高出很多。但是，如果用（2.7.7）式来分析结果却刚好相反（注：$3940.2995 > 39.601$），其原因在于此线性方程组系数矩阵 A 的条件数太大，相对应的线性方程组病态严重，不能仅从（2.7.7）式来判定结果的好与坏。