ANÁLISE MATEMÁTICA III

Equações Diferenciais Ordinárias

Licenciatura em Engenharias

Universidade Eduardo Mondlane
Faculdade de Ciências
Departamento de Matemática e Informática

*** 11 de Abril de 2022 ***

Conteúdo

Equações diferenciais de 1ª ordem

Motivação para estudar EDO

Suponhamos que no processo de estudo teórico de um fenómeno físico não seja possível encontrar a dependência funcional entre certas grandezas variáveis x e y que caracterizam este fenômeno, isto é, $y = f(x)$.
Entretanto, existe a possibilidade de achar uma relação analítica entre x, y e as derivadas da variável y com respeito a x, a saber:

$$F\left(x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)}, y^{(n)}\right) = 0 \text{ ou } F\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \dots, \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}, \frac{d^ny}{dx^n}\right) = 0 \quad (1)$$

A relação (1) denomina-se **equação diferencial**.

Definição

Chama-se **equação diferencial** a uma equação que estabelece uma relação analítica entre a variável independente x, a função desconhecida $y = f(x)$ e as suas derivadas $y', y'', \cdots, y^{(n)}$, o que se escreve na forma simbólica seguinte:

$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \dots, \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}, \frac{d^ny}{dx^n}\right) = 0, \quad n \geq 1.$$

Motivação

Motivação para estudar EDO

Suponhamos que no processo de estudo teórico de um fenómeno físico não seja possível encontrar a dependência funcional entre certas grandezas variáveis x e y que caracterizam este fenômeno, isto é, $y = f(x)$.
Entretanto, existe a possibilidade de achar uma relação analítica entre x, y e as derivadas da variável y com respeito a x, a saber:

$$F\left(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)}, y^{(n)}\right) = 0 \text{ ou } F\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \ldots, \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}, \frac{d^ny}{dx^n}\right) = 0 \quad (1)$$

A relação (1) denomina-se **equação diferencial**.

Definição

Chama-se **equação diferencial** a uma equação que estabelece uma relação analítica entre a variável independente x, a função desconhecida $y = f(x)$ e as suas derivadas $y', y'', \cdots, y^{(n)}$, o que se escreve na forma simbólica seguinte:

$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \ldots, \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}, \frac{d^ny}{dx^n}\right) = 0, \quad n \geq 1.$$

Quanto ao tipo: Se a função incógnita depende apenas de uma variável, temos uma equação diferencial ordinária. Se depender de mais de uma variável, temos uma equação diferencial parcial.

Quanto a ordem:

- A **ordem** de uma equação diferencial é o número n que corresponde à ordem máxima das derivadas da equação;
- O **grau** de uma equação diferencial é a maior potência da derivada de maior ordem.

Quanto a linearidade: Uma equação diferencial é chamada linear se pode ser escrita na forma:

$$a_n(x)\frac{d^ny}{dx^n}+a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+a_{n-2}(x)\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}}+\cdots+a_1(x)\frac{dy}{dx}+a_0(x)=g(x)$$

- As variavéis dependentes de y e todas as suas derivadas são do primeiro grau, isto é, cada potência de umtermo envolvendo y é igual a 1;
- Cada coeficiente depende apenas da variável independente x.

Determinar o grau e a ordem de cada uma das seguintes equações diferenciais

1. $\dfrac{d^2y}{dx^2} - 7\dfrac{dy}{dx} + \left(\dfrac{dy}{dx}\right)^3 = 0$ [Eq1]
2. $\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2 - 3\dfrac{dy}{dx} + y = 0$ [Eq2]

A equação [Eq1] é uma equação diferencial de primeiro grau de ordem 2, porque $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ é a derivada de maior ordem na equação e está elevada à primeira potência. Notar que a terceira potência de $\dfrac{dy}{dx}$ não tem influência no grau da equação, porque $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ é maior ordem que $\dfrac{dy}{dx}$.
A equação [Eq2], por outro lado, é uma equaçào diferencial de segundo grau e primeira ordem; $\dfrac{dy}{dx}$ é a derivada de maior ordem (ordem 1) e segundo é a maior potência, com grau 2.

Definição

Chama-se **solução geral** de uma equação diferencial de ordem n a uma função $y = \varphi(x, C_1, C_2, \ldots, C_n)$ que contém n constantes arbitrárias $C_1, C_2, \ldots, C_n$, chamadas constantes de integração, e que goza das seguintes propriedades:

1. esta função satisfaz a equação diferencial dada quaisquer que sejam os valores admissíveis das constantes $C_1, C_2, \ldots, C_n$;
2. sendo dadas certas condições

$$y(x_0) = \alpha_0, y'(x_0) = \alpha_1, \ldots, y^{(n-1)}(x_0) = \alpha_{n-1},$$

   chamadas de condições iniciais, é sempre possível encontrar tais valores numéricos

$$C_{01}, C_{02}, \ldots, C_{0n}$$

   das constantes de integração que a função

$$y = \varphi(x, C_{01}, C_{02}, \ldots, C_{0n}),$$

   denominada de **solução particular** da equação diferencial, verifica as condições iniciais indicadas.

Observação

Resolver, ou seja, integrar uma equação diferencial significa achar a solução geral (ou integral geral) desta equação.

Problema de Cauchy

Teorema (Teorema de Cauchy)

Dada uma equação diferencial da 1^a *ordem* $y' = f(x, y)$. *Suponha-se que a função* $f(x, y)$ *e a sua derivada parcial* f_y *sejam contínuas num domínio* **D** *do plano das coordenadas* $x0y$ *contendo um ponto* $P_0(x_0, y_0)$. *Então, existe uma única solução* $y = \varphi_0(x)$ *da equação diferencial dada, denominada solução particular, que verifica a seguinte condição:* $y = y_0$ *quando* $x = x_0$, *ou seja,* $y(x_0) = y_0$.

Exemplo (do problema de Cauchy)

Seja o problema de Cauchy $\left\{\begin{array}{lcl} y' & = & f(x,y) \\ x_0 & = & \alpha \\ y_0 & = & \beta \end{array}\right.$.

Observação

O domínio **D** *é o domínio de existência de soluções da equação diferencial.*

Definição

Chama-se equação diferencial com variáveis separadas a uma equação diferencial da 1^{a} ordem que tem a seguinte forma geral: $M(y)dy = N(x)dx$, onde $M(y)$ e $N(x)$ são certas funções de variáveis y e x, respectivamente.

Desta definição resulta que uma equação diferencial com variáveis separadas representa, de facto, uma igualdade de dois diferenciais de algumas funções primitivas que se diferem por uma constante C. Logo, ao integrar ambas partes desta equação, obteremos o seu integral geral:

$$\int M(y)dy = \int N(x)dx + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Definição

Denomina-se equação diferencial com variáveis separavéis a uma equação diferencial da 1ª ordem que tem a seguinte forma geral: $M(y)N(x)dy + P(x)Q(y)dx = 0$, onde $M(y), N(x), P(x)$ e $Q(y)$ são certas funções de variáveis y e x.

Para integrar uma equação diferencial deste tipo é preciso separar as suas variáveis, transcrevendo-a para a forma $M(y)N(x)dy = -P(x)Q(y)dx$ e, em seguida, dividindo ambas partes da equação obtida por $N(x) \cdot Q(y)$ na suposição de que $N(x) \neq 0$ e $Q(y) \neq 0$. No resultado obteremos uma equação diferencial com variáveis separadas $\frac{M(y)}{Q(y)}dy = -\frac{P(x)}{N(x)}dx$, cujo integral geral é

$$\int \frac{M(y)}{Q(y)}dy = -\int \frac{P(x)}{N(x)}dx + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Observação

Além disso, é necessário analisar adicionalmente cada um dos casos $N(x) = 0$ e $Q(y) = 0$ que eventualmente podem ser soluções complementares da equação dada.

Definição

Denomina-se equação diferencial com variáveis separavéis a uma equação diferencial da 1^{a} ordem que tem a seguinte forma geral: $M(y)N(x)dy + P(x)Q(y)dx = 0$, onde $M(y), N(x), P(x)$ e $Q(y)$ são certas funções de variáveis y e x.

Para integrar uma equação diferencial deste tipo é preciso separar as suas variáveis, transcrevendo-a para a forma $M(y)N(x)dy = -P(x)Q(y)dx$ e, em seguida, dividindo ambas partes da equação obtida por $N(x) \cdot Q(y)$ na suposição de que $N(x) \neq 0$ e $Q(y) \neq 0$. No resultado obteremos uma equação diferencial com variáveis separadas $\dfrac{M(y)}{Q(y)}dy = -\dfrac{P(x)}{N(x)}dx$, cujo integral geral é

$$\int \frac{M(y)}{Q(y)}dy = -\int \frac{P(x)}{N(x)}dx + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Observação

Além disso, é necessário analisar adicionalmente cada um dos casos $N(x) = 0$ e $Q(y) = 0$ que eventualmente podem ser soluções complementares da equação dada.

Exemplo

Resolver o problema de Cauchy $\begin{cases} (1+x^2)y^3 - (y^2-1)x^3y' &= 0 \\ y(1) &= -1 \end{cases}.$

Resolução: Primeiro, multipliquemos ambas partes da equação diferencial dada por $dx \neq 0$ e, atendendo a que $y'dx = dy$, transformemo-la para a forma: $(1+x^2)y^3dx = (y^2-1)x^3dy$. Supondo que $x \neq 0, y \neq 0$ e dividindo ambas as partes desta equação por x^3y^3, obtemos uma equação com variáveis separadas:

$$\frac{y^2-1}{y^3}dy = \frac{x^2+1}{x^3}dx.$$

Ao integrar esta última equação, achamos o integral geral da equação dada:

$$\ln|y| + \frac{1}{2y^2} = \ln|x| - \frac{1}{2x^2} + C,\ C \in \mathbb{R}.$$

A seguir temos que determinar o valor da constante de integração C de modo que seja satisfeita a condição inicial $y(1) = -1$. Fazendo $x = 1$ e $y = -1$ no integral geral, achamos $C = 1$. Assim, a solução particular é

$$\ln|y| + \frac{1}{2y^2} = \ln|x| - \frac{1}{2x^2} + 1.$$

É fácil ver, que caso $x = 0$ a equação diferencial dada não se verifica, pois não existe a derivada y'. Ao mesmo tempo, a função $y = 0$, cuja derivada $y' = 0$, satisfaz esta equação e constitui sua solução complementar que, entretanto, não é solução do problema de Cauchy dado.

Exemplo

Resolver a equação diferencial $y' - y = 2x - 3$.

Resolução:
Transformando a equação dada para a forma $y' = y + 2x - 3$ e introduzindo a nova função desconhecida $z = y + 2x - 3$ obtemos uma equação diferencial com variáveis separáveis em relação à função auxiliar $z(x)$: $z' = 2 + z$. Multiplicando ambas partes desta equação por dx e dividindo por $2 + z \neq 0$, obtemos uma equação diferencial com variáveis separadas

$$\frac{dz}{2+z} = dx \quad \text{ou} \quad \int \frac{dz}{2+z} = \int dx + C_1,$$

onde $C_1 \neq 0$. Tendo como solução, $\ln|2+z| = x + C_1$, ou $z + 2 = e^{x+C_1}$. De forma mais simplificada temos a solução da equação dada como: $z = -2 + e^x \cdot e^{C_1}$. ou $z = -2 + C_2 e^x$. Verificando o caso $2 + z = 0$, obtemos que a função $z = -2$ é uma solução complementar da equação $z' = 2 + z$. Assim, a solução geral desta equação é $(z = -2 + C_2 e^x) \vee (z = -2)$, onde $C_2 \neq 0$. Esta solução pode ser escrita sob uma única forma $z = -2 + Ce^x$, onde C é constante arbitrária, isto é, $C \in \mathbb{R}$. Atendendo a que $z = y + 2x + 3$, achamos a solução geral da equação diferencial dada:

$$y = 1 - 2x + Ce^x.$$

Definição

Uma função $f(x,y)$ diz-se **função homogênea de grau k** em relação aos seus argumentos x e y se para qualquer número real $\lambda > 0$ verifica-se a igualdade

$$f(\lambda x, \lambda y) \equiv \lambda^k f(x,y), \quad k \in \mathbb{N}.$$

Exemplo

1. *a função* $f(x,y) = x^3 + 2xy^2 - 3x^2y$ *é homogênea de grau* $k = 3$, *pois dado qualquer* $\lambda > 0$ *cumpre-se a igualdade* $f(\lambda x, \lambda y) \equiv \lambda^k f(x,y)$;
2. *é fácil verificar que a função* $f(x,y) = \dfrac{xy - 2y^2}{xy} + \operatorname{arctg}\left(\dfrac{y}{x}\right)$ *é homogênea de grau* $k = 0$;
3. *a função* $f(x,y) = x^2 + 2y^2 - 5xy + 7$ *não é homogênea.*

Equação diferencial homogênea

Definição

Uma equação diferencial da 1^{a} ordem diz-se **equação homogênea** se for dada numa das seguintes formas:

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0 \quad \text{ou} \quad y' = f(x,y),$$

onde $M(x,y), N(x,y)$ são funções homogêneas de um mesmo grau k, mas $f(x,y)$ é função homogênea de grau zero.

Observação

Na resolução de uma equação diferencial homogênea utilizam-se as substituições $y = xu, dy = xdu$ ou $y' = u + xu'$, que levam a uma equação com variáveis separáveis em relação a nova função desconhecida $u(x)$.

Exemplo

Resolver a equação $xy' = y\left(1 + \ln\dfrac{y}{x}\right)$.

Resolução: Sendo $x \neq 0$, podemos transformando a equação para a forma $y' = \dfrac{y}{x}\left(1 + \ln\dfrac{y}{x}\right)$.
A parte direita desta equação

$$f(x,y) = \frac{y}{x}\left(1 + \ln\frac{y}{x}\right)$$

é função homogênea de grau zero.
Então concluímos que a equação dada é homogênea.
Utilizando as substituições $y = xu \Leftrightarrow y' = u + xu'$, obtemos uma equação diferencial com variáveis separáveis em relação a nova função desconhecida

$$u(x)\colon\, xu' = u\ln u \quad \text{ou} \quad \frac{du}{u\ln u} = \frac{dx}{x},$$

na suposição que $\ln u \neq 0$, sendo $u > 0$.
Na resolução desta última equação vamos escolher a constante de integração na forma logarítmica.
Então, obteremos: $\ln|\ln u| = \ln|x| + C_1$, onde $C_1 \neq 0$, donde,

$$\ln|u| = e^{\ln|x| + C_1} \Leftrightarrow \ln|u| = e^{\ln|x|}\cdot e^{C_1} \Leftrightarrow \ln|u| = x\cdot C_2$$

Daqui resulta: $u = e^{C_2 x}$.
É fácil verificar que o caso $\ln u = 0$ dá mais uma solução da equação $xu' = u\ln u$, isto é, $u = 1$.
Assim, a solução geral desta equação é $u = e^{Cx}, C \in \mathbb{R}$.
Atendendo a que $u = \dfrac{y}{x}$, achamos a solução geral da equação dada: $y = xe^{Cx}, C \in \mathbb{R}$.

Definição

A equação diferencial da 1^{a} ordem escrita na forma

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0 \tag{2}$$

onde $M(x,y), N(x,y)$ são funções que verificam a seguinte condição $\dfrac{\partial N}{\partial x} = \dfrac{\partial M}{\partial y}$, é Exacta se existe uma função $F(x,y)$ tal que

$$dF(x,y) = M(x,y)dx + N(x,y)dy. \tag{3}$$

Segue da definição que se (2), é exacta, então existe uma função $F(x,y)$, tal que $\dfrac{\partial F}{\partial x} = M(x,y)$ e $\dfrac{\partial F}{\partial y} = N(x,y)$, onde $F(x,y) = C$, é a solução geral da equação exacta.

Para a resolução de uma equação diferencial exacta, pode-se usar o seguinte processo. Se a equação diferencial é exacta, queremos determinar uma função $F(x, y)$ tal que

$$dF(x, y) = M(x, y)dx + N(x, y)dy,$$

com

$$\frac{\partial F}{\partial x} = M(x, y), \tag{4}$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = N(x, y). \tag{5}$$

Integrando a primeira a equação (4), em relação a x, obtemos:

$$\int \frac{\partial F}{\partial x} dx = \int M(x, y)dx \quad \Leftrightarrow \quad F(x, y) = \int M(x, y)dx + \varphi(y),$$

onde $\varphi(y)$ é uma constante de integraçào quando se integra em relação a x. Para determinar $\varphi(y)$, derivamos a função F em relação a y e igualamos a $N(x, y)$:

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\int M(x, y)dx\right) + \varphi'(y) \quad \Leftrightarrow \quad \varphi'(y) = N(x, y) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\int M(x, y)dx\right).$$

Esta última equação determina a função $\varphi(y)$. O mesmo processo, pode ser feito para achar a solução através da equação (5).

Exemplo

Resolver o problema de Cauchy $\begin{cases} ydx - (y^3 - x)dy & = & 0 \\ y(1) & = & 2 \end{cases}$.

Resolução:

Temos que $P(x,y) = y, Q(x,y) = -(y^3 - x)$, onde $\dfrac{\partial Q}{\partial x} = \dfrac{\partial P}{\partial y} = 1$. Logo, a equação diferencial dada é exacta.

Assim, pela equação $\dfrac{\partial F}{\partial x} \equiv M(x,y) = y$, temos que $F(x,y) = xy + \varphi(y)$, onde $F_y \equiv -(y^3 - x) = x + \varphi'(y)$. Deste modo, obtém-se $\varphi(y) = -\dfrac{y^4}{4}$.

A solução geral é $F(x,y) = xy - \dfrac{y^4}{4}$.

Utilizando da condição inicial $y(1) = 2$, achamos $F(1,2) = -2$. Assim a solução do problema de Cauchy é

$$y^4 = 4xy + 8.$$

Seja dada uma equação diferencial da forma $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$.
Suponhamos que

$$\frac{\partial N}{\partial x} \neq \frac{\partial M}{\partial y},$$

isto é, a equação dada não é exacta.
Em certos casos é possível encontrar uma função $\mu(x, y)$,
que chama-se **factor integrante**,
tal que sendo multiplicada pela equação diferencial dada obter-se-á uma equação diferencial exacta,
isto é,

$$\mu(x, y)M(x, y)dx + \mu(x, y)N(x, y)dy = 0.$$

Então, o factor integrante determina-se pelas seguintes condições:

1. se $\frac{1}{N}\left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right) = u(x)$, então $\mu = \mu(x) = e^{-\int u(x)dx}$;
2. se $\frac{1}{M}\left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right) = v(y)$, então $\mu = \mu(y) = e^{\int v(y)dy}$.

Exemplo

Resolver a equação diferencial $y(1+xy)dx - xdy = 0.$

Resolução:

Temos que $M(x,y) = y(1+xy), N(x,y) = -x$, onde $\dfrac{\partial M}{\partial y} = 1 + 2xy$ e $\dfrac{\partial N}{\partial x} = -1$, verifica-se que $\dfrac{\partial N}{\partial x} \neq \dfrac{\partial M}{\partial y}$. Logo, a equação diferencial dada não é exacta.

Entretanto, $\dfrac{1}{M}\left(\dfrac{\partial N}{\partial x} - \dfrac{\partial M}{\partial y}\right) = -\dfrac{2}{y} = v(y).$

Isso significa que existe um factor integrante dependente da variável y que calculamos pela fórmula

$$\mu = \mu(y) = e^{\int v(y)dy} = e^{-\int \frac{2}{y}dy} = \frac{1}{y^2}.$$

Agora multiplicando a equação diferencial dada pelo factor integrante $\mu = 1/y^2$, obtemos uma equação exacta

$$\frac{1+xy}{y}dx - \frac{x}{y^2}dy = 0,$$

cujo integral geral é $x(2+xy) = Cy, C \in \mathbb{R}.$

Equações lineares da 1^{a} ordem

Definição

Chama-se **equação linear da 1^{a} ordem** a uma equação diferencial da forma seguinte

$$y' + P(x)y = Q(x),$$

onde $P(x), Q(x)$ são certas funções de x.

A parte esquerda desta equação é do 1° grau, ou seja, linear em relação à função desconhecida $y(x)$ e à sua derivada y'.

Procurar a sua solução na forma de produto de duas funções desconhecidas $u(x)$ e $v(x)$, isto é, $y = uv$.

- Neste caso uma destas funções, digamos $v(x)$, pode ser escolhida arbitrariamente, mas a outra, isto é, $u(x)$, deve ser determinada de modo que o produto uv satisfaça a equação linear dada;
- Então, efectuando as substituições $y = uv, y' = u'v + uv'$, obteremos

$$u'v + uv' + P(x)uv = Q(x) \quad \text{ou} \quad u'v + u[v' + P(x)v] = Q(x);$$

- Escolhendo $v(x)$ de tal que $v' + P(x)v = 0$;
- Resolvendo esta equação de variáveis separáveis, achamos uma solução particular, correspondente a constante de integração nula $v_0(x) = e^{-\int P(x)dx}$;
- Neste caso a função $u(x)$ satisfaz a seguinte equação $u'v_0 = Q(x)$, cuja solução é $u(x) = \displaystyle\int \frac{Q(x)}{v_0(x)}dx + C, C \in \mathbb{R}$;

Assim, a solução geral da equação linear tem a seguinte forma

$$y = v_0(x)\left[\int \frac{Q(x)}{v_0(x)}dx + C.\right]$$

Exemplo

Resolver a equação diferencial $(x+1)y' - 2y = (x+1)^4$.

Resolução:
A parte esquerda da equação dada é do primeiro grau em relação a y e y', a sua parte direita é uma função de x. Logo, a equação dada é linear.
Efectuando as substituições $y = uv$ e $y' = u'v + uv'$, obtemos a seguinte equação

$$(x+1)u'v + u[(x+1)v' - 2v] = (x+1)^4.$$

Igualando a zero a expressão $(x+1)v' - 2v = 0$, temos a seguinte solução particular, correspondente a constante de integração nula $v_0(x) = (x+1)^2$.
Então, a função $u(x)$ é definida pela equação $(x+1)u'v_0 = (x+1)^4$ ou $(x+1)^3 u' = (x+1)^4$, cuja solução geral é $u(x) = \frac{1}{2}x^2 + x + C, C \in \mathbb{R}$.
Atentendo a que $y = uv$, encontramos a solução geral da equação dada é

$$y = (x+1)^2 \left[\frac{1}{2}x^2 + x + C\right]$$

Definição

Chama-se **equação de Bernoulli** a uma equação diferencial da 1^{a} ordem da forma seguinte

$$y' + P(x)y = Q(x)y^{\alpha}, \quad \alpha \neq 0 \vee 1,$$

onde $P(x), Q(x)$ são certas funções de x.

Para resolução da equação de Bernoulli, segui os mesmos passos da resolução de equações lineares da primeira ordem, com as seguintes substituições

$$y = uv, y' = u'v + uv'.$$

Exemplo

Resolver a equação diferencial $x(x\,\mathrm{ln}y - 2)dy - ydx = 0.$

Resolução:
A equação dada não é nem *linear* nem de *Bernoulli* em relação a $y(x)$, pois contém $\mathrm{ln}y$. Vamos considerar a variável x como função desconhecida do argumento y, isto é, $x = x(y)$. Neste caso $dx = x'dy$ e a equação dada pode ser transformada à forma $yx' + 2x = x^2\,\mathrm{ln}y$. Esta equação é de Bernoulli que resolvemos aplicando as substituições $x = u(y)v(y), x' = u'v + uv'$, onde x', u', v' são derivada em relação a y. No resultado obtemos

$$yvu' + u(yv' + 2v) = u^2v^2\,\mathrm{ln}y.$$

A função $v(y)$ é dado igualando $yv' + 2v = 0$, que tem como solução particular $v_0 = \dfrac{1}{y^2}.$
Então, a função $u(y)$ é definida pela equação $y(1/y^2)u' = u^2(1/y^2)^2\,\mathrm{ln}y$, cuja solução geral é

$$u = \frac{4y^2}{1 + 2\,\mathrm{ln}y + Cy^2}.$$

Assim, atendendo a que $x = uv$, obtemos a solução geral da equação diferencial dada como

$$x = \frac{4}{1 + 2\,\mathrm{ln}y + Cy^2}.$$

Equações diferenciais de 2ª ordem

Definição

Uma equação diferencial ordinária de segunda ordem é uma equação da forma

$$y'' = f\left(x, y, y'\right). \tag{6}$$

Definição

Uma equação diferencial ordinária de segunda ordem é chamada de linear quando ela pode ser escrita na forma

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = r(x), \tag{7}$$

onde p, q e r são funções de uma variável x. Se $r(x) \equiv 0$ então (7) se reduz a

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0, \tag{8}$$

e é chamada de homogênea.

Teorema (Existência e Unicidade)

Sejam $p(x)$, $q(x)$ e $r(x)$ funções contínuas em $[a,b]$. Dados $x_0 \in [a,b]$ e $y_0, y_0' \in \mathbb{R}$, o problema de Cauchy

$$\begin{cases} y'' + p(x)y' + q(x)y &= r(x) \\ y(x_0) &= \gamma \\ y'(x_0) &= \delta \end{cases}$$

possui uma única solução em $[a,b]$.

Teorema

Se $y_1, y_2, \ldots, y_n$ são soluções de $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$ então a combinação linear

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \cdots + C_n y_n$$

também é solução.

Condição de existência (cont.)

Teorema (Solução Geral)

Se y_1 e y_2 são soluções linearmente independentes da equação diferencial ordinária

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$$

então qualquer outra solução dessa equação é da forma

$$y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x).$$

Exemplo

Mostre que as funções $y_1 = x^{1/2}$ e $y_2 = x^{-1}$ são soluções da equação

$$2x^2y'' + 3xy' - y = 0.$$

Resolução:

- Precisamos achar primeiro as derivadas de $y_1 = x^{1/2}$

$$y_1' = \frac{1}{2}x^{-1/2},\ y_1'' = -\frac{1}{4}x^{-3/2}$$

- Substituindo:

$$2x^2\left(-\frac{1}{4}x^{-3/2}\right) + 3x\left(\frac{1}{2}x^{-1/2}\right) - x^{1/2} = -\frac{x^{1/2}}{2} + \frac{3x^{1/2}}{2} - x^{1/2} = 0.$$

- Para provar que $y_2 = x^{-1}$ é solução, notemos que $y_2' = -x^{-2}$ e $y_2'' = 2x^{-3}$. Portanto,

$$2x^2\left(2x^{-3}\right) + 3x\left(-x^{-2}\right) - x^{-1} = 4x^{-1} - 3x^{-1} - x^{-1} = 0.$$

Exemplo

Conforme vimos no exemplo anterior, y_1 *e* y_2 *são linearmente independente. Portanto,*

$$y = C_1 x^{1/2} + C_2 x^{-1},$$

é a solução geral no intervalo $]0, \infty[$*.*

Teorema (Fórmula de Liouville)

Seja y_1 uma solução particular não nula da equação $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$ com $p(x)$ e $q(x)$ funções contínuas no intervalo $[a, b]$, a segunda solução da equação diferencial é dada por

$$y_2(x) = \left(\int \frac{1}{y_1^2(x)} e^{-\int p(x)dx} dx \right) y_1(x).$$

Ademais, as duas soluções são linearmente independente.

Exemplo (Fórmula de Liouville)

Exemplo

Ache a solução geral da equação

$$(x^2+1)y'' - 2xy' + 2y = 0$$

conhecendo sua solução particular $y = x$.

Resolução:

- É fácil comprovar que $y_1 = x$ é uma solução;
- Se aplicarmos a fórmula de Liouville obteremos a outra solução. Portanto,

$$\begin{aligned} y_2(x) &= \left(\int \frac{1}{x^2} e^{\int \frac{2x}{x^2+1}\,dx} dx\right) x \\ &= \left(\int \frac{1}{x^2} e^{\ln(x^2+1)} dx\right) x \\ &= \left(\int \frac{x^2+1}{x^2} dx\right) x = \left(x - \frac{1}{x}\right) x = x^2 - 1. \end{aligned}$$

- A solução geral da equação $(x^2+1)y'' - 2xy' + 2y = 0$ é

$$y = C_1 x + C_2(x^2 - 1).$$

Teorema

A solução geral de uma equação diferencial ordinária linear não homogênea

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = r(x) \tag{9}$$

é igual a soma $y = y_0 + y_p$, onde y_0 é a solução da equação homogênea correspondente e y_p uma qualquer solução de (9)

Consideremos uma equação diferencial linear da segunda ordem que têm os coeficientes a e b constantes:

$$y'' + ay' + by = 0 \tag{10}$$

Para determinar a sua solução pelo método da (EC) seguem-se os seguintes passos:

Primeiro: Constroi-se a equação característica correspondente à equação linear (10):

$$k^2 + ak + b = 0 \tag{11}$$

Segundo: Resolve-se a equação (11). Dependendo das raizes da equação quadrática correspondente, verificam-se os seguintes casos:

Caso 1. Duas Raízes Reais Distintas, k_1 e k_2

Neste caso, a solução geral correspondente é

$$y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}; \tag{12}$$

Caso 2. Raiz Real Dupla, $k_1 = k_2$

Neste caso, a solução geral correspondente é

$$y = (C_1 + C_2 x) e^{k_1 x}; \tag{13}$$

Caso 3. Raízes Complexas, $k_{1,2} = \alpha \pm i\beta$

Neste caso, a solução geral correspondente é

$$y = e^{\alpha x}\left(C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x\right) \tag{14}$$

Exemplo

Resolva o problema de Cauchy $\begin{cases} y'' - 5y' + 4y &= 0 \\ y(0) &= 1 \\ y'(0) &= 1 \end{cases}$

Resolução:

Equação Característica: $k^2 - 5k + 4 = 0$;

Raízes da equação característica: $k_1 = 1,\ k_2 = 4$;

Solução geral:

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{4x}$$

Condições iniciais: $y(0) = C_1 + C_2 = 1$

$y'(x) = C_1 e^x + 4C_2 e^{4x}$

$y'(0) = C_1 + 4C_2 = 1.$

Resolvendo o sistema de equações achamos $C_1 = 1,\ C_2 = 0.$

Solução: $y = e^x.$

Exemplo

Resolva o problema de Cauchy $\begin{cases} y'' + 2y' + 5y & = & 0 \\ y(0) & = & 1 \\ y'(0) & = & 5 \end{cases}$

Resolução:

Equação Característica: $k^2 + 2k + 5 = 0$;

Raízes da equação característica: $k_{1,2} = -1 \pm 2i$;

Solução geral:

$$y = e^{-x}(C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x);$$

Condições iniciais: $y(0) = C_1 = 1$

$$y'(x) = e^{-x}\left(-C_1 \cos 2x - C_2 \sin 2x - 2C_1 \sin 2x + 2C_2 \cos 2x\right)$$
$$y'(0) = -C_1 + 2C_2 = 5 \Leftrightarrow C_2 = 3;$$

Solução: $y = e^{-x}(\cos 2x + 3 \sin 2x)$.

Uma equação diferencial ordinária com coeficientes constantes de segunda ordem, diz-se não-homogênea, se for escrita da seguinte forma:

$$y'' + ay' + by = r(x)$$

onde a, b são constantes e r uma função de uma variável x, com $r(x) \neq 0$.

Para resolução de equações diferenciais ordinárias não-homogêneas temos os seguintes métodos:

1. Método de coeficientes constantes (método geral)
2. Método de coeficientes indeterminados

Considere a equação diferencial

$$y'' + ay' + by = r(x). \tag{15}$$

Suponhamos que $y = C_1 y_1 + C_2 y_2$ seja a solução da equação homogênea

$$y'' + ay' + by = 0. \tag{16}$$

O método de varição das constantes consiste em trocar as constantes C_1 e C_2 por funções $C_1(x)$ e $C_2(x)$ adequadas, de modo que

$$y = C_1(x)y_1(x) + C_2(x)y_2(x)$$

seja uma solução particular de (15). Portanto, as funções $C_1(x)$ e $C_2(x)$ são obtidas do sistema:

$$\begin{cases} C_1'(x)y_1(x) + C_2'(x)y_2(x) & = & 0 \\ C_1'(x)y_1'(x) + C_2'(x)y_2'(x) & = & r(x) \end{cases}$$

Está garantida a existência da solução deste sistema pois o seu determinante é o Wronskiano de y_1 e y_2, que é diferente de zero, pois y_1 e y_2 são linearmente independentes.

Exemplo

Resolva $y'' + y' = \dfrac{1}{e^x + 1}$.

Resolução: A equação caracteristica, correspondente a parte homogênea é $k^2 + k = 0$, com solução da parte homogênea $y_0 = C_1 y_1 + C_2 y_2 = C_1 + C_2 e^{-x}$, onde $y_1 = 1$ e $y_2 = e^{-x}$. Deste modo,

solução particular: $y_p = C_1(x) + C_2(x)e^{-x}$, onde

$$\begin{cases} C_1'(x) + C_2'(x)e^{-x} = 0 \\ C_1'(x)0 - C_2'(x)e^{-x} = \frac{1}{e^x+1} \end{cases}$$

solução dos coeficientes variaveis: $C_2'(x) = \dfrac{e^x}{e^x + 1}$ e $C_1'(x) = \dfrac{1}{e^x + 1}$. Assim,

$$C_2(x) = \int \frac{e^x dx}{e^x + 1} = \ln(e^x + 1),\ C_1(x) = \int \frac{e^{-x}}{e^{-x} + 1} dx = -\ln(e^{-x} + 1).$$

Portanto,

$$y_p(x) = -\ln(e^{-x} + 1) + e^{-x} \ln(e^x + 1).$$

Assim, a solução geral é

$$y = C_1 + C_2 e^{-x} - \ln(e^{-x} + 1) + e^{-x} \ln(e^x + 1)$$

Seja a, b constantes arbitrárias. Considere a equação diferencial ordinária não-homogênea:

$$y'' + ay' + by = r(x). \tag{17}$$

Suponhamos que $y = C_1y_1 + C_2y_2$ seja a solução da equação homogênea

$$y'' + ay' + by = 0.$$

Este método pode ser aplicado só caso o segundo membro $r(x)$ da equação não-homogênea tiver uma forma especial. Vamos considerar dois casos típicos de aplicação do método de coeficientes indeterminados:

Caso 1: $r(x) = e^{ax}P_m(x)$;

Caso 2: $r(x) = e^{ax}[P_m(x)\cos(bx) + Q_l(x)\sin(bx)]$.

Caso 1

o segundo membro $r(x)$ da equação não-homogênea tem a forma $r(x) = e^{ax}P_m(x)$, onde a é um número real que chama-se parâmetro real do segundo membro da equação não-homogênea, $P_m(x)$ é um polinômio de x com grau m. Então a solução particular y_p da equação não-homogênea dada procura-se sob a seguinte forma:

$$y_p = x^r e^{ax} U_m(x)$$

onde o expoente da potência x^r admite o valor $r = 0$ se o parâmetro real a não é raiz da equação característica, e admite os valores naturais $r = 1, 2, 3, \ldots$ se o parâmetro a fôr raiz de ordem de multiplicidade r da equação característica. $U_m(x)$ é um polinômio com coeficientes indeterminados cujo o grau m é mesmo que do polinômio $P_m(x)$. Por exemplo, um polinômio de grau $m = 0$ tem a forma $U_0(x) = A$, um polinômio de grau $m = 1$ tem a forma $U_1(x) = Ax + B$, do grau $m = 2$ é $U_2(x) = Ax^2 + Bx + C$ etc., sendo $A, B, C, \ldots$ coeficientes indeterminados. Para encontrar esses coeficientes, é preciso substituir na equação não-homogênea dada, a função incógnita y e as suas derivadas $y', y'', \ldots$ por $y_p, y_p', y_p', \ldots$, respectivamente, e da identidade obtida achar os coeficientes do polinômio $U_m(x)$.

Caso 2:

o segundo membro $r(x)$ da equação não-homogênea tem a forma $r(x) = e^{ax}[P_m(x)\cos(bx) + Q_l(x)\sin(bx)]$, onde $P_m(x)$ e $Q_l(x)$ são polinômios de x de graus m e l, respectivamente. Ao número complexo $a + ib$ chamaremos parâmetro complexo do segundo membo da equaçào não-homogênea. Então a solução particular y_p da equação dada procura-se da seguinte forma:

$$y_p = x^r e^{ax}[U_j(x)\cos(bx) + V_j(x)\sin(bx)],$$

onde o expoente da potência x^r admite o valor $r = 0$ se o parâmetro complexo $(a + ib)$ não é raiz da equação característica, e admite valores naturais $r = 1, 2, 3, \ldots$. Se este parâmetro fôr raiz de ordem de multiplicidade r da equação característica, $U_j(x), V_j(x)$ são polinômios de x de grau $j = \max(m, l)$ com coeficientes indeterminados, que se determinam de maneira análoga a do **Caso 1.**

Exemplo

Integrar a equação $y''' + 3y' - 4y = -6e^{-2x}$.

Resolução: A equação diferencial dada é linear não-homogênea de coeficientes constantes, cuja solução geral tem a forma $y = y_0 + y_p$. A parte homogênea $y''' + 3y' - 4y = 0$, tem como solução

$$y_0 = C_1e^x + (C_2 + C_3x)e^{-2x}.$$

Para achar a solução particular y_p da equação linear homogênea dada, vamos aplicar o método de coeficientes indeterminados, tomando em consideração que o segundo membro desta equação tem a primeira forma especial, a saber, representa o produto do polinômio de grau "zero" $P_0(x) = -6$ pela exponencial e^{-2x}, sendo o parâmetro real do segundo membro $a = -2$ raiz dupla da equação característica $r = 2$. Logo, a solução particular y_p é preciso procurar sob a forma $y_p = Ax^2e^{-2x}$, onde A é coeficiente indeterminado. Para determinar A, vamos substituir na equação dada y, y'', y''' por y_p, y_p'', y_p''', respectivamente. No resultado obteremos $A = 1$. Então achamos $y_p = x^2e^{-2x}$. Assim, a solução geral da equação diferencial dada é

$$y = C_1e^x + (C_2 + C_3x + x^2)e^{-2x}.$$

Exemplo

Integrar a equação $y'' + y' - 2y = 8\sin(2x)$.

Resolução: A solução geral tem a forma $y = y_0 + y_p$. A parte homogênea $y'' + y' - 2y = 0$, tem como solução $y_0 = C_1 e^{x} + C_2 e^{-2x}$. A solução particular y_p da equação linear não-homogênea dada, vamos procuar, aplicando o método de coeficientes indeterminados. Atendendo a que o segundo membro desta equação tem a segunda forma especial, cujo parâmetro complexo $a + ib = 2i$ não é raiz da equação característica $r = 0$, sendo $P_m(x) = 0, Q_l(x) = 8, m = l = 0, j = \max(m, l) = 0$, concluimos que $y_p = A\cos(2x) + B\sin(2x)$, onde A e B são coeficientes indeterminados. Aseguir substituindo na equação diferencial y, y', y'' por y_p, y_p', y_p'', respectivamente, obteremos a identidade

$$(-6A + 2B)\cos(2x) + (-2A - 6B)\sin(2x) = 0 \cdot \cos(2x) + 8 \cdot \sin(2x)$$

resolvendo esta equação obtem-se $A = -\dfrac{2}{5}, B = -\dfrac{6}{5}$.
Então a solução particular é

$$y_p = -\frac{2}{5}\cos(2x) - \frac{6}{5}\sin(2x).$$

Assim a solução geral da equação dada é

$$y = C_1 e^{x} + C_2 e^{-2x} - \frac{2}{5}\cos(2x) - \frac{6}{5}\sin(2x).$$

Sistemas de equações diferenciais ordinárias

Definição (Sistema de equações diferenciais)

Um sistema de equações diferenciais estabelece uma relação analítica entre certas funções desconhecidas $y_1(x),\ y_2(x), \cdots, y_n(x)$ e suas derivadas.

Definição (Sistema normal)

Um sistema de equações diferenciais da primeira ordem é denominado normal quando pode ser escrito sob a forma:

$$\left\{\begin{array}{lcl} \frac{dy_1}{dx} & = & f_1(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) \\ \frac{dy_2}{dx} & = & f_2(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) \\ & \vdots & \\ \frac{dy_n}{dx} & = & f_n(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) \end{array}\right. \tag{18}$$

O método de eliminação consiste nos seguintes passos. **PASSO 1:**

1. Derivamos a primeira equação do sistema:
$$\frac{d^2y_1}{dx^2} = \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_1}{\partial y_1}\frac{dy_1}{dx} + \frac{\partial f_1}{\partial y_2}\frac{dy_2}{dx} + \cdots + \frac{\partial f_n}{\partial y_n}\frac{dy_n}{dx}$$
2. Na equação obtida substituimos as derivadas $y_1',\ y_2', \ldots, y_n'$ pelas suas respectiva expressões $f_1, f_2, \ldots, f_n$ tiradas do sistema (18). Assim obtemos uma equação da segunda ordem
$$\frac{d^2y_1}{dx^2} = F_2(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) \tag{19}$$
3. Derivando a equação (19) e efectuando as substituições análogas, obteremos uma equação diferencial da terceira ordem:
$$\frac{d^3y_1}{dx^3} = F_3(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) \tag{20}$$
4. E assim continuando, obteremos, finalmente, uma equação diferencial da ordem n:
$$\frac{d^ny_1}{dx^n} = F_n(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) \tag{21}$$
5. Agora, com base nas equações obtidas formamos um sistema que é equivalente ao sistema inicial (18):
$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dx} & = & f_1(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) \\ \frac{d^2y_1}{dx^2} & = & F_2(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) \\ & \vdots & \\ \frac{d^ny_1}{dx^n} & = & F_n(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) \end{cases} \tag{22}$$

PASSO 2:

1. Considerando as primeiras $(n-1)$ equações do sistema (22), vamos exprimir as $y_2,\ y_3,\dots,y_n$ através de $x, y_1, y_1', \dots, y_1^{(n-1)}$. Como resultado obteremos as seguintes igualdades:

$$\begin{aligned} y_2 &= \Phi_2(x, y_1, y_1', \dots, y_1^{(n)}) \\ y_3 &= \Phi_3(x, y_1, y_1', \dots, y_1^{(n)}) \\ &\vdots \\ y_n &= \Phi_n(x, y_1, y_1', \dots, y_1^{(n)}) \end{aligned} \tag{23}$$

PASSO 3:

1. Agora, vamos substituir na última equação do sistema (22) as funções $y_2,\ y_3,\dots,y_n$ pelas expressões $\Phi_2, \Phi_3, \dots, \Phi_n$ tiradas das igualdades (23). Então obteremos uma equação diferencial de ordem n em relação à função desconhecida $y_1(x)$.

Exemplo

Resolva o sistema $\begin{cases} x' = y - x \\ y' = 5y - 8x - 2e^t \end{cases}$

Resolução:

- Vamos derivar a primeira equação do sistema $x'' = y' - x'$
- Substituindo x' e y' pelas respectivas expressões tiradas do sistema dado, teremos
$$x'' = 5y - 8x - 2e^t - y + x \Leftrightarrow x'' = 4y - 7x - 2e^t$$
- Formar um sistema contendo de derivadas da função desconhecida $x(t)$: $\begin{cases} x' = y - x \\ x'' = 4y - 7x - 2e^t \end{cases}$
- Isolar y na primeira equação do sistema obtido: $y = x' + x$
- Substituindo y na segunda equação deste sistema, encontramos uma equação diferencial
$$x'' - 4x' + 3x = -2e^t$$
- Seja $x = x_0 + x_p$, onde x_0 é solução da equação homogênea $x'' - 4x' + 3x = 0$, cuja equação característica tem raízes 1 e 3. Portanto, $x_0 = C_1e^t + C_2e^{3t}$
- Aplicando o método de coeficientes indeterminados, procuramos o x_p na forma $x_p = Ate^t$
$$(2Ae^t + Ate^t) - 4(Ae^t + Ate^t) + 3Ate^t = -2e^t \Leftrightarrow -2A = -2 \Leftrightarrow A = 1.$$
- $x(t) = C_1e^t + C_2e^{3t} + te^t$
- Uma vez que $y = x' + x$, temos $y(t) = 2C_1e^t + 4C_2e^{3t} + (1 + 2t)e^t$.

Exemplo

Resolva o sistema $\begin{cases} x' = 3x - y + z \\ y' = x + y + z \\ z' = 4x - y + 4z \end{cases}$, $x(0) = 3,\ y(0) = 0,\ z(0) = -1.$

Resolução:

- Vamos derivar a primeira equação do sistema
$$x'' = 3x' - y' + z'$$
- Substituindo x', y' e z' pelas respectivas expressões do sistema dado, teremos $x'' = 12x - 5y + 6z$
- Derivando esta última equação, vem $x''' = 12x' - 5y' + 6z'$ e efectuando as substituições análogas, vem $x''' = 55x - 23y + 31z$
- Vamos formar um sistema contendo apenas as derivadas da função desconhecida $x(t)$:
$$\begin{cases} x' = 3x - y + z \\ x'' = 12 - 5y + 6z \\ x''' = 55x - 23y + 31z \end{cases}$$
- Ao exprimir y e z nas primeiras duas equações através de x, x', x'' obtemos as seguintes igualdades:
$$y = x'' - 6x' + 6x, \quad z = x'' - 5x' + 3x.$$
- Substituindo estas duas igualdades na terceira equação, obtemos $x''' - 8x'' + 17x' - 10x = 0$.
- Ao resolver a equação homogênea, encontramos $x(t) = C_1e^t + C_2e^{2t} + C_3e^{5t}$.
- Fazendo uso de $y = x'' - 6x' + 6x, \quad z = x'' - 5x' + 3x$, temos
$$y(t) = C_1e^t - 2C_2e^{2t} + C_3e^{5t}, \quad z(t) = -C_1e^t - 3C_2e^{2t} + 3C_3e^{5t}.$$

Muito Obrigado!!!

Previna-se da Covid-19.[1]

[1] Fica em casa, lave frequentemente as mãos.