Esse exercício pode ser resolvido com sucessivas aplicações do teorema de Bayes. Se vc já conhece isso, pode pular para depois da fórmula **(III)**, se não recomendaria ler tudo. Para fixar a notação, primeiro precisamos falar de probabilidade condicional. Dados eventos X e Y, a probabilidade de acontecer X dado que Y ocorreu é denotada por **P**(X|Y) e chamada de probabilidade condicional. Podemos calculada através da fórmula

P(X|Y) = **P**(X ∩ Y) / **P**(Y) **(I)**

Lembrando que X ∩ Y representa (intuitivamente) o evento no qual acontecem X e Y simultaneamente

O teorema de Bayes consiste no seguinte. Digamos que temos um evento A e o evento A* denota o seu complementar. Ou seja, A* é o evento 'não acontecer A'. Assim temos

P(X) = **P**(X ∩ A) + **P**(X ∩ A*) **(II)**

intuitivamente, isso quer dizer o seguinte: sabemos que A vai acontecer ou A* vai. Assim, se X ocorrer temos dois casos: A ocorreu ou A* ocorreu. Então a chance de X ocorrer é a soma das chances de X e A acontecerem simultaneamente mais a chance de X e A^* acontecerem simultaneamente. Isso que significa a formula **(II)**. O raciocínio funciona por que A, A^* formam uma partição do espaço amostral, então isso pode ser generalizado mas eu vou me limitar a esse caso já que só isso é suficiente pro problema.

O teorema de Bayes consiste em aplicar **(I)** na equação **(II).** Assim obtemos:

$$\mathbf{P}(X) = \mathbf{P}(X|A)\mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(X|A^*)\mathbf{P}(A^*) \qquad \textbf{(III)}$$

Voltando ao problema, vamos considerar os seguintes eventos:

C = haver congestionamento

B = os filhos brigarem

P = o pai perder a paciência

E também os respectivos eventos complementares:

C^* = não haver congestionamento

B^* = os filhos não brigarem

P^* = o pai não perder a paciência

Precisamos calcular a probabilidade de não ter ocorrido congestionamento sabendo que o pai não perdeu a paciência. Ou seja, queremos calcular $\mathbf{P}(C^*|P^*)$. Pela fórmula **(I)** isso é o mesmo que $\mathbf{P}(C^* \cap P^*) / \mathbf{P}(P^*)$. Então temos que calcular a probabilidade desses eventos. Vamos reunir as informações que temos do enunciado.

1) A probabilidade de congestionamento na estrada é de 0,6. Ou seja:

$\mathbf{P}(C) = 0{,}6$

2) Havendo congestionamento, a probabilidade dos seus dois filhos brigarem no carro é de 0,8. Portanto:

$\mathbf{P}(B|C) = 0{,}8$

3) Sem congestionamento, a briga pode aparecer com probabilidade 0,4. Logo:

$\mathbf{P}(B|C^*) = 0{,}4$

4) Quando há briga, com ou sem congestionamento, a probabilidade do pai perder a paciência com os filhos é de 0,7. Assim:

$\mathbf{P}(P|B \cap C) = \mathbf{P}(P|B \cap C^*) = 0{,}7$

5) Havendo congestionamento o pai pode perder a paciência com os filhos mesmo sem brigas, o que aconteceria com probabilidade 0,5. Então:

$\mathbf{P}(P|B^* \cap C) = 0{,}5$

6) Quando não há nem briga nem congestionamento, o pai dirige tranquilo e não perde a paciência. Ou seja:

$\mathbf{P}(P|B^* \cap C^*) = 0$

Agora vamos usar os resultados para resolver o problema. Primeiro vamos aplicar o teorema de Bayes (equação **(III)**) usando **1), 2)** e **3)**. Assim temos:

$\mathbf{P}(B) = \mathbf{P}(B|C)\mathbf{P}(C) + \mathbf{P}(B|C^*)\mathbf{P}(C^*)$

Usando os valores fornecidos e também que $\mathbf{P}(C) + \mathbf{P}(C^*) = 1$ teremos:

$\mathbf{P}(B) \ = 0{,}8^*0{,}6 + 0{,}4^*0{,}4 = 0{,}64$

Com isso também concluímos que

$\mathbf{P}(B^*) = 1 - \mathbf{P}(B) = 0{,}36$

$\mathbf{P}(B \cap C) = \mathbf{P}(B|C)\mathbf{P}(C) = 0{,}48$

$\mathbf{P}(B \cap C^*) = \mathbf{P}(B|C^*)\mathbf{P}(C^*) = 0{,}16$

$\mathbf{P}(B^* \cap C) = \mathbf{P}(C) - \mathbf{P}(B \cap C) = 0{,}12$

$\mathbf{P}(B^*\cap C^*) = \mathbf{P}(B^*) - \mathbf{P}(B^*\cap C) = 0{,}24$

Observamos agora que a informação **4)** permite concluir que $\mathbf{P}(P|B) = 0{,}7$. De fato:

$\mathbf{P}(P\cap B) = \mathbf{P}(P\cap B\cap C) + \mathbf{P}(P\cap B\cap C^*)$

$\mathbf{P}(P\cap B) = \mathbf{P}(P|B\cap C)\ \mathbf{P}(B\cap C) + \mathbf{P}(P|B\cap C^*)\ \mathbf{P}(B\cap C^*)$

$\mathbf{P}(P\cap B) =0{,}7\ [\ \mathbf{P}(B\cap C) + \mathbf{P}(B\cap C^*)\ ] = 0{,}7\ \mathbf{P}(B)$

$\mathbf{P}(P|B) = P(\mathbf{P}\cap B)/\mathbf{P}(B) = 0{,}7$

Agora obteremos $\mathbf{P}(P|B^*)$, para usarmos novamente o teorema de Bayes. Para isso, observamos que aplicando a equação **(II)** para $X = P \cap B^*$ teremos:

$\mathbf{P}(P\cap B^*) = \mathbf{P}(\ P \cap B^* \cap C) + \mathbf{P}(\ P \cap B^* \cap C^*)$

$\mathbf{P}(P \cap B^*) = \mathbf{P}(\ P|B^* \cap C)\ \mathbf{P}(B^* \cap C) + \mathbf{P}(\ P|B^* \cap C^*)\ \mathbf{P}(B^* \cap C^*)$

Substituindo os valores de5) e 6) e os encontrados anteriormente teremos:

$\mathbf{P}(P \cap B^*) = 0{,}5*0{,}12 + 0*0{,}24 = 0{,}06$

Logo $\mathbf{P}(P|B^*) = \mathbf{P}(P\cap B^*)/\mathbf{P}(B^*) = 0{,}06/0{,}36 = 1/6$

Aplicando então o teorema de Bayes

obteremos:

$\mathbf{P}(P) = \mathbf{P}(P|B)P(B) + \mathbf{P}(P|B^*)P(B^*)$

$\mathbf{P}(P) = 0,7*0,64 + 0,06$

$\mathbf{P}(P) = 0,7*0,64$

Com isso também temos $\mathbf{P}(P^*) = 1- 0,7*0,64$

Por fim, resta calcular $\mathbf{P}(P^*\cap C^*)$. Para isso observamos que

$\mathbf{P}(P\cap C^*) = \mathbf{P}(P\cap C^*\cap B) + \mathbf{P}(P\cap C^*\cap B^*)$

$\mathbf{P}(P\cap C^*) = \mathbf{P}(P|C^*\cap B)P(B\cap C^*) + \mathbf{P}(P|C^*\cap B^*)\mathbf{P}(B^*\cap C^*)$

$\mathbf{P}(P\cap C^*) = 0,7*0,16 + 0*0,24 = 0,7*0,16$

Logo:

$\mathbf{P}(P^*\cap C^*) = \mathbf{P}(C^*) - \mathbf{P}(P\cap C^*) = 0,4 - 0,7*0,16$

Portanto, a resposta procurada é, (se eu nao tiver errado nenhuma conta):

$\mathbf{P}(C^*|P^*) = \mathbf{P}(P^*\cap C^*) / \mathbf{P}(P^*) = (0,4 - 0,7*0,16) / (1- 0,7*0,64) = 12/23 \approxeq 0,52$