NÚMEROS COMPLEXOS

1. Conceitos e definições básicos relativos a números complexos

Estudando a história do desenvolvimento da Matemática, é fácil perceber que cada nova espécie numérica foi introduzida quando surgiam as necessidades científicas práticas. Por exemplo, é sabido por que razão foram introduzidos os números negativos: pois não era sempre possível efectuar a operação de subtração aplicando só os números positivos. Com isso exigia-se uma imaginação para compreender o conceito de número negativo. De modo análogo, quando surgiram problemas que não podiam ser resolvidos sobre o conjunto de números reais, tornou-se necessário de ampliar o conjunto numérico. Então, foi introduzida tal espécie numérica que permita extrair raíz quadrada de um número negativo. Desta maneira surgiu o conjunto de números complexos.

O conjunto de números complexos designa-se pela letra C e representa a totalidade de todos os pares ordenados (x,y) de números reais x e y, que se designam pela letra z e para os quais são definidas as seguintes ***operações de adição e de multiplicação***:

dados dois números complexos $z_1=(x_1,y_1)$ e $z_2=(x_2,y_2)$, tem-se

$$z_1+z_2=(x_1,y_1)+(x_2,y_2)=(x_1+x_2,y_1+y_2)\in C,$$
$$z_1\cdot z_2=(x_1,y_1)\cdot(x_2,y_2)=(x_1x_2-y_1y_2,\ x_1y_2+x_2y_1)\in C,$$

sendo, também, definida ***a condição de igualdade*** de dois números complexos:

$$z_1=z_2\text{, ou seja, }(x_1,y_1)=(x_2,y_2)\text{, sse }x_1=x_2\wedge y_1=y_2.$$

Dado um número complexo $z=(x,y)$ diz-se que x é sua ***parte real*** e y é sua ***parte imaginária***, escrevendo $x=\operatorname{Re}z$, $y=\operatorname{Im}z$. Chama-se ***conjugado de um número complexo*** $z=(x,y)$ ***ao número*** $\bar{z}=(x,-y)$. Verifica-se a igualdade: $z\cdot\bar{z}=(x^2+y^2,0)$.

Denomina-se ***número real puro*** a todo número complexo z, cuja parte imaginária é igual a zero, isto é $z=(x,0)$. Verifica-se que qualquer número real puro $(x,0)$ possui as mesmas propriedades que o número real x, a saber: a soma ou produto de dois números reais puros é, também, um número real puro. Por esta razão foi convensionado identificar um número real puro $(x,0)$ com o número real x, isto é, $(x,0)\equiv x$. De acordo com esta convensão o número $(1;0)\equiv 1$ é chamado ***unidade real***.

Denomina-se ***número imaginário puro*** a todo número complexo z, cuja parte real é igual a zero, isto é $z=(0,y)$. Chama-se ***unidade imaginária*** e designa-se pela letra i ao número imaginário puro $i=(0,1)$ que possui a propriedade $i^2=-1$.

Um número complexo $z=(x,y)$, sendo definido como um par ordenado de números reais x e y, pode ser representado graficamente sobre o plano das coordenadas xOy na forma do ponto $P(x,y)$ ou, também, na forma do raio-vector $\overrightarrow{OP}=(x,y)$. O plano cartesiano R^2 sobre o qual cada ponto $P(x,y)$ ou raio-vector $\overrightarrow{OP}=(x,y)$ representa geometricamente um número complexo $z=(x,y)$ é chamado ***plano complexo*** e, também, é conhecido como ***plano de Gauss***. O eixo Ox do plano complexo representa o conjunto geométrico de todos números reais puros e, então, passa a ser chamado ***eixo real***. O eixo Oy dá representação geométrica de números imaginários puros e é denominado ***eixo imaginário***.

Muitas vezes é conveniente incorporar ao plano complexo um novo elemento – ***o ponto no infinito***, para o qual se usa a notação ∞. A adjunção do infinito ao plano complexo resulta no ***plano complexo estendido*** que consiste de todos os pontos finitos e do ponto $z=\infty$. Qualque semi-recta de origem $z=(x,y)$ sobre o plano complexo liga o ponto $P(x,y)$ com o ponto no infinito.

Sobre os números complexos, dados graficamente no plano complexo na forma vectorial, podem ser realizadas as operações de adição e de subtração, aplicando as conhecidas regras de paralelogramo para soma e diferença de vectores.

2. *Formas analíticas de números complexos e operações algébricas sobre eles*

Qualquer número complexo $z=(x,y)$ pode ser representado sob uma das formas analíticas conhecidas. Vamos considerar as formas analíticas principais de representação de números complexos e as respectivas regras de realização das operações algébricas sobre eles.

a) Forma algébrica de um número complexo

É fácil ver que qualquer número complexo $z=(x,y)$ pode ser representado como a soma do número real puro $(x,0)$ e do número imaginário puro $(0,y)$, isto é $z=(x,0)+(0,y)$. Atendendo a que $(x,0)\equiv x$ e $(0,y)=(0;1)\cdot(y,0)\equiv iy$, obtemos a tal chamada ***forma algébrica*** de um número complexo:

$$z=x+iy, \quad \text{sendo } i^2=-1.$$

Assim, o conjunto C de números complexos pode ser definido, também, como

$$C=\{z:\ z=x+iy;\quad x,y\in R;\quad i^2=-1\}.$$

Sobre dois números complexos dados na forma algébrica $z_1=x_1+iy_1$ e $z_2=x_2+iy_2$ efectuam-se as seguintes operações:

– ***adição e subtração*** $\quad z_1\pm z_2=(x_1\pm x_2)+i(y_1\pm y_2)$;

– ***multiplicação*** $z_1 \cdot z_2 = (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1)$;
$z \cdot \bar{z} = x^2 + y^2$;

– ***divisão*** $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{z_1 \cdot \bar{z}_2}{z_2 \cdot \bar{z}_2} = \dfrac{z_1 \cdot \bar{z}_2}{x^2 + y^2}$, $(x_2, y_2) \neq (0;0)$.

É de notar que na realização da operação de multiplicação de dois números complexos dados na forma algébrica, aplicam-se as regras conhecidas de multiplicação de polinômios, tomando em consideração a propriedade $i^2 = -1$.

b) Forma trigonométrica de um número complexo

Seja dado um número complexo $z = x + iy$, cuja representação geométrica sobre o plano complexo é o raio-vector $\vec{OP} = (x, y)$. Então, o módulo deste vector $\sqrt{x^2 + y^2}$ designa-se por $|z|$ ou por r e é chamado ***módulo do número complexo*** z. Assim,

$$|z| = r = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Isto é um número real positivo igual ao comprimento do raio-vector $\vec{OP} = (x, y)$.

Ao ângulo φ, $-\pi < \varphi \leq \pi$, que faz o raio-vector $\vec{OP}$ com o eixo real Ox denomina-se ***argumento principal do número complexo*** z e designa-se por $\arg z$. Então, o ângulo $\Phi = \varphi + 2\pi k, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ designa-se por $Arg\, z$ e é chamado ***argumento genérico do número complexo*** z. Assim, $Arg\, z = \arg z + 2\pi k, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$. O argumento principal de um número complexo $z = x + iy$ determina-se pelas seguintes fórmulas:

- ♦ $\varphi = arctg\left(\dfrac{y}{x}\right)$, caso $x = \operatorname{Re} z > 0$;
- ♦ $\varphi = \pi + arctg\left(\dfrac{y}{x}\right)$, caso $x = \operatorname{Re} z < 0 \wedge y = \operatorname{Im} z \geq 0$;
- ♦ $\varphi = -\pi + arctg\left(\dfrac{y}{x}\right)$, caso $x = \operatorname{Re} z < 0 \wedge y = \operatorname{Im} z < 0$;
- ♦ $\varphi = \dfrac{\pi}{2}$, caso $x = \operatorname{Re} z = 0 \wedge y = \operatorname{Im} z > 0$;
- ♦ $\varphi = -\dfrac{\pi}{2}$, caso $x = \operatorname{Re} z = 0 \wedge y = \operatorname{Im} z < 0$.

A parte real x e a parte imaginária y de um número complexo $z = x + iy$ podem ser expressas através do seu módulo $|z| = r = \sqrt{x^2 + y^2}$ e o seu argumento principal $\arg z = \varphi$ de modo seguinte: $x = r\cos\varphi$, $y = r\,sen\varphi$. Então, o número complexo $z = x + iy$ pode ser representado na tal chamada ***forma trigonométrica***:

$$z = r(\cos\varphi + i\,sen\varphi).$$

Sobre os números complexos dados na forma trigonométrica efectuam-se as seguintes operações:

– ***multiplicação*** $z_1 \cdot z_2 = r_1 r_2 [\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\,sen(\varphi_1 + \varphi_2)]$;

– ***divisão*** $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{r_1}{r_2}[\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\,sen(\varphi_1 - \varphi_2)]$;

– ***elevação a um expoente inteiro***

$$z^k = r^k(\cos k\varphi + i\,sen\,k\varphi), \quad k \in Z \;;$$

Caso $r = 1$ obtem-se a ***fórmula de Moivre***:

$$(\cos\varphi + isen\varphi)^k = (\cos k\varphi + i\,sen\,k\varphi), \quad k \in Z \;;$$

– ***extração de raízes de índice natural***

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\left[\cos\left(\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right) + i\,sen\left(\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right)\right], \; n \in N, \quad n \geq 2, \quad k = 0,1,2,\ldots,(n-1);$$

– ***elevação a um expoente racional***

$$z^{\frac{p}{n}} = \sqrt[n]{z^p} = \sqrt[n]{r^p}\left[\cos\left(\frac{p\varphi + 2\pi k}{n}\right) + i\,sen\left(\frac{p\varphi + 2\pi k}{n}\right)\right], \quad p \in Z,$$
$$n \in N, \quad n \geq 2, \quad k = 0,1,2,\ldots,(n-1).$$

<u>Nota:</u> *quando se trabalha com potência de um número complexo de expoente racional é preciso ter cuidado, porque certas simplificações que se fazem no caso de números reais, deixam de ser válidas para números complexos, por exemplo* $z^{\frac{4}{6}} \neq z^{\frac{2}{3}}$.

c) Forma exponencial de um número complexo

Sobre o conjunto de números complexos entre as funções exponenciais e trigonométricas verificam-se certas relações das quais resulta a seguinte fórmula, conhecida como ***fórmula de Euler***:

$$\cos\varphi + i\,sen\varphi = e^{i\varphi}.$$

Atendendo a esta fórmula, um número complexo $z = r(\cos\varphi + i\,sen\varphi)$ pode ser escrito sob a seguinte forma, chamada ***forma exponencial*** deste número:

$$z = r\,e^{i\varphi}.$$

Sobre os números complexos dados na forma exponencial efectuam-se as seguintes operações:

– ***multiplicação*** $\quad z_1 \cdot z_2 = r_1 r_2 e^{i(\varphi_1+\varphi_2)}$;

– ***divisão*** $\quad \dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{r_1}{r_2} e^{i(\varphi_1-\varphi_2)}$;

– ***elevação a um expoente inteiro***

$$z^k = r^k e^{ik\varphi}, \quad k \in Z \;;$$

– ***extração de raízes de índice natural***

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\, e^{i\left(\frac{\varphi+2\pi k}{n}\right)}, \;\; n \in N, \quad n \geq 2, \quad k = 0,1,2,\ldots,(n-1);$$

– ***elevação a um expoente racional***

$$z^{\frac{p}{n}} = \sqrt[n]{z^p} = \sqrt[n]{r^p}\, e^{i\left(\frac{p\varphi+2\pi k}{n}\right)}, \quad p \in Z, \quad n \in N, \quad n \geq 2, \quad k = 0,1,2,\ldots,(n-1).$$

Exercícios resolvidos

Exercício 1. Calcule o número dado, apresentando-o na forma algébrica: $z = \left(\dfrac{1-i}{-1+\sqrt{3}\,i} \right)^{-6}$.

Resolução. Primeiro, vamos efectuar a divisão do número $z_1 = 1-i$ pelo número $z_2 = -1+\sqrt{3}\,i$. É fácil verificar que a realização desta operação, utilizando a forma algébrica destes números, dá no resultado um número que tem a forma algébrica bastante complicada para achar o seu argumento principal. Então, vamos apresentar os números z_1 e z_2, digamos, na forma exponencial. Atendendo a que z_1 pertence ao $4^{\underline{o}}$ quadrante do plano complexo e z_2 pertence ao $2^{\underline{o}}$, achamos:

$$r_1 = |z_1| = \sqrt{2}, \quad \varphi_1 = \arg z_1 = arctg\,\frac{(-1)}{1} = -\frac{\pi}{4};$$

$$r_2 = |z_2| = 2, \quad \varphi_2 = \arg z_2 = \pi + arctg\,\frac{\sqrt{3}}{(-1)} = \frac{2\pi}{3}.$$

Assim, obtemos: $z_1 = \sqrt{2}e^{-\frac{i\pi}{4}}$; $z_2 = 2e^{\frac{2i\pi}{3}}$. Então, encontramos:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\sqrt{2}e^{-\frac{i\pi}{4}}}{2e^{\frac{2i\pi}{3}}} = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-\frac{11i\pi}{12}}.$$

Agora, podemos calcular o número complexo dado, apresentando-o na forma algébrica:

$$z = \left(\frac{z_1}{z_2}\right)^{-6} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}e^{-\frac{11i\pi}{12}}\right)^{-6} = 8e^{\frac{11i\pi}{2}} = 8\left(\cos\frac{11\pi}{2} + i\,sen\,\frac{11\pi}{2}\right) = -8i.$$

Resposta: $z = -8i$.

Exercício 2. Expresse $sen4\alpha$ e $\cos 4\alpha$ mediante as potências de $sen\alpha$ e $\cos\alpha$.

Resolução. Segundo a fórmula de Moivre temos : $(\cos\alpha + i\,sen\alpha)^4 = \cos 4\alpha + i\,sen4\alpha$. Aplicando à parte esquerda desta igualdade a fórmula do binómio de Newton obtemos:

$$\cos^4\alpha + 4\cos^3\alpha\cdot(i\,sen\alpha) + 6\cos^2\alpha\cdot(i\,sen\alpha)^2 + 4\cos\alpha\cdot(i\,sen\alpha)^3 + (i\,sen\alpha)^4 =$$
$$= \cos 4\alpha + i\,sen4\alpha$$

ou $$(\cos^4\alpha - 6\cos^2\alpha\cdot sen^2\alpha + sen^4\alpha) + i\,(4\cos^3\alpha\cdot sen\alpha - 4\cos\alpha\cdot sen^3\alpha) =$$
$$= \cos 4\alpha + i\,sen4\alpha.$$

Em virtude da condição de igualdade de dois números complexos obtemos a seguinte

Resposta: $$sen4\alpha = 4\cos^3\alpha\cdot sen\alpha - 4\cos\alpha\cdot sen^3\alpha;$$
$$\cos 4\alpha = \cos^4\alpha - 6\cos^2\alpha\cdot sen^2\alpha + sen^4\alpha.$$

Exercício 3. Resolva a equação $z^4 + 4 = 0$.

Resolução. Da equação dada resulta: $z^4 = -4$ ou $z = \sqrt[4]{-4}$. Atendendo a que $|-4| = 4$ e $\arg(-4) = \pi$, achamos: $z = \sqrt[4]{-4} = \sqrt[4]{4}\left[\cos\left(\frac{\pi + 2\pi k}{4}\right) + i\,sen\left(\frac{\pi + 2\pi k}{4}\right)\right]$. Em seguida, fazendo $k = 0, 1, 2, 3$, obtém-se todas as raízes da equação dada:

$$k = 0: \qquad z_1 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\,sen\frac{\pi}{4}\right) = 1 + i;$$

$$k = 1: \qquad z_2 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\,sen\frac{3\pi}{4}\right) = -1 + i;$$

$$k = 2: \qquad z_3 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{5\pi}{4} + i\,sen\frac{5\pi}{4}\right) = -1 - i;$$

$$k = 3: \qquad z_4 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{4} + i\,sen\frac{7\pi}{4}\right) = 1 - i.$$

Resposta: $\pm 1 \pm i$.

Exercício 4. Calcule todos os valores de $z = \left(\frac{-\sqrt{3} - i}{-1 + \sqrt{3}\,i}\right)^{-\frac{5}{3}}$, apresentando-os na forma algébrica.

Resolução. Primeiro, vamos efectuar a divisão do número $z_1 = -\sqrt{3} - i$ pelo número $z_2 = -1 + \sqrt{3}\,i$, utilizando a forma algébrica destes números:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{-\sqrt{3} - i}{-1 + \sqrt{3}\,i} = \frac{\left(-\sqrt{3} - i\right)\cdot\left(-1 - \sqrt{3}\,i\right)}{\left(-1 + \sqrt{3}\,i\right)\cdot\left(-1 - \sqrt{3}\,i\right)} = \frac{\sqrt{3} + 3i + i - \sqrt{3}}{4} = i.$$

Então, temos: $z = \left(\frac{z_1}{z_2}\right)^{-\frac{5}{3}} = (i)^{-\frac{5}{3}} = \sqrt[3]{(i)^{-5}} = \sqrt[3]{-i}$. Atendendo a que $|-i| = 1$ e $\arg(-i) = -\frac{\pi}{2}$, achamos: $z = \sqrt[3]{1}\left[\cos\left(\frac{-\frac{\pi}{2} + 2\pi k}{3}\right) + i\,sen\left(\frac{-\frac{\pi}{2} + 2\pi k}{3}\right)\right]$, onde $k = 0, 1, 2$.

Assim, encontramos:

$$k = 0: \qquad z_1 = \cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i\,sen\left(-\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i = \frac{1}{2}\left(\sqrt{3} - i\right);$$

$$k = 1: \qquad z_2 = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + i\,sen\left(\frac{\pi}{2}\right) = i\;;$$

$$k = 2: \qquad z_3 = \cos\left(\frac{7\pi}{6}\right) + i\,sen\left(\frac{7\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i = \frac{1}{2}\left(-\sqrt{3} - i\right).$$

Resposta: $\left\{ i;\ \frac{1}{2}\left(\pm\sqrt{3} - i\right)\right\}$.

Exercícios propostos

Efectuar as operações indicadas, apresentando os resultados na forma algébrica

1. **a)** $\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^9 + \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^9$; **b)** $\frac{2}{(1+i)^2} + \left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{10}$.

2. **a)** $\left(\frac{5+3\sqrt{3}i}{4\sqrt{3}+2i}\right)^7$; **b)** $\left(\frac{1+i}{\sqrt{3}+i}\right)^{-8}$; **c)** $\left(\frac{2-3i}{1+5i}\right)^{10}$; **d)** $\frac{(3+i)^{10}}{(-2+i)^8}$.

Expressar mediante as potências de $sen\alpha$ **e** $\cos\alpha$ **as seguintes funções**

3. **a)** $sen3\alpha$ **;** **b)** $\cos 3\alpha$ **;** **c)** $sen5\alpha$ **;** **d)** $\cos 5\alpha$**.**

Achar as somas

4. **a)** $\cos x + \cos 3x + \ldots.. + \cos(2n-1)x$; **b)** $senx + sen3x + \ldots.. + sen(2n-1)x$.

Determinar todos os valores de raizes e potências de expoentes racionais

5. **a)** $\sqrt[3]{1}$; **b)** $\sqrt{2-2i}$; **c)** $\sqrt[4]{1}$; **d)** $\sqrt{2-2\sqrt{3}\,i}$; **e)** $\sqrt[6]{-8}$; **f)** $\sqrt[8]{1}$.

6. **a)** $\left(\frac{-1+i}{1-\sqrt{3}i}\right)^{4/2}$; **b)** $\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{5/3}$; **c)** $\left(\frac{-3-2i}{2-3i}\right)^{-6/3}$; **d)** $\left(\frac{-2+i}{1+2i}\right)^{-8/4}$.

Resolver as equações dadas

7. **a)** $z^3 + 8 = 0$; **b)** $z^3 - 8i = 0$; **c)** $z^2 - 4 - 3i = 0$; **d)** $z^2 - 6 + 8i = 0$.

8. **a)** $z^3 - iz^2 + (1+i)z + 1 - i = 0$; **b)** $z^4 + iz^3 + 8iz - 8 = 0$.

Respostas

1. **a)** 0; **b)** $-1-i$. **2.** **a)** $-\dfrac{\sqrt{3}+i}{2}$; **b)** $-8\left(1+\sqrt{3}i\right)$; **c)** $\dfrac{i}{32}$; **d)** $32(4+3i)$.

3. **a)** $sen3\alpha = 3\cos^2\alpha \cdot sen\alpha - sen^3\alpha$; **b)** $\cos 3\alpha = \cos^3\alpha - 3\cos\alpha \cdot sen^2\alpha$;

c) $sen5\alpha = 5sen\alpha \cdot \cos^4\alpha - 10\cos^2\alpha \cdot sen^3\alpha + sen^5\alpha$;

d) $\cos 5\alpha = \cos^5\alpha - 10\cos^3\alpha \cdot sen^2\alpha + 5\cos\alpha \cdot sen^4\alpha$.

4. **a)** $\dfrac{sen(2nx)}{2senx}$; **b)** $\dfrac{sen^2(nx)}{senx}$. **5.** **a)** $1, -\dfrac{1}{2} \pm \dfrac{\sqrt{3}}{2}i$; **b)** $\pm\left(\sqrt{\sqrt{2}+1} - i\sqrt{\sqrt{2}-1}\right)$;

c) $\pm 1, \pm i$; **d)** $\pm\left(\sqrt{3}-i\right)$; **e)** $\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{3} \pm i\right), \pm\sqrt{2}i$; **f)** $\pm 1 \pm i$, $\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}(1 \pm i)$.

6. **a)** $\pm\dfrac{1}{4}\left(\sqrt{3}+i\right)$; **b)** $-i, \pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{1}{2}i$; **c)** -1; $\dfrac{1}{2}\left(1 \pm \sqrt{3}i\right)$; **d)** ± 1; $\pm i$.

7. **a)** $-2,\ 1 \pm \sqrt{3}i$; **b)** $\pm\sqrt{3}+i, -2i$; **c)** $\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}(3+i)$; **d)** $\pm\sqrt{2}(2-i)$.

8. **a)** $i,\ \pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}\left(\sqrt{\sqrt{2}-1} - i\sqrt{\sqrt{2}+1}\right)$; **b)** $-i,\ 2i,\ \pm\sqrt{3}-i$.

♦♣♦♣♦♣♦♣♦♣♦♣♦♣♦♣♦♣♦♣♦♣♦♣♦♣♦♣♦♣♦♣

II. CONJUNTOS SOBRE O PLANO COMPLEXO. SUCESSÕES DE NÚMEROS COMPLEXOS

Qualquer subconjunto D do conjunto de números complexos C representa , por sua vez , um conjunto de números complexos que pode ser interpretado graficamente sobre o plano complexo sob a forma de uma totalidade de pontos de modo que entre cada número complexo e a sua imagem geométrica exista uma correspondência biunívoca. Assim , falando de um conjunto D de números complexos , pode-se subentender um conjunto respectivo de pontos sobre o plano complexo e vice-verça.

Chama-se ***complementar de um conjunto*** $\mathbf{D}$ ao conjunto $\mathbf{D}'$ de todos os pontos do plano complexo não pertencentes a $\mathbf{D}$.

A distância entre dois pontos distintos do plano complexo $z_1 = x_1 + iy_1$ e $z_2 = x_2 + iy_2$ é igual a $|z_1 - z_2| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$.

Dado um número real $r > 0$ e um número complexo z_0 , denomina-se ***disco de raio*** r ***com o centro em*** z_0 ao conjunto de todos os pontos do plano complexo que se encontram à distância menor que r do ponto z_0, isto é $D_0 = \{z \in C : |z - z_0| < r\}$. Ao conjunto $\overset{\circ}{D}_0 = D_0 \setminus \{z_0\}$ diz-se ***disco picado de raio*** r ***com o centro em*** z_0.

Chama-se ***vizinhança de um ponto*** z_0 a todo conjunto $\mathbf{V}(z_0)$ que contém um disco com o centro em z_0.

Denomina-se ***vizinhança do ponto no infinito*** a um conjunto da forma $\mathbf{V}(\infty) = \{z \in \mathbf{C} : |z| > M , M > 0\}$.

Um ponto z_0 diz-se ***ponto interior de um conjunto*** $\mathbf{D}$, se $\mathbf{D}$ é vizinhança de z_0 , quer dizer , se existe um disco com o centro em z_0 , todo contido em $\mathbf{D}$.

Um ponto z_0 diz-se ***ponto exterior de um conjunto*** $\mathbf{D}$, se este ponto é interior do complementar $\mathbf{D}'$.

Um conjunto diz-se ***conjunto aberto*** se qualquer seu ponto é ponto interior.

A um ponto z_0 chama-se ***ponto de acumulação de um conjunto D*** , se qualquer vizinhança de z_0 contiver uma infinidade de pontos de **D** distintos de z_0.

Um conjunto diz-se ***fechado*** se contiver todos seus pontos de acumulação.

Chama-se ***fronteira de um conjunto D*** ao conjunto de pontos z tais que qualquer vizinhança de z contenha tanto os pontos de **D** , como os pontos do seu complementar $\mathbf{D}'$. Assim, um conjunto aberto não contém os pontos da sua fronteira que nós vamos apresentar graficamente na forma de uma linha tracejada. Um conjunto fechado contém todos os pontos da sua fronteira e será apresentada graficamente na forma de uma linha contínua.

Um conjunto **D** diz-se ***conjunto limitado*** , se existir um número real $\mathbf{M} > 0$ tal que $|z| < \mathbf{M}, \forall z \in \mathbf{D}$. Um conjunto diz-se ***conjunto compacto*** , se for fechado e limitado.

Denomina-se ***ponto isolado*** de um conjunto $\mathbf{D}$ a todo ponto que não é ponto de acumulação deste conjunto.

Chama-se ***arco contínuo*** sobre o plano complexo a um conjunto dos pontos Γ, definido na forma $z = z(t) = x(t) + iy(t)\,,\, a \le t \le b$, onde $x(t)\,,\, y(t)$ são funções de um parâmetro real t contínuas num intervalo $[a,b] \subset \mathbf{R}$. Os pontos $z(a)$ e $z(b)$ dizem-se ***extremidades do arco*** Γ**.**

Na representação paramétrica $z = z(t)$ de um arco Γ os seus pontos são ordenados com valores crescentes do parâmetro t num intervalo $[a,b]$ de modo que Γ é um arco orientado , sendo a extremidade $z(a)$ o seu ponto inicial e a extremidade $z(b)$ o seu ponto final. Por exemplo , um segmento de recta sobre o plano complexo define-se por uma equação paramétrica $z = z(t) = z_1 + t(z_2 - z_1)\,,\, 0 \le t \le 1$. Neste caso uma extremidade do segmento é ponto $z(0) = z_1$ que representa o seu ponto inicial , mas outra extremidade $z(1) = z_2$ é ponto final deste segmento , quer dizer , o segmento dado está orientado no sentido da sua extremidade z_1 à extremidade z_2.

Um arco Γ : $z = z(t) = x(t) + iy(t)\,,\, a \le t \le b$ diz-se ***arco regular*** , se a derivada $z'(t) = x'(t) + iy'(t)$ existe , é contínua e não se anula em $[a,b]$.

Chama-se ***contorno*** a todo arco contínuo que consiste em um número finito de arcos regulares. Um contorno diz-se ***poligonal*** , se todos seus arcos componentes são segmentos de recta.

Denomina-se ***arco simples*** ou ***arco de Jordan*** a todo arco contínuo , tal que cada seu ponto $z(t)$ corresponde a um único valor do parâmetro t . Um arco não é simples , se contém pelo menos ***um ponto múltiplo*** que corresponde a pelo menos dois valores diferentes de t , ou seja , $z(t_1) = z(t_2)$, sendo $t_1 \ne t_2$. Diz-se que num ponto múltiplo o arco se intersecta a si mesmo.

Chama-se ***curva fechada*** ou ***contorno fechado*** a todo arco contínuo , cujas extremidades coincidem , isto é, $z(a) = z(b)$. Toda curva fechada , cujos todos pontos , a excepção das suas extremidades , são pontos simples diz-se ***curva fechada simples*** ou ***contorno fechado simples***. Está convencionado que ***uma curva fechada*** Γ***, sendo percorrida no sentido anti-horário , tem a orientação positiva e designa-se por*** Γ^+ ***, mas uma curva , sendo percorrida no sentido horário , tem a orientação negativa e designa-se por*** Γ^-. Por exemplo , uma cincunferência de raio r com o centro num ponto z_0 , sendo orientada no sentido positivo , define-se pela equação paramétrica : $z = z(\varphi) = z_0 + re^{i\varphi}\,,\, 0 \le \varphi \le 2\pi$. O parâmetro φ neste caso tem sentido do ângulo polar. A equação $z = z(\varphi) = z_0 + re^{-i\varphi}$, $0 \le \varphi \le 2\pi$ determina a mesma circunferência , mas percorrida no sentido horário , quer dizer , orientada no sentido negativo. Afinal , uma equação , dada na forma complexa $|z - z_0| = r$, define uma circunferência de raio r com o centro num ponto z_0 que não está orientada.

Um conjunto $\mathbf{D}$ diz-se ***conjunto conexo*** , se quaisquer dois dos seus pontos podem ser ligados entre si por uma poligonal , toda contida em $\mathbf{D}$. A todo conjunto aberto e conexo chama-se ***região***.

Uma região $\mathbf{R}$ diz-se ***região simplesmente conexa*** , se qualquer que seja contorno fechado simples , todo situado em $\mathbf{R}$, não contiver no seu interior nenhum ponto , não pertencente a $\mathbf{R}$. Intuitivamente isso siginifica que uma região simplesmente conexa no seu interior não possui " buracos " que destroem a sua conexidade simples. Como exemplo de uma região simplesmente conexa pode ser um disco de raio r com o centro num ponto z_0 , definido pela inequação $|z-z_0|<r$. Ao mesmo tempo um disco "picado", isto é , um conjunto definido sob a forma $0<|z-z_0|<r$, já representa uma região biconexa , pois no seu interior há um ponto " picado " z_0 , não pertencente a este conjunto e que destrói a sua conexidade simples.

Seja dada uma lei f que faz corresponder a cada número natural $1, 2, 3, \ldots, n, \ldots$ respectivamente um número complexo $z_1, z_2, z_3, \ldots, z_n, \ldots$. Neste caso diz-se que está definida uma ***sucessão de números complexos*** , ou seja , ***sucessão numérica complexa*** , que se designa por $\{z_n\}$, sendo z_1 o seu primeiro termo , z_2 - segundo termo , etc. , $z_n = f(n)$ - termo geral da sucessão dada.

Diz-se que um número complexo $\mathbf{L}$ ***é limite de uma sucessão*** $\{z_n\}$ quando n tende para infinito e escreve-se $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = \mathbf{L}$ se , e somente se , dado qualquer número real $\varepsilon > 0$ existe um número natural n_0 , dependente de ε , tal que para todos os termos z_n de ordem $n > n_0$ cumpre-se a condição $|z_n - \mathbf{L}| < \varepsilon$.

Uma sucessão que tem limite diz-se ***convergente***. Uma sucessão não convergente é chamada ***divergente***. Uma sucessão convergente tem só um limite.

Seja $\{z_n\}$ uma sucessão de números complexos e sejam $z_n = x_n + iy_n$, $\mathbf{L} = a + ib$. Então , para que $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = \mathbf{L}$ é necessário e suficiente que $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ e $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$. Neste caso $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = \lim\limits_{n\to\infty}(x_n + iy_n) = \lim\limits_{n\to\infty} x_n + i \lim\limits_{n\to\infty} y_n = a + ib = \mathbf{L}$.

Seja $z_n = r_n(\cos\varphi_n + i\,\mathrm{sen}\varphi_n)$, onde $r_n = |z_n|$, $\varphi_n = \arg z_n$. Se $\lim\limits_{n\to\infty} r_n = r_0$, $\lim\limits_{n\to\infty} \varphi_n = \varphi_0$, então $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = r_0(\cos\varphi_0 + i\,\mathrm{sen}\varphi_0)$.

♦ ♣ ♦ ♣ ♦ ♣ ♦ ♣ ♦ ♣ ♦ ♣ ♦ ♣ ♦ ♣♦ ♣ ♦ ♣ ♦ ♣ ♦ ♣ ♦ ♣ ♦ ♣ ♦ ♣ ♦ ♣

2.2 Problemas resolvidos

***Exemplo 1*. Identificar as linhas , definidas pelas equações dadas :**

a) $(2+i)z+(2-i)\bar{z}+2=0$; **b)** $|z-1+i|=|z-3-i|$; **c)** $|z-2+i|=3$;

d) $\mathrm{Re}\left(\dfrac{1}{z}\right)=\dfrac{1}{2}$; **e)** $|z|=1-\mathrm{Im}\, z$; **f)** $\sqrt{2}\cdot|z|=\mathrm{Re}\, z+1$.

Resolução

a) Para identificar a linha dada , vamos transformar a sua equação que tem a forma complexa , passando à forma cartesiana $y=f(x)$. Atendendo a que $z=x+iy$ e $\bar{z}=x-iy$, obteremos :

$$(2+i)\cdot(x+iy)+(2-i)\cdot(x-iy)+2=0.$$

Efectuando a multiplicação dos números complexos e tomando em consideração que $i^2=-1$, transformamos a equação dada para a forma $4x-2y+2=0$ ou $y=2x+1$. A equação obtida determina uma recta.

Resposta **: Recta $y=2x+1$.**

b) Apresentando a equação dada na forma $|z-(1-i)|=|z-(3+i)|$, é fácil concluir que ela define um conjunto dos pontos equidistantes de dois pontos fixos $z_1=1-i$ e $z_2=3+i$. Como se sabe , este lugar geométrico dos pontos representa uma recta , chamada mediatriz do segmento $[z_1,z_2]$, isto é , recta perpendicular ao segmento com extremidades nos pontos z_1 , z_2 e que passa pelo seu ponto medio.

Agora , transformemos a equação dada , passando às coordenadas x , y :

$$|(x-1)+i(y+1)|=|(x-3)+i(y-1)| \text{ ou } \sqrt{(x-1)^2+(y+1)^2}=\sqrt{(x-3)^2+(y-1)^2} .$$

Ao elevar ao quadrado ambas partes da última equação e depois de ter feito transformações simples , obteremos a equação cartesiana da mediatriz referida : $\boldsymbol{y=2-x}$.

Resposta **: Recta $y=2-x$ que é mediatriz do segmento $[1-i\ ,3+i]$.**

c) Substituindo z por $(x+iy)$ na equação dada , obteremos $|(x-2)+i(y+1)|=3$ ou $\sqrt{(x-2)^2+(y+1)^2}=3$. Ao elevar ao quadrado ambas partes da última equação , chegamos à equação $(x-2)^2+(y+1)^2=9$. É equação de uma circunferência de raio $r=3$ com o centro no ponto $z_0=2-i$.

Resposta **: Circunferência $(x-2)^2+(y+1)^2=9$.**

d) Temos

$$\frac{1}{z}=\frac{\bar{z}}{z\cdot\bar{z}}=\frac{x-iy}{x^2+y^2}=\frac{x}{x^2+y^2}-i\frac{y}{x^2+y^2}.$$

Logo , $\mathrm{Re}\left(\frac{1}{z}\right)=\frac{x}{x^2+y^2}$.

Agora , a equação da linha dada pode ser representada na forma seguinte $\frac{x}{x^2+y^2}=\frac{1}{2}$, ou seja , $x^2+y^2=2x$. Ao transformar a última equação para a forma $(x-1)^2+y^2=1$, chegamos à conclusão que a curva dada é circunferência de raio $r=1$ com o centro no ponto $z_0=1$.

Resposta **: Circunferência $(x-1)^2+y^2=1$.**

e) Atendendo a que $|z|=\sqrt{x^2+y^2}$ e $\mathrm{Im}\,z=y$, representamos a equação da linha dada na forma $\sqrt{x^2+y^2}=1-y$. Sob a condição $1-y\geq 0$, ou seja , $y\leq 1$ podemos elevar ao quadrado ambas partes desta equação. No resultado obteremos $x^2+y^2=1-2y+y^2$ ou $y=\frac{1}{2}(1-x^2)$. É equação de uma parábola .

Resposta **: Parábola $y=\frac{1}{2}(1-x^2)$.**

f) Pondo na equação da curva dada $|z|=\sqrt{x^2+y^2}$ e $\mathrm{Re}\,z=x$, obteremos

$$\sqrt{2}\cdot\sqrt{x^2+y^2}=x+1 \quad \text{ou} \quad 2(x^2+y^2)=x^2+2x+1, \quad x\geq -1.$$

Depois das transformações simples levaremos esta equação para a forma $\frac{(x-1)^2}{2}+\frac{y^2}{1}=1$. A equação obtida é de uma elipse.

Resposta **: Elipse $\frac{(x-1)^2}{2}+\frac{y^2}{1}=1$.**

***Exemplo 2*. Determinar as curvas , definidas sobre o plano complexo pelas equações paramétricas :**

a) $z=\sqrt{t}+it$, $0\leq t<+\infty$; **b)** $z=i+2e^{i\varphi}$, $0\leq\varphi\leq 2\pi$;

c) $z=1-i+3e^{-i\varphi}$, $-\frac{\pi}{2}\leq\varphi\leq\frac{\pi}{2}$.

Resolução

a) Atendendo a que $z=x+iy$, obteremos as equações paramétricas escalares da curva dada : $x=\sqrt{t}$, $y=t$, $t\geq 0$. Ao eliminar o parâmetro t , achamos a equação cartesiana : $y=x^2$, $x\geq 0$. Conclui-se que a curva dada representa o ramo direito da parábola $y=x^2$ que tem a orientação no sentido do crescimento de *x*.

Resposta **: Semi-parábola $y = x^2$, $x \geq 0$.**

b) Utilizando a fórmula de Euler $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\,\mathrm{sen}\,\varphi$, achamos as equações paramétricas escalares da curva dada : $x = 2\cos\varphi$, $y = 1 + 2\,\mathrm{sen}\,\varphi$, ou seja , $x = 2\cos\varphi$, $y - 1 = 2\,\mathrm{sen}\,\varphi$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$. Para eliminar o parâmetro φ temos que elevar ao quadrado e somar essas últimas equações. No resultado obteremos a equação $x^2 + (y-1)^2 = 4$ que define uma circunferência de raio $r = 2$ com o centro no ponto $z_0 = i$. Para acertar a orientação desta curva , vamos verificar dois seus pontos de controle , correspondentes aos valores diferentes do parâmetro φ: com $\varphi = 0$ temos $\mathbf{P}_1(2;1)$; sendo $\varphi = \frac{\pi}{2}$, temos $\mathbf{P}_2(0;3)$.Conclui-se que no processo do crescimento do parâmetro φ no intervalo $[0\,;2\pi]$ a circunferência dada está percorrida no sentido anti-horário , o que siginifica a orientação positiva desta curva.

Resposta **: Circunferência $x^2 + (y-1)^2 = 4$, orientada no sentido positivo.**

c) Utilizando a formula de Euler , transformemos a equação da curva dada para a forma $z = (1 + 3\cos\varphi) + i(-1 - 3\,\mathrm{sen}\,\varphi)$, $-\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$, de onde resultam as suas equações escalares paramétricas :

$$\begin{cases} x = 1 + 3\cos\varphi\,, \\ y = -1 - 3\,\mathrm{sen}\,\varphi\,, \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} x - 1 = 3\cos\varphi\,, \\ y + 1 = -3\,\mathrm{sen}\,\varphi\,, \end{cases} \quad -\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}.$$

Elevando ao quadrado e somando as equações do último sistema , obteremos : $(x-1)^2 + (y+1)^2 = 9$, $1 \leq x \leq 4$. Esta equação define a metade direita da circunferência de raio $r = 3$ com o centro no ponto $z_0 = 1 - i$, cuja orientação podemos acertar , considerando dois pontos de controle : para $\varphi = -\frac{\pi}{2}$ temos $\mathbf{P}_1(1;2)$; para $\varphi = 0$ obtém-se $\mathbf{P}_2(4;-1)$. Conclui-se que a curva dada está orientada no sentido horário , ou seja , no sentido negatívo.

Resposta **: Semi-circunferência $(x-1)^2 + (y+1)^2 = 9$, $x \geq 1$, orientada no sentido negativo.**

Exemplo 3**. Especificar e representar graficamente os conjuntos dos pontos , dados sobre o plano complexo :**

a) $\mathbf{D} = \{ z \in \mathbf{C} : |z - 1| > 1 \wedge \mathrm{Re}\,z < 3 \wedge \mathrm{Im}\,z > 0 \}$;
b) $\mathbf{D} = \{ z \in \mathbf{C} : |z + 1 - i| \leq 3 \wedge \mathrm{Re}\,z \geq -1 \wedge \mathrm{Im}\,z \leq 1 \}$;
c) $\mathbf{D} = \{ z \in \mathbf{C} : 1 < |z - 2 - i| < 2 \wedge \mathrm{Im}\,z > 1 \}$;
d) $\mathbf{D} = \{ z \in \mathbf{C} : -\frac{\pi}{4} < \arg(z + i) < \frac{\pi}{4} \wedge |z - 2 + i| > 1 \}$.

Resolução

a) Para identificar o conjunto dado , vamos passar nas relações que o determinam às coordenadas x , y , tomando em consideração que $\operatorname{Re} z = x$, $\operatorname{Im} z = y$ e $|z-1| = \sqrt{(x-1)^2 + y^2}$. No resultado obteremos um sistema de inequações que define o domínio $\mathbf{D}$:

$$\begin{cases} \sqrt{(x-1)^2 + y^2} > 1; \\ x < 3; \\ y > 0; \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} (x-1)^2 + y^2 > 1; \\ x < 3; \\ y > 0. \end{cases}$$

No sistema obtido a primeira inequação determina um conjunto aberto dos pontos do plano complexo que se encontram fora da circunferência $(x-1)^2 + y^2 = 1$. A relação $x < 3$ define um conjunto aberto dos pontos , situados à esquerda da recta $x = 3$. Afinal , a condição $y > 0$ determina os pontos do semi-plano superior. O domínio dado $\mathbf{D}$ obtém-se na intersecção de três conjuntos referidos e representa uma região simplesmente conexa , como se mostra na fig.1 em anexo.

b) Atendendo a que $|z+1-i| = |(x+1) + i(y-1)| = \sqrt{(x+1)^2 + (y-1)^2}$, obtemos o seguinte sistema de inequações que define o domínio dado $\mathbf{D}$:

$$\begin{cases} (x+1)^2 + (y-1)^2 \le 3^2; \\ x \ge -1; \\ y \le 1. \end{cases}$$

A primeira inequação deste sistema determina um conjunto dos pontos do interior da circunferência de raio $r = 3$ com o centro no ponto $z_0 = -1 + i$, inclusive os pontos da própria circunferência. A segunda relação do sistema , isto é , $x \ge -1$ define um conjunto dos pontos do plano complexo , situados à direita da recta $x = -1$, incluindo os pontos desta recta. A condição $y \le 1$ determina um conjunto dos pontos que se encontram em baixo da recta $y = 1$, inclusive os pontos desta recta.O domínio dado $\mathbf{D}$ resulta na intersecção de todos três conjuntos mencionados e representa um conjunto fechado e limitado , isto é , um conjunto compacto , como se mostra na fig.2 em anexo.

c) Primeiro , vamos identificar o conjunto definido pela condição $1 < |z-2-i| < 2$ que é equivalente ao sistema :

$$\begin{cases} |z-(2+i)| > 1; \\ |z-(2+i)| < 2; \end{cases} \quad \text{ou seja} \quad \begin{cases} (x-2)^2 + (y-1)^2 > 1; \\ (x-2)^2 + (y-1)^2 < 4. \end{cases}$$

É fácil ver que a primeira inequação do sistema obtido determina um conjunto aberto dos pontos , pertencentes ao exterior da circunferência de raio $r = 1$ com o centro no ponto $z_0 = 2 + i$. A segunda inequação define o interior da circunferência de raio $R = 2$ com o centro no mesmo ponto z_0. Assim , todo o sistema tem como solução a intersecção de dois conjuntos referidos , isto é , o conjunto dos pontos , pertencentes ao interior do anel circular de raios $r = 1$ e $R = 2$ com o centro no ponto z_0. Atendendo à condição $\operatorname{Im} z > 1$, ou seja , $y > 1$ que define a parte do plano complexo , situada por cima da recta $y = 1$, chegamos a conclusão que o domínio dado **D** é uma região simplesmente conexa que representa a metade superior do anel referido , como se mostra na fig.3 em anexo.

d) O número $z + i = (x + iy) - (0 - i)$ pode ser representado geometricamente sobre o plano complexo como diferença dos vectores $\overrightarrow{\mathrm{OP}} = (x, y)$ e $\overrightarrow{\mathrm{OP}_0} = (0; -1)$, isto é , o vector $\overrightarrow{\mathrm{P}_0\mathrm{P}}$, cujo início se encontra no ponto $\mathrm{P}_0(0,-1)$ que é imagem do número $-i$, e extremidade no ponto $\mathrm{P}(x, y)$, isto é , a imagem do número $z = x + iy$. Logo , a condição $-\dfrac{\pi}{4} < \arg(z + i) < \dfrac{\pi}{4}$ define um conjunto dos pontos $\mathrm{P}(x, y)$ do plano complexo , tais que o vector $\overrightarrow{\mathrm{P}_0\mathrm{P}}$, correspondente a qualquer ponto P deste conjunto , tenha o argumento principal , compreendido entre os valores $-\dfrac{\pi}{4}$ e $\dfrac{\pi}{4}$. Claro que isto é um conjunto aberto dos pontos , compreendidos entre duas semi-rectas de origem no ponto $z_0 = -i$ e que fazem com o eixo real OX respectivamente os ângulos $\varphi_1 = -\dfrac{\pi}{4}$ e $\varphi_2 = \dfrac{\pi}{4}$.

A condição $|z - 2 + i| > 1$, ou seja , $(x - 2)^2 + (y + 1)^2 > 1$ define um conjunto dos pontos que se encontram fora da circunferência de raio $r = 1$ com o centro no ponto $z_0 = 2 - i$. O domínio dado **D** resulta na intersecção de dois conjuntos indicados e representa uma região biconexa , como se mostra na fig.4 em anexo.

***Exemplo 4*. Achar os limites de sucessões de números complexos com termos gerais dados :**

a) $z_n = \dfrac{2n + i}{3 + in}$;   **b)** $z_n = \left(1 + \dfrac{i}{n}\right)^n$.

Resolução

a) Primeiro , vamos separar a parte real e imaginária de z_n :

$$z_n = \frac{(2n + i)\cdot(3 - in)}{(3 + in)\cdot(3 - in)} = \frac{7n}{9 + n^2} + i\cdot\frac{3 - 2n^2}{9 + n^2}.$$

Assim , achamos

$$\lim_{n\to\infty} z_n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n + i}{3 + in}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{7n}{9 + n^2}\right) + i\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3 - 2n^2}{9 + n^2}\right) = -2i$$

Resposta **: $-2i$.**

b) Atendendo a que $r_n = |z_n| = \left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{\frac{n}{2}}$, $\varphi_n = \arg z_n = n\cdot\arg\left(1+\frac{i}{n}\right) = n\cdot\operatorname{arctg}\frac{1}{n}$, encontramos:

$$r_0 = \lim_{n\to\infty} r_n = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{\frac{n}{2}} = \lim_{n\to\infty} e^{\frac{1}{2n}} = 1 \ ; \qquad \varphi_0 = \lim_{n\to\infty}\varphi_n = \lim_{n\to\infty} n\cdot\operatorname{arctg}\frac{1}{n} = 1 \ .$$

Logo , $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{i}{n}\right)^n = r_0(\cos\varphi_0 + i\operatorname{sen}\varphi_0) = \cos 1 + i\operatorname{sen} 1$.

Resposta **: $\cos 1 + i\,\mathrm{sen}\,1$.**

2.3 Problemas propostos

Identificar as linhas sobre o plano das coordenadas XOY , definidas pelas equações dadas na forma complexa

9. a) $(3-i)z+(3+i)\bar{z}-4=0$; **b)** $(1+i)z+(1-i)\bar{z}+2=0$; **c)** $|z-1|=|z-i|$;
d) $|z+1|=|\bar{z}-1+2i|$.

10. a) $|z-2+3i|=4$; **b)** $|z-2|=|1-2\bar{z}|$; **c)** $\operatorname{Im}\left(\frac{1}{z}\right)=\frac{1}{2}$;
d) $2z\bar{z}+(2+i)z+(2-i)\bar{z}=2$.

11. a) $\operatorname{Re} z^2=1$; **b)** $\operatorname{Im} z^2=4$; **c)** $\operatorname{Re}(1+z)=|z|$; **d)** $|z|=2+\operatorname{Im} z$;
e) $|z-i|+|z+i|=4$.

Determinar as curvas , definidas sobre o plano complexo pelas equações paramétricas

12. a) $z=t+it^3$, $-\infty<t\le 0$; **b)** $z=t+\frac{i}{t}$, $0<t<\infty$.

13. a) $z=t+i\sqrt{1-t^2}$, $-1\le t\le 1$; **b)** $z=2+i+4e^{-i\varphi}$, $0\le\varphi\le 2\pi$;
c) $z=i-2e^{i\varphi}$, $0\le\varphi\le\pi$.

Especificar e representar graficamente os conjuntos dos pontos dados sobre o plano complexo

14. a) $\mathbf{D}=\{\,z\in\mathbf{C}: |z+1-i|\le 1 \wedge \operatorname{Re} z\ge -1\,\}$;
b) $\mathbf{D}=\{\,z\in\mathbf{C}: 1<|z+2i|<3\,\}$;
c) $\mathbf{D}=\{\,z\in\mathbf{C}: 1<|z+2+3i|<2 \wedge \operatorname{Re} z<-2 \wedge \operatorname{Im} z>-3\,\}$;

d) $\mathbf{D} = \{ z \in \mathbf{C} : |z - 2 + i| > 2 \wedge \operatorname{Im} z > -1 \}$.

15. a) $\mathbf{D} = \left\{ z \in \mathbf{C} : |z+1| < 1 \wedge 0 < \arg(z+1) < \frac{\pi}{4} \right\}$;

b) $\mathbf{D} = \left\{ z \in \mathbf{C} : -\frac{3\pi}{4} < \arg(z - i) < -\frac{\pi}{4} \wedge -1 < \operatorname{Re} z < 1 \right\}$;

c) $\mathbf{D} = \left\{ z \in \mathbf{C} : -\frac{\pi}{4} < \arg(z - 1 - i) < \frac{\pi}{4} \wedge \operatorname{Re} z < 2 \right\}$;

d) $\mathbf{D} = \{ z \in \mathbf{C} : |z-2| > 1 \wedge |\operatorname{Re}(z-2)| < 2 \wedge |\operatorname{Im} z| < 2 \}$.

16. a) $\mathbf{D} = \left\{ z \in \mathbf{C} : \frac{1}{4} < \operatorname{Re}\left(\frac{1}{z}\right) - \operatorname{Im}\left(\frac{1}{z}\right) < \frac{1}{2} \right\}$;

b) $\mathbf{D} = \{ z \in \mathbf{C} : 4 < |z-1| + |z+1| < 8 \}$.

Achar os limites de sucessões de números complexos com os termos gerais dados

17. a) $z_n = \frac{(1+in)^2}{(n^2+i)}$; **b)** $z_n = \frac{(1+n^2+in)}{(2-in)\cdot(n+i)}$; **c)** $z_n = n \cdot \operatorname{tg}\left(\frac{2i}{n}\right)$;

d) $z_n = \left(\frac{n+1+i\pi}{n}\right)^n$; **e)** $z_n = \frac{(n+i^n)}{(n+i)}$; **f)** $z_n = \left(\frac{n+i}{n-i}\right)^n$.

Respostas

9. a) Recta $y = -3x + 2$; **b)** Recta $y = x + 1$; **c)** Recta $y = x$ que é mediatriz do segmento $[1, i]$; **d)** Recta $y = -x + 1$ que é mediatriz do segmento $[-1, 1+2i]$.

10. a) Circunferência $(x-2)^2 + (y+3)^2 = 16$; **b)** Circunferência $x^2 + y^2 = 1$; **c)** Circunferência $x^2 + (y+1)^2 = 1$; **d)** Circunferência $(x+1)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{9}{4}$.

11. a) Hipérbole $x^2 - y^2 = 1$; **b)** Hipérbole $xy = 2$; **c)** Parábola $y^2 = 2x + 1$; **d)** Parábola $y = \frac{1}{4}x^2 - 1$; **e)** Elipse $\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{4} = 1$.

12. a) O ramo esquerdo da parábola cúbica $y = x^3$, percorrida no sentido do crescimento de x ; **b)** O ramo da hipérbole $y = \frac{1}{x}$, situado no primeiro quadrante e orientado no sentido do crescimento de x.

13. a) Semi-circunferência superior de raio $r = 1$ com o centro no ponto $z_0 = 0$, orientada no sentido negativo; **b)** Circunferência de raio $r = 4$ com o centro no ponto $z_0 = 2 + i$, orientada no sentido negativo; **c)** Semi-circunferência inferior de raio $r = 2$ com o centro no ponto $z_0 = i$, orientada no sentido positivo.

14. a) Conjunto compacto que representa a metade direita do disco fechado de raio $r=1$ com o centro no ponto $z_0=-1+i$; **b)** Região biconexa que representa o interior do anel circular de raios $r=1$, $R=3$ com o centro no ponto $z_0=-2i$; **c)** Região simplesmente conexa que representa o interior de uma quarta parte do anel circular de raios $r=1$, $R=2$ com o centro no ponto $z_0=-2-3i$, situada à esquerda da recta $x=-2$ e por cima da recta $y=-3$; **d)** Região simplesmente conexa que representa uma parte do complementar do disco fechado de raio $r=3$ com o centro no ponto $z_0=2-i$, situada por cima da recta $y=-1$.

15. a) Região simplesmente conexa , delimitada pela circunferência de raio $r=1$ com o centro no ponto $z_0=-1$, compreendida entre duas semi-rectas de origem no mesmo ponto z_0 e que fazem com o eixo real OX os ângulos $\varphi_1=0$ e $\varphi_2=\frac{\pi}{4}$; **b)** Região simplesmente conexa , delimitada por duas semi-rectas de origem no ponto $z_0=i$ e que fazem com o eixo OX os ângulos $\varphi_1=-\frac{3\pi}{4}$ e $\varphi_2=-\frac{\pi}{4}$ e compreendido entre as rectas $x=-1$ e $x=1$; **c)** Região simplesmente conexa que representa o interior do triângulo com os vértices nos pontos $z_1=2$, $z_2=1+i$, $z_3=2+2i$; **d)** Região biconexa que representa o interior de um quadrado , delimitado pelas rectas $x=0$, $x=4$, $y=2$ e $y=-2$, excepto os pontos do disco fechado de raio $r=1$com o centro no ponto $z_0=2$.

16. a) Região simplesmente conexa , delimitada pelas circunferências $(x-1)^2+(y-1)^2=2$ e $(x-2)^2+(y-2)^2=8$; **b)** Região biconexa da forma anular , delimitada pelas elipses $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$ e $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{15}=1$.

17. a) -1 ; **b)** i ; **c)** $2i$; **d)** $-e$; **e)** 1 ; **f)** $\cos 2+i\,\mathrm{sen}\,2$.

FUNÇÕES DE UMA VARIÁVEL COMPLEXA

A) Definição de uma função de uma variável complexa

Vamos considerar funções definidas em conjuntos coplexos, cujos valores são, em geral, complexos.

Definição 1. Seja $\mathbf{D}$ um subconjunto de números complexos $\mathbf{C}$ e seja f uma lei que faz corresponder a cada número complexo $z \in \mathbf{D}$ um e um só número complexo w de um conjunto $\mathbf{I} \subset \mathbf{C}$. Neste caso diz-se que sobre o conjunto D está definida uma função de uma variável complexa z e escreve-se $w = f(z)$, sendo z argumento desta função. Ao conjunto D chama-se ***domínio de definição*** da função dada, o conjunto I diz-se ***imagem*** do domínio $\mathbf{D}$ pela função f ou , também , ***contradomínio da*** f.

Verifica-se que toda função $w = f(z)$ de uma variável complexa $z = x + iy$ determina-se , ou seja , descreve-se por duas funções reais $u(x, y)$ e $v(x, y)$ de duas variáveis reais x e y de modo que $w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, sendo $u(x, y) = \mathbf{Re}\, f(z)$ a parte real da função dada e $v(x, y) = \mathbf{Im}\, f(z)$ é a sua parte imaginária. Assim , uma função $w = f(z)$ com domínio $\mathbf{D}$ faz corresponder a cada ponto $z = x + iy$ do domínio $\mathbf{D}$ um ponto $w = u + iv$ do contradomínio $\mathbf{I}$ *(figura).*

Definição 2. Diz-se que uma função f_1 com domínio $\mathbf{D}_1$ é ***restrição de uma função*** f_2 com domínio $\mathbf{D}_2$, se $\mathbf{D}_1$ estiver todo contido em $\mathbf{D}_2$ e $f_1 \equiv f_2$ para todos $z \in \mathbf{D}_1$. Nestas mesmas condições diz-se que f_2 é uma extenção da f_1 ao conjunto $\mathbf{D}_2$ *(figura).*

Assim, uma função $w = f(z)$ de uma variável complexa z , como resulta da sua definição , faz corresponder a cada valor de $z \in \mathbf{D}$ um único valor de $f(z) \in \mathbf{I}$. Isto é ***correspondência funcional univalente*** que representa tal chamada ***função univalente*** ou ***função uniforme.***

B) Funções elementares de uma variável complexa

Vamos considerar as funções elementares univalentes , definidas sobre o plano complexo. Elas são:

- ***Função de potência*** $w = z^n$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$.
- ***Função polinomial*** $w = \mathbf{P}_n(z)$,

onde $\mathbf{P}_n(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_{n-1} z + a_n$ é polinômio de z do grau $n = 0, 1, 2, \ldots$, sendo $a_0 \neq 0, a_1, \ldots, a_n$ coeficientes constantes complexos.

- ***Função racional fraccionária*** $w = \dfrac{\mathbf{P}_n(z)}{\mathbf{Q}_m(z)}$, onde $\mathbf{P}_n(z), \mathbf{Q}_m(z)$ são polinômios de z de graus n e m repectivamente. Caso particular representa ***função bilinear ou homográfica*** $w = \dfrac{az+b}{cz+d}$, onde $a, b \neq 0, c \neq 0$, d são constantes complexas.

- ***Função exponencial*** $w = e^z = 1 + \dfrac{z}{1!} + \dfrac{z^2}{2!} + \cdots$. ***É válida , também , a representação*** $w = e^z = e^x(\cos y + i \operatorname{sen} y)$.

- ***Funções trigonométricas***

$$w = \operatorname{sen} z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \quad , \quad w = \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \quad ,$$
$$w = \operatorname{tg} z = \frac{\operatorname{sen} z}{\cos z} \quad , \quad w = \operatorname{ctg} z = \frac{\cos z}{\operatorname{sen} z} .$$

É válida a identidade : $\cos^2 z + \operatorname{sen}^2 z = 1$.

- ***Funções hiperbólicas***

$$w = \operatorname{sh} z = \frac{e^z - e^{-z}}{2} \quad , \quad w = \operatorname{ch} z = \frac{e^z + e^{-z}}{2} \quad ,$$
$$w = \operatorname{th} z = \frac{\operatorname{sh} z}{\operatorname{ch} z} \quad , \quad w = \operatorname{cth} z = \frac{\operatorname{ch} z}{\operatorname{sh} z} \quad .$$

Cumpre-se a identidade : $\operatorname{ch}^2 z - \operatorname{sh}^2 z = 1$.

Verificam-se , também , as seguintes relações entre as funções trigonométricas e hiperbólicas :

$$\operatorname{sh}(iz) = i \cdot \operatorname{sen} z \;;\; \operatorname{ch}(iz) = \cos z \;;$$
$$\operatorname{sen}(iz) = i \cdot \operatorname{sh} z \;;\; \cos(iz) = \operatorname{ch} z .$$

São verdadeiras as fórmulas :

$$\operatorname{ch}(z_1 + z_2) = \operatorname{ch} z_1 \cdot \operatorname{ch} z_2 + \operatorname{sh} z_1 \cdot \operatorname{sh} z_2 \;;$$
$$\operatorname{sh}(z_1 + z_2) = \operatorname{sh} z_1 \cdot \operatorname{ch} z_2 + \operatorname{sh} z_2 \cdot \operatorname{ch} z_1 \;.$$

C) Funções multivalentes de uma variável complexa

Além das funções univalentes que nós acabamos de apresentar, em Análise Complexa consideram-se , também , correspondências funcionais multivalentes que associam a cada valor do argumento z dois ou mais valores distintos da $f(z)$. Cada uma destas correspondências não define uma função no seu sentido usual , mas representa o que se costuma denominar ” função ” multivalente ou multiforme. Para evitar qualquer ambiguidade que pode surgir no processo de estudo de uma função multivalente consideram-se tal chamados ramos unívocos desta função sobre os quais a correspondência funcional entre z e $f(z)$ passa a ser univalente.

As funções multivalentes , definidas sobre o plano complexo são:

• ***Função radical***

$$w = \sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\left[\cos\left(\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right) + i \cdot \mathrm{sen}\left(\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right)\right],$$

onde $r = |z|$, $\varphi = \arg z$, $n = 2, 3, \ldots,$ $k = 0, 1, 2, \ldots, (n-1)$.

Esta função multivalente possui n ramos unívocos, correspondentes aos diferentes valores de k .

• ***Função logarítmica***

$$w = \mathrm{Ln}\, z = \ln r + i(\varphi + 2\pi k)\ , \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots\ .$$

A função logarítmica tem uma infinidade de ramos unívocos, correspondentes aos diferentes valores de k . Ao valor $k = 0$ corresponde o tal chamado ***ramo principal da função logarítmica*** , sobre o qual

$$w = \ln z = \ln r + i\varphi\ .$$

São válidas as seguintes igualdades :

$$\mathrm{Ln}(z_1 \cdot z_2) = \mathrm{Ln}\, z_1 + \mathrm{Ln}\, z_2; \qquad \mathrm{Ln}\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \mathrm{Ln}\, z_1 - \mathrm{Ln}\, z_2\,.$$

• ***Função de potência generalizada***

$$w = z^a = e^{a \cdot \mathrm{Ln}\, z}\ ,$$

onde a é um número complexo.

• ***Função exponencial generalizada***

$$w = a^z = e^{z \cdot \mathrm{Ln}\, a}\ ,$$

sendo a um número complexo.

• ***Funções trigonométricas inversas***

$$w = \mathrm{Arcsen}\, z = -i \cdot \mathrm{Ln}(iz + \sqrt{1 - z^2})\,; \qquad w = \mathrm{Arccos}\, z = -i \cdot \mathrm{Ln}(z + \sqrt{z^2 - 1})\,;$$

$$w = \mathrm{Arctg}\, z = \frac{i}{2}\mathrm{Ln}\left(\frac{i + z}{i - z}\right)\ ; \qquad w = \mathrm{Arcctg}\, z = \frac{i}{2}\mathrm{Ln}\left(\frac{z - i}{z + i}\right).$$

D) <u>Limite e continuidade de uma função de uma variável complexa</u>

Seja $f(z)$ uma função univalente de uma variável complexa , definida num domínio $\mathbf{D}$ e seja z_0 um ponto de acumulação deste domínio.

<u>Definição 3.</u> Diz-se que um número complexo $\mathbf{L}$ é **limite da** $f(z)$ quando z tende para z_0 e escreve-se $\lim\limits_{z\to z_0} f(z) = \mathbf{L}$ se , e sómente se , a toda sucessão $\{ z_n \}$ de pontos do domínio $\mathbf{D}$, convergente para z_0 , corresponde uma sucessão de valores da função dada $\{ f(z_n) \}$, convergente para $\mathbf{L}$, isto é:

$$\lim_{z\to z_0} f(z) = L \Leftrightarrow \forall z_n \to z_0 \wedge z_n \in D \Rightarrow f(z_n) \to L .$$

É válida a seguinte proposição: ***se uma função*** $f(z)$ ***tem limite num ponto*** z_0***, então este limite é único e não depende de modo como o ponto*** z ***tende para*** z_0***.***

Verifica-se uma importante relação entre o limite de uma função de uma variável complexa e os limites da sua parte real e parte imaginária , a saber : seja $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ uma função definida num domínio $\mathbf{D}$ e sejam $z_0 = x_0 + iy_0$ um ponto de acumulação do D e $\mathbf{L} = a + ib$ um número complexo. Então , para que $\lim\limits_{z\to z_0} f(z) = \mathbf{L}$ é necessário e suficiente que $\lim\limits_{\substack{x\to x_0 \\ y\to y_0}} u(x,y) = a$ e $\lim\limits_{\substack{x\to x_0 \\ y\to y_0}} v(x,y) = b$. Neste caso verifica-se : $\lim\limits_{z\to z_0} f(z) = \lim\limits_{\substack{x\to x_0 \\ y\to y_0}} u(x,y) + i \lim\limits_{\substack{x\to x_0 \\ y\to y_0}} v(x,y) = a + ib$.

Uma função $f(z)$ com domínio $\mathbf{D}$ diz-se **contínua num ponto** z_0 , se ela for definida em z_0 e numa vizinhança deste ponto , se existir o limite de $f(z)$ quando $z \to z_0$ e se $\lim\limits_{z\to z_0} f(z) = f(z_0)$.

É válida a seguinte proposição : ***uma função*** $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ ***será contínua num ponto*** $z_0 = x_0 + iy_0$ ***se , e somente se , a sua parte real*** $u(x,y)$ ***e a imaginária*** $v(x,y)$ ***forem contínuas no ponto*** (x_0, y_0) **.**

Uma função $f(z)$ diz-se ***contínua num domínio*** $\mathbf{D}$, se fôr contínua em cada ponto deste domínio. Por exemplo , uma função polinomial

$$w = \mathbf{P}_n(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_{n-1} z + a_n \ , \quad a_0 \neq 0$$

é contínua sobre todo o plano complexo , mas qualquer função racional $w = \dfrac{\mathbf{P}_n(z)}{\mathbf{Q}_m(z)}$ ($\mathbf{P}_n$ e $\mathbf{Q}_m$ são polinômios) é contínua só em pontos z do plano complexo nos quais $\mathbf{Q}_m \neq 0$.

♣ ♦ ♣ ♦ ♣ ♦ ♣ ♦ ♣ ♦ ♣ ♦ ♣ ♦ ♣ ♦ ♣♦ ♣ ♦ ♣ ♦ ♣ ♦ ♣ ♦ ♣ ♦ ♣ ♦ ♣ ♦ ♣

3.1 Problemas resolvidos

Exemplo 1. **Achar as imagens das curvas dadas pelas funções indicadas :**

a) $\mathbf{\Gamma} = \{z \in \mathbf{C} : \operatorname{Re} z = 0 \wedge \operatorname{Im} z \geq 0\}$, $w = f(z) = \dfrac{1+z}{1-z}$;

b) $\mathbf{\Gamma} = \{z \in \mathbf{C} : |z| = 2\}$, $w = f(z) = z + \dfrac{1}{z}$;

c) $\mathbf{\Gamma} = \{z \in \mathbf{C} : |z+1| = 1 \wedge \operatorname{Im} z \leq 0\}$, $w = f(z) = \dfrac{z-1}{z+3}$.

Resolução

a) É fácil concluir que as relações $\operatorname{Re} z = 0$, $\operatorname{Im} z \geq 0$ determinam o semi-eixo imaginário OY , isto é , $z = iy$, $y \geq 0$. Para encontrar a sua imagem $\mathbf{\Gamma}'$ pela função dada é preciso substituir z por iy na expressão de $f(z)$:

$$w = u + iv = f(z)\big|_{z=iy} = \frac{1+iy}{1-iy} = \frac{1-y^2+2iy}{1+y^2}, \quad y \geq 0.$$

Daqui resultam as equações paramétricas escalares da imagem $\mathbf{\Gamma}'$:

$$u = \frac{1-y^2}{1+y^2}, \quad v = \frac{2y}{1+y^2}, \quad y \geq 0.$$

Ao eliminar destas equações o parâmetro y , obter-se-á a equação cartesiana da curva $\mathbf{\Gamma}'$: $u^2 + v^2 = 1$, $v \geq 0$.

Faz-se a conclusão que a função dada $f(z)$ transforma o semi-eixo imaginário em semi-circunferência superior de raio $r = 1$ com o centro no ponto $w_0 = 0$, cuja equação pode ser dada na forma complexa : $|w| = 1$, $\operatorname{Im} w \geq 0$.

Resposta **: Semi-circunferência $|w| = 1$, $\operatorname{Im} w \geq 0$.**

b) A equação $|z| = 2$ determina uma circunferência de raio $r = 2$ com o centro na origem do sistema das coordenadas. Esta curva pode ser definida , também , pela equação paramétrica $z = 2e^{i\varphi}$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$. A seguir , pondo $z = 2e^{i\varphi}$ na expressão da função dada $f(z)$, obteremos a equação que define a imagem $\mathbf{\Gamma}'$ da curva dada $\mathbf{\Gamma}$ sobre o plano complexo w :

$$w = u + iv = 2e^{i\varphi} + \frac{1}{2e^{i\varphi}} = \frac{3}{2}\cos\varphi + \frac{1}{2}\operatorname{sen}\varphi, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi ,$$

de onde resultam as equações paramétricas da curva $\mathbf{\Gamma}'$: $u = \dfrac{3}{2}\cos\varphi$, $v = \dfrac{1}{2}\operatorname{sen}\varphi$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$. Ao eliminar o parâmetro φ , encontramos a sua equação cartesiana :

$$\frac{u^2}{9/4} + \frac{v^2}{1/4} = 1 .$$

Conclui-se que a imagem da circunferência $\mathbf{\Gamma}$ pela função dada $f(z)$ representa uma elipse , cuja equação pode ser dada , também , na forma complexa : $|\,w+\sqrt{2}\,|+|\,w-\sqrt{2}\,|=3$.

Resposta **: Elipse $|\,w+\sqrt{2}\,|+|\,w-\sqrt{2}\,|=3$.**

c) A curva dada $\mathbf{\Gamma}$ representa semi-circunferência inferior de raio $r=1$ com o centro no ponto $z_0=-1$, cuja equação paramétrica é : $z=-1+e^{i\varphi}$, $-\pi\le\varphi\le 0$. Substituindo z por $(-1+e^{i\varphi})$ na expressão de $f(z)$, obteremos :

$$w=u+iv=\frac{e^{i\varphi}-2}{e^{i\varphi}+2}=\frac{(e^{i\varphi}-2)\cdot(e^{-i\varphi}+2)}{(e^{i\varphi}+2)\cdot(e^{-i\varphi}+2)}=\frac{-3+4i\operatorname{sen}\varphi}{5+4\cos\varphi}\,,\quad -\pi\le\varphi\le 0\,.$$

Em seguida , encontramos as equações paramétricas escalares que determinam a imagem $\mathbf{\Gamma}'$ da curva dada :

$$u=-\frac{3}{5+4\cos\varphi}\,,\quad v=\frac{4\operatorname{sen}\varphi}{5+4\cos\varphi}\,,\quad -\pi\le\varphi\le 0\,.$$

Agora , para eliminar o parâmetro φ do sistema obtido, vamos expressar $\cos\varphi$ e $\operatorname{sen}\varphi$ através de u e v :

$$\cos\varphi=-\frac{5u+3}{4u}\,,\quad \operatorname{sen}\varphi=-\frac{3v}{4u}\,.$$

Atendendo a que $\cos^2\varphi+\operatorname{sen}^2\varphi=1$, obteremos a equação cartesiana da imagem $\mathbf{\Gamma}'$:

$$\left(u+\frac{5}{3}\right)^2+v^2=\frac{16}{9}\,,\quad v\le 0\,.$$

É fácil concluir que a função $f(z)$ transforma a curva dada $\mathbf{\Gamma}$ em semi-circunferência inferior de raio $r=4/3$ com o centro no ponto $w_0=-5/3$, cuja equação pode ser representada na forma complexa :

$$\left|\,w+\frac{5}{3}\,\right|=\frac{4}{3}\,,\quad \operatorname{Im}w\le 0\,.$$

Resposta **: Semi-circunferência $\left|\,w+\dfrac{5}{3}\,\right|=\dfrac{4}{3}\,,\quad \operatorname{Im}w\le 0$.**

Exemplo 2. **Determinar as imagens dos domínios dados pelas funções indicadas :**

a) $\mathbf{D}=\{\,z\in\mathbf{C}:|\,z-1-i\,|\ge 1\wedge \operatorname{Im}z\ge 1\,\}$, $\quad w=f(z)=\dfrac{z-1+i}{z-1-i}$;

b) $\mathbf{D}=\{\,z\in\mathbf{C}:1\le|\,z\,|\le 2\,\}$, $\quad w=f(z)=\dfrac{z}{z-1}$.

Resolução

a) O domínio dado $\mathbf{D}$ está representado na fig. 5a em anexo. Para achar a sua imagem $\mathbf{I}$ pela função dada $f(z)$, primeiramente , vamos encontrar a imagem da sua fronteira ABCM.

É fácil verificar que esta função transforma a semi-recta AM : $z = x + i$, $x \geq 2$ em segmento $A'M' : \text{Re}w = 1$, $0 \leq \text{Im}w \leq 2$ e a semi-recta $CM : z = x + i$, $x \leq 0$ em segmento $C'M' : \text{Re}w = 1$, $-2 \leq \text{Im}\,w \leq 0$. A imagem da semi-circunferência $ABC : z = 1 + i + e^{i\varphi}$, $0 \leq \varphi \leq \pi$ será semi-circunferência $A'B'C' : |\,w - 1| = 2$, $\text{Re}\,w \geq 1$. Assim , a fronteira do domínio **D** transforma-se pela função dada em contorno fechado $A'B'C'M'$ sobre o plano complexo w (fig. 5b em anexo). Com ajuda do ponto de controle $\mathbf{P}(1\,;0) \notin \mathbf{D}$ que se transforma no ponto $\mathbf{P}'(-1\,;0) \notin \mathbf{I}$, conclui-se que a imagem **I** do domínio **D** pela função dada $f(z)$ é o interior do contorno fechado $A'B'C'M'$, ou seja , o conjunto compacto $\mathbf{I} : |\,w - 1| \leq 2$, $\text{Re}\,w \geq 1$, como se mostra na fig. 5b.

<u>Resposta</u> **:** $\mathbf{I} = \{ w \in \mathbf{C} : |\,w - 1| \leq 2 \wedge \text{Re}\,w \geq 1 \}$**.**

b) O domínio dado **D** representa um anel circular , delimitado pelas circunferências $\mathbf{C}_1 : z = e^{i\varphi}$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ e $\mathbf{C}_2 : z = 2e^{i\varphi}$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ (fig. 6a em anexo). A imagem $\mathbf{C}_1'$ da circunferência $\mathbf{C}_1$ procura-se , substituindo z por $e^{i\varphi}$ na expressão de $f(z)$:

$$w = u + iv = \frac{1}{2} - i\frac{\text{sen}\,\varphi}{2(1 - \cos\varphi)} \ , \ 0 \leq \varphi \leq 2\pi \,.$$

Conclui-se que a imagem da circunferência $\mathbf{C}_1$ representa a recta : $u = \dfrac{1}{2}$, ou seja , $\text{Re}\,w = \dfrac{1}{2}$.

Agora , encontremos a imagem $\mathbf{C}_2'$ da circunferência $\mathbf{C}_2$, pondo $z = 2e^{i\varphi}$ na expressão de $f(z)$:

$$w = u + iv = \frac{4 - 2\cos\varphi - 2i\,\text{sen}\,\varphi}{5 - 4\cos\varphi} , \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi \,.$$

Daí resultam as equações paramétricas de $\mathbf{C}_2'$:

$$u = \frac{(4 - 2\cos\varphi)}{(5 - 4\cos\varphi)} ; \quad v = -\frac{2\,\text{sen}\,\varphi}{(5 - 4\cos\varphi)} , \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi \,.$$

Destas equações seguem as relações :

$$\cos\varphi = \frac{(5u - 4)}{(4u - 2)} ; \quad \text{sen}\,\varphi = -\frac{3v}{(4u - 2)} \,.$$

A seguir , com a base na identidade trigonométrica $\cos^2\varphi + \text{sen}^2\,\varphi = 1$, obter-se-á a equação cartesiana da imagem $\mathbf{C}_2'$:

$$\left(u - \frac{4}{3} \right)^2 + v^2 = \frac{4}{9} \,.$$

Conclui-se que $\mathbf{C}_2'$ representa uma circunferência de raio $r = 2/3$ com o centro no ponto $w_0 = 4/3$, cuja equação pode ser dada , também , na seguinte forma complexa : $\left| w - \dfrac{4}{3} \right| = \dfrac{2}{3}$. Com ajuda de um ponto de controle , digamos ,

$\mathbf{P}\left(\dfrac{3}{2};0\right)\in\mathbf{D}$, cuja imagem $\mathbf{P}'(3;0)\in\mathbf{I}$, é fácil concluir que a imagem do domínio $\mathbf{D}$ pela função dada $f(z)$ sobre o plano complexo w representa um conjunto definido de modo seguinte : $\left|w-\dfrac{4}{3}\right|\geq\dfrac{2}{3}$, $\operatorname{Re}w\geq\dfrac{1}{2}$, como mostra a fig. 6b em anexo.

Resposta **:** $\mathbf{I}=\left\{w\in\mathbf{C}:\left|w-\dfrac{4}{3}\right|\geq\dfrac{2}{3}\wedge\operatorname{Re}w\geq\dfrac{1}{2}\right\}$.

Exemplo 3. **Demonstrar a igualdade** $\operatorname{Arch}z=\operatorname{Ln}(z+\sqrt{z^2-1})$.

Resolução

Seja $\operatorname{Arch}z=w$. Então , $z=\operatorname{ch}w$ ou $e^w+e^{-w}=2z$. Desta equação resulta $e^w=z+\sqrt{z^2-1}$ ou , então , $w=\operatorname{Arch}z=\operatorname{Ln}(z+\sqrt{z^2-1})$, onde se tomam em consideração todos os valores das raízes quadradas.

Exemplo 4. **Calcular os números dados , apresentando-os na forma algébrica :**

a) $\operatorname{Arctg}1$; **b)** $(\sqrt{3}-i)^i$; **c)** $\operatorname{Ln}(i^i)$.

Resolução

a) Utilizando a relação que define $\operatorname{Arctg}z$, obtemos :

$$\operatorname{Arctg}1=\frac{i}{2}\operatorname{Ln}\left(\frac{i+1}{i-1}\right)=\frac{i}{2}\operatorname{Ln}(-i).$$

Atendendo a que $|-i|=1$ e $\arg(-i)=-\dfrac{\pi}{2}$, encontramos :

$$\operatorname{Ln}(-i)=\ln 1+i\left(-\frac{\pi}{2}+2\pi k\right)=i\left(-\frac{\pi}{2}+2\pi k\right),\quad k\in\mathbf{Z}.$$

Assim ,

$$\operatorname{Arctg}1=\frac{i}{2}\cdot i\left(-\frac{\pi}{2}+2\pi k\right)=\frac{\pi}{4}-\pi k,\quad k\in\mathbf{Z}.$$

Resposta **:** $\dfrac{\pi}{4}-\pi k$, $k\in\mathbf{Z}$.

b) Inicialmente , é preciso representar o número dado de modo seguinte :

$$(\sqrt{3}-i)^i=e^{i\cdot\operatorname{Ln}(\sqrt{3}-i)}.$$

A seguir , calcula-se

$$\operatorname{Ln}(\sqrt{3}-i)=\ln|\sqrt{3}-i|+i\cdot\left[\arg(\sqrt{3}-i)+2\pi k\right]=\ln 2+i\cdot\left(-\frac{\pi}{6}+2\pi k\right),\quad k\in\mathbf{Z}.$$

Agora , obtém-se

$$(\sqrt{3}-i)^{i}=e^{i\cdot\left[\ln 2+i\cdot\left(-\frac{\pi}{6}+2\pi k\right)\right]}=e^{\left(\frac{\pi}{6}-2\pi k\right)}\left[\cos(\ln 2)+i\,\mathrm{sen}(\ln 2)\right],\quad k\in\mathbf{Z}.$$

<u>*Resposta*</u> : $\boldsymbol{e^{\left(\frac{\pi}{6}-2\pi k\right)}\left[\cos(\ln 2)+i\,\mathrm{sen}(\ln 2)\right],\quad k\in\mathbf{Z}.}$

c) Primeiramente , vamos calcular o número

$$i^{i}=e^{i\,\mathrm{Ln}(i)}=e^{i\left[\ln 1+i\left(\frac{\pi}{2}+2\pi k\right)\right]}=e^{-\left(\frac{\pi}{2}+2\pi k\right)},\quad k\in\mathbf{Z}.$$

Agora , tomando em consideração que i^i é número real puro , sendo $|\,i^i\,|=e^{-\left(\frac{\pi}{2}+2\pi k\right)}$ e $\arg(i^i)=0$,achamos

$$\mathrm{Ln}(i^i)=\ln e^{-\left(\frac{\pi}{2}+2\pi k\right)}+2i\pi n=-\left(\frac{\pi}{2}+2\pi k\right)+2i\pi n,\quad k\,,n\in\mathbf{Z}.$$

<u>*Resposta*</u> : $\boldsymbol{-\left(\frac{\pi}{2}+2\pi k\right)+2i\pi n,\quad k\,,n\in\mathbf{Z}.}$

<u>*Exemplo 5.*</u> Resolver as seguintes equações :

a) $e^{-z}+2\,\mathrm{sh}\,z+3i=0$; **b)** $\mathrm{ch}\,z-2i=0$.

<u>*Resolução*</u>

a) Atendendo a que $\mathrm{sh}\,z=\frac{1}{2}(e^{z}-e^{-z})$, transformemos a equação dada para a forma: $e^{z}+3i=0$, ou seja , $e^{z}=-3i$. Daquí segue

$$z=\mathrm{Ln}(-3i)=\ln 3+i\left(-\frac{\pi}{2}+2\pi k\right),\quad k\in\mathbf{Z}.$$

<u>*Resposta*</u> : $\boldsymbol{z=\ln 3+i\left(-\frac{\pi}{2}+2\pi k\right),\quad k\in\mathbf{Z}.}$

b) Da equação dada resulta $z=\mathrm{Arch}(2i)=\mathrm{Ln}(2i+\sqrt{-5})=\mathrm{Ln}\,i(2\pm\sqrt{5})$. Tomando em consideração que $|\,i(2\pm\sqrt{5})\,|=\sqrt{5}\pm 2$ e $\arg\left[i(2\pm\sqrt{5})\right]=\pm\frac{\pi}{2}$, achamos

$$z=\ln(\sqrt{5}\pm 2)+i\left(2\pi k\pm\frac{\pi}{2}\right),\quad k\in\mathbf{Z}.$$

<u>*Resposta*</u> : $\boldsymbol{z=\ln(\sqrt{5}\pm 2)+i\left(2\pi k\pm\frac{\pi}{2}\right),\quad k\in\mathbf{Z}.}$

<u>*Exemplo 6.*</u> Estudar a continuidade da função

$$w = f(z) = \begin{cases} \dfrac{z^3 + i}{z^2 + 1}, & z \neq \pm i\,; \\[2ex] \dfrac{3}{2} i\,, & z = i\,; \\[2ex] -1\,, & z = -i\,. \end{cases}$$

Resolução

É fácil concluir que a função dada é contínua em todos pontos $z \neq \pm i$. Então, verifiquemos a continuidade de $f(z)$ nos pontos $z = i$ e $z = -i$, calculando os seus limites nesses pontos. Para $z = i$ tem-se :

$$\lim_{z \to i} f(z) = \lim_{z \to i} \frac{z^3 + i}{z^2 + 1} = \lim_{z \to i} \frac{z^3 - i^3}{z^2 - i^2} = \lim_{z \to i} \frac{(z-i)\cdot(z^2 + iz + i^2)}{(z-i)\cdot(z+i)} = \lim_{z \to i} \frac{z^2 + iz - 1}{z + i} = \frac{3}{2} i\,.$$

Vemos, então, que $\lim\limits_{z \to i} f(z) = f(i) = \dfrac{3}{2} i$. Logo, a função dada é contínua no ponto $z = i$.

Agora, calculemos o limite de $f(z)$ no ponto $z = -i$:

$$\lim_{z \to -i} f(z) = \lim_{z \to -i} \frac{z^3 + i}{z^2 + 1} = \lim_{z \to -i} \frac{z^2 + iz - 1}{z + i} = -\lim_{z \to -i} \frac{1}{z + i} = \infty\,.$$

Conclui-se que a função dada é descontínua no ponto $z = -i$, pois o seu limite nesse ponto é infinito.

Resposta **: Descontínua em $z = -i$.**

3.3 Problemas propostos

Achar as imagens das curvas dadas pelas funções indicadas

18. a) $\mathbf{\Gamma} = \{z \in \mathbf{C} : \operatorname{Im} z = 1 \wedge \operatorname{Re} z \geq 0\}$, $\quad w = f(z) = z^2$;

b) $\mathbf{\Gamma} = \{z \in \mathbf{C} : \operatorname{Re} z = 0 \wedge \operatorname{Im} z \leq 0\}$, $\quad w = f(z) = \dfrac{i(1-z)}{(1+z)}$;

c) $\mathbf{\Gamma} = \{z \in \mathbf{C} : |z - i| = 1 \wedge \operatorname{Im} z \geq 1\}$, $\quad w = f(z) = \dfrac{z+i}{z-i}$;

d) $\mathbf{\Gamma} = \{z \in \mathbf{C} : |z + i| = 1 \wedge \operatorname{Re} z \leq 0\}$, $\quad w = f(z) = \dfrac{z+i}{z-1+i}$.

Determinar as imagens dos domínios dados pelas funções indicadas

19. a) $\mathbf{D} = \{z \in \mathbf{C} : |z + 1| \geq 2 \wedge \operatorname{Im} z \leq 0\}$, $\quad w = f(z) = \dfrac{z-1}{z+1}$;

b) $\mathbf{D} = \{z \in \mathbf{C} : |z + i| \leq 1 \wedge \operatorname{Im} z \geq -1\}$, $\quad w = f(z) = \dfrac{z-i}{z+i}$;

c) $\mathbf{D} = \{z \in \mathbf{C} : |z| \leq 1 \wedge \operatorname{Im} z \leq 0\}$, $\quad w = f(z) = \dfrac{i(1+z)}{1-z}$;

d) $\mathbf{D}=\{z\in\mathbf{C}:|z-1|\geq 1\wedge \operatorname{Re}z\geq 0\}$, $w=f(z)=\dfrac{1}{z}$;

e) $\mathbf{D}=\{z\in\mathbf{C}:|z+i|\geq 1\wedge \operatorname{Re}z\leq 0\}$, $w=f(z)=\dfrac{iz+1}{iz-1}$;

f) $\mathbf{D}=\{z\in\mathbf{C}:|z-1|\leq 1\wedge \operatorname{Im}z\geq 0\}$, $w=f(z)=\dfrac{1+z}{1-z}$;

g) $\mathbf{D}=\{z\in\mathbf{C}:|z-1|\geq 1\wedge \operatorname{Im}z\leq 0\}$, $w=f(z)=\dfrac{1+z}{1-z}$.

Demonstrar as seguintes igualdades

20. a) $\operatorname{Arsh}z=\operatorname{Ln}(z+\sqrt{z^2+1})$; **b)** $\operatorname{Arth}z=\dfrac{1}{2}\operatorname{Ln}\left(\dfrac{1+z}{1-z}\right)$; **c)** $\operatorname{Arcth}z=\dfrac{1}{2}\operatorname{Ln}\left(\dfrac{z+1}{z-1}\right)$.

Calcular os números dados , apresentando-os na forma algébrica

21. a) $\operatorname{Ln}(-e)$; **b)** $\operatorname{Ln}(-1-i)$; **c)** $\operatorname{Ln}(-1+\sqrt{3}i)$; **d)** $\operatorname{Ln}(2-3i)$.

22. a) $1^{\sqrt{2}}$; **b)** 1^{-i}; **c)** i^{-i}; **d)** $(1+i)^{-4i}$.

23. a) $\operatorname{Arccos}2$; **b)** $\operatorname{Arcsen}i$; **c)** $\operatorname{Arth}(1-i)$; **d)** $\operatorname{Arsh}(-1)$.

Resolver as seguintes equações

24. a) $2\operatorname{ch}z-e^z+1=0$; **b)** $\operatorname{sh}z+\operatorname{ch}z-\sqrt{3}+i=0$;
c) $\operatorname{ch}z-\operatorname{sh}z+2i=0$; **d)** $\operatorname{sh}(iz)+i=0$.

Estudar a continuidade das funções dadas

25. a) $$w=f(z)=\begin{cases}\dfrac{(z^2+1)\cdot(z^3+8i)}{(z^2-3iz-2)}, & z\neq i,\ z\neq 2i;\\[2ex] -14i, & z=i;\\[2ex] -36i, & z=2i.\end{cases}$$

b) $$w=f(z)=\begin{cases}\dfrac{z^3-z^2+2z-2}{z^2-(1-i)z-i}, & z\neq 1,\ z\neq -i;\\[2ex] 1-i, & z=1;\\[2ex] 1+i, & z=-i.\end{cases}$$

Respostas

18. a) Semi-parábola $u=\dfrac{1}{4}v^2-1$, $v\geq 0$; **b)** Semi-sircunferência $|w|=1$, $\operatorname{Re}w\leq 0$;

c) Semi-sircunferência $|w-1|=2$, $\operatorname{Re} w \geq 1$;**d)** Segmento $\operatorname{Re} w = \frac{1}{2}$, $|\operatorname{Im} w| \leq \frac{1}{2}$.

19. a) $\mathbf{I}=\{w \in \mathbf{C} : |w-1| \leq 1 \wedge \operatorname{Im} w \leq 0\}$; **b)** $\mathbf{I}=\{w \in \mathbf{C} : |w-1| \geq 2 \wedge \operatorname{Re} w \leq 1\}$;

c) $\mathbf{I}=\{w \in \mathbf{C} : \operatorname{Re} w \geq 0 \wedge \operatorname{Im} w \geq 0\}$; **d)** $I=\left\{w \in C : 0 \leq \operatorname{Re} w \leq \frac{1}{2}\right\}$;

e) $\mathbf{I}=\{w \in \mathbf{C} : |w-1| \leq 2 \wedge \operatorname{Im} w \geq 0\}$; **f)** $\mathbf{I}=\{w \in \mathbf{C} : |w+1| \geq 2 \wedge \operatorname{Im} w \geq 0\}$;

g) $\mathbf{I}=\{w \in \mathbf{C} : |w+1| \leq 2 \wedge \operatorname{Im} w \leq 0\}$.

21. a) $1+i\pi(2k+1)$, $k \in \mathbf{Z}$; **b)** $\ln\sqrt{2}+i\left(-\frac{3\pi}{4}+2\pi k\right)$, $k \in \mathbf{Z}$;

c) $\ln 2+i\left(\frac{2\pi}{3}+2\pi k\right)$, $k \in \mathbf{Z}$; **d)** $\ln\sqrt{13}+i\left(-\operatorname{arctg}\frac{3}{2}+2\pi k\right)$, $k \in \mathbf{Z}$.

22. a) $\cos(2\sqrt{2}\pi k)+i\operatorname{sen}(2\sqrt{2}\pi k)$, $k \in \mathbf{Z}$; **b)** $e^{2\pi k}$, $k \in \mathbf{Z}$; **c)** $e^{\left(\frac{\pi}{2}+2\pi k\right)}$, $k \in \mathbf{Z}$;

d) $e^{\pi(8k+1)}\left[\cos(\ln 4)-i\operatorname{sen}(\ln 4)\right]$, $k \in \mathbf{Z}$.

23. a) $2\pi k - i\ln(2 \pm \sqrt{3})$, $k \in \mathbf{Z}$; **b)** $2\pi k - i\ln(\sqrt{2}-1)$, $\pi(2k+1)-i\ln(\sqrt{2}+1)$, $k \in \mathbf{Z}$;

c) $\frac{1}{4}\ln 5+i\left(\frac{1}{2}\operatorname{arctg}2-\frac{\pi}{2}+\pi k\right)$, $k \in \mathbf{Z}$;

d) $\ln(\sqrt{2}-1)+2i\pi k$, $\ln(\sqrt{2}+1)+i\pi(2k+1)$, $k \in \mathbf{Z}$.

24. a) $z=i\pi(2k+1)$, $k \in \mathbf{Z}$; **b)** $z=\ln 2+i\left(-\frac{\pi}{6}+2\pi k\right)$, $k \in \mathbf{Z}$;

c) $z=-\ln 2-i\pi(2k+1)$, $k \in \mathbf{Z}$; **d)** $z=\pi\left(2k-\frac{1}{2}\right)$, $k \in \mathbf{Z}$.

25. a) Contínua em $\mathbf{C}$; **b)** Descontínua em $z=1$ e $z=-i$.

FUNÇÕES ANALÍTICAS

1. Definição de uma função analítica

O conceito de função analítica é conceito fundamental da Análise Complexa. Vamos considerar uma função $f(z)$ de uma variável complexa z, que seja definida numa região $\mathbf{R}$ (conjunto aberto e conexo).

Definição1. Diz-se que $f(z)$ **é derivável num ponto** $z \in \mathbf{R}$, se existir o limite

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta f(z)}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z+\Delta z) - f(z)}{\Delta z} .$$

Este limite designa-se por $f'(z)$ ou $\dfrac{d f}{d z}$ e é chamado **derivada** da função $f(z)$ no ponto z.

Assim ,

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta f(z)}{\Delta z} \quad \text{ou} \quad \frac{d f}{d z} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta f(z)}{\Delta z} .$$

É importante observar que para existência da derivada $f'(z)$ o limite acima não pode depender de modo como Δz tende para zero , ou seja , como o ponto móvel $(z + \Delta z)$ tende para o ponto limiteO z. Esta requisição pressupõe que a função $f(z)$ seja definida em todos os pontos de uma vizinhança do z, **o que se verifica só caso** z **seja pertencente a uma região**.

<u>É válida a seguinte proposição :</u> **uma função** $f(z)$ **que é derivável num ponto** z **é contínua nesse ponto.**

Definição2. **Diz-se que uma função** $f(z)$ **é analítica numa região** $\mathbf{R}$**, se ela é derivável em cada ponto de** $\mathbf{R}$**. Diz-se que** $f(z)$ **é analítica num ponto** z_0 **, se ela é analítica numa região contendo** z_0 , por exemplo , num disco de centro z_0 .

As expressões ***função holomorfa*** , ***função regular*** , ***função monógena*** são usadas como sinônimas de ***função analítica***.

É de notar, que o conceito de analiticidade de uma função *f(z)* , como resulta da sua definição**, requer a existência da sua derivada em todos os pontos de <u>um conjunto aberto</u>**. Sem dúvida, essa requisição impõe fortes restrições à função ***f(z)*** e tem, como consequência, uma série de resultados verdadeiramente surpreendentes, como veremos no decorrer do nosso estudo.

2. Equações de Cauchy-Riemann

Os critérios de analiticidade de uma função resultam do seguinte

Teorema:

Para que uma função $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ seja analítica numa região R é necessário e suficiente que nessa região sejam deriváveis as funções $u(x, y) = \mathrm{Re} f(z)$, $v(x, y) = \mathrm{Im} f(z)$ e, também, sejam satisfeitas em R as seguintes equações conhecidas como equações de Cauchy-Riemann :

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad ; \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Em coordenadas polares r , φ as equações de Cauchy-Riemann têm a seguinte forma :

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial v}{\partial \varphi} \quad ; \quad \frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial u}{\partial \varphi}.$$

Uma função que satisfaz as equações de Cauchy-Riemann só em certos pontos isolados não é analítica.

Denomina-se **ponto singular** ou **singularidade** de uma função $f(z)$ a um ponto z_0 no qual $f(z)$ não é analítica. Um ponto singular z_0 de uma função $f(z)$ diz-se **ponto singular isolado** ou **singularidade isolada** desta função , se existe uma vizinhança de z_0 que não contém nenhum outro ponto singular , distinto do próprio z_0 .

A derivada de uma função $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ que é analítica numa região **R** calcula-se conforme as seguintes fórmulas:

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} \quad \text{ou} \quad f'(z) = \frac{\partial v}{\partial y} - i\frac{\partial u}{\partial y}.$$

3. Propriedades de funções analíticas

São válidas as seguintes proposições importantes que determinam as propriedades de funções analíticas:

Proposição 1. **Cada uma das funções elementares univalentes de uma variável complexa, assim como qualquer ramo unívoco de uma função multivalente representam em seus domínios funções analíticas.**

Proposição 2. **As derivadas das funções elementares de uma variável complexa calculam-se pelas mesmas regras que se usam para o cálculo de derivadas das mesmas funções de uma variável real.**

Proposição 3. **Uma função** $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ **que é analítica numa região R possui as derivadas de todas ordens em R e essas derivadas, por sua vez , são , também , funções analíticas em R .**

Proposição 4. **Suponha-se que uma função** $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ **seja analítica numa região R. Então, a sua parte real** $u(x, y) = \operatorname{Re} f(z)$ **e a sua parte imaginária** $v(x, y) = \operatorname{Im} f(z)$ **possuem em R derivadas parciais contínuas de qualquer ordem , e representam funções harmónicas conjugadas , satisfazendo a equação de Laplace , isto é**

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \qquad \mathbf{e} \qquad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0.$$

Esta propriedade permite recuperar uma função analítica através da sua parte real ou da imaginária , a saber. Caso ser dada só a parte real $u(x, y)$ de uma função analítica $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, então, a sua parte imaginária $v(x, y)$ pode ser obtida através de $u(x, y)$ do modo seguinte :

$$v(x, y) = \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} -\frac{\partial u}{\partial y}dx + \frac{\partial u}{\partial x}dy + \mathrm{C} = -\int_{x_0}^{x} u'_y(x, y_0)dx + \int_{y_0}^{y} u'_x(x, y)dy + \mathrm{C},$$

onde **C** é constante de integração , (x_0, y_0) é ponto inicial de integração no qual a função $f(x, y)$ é derivável.

Analogamente , a parte real $u(x, y)$ pode ser recuperada através da parte imaginária $v(x, y)$:

$$u(x, y) = \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} \frac{\partial v}{\partial y}dx - \frac{\partial v}{\partial x}dy + \mathrm{C} = \int_{x_0}^{x} v'_y(x, y_0)dx - \int_{y_0}^{y} v'_x(x, y)dy + \mathrm{C}.$$

♣ ♦ ♣ ♦ ♣ ♦ ♣ ♦ ♣ ♦ ♣ ♦ ♣ ♦ ♣ ♦ ♣♣♦ ♣ ♦ ♣ ♦ ♣ ♦ ♣ ♦ ♣ ♦ ♣ ♦ ♣ ♦ ♣

4. Problemas resolvidos

Exemplo 1. **Verificar , se são analíticas as funções dadas :**

a) $f(z) = z \cdot e^z$; **b)** $f(z) = \bar{z} \cdot \operatorname{sen} z$.

Resolução

a) Atendendo a que $z = x + iy$, vamos decompôr a função dada nas suas partes real e imaginária

$$f(z) = z \cdot e^z = e^x[(x\cos y - y\operatorname{sen} y) + i(x\operatorname{sen} y + y\cos y)].$$

Assim , $u(x,y) = \operatorname{Re} f(z) = e^x(x\cos y - y\operatorname{sen} y)$, $v(x,y) = \operatorname{Im} f(z) = e^x(x\operatorname{sen} y + y\cos y)$.
Achamos as derivadas parciais das funções $u(x,y)$ e $v(x,y)$:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = e^x(x\cos y - y\operatorname{sen} y + \cos y); \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -e^x(x\operatorname{sen} y + y\cos y + \operatorname{sen} y);$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = e^x(x\operatorname{sen} y + y\cos y + \operatorname{sen} y) \; ; \qquad \frac{\partial v}{\partial y} = e^x(x\cos y - y\operatorname{sen} y + \cos y).$$

É fácil ver que se verificam as equações : $\dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial y}$, $\dfrac{\partial u}{\partial y} = -\dfrac{\partial v}{\partial x}$.

Concluimos que as funções $u(x,y)$, $v(x,y)$ têm as derivadas parciais contínuas e satisfazem as equações de Cauchy-Riemann sobre todo o plano complexo. Logo , a função dada $f(z)$ é analítica.

Resposta **: Sim.**

b) Vamos separar a parte real e a imaginária da função dada :

$$f(z) = \bar{z} \cdot \operatorname{sen} z = (x - iy)\cdot \operatorname{sen}(x+iy) = (x\operatorname{sen} x \cdot \operatorname{ch} y + y\cos x \cdot \operatorname{sh} y) + i(x\cos x \cdot \operatorname{sh} y - y\operatorname{sen} x \cdot \operatorname{ch} y).$$

Obtemos

$$u(x,y) = \operatorname{Re} f(z) = x\operatorname{sen} x \cdot \operatorname{ch} y + y\cos x \cdot \operatorname{sh} y \; , \; v(x,y) = \operatorname{Im} f(z) = x\cos x \cdot \operatorname{sh} y - y\operatorname{sen} x \cdot \operatorname{ch} y$$

A seguir , achamos as derivadas parciais das funções $u(x,y)$ e $v(x,y)$:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \operatorname{sen} x \cdot \operatorname{ch} y + x\cos x \cdot \operatorname{ch} y - y\operatorname{sen} x \cdot \operatorname{sh} y; \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = x\operatorname{sen} x \cdot \operatorname{sh} y + \cos x \cdot \operatorname{sh} y + y\cos x \cdot \operatorname{ch} y;$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \cos x \cdot \operatorname{sh} y - x\operatorname{sen} x \cdot \operatorname{sh} y - y\cos x \cdot \operatorname{ch} y; \qquad \frac{\partial v}{\partial y} = x\cos x \cdot \operatorname{ch} y - \operatorname{sen} x \cdot \operatorname{ch} y - y\operatorname{sen} x \cdot \operatorname{sh} y.$$

Tem-se $\dfrac{\partial u}{\partial x} \neq \dfrac{\partial v}{\partial y}$, $\dfrac{\partial u}{\partial y} \neq -\dfrac{\partial v}{\partial x}$ caso $(x\,,\,y) \neq (0\,,\,0)$.

Por consequência , a função dada $f(z)$ não satisfaz as equações de Cauchy-Riemann , senão num ponto isolado $z = 0$ e , então , ela não é analítica.

Resposta **: Não.**

Exemplo 2. **Achar as derivadas das funções dadas , partindo de suas expressões em termos da função logarítmica.**

a) $w = f(z) = \text{Arccos}\, z$; **b)** $w = f(z) = \text{Arth} z$.

<u>Resolução</u>

a) A função $\text{Arccos}\, z$ exprime-se em termos da função logarítmica do modo seguinte :

$$\text{Arccos}\, z = -i\,\text{Ln}(z + \sqrt{z^2 - 1}).$$

A derivada da função $\text{Arccos}\, z$ calcula-se a partir da expressão acima com ajuda da regra da cadeia. Temos

$$\frac{d}{dz}(\text{Arccos}\, z) = \frac{d}{dz}\left[-i\,\text{Ln}(z + \sqrt{z^2 - 1})\right] = -i\frac{(z + \sqrt{z^2 - 1})'}{(z + \sqrt{z^2 - 1})} =$$

$$= \frac{-i}{(z + \sqrt{z^2 - 1})}\left(1 + \frac{z}{\sqrt{z^2 - 1}}\right) = \frac{-i}{\sqrt{z^2 - 1}}.$$

***<u>Resposta</u>* :** $(\text{Arccos}\, z)' = -\dfrac{i}{\sqrt{z^2 - 1}}$.

b) A função $\text{Arth} z$ define-se pela expressão seguinte :

$$\text{Arth} z = \frac{1}{2}\text{Ln}\left(\frac{1+z}{1-z}\right).$$

Derivando essa expressão , obteremos :

$$\frac{d}{dz}(\text{Arth} z) = \frac{d}{dz}\left[\frac{1}{2}\text{Ln}\left(\frac{1+z}{1-z}\right)\right] = \frac{1}{2}\left(\frac{1-z}{1+z}\right)\cdot\left(\frac{1+z}{1-z}\right)' = \frac{1}{2}\cdot\frac{(1-z)}{(1+z)}\cdot\frac{2}{(1-z)^2} = \frac{1}{1-z^2}.$$

***<u>Resposta</u>* :** $(\mathbf{Arth}\, z)' = \dfrac{1}{1-z^2}$.

<u>Exemplo 3.</u> **Provar que a função $u(x,y) = \text{sh}\, x \cdot \text{sen}\, y$ é parte real de uma função analítica $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ e achar esta função de modo que $f(0) = -i$.**

<u>Resolução</u>

Vamos verificar se a função dada $u(x,y)$ satisfaça a equação de Laplace , isto é ,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

Ao encontrar as segundas derivadas $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \text{sh}\, x \cdot \text{sen}\, y$, $\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\text{sh}\, x \cdot \text{sen}\, y$, obteremos :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \text{sh}\, x \cdot \text{sen}\, y - \text{sh}\, x \cdot \text{sen}\, y = 0.$$

Por consequência , a função $u(x,y)$ satisfaz a equação de Laplace e , então , é função harmónica e , consequentemente , representa parte real de uma função analítica $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$.

A seguir , para obter $f(z)$, é preciso determinar a sua parte imaginária $v(x,y)$. Utilizando a origem do sistema das coordenadas na qualidade do ponto inicial de integração , teremos :

$$v(x,y) = -\int_0^x u'_y(x,0)\,dx + \int_0^y u'_x(x,y)\,dy + C = -\int_0^x \operatorname{sh} x\,dx + \int_0^y \operatorname{ch} x \cdot \operatorname{sen} y\,dy + C = 1 - \operatorname{ch} x \cdot \cos y + C .$$

Assim , achamos

$$f(z) = u(x,y) + iv(x,y) = \operatorname{sh} x \cdot \operatorname{sen} y + i(1 - \operatorname{ch} x \cdot \cos y + C)$$

Atendendo a que $f(0) = -i$, obtém-se $C = -1$. Deste modo , encontramos :

$$f(z) = \operatorname{sh} x \cdot \operatorname{sen} y - i \operatorname{ch} x \cdot \cos y = -i \operatorname{ch} z .$$

<u>Resposta</u> **:** $\boldsymbol{f(z) = -i \operatorname{ch} z}$ **.**

<u>Exemplo 4.</u> **Provar que a função** $\boldsymbol{v(x,y) = x - \operatorname{arctg}\frac{y}{x}}$**,** $\boldsymbol{x > 0}$ **é parte imaginária de uma função analítica** $\boldsymbol{f(z) = u(x,y) + iv(x,y)}$ **e recuperar esta função de modo que** $\boldsymbol{f(2) = -\ln 2 + 2i}$**.**

<u>Resolução</u>

Para verificar que a função dada $v(x,y)$ satisfaz a equação de Laplace , calculemos as suas derivadas da segunda ordem :

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = -\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2} \quad , \quad \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2} \ .$$

Agora , tem-se :

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = -\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2} + \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2} = 0 .$$

Logo , $v(x,y)$ satisfaz a equação de Laplace e , então , é função harmónica o que prova que ela é parte imaginária de uma função analítica $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$.

Vamos encontrar a patre real da $f(z)$, tomando $(x_0, y_0) = (1\,;0)$:

$$u(x,y) = \int_1^x v'_y(x,0)\,dx - \int_0^y v'_x(x,y)\,dy + C = -\int_1^x \frac{dx}{x} - \int_0^y (1 + \frac{y}{x^2+y^2})dy + C = -y - \ln\sqrt{x^2+y^2} + C .$$

Assim , a função analítica $f(z)$ fica reposta através da sua parte imaginária $v(x,y)$:

$$f(z) = (-y - \ln\sqrt{x^2+y^2} + C) + i(x - \operatorname{arctg}\frac{y}{x}) , \quad x > 0 .$$

Atendendo à requisição $f(2) = -\ln 2 + 2i$, achamos $C = 0$. Deste modo encontramos a função $f(z)$, satisfazendo a condição indicada :

$$f(z) = (-y - \ln\sqrt{x^2+y^2}) + i(x - \operatorname{arctg}\frac{y}{x}) , \quad x > 0 .$$

Tomando em consideração que para $x > 0$ tem-se $\ln\sqrt{x^2+y^2} + i \operatorname{arctg}\frac{y}{x} = \ln|z| + i \arg z = \ln z$, apresentamos $f(z)$ na forma seguinte :

$$f(z) = iz - \ln z , \quad \operatorname{Re} z > 0 .$$

<u>Resposta</u> **:** $\boldsymbol{f(z) = iz - \ln z}$ **,** $\boldsymbol{\operatorname{Re} z > 0}$**.**

♣ ♦ ♣ ♦ ♣ ♦ ♣ ♦ ♣ ♦ ♣ ♦ ♣ ♦ ♣ ♦ ♣♦ ♣ ♦ ♣ ♦ ♣ ♦ ♣ ♦ ♣ ♦ ♣ ♦ ♣ ♦ ♣

4.3 Problemas propostos

Verificar , se são analíticas as funções dadas

26. a) $f(z)=|z|\cdot\mathrm{Re}\,\bar{z}$; **b)** $f(z)=(z+1-i)^3$; **c)** $f(z)=\bar{z}\cdot\mathrm{Im}(z^2-i)$; **d)** $f(z)=\bar{z}\cdot(z+i)^2$.

27. a) $f(z)=\bar{z}\cdot e^z$; **b)** $f(z)=z\cdot\cos(2z+i)$; **c)** $f(z)=z\cdot\mathrm{sh}(\bar{z}-2i)$; **d)** $f(z)=e^{(z^2+z+i)}$;

e) $f(z)=(\bar{z}+i)\cdot\mathrm{sen}(\bar{z}-i)$; **f)** $f(z)=(z^2+1)\cdot\mathrm{ch}\,z$.

Achar as derivadas das funções dadas , partindo de suas expressões em termos da função logarítmica

28. a) $w=f(z)=\mathrm{Arcsen}\,z$; **b)** $w=f(z)=\mathrm{Arctg}\,z$; **c)** $w=f(z)=\mathrm{Arcctg}\,z$.

29. a) $w=f(z)=\mathrm{Arsh}\,z$; **b)** $w=f(z)=\mathrm{Arch}\,z$; **c)** $w=f(z)=\mathrm{Arcth}\,z$.

Provar que as funções $u(x,y)$ representam partes reais e as $v(x,y)$ partes imaginárias de certas funções analíticas e obter essas funções de modo que sejam satisfeitas as condições indicadas

30. a) $u(x,y)=2(x^2-y^2)-3x$, $f(0)=0$;

b) $u(x,y)=x^2-y^2+5x+y-\dfrac{y}{(x^2+y^2)}$, $f(i)=-1+5i$;

c) $u(x,y)=\mathrm{ch}\,x\cdot\cos y$, $f(0)=1$;

d) $u(x,y)=e^x(x\cos y-y\,\mathrm{sen}\,y)$, $f(0)=0$;

e) $u(x,y)=(x+1)\cos x\cdot\mathrm{ch}\,y+y\,\mathrm{sen}\,x\cdot\mathrm{sh}\,y$, $f(0)=1$;

f) $u(x,y)=x\ln\sqrt{x^2+y^2}-y\,\mathrm{arctg}\dfrac{y}{x}$, $x>0$, $f(1)=0$.

31. a) $v(x,y)=2x^2-2y^2+x$, $f(0)=0$;

b) $v(x,y)=3+x^2-y^2-\dfrac{y}{2(x^2+y^2)}$, $f(1)=\dfrac{1}{2}+4i$;

c) $v(x,y)=2(2\,\mathrm{sh}\,x\cdot\mathrm{sen}\,y+xy)$, $f(0)=3$;

d) $v(x,y)=\ln(x^2+y^2)+x-2y$, $x>0$, $f(1)=-2+i$;

e) $v(x,y)=y-2\,\mathrm{sen}\,2x\cdot\mathrm{sh}\,2y$, $f(0)=-2$;

f) $v(x,y)=e^x\,\mathrm{sen}\,y+\mathrm{arctg}\dfrac{y}{x}$, $x>0$, $f(1)=e$.

Respostas

26. a) Não; **b)** Sim; **c)** Não; **d)** Não. **27. a)** Não; **b)** Sim; **c)** Não; **d)** Sim; **e)** Não; **f)** Sim.

28. a) $(\mathrm{Arcsen}\,z)'=\dfrac{1}{\sqrt{1-z^2}}$; **b)** $(\mathrm{Arctg}\,z)'=\dfrac{1}{(1+z^2)}$; **c)** $(\mathrm{Arcctg}\,z)'=-\dfrac{1}{(1+z^2)}$.

29. **a)** $(\operatorname{Arsh} z)' = \dfrac{1}{\sqrt{z^2+1}}$; **b)** $(\operatorname{Arch} z)' = \dfrac{1}{\sqrt{z^2-1}}$; **c)** $(\operatorname{Arcth} z)' = \dfrac{1}{1-z^2}$.

30. **a)** $f(z) = 2z^2 - 3z$; **b)** $f(z) = z^2 + (5-i)z - \dfrac{i}{z}$, $z \neq 0$; **c)** $f(z) = \operatorname{ch} z$; **d)** $f(z) = ze^z$;

e) $f(z) = (z+1)\cos z$; **f)** $f(z) = z\ln z$, $\operatorname{Re} z > 0$.

31. **a)** $f(z) = 2iz^2 + iz$; **b)** $f(z) = \dfrac{1}{2z} + iz^2 + 3i$, $z \neq 0$; **c)** $f(z) = 4\operatorname{ch} z + z^2 - 1$;

d) $f(z) = 2i\ln z - (2-i)z$, $\operatorname{Re} z > 0$; **e)** $f(z) = z + 2\cos 2z$; **f)** $f(z) = e^z + \ln z$, $\operatorname{Re} z > 0$.

INTEGRAIS DE CONTORNO

Seja $f(z)=u(x,y)+i\cdot v(x,y)$ uma função contínua sobre um contorno orientado $\Gamma^{+}: z=z(t)=x(t)+i\cdot y(t),\, a\le t\le b$. Então, o integral da função $f(z)$ ao longo do contorno Γ^{+} calcula - se conforme a seguinte fórmula :

$$\int_{\Gamma^{+}} f(z)dz=\int_{a}^{b} f[z(t)]z'(t)dt \quad .$$

- **Propriedades principais do integral de contorno**

- Propriedade de linearidade :

$$\int_{\Gamma}[k_1 f(z)+k_2 g(z)]\,dz=k_1\int_{\Gamma} f(z)dz+k_2\int_{\Gamma} g(z)dz \quad ,$$

onde k_1 e k_2 são constantes .

- Propriedade de aditividade :

$$\int_{\Gamma} f(z)dz=\int_{\Gamma_1} f(z)dz+\int_{\Gamma_2} f(z)dz\,,$$

sendo $\Gamma=\Gamma_1\cup\Gamma_2 \quad (\Gamma_1\cap\Gamma_2=\varnothing)$.

- Dependência do integral da orientação do contorno de integração :

$$\int_{\Gamma^{-}} f(z)dz=-\int_{\Gamma^{+}} f(z)dz \quad .$$

- **Teoremas fundamentais sobre integrais de contorno**

<u>Teorema 1.</u> (Teorema Integral de Cauchy)

Seja $f(z)$ *uma função analítica numa região simplesmente conexa* $\mathbf{R}$ *e seja* Γ *um contorno fechado simples, todo contido em* $\mathbf{R}$. *Então,*

$$\oint_{\Gamma} f(z)dz=0\,.$$

Teorema 2.

Seja $\boldsymbol{f(z)}$ *uma função analítica numa região simplesmente conexa* $\mathbf{R}$ *e sejam* z_1 , z_2 *dois pontos interiores de* $\mathbf{R}$. *Então, integral da função* $\boldsymbol{f(z)}$ *é independente do contorno de integração que em* $\mathbf{R}$ *une os pontos* z_1 *e* z_2 *, e calcula-se pela fórmula de Newton - Leibniz*

$$\int_{z_1}^{z_2} f(z)dz = \mathbf{F}(z)\Big|_{z_1}^{z_2} = \mathbf{F}(z_2) - \mathbf{F}(z_1) \ ,$$

onde $\mathbf{F}(z)$ *é primitiva de* $\boldsymbol{f(z)}$*, isto é* $\mathbf{F}'(z) = f(z)$ **.**

N O T A : ***Sendo dado um integral de contorno de uma função multivalente, é necessário que sempre seja indicado o ramo unívoco desta função sobre o qual serão calculados os seus valores.***

Teorema 3.

Seja $\boldsymbol{f(z)}$ *uma função analítica numa região* $\mathbf{R}$ *e sejam* Γ, $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$ *, contornos fechados simples, todos contidos em* $\mathbf{R}$ *de modo que os contornos* $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$ *, sendo exteriores um a outro, se encontrem todos no interior de* Γ*. Então,*

$$\oint_{\Gamma^+} f(z)dz = \oint_{\gamma_1^+} f(z)dz + \oint_{\gamma_2^+} f(z)dz + \ldots + \oint_{\gamma_n^+} f(z)dz \ .$$

Teorema 4. (Fórmula Integral de Cauchy)

Suponha - se que $\boldsymbol{f(z)}$ *seja uma função analítica em todos os pontos, situados no interior e sobre um contorno fechado simples* Γ*, e seja* z_0 *um ponto interior a* Γ*. Então, é válida a Fórmula Integral de Cauchy :*

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma^+} \frac{f(z)}{(z - z_0)} dz \quad .$$

Teorema 5.

Se uma funçaõ $\boldsymbol{f(z)}$ *é analítica em todos os pontos situados no interior e sobre um contorno fechado simples* Γ *, então* $\boldsymbol{f(z)}$ *possui derivadas de todas ordens em qualquer ponto* z_0 *interior a* Γ *, dadas pela fórmula*

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_{\Gamma^+} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} dz\,,\ n = 1,2,3\ldots.$$

Dos teoremas 4 e 5 resulta a seguinte fórmula que pode ser usada para cálculo de certos integrais de contorno:

$$\oint_{\Gamma^+} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} dz = \frac{2\pi i}{n!} f^{(n)}(z_0)\,, \qquad n = 0,1,2,3\ldots.$$

onde a função subintegral $f(z)$ é analítica no interior e sobre um contorno fechado simples Γ, z_0 é um ponto interior a Γ.

♣♦♣♦♣♦♣♦♣♦♣♦♣♦♣♦♣♦♣♦♣♦♣♦♣♦♣♦♣♦♣♦♣♦♣♦♣

Problemas resolvidos

Exemplo 1. **Calcule o integral**

$$\int_\Gamma \operatorname{Re} z \cdot \operatorname{Im} z\, dz\,,$$

onde Γ é poligonal que liga os pontos A(-1;0) , B(0;1) , C(1;0) e orientada no sentido de A para C.

Resolução

Temos

$$\mathrm{I} = \int_\Gamma \operatorname{Re} z \cdot \operatorname{Im} z\, dz = \int_{(A)}^{(B)} \operatorname{Re} z \cdot \operatorname{Im} z\, dz + \int_{(B)}^{(C)} \operatorname{Re} z \cdot \operatorname{Im} z\, dz = \mathrm{I}_1 + \mathrm{I}_2\ .$$

Primeiro, calculemos o integral $\mathrm{I}_1 = \int_{(A)}^{(B)} \operatorname{Re} z \cdot \operatorname{Im} z\, dz$.

A equação paramétrica do segmento AB é :

$z = z(t) = -1 + t(1+i),\ 0 \le t \le 1$, sendo $\operatorname{Re} z = -1+t$, $\operatorname{Im} z = t$, $dz = (1+i)dt$.

Logo,

$$\mathrm{I}_1 = \int_0^1 (-1+t)\cdot t \cdot (1+i)dt = -\frac{1}{6}(1+i).$$

Agora, calculemos I_2 .A equação paramétrica do segmento BC é :

$z = z(t) = i + t(1-i),\ 0 \le t \le 1$, sendo $\operatorname{Re} z = t$, $\operatorname{Im} z = 1-t$, $dz = (1-i)dt$.
Então ,

$$\mathrm{I}_2 = \int_{(B)}^{(C)} \operatorname{Re} z \cdot \operatorname{Im} z \, dz = \int_0^1 t(1-t)(1-i)dt = \frac{1}{6}(1-i) \ .$$

Assim, obtemos $\mathrm{I} = \mathrm{I}_1 + \mathrm{I}_2 = -\frac{i}{3}$.

Resposta **:** $\boldsymbol{\frac{i}{3}}$.

Exemplo 2. **Calcule o integral**

$$\int_\Gamma \left(\operatorname{Re} z - i\bar{z}\right)dz \,,$$

considerando dois cotornos diferentes que ligam os pontos $z_1 = 0$ e $z_2 = -1 + i$ e que são orientados no sentido de z_1 para z_2 :

a) segmento da recta $y = -x$;

b) parábola $y = x^2$.

Resolução

a) A equação paramétrica do segmento $[z_1, z_2]$ é $z = z(t) = t(-1+i),\ 0 \le t \le 1$, sendo $\operatorname{Re} z = -t$, $\bar{z} = t(-1-i)$, $dz = (-1+i)dt$.

Então,

$$\int_\Gamma \left(\operatorname{Re} z - i\bar{z}\right)dz = \int_0^1 [-t - it(-1-i)](-1+i)dt = (-1+i)(-2+i)\int_0^1 tdt = \frac{1}{2}(1-3i) \, .$$

b) Atendendo a que $z = x + iy$, $dz = dx + idy$, $\operatorname{Re} z = x$, $\bar{z} = x - iy$, obtemos

$$\int_\Gamma \left(\operatorname{Re} z - i\bar{z}\right)dz = \int_{z_1}^{z_2} [x - i(x - iy)](dx + idy) = \left\langle y = x^2, dy = 2xdx,\ x\Big|_{0}^{-1} \right\rangle =$$

$$= \int_0^{-1} \left[x - ix - x^2 + (ix + x - ix^2)2x\right] dx = \frac{1}{6}(1 - 10i).$$

O integral dado pode ser, também, calculado, utilizando a representação paramétrica do arco da parábola $\boldsymbol{\Gamma}$: $z = z(t) = -t + it^2,\ 0 \le t \le 1$.

Respostas **:** **a)** $\mathbf{\dfrac{1-3\mathit{i}}{2}}$; **b)** $\mathbf{\dfrac{1-10\mathit{i}}{6}}$**.**

Exemplo 3. **Calcule o integral**

$$\int_{\Gamma^-} \frac{z+i}{z-i} dz,$$

onde o contorno Γ^- representa a semi-circunferência $|z-i|=1$, $\operatorname{Im} z \geq 1$, orientada no sentido negativo.

Resolução

A semi-circunferência Γ^- , sendo orientada no sentido negativo, ou seja, percorrida no sentido horário, pode ser definida pela seguinte equação paramétrica :

$$z = i + e^{i(\pi-\varphi)} \text{ ou } z = i - e^{-i\varphi}, \; 0 \leq \varphi \leq \pi$$

Atendendo a que $dz = -ie^{-i\varphi} d\varphi$, achamos

$$\int_{\Gamma^-} \frac{z+i}{z-i} dz = \int_0^{\pi} \frac{2i - \mathrm{e}^{-i\varphi}}{-\mathrm{e}^{-i\varphi}} i\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi}\, d\varphi = \int_0^{\pi} \left(2 + i\,\mathrm{e}^{-i\varphi}\right) d\varphi = 2(\pi+1).$$

Resposta **:** $\mathbf{2(\pi+1)}$**.**

Exemplo 4. **Calcule o integral**

$$\int_0^i (z+i)\operatorname{ch} z \; dz$$

Resolução

A função subintegral $f(z) = (z+i)\operatorname{ch}(z)$ é analítica sobre todo o plano complexo e, consequentemente, o integral desta função é independente do contorno de integração e pode ser calculado, aplicando o método de integração por partes e utilizando a fórmula de Newton -Leibniz, a saber :

$$\int_0^i (z+i)\operatorname{ch} z \; dz = \begin{vmatrix} u = z+i & du = dz \\ dv = \operatorname{ch} z \; dz & v = \operatorname{sh} z \end{vmatrix} = (z+i)\operatorname{sh} z \Big|_0^i - \int_0^i \operatorname{sh} z \; dz =$$

$$= 2i \cdot \operatorname{sh}(i) - \operatorname{ch}(i) + 1 = 1 - 2\operatorname{sen}1 - \cos 1.$$

Resposta **:** $\mathbf{1 - 2sen1 - cos1}$**.**

Exemplo 5. **Calcule os integrais :**

a) $\int_{-1-i}^{-1+i} \sqrt{z+1}dz,$ **considerar o ramo da função subintegral sobre o qual** $\sqrt{1}=1$ **;**

b) $\int_{1}^{1-i} (4z-1)\ln z\, dz.$

Resolução

a) A função subintegral $f(z)=\sqrt{z+1}$ é multivalente, admitindo dois ramos diferentes com o ponto de ramificação $z=-1$. Para distinguir os ramos unívocos de $f(z)$ é preciso cortar o plano complexo, ligando os pontos $z=-1$ e $z=\infty$, por exemplo, ao longo do raio $z=-1+re^{i\pi}$, $r\geq 0$ e introduzindo a restrição $-\pi<\arg(z+1)\leq\pi$. Então, em cada ponto z a função $f(z)$ assume dois valores distintos, dados por

$$f(z)=\sqrt{|z+1|}\left[\cos\frac{\arg(z+1)+2\pi k}{2}+i\cdot\operatorname{sen}\frac{\arg(z+1)+2\pi k}{2}\right],\ k=0;1.$$

Ao calcular os valores da função dada no ponto $z=0$, é fácil concluir que o ramo, sobre o qual se verifica a condição indicada $\sqrt{1}=1$, corresponde a $k=0$. Deste modo fica especificado o ramo unívoco da função subintegral, definido por

$$f(z)=\sqrt{|z+1|}\left[\cos\frac{\arg(z+1)}{2}+i\operatorname{sen}\frac{\arg(z+1)}{2}\right]. \qquad (*)$$

Sobre este ramo $f(z)$ é analítica e integral de $f(z)$, conforme o teorema 2, é independente da geometria do contorno de integração, caso ele não intersecte o corte do plano complexo. Assim, o integral dado pode ser calculado, utilizando os métodos conhecidos e a fórmula de Newton-Leibniz, a saber :

$$\int_{-1-i}^{-1+i}\sqrt{z+1}dz=\int_{-1-i}^{-1+i}\sqrt{z+1}d(z+1)=\frac{2}{3}\sqrt{(z+1)^3}\Big|_{-1-i}^{-1+i}=\frac{2}{3}(\sqrt{-i}-\sqrt{i}).$$

A seguir, calculando com ajuda da fórmula ($*$) os valores

$$f(-1-i)=\sqrt{-i}=\sqrt{|-i|}\left[\cos\frac{\arg(-i)}{2}+i\operatorname{sen}\frac{\arg(-i)}{2}\right]=\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+i\operatorname{sen}\left(-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1-i}{\sqrt{2}},$$

$$f(-1+i)=\sqrt{i}=\sqrt{|\,i\,|}\left[\cos\frac{\arg(i)}{2}+i\operatorname{sen}\frac{\arg(i)}{2}\right]=\cos\frac{\pi}{4}+i\operatorname{sen}\frac{\pi}{4}=\frac{1+i}{\sqrt{2}},$$

encontramos $\mathrm{I}=\frac{2}{3}\left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}-\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)=-\frac{4i}{3\sqrt{2}}=-\frac{2\sqrt{2}}{3}i.$

b) Por $\ln z$ está designado o ramo principal da função logarítmica. Como se sabe, cada ramo da função logarítmica representa uma função analítica sobre o plano complexo, cortado ao longo do raio $z=re^{i\pi}$, $r\geq 0$. Segundo a definição tem-se :

$$\ln z=\ln|z|+i\arg z,\ -\pi<\arg z\leq\pi.$$

O integral dado é independente da forma do contorno que une os pontos $z_1=1$ e $z_2=1-i$, sem intersectar o corte do plano complexo, e calcula-se, aplicando o método de integração por partes :

$$\mathrm{I}=\int_1^{1-i}(4z-1)\ln z\,dz=\left|\begin{array}{ll} u=\ln z & du=\dfrac{dz}{z} \\ dv=(4z-1)dz & v=2z^2-z \end{array}\right|=\left(2z^2-z\right)\ln z\Big|_1^{1-i}-\int_1^{1-i}\frac{\left(2z^2-z\right)dz}{z}=$$

$$=(-1-3i)\ln(1-i)-\ln 1+1+i.$$

Atendendo a que $\ln(1-i)=\ln\sqrt{2}-i\frac{\pi}{4}$, $\ln 1=0$, achamos

$$\mathrm{I}=(-1-3i)\cdot\left(\ln\sqrt{2}-i\frac{\pi}{4}\right)+1+i=\left(1-\frac{3\pi}{4}-\ln\sqrt{2}\right)+i\left(1+\frac{\pi}{4}-3\ln\sqrt{2}\right).$$

<u>Respostas</u> **:** **a)** $-\frac{2\sqrt{2}}{3}i$ **;** **b)** $\left(1-\frac{3\pi}{4}-\ln\sqrt{2}\right)+i\left(1+\frac{\pi}{4}-3\ln\sqrt{2}\right)$**.**

<u>Exemplo 6.</u> **Calcule os integrais dados, utilizando a Fórmula Integral de Cauchy :**

a) $\oint_{\Gamma^+}\frac{\operatorname{sen} z\,dz}{(z+1)(z-i)}$, $\Gamma:|z|=2$; **b)** $\oint_{\Gamma^+}\frac{\cos 2z\,dz}{(z+i)^3}$, $\Gamma:|z|=3$.

<u>Resolução</u>

a) A função subintegral é analítica em todos os pontos, situados no interior e sobre o contorno Γ, excepto os pontos $z_1=-1$ e $z_2=i$. Por força do teorema 3 temos

$$\mathrm{I} = \oint_{\Gamma^+} \frac{\operatorname{sen} z\, dz}{(z+1)(z-i)} = \oint_{\Gamma_1^+} \frac{\operatorname{sen} z\, dz}{(z+1)(z-i)} + \oint_{\Gamma_2^+} \frac{\operatorname{sen} z\, dz}{(z+1)(z-i)} = \mathrm{I}_1 + \mathrm{I}_2,$$

onde os contornos fechados simples Γ_1, Γ_2 envolvem uma vez no sentido positivo respectivamente os pontos $z_1 = -1$ e $z_2 = i$, são exteriores um a outro e são todos contidos no interior do contorno Γ. Primeiro, vamos calcular I_1 :

$$\mathrm{I}_1 = \oint_{\Gamma_1^+} \frac{\operatorname{sen} z\, dz}{(z+1)(z-i)} = \oint_{\Gamma_1^+} \frac{f_1(z)dz}{z-(-1)} \ ,$$

onde $f_1(z) = \dfrac{\operatorname{sen} z}{z-i}$ é função analítica no interior do contorno Γ_1 . Conforme a Fórmula Integral de Cauchy obtemos :

$$\mathrm{I}_1 = 2\pi i \cdot f_1(-1) = 2\pi i \frac{\operatorname{sen}(-1)}{-1-i} = \pi \cdot (1+i)\operatorname{sen}1 .$$

De modo análogo, achamos

$$\mathrm{I}_2 = \oint_{\Gamma_2^+} \frac{\operatorname{sen} z\, dz}{(z+1)(z-i)} = 2\pi i \cdot \left(\frac{\operatorname{sen} z}{z+1}\right)\Bigg|_{z=i} = \pi \cdot (-1+i)\operatorname{sh}1 .$$

Logo, $\mathrm{I}_1 + \mathrm{I}_2 = \pi\left[(\operatorname{sen}1 - \operatorname{sh}1) + i(\operatorname{sen}1 + \operatorname{sh}1)\right]$.

b) Segundo o teorema 5 temos

$$\oint_{\Gamma^+} \frac{\cos 2z\, dz}{[z-(-i)]^{2+1}} = \frac{2\pi i}{2!}(\cos 2z)''\Big|_{z=-i} = -4\pi i \operatorname{ch} 2.$$

<u>**Respostas**</u> **: a)** $\boldsymbol{\pi[(\mathrm{sen1\text{-}sh1})+i(\mathrm{sen1+sh1})]}$ **; b)** $\boldsymbol{-4\pi i\,\mathrm{ch2}}$**.**

♣ ♦ ♣ ♦ ♣ ♦ ♣ ♦ ♣ ♦ ♣ ♦ ♣ ♦ ♣ ♦ ♣♦ ♣ ♦ ♣ ♦ ♣ ♦ ♣ ♦ ♣ ♦ ♣ ♦ ♣ ♦ ♣

1.3 Problemas propostos

Calcule os integrais dados, seguindo os contornos indicados

1. **a)** $\int\limits_{\Gamma} \operatorname{Re} z\, dz$, **b)** $\int\limits_{\Gamma} \operatorname{Im} z\, dz$, **c)** $\int\limits_{\Gamma} |z|\, dz$, onde Γ é poligonal que une os pontos O(0;0), A(1;1), B(2;1) e orientada no sentido de O para B.

2. $\int\limits_{\Gamma} z dz$, onde Γ é poligonal que une os pontos A(-2;0), B(-1;1), C(1;1), D(2;0) e orientada no sentido do ponto A para D.

3. $\int\limits_{\Gamma} \operatorname{Re}(\operatorname{sen} z)\cdot \operatorname{Im}(\cos z) dz$, onde Γ é segmento $\operatorname{Re}(z)=\frac{\pi}{4}$, $|\operatorname{Im} z|\le 1$, orientado no sentido do ponto ($\frac{\pi}{4}$;-1) para ($\frac{\pi}{4}$;1) .

4. **a)** $\int\limits_{C} \bar{z}\cdot \operatorname{Re} z\, dz$; **b)** $\int\limits_{C} z\cdot \operatorname{Im} z^2\, dz$, onde C é semi-circunferência $|z|=1, -\pi\le \arg z\le 0$, orientada no sentido do ponto $z_1=-1$ para $z_2=1$.

5. $\oint\limits_{C^+} |z|\, \bar{z} dz$, onde C^+ é contorno fechado, orientado no sentido positivo e composto pela semi-circunferência $|z|=1, \operatorname{Im} z\ge 0$ e pelo segmento $\operatorname{Im} z=0, -1\le \operatorname{Re} z\le 1$.

6. $\int\limits_{\Gamma} \frac{dz}{z-i}$, onde Γ é contorno composto pela semi-circunferência $|z-i|=1, \operatorname{Re} z\le 0$ e pelo segmento $\operatorname{Re} z=0, 2\le \operatorname{Im} z\le 3$, sendo $z_1=0$ ponto inicial e $z_2=3i$ ponto final de Γ.

7. $\oint\limits_{\Gamma^+} \frac{z dz}{\bar{z}}$, onde Γ^+ é contorno fechado orientado no sentido positivo e composto pelas semi-circunferências $|z|=2, \operatorname{Im} z\ge 0$ e $|z|=1, \operatorname{Im} z\ge 0$ e pelos segmentos $\operatorname{Im} z=0, -2\le \operatorname{Re} z\le -1$ e $\operatorname{Im} z=0, 1\le \operatorname{Re} z\le 2$.

8. $\oint\limits_{\Gamma^-} \frac{dz}{(z-2i)^2}$, onde Γ^- é contorno fechado, orientado no sentido negativo e composto pela semi-circunferência $|z-2i|=1, \operatorname{Im} z\ge 2$ e pelos segmentos $[1+2i;i]$ e $[i;-1+2i]$.

Calcule os integrais seguintes, considerando para funções subintegrais multivalentes os ramos unívocos indicados

9. $\int\limits_{-i}^{i} z e^{z} dz$; **10.** $\int\limits_{-i}^{i} z^3 e^{z^2}\, dz$; **11.** $\int\limits_{i}^{0} (z+i)\operatorname{sen} z\, dz$; **12.** $\int\limits_{0}^{i} z\cos(z-i) dz$;

13. $\int_{-i}^{i}\frac{dz}{\sqrt{z}}$, $\sqrt{1}=-1$; **14.** $\int_{0}^{\frac{1}{2}\left(\sqrt{3}-i\right)}\sqrt{z+i}\,dz$, $\sqrt{i}=\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)$; **15.** $\int_{-1+i}^{2i}\frac{dz}{\sqrt[3]{(z-i)^2}}$, $\sqrt[3]{1}=1$;

16. $\int_{1}^{i} z\ln z\; dz$; **17.** $\int_{-2}^{-1-i}\frac{\ln(1+z)}{(1+z)}dz$; **18.** $\int_{-1-i}^{-1+i}\frac{\ln(1+z)}{\sqrt{1+z}}dz$, $\sqrt{-1}=-i$;

19. $\int_{-i}^{-1}\sqrt[3]{z}\ln z\; dz$, $\sqrt[3]{-i}=i$; **20.** $\int_{-2}^{0}(z+2)e^{z}\cdot\ln(z+1)dz$.

Calcule os integrais dados, utilizando a Fórmula Integral de Cauchy

21. $\oint_{\Gamma^+}\frac{z^4\,\mathrm{ch}(z+1)dz}{(z+1)}$, **a)** $\Gamma: |z|=2$ **b)** $\Gamma: |z|=\frac{1}{2}$.

22. $\oint_{\Gamma^+}\frac{\mathrm{sen}\, z\; dz}{\left(z^2+1\right)}$, **a)** $\Gamma: |z+i|=1$; **b)** $\Gamma: |z-i|=1$.

23. $\oint_{\Gamma^+}\frac{\mathrm{sen}\, iz\; dz}{\left(z^2-4z+3\right)}$, **a)** $\Gamma: |z|=2$; **b)** $\Gamma: |z-3|=3$.

24. $\oint_{\Gamma^+}\frac{\mathrm{sen}\, z\; dz}{\left(z^2+4\right)}$, **a)** $\Gamma: |z+2i|=2$; **b)** $\Gamma: |z|=3$.

25. $\oint_{\Gamma^+}\frac{\cos z\; dz}{z\cdot\left(z^2+1\right)}$, **a)** $\Gamma: |z|=\frac{1}{2}$; **b)** $\Gamma: |z-i|=\frac{3}{2}$; **c)** $\Gamma: |z|=2$.

26. $\oint_{\Gamma^+}\frac{\mathrm{sen}\, z\cdot\mathrm{sen}(z-1)dz}{\left(z^2-z\right)}$, **a)** $\Gamma: |z-1|=\frac{1}{2}$; **b)** $\Gamma: |z-1|=2$.

27. $\oint_{\Gamma^+}\frac{zdz}{(z-1)(z-2)^2}$, $\Gamma: |z|=3$; **28.** $\oint_{\Gamma^-}\frac{e^{z}\,dz}{z^2\left(z^2-9\right)}$, $\Gamma: |z|=1$.

29. $\oint_{\Gamma^-}\frac{\cos z\; dz}{(z-i)^3}$, $\Gamma: |z|=2$; **30.** $\oint_{\Gamma^+}\frac{e^{iz}\,dz}{(z+i)^5}$, $\Gamma: |z|=2$.

31. $\oint_{\Gamma^+}\frac{z\cdot\mathrm{sh}\, z\; dz}{\left(z^2-1\right)^2}$, $\Gamma: |z+1|=3$; **32.** $\oint_{\Gamma^+}\frac{e^{z}\,dz}{z^3(z+1)}$, $\Gamma: |z-2|=3$.

Respostas

1. a) $2+\frac{i}{2}$; **b)** $\frac{3}{2}+\frac{i}{2}$; **c)** $\sqrt{5}+\frac{1}{2}\ln(2+\sqrt{5})-\frac{1}{2}\ln(1+\sqrt{2})+\frac{\sqrt{2}i}{2}$. **2.** 0 . **3.** 0 .

4. a) 0 ; **b)** $-\frac{\pi}{2}$. **5.** πi . **6.** $\ln 2-\pi i$. **7.** $\frac{4}{3}$. **8.** 0 . **9.** $2i(\cos 1-\mathrm{sen}\,1)$. **10.** 0 . **11.**

$i(\mathrm{sh}1-1)$. **12.** $1-\mathrm{ch}1$. **13.** $-2\sqrt{2}\,i$. **14.** $\frac{2\sqrt{2}i}{3}$. **15.** $\frac{3}{2}\left(\sqrt{3}-1\right)\left(1-i\right)$. **16.** $\frac{1}{4}\left(2-\pi i\right)$. **17.** $\frac{3\pi^2}{8}$. **8.** $\sqrt{2}i\left(4-\pi\right)$. **19.** $-\frac{9\pi\left(\sqrt{3}+i\right)}{16}$. **20.** $\frac{1+i\pi}{\mathrm{e}^2}-1$. **21. a)** $2\pi i$; **b)** 0 . **22. a)** $\pi i\,\mathrm{sh}1$; **b)** $\pi i\,\mathrm{sh}1$. **23. a)** $\pi\,\mathrm{sh}1$; **b)** $\pi\,(\mathrm{sh}1-\mathrm{sh}3)$. **24. a)** $\pi i\frac{\mathrm{sh}\,2}{2}$; **b)** $\pi i\,\mathrm{sh}2$. **25. a)** $2\pi i$; **b)** $\pi i\,(2-\mathrm{ch}1)$; **c)** $2\pi i\,(1-\mathrm{ch}1)$. **26. a)** 0 ; **b)** 0 . **27.** 0 . **28.** $\frac{2\pi i}{9}$. **29.** $\pi i\,\mathrm{ch}1$. **30.** $\frac{\pi i e}{12}$. **31.** 0 . **32.** $\left(1-\frac{2}{e}\right)\pi i$.

SÉRIES SOBRE O PLANO COMPLEXO. SINGULARIDADES ISOLADAS

1. Convergência uniforme de séries de funções

Vamos começar a estudar o desenvolvimento de funções analíticas em séries de potências. Como veremos, isto é um modo natural de construir funções analíticas. Vamos iniciar esse estudo com algumas definições relativas a séries de funções.

Definições:

- Chama-se ***série de funções sobre o plano complexo*** a uma série, cujos termos são, em geral, certas funções de uma variável complexa z, todas com um domínio comum de definição, isto é:

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n(z) = u_0(z) + u_1(z) + u_2(z) + ... \ .$$

- Denomina-se k***-ésima soma parcial*** de uma série de funções à soma dos seus primeiros k termos, isto é $S_k(z) = \sum_{n=0}^{k-1} u_n(z)$.
- Uma série de funções diz-se ***convergente num certo domínio*** D se para cada $z \in D$ existe o limite da soma parcial $S_k(z)$ quando $k \to \infty$, isto é $\lim_{k\to\infty} S_k(z) = S(z)$. Ao limite $S(z)$ denomina-se soma da série dada. Neste caso escreve-se: $\sum_{n=0}^{\infty} u_n(z) = S(z), \quad z \in D$.
- Uma série de funções diz-se ***convergente uniformemente em*** D, sse

$$\forall \varepsilon > 0, \ \exists M = M(\varepsilon) > 0 : \ \forall k > M \Rightarrow \ |S(z) - S_k(z)| < \varepsilon, \ \forall z \in D.$$

O conceito de convergência uniforme é muito importante, como veremos brevemente. Então, para testar se uma série de funções é ou não é uniformemente convergente, usa-se o seguinte teorema , conhecido como critério de Weierstrass:

Teorema. Seja $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ uma série numérica convergente com termos positivos. Então, uma série de funções $\sum_{n=0}^{\infty} u_n(z)$ converge uniformemente num domínio D, se para todo n e para todo $z \in D$ for satisfeita a condição: $|u_n(z)| \le a_n$.

O seguinte teorema revela as importantes propriedades de séries de funções convergentes uniformemente:

Teorema:

2. Séries de potências sobre o plano complexo

SÉRIES SOBRE O PLANO COMPLEXO. SINGULARIDADES ISOLADAS

Vamos começar a estudar o desenvolvimento de funções analíticas em séries de potências. Como veremos, isto é um modo natural de construir funções analíticas.

1. Séries de Taylor

Teorema 1. (Teorema de Taylor)

Toda função $f(z)$ *que é analítica num disco* $\mathbf{D}: |z - z_0| < \mathbf{R}$ *pode ser desenvolvida neste disco de um único modo em série de potências de* $(z - z_0)$:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n \ , \quad |z - z_0| < \mathbf{R},$$

onde os coeficientes c_n *calculam-se pelas fórmulas*

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma^+} \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}} d\xi = \frac{1}{n!} f^{(n)}(z_0),$$

sendo Γ *um contorno fechado simples todo contido em* $\mathbf{D}$ *e que envolve o ponto* z_0 *uma vez no sentido positivo.*

A esta série chama-se série de Taylor da função $f(z)$ ***com centro no ponto*** z_0**.**

Caso particular $z_0 = 0$ obtém-se a série, conhecida como ***série de Maclaurin*** :

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n, \quad |z| < \mathbf{R}.$$

Vamos apresentar os desenvolvimentos notáveis de certas funções univalentes:

1. $e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \ , \quad z \in \mathbf{C}$;

2. $\operatorname{sen} z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} z^{2n-1}}{(2n-1)!} \ , \quad z \in \mathbf{C}$;

3. $\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!} \ , \quad z \in \mathbf{C}$;

4. $\operatorname{sh} z = z + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{2n-1}}{(2n-1)!} \ , \quad z \in \mathbf{C}$;

5. $\operatorname{ch} z = 1 + \dfrac{z^2}{2!} + \dfrac{z^4}{4!} + \ldots = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{z^{2n}}{(2n)!}\,, \quad z \in \mathbf{C};$

6. $\ln(z+1) = z - \dfrac{z^2}{2} + \dfrac{z^3}{3} - \ldots = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n-1}}{n} \cdot z^n\,, \quad |\,z\,| < 1;$

7. a) $\dfrac{1}{1+z} = 1 - z + z^2 - \ldots = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^n\,, \quad |\,z\,| < 1;$

b) $\dfrac{1}{1-z} = 1 + z + z^2 + \ldots = \sum\limits_{n=0}^{\infty} z^n\,, \quad |\,z\,| < 1.$

2. Séries de Laurent

Teorema 2. **(Teorema de Laurent)**

Toda função $f(z)$ *analítica no interior de um anel* $\mathbf{A}:\ r < |\,z - z_0\,| < \mathbf{R}$ *pode ser desenvolvida neste anel de um único modo em série de potências de* $(z - z_0)$ *da forma seguinte*:

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n \quad , \quad r < |\,z - z_0\,| < \mathbf{R},$$

onde

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma^+} \frac{f(\xi)\,d\xi}{(\xi - z_0)^{n+1}} \quad ,$$

sendo Γ *um contorno fechado simples todo contido em* $\mathbf{A}$ *e que envolve o ponto* z_0 *uma vez no sentido positivo.*

A esta série denomina-se ***série de Laurent da função*** $f(z)$ ***com centro no ponto*** z_0**.** A série de Laurent representa uma generalização da série de Taylor e pode ser escrita na forma da soma de uma série de potências de $(z - z_0)$ com expoentes positivos e de uma série de potências de $(z - z_0)$ com expoentes negativos, que são chamadas, respectivamente, parte regular e parte singular da série de Laurent , a saber

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} c_{-n} (z - z_0)^{-n}\,.$$

3. Classificação de singularidades isoladas

Seja $f(z)$ uma função analítica numa vizinhança circular $\mathbf{V}(z_0)$ de um ponto z_0, com excepção do próprio ponto z_0, isto é $\mathbf{V}(z_0) = \{z \in \mathbf{C} : 0 < |z - z_0| < \mathbf{R}\}$. Ao ponto z_0 diz-se ***ponto singular isolado*** ou ***singularidade isolada*** da função $f(z)$. Então, o carácter da singularidade z_0 determina-se pela parte singular da série de Laurent da $f(z)$ em $\mathbf{V}(z_0)$, de modo seguinte:

1) Se todos os coeficientes c_{-n} da parte singular da série de Laurent são nulos, quer dizer, se a série de Laurent tem só a parte regular, então, o ponto z_0 diz-se singularidade removível da função $f(z)$. Neste caso tem-se :

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = \mathrm{L} \neq \infty \ .$$

2) Se a parte singular da série de Laurent da $f(z)$ contem um número finito k de termos, então o ponto singular z_0 é denominado pôlo de ordem k da função $f(z)$. A função $f(z)$ neste caso pode ser apresentada na forma

$$f(z) = \frac{\varphi(z)}{(z - z_0)^k} \text{ , sendo } \lim_{z \to z_0} \varphi(z) = \mathrm{L} \neq 0;\infty$$

e verifica a condição:

$$\lim_{z \to z_0} (z - z_0)^k \cdot f(z) = \mathrm{L} \neq 0;\infty \ .$$

Um pôlo da primeira ordem (k = 1) é chamado pôlo simples.

3) Se a parte singular da série de Laurent da $f(z)$ contém número infinito de termos, então, diz-se que z_0 é singularidade essencial da função $f(z)$.

N O T A : *O ponto* $z = \infty$ *é um pôlo ou uma singularidade essencial de uma função* $f(z)$ *, se o ponto* $\xi = 0$ *for um pôlo ou uma singularidade essencial da função* $f\left(\frac{1}{\xi}\right)$ *respectivamente.*

Para identificar uma singularidade removível ou um pôlo de uma função $f(z)$ pode se, também, utilizar o seguinte critério. Seja

$$f(z) = \frac{h(z)}{\varphi(z)}.$$

Suponha-se que um ponto z_0 seja "zero" de ordem k do numerador $h(z)$ e seja "zero" de ordem m do denominador $\varphi(z)$. Então, caso $k \geq m$ o ponto z_0 é singularidade removível da $f(z)$, mas caso $k < m$ o ponto z_0 é pôlo de ordem $(m - k)$ da função dada.

N O T A : *Diz-se que um ponto* z_0 *é "zero" de ordem* n *de uma função* $f(z)$ *se*

$$f(z_0) = 0 \ , \ f'(z_0) = 0, \ldots, \ f^{(n-1)}(z_0) = 0, \ \textit{mas} \ \ f^{(n)}(z_0) \neq 0 .$$

4. Problemas resolvidos

Exemplo 1. **Desenvolve as funções dadas em séries de Laurent em domínios indicados**

a) $f(z)=\dfrac{z+3}{z^2+1}$, $\mathbf{D}: 0<|z-i|<2$; **b)** $f(z)=\dfrac{z^5}{z^3-i}$, $\mathbf{D}: |z|>10$;

c) $f(z)=\cos\left(\dfrac{z+2}{z+i}\right)$, $\mathbf{D}: |z+i|>0$.

Resolução

a) Atendendo a que $\left(z^2+1\right)=(z-i)(z+i)$, obtemos

$$f(z)=\frac{z+3}{(z-i)(z+i)} .$$

A função $f(z)$ tem duas singularidades isoladas $z_1=i$ e $z_2=-i$, é analítica no domínio dado $\mathbf{D}$ e, por força do teorema de Laurent, pode ser desenvolvida neste domínio em série de potências de $(z-i)$. Para realizar este desenvolvimento, vamos transformar a expressão da $f(z)$, separando $(z-i)$:

$$f(z)=\frac{(z-i)+(3+i)}{(z-i)[2i+(z-i)]}=\frac{1}{2i}\left[1+\frac{3+i}{z-i}\right]\cdot\frac{1}{\left(1+\dfrac{z-i}{2i}\right)} .$$

Seja $u(z)=\dfrac{z-i}{2i}$. Então, no domínio dado $\mathbf{D}: 0<|z-i|<2$, ou seja, $0<\dfrac{|z-i|}{2}<1$ verifica-se $|u(z)|=\left|\dfrac{z-i}{2i}\right|=\dfrac{|z-i|}{2}<1$. Sob essa condição é válido o desenvolvimento

$$\frac{1}{1+u}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n u^n \quad , \quad |u|<1.$$

Assim,

$$f(z)=\frac{1}{2i}\left[1+\frac{3+i}{z-i}\right]\cdot\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{z-i}{2i}\right)^n .$$

Agrupando na decomposição obtida os termos da parte regular e os da parte singular, encontraremos a série de Laurent da função dada :

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n\cdot(z-i)^n+\frac{c_{-1}}{z-i},\ 0<|z-i|<2,$$

onde $c_n=\dfrac{1}{4}(3-i)\cdot\left(\dfrac{i}{2}\right)^n$, $c_{-1}=\dfrac{1-3i}{2}$.

b) Transformemos a expressão da função dada de modo seguinte

$$f(z) = z^2 \cdot \frac{1}{\left(1 - \frac{i}{z^3}\right)}.$$

Seja $u(z) = \frac{i}{z^3}$. Notemos que o domínio $\mathbf{D}: |z| > 10$ representa uma vizinhança do ponto $z = \infty$. Neste domínio verifica-se

$$|u(z)| = \left| \frac{i}{z^3} \right| = \frac{1}{|z^3|} < 1.$$

Então, segundo a decomposição notável 7b temos:

$$\frac{1}{1-u} = 1 + u + u^2 + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} u^n \ , \ |u| < 1.$$

Assim, obtemos a série de Laurent da $f(z)$:

$$f(z) = z^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n}{z^{3n-2}}, \quad |z| > 10.$$

c) Transformemos a expressão da função dada, separando $(z + i)$:

$$f(z) = \cos\left[\frac{(z+i)+(2-i)}{z+i}\right] = \cos\left(1 + \frac{2-i}{z+i}\right) = \cos 1 \cdot \cos\left(\frac{2-i}{z+i}\right) - \operatorname{sen} 1 \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{2-i}{z+i}\right).$$

No domínio dado **D** são válidos os desenvolvimentos notáveis 2, 3. Assim,

$$f(z) = \cos 1 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} \left(\frac{2-i}{z+i}\right)^{2n} - \operatorname{sen} 1 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)!} \left(\frac{2-i}{z+i}\right)^{2n-1}, |z+1| > 0.$$

A seguir, agrupando os termos regulares e os singulares, obteremos a série de Laurent da função dada :

$$f(z) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_{-n}}{(z+i)^n} \ , \ |z+i| > 0,$$

onde $c_0 = \cos 1$,

$$c_{-n} = \begin{cases} (-1)^{\frac{n+1}{2}} \cdot \dfrac{(2-i)^n}{n!} \operatorname{sen} 1, & \text{para} \quad n = 2k-1, \quad k = 1,2,\ldots \\ (-1)^{\frac{n}{2}} \cdot \dfrac{(2-i)^n}{n!} \cos 1, & \text{para} \quad n = 2k, \quad k = 1,2,\ldots \end{cases}.$$

Exemplo 2. **Ache os pontos singulares finitos das funções dadas e caracterize-os**

a) $f(z)=\dfrac{\ln(1+z)}{(z-i)z^4}$; **b)** $f(z)=\dfrac{z}{z-\operatorname{sen} z}$; **c)** $f(z)=\dfrac{1}{e^{iz}-\pi}$; **d)** $f(z)=\cos\left(\dfrac{z+2}{z+i}\right)$.

Resolução

a) A funçaõ dada tem dois pontos singulares isolados $z_1=i$ e $z_2=0$. A singularidade $z_1=i$ é pôlo da $1^{\underline{a}}$ ordem, ou seja, pôlo simples da $f(z)$, pois

$$\lim_{z\to z_1}(z-z_1)f(z)=\lim_{z\to i}(z-i)\frac{\ln(1+z)}{(z-i)z^4}=\ln(1+i)\neq 0,\infty.$$

No ponto singular $z_2=0$ cumpre-se :

$$\lim_{z\to z_2}(z-z_2)^3 f(z)=\lim_{z\to 0} z^3\frac{\ln(1+z)}{(z-i)z^4}=i\neq 0,\infty\,.$$

Logo, o ponto $z_2=0$ é pôlo triplo da $f(z)$.

b) A função dada tem um ponto singular $z_1=0$. Seja $f(z)=\dfrac{h(z)}{\varphi(z)}$, onde $h(z)=z$, $\varphi(z)=z-\operatorname{sen} z$. Verificando que $h(0)=0$, mas $h'(0)=1\neq 0$ e $\varphi(0)=0$, $\varphi'(0)=1-\cos 0=0$, $\varphi''(0)=\operatorname{sen} 0=0$, mas $\varphi'''(0)=\cos 0=1\neq 0$, concluimos que o ponto $z_1=0$ é "zero" da $1^{\underline{a}}$ ordem do numerador $h(z)$ e "zero" da $3^{\underline{a}}$ ordem do denominador $\varphi(z)$. Logo, o ponto singular $z_1=0$ é pôlo da ordem 3 - 1= 2 , ou seja, pôlo duplo da $f(z)$.

c) Primeiro, encontremos os pontos singulares da função $f(z)$:
$e^{iz}-\pi=0$, ou $iz=\operatorname{Ln}\pi$, ou $iz=\ln\pi+2\pi ik$, $k=0,\pm1,\pm2,\ldots$. Daqui resulta que $f(z)$ tem uma infinidade de pontos singulares $z_k=2\pi k-i\ln\pi$, $k=0,\pm1,\pm2,\ldots$. Seja $f(z)=\dfrac{h(z)}{\varphi(z)}$, onde $h(z)=1$, $\varphi(z)=e^{iz}-\pi$. Tomando em consideração que $h(z_k)=1\neq 0$ e $\varphi(z_k)=e^{iz_k}-\pi=0$, mas $\varphi'(z_k)=i\cdot e^{iz_k}=i\pi\neq 0$, chegamos à conclusão que os pontos singulares z_k representam pôlos simples da função dada.

d) A função dada tem uma singularidade $z_1=-i$. Para determinar o tipo desta singularidade é preciso desenvolver $f(z)$ em série de Laurent na vizinhança do ponto $z_1=0$, ou seja , no domínio $|z+i|>0$. Este desenvolvimento foi obtido no exercício resolvido **1b)** . Verifica-se que a série de Laurent da $f(z)$ tem número infinito de termos na sua parte singular . Isso significa que o ponto $z_1=-i$ representa singularidade essencial da função dada.

Respostas **:** **a)** $\boldsymbol{z_1=i}$ é pôlo simples ; $\boldsymbol{z_2=0}$ é pôlo triplo ; **b)** $\boldsymbol{z_1=0}$ é pôlo duplo; **c)** $\boldsymbol{z_k=2\pi k-i\ln\pi,\ k=0,\pm1,\pm2,\ldots}$ são pôlos simples ; **d)** $\boldsymbol{z_1=-i}$ é singularidade essencial .

2.2 Problemas propostos

Desenvolve as funções dadas em séries de Laurent em domínios indicados

33. $f(z)=\dfrac{2z+i}{z^2+iz+2}$, **a)** $|z|<1$; **b)** $1<|z|<2$; **c)** $|z|>2$;
d) $0<|z-i|<3$; **e)** $0<|z+2i|<3$.

34. $f(z)=\dfrac{2z-7}{z^2-7z+12}$, **a)** $|z-1|<2$; **b)** $2<|z-1|<3$; **c)** $|z-1|>3$;
d) $0<|z-3|<1$; **e)** $0<|z-4|<1$.

35. $f(z)=\operatorname{sen}\left(\dfrac{z}{z-1}\right)$, $|z-1|>0$. **36.** $f(z)=\operatorname{ch}\left(\dfrac{iz+1}{iz-1}\right)$, $|z+i|>0$.

37. $f(z)=\operatorname{sh}\left(\dfrac{z}{iz+1}\right)$, $|z-i|>0$.

Ache os pontos singulares finitos das funções dadas e caracterize-os

38. $f(z)=\dfrac{(1-\cos z)^2}{z^6}$; **39.** $f(z)=\dfrac{1-\operatorname{ch} z^2}{z^5}$; **40.** $f(z)=\dfrac{(z^2+3iz-2)\operatorname{sen}^3(z-i)}{(z^2+1)^3}$;

41. $f(z)=\dfrac{e^{z^2}-1}{z\cdot\operatorname{sen}^2 z}$; **42.** $f(z)=\dfrac{(1-\cos 2z)^2}{z^4\cdot(e^z-1)}$; **43.** $f(z)=\dfrac{\operatorname{sh} z}{e^z+1}$;

44. $f(z)=\dfrac{\operatorname{sh}^2 z}{(1-\operatorname{ch} z)^2}$; **45.** $f(z)=\dfrac{1+z-e^z}{z^3}$; **46.** $f(z)=\dfrac{z-\operatorname{sen} z}{(1-\cos 2z)^2}$;

47. $f(z)=\dfrac{e^{\operatorname{sen} z}-e^z}{z^5}$; **48.** $f(z)=\dfrac{2+z^2-2\operatorname{ch} z}{z^5+2z^4+z^3}$; **49.** $f(z)=\dfrac{e^z-e^{z^2}}{z^3\cdot\operatorname{sen} z}$;

50. $f(z)=\dfrac{2(\operatorname{ch} z-1)-z^2}{z^3\operatorname{sen}^2 z}$; **51.** $f(z)=z^3\cdot\cos\left(\dfrac{1}{z-2}\right)$; **52.** $f(z)=\operatorname{ch}\left(\dfrac{z+i}{z}\right)$;

53. $f(z)=\cos\dfrac{z^2+6z+8}{z+3}$; **54.** $f(z)=(z+i)^2\operatorname{sen}^2\left(\dfrac{z}{z+i}\right)$; **55.** $f(z)=(z^2+z)e^{\frac{1}{z+1}}$;

56. $f(z)=(1+i-z)\cdot\operatorname{sh}\left(\dfrac{1}{z-i}\right)$; **57.** $f(z)=(2-z)\cdot\cos\left(\dfrac{z}{z-1}\right)$.

Respostas

33. a) $\sum_{n=0}^{\infty} i^{n-1}\left[(-1)^{n+1}+\dfrac{1}{2^{n+1}}\right]z^n$; **b)** $\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{i^{n-1}}{2^{n+1}}z^n+\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{i^{n-1}}{z^n}$; **c)** $\sum_{n=1}^{\infty} i^{n-1}\left[1+(-2)^{n-1}\right]\dfrac{1}{z^n}$;

d) $\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{i^{n-1}}{3^{n+1}}(z-i)^n+\dfrac{1}{z-i}$; **e)** $\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}i^{n-1}}{3^{n+1}}(z+2i)^n+\dfrac{1}{z+2i}$.

34. a) $-\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2^{n+1}}+\frac{1}{3^{n+1}}\right)(z-1)^n$; **b)** $-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-1)^n}{3^{n+1}}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{n-1}}{(z-1)^n}$; **c)** $\sum_{n=1}^{\infty}\left(2^{n-1}+3^{n-1}\right)\frac{1}{(z-1)^n}$;

d) $\frac{1}{z-3}-\sum_{n=0}^{\infty}(z-3)^n$; **e)** $\frac{1}{z-4}+\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(z-4)^n$.

35. $c_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{c_{-n}}{(z-1)^n}$, onde c_0 = sen1 , $c_{-n} = \begin{cases} (-1)^{\frac{n-1}{2}}\cdot\frac{\cos 1}{n!}, & n=2k-1, \quad k=1,2,\ldots \\ (-1)^{\frac{n}{2}}\cdot\frac{\operatorname{sen}1}{n!}, & n=2k, \quad k=1,2,\ldots \end{cases}$.

36. $c_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{c_{-n}}{(z+i)^n}$, onde c_0 = ch1 , $c_{-n} = \begin{cases} i(-1)^{\frac{n+1}{2}}\cdot\frac{2^n}{n!}\operatorname{sh}1, & n=2k-1, \quad k=1,2,\ldots \\ (-1)^{\frac{n}{2}}\cdot\frac{2^n}{n!}\operatorname{ch}1, & n=2k, \quad k=1,2,\ldots \end{cases}$.

37. $c_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{c_{-n}}{(z-i)^n}$, onde $c_0 = -i\cdot$sen1 , $c_{-n} = \begin{cases} \frac{\cos 1}{n!}, & n=2k-1, \quad k=1,2,\ldots \\ -\frac{i\operatorname{sen}1}{n!}, & n=2k, \quad k=1,2,\ldots \end{cases}$.

38. $z = 0$ é PD . **39.** $z = 0$ é PS . **40.** $z = -i$ é PD ; $z = i$ é SR . **41.** $z = 0$ é PS ; $z = \pi k$, $k = \pm1, \pm2, \ldots$ são PD . **42.** $z = 2\pi k i$, $k = 0,\pm1,\pm2,\ldots$ são PS . **43.** $z = (\pi + 2\pi k)i$, $k = 0,\pm1,\pm2, \ldots$ são SR . **44.** $z = 2\pi k i$, $k = 0,\pm1,\pm2, \ldots$ são PS . **45.** $z = 0$ é PS . **46.** $z = 0$ é PS . **47.** $z = 0$ é PD . **48.** $z = 0$ é SR ; $z = -1$ é PD . **49.** $z = 0$ é PT ; $z = \pi k$, $k = \pm1,\pm2, \ldots$ são PS . **50.** $z = 0$ é SR ; $z = \pi k$, $k = \pm1,\pm2, \ldots$ são PD . **51.** $z = 2$ é SE . **52.** $z = 0$ é SE . **53.** $z = -3$ é SE . **54.** $z = -i$ é SE . **55.** $z = -1$ é SE . **56.** $z = i$ é SE . **57.** $z = 1$ é SE .

N O T A : *São usadas as seguintes designações :* PS - *pôlo simples ;* PD - *pôlo duplo ;* PT - *pôlo triplo ;* SR - *singularidade removível ;* SE - *singularidade essencial* .

RESÍDUOS

A) Definição de RESÍDUO

Resíduo é um dos conceitos básicos de Análise Complexa que tem muitas aplicações e se utiliza na resolução de numerosos problemas práticos. Vamos definir este conceito importante.

Definição: Seja $f(z)$ uma função analítica no interior de um disco **D** com o centro num ponto z_0, excluindo z_0. Suponha-se que z_0 seja um ponto singular isolado da $f(z)$. Chama-se resíduo da função $f(z)$ em z_0 ao número designado por

$$\operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z) \quad \text{ou} \quad \operatorname{Res} f(z_0)$$

e que é definido de modo seguinte :

$$\operatorname{Res} f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma^+} f(z)dz,$$

onde Γ^+ é um contorno fechado simples todo contido em **D** e que envolve o ponto z_0 uma vez no sentido positivo.

Desta definição resulta que o resíduo de uma função $f(z)$ num ponto singular isolado z_0 é igual ao coeficiente c_{-1} da série de Laurent da $f(z)$ na vizinhança de z_0, isto é

$$\operatorname{Res} f(z_0) = c_{-1}.$$

O resíduo de uma função $f(z)$ no ponto no infinito é dado por

$$\operatorname{Res} f(\infty) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma^-} f(z)dz \quad ,$$

onde , Γ^- é um contorno fechado simples que envolve todos os pontos singulares finitos da $f(z)$ uma vez no sentido negativo .

Desta definição resulta que

$$\operatorname{Res} f(\infty) = -\frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma^+} f(z)dz = -c_{-1},$$

sendo c_{-1} coeficiente da série de Laurent da função $f(z)$ na vizinhança do ponto $z = \infty$.

A importância de resíduo resulta dos teoremas que vamos formular a segur.

B) Teoremas básicos sobre resíduos

Teorema 1.

Seja $f(z)$ *uma função analítica numa região* **R** *, excepto em um número finito de singularidades isoladas* $z_1, z_2, \ldots, z_k$ *e seja* Γ *um contorno fechado simples todo contido em* **R** *e que envolve todas singularidades indicadas uma vez no sentido positivo. Então,*

$$\oint_{\Gamma^+} f(z)dz = 2\pi i \cdot \sum_{j=1}^{k} \text{Res } f(z_j) \ ,$$

Teorema 2.

Seja $f(z)$ *uma função analítica sobre todo o plano complexo estendido, excepto em um número finito de pontos singulares isolados* $z_1, z_2, \ldots, z_k$ *e no ponto* $z = \infty$.
Então,

$$\sum_{j=1}^{k} \text{Res } f(z_j) + \text{Res } f(\infty) = 0 .$$

Dos teoremas formulados resulta que resíduos podem ser aplicados em cálculo de integrais de contorno. Então, vamos ver as regras de cálculo de resíduos.

C) Cálculo de resíduos

Verificam-se as seguintes regras de cálculo de resíduos:

a) Suponha-se que z_0 seja singularidade removível da $f(z)$. Então , **Res** $f(z_0) = 0$.

b) Seja z_0 pôlo simples da $f(z)$. Então , o resíduo calcula-se pela fórmula :

$$\text{Res } f(z_0) = \lim_{z \to z_0} \left[(z - z_0) f(z) \right] \ .$$

c) Seja z_0 pôlo múltiplo de ordem k da $f(z)$. Então

$$\text{Res } f(z_0) = \frac{1}{(k-1)!} \lim_{z \to z_0} \frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}} \left[(z - z_0)^k \cdot f(z) \right] .$$

d) Suponha-se que z_0 seja uma singularidade essencial da $f(z)$. Para achar **Res** $f(z_0)$ neste caso é preciso determinar o coeficiente c_{-1} no desenvolvimento de Laurent da $f(z)$ na vizinhança do ponto z_0. Então

$$\text{Res } f(z_0) = c_{-1} .$$

e) Para encontrar o resíduo da função $f(z)$ no ponto no infinito é necessário desenvolver $f(z)$ em série de Laurent na vizinhança do ponto $z = \infty$ e determinar o coeficiente c_{-1} . Então ,

$$\text{Res } f(\infty) = -c_{-1} \ .$$

D) Aplicação de resíduos em cálculo de certos integrais impróprios

Dado integral impróprio

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx\,,$$

cuja função subintegral $f(x)$ verifica as seguintes condições :

a) $f(x)$ é função racional , isto é $f(x) = \dfrac{\mathbf{P}_k(x)}{\mathbf{Q}_n(x)}$, sendo $\mathbf{P}_k(x)$, $\mathbf{Q}_n(x)$ polinómios de x dos graus k e n respectivamente ;

b) $\mathbf{Q}_n(x) \neq 0\,,\ \forall x \in \mathbf{R}^1$;

c) $n \geq k + 2$.

Suponha-se que a extenção da $f(x)$ ao plano complexo seja função $f(z)$ que possua sobre o semi-plano superior um número finito de pôlos $z_1, z_2, \ldots, z_k$. Então ,

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 2\pi i \cdot \sum_{j=1}^{k} \mathrm{Res}\ f(z_j).$$

E) Problemas resolvidos

Exemplo 1. **Calcule os integrais dados , aplicando os teoremas sobre resíduos**

a) $\oint_{\Gamma^+} \dfrac{\mathrm{sen}\,2z\,dz}{(z-i)^3}\,, \quad \Gamma: |z-i| = 1$; **b)** $\oint_{\Gamma^+} \dfrac{\cos z\,dz}{z^2(\mathrm{e}^{iz}+1)}\,, \quad \Gamma: |z-3| = 4$;

c) $\oint_{\Gamma^+} \dfrac{1}{z}\cos\left(\dfrac{1}{z+i}\right)dz\,, \quad \Gamma: |z| = 2$; **d)** $\oint_{\Gamma^+} \dfrac{\left(2z^6 - z^5 - 3iz^4\right)}{\left(z^5 - i\right)} \cdot \mathrm{e}^{\frac{1}{z}}\,dz\,, \quad \Gamma: |z| = 8$.

Resolução

a) A função subintegral $f(z) = \dfrac{\mathrm{sen}\,2z}{(z-i)^3}$ é analítica em todos pontos , situados no interior e sobre o contorno Γ , excepto no ponto singular $z_0 = i$. Segundo o teorema 1 sobre resíduos temos :

$$\mathrm{I} = \oint_{\Gamma^+} \frac{\mathrm{sen}\,2z\,dz}{(z-i)^3} = 2\pi i \cdot \mathrm{Res}\ f(i)\ .$$

Atendendo a que $z_0 = i$ é pôlo triplo da $f(z)$, achamos

$$\text{Res } f(i) = \frac{1}{2!}\lim_{z\to i}\frac{d^2}{dz^2}\left[(z-i)^3 f(z)\right] = \frac{1}{2}\lim_{z\to i}\frac{d^2}{dz^2}(\text{sen}\,2z) = \frac{1}{2}\lim_{z\to i}(-4\,\text{sen}\,2z) = -2i\cdot\text{sh}\,2 \ .$$

Assim ,

$$\text{I} = 2\pi i\cdot(-2i\cdot\text{sh}\,2) = 4\pi\cdot\text{sh}\,2 \ .$$

b) A função subintegral $f(z) = \dfrac{\cos z}{z^2\left(\text{e}^{iz}+1\right)}$ é analítica em todos pontos , situados no interior e sobre o contorno de integração Γ , excepto em dois pontos singulares $z_1 = 0$ e $z_2 = \pi$. Logo , conforme o teorema 1 sobre resíduos temos

$$\oint_{\Gamma^+}\frac{\cos z\,dz}{z^2(\text{e}^{iz}+1)} = 2\pi i\left[\text{Res } f(0) + \text{Res } f(\pi)\right] .$$

Sendo $z_1 = 0$ pôlo duplo da $f(z)$, achamos

$$\text{Res } f(0) = \lim_{z\to 0}\frac{d}{dz}\left[z^2\cdot f(z)\right] = \lim_{z\to 0}\frac{d}{dz}\left(\frac{\cos z}{\text{e}^{iz}+1}\right) = \lim_{z\to 0}\frac{-\text{sen}\,z\cdot\left(\text{e}^{iz}+1\right) - i\cos z\cdot\text{e}^{iz}}{\left(\text{e}^{iz}+1\right)^2} = -\frac{i}{4} \ .$$

A singularidade $z_2 = \pi$ é pôlo simples da $f(z)$. Então ,

$$\text{Res } f(\pi) = \lim_{z\to\pi}\left[(z-\pi)f(z)\right] = \lim_{z\to\pi}\frac{(z-\pi)\cdot\cos z}{z^2\left(\text{e}^{iz}+1\right)} = -\frac{i}{\pi^2} \ .$$

Assim ,

$$\text{I} = 2\pi i\left(-\frac{i}{4} - \frac{i}{\pi^2}\right) = 2\pi\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{\pi^2}\right) = \frac{\pi}{2}+\frac{2}{\pi} \ .$$

c) No interior do contorno de integração Γ a função subintegral $f(z) = \dfrac{1}{z}\cos\left(\dfrac{1}{z+i}\right)$ tem dois pontos singulares $z_1 = 0$ e $z_2 = -i$. Logo ,

$$\text{I} = \oint_{\Gamma^+}\frac{1}{z}\cos\left(\frac{1}{z+i}\right)dz = 2\pi i\left[\text{Res } f(0) + \text{Res } f(-i)\right] .$$

O ponto $z_1 = 0$ é pôlo simples da $f(z)$. Então ,

$$\text{Res } f(0) = \lim_{z\to 0}\left[z\cdot f(z)\right] = \lim_{z\to 0}\cos\left(\frac{1}{z+i}\right) = \text{ch}\,1.$$

Sendo $z_2 = -i$ singularidade essencial da função $f(z)$, vamos desenvolvê-la em série de Laurent na vizinhança do ponto $z_2 = -i$, isto é no domínio D : $0 < |z+i| < 1$:

$$f(z) = \frac{1}{z}\cos\left(\frac{1}{z+i}\right) = \frac{i}{\left(1-\frac{z+i}{i}\right)}\cdot\cos\left(\frac{1}{z+i}\right) = i\cdot\left[1+\left(\frac{z+i}{i}\right)+\left(\frac{z+i}{i}\right)^2+\ldots\right]\cdot$$

$$\cdot\left[1-\frac{1}{2!(z+i)^2}+\frac{1}{4!(z+i)^4}-\ldots\right].$$

Agora , achamos o coeficiente c_{-1} no desenvolvimento obtido :

$$c_{-1} = i\cdot\left(-\frac{1}{2!i}+\frac{1}{4!i^3}-\frac{1}{6!i^5}+\ldots\right) = 1-\mathrm{ch}1 \ .$$

Então , Res $f(-i) = c_{-1} = 1\text{-ch}1$. A seguir , calculamos o integral dado :

$$\mathrm{I} = 2\pi i(\mathrm{ch}1 + 1 - \mathrm{ch}1) = 2\pi i \ .$$

d) A função subintegral

$$f(z) = \frac{\left(2z^6 - z^5 - 3iz^4\right)}{\left(z^5 - i\right)}\cdot \mathrm{e}^{\frac{1}{z}}$$

tem seis pontos singulares isolados z_1 , z_2 , z_3 , z_4 , z_5 , z_6 que se encontram todos no interior do contorno de integração Γ : $|z| = 8$. Neste caso , em vez de aplicar o teorema 1 e calcular seis resíduos da $f(z)$, é razoável aplicar o teorema 2, segundo o qual temos :

$$\mathrm{I} = \oint_{\Gamma^+}\frac{\left(2z^6 - z^5 - 3iz^4\right)}{\left(z^5 - i\right)}\cdot \mathrm{e}^{\frac{1}{z}}\,dz = 2\pi i\cdot\sum_{j=1}^{6}\mathrm{Res}\ f(z_j) = -2\pi i\cdot\mathrm{Res}\ f(\infty)\,.$$

Para achar Res $f(\infty)$ é preciso encontrar o coeficiente c_{-1} no desenvolvimento de Laurent da $f(z)$ numa vizinhança do ponto no infinito , digamos em $V(\infty) = \{z\in C : |z| > 8\}$, onde se tem :

$$f(z) = \left(2z-1-\frac{3i}{z}\right)\cdot\frac{1}{\left(1-\frac{i}{z^5}\right)}\cdot \mathrm{e}^{\frac{1}{z}} = \left(2z-1-\frac{3i}{z}\right)\left[1+\frac{\mathrm{i}}{z^5}+\left(\frac{i}{z^5}\right)^2+\ldots\right]\left(1+\frac{1}{z}+\frac{1}{2!z^2}+\frac{1}{3!z^3}+\ldots\right).$$

No desenvolvimento obtido pricisamos do coeficiente c_{-1} do termo proporcional a $\dfrac{1}{z}$:

$$c_{-1} = 2\cdot\frac{1}{2!} - 1 - 3i = -3i \ .$$

Assim , Res f(∞) = -c_{-1} = 3i e I = -2πi·3i = 6π .

Respostas **: a) $4\pi \mathrm{sh} 2$; b) $\dfrac{\pi}{2} + \dfrac{2}{\pi}$; c) $2\pi i$; d) 6π.**

Exemplo 2. **Calcule o integral**

$$\int_0^\infty \frac{x^2 dx}{\left(x^2+1\right)^2\left(x^2+4\right)} \ .$$

Resolução

A função subintegral é função racional par , cujo denominador não tem raízes reais. O grau do numerador k = 2 e o do denominador n = 6 verificam a condição $n \geq k + 2$. A extenção da função subintegral ao plano complexo é

$$f(z) = \frac{z^2}{\left(z^2+1\right)^2\left(z^2+4\right)} \ .$$

Esta função tem sobre o semi-plano superior um pôlo duplo $z_1 = i$ e um pôlo simples $z_2 = 2i$. Então , o integral impróprio dado pode ser calculado de modo seguinte :

$$\mathrm{I} = \int_0^\infty \frac{x^2 dx}{\left(x^2+1\right)^2\left(x^2+4\right)} = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^\infty \frac{x^2 dx}{\left(x^2+1\right)^2\left(x^2+4\right)} = \frac{1}{2}\cdot 2\pi i\left[\mathrm{Res}\ f(i) + \mathrm{Res}\ f(2i)\right] ,$$

onde

$$\mathrm{Res}\ f(i) = \lim_{z\to i}\frac{d}{dz}\left[\frac{z^2}{(z+i)^2\left(z^2+4\right)}\right] = -\frac{5i}{36} \ , \ \mathrm{Res}\ f(2i) = \lim_{z\to 2i}\frac{z^2}{\left(z^2+1\right)^2(z+2i)} = \frac{i}{9} \ .$$

Assim , I = $\pi i\left(-\dfrac{5i}{36} + \dfrac{i}{9}\right) = \dfrac{\pi}{36}$.

Resposta. $\mathbf{\dfrac{\pi}{36}}$**.**

3.3 Problemas propostos

Calcule os seguintes integrais de contorno , utilizando o primeiro teorema de resíduos

58. $\oint_{\Gamma^+} \frac{(e^z-1)\,dz}{z(z^2+1)}$, $\Gamma : |z+i| = \frac{3}{2}$;

59. $\oint_{\Gamma^+} \frac{\text{sen}^2(z+i)}{z(z+i)}dz$, $\Gamma : |z| = 2$;

60. $\oint_{\Gamma^+} \frac{(1-\text{ch}\, z)\,dz}{z^2(z^2-1)}$, $\Gamma : |z+1| = \frac{3}{2}$;

61. $\oint_{\Gamma^+} \frac{\text{ch}\, z\, dz}{z(z-i)^2}$, $\Gamma : |z| = 2$;

62. $\oint_{\Gamma^+} \frac{(1-\cos z)\,dz}{z^3(z^2+1)}$, $\Gamma : |z-i| = \frac{3}{2}$;

63. $\oint_{\Gamma^+} \frac{(1-\cos z^2)}{(z^4-iz^3)}dz$, $\Gamma : |z| = 2$;

64. $\oint_{\Gamma^+} \frac{\text{sen}(z^2+1)\,dz}{z(z^2+1)^2}$, $\Gamma : |z| = 3$;

65. $\oint_{\Gamma^+} \frac{\text{sen}\, z\, dz}{z^2(z-i)^2}$, $\Gamma : |z-i| = 2$;

66. $\oint_{\Gamma^+} \frac{\text{sh}(z-i)\,dz}{z^2(z^2+1)^2}$, $\Gamma : |z-i| = \frac{3}{2}$;

67. $\oint_{\Gamma^+} \frac{\text{ch}\, z\, dz}{z^3(z+1)^2}$, $\Gamma : |z| = 2$;

68. $\oint_{\Gamma^+} \frac{\text{sen}\, z\, dz}{(e^{iz}-1)^2}$, $\Gamma : |z-3| = 4$;

69. $\oint_{\Gamma^+} \frac{(e^z-1)\,dz}{z^2\,\text{sh}\, z}$, $\Gamma : |z-2i| = 3$;

70. $\oint_{\Gamma^+} \frac{(1-\text{ch}\, z)\,dz}{z^3(e^z-1)}$, $\Gamma : |z-3i| = 5$;

71. $\oint_{\Gamma^+} \frac{(e^{iz}+1)\,dz}{z\cdot\text{sen}\, z}$, $\Gamma : |z-3| = 4$;

72. $\oint_{\Gamma^+} (z-1)^2\,\text{sen}\left(\frac{1}{z-1}\right)dz$, $\Gamma : |z| = 2$;

73. $\oint_{\Gamma^+} \frac{1}{z}e^{\frac{1}{z+1}}\,dz$, $\Gamma : |z+1| = 2$;

74. $\oint_{\Gamma^+} (z^2-2iz)\,\text{sh}\left(\frac{z}{z-i}\right)dz$, $\Gamma : |z-i| = 1$;

75. $\oint_{\Gamma^+} (z^2+3)\,\text{sen}\left(\frac{2zi}{z-1}\right)dz$, $\Gamma : |z-1| = 1$;

76. $\oint_{\Gamma^+} (z+1)\,\text{sen}\left(\frac{z+1}{z-i}\right)dz$, $\Gamma : |z-i| = 1$;

77. $\oint_{\Gamma^+} (z^2+2)\cos\left(\frac{z+i}{z-i}\right)dz$, $\Gamma : |z-i| = 1$;

78. $\oint_{\Gamma^+} \frac{1}{(z-i)}\,\text{sen}\left(\frac{1}{z}\right)dz$, $\Gamma : |z| = 2$;

79. $\oint_{\Gamma^+} \frac{z^2}{(z+i)}\,\text{sh}\left(\frac{z}{z+i}\right)dz$, $\Gamma : |z| = 2$;

80. $\oint_{\Gamma^+} \frac{1}{(1+z^2)}\,\text{sh}\left(\frac{1}{z}\right)dz$, $\Gamma : |z| = 2$.

Calcule os integrais dados, aplicando o teorema sobre resíduo no ponto infinito

81. $\oint_{|z|=10} \frac{(z^9-iz^4)}{(z^5+4)}dz$;

82. $\oint_{|z|=4} \frac{(z^3-2z^2+1)}{(z^2+i)(z-2)}dz$;

83. $\oint_{|z|=5} \frac{(1-4z^8)}{(z^4+i)^2}e^{\frac{z+1}{z^2}}\,dz$;

84. $\oint_{|z|=6} \frac{(z^6+z^5+iz^4)}{(z^3+i)(z^2-2i)}e^{\frac{1}{z}}\,dz$;

85. $\oint_{|z|=3} \frac{(z^4-iz^2)}{(z^3+i)}\,\text{ch}\left(\frac{2}{z}\right)dz$;

86. $\oint_{|z|=4} \frac{(z^9-iz^6)}{(z^4+1)}\,\text{sen}\left(\frac{3}{z^3}\right)dz$;

87. $\oint\limits_{|z|=5} \frac{\left(z^5+iz^4\right)}{\left(z^5-4\right)}\left[\cos\left(\frac{1}{z}\right)-i\,\mathrm{sh}\left(\frac{1}{z}\right)\right]dz$; **88.** $\oint\limits_{|z|=2} \frac{z^9}{\left(z^5+i\right)^2}\mathrm{sen}\left(\frac{z+1}{z}\right)dz$;

89. $\oint\limits_{|z|=5} \mathrm{ch}\left(\frac{z+1}{z}\right)\cdot\frac{1}{\left(z^2+1\right)}dz$; **90.** $\oint\limits_{|z|=8} \frac{\left(2z^5-i\right)}{\left(z^4-3i\right)\left(z+i\right)}\mathrm{sen}\,\frac{z+1}{z}dz$.

Calcule os integrais impróprios dados

91. $\int\limits_0^\infty \frac{\left(x^2+1\right)dx}{\left(x^2+4\right)\left(x^2+9\right)}$; **92.** $\int\limits_0^\infty \frac{\left(x^2-1\right)dx}{\left(x^2+1\right)^2\left(x^2+4\right)}$; **93.** $\int\limits_{-\infty}^\infty \frac{dx}{\left(x^2+1\right)\left(x^2+4x+5\right)^2}$;

94. $\int\limits_0^\infty \frac{x^2\,dx}{\left(x^2+9\right)\left(x^2+4\right)^2}$; **95.** $\int\limits_{-\infty}^\infty \frac{x\,dx}{\left(x^2+2x+2\right)\left(x^2+1\right)^2}$; **96.** $\int\limits_0^\infty \frac{x^2\,dx}{\left(x^2+1\right)^3}$;

97. $\int\limits_0^\infty \frac{dx}{\left(x^4+5x^2+4\right)^2}$; **98.** $\int\limits_{-\infty}^\infty \frac{\left(x^2+1\right)dx}{\left(x^2-2x+10\right)^3}$.

Respostas

58. $-\pi$[sen1 + i(cos1 - 1)] ; **59.** $-2\pi\cdot\mathrm{sh}^2 1$; **60.** πi(ch1 - 1) ; **61.** $2\pi i$(sen1 + cos1 - 1) ;

62. $2\pi i$(-1+2sh1 - ch1) ; **63.** 2π(cos1 - 1) ; **64.** $2\pi i$(sen1 - 1) ; **65.** $2\pi i$(1 + 2sen1 - cos1) ;

66. $2\pi i$(cos1 + $\frac{1}{4}$) ; **67.** πi(2sh1 - 6ch1 +7) ; **68.** $-4\pi i$; **69.** i(π^2 -4)/π ; **70.** $\frac{\pi i}{2}$; **71.** 2($-\pi$ + i) ;

72. - $\frac{\pi i}{3}$; **73.** $2\pi i$; **74.** - $\frac{5\pi\cdot\mathrm{ch}1}{3}$; **75.** - $\frac{8\pi}{3}$ (7ch2+ 3sh2) ; **76.** 2π(sen1 – 2cos1) ;

77. 2π($\frac{10}{3}\mathrm{sen}1-4\cos 1$) ; **78.** 0 ; **79.** πi(3sh1 + 4ch1) ; **80.** 0 ; **81.** 2π(1 - 4i) ; **82.** 0 ;

83. $-8\pi i$; **84.** 3π(-2 + i) ; **85.** 2π(1 + 4i) ; **86.** 6π ; **87.** 0 ; **88.** $2\pi i$sen1 ; **89.** 0 ;

90. $4\pi i$(cos1- sen1) ; **91.** $\frac{7\pi}{60}$; **92.** - $\frac{\pi}{36}$; **93.** $\frac{\pi}{8}$; **94.** $\frac{\pi}{200}$; **95.** - $\frac{2\pi}{25}$; **96.** $\frac{\pi}{16}$;

97. $\frac{15\pi}{432}$; **98.** $\frac{5\pi}{648}$.