Экзамен по АиСД 2024/25

@tiom4eg, @alekseyka2006, @piskarev_i ...

March 30, 2025

Contents

1 Асимптотика

$g(n) \in O(f(n)) \implies \exists C > 0 \forall n : g(n) \leq C \cdot f(n)$
$g(n) \in o(f(n)) \implies \forall C > 0 \exists N : \forall n > N : g(n) < C \cdot f(n)$
$g(n) \in \Omega(f(n)) \implies \exists C > 0 \forall n : g(n) \geq C \cdot f(n)$
$g(n) \in \omega(f(n)) \implies \forall C > 0 \exists N : \forall n > N : g(n) > C \cdot f(n)$
$g(n) \in \Theta(f(n)) \implies g(n) \in \Omega(f(n)) \wedge g(n) \in O(f(n))$

Амортизированная - достигается в среднем по всем операциям, real-time - гарантированно достигается на каждой операции, ожидаемая - достигается по матожиданию

2 Теория вероятностей

Случайные величины $A_1, \ldots, A_n$ независимы, если для всех подмножеств $\{A_{i_k}\}$ выполняется $P(\bigcap_{j=1}^{k} A_{i_j}) = \prod_{j=1}^{k} P(A_{i_j})$

Матожидание: $\mathbb{E}[X] = \sum_{\omega} X(\omega) \cdot p(\omega)$, $\mathbb{E}[aX + bY] = \sum_{\omega}(a \cdot X(\omega) + b \cdot Y(\omega)) \cdot p(\omega) = \mathbb{E}[aX] + \mathbb{E}[bY] = a\mathbb{E}[X] + b\mathbb{E}[Y]$, $\mathbb{E}[XY] = \sum_{\omega} X(\omega)Y(\omega)p_X(\omega)p_Y(\omega)$ (для независимых X, Y) $= \sum_{\omega} X(\omega)p_X(\omega) \cdot \sum_{\omega} Y(\omega)p_Y(\omega) = \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y]$

Дисперсия: $\mathbb{D}[X] = \mathbb{E}[X - \mathbb{E}[X]]^2 = \mathbb{E}[X^2 - 2X\mathbb{E}[X] + \mathbb{E}[X]^2] = \mathbb{E}[X^2] + \mathbb{E}[X]^2 - 2\mathbb{E}[X]\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2$, линейность примерно так же расписывается

Теорема (Неравенство Маркова):

Пусть случайная величина $X : \Omega \to \mathbb{R}_+$ определена на вероятностном пространстве $(\Omega, F, \mathbb{R})$, и ее математическое ожидание $\mathbb{E}|\xi|$ конечно. Тогда:

$$\forall\, x > 0 \;\; \mathbb{P}(|\xi| \geqslant x) \leqslant \frac{\mathbb{E}|\xi|}{x}$$

где:

- x — константа соответствующая некоторому событию в терминах математического ожидания
- ξ — случайная величина
- $\mathbb{P}(|\xi| \geqslant x)$ — вероятность отклонения модуля случайной величины от x
- $\mathbb{E}|\xi|$ — математическое ожидание случайной величины

Доказательство:

▷

Возьмем для доказательства следующее понятие:

Пусть A — некоторое событие. Назовем индикатором события A случайную величину I, равную единице если событие A произошло, и нулю в противном случае. По определению величина $I(A)$ имеет распределение Бернулли с параметром:

$$p = \mathbb{P}(I(A) = 1) = \mathbb{P}(A),$$

и ее математическое ожидание равно вероятности успеха $p = \mathbb{P}(A)$. Индикаторы прямого и противоположного событий связаны равенством $I(A) + I(\overline{A}) = 1$. Поэтому

$$|\xi| = |\xi| \cdot I(|\xi| < x) + |\xi| \cdot I(|\xi| \geqslant x) \geqslant |\xi| \cdot I(|\xi| \geqslant x) \geqslant x \cdot I(|\xi| \geqslant x).$$

Тогда:

$$\mathbb{E}|\xi| \geqslant \mathbb{E}(x \cdot I(|\xi| \geqslant x)) = x \cdot \mathbb{P}(|\xi| \geqslant x).$$

Разделим обе части на x:

$$\mathbb{P}(|\xi| \geqslant x) \leqslant \frac{\mathbb{E}|\xi|}{x}$$

◁

Теорема (Неравенство Чебышева):

Если $\mathbb{E}\xi^2 < 1$, то $\forall x > 0$ будет выполнено

$$\mathbb{P}(|\xi - \mathbb{E}\xi| \geqslant x) \leqslant \frac{\mathbb{D}\xi}{x^2}$$

где:

- $\mathbb{E}\xi^2$ — математическое ожидание квадрата случайного события.
- $E\xi$ — математическое ожидание случайного события
- $P(|\xi - \mathbb{E}\xi| \geqslant x)$ — вероятность отклонения случайного события от его математического ожидания хотя бы на x
- $\mathbb{D}\xi$ — дисперсия случайного события

Доказательство:

▷

Для $x > 0$ неравенство $|\xi - \mathbb{E}\xi| \geqslant x$ равносильно неравенству $(\xi - \mathbb{E}\xi)^2 \geqslant x^2$, поэтому

$$\mathbb{P}(|\xi - \mathbb{E}\xi| \geqslant x) = \mathbb{P}((\xi - \mathbb{E}\xi)^2 \geqslant x^2) \leqslant \frac{\mathbb{E}(\xi - \mathbb{E}\xi)^2}{x^2} = \frac{\mathbb{D}\xi}{x^2}$$

◁

3 Quicksort

Доказательство асимптотики при случайном выборе разделяющей точки (будем считать, что все элементы уникальны): пусть T_n - асимптотика для n. $T_n = (n-1) + \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} T_i + T_{n-1-i} = (n-1) + \frac{2}{n}\sum_{i=0}^{n-1} T_i \implies nT_n =$

$n(n-1)+2\sum\limits_{i=0}^{n-1} T_i$

$nT_n-(n-1)T_{n-1} = n(n-1)+2\sum\limits_{i=0}^{n-1} T_i-((n-1)(n-2)+2\sum\limits_{i=0}^{n-2} T_i) = n(n-1)-(n-1)(n-2)+2T_{n-1} \implies nT_n = (n+1)T_{n-1}+2n-2 \implies \frac{T_n}{n+1} = \frac{T_{n-1}}{n}+\frac{2}{n+1}-\frac{2}{n(n+1)} \le \frac{T_{n-1}}{n}+\frac{2}{n+1} = \frac{T_{n-2}}{n-1}+\frac{2}{n+1}+\frac{2}{n}-\frac{2}{n(n-1)} \le \cdots \le \frac{T_1}{2}+\sum\limits_{i=1}^{n+1}\frac{2}{i} = O(n\log n)$

4 Median of Medians/Quickselect

По сути, мы хотим находить такую разделяющую точку, что она будет всегда работать достаточно хорошо. Для этого, разобьём все элементы на блоки по 5 элементов, в них отсортируем элементы (по сути, за $O(1)$), далее найдём медиану среди всех медианных элементов в блоках. Заметим, что будет выполнено следующее: в тех блоках, в которых медиана будет меньше медианы медиан, первые три элемента также гарантированно будут меньше, то есть про них мы можем сказать, что они точно окажутся слева от разделяющего элемента. Аналогично, в блоках, в которых медиана больше медианы медиан, последние три элемента гарантированно окажутся справа. Поскольку в обоих случаях блоков будет $\frac{3n}{10}$, получаем, что размер каждой части разбиения будет находиться между $\frac{3n}{10}$ и $\frac{7n}{10}$. Предположим, что каждый раз мы будем попадать в худший из случаев и идти в блок размера $\frac{7n}{10}$. Тогда, $T(n) = T(\frac{n}{5})+T(\frac{7n}{10})+O(n) = O(n)$ (по мастер-теореме)

5 Кучи

Инварианты d-арной кучи: значение в каждой вершине не больше, чем в любом из её детей, все слои, кроме последнего, заполнены полностью (содержат k^i вершин), в последнем слое заполнен какой-то префикс мест.

Для балансировки кучи будем использовать операции `sift_up` и `sift_down`. `sift_up` будет просто поднимать вершину, пока она больше своего родителя, `sift_down` же, наоборот, будет опускать вершину из корня (свапая её с максимальным ребёнком), пока не восстановится инвариант кучи.

Пусть все дети у вершины, которую сейчас просеиваем вниз, образуют в своих поддеревьях корректные d-арные кучи. Тогда, либо наша уже корректная (если текущая вершина не больше своих детей), либо мы свапаем её с минимальным ребёнком, тогда инвариант "вершина не больше всех своих детей" сохранится у всех вершин, кроме, возможно, просеиваемой. Примерно так же можно доказать, что `sift_up` работает корректно при добавлении нового элемента.

Добавление элемента: добавляем новую вершину на последний слой в первое свободное место, просеиваем её вверх. Удаление минимума - в корень ставим значение какой-либо другой вершины (обычно, последней) и просеиваем вниз. Построение за $O(n)$: закинем все вершины в кучу неважно как, после чего вызовем для всех вершин `sift_down` в порядке снизу вверх. Корректность обоснована тем, что при вызове процедуры от некоторой вершины поддеревья её детей уже будут корректными d-арными кучами. Поскольку `sift_down`, как и `sift_up`, работает за высоту кучи, получим сложность $\le \sum\limits_{i=0}^{\log_d n}(i+1)\frac{n}{d^i} = O(n)$.

6 Skip list

Skip list: Давайте хранить уровни из двусвязных списков. На первом уровне хранятся все элементы, на следующий каждый элемент вставляется с вероятностью $\frac{1}{2}$. Ещё в элементе нужно хранить ссылку на него в уровне выше и ниже.

Докажем, что поиск работает за ожидаемое время $O(\log n)$. Во-первых, вероятность того, что элемент окажется на i-м уровне, равна $\frac{1}{2^{i-1}}$. Тогда вероятность того, что ни один элемент не окажется на i-м уровне, равна $(1-\frac{1}{2^{i-1}})^n$. Пусть I_i — индикаторная величина, равная 1, если есть хотя бы 1 элемент на i-м уровне, и 0 иначе. $E(I_i) = P($есть хотя бы один элемент на i-м уровне$) = 1-(1-\frac{1}{2^{i-1}})^n$. Тогда мат. ожидание количества уровней по линейности равно

$$\sum_{i=1}^{\infty} E(I_i) = \sum_{i=1}^{\infty}(1-(1-\frac{1}{2^{i-1}})^n) = 1+\sum_{i=1}^{\infty}(1-(1-\frac{1}{2^i})^{(2^i-1)\cdot\frac{n}{2^{i-1}}}) \le 1+\sum_{i=1}^{\infty}(1-e^{-\frac{n}{2^{i-1}}}) \le 1+\sum_{i=0}^{\infty}(1-e^{-\frac{n}{2^i}})$$

$$\sum_{i=0}^{\infty}(1-e^{-\frac{n}{2^i}}) \le 1+\log_2 n+\sum_{i=0}^{\infty}(1-e^{-\frac{n}{2^{i+\lceil\log_2(n)\rceil}}}) \le 1+\log_2 n+\sum_{i=0}^{\infty}(1-e^{-\frac{1}{2^i}})$$

Так как $\lim\limits_{i\to\infty} -\frac{1}{2^i} = 0$, $0 \le 1 - e^{-\frac{1}{2^i}}$, а $e^x - 1 \sim x$ при $x \to 0$, данный ряд сходится, так как сходится $\sum\limits_{i=0}^{\infty} \frac{1}{2^i}$. Значит, в итоге получаем, что мат. ожидание не более $\log_2 n + C$.

Теперь заметим, что ожидаемое время работы поиска равно ожидаемому число раз, когда мы идём вниз, плюс ожидаемое число раз, когда мы идём вправо. Первое равно количеству уровней, то есть $O(\log n)$. Если же мы идём вправо, то либо в следующий раз идём вниз, либо следующий элемент не попал на уровень выше. Так как ожидаемое число орлов, если кидаем монетку, пока не выпадет решка, равно 2, вправо идём не более чем $O(\log n + 2) = O(\log n)$ раз. Значит, суммарное время работы $O(\log n)$.

7 Амортизированные очереди, деки (с поддержкой минимума)

Исходно у нас есть структура стек, которую понятно, как реализовывать. Мы хотим реализовать очередь/дек с эффективным использованием памяти. Реализуем очередь на двух стеках: st_{head}, st_{tail}. В качестве потенциала возьмём $|st_{tail}|$. При добавлении элемента будем добавлять его наверх st_{tail}, выполнится одна операция, потенциал увеличится на 1, поэтому $a_i = 1 + 1 = 2$. При удалении элемента посмотрим на то, пусть ли st_{head}. Если нет - удалим элемент с его верхушки, потенциал не изменится $\implies$ $a_i = 1 + 0 = 1$. Если же он пуст, то перенесём в него все элементы из st_{tail} по одному, понятно, что верхний элемент в st_{tail} будет нижним в st_{head} и наоборот, это будет корректным порядком для st_{head}. Будет выполнено $|st_{tail}|$ операций сложности $O(1)$ для переноса и потенциал уменьшится на $|st_{tail}|$, после чего будет извлечён элемент с верхушки st_{head} как и в прошлом случае, значит $a_i = k - k + 1 = 1$. Доказали, что $a_i = O(1)$, $\Phi_i = O(n)$, поскольку в любой момент размер никакого из стеков не мог превысить общее число операций (n), значит, средняя стоимость операции равна $O(1)$.

Дек можно реализовать с помощью трёх стеков. Первые два будут как и раньше st_{head}, st_{tail}, потенциалом будет $3 \cdot \max(|st_{head}|,\ |st_{buf}|)$. Третьим будет st_{buf}, который мы будем использовать как вспомогательный буфер при операции ребаланса. При `push_front` или `push_back` будем добавлять соответствующий элемент наверх нужного стека, при `pop_front` или `pop_back`, если нужный стек - непустой, будем забирать из него верхний элемент. Остается последний случай - когда мы пытаемся забрать верхний элемент из стека, который является пустым. Предположим, что пустым является st_{head}, а st_{tail} непуст. Перекинем половину элементов st_{tail} в st_{buf}, оставшиеся перекинем в st_{head} (они при этом поменяют свой порядок на обратный, то есть нужный), затем из st_{buf} вернём элементы в st_{tail}. После таких действий элементы сохранят нужный порядок, при этом потенциал поделится примерно пополам. Значит, $a_i = 1.5 \max(|st_{head}|,\ |st_{buf}|) - 0.5\Phi_i + O(1) = O(1)$, остальные операции имеют стоимость $O(1)$ аналогично очереди.

Чтобы всё это могло поддерживать минимум, будем реализовывать соответствующие структуры на стеках с поддержкой минимума. Стек с поддержкой минимума будет просто поддерживать стек рекордов вместе с элементами. Понятное дело, что добавление поддержки стека рекордов - гарантированное $O(1)$, так что амортизация не поломается.

8 Фибоначчиева куча

TODO

9 Хеши и хеш-таблицы

Пусть есть пространство ключей U и семейство хэш-функций $H : U \to [m]$. H называется универсальным семейством хэш-функций для U, если $\forall x, y \in U : |\{h \in H : h(x) = h(y)\}| \le \frac{|H|}{m}$. Семейство хэш-функций называется k-независимым, если $\forall (x_1, \dots, x_k) \in U^k$ $(x_i \ne x_j)$, $\forall (y_1, \dots, y_k) \in [m]^k : P[h(x_1) = y_1 \wedge \dots \wedge h(x_k) = y_k] = m^{-k}$

При открытой адресации всё хранится в одном массиве, разрешение коллизий происходит следующим образом - выбирается правило, по которому изменяется значение хеша, пока бакет с соответствующим хешем занят. Например, можно прибавлять 1 со взятием по модулю размера хеш-таблицы. В закрытой адресации поступаем по другому - в каждом бакете храним какую-то структуру (например, односвязный список), в которой будут храниться ключи с одинаковым хешем и по которой будем осуществлять поиск/вставку при запросе к данному ключу.

Фильтр Блума - храним битсет длины m, выбираем k хеш функций (которые должны быть независимыми в совокупности), для элемента x ставим единички в биты $h_1(x),\ h_2(x), \dots,\ h_k(x)$. Вероятность того, что какой-то бит останется нулевым после добавления n элементов, равна $(1 - \frac{1}{m})^{kn} \approx e^{-\frac{kn}{m}}$. Ложноположительное срабатывание - все биты, принадлежащие хешу какого-то ключа, оказываются единичными, вероятность равна $(1 - e^{-\frac{kn}{m}})^k$

Двухуровневая схема идеального хеширования: выбирается случайная функция $U \to [N]$, заменяется до тех пор, пока $\sum |B_i|^2 > 2N$ (где B_i - бакет i), после чего для бакета i выделяем $|B_i|^2$ ячеек и находим функцию h_i, которая является идеальной. Пруфы ниже (на английском):

Theorem 10.6 *If we pick the initial h from a universal set H, then*

$$\Pr[\sum_i (n_i)^2 > 4N] < 1/2.$$

Proof: We will prove this by showing that $\mathbf{E}[\sum_i (n_i)^2] < 2N$. This implies what we want by Markov's inequality. (If there was even a $1/2$ chance that the sum could be larger than $4N$ then that fact by itself would imply that the expectation had to be larger than $2N$. So, if the expectation is less than $2N$, the failure probability must be less than $1/2$.)

Now, the neat trick is that one way to count this quantity is to count the number of ordered pairs that collide, including an element colliding with itself. E.g, if a bucket has {`d,e,f`}, then `d` collides with each of {`d,e,f`}, `e` collides with each of {`d,e,f`}, and `f` collides with each of {`d,e,f`}, so we get 9. So, we have:

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}[\sum_i (n_i)^2] &= \mathbf{E}[\sum_x \sum_y C_{xy}] \quad (C_{xy} = 1 \text{ if } x \text{ and } y \text{ collide, else } C_{xy} = 0) \\
&= N + \sum_x \sum_{y \neq x} \mathbf{E}[C_{xy}] \\
&\leq N + N(N-1)/M \quad \text{(where the } 1/M \text{ comes from the definition of universal)} \\
&< 2N. \quad \text{(since } M = N\text{)} \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

10.5.1 Method 1: an $O(N^2)$-space solution

Say we are willing to have a table whose size is quadratic in the size N of our dictionary S. Then, here is an easy method for constructing a perfect hash function. Let H be universal and $M = N^2$. Then just pick a random h from H and try it out! The claim is there is at least a 50% chance it will have no collisions.

Claim 10.5 *If H is universal and $M = N^2$, then $\Pr_{h \sim H}(\text{no collisions in } S) \geq 1/2$.*

Proof:

- How many pairs (x, y) in S are there? **Answer:** $\binom{N}{2}$
- For each pair, the chance they collide is $\leq 1/M$ by definition of "universal".
- So, Pr(exists a collision) $\leq \binom{N}{2}/M < 1/2$. $\blacksquare$

This is like the other side to the "birthday paradox". If the number of days is a lot *more* than the number of people squared, then there is a reasonable chance *no* pair has the same birthday.

So, we just try a random h from H, and if we got any collisions, we just pick a new h. On average, we will only need to do this twice. Now, what if we want to use just $O(N)$ space?

10 ДД/Splay

10.1 ДД

Мысленно пронумеруем вершины ДД по возрастанию ключей, получим $v_1, v_2, \ldots, v_n$. Докажем, что мат. ожидание глубины конкретной вершины v_a равно $O(\log n)$. Очевидно, глубина равна количеству предков (не обязательно непосредственных). Пусть индикатор I_b равен 1, если v_b предок v_a, и 0 иначе. Чтобы v_b была предком v_a, нужно, чтобы приоритеты у вершин v_i для $i \in [a, b)$ были меньше приоритета v_b, ведь они обязаны находиться вместе с v_a в поддереве v_b, а ДД — куча по приоритетам. Значит, $E(I_b)$, то есть вероятность того, что v_b предок v_a, не больше вероятности того, что среди приоритетов для $v_i, i \in [a, b]$ приоритет у v_b наибольший. Вероятность последнего, очевидно, равна $\frac{1}{|a-b|+1}$. Значит,

$$E(\text{глубина } v_a) = \sum_{b=1}^{n} E(I_b) \leq \sum_{b=1}^{n} \frac{1}{|a-b|+1} \leq 2 \sum_{s=1}^{n} \frac{1}{s} = O(\log n)$$

Так как все операции работают с ДД за O(глубина какой-то вершины), получаем, что хотелось.

10.2 Splay

Повороты выглядят так:

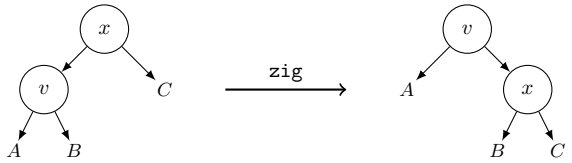


Figure 1: Операция `zig`: одиночный поворот

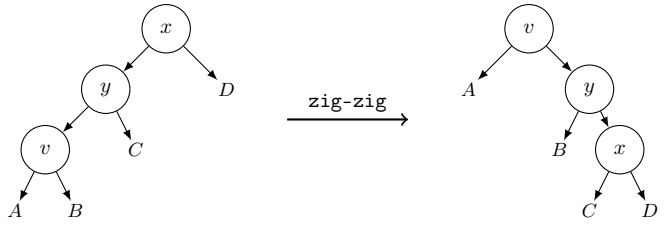


Figure 2: Операция `zig-zig`: двойной поворот (одинаковое направление)

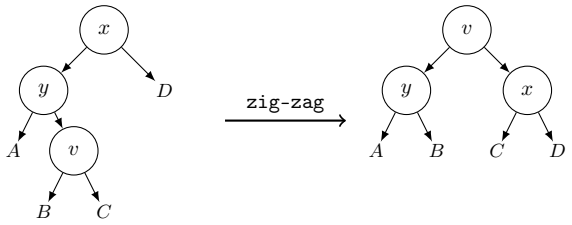


Figure 3: Операция `zig-zag`: двойной поворот (разное направление)

Докажем, что амортизированное время работы `splay`(v) равно $O(\log n)$. Сделаем это методом потенциалов. Пусть $r(v) = \log \mathrm{sz}(v)$, где $\mathrm{sz}(v)$ — размер поддерева вершины v (здесь и везде далее под log понимается двоичный логарифм). Потенциал $\Phi = \sum\limits_v r(v)$. Очевидно, что $0 \le \Phi \le n \log n$.

Утв. 1. $t_i + \Delta\Phi \le 1 + 3(r(root) - r(v))$, где t_i — время работы.

Доказательство: сначала отдельно оценим изменение потенциала при выполнении одного `zig`, `zig-zig` или `zig-zag`

1. `zig`. Пусть без ограничения общности в v спустились влево (как на рисунке). Хотим доказать, что $t_{\texttt{zig}} + \Delta\Phi \le 1 + 3(r(x) - r(v))$. Повороты делаются за $O(1)$, поэтому будем считать $t_{\texttt{zig}} = 1$. Значит, нужно нужно доказать, что

$$1 + \cancel{\log(A+B+C+2)} + \log(B+C+1) - \cancel{\log(A+B+C+2)} - \cancel{\log(A+B+1)} \le$$
$$\le 1 + 3\log(A+B+C+2) - \cancel{3\log(A+B+1)}$$
$$\Longleftarrow \log(B+C+1) + 2\log(A+B+1) \le 3\log(A+B+C+2)$$

   А последнее, очевидно, верно.

2. `zig-zig`. Пусть без ограничения общности в v спустились влево-влево (как на рисунке). Хотим доказать, что $t_{\texttt{zig-zig}} + \Delta\Phi \le 3(r(x) - r(v))$, то есть

$$1 + \cancel{\log(A+B+C+D+3)} + \log(B+C+D+2) + \log(C+D+1) - \cancel{\log(A+B+C+D+3)} -$$
$$- \log(A+B+C+2) - \cancel{\log(A+B+1)} \le 3\log(A+B+C+D+3) - \cancel{3\log(A+B+1)}$$
$$\Longleftarrow 1 + \cancel{\log(B+C+D+2)} + \log(C+D+1) + \cancel{2\log(A+B+1)} \le \cancel{3\log(A+B+C+D+3)} + \cancel{\log(A+B+C+2)}$$
$$\Longleftarrow 1 + \log(C+D+1) + \log(A+B+1) \le 2\log(A+B+C+D+3)$$

   Пусть $a = C + D + 1, b = A + B + 1$. Докажем, что $1 + \log a + \log b \le 2\log(a+b)$, из этого будет следовать требуемое.

$$1 + \log a + \log b \le 2\log(a+b)$$

$$1 \le \log((a+b)^2) - \log ab$$
$$1 \le \log \frac{a^2+2ab+b^2}{ab}$$
$$1 \le \log(2+...)$$

Последнее верно, так как логирфм двоичный и $... \ge 0$.

3. `zig-zag`. Пусть без ограничения общности в v спустились влево-вправо (как на рисунке). Хотим доказать, что $t_{\texttt{zig-zag}} + \Delta\Phi \le 3(r(x) - r(v))$, то есть

$$\cancel{1 + \log(A+B+C+D+3)} + \log(A+B+1) + \log(C+D+1) - \cancel{\log(A+B+C+D+3)} -$$
$$- \log(A+B+C+2) - \cancel{\log(B+C+1)} \le 3\log(A+B+C+D+3) - \cancel{3\log(B+C+1)}$$
$$\Longleftarrow 1 + \log(A+B+1) + \log(C+D+1) + \cancel{2\log(B+C+1)} \le \cancel{3\log(A+B+C+D+3)} + \cancel{\log(A+B+C+2)}$$
$$\Longleftarrow 1 + \log(A+B+1) + \log(C+D+1) \le 2\log(A+B+C+D+3)$$

Что, как уже доказывалось ранее, верно.

Пусть во время $\texttt{splay}(v_0)$ на пути до v_0 были вершины $root = v_k, v_{k-1}, \dots, v_0$. Тогда суммарное время работы t_i равно сумме времён работ всех $t_{\texttt{zig}}, t_{\texttt{zig-zig}}, t_{\texttt{zig-zag}}$. Она, если идти снизу вверх, оценивается как $\le 1 + 3(r(v_2) - r(v_0^{(0)})) + 3(r(v_4) - r(v_0^{(1)})) + \ldots + 3(r(v_k) - r(v_0^{(s)}))$, где $v_0^{(i)}$ — это вершина v_0, поднятая i раз, то есть прошедшая i операций. Но заметим, что, после подъёма $v_0^{(i)}$ размер её поддерева становится таким же, какой был у предыдущего корня соответствующего поддерева. Значит, эта сумма просто равна $1 + 3(r(v_2) - r(v_0)) + 3(r(v_4) - r(v_2)) + \ldots + 3(r(v_k) - r(v_{k-(1 \text{ или } 2)})) = 1 + 3(r(root) - r(v))$ ■

Так как $1 + 3(r(root) - r(v)) = O(\log n)$, по методу потенциалов получаем, что амортизированное время работы $\texttt{splay}(v)$ равно $O(\log n)$.

Теперь хотим научить делать что-то более содержательное. Так, допустим, хотим сделать `find`/`lower_bound` по ключу. Честно спустимся по дереву как по бинарному дереву поиска, а потом от конечной вершины запустим `splay`. Время, затраченное на спуск, будет равно времени, затраченному на `splay`, которое амортизированно $O(\log n)$. Научимся делать `split` от вершины v. Просто делаем $\texttt{splay}(v)$, левое поддерево v и v вместе с правым поддеревом — результат `split`, от такого потенциал только уменьшится. Для того, чтобы делать `split` по значению, сначала делаем `lower_bound`, потом `split`. Если надо делать `merge`, можно для первого (т.е. меньшего по ключам) дерева поднять самую правую вершину, а затем к ней подвесить второе дерево как правого сына. От этого потенциал увеличится на не более чем $\log n$, что допустимо для метода потенциалов. `insert`/`erase` очевидно делаются через все операции выше, также изменяют потенциал на не более чем $\log_2(n)$.

11 Внешняя память

В реальном мире основным боттлнеком являются дисковые операции, поэтому в этом разделе мы постараемся оптимизировать уже известные алгоритмы под работу с внешней памятью. Стандартные обозначения: B - размер блока памяти, который считывается за одну операцию, M - размер имеющейся оперативной памяти (в которой операции будут выполняться за символическое $O(0)$), N - число операций или размер данных.

Самая базовая задача - пройтись по какому-то массиву в памяти и что-то в нём найти/посчитать какую-то статистику. Если массив лежит во внешней памяти подряд, то будем считывать в оперативную память по B элементов за раз, обновлять статистику, считывать следующий блок и так далее. Если мы хотим произвести какую-то трансформацию (например, превратить массив чисел в массив префсумм), то можно модицифировать загруженный блок и вернуть его на старое место также одной операцией. Данную операцию далее будем называть $Scan(N)$ и она работает за $O(\frac{N}{B})$ операций.

Реализуем стек во внешней памяти. Изначально будем в RAM хранить пустой блок размера B. Как поддерживать операции стека на нём - очевидно. Дождёмся первого момента, когда этот блок полностью заполнится и положим его в память, при этом сохраним его в RAM. Далее, те элементы, которые не влезают в первый блок, будем добавлять во второй, пока и он не переполнится, после чего мы положим его в память вслед за прошлым положенным, поменяем с первым блоком и очистим второй. То есть, мы хотим хранить в RAM последний полный блок стека + текущий неполный. Если мы в какой-то момент опустошим первый блок, то полезем в память, чтобы забрать оттуда новый блок. Почему это работает за $O(\frac{1}{B})$ на операцию в худшем случае? Очевидно, что нужно хотя бы B операций с момента прошлой записи блока в память, чтобы мы заполнили ещё один блок и записали в память его. Проблему

могут доставлять операции pop. Но из-за того, что мы храним в RAM, гарантируется, что после последнего доступа в внешнюю память с целью забрать блок до нового доступа пройдет хотя бы B операций (поскольку после очередного чтения из памяти, в RAM хранится хотя бы B элементов, чтобы запросить новый доступ, их все нужно удалить).

Имея реализацию стека, можно написать очередь на двух стеках (из переднего стека только забираем элементы, в задний только добавляем) и дек на двух стеках (здесь они уже используются на полную мощность). Примерно такими же манипуляциями, как и для стека, можно доказать, что все работает за $O(\frac{1}{B})$ на операцию.

Наконец, опишем идею для реализации сортировки во внешней памяти за $O(\frac{N}{B}\log_{\frac{M}{B}}\frac{N}{M})$ (эту же идею можно переделать, чтобы получить кучу с такой же асимптотикой). По сути, будем строить дерево merge сортировки, только вместо 2 детей будем объединять $\frac{M}{B}$ за раз (больше не влезет в RAM). В листьях дерева будем хранить отсортированные блоки размера M - подгрузим их в RAM, отсортируем и загрузим обратно. Теперь, пусть мы хотим смержить $\frac{M}{B}$ кусков. Будем подгружать их в память блоками размера B. Далее, в RAM можем мержить их примерно как угодно, например можно завести приоритетную очередь и доставать оттуда по одному минимальному элементу. Когда в каком-то из блоков закончатся элементы, возьмём следующий (или ничего не возьмём, если элементов не осталось). Заполненные блоки, полученные в результате мержа, закинем друг за другом во внешнюю память, пометив, что в этом месте у нас лежит массив очередной вершины дерева сортировки. Поскольку каждый блок размера B исходного массива будет обработан в $\log_{\frac{M}{B}}\frac{N}{M}$ вершинах дерева (поскольку именно такая высота будет у дерева сортировки), получим желаемую асимптотику. Процедура сортировки с такой асимптотикой является оптимальной и обозначается как $Sort(N)$.

12 2-3 дерево и B-деревья

2-3 дерево — сбалансированное дерево поиска, обладающее следующими свойствами:

• нелистовые вершины имеют либо 2, либо 3 сына

• нелистовая вершина, имеющая двух сыновей, хранит максимум левого поддерева. Нелистовая вершина, имеющая трех сыновей, хранит два значения. Первое значение хранит максимум левого поддерева, второе максимум центрального поддерева

• сыновья упорядочены по значению максимума поддерева сына

• все листья лежат на одной глубине

• высота 2-3 дерева: $O(\log n)$

Основные операции:

12.1 Поиск

Находим сына, в которого нужно спуститься, проверяя по очереди максимумы в поддеревьях. Операция работает за высоту дерева, то есть $O(\log n)$.

12.2 Вставка

С помощью спуска найдем позицию, где должен стоять добавляемый элемент, после чего попробуем добавить его в качестве сына к родителю. Если после этого у родителя станет 4 ребёнка, то разделим родителя на двух детей, левому из которых отойдет два левых ребёнка, а правому - два правых. После этого уже для их родителя проверим число детей и, если нужно, произведём разделение. Будем так делать, пока не попадём в вершину, у которой не 4 ребёнка (при этом, мы можем получить новый корень дерева в результате выполнения разделений). При каждом разделении вершины на две придется пересчитать данные для неё и её клона, а также для их родителя, что занимает $O(1)$ времени. Поскольку разделять будем только вершины на пути к корню, операция работает за $O(\log n)$.

12.3 Удаление

Пусть t - вершина, которую нужно удалить. Если у её отца больше двух детей, то всё тривиально - просто удалим эту вершину, структура дерева больше никак не поменяется. Иначе, пусть b - брат t (другой ребёнок отца t), p - отец t, gp - отец p ("дедушка"), np - брат p. Сразу отсечём тривиальные случаи, где t - корень или сын корня. Если p существует, и у него строго больше 2 сыновей, то просто удалим t, а у p уменьшим количество детей.

Если у p два сына, рассмотрим возможные случаи (сперва везде удаляем t):

• у gp оказалось 2 сына, у np оказалось 2 сына. Подвесим b к np и удалим p. Так как у gp оказалось тоже два сына, повторяем для p те же рассуждения

• у gp оказалось 2 или 3 сына, у np оказалось 3 сына. Просто заберем ближайшего к нам сына у np и прицепим его к p. Восстановим порядок в сыновьях p. Теперь у p оказалось снова два сына и все узлы дерева корректны

• у gp оказалось 3 сына, у np оказалось 2 сына. Подвесим b к np и удалим p, а у gp уменьшим количество детей. Так как у np оказалось три сына, а у gp все ещё больше одного сына, то все узлы дерева корректны

12.4 (Batch) prev/next

В случае `next` будем подниматься вверх, пока не появится опция пройти в более правого ребёнка, после чего спустимся в ближайшего ребёнка справа, а в нём - в самую левую вершину, которая будет ближайшей справа. Для `prev` аналогично, но с поиском ребёнка левее. Работает за $O(\log n)$ (спуск + подъём + снова спуск).

Чтобы находить `next` или `prev` k раз подряд за $O(k + \log n)$, можно хранить двусвязный список на листьях, при каждой вставке/удалении обновление ссылок тривиально без ухудшения асимптотики
(поскольку поиск следующего/предыдущего тоже работает за $O(\log n)$).

12.5 B-деревья

B-деревья будут иметь ту же структуру, за единственным отличием - вместо минимум двух и максимум трёх детей, каждая вершина может иметь минимум b и максимум $2b$ детей (кроме корня, он может иметь не более $2b$ детей). Операции работают абсолютно таким же образом (только с константой b для поиска нужного ребёнка/прохода по всем детям вершины). Для чего это нужно? Вспомним про существование внешней памяти, где доступ к диску на несколько порядков дороже, чем операция в RAM, тогда понижение высоты дерева (= понижение числа детей, которых мы будем подгружать из памяти) ценой увеличения числа выполняемых в RAM операций вполне имеет смысл.

13 Персистентность

Персистентные структуры данных — это структуры данных, которые при внесении в них изменений сохраняют доступ ко всем своим предыдущим состояниям.

Есть несколько «уровней» персистентности: частичная — к каждой версии можно делать запросы, но изменять можно только последнюю, полная — можно делать запросы к любой версии и менять любую версию, конфлюэнтная — помимо этого можно объединять две структуры данных в одну (например, сливать вместе кучи или деревья поиска). Также стоит отметить, что амортизация и персистентность вместе не работают, поскольку мы можем найти операцию, которая выполняется долго и попросить повторить её много раз, что сломает асимптотику.

Для того, чтобы реализовать персистентный стек, достаточно вспомнить, что стек это, по сути, односвязный список, к тому же во время запросов мы "дёргаем" только последний его элемент. Тогда, в качестве версии стека будем хранить значение его верхнего элемента и ссылка на версию стека без последнего элемента (такая точно будет существовать, поскольку последний элемент когда-то был добавлен, и в этот момент стек, очевидно, состоял из всех элементов, кроме добавленного). При добавлении элемента создадим новую версию со ссылкой на текущую, при удалении перейдём в ту версию, на которую ведёт ссылка (изначально будет существовать пустой стек с версией 0). Всё это, очевидно, работает за гарантированное $O(1)$.

Персистентное дерево отрезков основывается на идее того, что за один запрос дерева отрезков мы проходимся по не более чем $O(\log n)$ вершинам (на самом деле, это работает для вообще всех структур без амортизации, например для ДД). Тогда при изменении информации в вершине будем создавать копию текущей вершины, изменять данные уже в ней (чтобы не испортить старые версии) и возвращать указатель на новую версию вершины, чтобы обновить указатели на детей в той вершине, из которой пришли в текущую. Это обеспечивает полную персистентность за $O(\log n)$.

Теперь покажем, как можно реализовать персистентную очередь. Автору данной секции очень не понравилось легендарное решение с 6 (или 5) стеками, поэтому он воспользуется другой идеей, которая использует тот факт, что у нас есть именно персистентные стеки. Итак, пусть у нас есть персистентный стек st_{all}, в котором хранятся все когда-либо добавленные элементы. Заведём два стека st_{head} и st_{future}. В st_{head} будут лежать элементы с начала очереди, в st_{future} будет набираться будущая версия st_{head} (а ещё, эти стеки тоже должны быть персистентными, чтобы копирование работало за $O(1)$). Итак, что мы будем делать - каждый раз, когда st_{future} пустой, мы будем с конца добавлять в него по одному актуальные элементы st_{all} (они, очевидно, образуют некоторый суффикс). Когда в st_{future} наберутся все нужные элементы, переложим его в st_{head} и начнём набирать новый st_{future}. При операции удаления элемента из начала очереди, будем брать верхний элемент из st_{head}. Теперь докажем, что если после выполнения каждой операции над очередью добавлять один элемент в st_{future}, то st_{head} никогда не опустеет раньше времени и всё будет работать корректно. Итак, после добавления первого элемента, мы сразу же добавим его в st_{future}, который переложим в st_{head}. Запомним это состояние как "обнуление" и "обнулением" будем называть всякое такое состояние, в котором st_{head} только что было присвоено новое значение, а st_{future}

был очищен. Докажем, что между обнулениями st_{head} не обнулится, а в st_{future} будут добавлены только нужные элементы. Второе сразу следует из того, что мы проверяем добавляемый в st_{future} элемент на актуальность. С первым всё тоже несложно - пусть после последнего обнуления в st_{head} осталось n элементов. Понятно, что st_{future}, который превратился в st_{head}, набирался на протяжении n операций, среди которых было не более n добавлений новых элементов. Таким образом, даже если все операции после этого обнуления будут удалением элемента из начала очереди, мы успеем заполнить st_{future} и положить новую версию в st_{head} до того, как нам поступит запрос на удаление из непустого стека (заметим, что запросы добавления элемента делают нам только лучше, поскольку число элементов, которые надо положить в st_{future} фиксируется на момент обнуления). Корректность доказана, асимптотика будет $O(1)$, поскольку мы выполняем всего одно добавление элемента в st_{future} за операцию плюс выполняем ещё $O(1)$ других операций, которые занимают $O(1)$ времени (поскольку копирование персистентных стеков и откат в них занимает $O(1)$ времени).

14 LCA/RMQ

Считать LCA двоичными подъемами очень легко: будем бинарить d - максимальную высоту, на которую можно поднять u, чтобы она не стала предком v (проверять на то, является ли одна вершина предком другой, можно с помощью tin и $tout$ за $O(1)$). Ясное дело, что по определению LCA, им будет $(d+1)$-й предок u.

Давайте выпишем высоты всех вершин в порядке посещения их эйлеровым обходом. Во-первых, заметим, что соседние высоты в обходе будут отличаться на ± 1. Во-вторых, рассмотрим отрезок обхода $[\min(tout_u, tout_v); \max(tin_u, tin_v)]$ (в том случае, если никакая из вершин не является предком другой). В таком случае, LCA этих двух вершин будет лежать на соответствующем отрезке обхода, а все предки LCA - не будут, потому что u и v лежат в одном и том же поддереве их ребёнка (а следовательно, на отрезке обхода не может лежать ни одна вершина w, такая, что на пути $u \to w$ или $v \to w$ обязательно лежит отец $lca(u, v)$). Значит, минимальная высота на этом отрезке обхода будет принадлежать в точности $lca(u, v)$).

Научимся решать задачу RMQ± 1. Давайте заметим, что позиция минимума на отрезке определяется только разностями соседних элементов и не зависит от самих значений этих элементов. К примеру, можно считать, что первый элемент отрезка равен нулю (как будто мы вычли из всех элементов на отрезке первый), и в таком массиве минимум будет стоять на той же самой позиции, что и в изначальном. Поменяется лишь его значение. Но если мы найдем позицию минимума, найти его значение не составит труда: нужно лишь обратиться к соответствующему индексу изначального массива.

Теперь заметим, что если мы превратим все блоки в последовательности разностей соседних элементов, то эти последовательности будут состоять из чисел 1 и -1, тогда если длина блока равна k, то существует всего 2^{k-1} различных последовательностей разностей соседних элементов. После чего мы можем заранее предпосчитать для каждой такой последовательности минимум на каждом подотрезке. На это уйдет $O(2^{k-1}k^2)$ времени. И затем просто для каждого блока в массиве определить, к какому типу он относится, и пользоваться предпосчитанными значениями позиций минимумов для всех маленьких подотрезков для ответа на запросы в будущем. Можно выбрать $k = \frac{\log n}{2}$, тогда спарсы на блоках длины k строятся за $O(n)$, а $O(2^{k-1}k^2) = O(\sqrt{n}\log^2 n) < O(n)$.

Аналогичную идею можно применить и для общей задачи RMQ. Опять разделим всё на блоки размера $O(\log n)$, в каждом блоке для каждой правой границы r насчитаем маску стека минимумов на отрезке $[block\_l; r]$, это делается за длину блока (поскольку каждый элемент добавляется и удаляется из стека не более раза). Пусть мы хотим найти минимум на отрезке $[l; r]$, который целиком лежит внутри какого-то блока. Из-за того, как устроен стек минимумов, минимальным элементом на отрезке будет ближайший справа от l единичный бит в маске границы r, он находится либо предпосчетом с помощью 4 русских, либо с помощью допущения о том, что любые арифметические операции (в том числе и `ctz`) с числами порядка n работают за $O(1)$. Опять строим спарсы на блоках, каждый запрос разбивается на запрос к спарсам + не более двух запросов внутри блоков, получили $O(n)/O(1)$ как и хотели.

15 Link-cut дерево

TODO (TO DIE)

16 Переборы (рюкзак, клики, MITM, SOS)

TODO

17 Альфа-бета отсечение

TODO

18 Численные методы (Ньютон, тернарный поиск, БПФ и применения)

TODO (TO DIE)

19 Мастер-теорема и Карацуба

TODO

20 Геометрия

TODO (TO DIE PAINFULLY)

21 Монте-Карло

TODO

22 Метод Ньютона

Ищем корень функции $f(x)$. Пусть x_0 – начальное приближение. Вычислим x_{n+1} как $x_{x+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$. Геометрический смысл: x_{n+1} – точка пересечения касательной к графику $f(x)$ в точке x с осью Ox

22.1 Оценка сходимости

Пусть f имеет корень в точке a, пусть $d_n = x_n - a$ (неточность приближения). Разложим $f(x)$ в точке x_n в многочлен Тейлора первой степени с остаточным членом в форме Лагранжа:

$$f(x) = f(x_n) + f'(x_n)\,(x - x_n) + \frac{f''(c_n)}{2}(x - x_n)^2 \qquad c_n \in (x, x_n) \tag{1}$$

Подставим $x = a$ в тождество

$$f(a) = 0 = f(x_n) + f'(x_n)(a - x_n) + \frac{f''(c_n)}{2}(a - x_n)^2 \tag{2}$$

Разделим на $f'(x_n)$

$$0 = \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} + (a - x_n) + \frac{f''(c_n)}{2f'(x_n)}(a - x_n)^2 \tag{3}$$

Перенесём $\frac{f(x_n)}{f'(x_n)} + (a - x_n)$ налево

$$x_{n+1} - a = (x_n - a) - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = \frac{f''(c_n)}{2f'(x_n)}(a - x_n)^2 \tag{4}$$

Значит

$$d_{n+1} = d_n^2 \cdot \frac{f''(c_n)}{2f'(x_n)} \tag{5}$$

Если значение $\frac{f''(c_n)}{2f'(x_n)}$ ограничено (константой, не зависящей от n), то имеем место квадратичная сходимость

Пусть $f(x)$ имеет корень в точке a, дважды непрерывно дифференцируема в окрестности a и $f'(a) \neq 0$. Тогда в некоторой окрестности a значение $\frac{f''(c_n)}{2f'(x_n)}$ ограничено, значит имеет место квадратичная сходимость

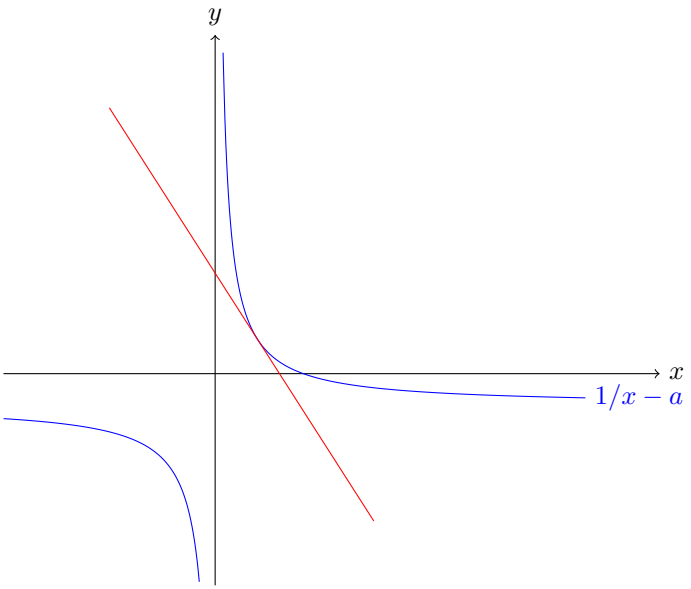
22.2 Пример для $1/a$

$$f(x) = 1/x - a \qquad f(1/a) = 0 \tag{6}$$

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2} \qquad f''(x) = \frac{2}{x^3} \tag{7}$$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{1/x_n - a}{-1/x_n^2} = x_n + \left(x_n - a \cdot x_n^2\right) = x_n(2 - ax_n) \tag{8}$$

$$d_{n+1} = d_n^2 \cdot \frac{f''(c_n)}{2f'(x_n)} \approx d_n^2 \cdot \frac{f''(1/a)}{2f'(1/a)} = -d_n^2 \cdot a \tag{9}$$



Из-за выпуклости $f(x)$ на $(0, +\infty)$ при $x_0 \in (0, 1/a)$ последовательность $\{x_n\}$ сойдётся к $1/a$ (так как при $x_n \in (0, 1/a)$ выполнено $x_n \leq x_{n+1} \leq 1/a$, так как касательная пересекает Ox строго правее x_n, но левее $1/a$ из-за выпуклости). При $x_0 \notin (0, 1/a]$ последовательность $\{x_n\}$ может как и сойтись к $1/a$, как и разойтись к $-\infty$

x_0 стоит брать чуть меньшим $1/a$

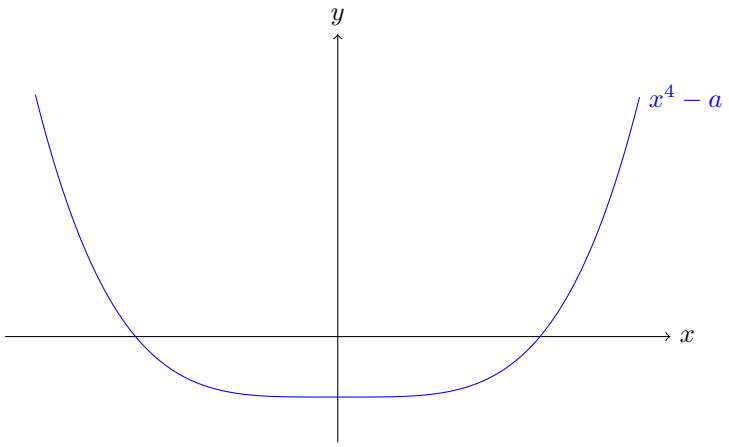
22.3 Пример для $\sqrt[4]{a}$

$$f(x) = x^4 - a \qquad f(\sqrt[4]{a}) = 0 \tag{10}$$

$$f'(x) = 4x^3 \qquad f''(x) = 12x^2 \tag{11}$$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^4 - a}{4x_n^3} = x_n - \left(\frac{1}{4} \cdot x_n - \frac{a}{4x_n^3}\right) = \frac{3}{4} \cdot x_n + \frac{a}{4x_n^3} \tag{12}$$

$$d_{n+1} = d_n^2 \cdot \frac{f''(c_n)}{2f'(x_n)} \approx d_n^2 \cdot \frac{f''(\sqrt[4]{a})}{2f'(\sqrt[4]{a})} = d_n^2 \cdot \frac{3}{2\sqrt[4]{a}} \tag{13}$$



Из-за выпуклости $f(x)$ при $x_0 \in (\sqrt[4]{a}, +\infty)$ последовательность $\{x_n\}$ сойдётся к $\sqrt[4]{a}$ по аналогичным причинам. При $x_0 \in (-\infty, -\sqrt[4]{a})$ последовательность сойдётся к $-\sqrt[4]{a}$

x_0 стоит брать чуть большим $\sqrt[4]{a}$

23 Тернарный поиск

Пусть $f(x)$ имеет глобальный минимум в точке x^*, причём строго убывает на $(-\infty, x^*]$ и строго возрастает на $[x^*, +\infty)$.

Пусть известно, что $x^* \in [l, r]$ (исходно положим $(l, r) = (-C, C)$). Пусть $m_0 = (2l + r)/3$ и $m_1 = (l + 2r)/3$ (m_0, m_1 делят отрезок $[l, r]$ в отношении $1 : 1 : 1$). Вычислим значения $f(m_0), f(m_1)$

- Если $f(m_0) \le f(m_1)$, то $x^* \in [l, m_1]$. Заменим (l, r) на (l, m_1)
- Если $f(m_0) \ge f(m_1)$, то $x^* \in [m_0, r]$. Заменим (l, r) на (m_0, r)

Повторим, пока не будет выполнено $r < l + \varepsilon$, где ε – требуемая точность

За итерацию длина отрезка $[l, r]$ уменьшается ровно в 1.5 раза, значит всего потребует не более чем $2 \log_{1.5} \frac{C}{\varepsilon} + O(1) = O(\log \frac{C}{\varepsilon})$ вычислений функции $f(x)$.

23.1 Трюк с золотым сечением

Пусть $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1.618$ – корень уравнения $x^2 - x - 1 = 0$. Будем брать $m_0 = \frac{1}{2\varphi+1}((\varphi + 1) \cdot l + \varphi \cdot r)$ и $m_1 = \frac{1}{2\varphi+1}(\varphi \cdot l + (\varphi + 1) \cdot r)$ (m_0, m_1 делят отрезок $[l, r]$ в отношении $\varphi : 1 : \varphi$).

Тогда, так как $\frac{1+2\varphi}{1+\varphi} = \varphi$, то на каждой итерации вышеописанного алгоритма, кроме первой, одно из значений $f(m_0), f(m_1)$ будет уже вычислено. Причём длина отрезка $[l, r]$ будет уменьшаться в $\frac{1+2\varphi}{1+\varphi} = \varphi$ раз. Поэтому суммарно будет произведено $\log_\varphi \frac{C}{\varepsilon} + O(1)$ вычислений функции $f(x)$. Что примерно в $\frac{2\ln(1.618)}{\ln(1.5)} \approx 2.37$ раз меньше $2 \log_{1.5} \frac{C}{\varepsilon}$

24 Быстрое преобразование Фурье

24.1 Прямое преобразование

Пусть $P(x) \in \mathbb{C}[x]$ – некоторой многочлен с комплексными коэффициентами. Хотим вычислить значения $P(x)$ в корнях $x^n - 1$ (то есть корнях из единицы), для $n = 2^k$.

Будем делать это рекурсивно. Пусть требуется вычислить значения многочлена $P(x)$ в корнях $x^n - z$, где $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ и $\deg P(x) < n$

- Если $n = 1$, то многочлен $P(x)$ – константа, а единственный корень $x^n - z = x - z$ это z. Значит $P(z) = [x^0]P(x)$
- Если $n \ne 1$, то $n = 2k$ для некоторого натурального k. Разложим $x^n - z$ как

$$x^n - z = x^{2k} - z = (x^k - \sqrt{z})(x^k + \sqrt{z}) \tag{14}$$

Очевидно, что множество корней $x^{2k} - z$ это в точности объединение множеств корней $x^k - \sqrt{z}$ и $x^k + \sqrt{z}$. Вычислим $P_1(x) = P(x) \bmod (x^k - \sqrt{z})$ и $P_2(x) = P(x) \bmod (x^k + \sqrt{z})$ (это делается за $O(n)$). Затем рекурсивно вычислим значения $P_1(x)$ в корнях $x^k - \sqrt{z}$ и значения $P_2(x)$ в корнях $x^k + \sqrt{z}$

При реализации стоит заранее вычислить значение константы $\sqrt{z}$ для каждого рекурсивного вызова. Например можно предподсчитать последовательность

$$w_n = \begin{cases} 1 & \text{если } n = 0 \\ \cos\frac{\pi}{2n} + i \sin\frac{\pi}{2n} & \text{если } n = 2^k \\ w_{n-2^k} \cdot w_{2^k} & \text{иначе, где } k = \lfloor \log_2 n \rfloor \end{cases}$$

и в i-ом рекурсивном вызову на уровне d использовать $\sqrt{z} = w_i$ (в нумерации с нуля)

24.2 Обратное преобразование

Для обращения преобразования достаточно обратить вышеописанный алгоритм.
Рассмотрим рекурсивный вызов вышеописанного алгоритма

- Если $n = 1$, то обращать нечего, так как никаких вычислений не выполнялось
- Если $n \neq 1$, то $n = 2k$ для некоторого натурального k. Заметим, что значение $P(x) \bmod (x^{2k} - z)$ однозначно определяется значениями $P_1(x) = P(x) \bmod (x^k - \sqrt{z})$ и $P_2(x) = P(x) \bmod (x^k + \sqrt{z})$, так как многочлены $x^k - \sqrt{z}$ и $x^k + \sqrt{z}$ взаимно просты.

  Вспомним формулу для явного нахождения решения системы сравнений из китайской теоремы об остатках:

$$\begin{cases} X \equiv A \pmod{C} \\ X \equiv B \pmod{D} \end{cases} \tag{15}$$

$$X \equiv_{CD} A \cdot \text{inv}(D, C) \cdot D + B \cdot \text{inv}(C, D) \cdot C \tag{16}$$

  где $\text{inv}(x, y)$ – обратное к x по модулю y
  Подставим $X = P(x),\ A = P_1(x),\ B = P_2(x),\ C = x^k - \sqrt{z},\ D = x^k + \sqrt{z}$
  Тогда $\text{inv}(D, C) = \text{inv}(D \bmod C, C) = \text{inv}(2\sqrt{z}, C) = \frac{1}{2\sqrt{z}}$ и $\text{inv}(C, D) = -\frac{1}{2\sqrt{z}}$
  Значит

$$P(x) = P_1(x) \cdot \frac{1}{2\sqrt{z}} \left(x^k + \sqrt{z}\right) - P_2(x) \cdot \frac{1}{2\sqrt{z}} \left(x^k - \sqrt{z}\right) = \tag{17}$$

$$\frac{1}{2} \left(P_1(x) \cdot \left(1 + x^k \cdot \frac{1}{\sqrt{z}}\right) + P_2(x) \cdot \left(1 - x^k \cdot \frac{1}{\sqrt{z}}\right) \right) \tag{18}$$

  что позволяет вычислить $P(x) \bmod x^n - z$ за $O(n)$

24.3 Альтернативная интерпретация

Вычисление $P_1(x)$ и $P_2(x)$ в 24.1 это взятие $P(x)$ по модулю $x^k - \sqrt{z}$ и $x^k + \sqrt{z}$ соответственно. Пусть $w = \sqrt{z}$. Представим $P(x)$ в виде $P(x) = A(x) + x^k B(x)$ (то есть $A(x), B(x)$ – младшая и старшая половина коэффициентов соответственно). Тогда выполнено

$$\begin{bmatrix} P_1(x) \\ P_2(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & w \\ 1 & -w \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} A(x) \\ B(x) \end{bmatrix} \tag{19}$$

Значит обратное преобразование может быть вычислено по формуле

$$\begin{bmatrix} A(x) \\ B(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & w \\ 1 & -w \end{bmatrix}^{-1} \times \begin{bmatrix} P_1(x) \\ P_2(x) \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \frac{1}{w} & -\frac{1}{w} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} P_1(x) \\ P_2(x) \end{bmatrix} \tag{20}$$

Прямое и обратное преобразование можно вычислять без использования дополнительной памяти, просто сразу записывая на место $A(x)$ и $B(x)$ значения $P_1(x), P_2(x)$ и наоборот.

24.4 Одновременное вычисление для двух многочленов из $\mathbb{R}[x]$

Даны два многочлена $A(x), B(x) \in \mathbb{R}[x]$, хотим вычислить их значения в корнях $(x^n - 1)$ за одно преобразование Фурье размера n (n – степень двойки). Заметим, что для $P(x) \in \mathbb{R}[x]$ выполнено $P(\overline{z}) = \overline{P(z)}$. Пусть $P(x) = A(x) + i \cdot B(x)$. Пусть w – какой-то из корней $(x^n - 1)$.

$$P(w) = A(w) + i \cdot B(w) \qquad P(\overline{w}) = A(\overline{w}) + i \cdot B(\overline{w}) \tag{21}$$

$$\begin{aligned} P(w) + \overline{P(\overline{w})} &= \\ A(w) + i \cdot B(w) + \overline{A(\overline{w}) + i \cdot B(\overline{w})} &= \\ A(w) + i \cdot B(w) + \overline{A(\overline{w})} + \overline{i \cdot B(\overline{w})} &= \\ A(w) + i \cdot B(w) + A(w) + \overline{i} \cdot \overline{B(\overline{w})} &= \\ A(w) + i \cdot B(w) + A(w) - i \cdot B(w) &= \\ 2A(w) & \end{aligned} \qquad \begin{aligned} P(w) - \overline{P(\overline{w})} &= \\ A(w) + i \cdot B(w) - \overline{A(\overline{w}) - i \cdot B(\overline{w})} &= \\ A(w) + i \cdot B(w) - \overline{A(\overline{w})} - \overline{i \cdot B(\overline{w})} &= \\ A(w) + i \cdot B(w) - A(w) - \overline{i} \cdot \overline{B(\overline{w})} &= \\ A(w) + i \cdot B(w) - A(w) + i \cdot B(w) &= \\ 2i \cdot B(w) & \end{aligned} \tag{22}$$

Что позволяет зная $P(w), P(\overline{w})$ вычислить $A(w), B(w)$ за $O(1)$. Все корни, кроме ± 1, разбиваются на пары сопряжённых.

24.5 Свёртка

Хотим вычислить произведение многочленов $A(x), B(x) \in \mathbb{C}[x]$. Пусть $k = \lceil \log_2 (\deg A(x) + \deg B(x) + 1) \rceil$ и $n = 2^k$. Пусть $C(x) = A(x)B(x)$ – искомый многочлен.

Заметим, что так как $\deg C(x) = \deg A(x) + \deg B(x) < n$, то достаточно найти $C(x) \bmod (x^n - 1)$, так как $C(x) \bmod (x^n - 1) = C(x)$. Значение $C(x) \bmod (x^n - 1)$ однозначно определяется значениями $C(x)$ в корнях $(x^n - 1)$. Используя 24.1 мы можем найти значения $A(x), B(x)$ в этим корнях, а затем и значения $C(x)$ в них, так как для любого $z \in \mathbb{C}$ выполнено $C(z) = A(z)B(z)$. Затем, используя 24.2, мы можем восстановить $C(x) \bmod (x^n - 1)$ по значениям в корнях

24.6 Прикладывания

Пусть даны две последовательности $a_0, a_1, a_2, ..., a_{n-1}$ и $b_0, b_1, ..., b_{m-1}$, причём $m \le n$. Хотим для каждого k от 0 до $n - m$ найти сумму

$$c_k = \sum_{i=0}^{m-1} a_{k+i} \cdot b_i \tag{23}$$

То есть как бы *приложить* последовательность b к последовательности a, и вычислить сумму поэлементных произведений. Для этого просто вычислим произведение $A(x)B(x)$, где

$$A(x) = \sum_{i=0}^{n-1} x^i \cdot a_i \qquad B(x) = \sum_{i=0}^{m-1} x^i \cdot b_{m-1-i} \tag{24}$$

То есть свёртку последовательности a с развёрнутой последовательностью b.

Заметим, что последовательные $n-m+1$ коэффициентов, начиная с коэффициента при x^{m-1} и будет результатом. Причём в свёртке можно использовать $k = \lceil \log_2 n \rceil$, а не $k = \lceil \log_2 (n + m - 1) \rceil$, так как умножение по модулю $(x^n - 1)$ это *циклическая* свёртка, и *переполнение* не затронет результат, так как им будет затронуты не более чем $m - 2$ первых членов

24.7 Поиск по шаблону

Чтобы сделать поиск по шаблону, для каждого прикладывания вычислим

$$\sum_{x,y} (x - y)^2 \tag{25}$$

где сумма берётся по всем парам прикладываемых к друг другу символов. Сумма равна 0 тогда и только тогда, когда все символы в прикладываемых парах совпадают. Для вычисления суммы раскроем скобки и каждое слагаемое посчитаем отдельно (для слагаемых с $\deg_x > 0$ и $\deg_y > 0$ понадобится свёртка)

Если разрешается иметь отличие на не более чем 1, то аналогичным образом вычислим

$$\sum_{x,y} (x-y-1)^2 (x-y)^2 (x-y+1)^2 \tag{26}$$

Такая сумма равна 0, тогда и только тогда, когда все пары символов отличаются не более, чем на 1

25 Деление чисел длины n за $O(n \log n)$

Для простоты будем считать, что основание системы счисления 10. Обозначим за $|a| = \lfloor \log_{10} a \rfloor + 1$ – количество цифр в числе a.

Пусть мы хотим разделить число A на число B, то есть найти $Q = \lfloor \frac{A}{B} \rfloor$. Пусть $n = |A|, m = |B|$ и $m \leq n$. Заметим, что в частном будет примерно (с точностью до ± 1) $n-m$ цифр. Пусть $k = n+1$ и вычислим приближённое частное Q'

$$Q' = \left\lfloor \frac{A \cdot \left\lfloor \frac{10^k}{B} \right\rfloor}{10^k} \right\rfloor \tag{27}$$

Число $\left\lfloor \frac{10^k}{B} \right\rfloor$ вычисляется применением метода Ньютона на функции $f(x) = \frac{10^k}{x} - B$

$$f(x) = \frac{10^k}{x} - B \qquad f'(x) = -\frac{10^k}{x^2} \tag{28}$$

$$x \mapsto x - \frac{f(x)}{f'(x)} = x - \frac{\frac{10^k}{x} - B}{-\frac{10^k}{x^2}} = x + \frac{10^k \cdot x - B \cdot x^2}{10^k} = \tag{29}$$

$$\frac{2x \cdot 10^k - B \cdot x^2}{10^k} \approx \left\lfloor \frac{2x \cdot 10^k - B \cdot x^2}{10^k} \right\rfloor \tag{30}$$

Все вычисления можно производить в целых числах, но нужно быть осторожным, при слишком маленьком результате итерация Ньютона может не смочь *перепрыгнуть* от одного целого числа к другому. Так как найденное значение частного будет лишь приближением, нужно произвести *коррекцию* ошибки на $O(1)$ (частный случай описан ниже).

Оценим ошибку

$$\left\lfloor \frac{10^k}{B} \right\rfloor = \frac{10^k}{B} - \theta \qquad 0 \leq \theta < 1 \tag{31}$$

$$\implies Q' = \left\lfloor \frac{A \cdot \left\lfloor \frac{10^k}{B} \right\rfloor}{10^k} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{A \cdot \left(\frac{10^k}{B} - \theta \right)}{10^k} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{A}{B} - \frac{A \cdot \theta}{10^k} \right\rfloor \tag{32}$$

Так как $A < 10^k$, то *ошибка*, то есть $\frac{A \cdot \theta}{10^k}$ не превосходит 1, значит приближённое частное либо равно настоящему, либо на 1 меньше. Формально $Q' \leq Q \leq Q+1$. Вычислив $R' = A - Q' \cdot B$ и сравнив R' с B, можно понять, какой из случаев выполнился, а значит и вычислить Q.