UNIVERSIDADE EDUARDO MONDLANE
– FACULDADE DE CIÊNCIAS –

ANÁLISE MATEMÁTICA III

– Ficha Geral de Exercícios para Cursos de Engenharias –

– DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA E INFORMÁTICA –
– MAPUTO, 2022 –

Conteúdo

1 Elementos de análise complexa

1.1 Números complexos

1. Efectuar as operações indicadas, apresentando os resultados na forma algébrica:

(a) $\left(\frac{1+i}{\sqrt{3}+i}\right)^{-8}$ (b) $\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i}\right)^{40}$ (c) $\left(\frac{1-i}{-1+i\sqrt{3}}\right)^{-6}$ (d) $\frac{(3+i)^{10}}{(-2+i)^8}$

2. Determinar todas raízes de potências de expoentes racionais

(a) $\left(\frac{-1+i}{1-\sqrt{3}i}\right)^{\frac{4}{2}}$ (b) $\left(\frac{-3-2i}{2-3i}\right)^{-\frac{6}{3}}$ (c) $\left(\frac{1+i}{1-i\sqrt{3}}\right)^{\frac{5}{3}}$ (d) $\left(\frac{-2+i}{1+2i}\right)^{-\frac{8}{4}}$

3. Resolva as equações seguintes

(a) $z^3-8i=0$
(b) $z^2-4-3i=0$
(c) $z^2-6+8i=0$
(d) $z^4+iz^3+8iz-8=0$

4. Achar os conjuntos dos pontos do plano complexo que se determinam pelas condições seguintes:

(a) $0 \le \mathbf{Im}\, z \le 1$ (b) $\frac{\pi}{2} < \arg z < \pi$ (c) $|z-1| \le |z-i|$ (d) $|z| < 2+\mathbf{Im}\, z$

5. Indicar as linhas definidas pelas equações seguintes, dadas na forma complexa:

(a) $\mathbf{Re}\left(\frac{1}{z}\right)=1$
(b) $|z|=1-\mathbf{Im}\, z$
(c) $\mathbf{Re}(1+z)=|z|$
(d) $\left|\frac{1}{z}\right| \le 2, z \ne 0$
(e) $\sqrt{2}|z|=\mathbf{Re}\, z+1$
(f) $(1+i)z+(1-i)\overline{z}+2=0$

1.2 Funções complexas

1. Utilizando as condições de Cauchy-Riemann, verificar quais das funções dadas são analíticas pelo menos num ponto e quais não são:

(a) $f(z)=z^2\overline{z}$ (b) $f(z)=|z|\overline{z}$ (c) $f(z)=\overline{z}\,\mathbf{Im}\, z$ (d) $f(z)=|z|\,\mathbf{Re}(\bar{z})$

2. Mostrar que as funções seguintes são harmónicas:

(a) $u(x,y)=x^2+2x-y^2$
(b) $v(x,y)=e^x\cos y$
(c) $u(x,y)=\frac{x}{x^2+y^2}$
(d) $v(x,y)=\frac{x}{x^2+y^2}$
(e) $v(x,y)=\arctan\frac{y}{x}$
(f) $u(x,y)=\ln(x^2+y^2)$

3. Mostre que cada uma das funções seguintes é harmónica **e** recupere uma função analítica $f(z)$ numa vizinhança dum ponto z_0, sabendo a sua parte real $\mathbf{u}(x,y)$ ou a sua parte imaginária $\mathbf{v}(x,y)$ e o valor $f(z_0)$:

(a) $\mathbf{u}(x,y)=x^2-y^2+2x, f(i)=2i-1$
(b) $\mathbf{u}(x,y)=\frac{x}{x^2+y^2}, f(\pi)=\frac{1}{\pi}$
(c) $\mathbf{u}(x,y)=e^x(x\cos(y)-y\sin(y)), f(0)=0$
(d) $\mathbf{v}(x,y)=2x^2-2y^2+x, f(0)=0$
(e) $\mathbf{v}(x,y)=\arctan\frac{y}{x}, f(1)=0, (x\ge 0)$
(f) $\mathbf{v}(x,y)=y-2\sin(2x)\sinh(2y), f(0)=-2$

1.3 Integrais no plano complexo

1. Calcule os integrais dados, seguindo os contornos indicados

   (a) $\displaystyle\int_\Gamma \mathbf{Re}(z)dz$, (b) $\displaystyle\int_\Gamma \mathbf{Im}(z)dz$, (c) $\displaystyle\int_\Gamma |z|dz$,

   onde Γ é poligonal que une os pontos $O(0,0), A(1,1), B(2,1)$ e orientada no sentido de O para B.

2. Calcular $\displaystyle\int_0^{-2+i} z^2dz$, seguindo

   (a) a recta que une os extremos;

   (b) os segmentos de $z=0$ a $z=-2$ e de $z=-2$ a $z=-2+i$.

3. Calcule $\displaystyle\int_C \overline{z}|z|dz$, onde C é um contorno fechado limitado pela circunferência superior $|z|=1$ e pelo segmento $-1\leq x\leq 1, y=0$, no sentido anti-horário.

4. $\displaystyle\oint_C \frac{dz}{z^2(z+\pi^2)^2}$, C é a região limitada pelas circunferências $|z|=1$, $|z|=2$ e percorre no sentido positivo.

5. Calcule os integrais seguintes, considerando para funções subintegrais multivalentes os ramos unívocos indicados:

   (a) $\displaystyle\int_{-i}^{i} \frac{dz}{\sqrt{z}}, \quad \sqrt{1}=-1$

   (b) $\displaystyle\int_{-1-i}^{-1+i} \frac{\ln(1+z)dz}{\sqrt{1+z}}, \quad \sqrt{-1}=-i$

   (c) $\displaystyle\int_1^i z\ln(z)dz$

   (d) $\displaystyle\int_{-2}^{-1-i} \frac{\ln(1+z)dz}{1+z}$

   (e) $\displaystyle\int_{-i}^{i} ze^zdz$

   (f) $\displaystyle\int_{-i}^{1} \sqrt[3]{z}\ln(z)dz$

6. Calcule os integrais dados, utilizando a Fórmula Integral de Cauchy

   (a) $\displaystyle\oint_{\Gamma^+} \frac{\sin(z)}{(z^2+1)}dz$

      i. $\Gamma\colon |z+i|=1$ ii. $\Gamma\colon |z-i|=1$

   (b) $\displaystyle\oint_{\Gamma^+} \frac{\cos(z)}{z(z^2+1)}dz$

      i. $\Gamma\colon |z|=\frac{1}{2}$ ii. $\Gamma\colon |z-i|=\frac{3}{2}$ iii. $\Gamma\colon |z|=2$

   (c) $\displaystyle\oint_{\Gamma^+} \frac{\sin(z)\sin(z-1)}{z^2-z}dz$

      i. $\Gamma\colon |z-1|=\frac{1}{2}$ ii. $\Gamma\colon |z-1|=2$

   (d) $\displaystyle\oint_{\Gamma^+} \frac{zdz}{(z-1)(z-2)^2}$, onde $\Gamma\colon |z|=3$

   (e) $\displaystyle\oint_{\Gamma^+} \frac{e^zdz}{z^3(z+1)}$, onde $\Gamma\colon |z-2|=3$

1.4 Séries de Laurent. Residuos

1. Desenvolve as funções dadas em séries de Laurent nos domínios indicados

   (a) $f(z) = \dfrac{2z+i}{z^2+iz+2}$

   i. $|z| < 1$ ii. $0 < |z-i| < 3$

   (b) $f(z) = \dfrac{2z-7}{z^2-7z+12}$

   i. $|z-1| > 3$ ii. $0 < |z-3| < 1$

2. Classifique as singularidades das seguintes funções e calcule os resíduos nos seus pontos singulares.

   (a) $f(z) = \dfrac{e^z}{z^3}$

   (b) $f(z) = \dfrac{\sin z}{z^3}$

   (c) $f(z) = \dfrac{\sin z}{z^2(z-i)^2}$

   (d) $w(z) = \dfrac{\cos z}{z-\frac{\pi}{2}}$

   (e) $w(z) = e^{\frac{z}{z-2}}$

   (f) $w(z) = \dfrac{1-\cos 2z}{z^3(1+e^{iz})}$

3. Resolver os integrais da Ficha 1.3 Exercício 6 usando o teorema dos resíduos (caso possível).

2 Equações diferenciais de ordinárias

2.1 Equações diferenciais com variáveis separadas e separáveis

1. Classifique o tipo e ache as soluções das equações diferenciais dadas

   (a) $xydx + (x+1)dy = 0$

   (b) $(xy^2 + x)dx + (y - x^2y)dy = 0$

   (c) $(1+x^2)xyy' = (1+y^2)$

   (d) $2x^2yy' + y^2 = 2$

   (e) $y' = (x+y)^2$

   (f) $\begin{cases} (1+x^2)y' & = & (1+y^2) \\ y(0) & = & 1 \end{cases}$

   (g) $\begin{cases} xy' + y & = & y^2 \\ y(1) & = & \frac{1}{2} \end{cases}$

   (h) $\begin{cases} (x+2y)y' & = & 1 \\ y(\pi/2) & = & e \end{cases}$

2.2 Equações diferenciais homogêneas da 1ª ordem

1. Ache as soluções das seguintes equações diferenciais

   (a) $y' = \dfrac{y}{x} + e^{\frac{y}{x}}$

   (b) $xy' - y = x\,\mathrm{tg}\left(\dfrac{y}{x}\right)$

   (c) $xy' = y + \sqrt{xy}$

   (d) $\begin{cases} y^2 + x^2y' & = & xyy' \\ y(1) & = & 1 \end{cases}$

   (e) $\begin{cases} (y^2 + 2xy - x^2)y' & = & (y^2 - 2xy - x^2) \\ y(1) & = & -1 \end{cases}$

   (f) $\begin{cases} xy' & = & y\cos\left(\ln \frac{y}{x}\right) \\ y(1) & = & 1 \end{cases}$

2.3 Equações diferenciais lineares da 1^a ordem. Equação de Bernoulli

1. Classifique o tipo e ache as soluções das seguintes equações diferencias

   (a) $y' + 2xy = xe^{-x^2}$

   (b) $xy' - 4y = x^2\sqrt{y}$

   (c) $(1+y^2)dx = \left(\sqrt{1+y^2}\sin(y) - xy\right)dy = 0$

   (d) $x(y' - y) = (1+x^2)e^x$

   (e) $y(y-1)dx + (x^3 - xy)dy = 0$

   (f) $y' - y\,\mathrm{tg}(x) = \sec(x); \quad y(0) = 0$

   (g) $x^2y' = y(x+y); \quad y(e) = -e$

   (h) $y^2 = (xyy' + 1)\ln(x); \quad y(e) = 2$

2.4 Equações diferenciais exactas. Factor integrante

1. Resolva as seguintes equações diferenciais

   (a) $(2x + 3x^2y)dx + (x^3 - 3y^2)dy$

   (b) $2xydx + (x^2 - y^2)dy = 0$

   (c) $(x^3 - 3xy^2 + 2)dx = (3x^2y - y^2)dy$

   (d) $ydx + x[y^3 + \ln(x)]dy = 0$

   (e) $2xydx + (y^2 - 3x^2)dy = 0$

   (f) $2[x + 2\sin(y)]dx - (x^2 + 1)\operatorname{cotg}(y)dy = 0$

2.5 ED redutíveis a equações de ordens inferiores

1. Verifique se y_1 é solução da equação e, utilizando o método de redução de ordem, determine a solução geral da equação:

   (a) $y'' - y = 0; y_1 = e^x$

   (b) $x^2y'' - 3xy' + 4y = 0; y_1 = x^2$

   (c) $y'' - 4xy' + (4x^2 - 2)y = 0; y_1 = e^{x^2}$

   (d) $x^3y''' - 3x^2y'' + (6 - x^2)xy' - (6 - x^2)y = 0; y_1 = x$

   (e) $(x^2 - x)y'' + (x + 1)y' - y = 0; y_1 = 1 + x$

2. Integre as seguintes equações diferenciais

   (a) $y''(1 + e^x) + y' = 0$

   (b) $xy'' = y' + x^2$

   (c) $y'' - 2y'\operatorname{cotg}(x) = \sin^3(x)$

   (d) $[1 + \ln(x)]y'' + \dfrac{y'}{x} = 2 + \ln(x); \quad y(1) = y'(1) = 1$

   (e) $(x + 1)y'' - (x + 2)y' + x + 2 = 0; \quad y(0) = y'(0) = 2$

2.6 ED lineares homogêneas de ordens superiores

1. Resolva as seguintes equações diferenciais

   (a) $y'' - 5y' + 6y = 0$

   (b) $y'' - 4y' + 5y = 0$

   (c) $y''' - 3y'' + 3y' - y = 0$

   (d) $y^{iv} + 2y''' + y'' = 0$

   (e) $y''' - 8y = 0$

   (f) $y''' - y'' - y' + y = 0$

   (g) $y^{iv} + 8y''' + 16y' = 0$

   (h) $y''' - 2y'' + 4y' - 8y = 0$

2.7 ED lineares não-homogêneas de ordens superiores

1. Resolva as seguintes equações diferenciais pelo método de Lagrange

   (a) $y'' - 2y' + y = \dfrac{e^x}{x}$

   (b) $y'' + y = \operatorname{cotg}(x)$

   (c) $y'' - y' = \dfrac{e^x}{1+e^x}$

   (d) $y'' + y = \dfrac{1}{\sin(x)}$

   (e) $y'' - 6y' + 9y = \dfrac{e^{3x}}{1+x^2}; \quad y(0) = 1, y'(0) = 3$

2. Resolva as seguintes equações diferenciais pelo método de coeficientes indeterminados

   (a) $y'' - 2y' - 3y = e^{4x}$

   (b) $y'' - y = xe^x$

   (c) $y'' - y' = 2(1-x); \quad y(0) = y'(0) = 1$

   (d) $y'' + 2y' + 2y = xe^{-x}; \quad y(0) = y'(0) = 0$

   (e) $y'' + 4y = \sin(x); \quad y(0) = y'(0) = 1$

3. Resolva as seguintes equações de Euler

   (a) $x^2y'' - xy' + y = 8x^3$

   (b) $x^2y'' - 2xy' + 2y = 2x^3 - x$

   (c) $x^3y'' - 2xy = 6\ln(x)$

   (d) $x^2y'' = 2y$

   (e) $(1+x^2)y'' - 3(1+x)y' + 4y = (1+x)^3; \quad y(0) = y'(0) = 1$

2.8 Sistemas de equações diferenciais

Resolva os seguintes de equações diferenciais

1. $\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} &= z - y \\ \dfrac{dz}{dx} &= -y - 3z \end{cases}$

2. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} &= y + 2e^t \\ \dfrac{dy}{dt} &= x + t^2 \end{cases}$

3. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} &= y - 5\cos(t) \\ \dfrac{dy}{dt} &= 2x + y \end{cases}$

4. $\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} &= -2y - z + \sin(x) \\ \dfrac{dz}{dx} &= 4y + 3z + \sin(t) \end{cases}$

5. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} &= 4x + y - 36t \\ \dfrac{dy}{dt} &= -2x + y - 2e^t \\ x(0) &= 0 \\ y(0) &= 1 \end{cases}$

6. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} &= -x + y + z \\ \dfrac{dy}{dt} &= x - y + z \\ \dfrac{dz}{dt} &= x + y + z \\ x(0) &= 1 \\ y(0) &= 0 \\ z(0) &= 0 \end{cases}$

3 Cálculo operacional

1. Encontre a transformada de Laplace da função dada

   (a) $\sinh(bt)$

   (b) $e^{at}\cosh(bt)$

   (c) $t\sin(bt)$

   (d) $\frac{1}{2}e^{-t/2}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)-\frac{5}{2\sqrt{3}}e^{-t/2}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)$

   (e) $\frac{e^{-t}\cos(2t)-e^{2t}}{13}+\frac{29}{26}e^{-t}\sin(2t)$

2. Determinar a original sabendo que a imagem é

   (a) $F(p)=\dfrac{p+3}{p(p-1)(p+2)}$

   (b) $F(p)=\dfrac{p+3}{p^2-3p+2}$

   (c) $F(p)=\dfrac{p-3}{p^2+4p+4}$

   (d) $F(p)=\dfrac{p-2}{2p^2+2p+2}$

3. Aplicando a transformada de Laplace resolva as seguintes equações diferenciais ordinárias.

   (a) $y'+3y=e^{2t}, y(0)=1$

   (b) $\left\{\begin{array}{rcl} y''+5y'+6y &=& 2e^{-t}, t\geq 0 \\ y(0) &=& 1 \\ y'(0) &=& 0 \end{array}\right.$

   (c) $y'+3y=\sin t, y(\pi)=1$

   (d) $\left\{\begin{array}{rcl} y''+6y'+9y &=& \sin t, t\geq 0 \\ y(0) &=& 0 \\ y'(0) &=& 0 \end{array}\right.$

4. Aplicando a transformada de Laplace resolva os seguintes sistemas de equações diferenciais ordinárias.

   (a) $\left\{\begin{array}{rcl} x'-2x-y'-y &=& 6e^{3t} \\ 2x'-3x+y'-3y &=& 6e^{3t} \\ x(0) &=& 3 \\ y(0) &=& 0 \end{array}\right.$

   (b) $\left\{\begin{array}{rcl} 4x'+6x+y &=& 2\sin 2t \\ x''+x-y' &=& 3e^{-2t} \\ x(0) &=& 2 \\ x'(0) &=& -2 \end{array}\right.$

   (c) $\left\{\begin{array}{rcl} x''+y'+3x &=& 15e^{-t} \\ y''-4x'+3y &=& 15\sin 2t \\ x(0) &=& 35 \\ x'(0) &=& -48 \\ y(0) &=& 27 \\ y'(0) &=& -55 \end{array}\right.$

   (d) $\left\{\begin{array}{rcl} x''-x+5y' &=& t \\ y''-4y-2x' &=& -2 \\ x(0) &=& 0 \\ x'(0) &=& 0 \\ y(0) &=& 1 \\ y'(0) &=& 0 \end{array}\right.$

4 Séries de Fourier

1. Encontre as séries de Fourier para as funções seguintes.

   (a) $f(x) = \begin{cases} -1, & \text{se} \quad -1 \leq x \leq 0 \\ 1, & \text{se} \quad 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$, para $|x| \leq 1$.

   (b) $f(x) = \begin{cases} -1, & \text{se} \quad -\pi < x < 0 \\ 1, & \text{se} \quad 0 < x < \pi \end{cases}$

   (c) $f(x) = e^{2x}$ para $|x| \leq \pi$.

   (d) $f(x) = \dfrac{x + |x|}{2}$ para $|x| \leq 2$.

2. Considere a função $f\colon [0, \pi] \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x(\pi - x)$.

   (a) Determine a série de senos de f.

   (b) Use a série para mostrar que $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^3} = \frac{\pi^3}{32}$.

3. Expanda a função $f(x) = \begin{cases} 0, & 0 < x \leq 1 \\ 1, & 1 < x < 2 \end{cases}$ em série de senos e em série de cosenos para $0 < x < 2$.

4. Considere a função $f\colon [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^2$.

   (a) Verifique que a série de Fourier de f é $\displaystyle\frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4(-1)^n}{n^2} \cos(n\pi)$.

   (b) Use a série de Fourier para mostrar que $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

   (c) Determine a série de senos de f em $[0, \pi]$.

5. Desenvolver a função $f(x) = \dfrac{\pi}{4}$, no intervalo $(0, \pi)$, em série de senos de arcos múltiplos. Empregar o desenvolvimento obtido para a soma das séries numéricas seguintes:

   (a) $1 - \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{5} - \dfrac{1}{7} + \dfrac{1}{9} - \cdots$

   (b) $1 - \dfrac{1}{5} + \dfrac{1}{7} - \dfrac{1}{11} + \dfrac{1}{13} - \cdots$

6. Desenvolver em séries imcompletas de Fourier, no intervalo $(0, \pi)$, as funções seguintes:

   (a) $f(x) = x$. Achar, através do desenvolvimento obtido, a soma da série

   $$1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \cdots$$

   (b) $f(x) = x^2$. Achar, através do desenvolvimento obtido, a soma da série numérica

   $$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \cdots$$

   (c) $f(x) = x^2$. Achar, através do desenvolvimento obtido, a soma da série numérica

   $$1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \cdots$$

      i. em séries de senos de arcos múltiplos;

      ii. em séries de cossenos de arcos múltiplos.