Bài tập 2.20. Một hộp có 7 bi đỏ và 3 bi đen.

(a) Lấy ngẫu nhiên 1 viên bi từ hộp ra để kiểm tra. Tính xác suất nhận được bi đen.

(b) Lấy ngẫu nhiên lần lượt có hoàn lại 2 bi. Tính xác suất để lấy được 2 bi đen.

(c) Lấy ngẫu nhiên ra 2 viên bi từ hộp. Tính xác suất để lấy được 2 bi đen.

Bài tập 2.21. Cho $P(A) = \frac{1}{3}, P(B) = \frac{1}{2}$ và $P(A + B) = \frac{3}{4}$.
Tính $P(AB), P(\overline{A}.\overline{B}), P(\overline{A} + \overline{B}), P(A\overline{B}), P(\overline{A}B)$.

Bài tập 2.22. Tỷ lệ người mắc bệnh tim trong một vùng dân cư là 9%, mắc bệnh huyết áp là 12%, mắc cả hai bệnh là 7%. Chọn ngẫu nhiên một người trong vùng. Tính xác suất để người đó

(a) Bị bệnh tim hay bị bệnh huyết áp.

(b) Không bị bệnh tim cũng không bị bệnh huyết áp.

(c) Không bị bệnh tim hay không bị bệnh huyết áp.

(d) Bị bệnh tim nhưng không bị bệnh huyết áp.

(e) Không bị bệnh tim nhưng bị bệnh huyết áp.

Bài tập 2.23. Bạn quên mất số cuối cùng trong số điện thoại cần gọi (số điện thoại gồm 6 chữ số) và bạn chọn số cuối cùng này một cách ngẫu nhiên. Tính xác suất để bạn gọi đúng số điện thoại này mà không phải thử quá 3 lần. Nếu biết số cuối cùng là số lẻ thì xác suất này là bao nhiêu ?

Bài tập 2.24.

(a) Cho A, B là hai biến cố độc lập. Chứng minh rằng $\overline{A}, B$; $A, \overline{B}$ và $\overline{A}, \overline{B}$ đều là các cặp biến cố độc lập.

(b) Cho $A_1, A_2, \ldots, A_n$ là n biến cố độc lập. Chứng minh rằng $\overline{A_1}, A_2, \ldots, A_n$ cũng là n biến cố độc lập. Từ đó suy ra rằng nếu xét n biến cố $B_1, B_2, \ldots, B_n$ với $B_i = A_i$ hoặc $B_i = \overline{A_i}$ thì $B_1, B_2, \ldots, B_n$ cũng là n biến cố độc lập.

Bài tập 2.25. Một đợt xổ số phát hành N vé, trong đó có M vé có thưởng. Một người mua r vé ($r < N - M$). Tính xác suất để người đó có ít nhất một vé trúng thưởng.

Bài tập 2.26. Một người có 3 con gà mái, 2 con gà trống nhốt chung một lồng. Một người đến mua, người bán bắt ngẫu nhiên ra một con. Người mua chấp nhận mua con đó.

(a) Tìm xác suất để người đó mua được con gà mái.
Người thứ hai đến mua, người bán lại bắt ngẫu nhiên ra một con.

(b) Tìm xác suất người thứ hai mua được gà trống, biết rằng người thứ nhất mua được gà mái.

(c) Xác suất trên bằng bao nhiêu nếu người bán gà quên mất rằng con gà bán cho người thứ nhất là gà trống hay gà mái?

Bài tập 2.27. Có một nhóm n sinh viên, mỗi người có một áo mưa giống hệt nhau. Một hôm trời mưa, cả nhóm cùng đến lớp và treo áo ở mắc áo. Lúc ra về vì vội vàng mỗi người lấy hú họa một cái áo. Tính xác suất có ít nhất một sinh viên chọn đúng áo của mình.

Bài tập 2.28. Một người viết n lá thư và bỏ n lá thư này vào trong n phong bì đã viết sẵn địa chỉ. Tìm xác suất sao cho có ít nhất một lá thư được bỏ đúng vào phong bì của nó.

Bài tập 2.29. Ba xạ thủ, mỗi người bắn một viên đạn vào mục tiêu với xác suất trúng đích của mỗi người là $0.6; 0.7; 0.8$. Tìm xác suất

(a) chỉ có người thứ hai bắn trúng.

(b) có đúng một người bắn trúng.

(c) có ít nhất một người bắn trúng.

(d) cả ba người đều bắn trúng.

(e) có đúng hai người bắn trúng.

(f) có ít nhất hai người bắn trúng.

(g) có không quá hai người bắn trúng.

Bài tập 2.30. Cho hai biến cố xung khắc A và B, sao cho $P(A) \neq 0, P(B) \neq 0$.
Chứng minh rằng A và B phụ thuộc nhau.

Bài tập 2.31. Ba con ngựa a, b, c trong một cuộc đua ngựa. Nếu xuất hiện bac có nghĩa là b đến đích trước, sau đó là a và về cuối là c. Khi đó tập hợp tất cả các khả năng xuất hiện là

$$\Omega = \{abc, acb, bac, bca, cab, cba\}.$$

Giả sử rằng $P[\{abc\}] = P[\{acb\}] = 1/18$ và bốn khả năng còn lại đều có xác suất xảy ra là $2/9$. Hơn nữa, ta định nghĩa các biến cố

$$A = \text{"}a \text{ đến đích trước } b\text{"} \quad \text{và} \quad B = \text{"}a \text{ đến đích trước } c\text{"}$$

(a) Hai biến cố A và B có tạo thành một hệ đầy đủ của Ω?

(b) Hai biến cố A và B có độc lập nhau?

Bài tập 2.32. Có tồn tại hai biến cố xung khắc và độc lập không?

Bài tập 2.33. Một máy tính điện tử gồm có n bộ phận. Xác suất hỏng trong khoảng thời gian T của bộ phận thứ k bằng $p_k(k = 1, 2, \ldots, n)$. Nếu dù chỉ một bộ phận bị hỏng thì máy tính ngừng làm việc. Tìm xác suất để máy tính ngừng làm việc trong khoảng thời gian T.

Bài tập 2.34. Chứng minh rằng nếu

$$P(A|B) > P(A), \text{ thì } P(B|A) > P(B)$$

Bài tập 2.35. Giả sử $P(AB) = 1/4$, $P(A|\overline{B}) = 1/8$ và $P(B) = 1/2$. Tính $P(A)$.

Bài tập 2.36. Biết rằng ta đã nhận được ít nhất một mặt ngửa trong 3 lần tung đồng xu độc lập. Hỏi xác suất đạt được cả 3 mặt ngửa là bao nhiêu?

Bài tập 2.37. Tung một con xúc sắc hai lần độc lập nhau. Biết rằng lần tung thứ nhất được số nốt chẵn. Tính xác suất tổng số nốt hai lần tung bằng 4.

Bài tập 2.38. Giả sử $P(A) = P(B) = 1/4$ và $P(A|B) = P(B)$. Tính $P(A\overline{B})$.

Bài tập 2.39. Bắn liên tiếp vào một mục tiêu cho đến khi có một viên đạn đầu tiên rơi vào mục tiêu thì ngừng bắn. Tìm xác suất sao cho phải bắn đến viên thứ 6, biết rằng xác suất trúng đích của mỗi viên đạn là 0.2 và các lần bắn là độc lập.

Bài tập 2.40. Giả sử các biến cố $A_1, \ldots, A_n$ độc lập có xác suất tương ứng $P(A_k) = p_k(k = 1, \ldots, n)$. Tìm xác suất sao cho:

(a) không một biến cố nào trong các biến cố đó xuất hiện.

(b) có ít nhất một biến cố trong các biến cố đó xuất hiện.
Từ đó suy ra công thức khai triển tích

$$\prod_{k=1}^{n}(1 - p_k)$$

Bài tập 2.41. Có ba tiêu chí phổ biến cho việc chọn mua một chiếc xe hơi mới nào đó là A: hộp số tự động, B: động cơ V6, và C: điều hòa nhiệt độ. Dựa trên dữ liệu bán hàng trước đây, ta có thể giả sử rằng $P(A) = 0.7$, $P(B) = 0.75$, $P(C) = 0.80$, $P(A + B) = 0.80$, $P(A + C) = 0.85$, $P(B + C) = 0.90$ và $P(A + B + C) = 0.95$, với $P(A)$ là xác suất người mua bất kì chọn tiêu chí A, v.v.... Tính xác suất của các biến cố sau:

(a) người mua chọn ít nhất một trong 3 tiêu chí.

(b) người mua không chọn tiêu chí nào trong 3 tiêu chí trên.

(c) người mua chỉ chọn tiêu chí điều hòa nhiệt độ.

(d) người mua chọn chính xác một trong 3 tiêu chí.

2.5 Công thức xác suất đầy đủ, công thức Bayes

Bài tập 2.42. Giả sử $P(B|A_1) = 1/2$, $P(B|A_2) = 1/4$ với A_1 và A_2 là hai biến cố đồng khả năng và tạo thành một hệ đầy đủ các biến cố. Tính $P(A_1|B)$.

Bài tập 2.43. Một hộp đựng 10 phiếu trong đó có 2 phiếu trúng thưởng. Có 10 người lần lượt rút thăm. Tính xác suất nhận được phần thưởng của mỗi người.

Bài tập 2.44. Có hai hộp đựng bi. Hộp 1 đựng 20 bi trong đó có 5 bi đỏ và 15 bi trắng. Hộp 2 đựng 15 bi trong đó có 6 bi đỏ và 9 bi trắng. Lấy một bi ở hộp 1 bỏ vào hộp 2 , trộn đều rồi lấy ra một bi. Tính xác suất nhận được bi đỏ? bi trắng?

Bài tập 2.45. Trong một vùng dân cư, cứ 100 người thì có 30 người hút thuốc lá. Biết tỷ lệ người bị viêm họng trong số người hút thuốc lá là 60%, trong số người không hút thuốc lá là 30%. Khám ngẫu nhiên một người và thấy người đó bị viêm họng.

(a) Tìm xác suất để người đó hút thuốc lá.

(b) Nếu người đó không bị viêm họng thì xác suất để người đó hút thuốc lá là bao nhiêu.

Bài tập 2.46. Một trung tâm chẩn đoán bệnh dùng một phép kiểm định T. Xác suất để một người đến trung tâm mà có bệnh là 0.8. Xác suất để người khám có bệnh khi phép kiểm định dương tính là 0.9 và xác suất để người khám không có bệnh khi phép kiểm định âm tính là 0.5. Tính các xác suất

(a) phép kiểm định là dương tính.

(b) phép kiểm định cho kết quả đúng.

Bài tập 2.47. Một cặp trẻ sinh đôi có thể do cùng một trứng (sinh đôi thật) hay do hai trứng khác nhau sinh ra (sinh đôi giả). Các cặp sinh đôi thật luôn luôn có cùng giới tính. Các cặp sinh đôi giả thì giới tính của mỗi đứa độc lập với nhau và có xác suất là 0.5. Thống kê cho thấy 34% cặp sinh đôi là trai; 30% cặp sinh đôi là gái và 36% cặp sinh đôi có giới tính khác nhau.

(a) Tính tỷ lệ cặp sinh đôi thật.

(b) Tìm tỷ lệ cặp sinh đôi thật trong số các cặp sinh đôi có cùng giới tính.

Bài tập 2.48. Có 10 hộp bi, trong đó có 4 hộp loại I, 3 hộp loại II, còn lại là hộp loại III. Hộp loại I có 3 bi trắng và 5 đỏ, hộp loại II có 4 bi trắng và 6 bi đỏ, hộp loại III có 2 bi trắng và 2 bi đỏ.

(a) Chọn ngẫu nhiên một hộp và từ đó lấy hú họa 1 bi. Tìm xác suất để được bi đỏ.

(b) Chọn ngẫu nhiên một hộp và từ đó lấy 1 bi thì được bi trắng. Tìm xác suất để bi lấy ra thuộc loại II.

Bài tập 2.49. Có hai lô sản phẩm, lô thứ nhất có 10 sản phẩm loại I và 2 sản phẩm loại II. Lô thứ hai có 16 sản phẩm loại I và 4 sản phẩm loại II. Từ mỗi lô ta lấy ngẫu nhiên một sản phẩm. Sau đó, từ 2 sản phẩm thu được lấy hú họa ra một sản phẩm. Tìm xác suất để sản phẩm lấy ra sau cùng là sản phẩm loại I.

Bài tập 2.50. Có 2 lô gà. Lô thứ nhất gồm 15 con, trong đó có 3 con gà trống. Lô thứ hai gồm 20 con, trong đó có 4 gà trống. Một con từ lô thứ hai nhảy sang lô thứ nhất. Sau đó từ lô thứ nhất ta bắt ngẫu nhiên ra một con. Tìm xác suất để con gà bắt ra là gà trống.

Bài tập 2.51. Ba máy tự động sản xuất cùng một loại chi tiết, trong đó máy I sản xuất 25%, máy II sản xuất 30% và máy III sản xuất 45% tổng sản lượng. Tỷ lệ phế phẩm của các máy lần lượt là $0.1\%; 0.2\%; 0.4\%$. Tìm xác suất để khi chọn ngẫu nhiên ra 1 sản phẩm từ kho thì

(a) được chi tiết phế phẩm.

(b) chi tiết phế phẩm đó do máy II sản xuất.

Bài tập 2.52. Giả sử 3 máy M_1, M_2, M_3 sản xuất lần lượt 500, 1000, 1500 linh kiện mỗi ngày với tỉ lệ phế phẩm tương ứng là 5%, 6% và 7%. Vào cuối ngày làm việc nào đó, người ta lấy một linh kiện được sản xuất bởi một trong 3 máy trên một cách ngẫu nhiên, kết quả là được một phế phẩm. Tìm xác suất linh kiện này được sản xuất bởi máy M_3.

Bài tập 2.53. Ba khẩu pháo cùng bắn vào một mục tiêu với xác suất trúng đích của mỗi khẩu là $0.4; 0.7; 0.8$. Biết rằng xác suất để mục tiêu bị tiêu diệt khi trúng một phát đạn là 30%, khi trúng 2 phát đạn là 70%, còn trúng 3 phát đạn thì chắc chắn mục tiêu bị tiêu diệt. Giả sử mỗi khẩu pháo bắn 1 phát.

(a) Tính xác suất để mục tiêu bị tiêu diệt.

(b) Biết rằng mục tiêu đã bị tiêu diệt. Tính xác suất để khẩu thứ 3 có đóng góp vào thành công đó.

Bài tập 2.54. Hộp I có 10 linh kiện trong đó có 3 bị hỏng. Hộp II có 15 linh kiện trong đó có 4 bị hỏng. Lấy ngẫu nhiên từ mỗi hộp ra một linh kiện.

(a) Tính xác suất để cả 2 linh kiện lấy ra đều hỏng.

(b) Số linh kiện còn lại trong 2 hộp đem bỏ vào hộp III. Từ hộp III lấy ngẫu nhiên ra 1 linh kiện. Tính xác suất để linh kiện lấy ra từ hộp III bị hỏng.

(c) Biết linh kiện lấy ra từ hộp III là hỏng. Tính xác suất để 2 linh kiện lấy ra từ hộp I và II lúc ban đầu là hỏng.

Bài tập 2.55. Có 3 cửa hàng I, II, III cùng kinh doanh sản phẩm Y, trong đó thị phần của cửa hàng I, III như nhau và gấp đôi thị phần của cửa hàng II. Tỉ lệ sản phẩm loại A trong 3 cửa hàng lần lượt là 70%, 75% và 50%. Một khách hàng chọn ngẫu nhiên 1 cửa hàng và từ đó mua một sản phẩm.

(a) Tính xác suất để khách hàng mua được sản phẩm loại A.

(b) Giả sử khách hàng đã mua được sản phẩm loại A, hỏi khả năng người ấy đã mua được ở cửa hàng nào là nhiều nhất.

Bài tập 2.56. Cho ε là một phép thử ngẫu nhiên với 3 biến cố sơ cấp có thể xảy ra là A, B và C. Giả sử ta tiến hành ε vô hạn lần và độc lập nhau. Tính theo $P(A), P(B)$ xác suất biến cố A xuất hiện trước B.