目　录

第一章

平稳序列

§ **1.1** 时间序列的定义与分解

- 按照时间的顺序把随机事件变化发展的过程记录下来就构成了一个时间序列。对时间序列进行观察、研究，找寻它变化发展的规律，预测它将来的走势就是时间序列分析。

一、时间序列的定义及举例

- 时间序列的定义

按时间次序排列的随机变量序列

$$X_1, X_2, \cdots \qquad (1.1)$$

记为　$X(t)$,或X_t

- 时间序列（**1.1**）的n个观测样本:随机序列的n个有序观测值

$$x_1, x_2, \cdots, x_n \qquad (1.2)$$

- 称序列　$x_1, x_2, \cdots \qquad (1.3)$

是时间序列(1.1)的一次实现或一条轨道

§ 1.2 平稳序列

1. 时间序列的分解中趋势项和季节项等通常可以用非随机函数来描述。
2. 随机项通常呈现出沿一水平波动的性质，且前后数据具有一定的相关性，与独立序列有所不同。

一、平稳序列

定义2.1　如果时间序列$\{X_t\} = \{X_t : t \in \mathbb{N}\}$ 满足
(1) 对任何$t \in \mathbb{N}$, $EX_t^2 < \infty$;
(2) 对任何$t \in \mathbb{N}$, $EX_t = \mu$;
(3) 对任何$t, s \in \mathbb{N}$, $E[(X_t - \mu)(X_s - \mu)] = \gamma_{t-s}$,
则称$\{X_t\}$ 是**平稳时间序列**, 简称为**平稳序列**. 称实数列$\{\gamma_t\}$为$\{X_t\}$的**自协方差函数**.

例2.1 平稳序列的线性变换

- $\{X_t\}$为平稳序列，期望μ，自协方差函数$\gamma(t)$。

$Y_t = aX_t + b, t \in \mathbb{Z}$。

$EY_t = a\mu + b$

$\mathrm{Cov}(Y_s, Y_{s+t}) = a^2\mathrm{Cov}(X_t, X_{t+s}) = a^2\gamma(t)$.

- 可见$\{Y_t\}$平稳。

- 若取

$$Y_t = \frac{X_t - \mu}{\sqrt{\gamma_0}}$$

则$EY_t = 0, \mathrm{Var}(Y_t) = 1$，称$\{Y_t\}$为$\{X_t\}$的标准化序列。

例2.2 调和平稳序列

- 设a, b是常数,随机变量U 在$(-\pi, \pi)$内均匀分布，则

$$X_t = b\cos(at + U), \quad t \in \mathbb{Z}$$

是平稳序列.

- $$\begin{aligned} \mathrm{E}X_t &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} b\cos(at+u)\,du = 0, && (1)\\ \mathrm{E}(X_tX_s) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} b^2\cos(at+u)\cos(as+u)\,du && (2)\\ &= \frac{1}{2}b^2\cos((t-s)a), && (3) \end{aligned}$$

性质(3)、Schwarz不等式

- $$|E(XY)| \le \sqrt{EX^2EY^2}$$
- $$|\mathrm{Cov}(X,Y)| \le \sqrt{\mathrm{Var}(X)\mathrm{Var}(Y)}$$
- 推论:
$$\mathrm{E}|X| \le \sqrt{\mathrm{E}|X|^2}$$
- $$\gamma_t = \mathrm{Cov}(Y_1, Y_{t+1}) \le \gamma_0$$

自相关系数

- **定义2.2** 设平稳序列$\{X_t\}$的标准化序列是$\{Y_t\}$. $\{Y_t\}$的自协方差函数

$$\rho_k = \gamma_k/\gamma_0, \quad k \in \mathbb{Z},$$

称为平稳序列$\{X_t\}$的**自相关系数**.

自协方差函数的性质

- (1) 对称性: $\gamma_k = \gamma_{-k}, \forall k \in \mathbb{Z}$.
- (2) 非负定性:

$$\Gamma_n = (\gamma_{k-j})_{k,j=1}^n = \begin{pmatrix} \gamma_0 & \gamma_1 & \cdots & \gamma_{n-1} \\ \gamma_1 & \gamma_0 & \cdots & \gamma_{n-2} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \gamma_{n-1} & \gamma_{n-2} & \cdots & \gamma_0 \end{pmatrix}$$

非负定($\forall n$)。

- (3) 有界性：$|\gamma_k| \le \gamma_0, \forall k \in \mathbb{Z}$。
- 任何满足上述三个性质的实数列都被称为**非负定序列**.

- 所以平稳序列的自协方差函数是非负定序列.
- 可以证明，每个非负定序列都可以是一个平稳序列的自协方差函数(见[9]).

白噪声、白噪声模拟

- **定义2.3** (白噪声) 设$\{\varepsilon_t\}$ 是一个平稳序列. 如果对任何$s, t \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} \mathrm{E}\varepsilon_t &= \mu, && (4)\\ \mathrm{Cov}(\varepsilon_t, \varepsilon_s) &= \sigma^2\delta_{t-s} = \begin{cases} \sigma^2, & t = s, \\ 0, & t \ne s, \end{cases} && (5) \end{aligned}$$

则称$\{\varepsilon_t\}$是一个**白噪声**，记做$\mathrm{WN}(\mu, \sigma^2)$.

性质(2)的证明

证 任取一个n维实向量 $\alpha = (a_1, a_2, \cdots, a_n)^T$

有

$$\begin{aligned} \alpha^T\Gamma_n\alpha &= \sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n a_ia_j\gamma_{i-j} \\ &= E\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n a_ia_j(X_i-\mu)(X_j-\mu) \\ &= E[\sum_{i=1}^n a_i(X_i-\mu)]^2 \ge 0 \end{aligned}$$

非负定性、随机变量的线性相关

- Γ_n的特点：设$\alpha = (a_1, \ldots, a_n)^T$，则

$$\alpha^T\Gamma_n\alpha = \mathrm{Var}\left(\sum_{i=1}^n a_iX_i\right) \ge 0$$

- Γ_n退化(不满秩)当且仅当存在$\alpha \ne 0$使得

$$\mathrm{Var}\left(\sum_{i=1}^n a_iX_i\right) = 0$$

这时称随机变量$X_1, \ldots, X_n$是线性相关的。

- 如果$X_1, \ldots, X_n$线性相关，则$m \ge n$时$X_1, \ldots, X_m$ 线性相关。

- 设$\{\varepsilon_t\}$是白噪声,
- 当$\{\varepsilon_t\}$ 是独立序列时，称$\{\varepsilon_t\}$ 是**独立白噪声**;
- 当$\mu = 0$ 时，称$\{\varepsilon_t\}$ 为**零均值白噪声**;
- 当$\mu = 0, \sigma^2 = 1$ 时，称$\{\varepsilon_t\}$ 为**标准白噪声**.
- 当ε_t服从正态分布时，称$\{\varepsilon_t\}$是**正态白噪声**.

例2.3 Poisson过程

- 如果连续时的随机过程$\{N(t): t \in [0,\infty)\}$满足
- (1) $N(0)=0$, 且对任何$s \ge 0, t > 0$ 和非负整数k,

$$P(N(t+s)-N(s)=k) = \frac{(\lambda t)^k}{k!}\exp[-\lambda t], (\lambda > 0,)$$

- (2) $\{N(t)\}$ 有独立增量性: 对任何$n>1$ 和$0 \le t_0 < t_1 < \cdots < t_n$, 随机变量$N(t_j)-N(t_{j-1})$, $j=1,2,\cdots,n$ 相互独立 则称$\{N(t)\}$ 是一个强度λ的**Poisson 过程**.
- $\mathrm{E}N(t)=\lambda t$, $\mathrm{Var}(N(t))=\lambda t$.

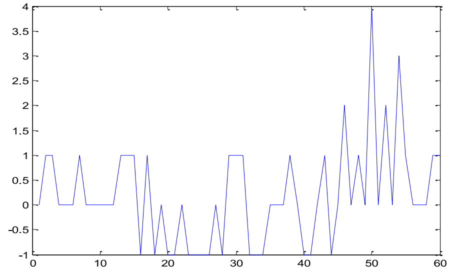
Poisson白噪声

- 定义

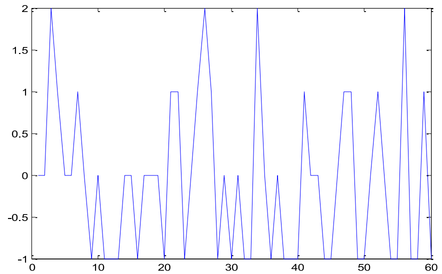
$$\varepsilon_n = N(n+1)-N(n)-\lambda, \quad n=1,2,\ldots,$$

- $\mathrm{E}\varepsilon_n = 0$,
- $\mathrm{Var}(\varepsilon_n)=\lambda$.
- $\{\varepsilon_n\}$ 是独立白噪声, 称为**Poisson白噪声**.
- ave和std表示样本平均和样本标准差。

Poisson白噪声的60个样本I



样本II



例：布朗运动

- 如果连续时的随机过程$\{B(t): t \in [0,\infty)\}$满足

  (1) $B(0)=0$, 且对任何$s \ge 0, t > 0$, $B(t+s)-B(s)$服从正态分布$N(0,t)$;

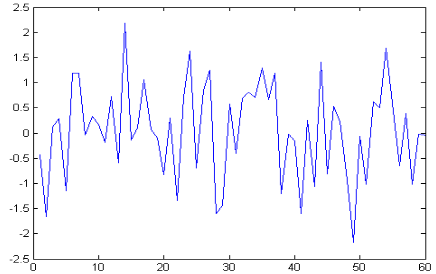
  (2) $\{B(t)\}$ 有独立增量性
- 则称$\{B(t)\}$是一个标准布朗运动.

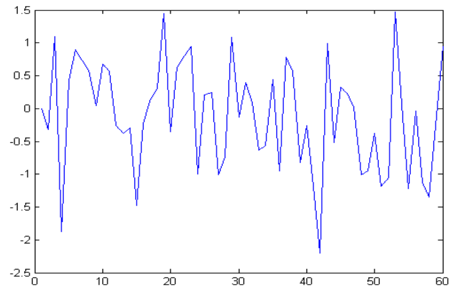
- 定义

$$\varepsilon_n = B(n+1)-B(n), \quad n=1,2,\ldots,$$

则$\{\varepsilon_n\}$ 是一个标准正态白噪声.

标准正态白噪声的60个样本: A=randn(1,60); plot(A)





随机相位

- $U_1, , U_2, \cdots$ iid $\mathrm{U}(0, 2\pi)$.

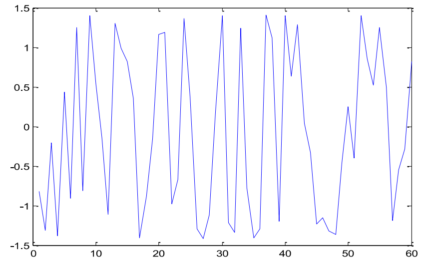
$$X_t = b\cos(at + U_t), \quad t \in \mathbb{Z},$$

(a，b为常数)

- 则X_t 独立；

$\mathrm{E}X_t = 0$，$\mathrm{Var}X_t = 0.5b^2$.

- X_t是独立白噪声。



- (2) 如果$\{X_t\}$ 和$\{Y_t\}$不相关，则$\{Z_t\}$是平稳序列，有自协方差函数

$$\gamma_Z(k) = \gamma_X(k) + \gamma_Y(k), \quad k = 0, 1, 2, \ldots.$$

- (3) 当$\mu_X = \mu_Y = 0$且两序列正交时(2)的结论成立。

随机相位**独立白噪声的60个样本**

$X_t = b\cos(at + U_t), t \in Z$

独立白噪声的60个样本，其中 $U_1, U_2, \cdots$

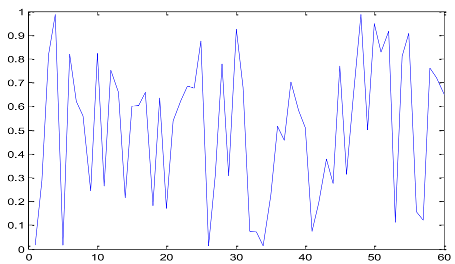
独立同分布且都在上服从$(0, 2\pi)$**均匀分布**

二、正交和不相关性

- 不相关：$\mathrm{Cov}(X, Y) = 0$.
- 正交：$\mathrm{E}(XY) = 0$.
- 对零均值随机变量正交与不相关等价。
- 对平稳列$\{X_t\}$和$\{Y_t\}$，
  - 不相关: $\mathrm{Cov}(X_t, Y_s) = 0, \ \forall t, s$.
  - 正交：$\mathrm{E}(X_t Y_s) = 0, \ \forall t, s$.

§1.3 线性平稳序列和线性滤波

- **有限运动平均**
- **线性平稳序列**
- **时间序列的线性滤波**



定理2.2

- 平稳列$\{X_t\}$，$\{Y_t\}$，自协方差函数$\gamma_X(t)$，$\gamma_Y(t)$，期望μ_X，μ_Y。

$$Z_t = X_t + Y_t, t \in \mathbb{Z}$$

- (1) 如果$\{X_t\}$ 和$\{Y_t\}$正交，则$\{Z_t\}$是平稳序列，有自协方差函数

$$\gamma_Z(k) = \gamma_X(k) + \gamma_Y(k) - 2\mu_X\mu_Y, \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

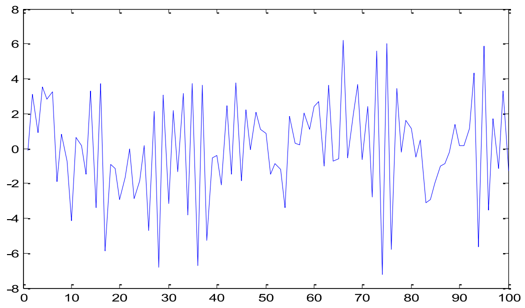
有限运动平均

设$\{\varepsilon_t\} = \{\varepsilon_t : \ t \in \mathbb{Z}\}$ 是$\mathrm{WN}(0, \sigma^2)$. 对于非负整数q和常数$a_0, a_1, \ldots, a_q$，我们称

$$X_t = \sum_{j=0}^{q} a_j \varepsilon_{t-j} = a_0\varepsilon_t + a_1\varepsilon_{t-1} + \cdots + a_q\varepsilon_{t-q}, \quad t \in \mathbb{Z}$$

是白噪声$\{\varepsilon_t\}$ 的(有限)运动平均，简称为MA (Moving Average). 运动平均又称作滑动平均.

$X_t = \varepsilon_t - 0.36 * \varepsilon_{t-1} + 0.85 * \varepsilon_{t-2}, \varepsilon_t \sim WN(0, 2^2)$



MA的平稳性

$$EX_t = 0$$

$$EX_{t+k}X_t = \begin{cases} \sigma^2 \sum_{j=0}^{q-k} a_j a_{j+k}, & 0 \le k \le q, \\ 0, & k > q \end{cases}$$

$\{X_t\}$平稳。

- $\gamma_k = 0, \forall k > q$, 称这样的序列为$q$相关的。

线性平稳序列

- 绝对可和: 如果实数列$\{a_j\}$ 满足

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} |a_j| < \infty,$$

则称$\{a_j\}$是绝对可和的. 记$\{a_j\} \in l_1$.

- 对于绝对可和的实数列$\{a_j\}$, 定义零均值白噪声$\{\varepsilon_t\}$的无穷滑动和如下

$$X_t = \sum_{j=-\infty}^{\infty} a_j \varepsilon_{t-j}, \quad t \in \mathbb{Z}.$$

则$\{X_t\}$是平稳序列。

概率极限定理

- **定理3.1** (单调收敛定理) 如果非负随机变量序列单调不减: $0 \le \xi_1 \le \xi_2 \le \cdots$, 则当$\xi_n \to \xi$, a.s. 时, 有$E\xi = \lim_{n\to\infty} E\xi_n$.

对于任何时间序列$\{Y_t\}$, 利用单调收敛定理得到

$$E\Big[\sum_{t=-\infty}^{\infty} |Y_t|\Big] = \lim_{n\to\infty} E\Big[\sum_{t=-n}^{n} |Y_t|\Big] = \sum_{t=-\infty}^{\infty} E|Y_t|.$$

- **定理3.2** (控制收敛定理) 如果随机变量序列$\{\xi_n\}$满足$|\xi_n| \le \xi_0$ a.s. 和$E|\xi_0| < \infty$, 则当$\xi_n \to \xi$, a.s.时, $E|\xi| < \infty$ 并且$E\xi_n \to E\xi$.

由切比雪夫不等式$P(|\xi| \ge n) \le E|\xi|/n$**及**$E|\xi| < \infty$**，得**

$$P(|\xi| = +\infty) = P\Big(\bigcap_{n=1}^{\infty} \{|\xi| \ge n\}\Big) = \lim_{n\to\infty} P(|\xi| \ge n) = 0 .$$

1. 线性序列的a.s.收敛性

设

$$\eta = \sum_{j=-\infty}^{\infty} |a_j||\varepsilon_{t-j}|$$

则η有定义（允许取$+\infty$）; 又由单调收敛定理得

$$E\eta = \sum_{j=-\infty}^{\infty} |a_j| E|\varepsilon_{t-j}| \le \sigma \sum_{j=-\infty}^{\infty} |a_j| < \infty$$

因此$\eta < \infty$, a.s.(否则$E\eta = +\infty$)。

$$\xi = \sum_{j=-\infty}^{\infty} a_j \varepsilon_{t-j} \qquad (*)$$

在a.s.收敛意义下存在。

2. 线性序列的平稳性

由$\sum_j |a_j| E|\varepsilon_{t-j}| < \infty$及控制收敛定理得

$$E\sum_j a_j \varepsilon_{t-j} = \sum_j a_j E\varepsilon_{t-j} = 0$$

令

$$V = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \sum_{l=-\infty}^{\infty} |a_j||a_l||\epsilon_{t-j}||\epsilon_{t+k-l}|$$

则

$$EV = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \sum_{l=-\infty}^{\infty} |a_j||a_l| E|\epsilon_{t-j}||\epsilon_{t+k-l}|$$

$$\le \sum_{j=-\infty}^{\infty} \sum_{l=-\infty}^{\infty} |a_j||a_l|\sigma^2 = \sigma^2 \left(\sum_{j=-\infty}^{\infty} |a_j|\right)^2 < \infty$$

由控制收敛定理得

$$
\begin{aligned}
EX_tX_{t+k} &= E\sum_{j=-\infty}^{\infty} a_j\varepsilon_{t-j}\sum_{l=-\infty}^{\infty} a_l\varepsilon_{t+k-l} \\
&= \sum_{j=-\infty}^{\infty}\sum_{l=-\infty}^{\infty} a_ja_lE(\varepsilon_{t-j}\varepsilon_{t+k-l}) \\
&= \sigma^2\sum_{j=-\infty}^{\infty} a_ja_{j+k}
\end{aligned}
$$

即$\{X_t\}$是平稳序列, $EX_t=0$，$\gamma_k=\sigma^2\sum_{j=-\infty}^{\infty}a_ja_{j+k}$.

定理3.3 当$\{a_j\}\in l_2$时，有自协方差函数$\lim_{k\to\infty}\gamma_k=0$.

- 证 当$k\to\infty$时

$$
\begin{aligned}
|\gamma_k| &= \sigma^2\left|\sum_{j=-\infty}^{+\infty}a_ja_{j+k}\right| \\
&\le \sigma^2\sum_{|j|\le k/2}|a_ja_{j+k}|+\sigma^2\sum_{|j|>k/2}|a_ja_{j+k}| \\
&\le \sigma^2\left[\sum_{j=-\infty}^{+\infty}a_j^2\sum_{|j|\le k/2}a_{j+k}^2\right]^{1/2}+ \\
&\quad \sigma^2\left[\sum_{j=-\infty}^{+\infty}a_j^2\sum_{|j|>k/2}a_j^2\right]^{1/2} \\
&\le 2\sigma^2\left[\sum_{j=-\infty}^{+\infty}a_j^2\sum_{|j|\ge k/2}a_{j+k}^2\right]^{1/2}\to 0.
\end{aligned}
$$

- 如果输入信号$\{X_t\}$是平稳列则输出$\{Y_t\}$也是平稳列。
-
$$\mu_Y=EY_t=\sum_{j=-\infty}^{\infty}h_jEX_{t-j}=\mu_X\sum_{j=-\infty}^{\infty}h_j$$
-
$$
\begin{aligned}
\gamma_Y(n)=\mathrm{Cov}(Y_{n+1},Y_1) &= \sum_{j,k=-\infty}^{\infty}h_jh_kE[(X_{n+1-j}-\mu)(X_{1-k}-\mu)] \\
&= \sum_{j,k=-\infty}^{\infty}h_jh_k\gamma_{n+k-j}
\end{aligned}
$$

注1:绝对可和下的线性序列满足

$$
\begin{aligned}
&\sum_{k=-\infty}^{\infty}|\gamma_k|\le\sigma^2\sum_{k=-\infty}^{\infty}\sum_{j=-\infty}^{\infty}|a_ja_{j+k}| \\
&=\sigma^2\sum_{j=-\infty}^{\infty}|a_j|\sum_{k=-\infty}^{\infty}|a_{j+k}|=\sigma^2\left(\sum_{j=-\infty}^{\infty}|a_j|\right)^2\le\infty
\end{aligned}
$$

单边线性序列

-
$$X_t=\sum_{j=0}^{\infty}a_j\varepsilon_{t-j},\ t\in\mathbb{Z}$$

称为单边运动平均(MA)，或单边无穷滑动和。

-
$$\gamma_k=\begin{cases}\sigma^2\sum_{j=0}^{\infty}a_ja_{j+k}, & k\ge 0\\ \gamma_{-k} & k<0\end{cases}$$

矩形窗滤波器

- 取
$$h_j=\begin{cases}\frac{1}{2M+1}, & |j|\le M\\ 0, & |j|>M.\end{cases}$$

则
$$Y_t=\frac{1}{2M+1}\sum_{j=-M}^{M}x_{t-j}$$

注2:均方意义下的线性序列

- 设$\{a_j\}\in l_2$则
$$X_t=\sum_{j=-\infty}^{\infty}a_j\varepsilon_{t-j}\ (L^2) \qquad (**)$$
也是平稳序列。期望为零，自协方差函数同上。
- X_t定义的无穷级数是L^2收敛的。
$$E\Big(\sum_{|j|>N}a_j\varepsilon_{t-j}\Big)^2\le\sum_{|j|>N}\sigma^2a_j^2\to 0$$

线性滤波

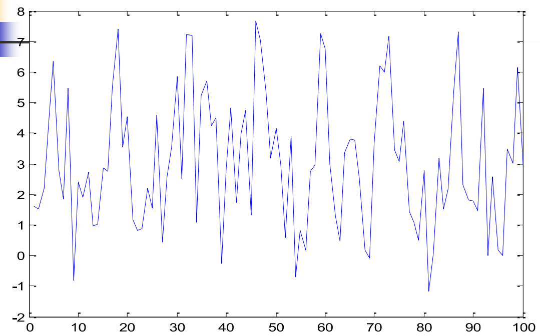
- 对序列$\{X_t\}$进行滑动求和:
$$Y_t=\sum_{j=-\infty}^{\infty}h_jX_{t-j},\quad t\in\mathbb{Z}$$

称为对$\{X_t\}$进行线性滤波。其中绝对可和的$\{h_j\}$称为一个保时线性滤波器。

例3.1 余弦波信号的滤波

-
$$X_t=S_t+\varepsilon_t=b\cos(\omega t+U)+\varepsilon_t,\quad t\in\mathbb{Z}$$

$U\sim U(,2\pi)$, $\{\varepsilon_t\}$零均值平稳, U与$\{\varepsilon_t\}$独立。
- 信号$\{S_t\}$方差$b^2/2$，噪声$\{\varepsilon_t\}$方差σ^2, 信噪比$b^2/(2\sigma^2)$。

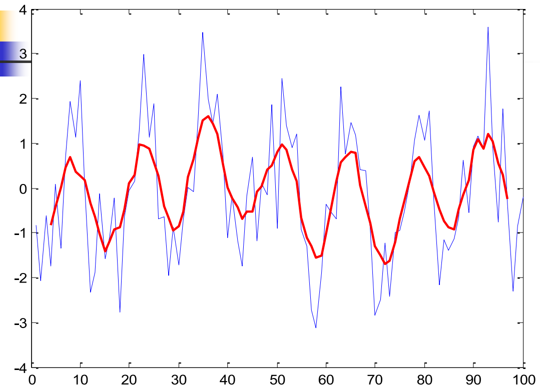


- 作矩形窗滤波:

$$Y_t = \frac{1}{2M+1}\sum_{j=-M}^{M} X_{t-j}$$
$$= \frac{b\sin[\omega(M+0.5)]}{(2M+1)\sin(\omega/2)}\cos(\omega t+U)+\eta_t$$
$$\eta_t = \frac{1}{2M+1}\sum_{j=-M}^{M}\varepsilon_{t-j}$$

- **注:**

$$\sum_{j=-M}^{j=M} b\cos(\omega(t-j)+U) = \sum_{j=-M}^{j=M} b\cos(\omega j)\cos(\omega t+U)$$
$$\sum_{j=-M}^{j=M}\cos(\omega j)\sin(\omega/2)$$
$$=\frac{1}{2}\sum_{j=-M}^{j=M}[\sin(\omega j+\omega/2)-\sin(\omega j-\omega/2)]$$
$$=\sin(\omega M+\omega/2)$$



§ 1.4 正态时间序列和随机变量的收敛性

$$X_t = \sum_{j=-\infty}^{\infty} a_j\varepsilon_{t-j},\quad t\in\mathbb{Z}.$$

$\{\varepsilon_t\}$是正态白噪声

随机向量的数学期望和方差

- 矩阵随机变量$\mathbf{X} = (X_{i,j})_{m\times n}$.
  $\mathrm{E}\mathbf{X} = (\mathrm{E}X_{i,j}) = (\mu_{ij})$.
  随机向量$\mathbf{X} = (X_1, X_2, \ldots, X_n)^T$. 则

$$\Sigma_X = \mathrm{Var}(\mathbf{X}) = \mathrm{E}[(\mathbf{X}-\mu)(\mathbf{X}-\mu)^T]$$

- $\Sigma_X = \mathrm{E}(\mathbf{X}\mathbf{X}^T) - \mathrm{E}(\mathbf{X})\mathrm{E}(\mathbf{X})^T$.

随机向量线性变换

- $\mathbf{Y} = \mathbf{a} + B\mathbf{X}$则
  $\mathrm{E}\mathbf{Y} = \mathbf{a} + B\mathrm{E}\mathbf{X}$,
  $\mathrm{Var}(\mathbf{Y}) = B\Sigma_X B^T$.

多维正态分布

- 称随机向量$\mathbf{Y} = (Y_1, Y_2, \cdots, Y_m)^T$ 服从m维(或多维)正态分布, 如果存在m 维常数列向量μ, $m\times n$ 常数矩阵B 和iid的标准正态随机变量$X_1, X_2, \ldots, X_n$ 使得$\mathbf{Y} = \mu + B\mathbf{X}$.
  这时$\mathrm{E}\mathbf{Y} = \mu$, $\Sigma = \mathrm{Var}(\mathbf{Y}) = BB^T$.

随机向量X的特征函数

$$\mathbf{X} = (X_1, X_2, \cdots, X_n)^T, \mathbf{t} = (t_1, t_2, \cdots, t_n)^T$$

$$\varphi_X(\mathbf{t}) = \mathbf{E}\exp(i\mathbf{t}^T\mathbf{X}) = \prod_{j=1}^{n}\exp(-\frac{t_j^2}{2}) = \exp(-\frac{\mathbf{t}^T\mathbf{t}}{2})$$

随机向量Y的特征函数

$$\varphi_{\mathbf{Y}}(\mathbf{t}) = \mathbf{E}\exp(i\mathbf{t}^T\mathbf{Y}) = \exp(i\mathbf{t}^T\mu)\mathbf{E}\exp(i(\mathbf{t}^T B)\mathbf{X})$$

$$= \exp(i\mathbf{t}^T\mu - \frac{1}{2}\mathbf{t}^T\Sigma\mathbf{t})$$

正态平稳序列

- **定义4.2** 对于时间序列$\{X_t\}$，如果对任何$n \geq 1$和$t_1, t_2, \cdots, t_n \in \mathbb{Z}$，有$(X(t_1), X(t_2), \ldots, X(t_n))$服从多元正态分布，则称$\{X_t\}$是正态时间序列.
- 特别当$\{X_t\}$还是平稳序列时，又称为正态平稳序列.

- $\xi_n \sim F_n(x)$，$\xi \sim F(x)$。
- 如果在F的每个连续点x 有$F_n(x) \to F(x)$，则称ξ_n依分布收敛到ξ，记做$\xi_n \xrightarrow{d} \xi$;
- 如果对任取$\epsilon > 0$ 有$P(|\xi_n - \xi| \geq \epsilon) \to 0$，则称$\xi_n$依概率收敛到$\xi$，或称$\xi_n$相合于(弱收敛到)$\xi$，记做$\xi_n \xrightarrow{\mathrm{P}} \xi$;

- **Y**的特征函数为

$$\phi_Y(t) = \exp\left[i\mathbf{t}^T\mu - \frac{1}{2}\mathbf{t}^T\Sigma\mathbf{t}\right]$$

.

这是多维正态分布的等价定义。记为$Y \sim \mathrm{N}(\mu, \Sigma)$.

- $\{X_t : t \in \mathbb{N}\}$ 是正态时间序列$\Longleftrightarrow$ 对任何正整数m，$(X_1, X_2, \ldots, X_m)$服从m维正态分布;
- $\{X_t : t \in \mathbb{Z}\}$ 是正态时间序列$\Longleftrightarrow$ 对任何正整数m，$(X_{-m}, X_{-m+1}, \ldots, X_m)$服从$2m+1$维正态分布.

- 如果$E|\xi_n - \xi| \to 0$，则称ξ_n L^1收敛到ξ (很少用);
- 如果$E|\xi_n - \xi|^2 \to 0$，则称ξ_n L^2(均方)收敛到ξ，记做$\xi_n \to \xi$ (L^2);

多维正态分布的充要条件

- **定理4.1** $\xi = (\xi_1, \xi_2, ..\xi_n)^T \sim \mathrm{N}(\mu, \Sigma)$的充分必要条件是
- 对任何$\mathbf{a} = (a_1, a_2, \cdots, a_n)^T \in \mathbb{R}^n$

$$Y = \mathbf{a}^T\xi \sim \mathrm{N}(\mathbf{a}^T\mu, \mathbf{a}^T\Sigma\mathbf{a}).$$

概率极限

- $\xi_n \sim F_n(x)$，$\xi \sim F(x)$。
- 如果在F的每个连续点x 有$F_n(x) \to F(x)$，则称ξ_n依分布收敛到ξ，记做$\xi_n \xrightarrow{d} \xi$;
- 如果对任取$\epsilon > 0$ 有$P(|\xi_n - \xi| \geq \epsilon) \to 0$，则称$\xi_n$依概率收敛到$\xi$，或称$\xi_n$相合于(弱收敛到)$\xi$，记做$\xi_n \xrightarrow{\mathrm{P}} \xi$;

定理4.2 L^2收敛$\Rightarrow$ L^1收敛$\Rightarrow$ 依概率收敛$\Rightarrow$ 依分布收敛。

正态序列收敛定理

- 如果正态序列$\xi_n \sim \mathrm{N}(\mu_n, \sigma_n^2)$, $n \in \mathbb{N}$ 依分布收敛到随机变量ξ, 则极限

$$\lim \mu_n = \mu, \quad \lim \sigma_n^2 = \sigma^2$$

存在，且$\xi \sim \mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$.

正态线性序列

定理4.4

- $\{\varepsilon_t\}$是正态WN$(0, \sigma^2)$序列，实数列$\{a_j\}$绝对可和，则线性序列

$$X_t = \sum_{j=-\infty}^{\infty} a_j \varepsilon_{t-j}$$

是零均值正态平稳列。

证明　平稳序列已证。下证为正态序列

先证对任何$m \in N_+$,有

$$X = (X_1, X_2, \cdots, X_m)^T \sim N(0, \textstyle\sum_m), \qquad (4.9)$$

其中 $\sum_m = (\gamma_{j-k})_{m\times m}, \gamma_i = \sigma^2 \sum_{j=-\infty}^{+\infty} a_j a_{j+i}$.

对任何 $b = (b_1, b_2, \cdots, b_m)^T$ ，定义

$$Y = b^T X = \sum_{k=1}^m b_k X_k, \quad \eta_n = \sum_{k=1}^m b_k \eta_k(n)$$

这里 $X_k = \sum_{j=-\infty}^{\infty} a_j \varepsilon_{k-j}$ 　$\eta_k(n) = \sum_{j=-n}^{n} a_j \varepsilon_{k-j}$

则有当 $n \to \infty$ 时, 有

$$E|\eta_k(n) - X_k| \to 0$$

$$E(|Y - \eta_n|) = E[|\sum_{k=1}^m b_k (X_k - \eta_k(n))|]$$

$$\le \sum_{k=1}^m |b_k| E[|X_k - \eta_k(n)|] \to 0$$

由定理4.2, 得到η_n依分布收敛到 Y ， 且

$$EY = \lim_{n\to\infty} E\eta_n = \sum_{k=1}^m b_k \lim_{n\to\infty} E\eta_k(n)$$

$$= \sum_{k=1}^m b_k EX_k = 0$$

$$\mathrm{var}(Y) = \lim_{n\to\infty} \mathrm{var}(\eta_n) = \sum_{k=1}^m \sum_{j=1}^m b_k \lim_{n\to\infty} E(\eta_k(n)\eta_j(n)) b_j$$

$$= \sum_{k=1}^m \sum_{j=1}^m b_k E(X_k X_j) b_j = b^T \Sigma_m b$$

则 $Y \sim N(EY, VarY)$. 从而由 $EY = 0, VarY = b^T \Sigma_m b$
和定理4.1得到(4.9).

用同样方法可以证明: 对任何 $l \in N_+$ 有

$$X = (X_{1-l}, X_{2-l}, \cdots, X_{m-l})^T \sim N(0, \textstyle\sum_m), \qquad (4.10)$$

其中$\sum_m = (\gamma_{j-k})_{m\times m}, \gamma_i = \sigma^2 \sum_{j=-\infty}^{+\infty} a_j a_{j+i}$

定理4.4成立.

- 注:当 $\{a_j\} \in l_2$ 时结论仍成立.

§ 1.5 严平稳序列及其遍历性

- 严平稳：$\{X_t\}$对$\forall n \in \mathbb{N}$和$k \in \mathbb{Z}$都有

$(X_1, X_2, \ldots, X_n)^T$ 和 $(X_{1+k}, X_{2+k}, \ldots, X_{n+k})^T$ 同分布.

特点：分布平移不变。对任多元函数$\phi(x_1, x_2, \ldots, x_m)$有$Y_t = \phi(X_{t+1}, \ldots, X_{t+m})$, $t \in \mathbb{Z}$仍是严平稳列。

严平稳与宽平稳关系

- 二阶矩有限的严平稳为宽平稳。
- 宽平稳一般不是严平稳。
- 正态平稳列既是宽平稳也是严平稳。

均值、自相关系数函数具有遍历性

$$P(<X(t)>=EX(t))=1$$

$$P(<X(t)X(s)>=EX(t)X(s))=1$$

严平稳遍历定理

如果$\{X_t\}$是严平稳遍历序列, 则有如下的结果:

1. 强大数律: 如果$E|X_1|<\infty$ 则

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n}X_t=EX_1,\ a.s..$$

2. 对任何多元函数$\phi(x_1,x_2,\cdots,x_m)$,

$$Y_t=\phi(X_{t+1},X_{t+2},\cdots,X_{t+m})$$

是严平稳遍历序列.

附注：宽平稳遍历性

例1：计算随机相位正弦波：

$X(t)=b\cos(at+U),\quad U\sim U(-\pi,\pi)$

$$\mathrm{E}X_t=0$$

$$\mathrm{E}(X_tX_s)=\frac{1}{2}b^2\cos((t-s)a)$$

严平稳遍历性

- 时间序列一般只有一条轨道。
- 要用时间序列$\{X_t\}$的一次实现$x_1,x_2,\ldots$推断$\{X_t\}$的统计性质.
- 遍历性可以保证从一条轨道可以推断整体的统计性质。

$$E|Y_t|<\infty\Rightarrow$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n}Y_t=EY_0=E\phi(X_1,X_2,\cdots,X_m)\qquad a.s.$$

$$<X(t)>=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}b\cos(at+U)dt=0\qquad a.s.$$

$$<X(t)X(s)>=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}b\cos(at+U)\cdot b\cos(as+U)dt$$

$$=\frac{1}{2}b^2\cos((t-s)a)\qquad a.s.$$

严平稳遍历性

- 如果严平稳序列是遍历的, 从它的一次实现$x_1,x_2,\ldots$就可以推断出这个严平稳序列的所有有限维分布:

$$F(x_1,x_2,\ldots,x_m)=P(X_1\le x_1,X_2\le x_2,\ldots,X_m\le x_m),\quad m\in\mathbb{N}$$

有遍历性的严平稳序列被称作严平稳遍历序列.

例 5.1

对严平稳序列$\{X_t\}$，定义严平稳序列

$$Y_t=I[X(t+t_1)\le y_1,X(t+t_2)\le y_2,\cdots,X(t+t_m)\le y_m],\quad t\in\mathbb{Z}.$$

这里$I[A]$是事件A的示性函数. 如果$\{X_t\}$是遍历的, 由定理5.1 的(2)知道$\{Y_t\}$也是遍历的, 并且有界. 利用定理5.1 的(1)(强数大数律)得到

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n}Y_t = EY_0$$
$$=P(X(t_1)\le y_1, X(t_2)\le y_2,\cdots,X(t_m)\le y_m),\ a.s..$$

这个例子说明，在几乎必然的意义下，$\{X_t\}$的每一次观测都可以决定$\{X_t\}$的有限维分布.

Hilbert 空间

- 设$\{X_t\}$是平稳序列。令

$$L^2(X)=\left\{\sum_{j=1}^{k}a_jX(t_j)|a_j\in\mathbb{R},t_j\in\mathbb{Z},1\le j\le k,k\in\mathbb{N}\right\}$$

- 令距离

$$\|X-Y\|=(\langle X-Y,X-Y\rangle)^{1/2}$$

- 则$\|X-Y\|=\|Y-X\|\ge 0$，且$\|X-Y\|=0$当且仅当$X=Y$, a.s.

线性平稳列的遍历定理

如果$\{\varepsilon_t\}$是独立同分布的WN$(0,\sigma^2)$，实数列$\{a_j\}$平方可和，则线性平稳序列

$$X_t=\sum_{j=-\infty}^{\infty}a_j\varepsilon_{t-j},\quad t\in\mathbb{Z},$$

是严平稳遍历的.

- $\forall X,Y,Z\in L^2(X),a,b\in\mathbb{R}$有
  1. $X+Y=Y+X\in L^2(X)$, $(X+Y)+Z=X+(Y+Z)$;
  2. $0\in L^2(X)$, $X+0=X$, $X+(-X)=0\in L^2(X)$;
  3. $a(X+Y)=aX+aY\in L^2(X)$, $(a+b)X=aX+bX$, $a(bX)=(ab)X$.
- 即$L^2(X)$是一个线性空间。

- 三角不等式：

$$\|X-Y\|\le\|X-Z\|+\|Z-Y\|$$

- $L^2=\{X:\mathrm{E}X^2<\infty\}$也是内积空间和距离空间，$L^2(X)$是$L^2$的子空间。

§ 1.6 Hilbert 空间中的平稳序列

- Hilbert 空间
- 内积的连续性
- 复值随机变量

- 定义$\langle X,Y\rangle=E(XY)$，
- 则

$$\langle X,Y\rangle=\langle Y,X\rangle$$
$$\langle aX+bY,Z\rangle=a\langle X,Z\rangle+b\langle Y,Z\rangle$$

- $\langle X,X\rangle\ge 0$，并且$\langle X,X\rangle=0$当且仅当$X=0$，a.s.，所以$L^2(X)$ 又是内积空间.

- 定义6.1 对$\xi_n\in L^2$，$\xi_0\in L^2$:
  - (1) 如果$\lim_{n\to\infty}\|\xi_n-\xi_0\|=0$，则称$\xi_n$在$L^2$中(或均方)收敛到$\xi_0$，记做$\xi_n\overset{\text{m.s.}}{\to}\xi_0$.
  - (2) 如果当n，$m\to\infty$时，$\|\xi_n-\xi_m\|\to 0$，则称$\{\xi_n\}$是L^2中的基本列或Cauchy列.

- **定理6.1** 如果$\{\xi_n\}$是L^2中的基本列，则(在a.s.的意义下)有惟一的$\xi \in L^2$使得$\xi_n \stackrel{m.s.}{\to} \xi$.

(1)

$$|\,\|\xi_n\| - \|\xi\|\,| \le \|\xi_n - \xi\| \to 0$$

(2)

$$\begin{aligned} |\langle \xi_n, \eta_n\rangle - \langle \xi, \eta\rangle| &= |\langle \xi_n, \eta_n - \eta\rangle + \langle \xi_n - \xi, \eta\rangle| \\ &\le |\langle \xi_n, \eta_n - \eta\rangle| + |\langle \xi_n - \xi, \eta\rangle| \\ &\le \|\xi_n\|\|\eta_n - \eta\| + \|\xi_n - \xi\|\|\eta\| \to 0 \ (n \to \infty) \end{aligned}$$

L_n的完备性

先设$\{X_t\}$是标准白噪声$WN(0,1)$，对任何线性组合$\xi_n = \mathbf{a}_n^T\mathbf{X}$，只要

$$\|\xi_n - \xi_m\|^2 = \|\mathbf{a}_n^T\mathbf{X} - \mathbf{a}_m^T\mathbf{X}\|^2 = (\mathbf{a}_n - \mathbf{a}_m)^T(\mathbf{a}_n - \mathbf{a}_m) \to 0,$$

由例6.1知道有$\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ 使得$|\mathbf{a}_n - \mathbf{a}| \to 0$,
当$n \to \infty$.取$\xi = \mathbf{a}^T\mathbf{X}$ 时,
$\|\xi_n - \xi\|^2 = (\mathbf{a}_n - \mathbf{a})^T(\mathbf{a}_n - \mathbf{a}) \to 0$. 于是，$L_n$ 是完备的.

- 完备的内积空间：每个基本列都有极限极限在空间内的内积空间。又称Hilbert空间。
- L^2是Hilbert空间。
- 用$\bar{L}^2(X)$表示L^2中包含$L^2(X)$的最小闭子空间，则$\bar{L}^2(X)$是Hilbert空间，称为由平稳序列$\{X_t\}$生成的Hilbert空间。

例、n维Hilbert空间

- $\mathbb{R}^n$是线性空间，定义内积$\langle \mathbf{a}, \mathbf{b}\rangle = \mathbf{a}^T\mathbf{b}$则为内积空间。
- $\mathbb{R}^n$是完备的内积空间。
- $|\mathbf{a}| = \sqrt{\mathbf{a}^T\mathbf{a}}$ 为欧氏模。

L_n的完备性

对一般的零均值平稳序列，可以设协方差阵$\Gamma = \mathrm{E}(\mathbf{X}\mathbf{X}^T)$的秩是$m$，$m \le n$. 对$\Gamma$做特征值分解得

$$\Gamma = P^T \Lambda P$$

$$\Lambda = \mathrm{diag}\{\lambda_1, \ldots, \lambda_m, 0, \ldots, 0\}$$

令

$$A = \mathrm{diag}\{\lambda_1^{-1/2}, \ldots, \lambda_m^{-1/2}, 1, \ldots, 1\}$$

及

$$\mathbf{Y} = AP\mathbf{X}$$

内积的连续性

- **定理6.2** (内积的连续性) 在内积空间中，如果$\|\xi_n - \xi\| \to 0$, $\|\eta_n - \eta\| \to 0$ 则有
  - (1) $\|\xi_n\| \to \|\xi\|$,
  - (2) $\langle \xi_n, \eta_n\rangle \to \langle \xi, \eta\rangle$.

- 设$\{X_t\}$是零均值平稳列，$\mathbf{X} = (X_1, \ldots, X_n)$。
- 令$L_n = \mathrm{sp}\{X_1, \ldots, X_n\} = \{\mathbf{a}^T\mathbf{X} : \mathbf{a} \in \mathbb{R}^n\}$
- 则L_n是Hilbert空间，称为由$\mathbf{X}$生成的Hilbert空间。
- L_n是线性空间和内积空间易验证，下面证明其完备性。

则

$$\mathrm{Var}(\mathbf{Y}) = AP\mathrm{Var}(\mathbf{X})P^T A = APP^T\Lambda PP^T A$$

$$= \mathrm{diag}\{1, \ldots, 1, 0, \ldots, 0\}$$

因此$Y_1, \ldots, Y_m$是某零均值白噪声列的某段。$\mathbf{X}$的线性组合即$Y_1, \ldots, Y_m$的线性组合。因此L_n是完备的。

L^2意义下的线性序列

- 考虑L^2中的零均值白噪声列$\{\varepsilon_t\}$，设$\mathrm{Var}(\varepsilon_t)=\sigma^2$.
- 设$\{a_j\}\in l_2$.
- 令

$$\xi_n(t)=\sum_{j=-n}^{n} a_j\varepsilon_{t-j},\quad t\in\mathbb{Z}$$

$$\mathrm{E}X_t=\lim_{n\to\infty}\langle\xi_n(t),1\rangle=\lim_n \mathrm{E}\xi_n(t)=0$$

$$\mathrm{E}X_tX_{t+k}=\lim_n\langle\xi_n(t),\xi_n(t+k)\rangle$$

$$=\lim_n\langle\sum_{j=-n}^{n}a_j\varepsilon_{t-j},\sum_{l=-n}^{n}a_l\varepsilon_{t+k-l}\rangle$$

$$=\lim_n\sum_{j=-n}^{n}\sum_{l=-n}^{n}a_ja_l\delta_{k-l+j}\sigma^2=\sigma^2\sum_{j=-\infty}^{\infty}a_ja_{j+k}$$

§ 1.7 平稳序列的谱函数

- 时域和频域

遍历的时间序列可以从延的时间分布进行统计分析，称为时域分析。

平稳时间序列的二阶性质也可以从其频率分解来研究，称为频域分析。

- 则$\xi_n(t)\in L^2$。对$m<n$，当$m\to\infty$时

$$\|\xi_n-\xi_m\|^2=\|\sum_{m<|j|\le n}a_j\varepsilon_{t-j}\|^2$$

$$=\sigma^2\sum_{m<|j|\le n}a_j^2\le\sigma^2\sum_{|j|>m}a_j^2\to 0$$

- 由L^2完备性知存在$X_t\in L^2$使得$\xi_n(t)\overset{\text{m.s.}}{\to}X_t$。

复值随机变量

- $Z=X+iY$称为复值随机变量。$\mathrm{E}Z=\mathrm{E}X+i\mathrm{E}Y$.
- $$\mathrm{Cov}(Z_1,Z_2)=\mathrm{E}\left((Z_1-\mathrm{E}Z_1)(Z_2-\mathrm{E}Z_2)^*\right)$$
- $$\mathrm{Cov}(\mathbf{Z}_1,\mathbf{Z}_2)=\mathrm{E}\left((\mathbf{Z}_1-\mathrm{E}\mathbf{Z}_1)(\mathbf{Z}_2-\mathrm{E}\mathbf{Z}_2)^*\right)$$

  $\mathbf{Z}^*$表示$\mathbf{Z}$的共轭转置。
- $\mathrm{E}|Z|^2=\mathrm{E}X^2+\mathrm{E}Y^2<\infty$时称$Z$是二阶矩有限的复随机变量。

谱函数定义

设平稳序列$\{X_t\}$ 有自协方差函数$\{\gamma_k\}$.

1. 如果有$[-\pi,\pi]$上的单调不减右连续的函数$F(\lambda)$使得

$$\gamma_k=\int_{-\pi}^{\pi}e^{ik\lambda}\,dF(\lambda),\quad F(-\pi)=0,\quad k\in\mathbb{Z},\qquad(7.1)$$

则称$F(\lambda)$是$\{X_t\}$ 或$\{\gamma_k\}$的谱分布函数，简称为谱函数;

记$\xi_n(t)$在L^2中的极限X_t为

$$X_t=\sum_{j=-\infty}^{\infty}a_j\varepsilon_{t-j},\quad t\in\mathbb{Z}$$

来证明$\{X_t\}$平稳。由L^2中内积连续性得

复值时间序列

- 复值随机变量的序列$\{Z_n\}$称为复时间序列.
- 若$\mathrm{E}Z_n=\mu$, $\mathrm{Cov}(Z_n,Z_m)=\gamma_{n-m}$，$\forall n,m\in\mathbb{Z}$, 则称$\{Z_n\}$是复值平稳序列。
- $\gamma_{-k}=\gamma_k^*$.
- 若复值零均值平稳列$\{\varepsilon\}$满足$\mathrm{Cov}(\varepsilon_n,\varepsilon_m)=0,\forall n\ne m$, 称$\{\varepsilon_t\}$为复值零均值白噪声。

2. 如果有$[-\pi,\pi]$上的非负函数$f(\lambda)$使得

$$\gamma_k=\int_{-\pi}^{\pi}f(\lambda)e^{ik\lambda}\,d\lambda,\quad k\in\mathbb{Z},\qquad(7.2)$$

则称$f(\lambda)$是$\{X_t\}$ 或$\{\gamma_k\}$的谱密度函数或功率谱密度，简称为谱密度或功率谱.

谱函数和谱密度的关系

- 若$F(\lambda)$和$f(\lambda)$同时存在则

$$F(\lambda) = \int_{-\pi}^{\lambda} f(s)ds \qquad (7.3)$$

- 若$F(\lambda)$绝对连续则其几乎处处导数$F'(\lambda)$为谱密度。
- 若$F(\lambda)$是连续函数，除去有限点外导函数存在且连续则

$$f(\lambda) = \begin{cases} F'(\lambda) & \text{当}F'(\lambda)\text{存在} \\ 0 & \text{当}F'(\lambda)\text{不存在} \end{cases}$$

是谱密度。

$$X_t = \sum_{j=-\infty}^{\infty} a_j \varepsilon_{t-j}, \quad t \in \mathbb{Z},$$

$$\gamma_k = \sigma^2 \sum_{j=-\infty}^{\infty} a_j a_{j+k}$$

$$\gamma_k = \int_{-\pi}^{\pi} f(\lambda) e^{ik\lambda}\, d\lambda, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\Downarrow$$

$$f(\lambda) = \frac{\sigma^2}{2\pi} \left| \sum_{j=-\infty}^{\infty} a_j e^{ij\lambda} \right|^2$$

线性滤波与谱

- 设平稳序列$\{X_t\}$有谱函数$F_X(\lambda)$和自协方差函数$\{\gamma_k\}$. $H = \{h_j\}$是一个绝对可和的保时线性滤波器(参见§1.3).
- 当输入过程是$\{X_t\}$时，输出过程是

$$Y_t = \sum_{j=-\infty}^{\infty} h_j X_{t-j}, \quad t \in \mathbb{Z}.a.s. \qquad (7.5)$$

谱函数存在唯一性定理

- **定理7.1**(Herglotz定理) 平稳序列的谱函数是惟一存在的.

两正交序列的谱

- **定理7.3** 设$\{X_t\}$ 和$\{Y_t\}$是相互正交的零均值平稳序列，c是常数，定义

$$Z_t = X_t + Y_t + c, \quad t \in \mathbb{Z}.$$

1. 如果$\{X_t\}$ 和$\{Y_t\}$分别有谱函数$F_X(\lambda)$ 和$F_Y(\lambda)$，则平稳序列$\{Z_t\}$ 有谱函数$F_Z(\lambda) = F_X(\lambda) + F_Y(\lambda)$.
2. 如果$\{X_t\}$ 和$\{Y_t\}$分别有谱密度$f_X(\lambda)$ 和$f_Y(\lambda)$，则$\{Z_t\}$有谱密度$f_Z(\lambda) = f_X(\lambda) + f_Y(\lambda)$.

-

$$\gamma_Y(k) = \sum_{l,j=-\infty}^{\infty} h_l h_j \gamma(k+l-j). \qquad (7.6)$$

实数级数绝对收敛。

线性平稳序列的谱密度

- **定理7.2** 如果$\{\varepsilon_t\}$ 是WN$(0,\sigma^2)$，实数列$\{a_j\}$平方可和，则线性平稳序列

$$X_t = \sum_{j=-\infty}^{\infty} a_j \varepsilon_{t-j}, \quad t \in \mathbb{Z},$$

有谱密度

$$f(\lambda) = \frac{\sigma^2}{2\pi} \left| \sum_{j=-\infty}^{\infty} a_j e^{ij\lambda} \right|^2. \qquad (7.4)$$

- **证明**：主要由

$$\gamma_Z(k) = \gamma_X(k) + \gamma_Y(k)$$

可得。

- 由控制收敛定理

$$\begin{aligned}
\gamma_Y(k) &= \sum_{l,j=-\infty}^{\infty} h_l h_j \int_{-\pi}^{\pi} \exp(i(k+l-j)\lambda)\, dF_X(\lambda) \\
&= \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{l,j=-\infty}^{\infty} h_l h_j \exp(i(l-j)\lambda) e^{ik\lambda}\, dF_X(\lambda) \\
&= \int_{-\pi}^{\pi} \left| \sum_{j=-\infty}^{\infty} h_j \exp(-ij\lambda) \right|^2 e^{ik\lambda}\, dF_X(\lambda) \\
&= \int_{-\pi}^{\pi} |H(e^{-i\lambda})|^2 e^{ik\lambda}\, dF_X(\lambda), \qquad (7.7)
\end{aligned}$$

- 其中

$$H(z) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} h_j z^j, \quad |z| \le 1. \qquad (7.8)$$

- 线性滤波输出$\{Y_t\}$的谱函数为

$$F_Y(\lambda) = \int_{-\pi}^{\lambda} |H(e^{-is})|^2 \, dF_X(s). \tag{7.9}$$

- 当$\{X_t\}$有谱密度$f_X(\lambda)$时

$$F_Y(\lambda) = \int_{-\pi}^{\lambda} |H(e^{-is})|^2 f_X(s) \, ds. \tag{7.10}$$

- 结论归纳成定理7.4.