ANÁLISE MATEMÁTICA III

Elementos de Análise Complexa

Licenciatura em Engenharias

Universidade Eduardo Mondlane
Faculdade de Ciências
Departamento de Matemática e Informática

*** 7 de Março de 2022 ***

Contéudo

Números Complexos

O conjunto de números complexos designa-se por $\mathbb{C}$ e representa a totalidde de todos os pares ordenados (x, y) de números reais x e y, para os quais são definidas as seguintes operações de adição e multiplicação:

Definição

Dados dois números complexos $z_1 = (x_1, y_1)$ e $z_2 = (x_2, y_2)$, tem-se:

$$z_1 + z_2 = (x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2) \in \mathbb{C}$$
$$z_1 \cdot z_2 = (x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) = (x_1x_2 - y_1y_2, x_1y_2 + x_2y_2) \in \mathbb{C}$$

sendo, também definida a condição de igualdade de z_1 e z_2:

$$z_1 = z_2, \text{ ou seja } (x_1, y_1) = (x_2, y_2), \text{ sse } x_1 = x_2 \wedge y_1 = y_2$$

Nota

Dado um número complexo $z = (x, y)$ diz-se que x é sua parte real e y parte imaginária e escreve-se $x = \mathbf{Re}\, z$, $y = \mathbf{Im}\, z$. Chama-se conjugado de um número complexo $z = (x, y)$ ao número $\bar{z} = (x, -y)$, verifica-se então que $z \cdot \bar{z} = (x^2 + y^2, 0)$.

Forma algébrica

$$z = x + iy \text{ e } \bar{z} = x - iy, \text{ sendo que } i^2 = -1.$$

Forma trigonométrica

$$z = r\left(\cos\varphi + i\sin\varphi\right),$$

com $r = |z|, \varphi = \textbf{arg}\ z$, sendo válida a fórmula de Moivre:
$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^p = \cos(p\varphi) + i\sin(p\varphi), p \in \mathbb{Z}$

Forma exponencial

$$z = r \cdot e^{i\varphi},$$

com $r = |z|, \varphi = \textbf{arg}\ z$, sendo válida a fórmula de Euler: $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$.

onde $r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ é módulo do número complexo dado, $\varphi = \textbf{arg}\ z$, $-\pi < \varphi < \pi$ é argumento principal do número z.

Argumento principal de um número complexo

$$\varphi = \textbf{arg}\ z = \begin{cases} \operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right) & \text{caso} \quad x = \textbf{Re}\, z > 0 \\ \pi + \operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right) & \text{caso} \quad x = \textbf{Re}\, z < 0 \land y = \textbf{Im}\, z \geq 0 \\ -\pi + \operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right) & \text{caso} \quad x = \textbf{Re}\, z < 0 \land y = \textbf{Im}\, z < 0 \\ \frac{\pi}{2} & \text{caso} \quad x = \textbf{Re}\, z = 0 \land y = \textbf{Im}\, z > 0 \\ -\frac{\pi}{2} & \text{caso} \quad x = \textbf{Re}\, z = 0 \land y = \textbf{Im}\, z < 0 \end{cases}$$

Extração de raízes de índice natural

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\left[\cos\frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i \sin\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right], n \in \mathbb{N}, k = 0, 1, 2, \ldots, (n-1)$$

Elevação a um expoente racional

$$\sqrt[n]{z^p} = \sqrt[n]{r^p}\left[\cos\frac{p \cdot \varphi + 2\pi k}{n} + i \sin\frac{p\varphi + 2\pi k}{n}\right], p \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}, k = 0, 1, 2, \ldots, (n-1)$$

Sobre dois números complexos dados na forma algébrica, isto é, $z_1 = x_1 + iy_1$ e $z_2 = x_2 + iy_2$, efectuam-se as seguintes operações:

1. Adição

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$$

2. Multiplicação

$$z_1 \cdot z_2 = (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1)$$
$$z \cdot \bar{z} = x^2 + y^2$$

3. Divisão

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \cdot \bar{z_2}}{z_2 \cdot \bar{z_2}} = \frac{z_1 \cdot \bar{z_2}}{x^2 + y^2}, \quad (x_2, y_2) \neq (0, 0)$$

Exemplo

Dado $\left(\dfrac{3-i}{1-2i}\right)^3$*, efectue operações com números complexos e apresente a solução na forma algébrica.*

Resolução: Fazendo o conjugado do denominador, da expressão dentro de parentesis, temos

$$\begin{aligned}\left(\frac{3-i}{1-2i}\right)^3 &= \left[\frac{(3-i)\cdot(1+2i)}{(1-2i)\cdot(1+2i)}\right]^3\\ &= \left(\frac{5+5i}{5}\right)^3\\ &= (1+i)^3\\ &= -2+2i\end{aligned}$$

Exemplo

Ache os valores de raízes e potências de expoente racional de $\sqrt{2-2\sqrt{3}i}$.

Resolução:

Atendendo a que $|2-2\sqrt{3}i| = 4$, **arg** $(2-2\sqrt{3}i) = \operatorname{arctg}\dfrac{(-2\sqrt{3})}{2} = -\dfrac{\pi}{3}$, obtemos

$$2-2\sqrt{3}i = 4\left[\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right].$$

A seguir, achamos

$$\begin{aligned} z = \sqrt{2-2\sqrt{3}i} &= \sqrt{4\left[\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right]} \\ &= 2\left[\cos\left(\frac{-\frac{\pi}{3}+2\pi k}{2}\right) + i\sin\left(\frac{-\frac{\pi}{3}+2\pi k}{2}\right)\right], \quad k = 0, 1. \end{aligned}$$

Para,

$k = 0$ obtemos a raíz

$$z_1 = 2\left[\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right] = \sqrt{3} - i$$

$k = 1$ obtemos a raíz

$$z_2 = 2\left[\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right)\right] = -\sqrt{3} + i$$

Exemplo

Resolver a equação $z^4 + 4 = 0$.

Resolução:
Da equação resulta que $z^4 = -4$ ou $z = \sqrt[4]{-4}$. Atendendo a que $|-4| = 4$ e **arg** $(-4) = \pi$, obteremos

$$z = \sqrt[4]{4\left[\cos\pi + i\sin\pi\right]} = \sqrt{2}\left[\cos\left(\frac{\pi + 2\pi k}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi + 2\pi k}{4}\right)\right].$$

Em seguida, fazendo $k = 0, 1, 2, 3$, obtém-se todas raízes da equação dada:

$$z_1 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right) = 1 + i, \qquad z_2 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right) = -1 + i$$

$$z_3 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4}\right) = -1 - i, \qquad z_4 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{4} + i\sin\frac{7\pi}{4}\right) = 1 - i$$

Propriedades e definição

Qualquer conjunto **D** do conjunto dos números complexos $\mathbb{C}$ representa por sua vez, um conjunto dos números complexos que pode ser interpretado graficamente sobre o plano complexo sob a forma de uma totalidade dos pontos de modo que entre em cada número complexo e a sua imagem geométrica exista uma correspondência biunívoca. Assim, falando de um conjunto **D** dos números complexos, pode-se subentender o conjunto respectivo dos pontos sobre o plano complexo e vice-versa.

Exemplo

Identifique a linha determinada pela equação complexa $\sqrt{2}\cdot|z| = \textbf{Re}\, z + 1.$

Resolução:
A equação da curva dada $|z| = \sqrt{x^2+y^2}$ e $\textbf{Re}\, z = x$, obteremos

$$\sqrt{2}\cdot\sqrt{x^2+y^2} = x+1 \quad \text{ou} \quad 2(x^2+y^2) = x^2+2x+1, x \geq -1.$$

Depois das transformações simples levaremos esta equação para a forma $\dfrac{(x-1)^2}{2} + \dfrac{y^2}{1} = 1$, que representa uma elipse.

Funções de uma variável complexa

Consideremos uma função $f\colon\ \mathbf{D} \to \mathbb{C}$, onde $\mathbf{D}$ é um subconjunto de $\mathbb{C}$. A função f diz-se uma **função complexa de uma variável complexa**.
Trata-se de uma correspondência que associa a cada elemento $z \in \mathbf{D}$ um único elemento w no plano complexo (designado por imagem de z por f ou valor de f em z):

$$w = f(z) = f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y)$$

onde $u(x,y)$ e $v(x,y)$ são funções reais de duas variáveis reais x e y, designadas por parte real $(u(x,y))$ e parte imaginária $(v(x,y))$ de $f(z)$, respectivamente.
O conjunto $\mathbf{D} \subseteq \mathbb{C}$ é designado por domínio de f e o conjunto das imagens w é designado por contradomínio de f.

Exemplo

Determine a imagem da recta $\textbf{Re}(z) = 1$ *sob a função* $w = f(z) = z^2$.

Resolução:
Sabe-se que $w = u + iv$. Temos que $w = f(z) = (x + iy)^2 = (x^2 - y^2) + 2xyi$. Para $x = 1$ teremos que $u = 1 - y^2$ e $v = 2y$, onde $y = \dfrac{v}{2}$. Deste modo, $u = 1 - \dfrac{v^2}{4}$. Significa que a recta $\textbf{Re}(z) = 1$ representa uma parábola sob o plano $w = f(z) = z^2$.

Definição

Suponha que a função f seja definida em alguma vizinhança de z_0, excepto possivelmente no próprio z_0. Então é dito possuir um limite em z_0, isto é, $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = L$ se, para cada $\varepsilon > 0$, existir um $\delta > 0$ tal que $|f(z) - L| < \varepsilon$ sempre que $0 < |z - z_0| < \delta$.
Uma função f é contínua em um ponto z_0 se $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = f(z_0)$.

Seja $f(z)$ uma função, definida numa região **R** (conjunto aberto e conexo). Diz-se que $f(z)$ é **derivável num ponto** $z \in \mathbb{R}$, se

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} = f'(z).$$

Definição

Diz-se que uma função $f(z)$ é analítica numa região **R**, se ela é derivável em cada ponto de **R** . Diz-se que $f(z)$ é analítica num ponto z_0, se ela é analítica numa região contendo z_0.

Para que uma função $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ seja analítica numa região **R** é necessário e suficiente que nessa região sejam deriváveis as funções $u(x, y) = \mathbf{Re}\, f(z)$, $v(x, y) = \mathbf{Im}\, f(z)$ e estejam satisfeitas em **R** as equações de Cauchy-Riemann:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Exemplo

Verifique se a função $f(z) = \dfrac{x}{x^2+y^2} - i\dfrac{y}{x^2+y^2}$ *é analítica.*

Resolução:
Temos que

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{\partial v}{\partial y}$$

e

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

São satisfeitas as condições de Cauchy-Riemann, excepto no ponto onde $x^2 + y^2 = 0$, isto é, em $z = 0$.

Uma função $f(z)$ analítica numa região **R** possui as derivadas de todas ordens em **R** e essas derivadas, por sua vez, são, também, analíticas em **R**. Neste caso as funções $u(x,y) = \textbf{Re}\, f(z), v(x,y) = \textbf{Im}\, f(z)$ possuem em **R** derivadas parciais contínuas de qualquer ordem, e representam **funções harmónicas conjugadas**, satisfazendo a equação de Laplace, isto é,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad \text{e} \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0.$$

Esta propriedade permite recuperar uma função analítica através da sua parte real ou imaginária, a saber. Caso ser dada só a parte real $u(x,y)$ de uma função analítica $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$, a sua parte imaginária $v(x,y)$ pode-se obter através de $u(x,y)$ do modo seguinte:

$$v(x,y) = -\int_{x_0}^{x} u'_y(x, y_0)dx + \int_{y_0}^{y} u'_x(x,y)dy + C$$

onde C é constante de integração, (x_0, y_0) é ponto inicial de integração no qual a função $u(x,y)$ é derivável.

Analogamente, a parte real $u(x,y)$ pode ser recuperada através da parte imaginária $v(x,y)$:

$$u(x,y) = \int_{x_0}^{x} v'_y(x, y_0)dx - \int_{y_0}^{y} v'_x(x,y)dy + C$$

Uma função $f(z)$ analítica numa região **R** possui as derivadas de todas ordens em **R** e essas derivadas, por sua vez, são, também, analíticas em **R**. Neste caso as funções $u(x, y) = \textbf{Re}\, f(z), v(x, y) = \textbf{Im}\, f(z)$ possuem em **R** derivadas parciais contínuas de qualquer ordem, e representam **funções harmónicas conjugadas**, satisfazendo a equação de Laplace, isto é,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad \text{e} \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0.$$

Esta propriedade permite recuperar uma função analítica através da sua parte real ou imaginária, a saber. Caso ser dada só a parte real $u(x, y)$ de uma função analítica $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, a sua parte imaginária $v(x, y)$ pode-se obter através de $u(x, y)$ do modo seguinte:

$$v(x, y) = -\int_{x_0}^{x} u'_y(x, y_0)dx + \int_{y_0}^{y} u'_x(x, y)dy + C$$

onde C é constante de integração, (x_0, y_0) é ponto inicial de integração no qual a função $u(x, y)$ é derivável.

Analogamente, a parte real $u(x, y)$ pode ser recuperada através da parte imaginária $v(x, y)$:

$$u(x, y) = \int_{x_0}^{x} v'_y(x, y_0)dx - \int_{y_0}^{y} v'_x(x, y)dy + C$$

Exemplo

Provar que a função $v(x,y) = x - \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}, x > 0$ *é parte imaginária de uma função analítica* $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ *e obter esta função.*

Resolução:

Temos que

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = -\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2} \quad \text{e} \quad \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0.$$

Logo, $v(x,y)$ satisfaz a equação de Laplace e, então, é função harmónica o que prova que ela é parte imaginária de uma função analítica $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$. Vamos encontrar a parte real de $f(z)$, tomando um ponto arbitrário $(x_0, y_0) = (1, 0)$:

$$\begin{aligned} u(x,y) &= \int_1^x v'_y(x,0)dx - \int_0^y v'_x(x,y)dy + C \\ &= -\int_1^x \frac{1}{x}dx - \int_0^y \left(1 + \frac{y}{x^2+y^2}\right) dy + C \\ &= -y - \ln\sqrt{x^2+y^2} + C. \end{aligned}$$

Assim, a função analítica $f(z)$ é dada da seguinte forma

$$f(z) = \left(-y - \ln\sqrt{x^2+y^2} + C\right) + i\left(x - \operatorname{arctg}\frac{y}{x}\right), \quad x > 0.$$

Integrais de Contorno

Definição

Chama-se **arco contínuo** sobre o plano complexo a um conjunto de pontos Γ, definido na forma $z(t) = x(t) + iy(t), a \leq t \leq b$, onde $x(t), y(t)$ são funções de parâmetro real t contínuas num intervalo $[a, b] \subset \mathbb{R}$. Os pontos $z(a)$ e $z(b)$ chamam-se extremidades do arco Γ.

Definição

Um arco $\Gamma\colon z = z(t) = x(t) + iy(t), a \leq t \leq b$ diz-se **arco regular,** se a derivada $z'(t) = x'(t) + iy'(t)$ existe, é contínua e não se anula em $[a, b]$.

Definição

Seja $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ uma função contínua sobre um contorno orientado $\Gamma^+\colon z = z(t) = x(t) + iy(t),\ a \leq t \leq b$. Então, o integral da função $f(z)$ ao longo do contorno Γ^+ calcula-se conforme a fórmula:

$$\int_{\Gamma^+} f(z)dz = \int_a^b f[z(t)]z'(t)dt.$$

Exemplo

Calcule o integral $\int_\Gamma (\textbf{Re}\, z - i\overline{z})\, dz$ *considerando dois contornos diferentes que ligam os pontos* $z_1 = 0$ *e* $z_2 = -1 + i$ *e que são orientados no sentido de* z_1 *para* z_2 *sobre o segmento da recta* $y = -x$.

Resolução: A equação paramétrica, que passa em dois pontos é dado por $\dfrac{z - z_1}{z_2 - z_1} = t$, assim $[z_1, z_2]$ é $z = z(t) = t(-1 + i)$, $0 \leq t \leq 1$, sendo $\textbf{Re}\, z = -t, \overline{z} = t(-1 - i)$, $dz = (-1 + i)dt$. Então

$$\begin{aligned}
\int_\Gamma (\textbf{Re}\, z - i\overline{z})\, dz &= \int_0^1 [-t - it(-1 - t)](-1 + i)dt \\
&= (-1 + i)(-2 + i) \int_0^1 t dt \\
&= \frac{1}{2}(1 - 3i). \blacksquare
\end{aligned}$$

- Propriedade de linearidade

$$\int_{\Gamma}[k_1 f(z) + k_2 g(z)]dz = k_1 \int_{\Gamma} f(z)dz + k_2 \int_{\Gamma} g(z)dz$$

onde k_1 e k_2 são constantes.

- Propriedade de aditividade

$$\int_{\Gamma} f(z)dz = \int_{\Gamma_1} f(z)dz + \int_{\Gamma_2} f(z)dz$$

sendo $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2, \Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \emptyset$.

- Dependência do integral da orientação do contorno de integração

$$\int_{\Gamma^-} f(z)dz = -\int_{\Gamma^+} f(z)dz$$

Teorema (Teorema 1)

Seja $f(z)$ uma função analítica numa região simplesmente conexa **R** e seja Γ um contorno fechado simples, todo contido em **R**. Então

$$\oint_{\Gamma} f(z)dz = 0.$$

Teorema (Teorema 2)

Seja $f(z)$ uma função analítica numa região simplesmente conexa **R** e sejam z_1, z_2 dois pontos interiores de **R**. Então, integral da função $f(z)$ é independente do contorno de integração que em **R** une os pontos z_1 e z_2, e calcula-se pela fórmula de Newton-Leibniz

$$\int_{z_1}^{z_2} f(z)dz = F(z)\Big]_{z_1}^{z_2} = F(z_2) - F(z_1),$$

onde $F(z)$ é primitiva de $f(z)$, isto é $F'(z) = f(z)$.

Teorema (Teorema 3)

Seja $f(z)$ uma função analítica numa região **R** e sejam $\Gamma, \gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$, contornos fechados simples, todos contidos em **R** de modo que os contornos $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$, sendo exteriores um a outro, se encontrem no interior de Γ. Então,

$$\oint_{\Gamma+} f(z)dz = \oint_{\gamma_1} f(z)dz + \oint_{\gamma_2} f(z)dz + \cdots + \oint_{\gamma_n} f(z)dz.$$

Teorema (Fórmula Integral de Cauchy)

Suponha-se que $f(z)$ uma função analítica em todos os pontos situados no interior e sobre um contorno fechado simples Γ, e seja z_0 um ponto interior a Γ. Enão, é válida a Fórmula Integral de Cauchy

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma+} \frac{f(z)}{(z - z_0)} dz$$

Teorema (Teorema Integral de Cauchy Generalizado)

Se uma função $f(z)$ é analítica em todos os pontos situados no interior e sobre um contorno fechado simples Γ, então $f(z)$ possui derivadas de todas ordens em qualquer ponto z_0 no interior a Γ, dadas pela fórmula

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_{\Gamma+} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz, \quad n = 1, 2, 3, \ldots.$$

Exemplo

Calcule o integral $\displaystyle\int_{\Gamma^-} \frac{z+i}{z-i}\,dz$, *onde o contorno* Γ^- *representa a semi-circunferência* $|z-i| = 1$, $\textbf{Im}\, z \geq 1$, *orientada no sentido negativo.*

Resolução: A semi-circunferência Γ^-, sendo orientada no sentido negativo, ou seja, percorrida no sentido horário, pode ser definida pela seguinte equação paramétrica

$$z = i + e^{i(\pi-\varphi)} \quad \text{ou} \quad z = i - e^{-i\varphi}, \quad 0 \leq \varphi \leq \pi.$$

Atendendo a que $dz = -ie^{-i\varphi}d\varphi$, achamos

$$\begin{aligned}
\int_{\Gamma^-} \frac{z+i}{z-i}dz &= \int_0^{\pi} \frac{2i - e^{-i\varphi}}{-e^{-i\varphi}} \cdot ie^{-i\varphi}d\varphi \\
&= \int_0^{\pi} \left(2 + ie^{-\varphi}\right) d\varphi \\
&= 2(\pi+1) \blacksquare
\end{aligned}$$

Exemplo

Calcule os integrais dados, utilizando a Fórmula Integral de Cauchy $\displaystyle\oint_{\Gamma+} \frac{\sin z}{(z+1)(z-i)}dz, \quad \Gamma\colon |z| = 2$

Resolução: A função subintegral é analítica em todos os pontos, situados no interior e sobre o contorno Γ, excepto os pontos $z_1 = -1$ e $z_2 = i$.

$$\begin{aligned}
\mathcal{I} = \oint_{\Gamma+} \frac{\sin(z)dz}{(z+1)(z-i)} &= \oint_{\Gamma_1^+} \frac{\sin(z)dz}{(z+1)(z-i)} + \oint_{\Gamma_2^+} \frac{\sin(z)dz}{(z+1)(z-i)} \\
&= \oint_{\Gamma_1^+} \frac{\frac{\sin(z)}{z-i}}{z-(-1)}dz + \oint_{\Gamma_2^+} \frac{\frac{\sin(z)}{z+1}}{z-i}dz \\
&= \oint_{\Gamma_1^+} \frac{f_1(z)}{z-z_1}dz + \oint_{\Gamma_2^+} \frac{f_2(z)}{z-z_2}dz \\
&= \mathcal{I}_1 + \mathcal{I}_2
\end{aligned}$$

onde os contornos fechados simples Γ_1, Γ_2 envolvem uma vez no sentido positivo respectivamente os pontos $z_1 = -1$ e $z_2 = i$, são exteriores um a outro e são todos contidos no interior do contorno Γ.

Primeiro, vamos calcular $\mathcal{I}_1$:

$$\mathcal{I}_1 = \oint_{\Gamma_1^+} \frac{f_1(z)dz}{z-(-1)},$$

onde $f_1(z) = \dfrac{\sin(z)}{z-i}$ é função analítica no interior do contorno Γ_1. Conforme a Fórmula Integral de Cauchy obtemos:

$$\mathcal{I}_1 = 2\pi i \cdot f_1(-1) = 2\pi i \frac{\sin(-1)}{-1-i} = \pi(1+i)\sin 1$$

De modo análogo, achamos para $f_2(z) = \dfrac{\sin(z)}{z-i}$

$$\mathcal{I}_2 = \oint_{\Gamma_2^+} \frac{f_2(z)dz}{z+1} = 2\pi i \left(\frac{\sin z}{z+1}\right)\Big]_{z=i} = \pi(-1+i)\,\mathrm{sh}\,1$$

tendo em conta que $\boxed{\sin(iz) = i\cdot \mathrm{sh}(z)}$. Logo,

$$\mathcal{I}_1 + \mathcal{I}_2 = \pi[(\sin 1 - \mathrm{sh}\,1) + i(\sin 1 + \mathrm{sh}\,1)].$$

Exemplo

$$\oint_{\Gamma+} \frac{\cos 2z}{(z+i)^3}dz, \quad \Gamma\colon |z| = 3$$

Resolução: A função subintegral é analítica em todos pontos excepto no ponto $z = -i$. Portanto, segundo o Teorema 3.5

$$\begin{aligned}
\oint_{\Gamma+} \frac{\cos(2z)}{(z+i)^3}dz &= \oint_{\Gamma+} \frac{\cos(2z)}{[z-(-i)]^{2+1}}dz \\
&= \frac{2\pi i}{2!} \cdot \frac{d^2}{dz^2}[(\cos 2z)]\Big]_{z=-i} \\
&= \frac{2\pi i}{2!} \cdot (-4\cos 2z)\Big]_{z=-i}
\end{aligned}$$

tendo em conta que $\boxed{\cos(iz) = \operatorname{ch}(z)}$. Assim,

$$\oint_{\Gamma+} \frac{\cos 2z}{(z+i)^3}dz = -4\pi i \operatorname{ch} 2$$

Séries de números complexos

Teorema (Teorema de Taylor)

Toda função $f(z)$ analítica num disco $z\colon |z-z_0|<R$, com $0<R\leq\infty$, pode ser desenvolvida neste disco de um único modo em série de potências de $(z-z_0)$:

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n, \quad |z-z_0|<R, \tag{1}$$

A série (1) chama-se Série de Taylor da função $f(z)$ com centro no ponto z_0. Caso particular $z_0=0$ obtem-se a série de Mac-Laurin:

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}z^n, \quad |z|<R.$$

Exemplo

Seja $f(z) = \dfrac{1}{1-z}$. *A função* f *é analítica e* $f^{(n)}(z) = \dfrac{n!}{(1-z)^{n+1}}$. *Logo* $f^{(n)}(0) = n!$.
Então a série de Taylor é

$$\frac{1}{1-z} = 1 + z + z^2 + z^3 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} z^n, \tag{2}$$

para $|z| < 1$.

Desenvolvimentos notáveis, com $z_0 = 0$:

$$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}, \quad z \in \mathbb{C}; \tag{3}$$

$$\sin(z) = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} z^{2n-1}}{(2n-1)!}, \quad z \in \mathbb{C}; \tag{4}$$

$$\cos(z) = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!}, \quad z \in \mathbb{C}; \tag{5}$$

$$\mathrm{sh}(z) = z + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{2n-1}}{(2n-1)!}, \quad z \in \mathbb{C}; \tag{6}$$

$$\mathrm{ch}(z) = 1 + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!}, \quad z \in \mathbb{C}; \tag{7}$$

$$\ln(z+1) = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} z^n, \quad |z| < 1; \tag{8}$$

$$\frac{1}{1+z} = 1 - z + z^2 - z^3 + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n z^n, \quad |z| < 1; \tag{9}$$

$$\frac{1}{1-z} = 1 + z + z^2 + z^3 + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} z^n, \quad |z| < 1; \tag{10}$$

Teorema (Teorema de Laurent)

Toda função $f(z)$ analítica no interior de uma coroa circular $z\colon r < |z - z_0| < R$ pode ser desenvolvida de um único modo em série de potências de $(z - z_0)$ da forma seguinte

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n, \quad r < |z - z_0| < R, \tag{11}$$

onde os coeficientes c_n calculam-se pelas fórmulas

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma+} \frac{f(\tau)d\tau}{(\tau - z_0)^{n+1}},$$

sendo Γ um contorno fechado simples todo contido na coroa circular e que envolve o ponto z_0 uma vez no sentido positivo.

A esta série (11) denomina-se Série de Laurent da função $f(z)$ com centro no ponto z_0.

A série de Laurent representa uma generalização da série de Taylor e pode ser escrita na forma da soma de uma série de potências de $(z - z_0)$ com expoentes positivos e de uma série de potências de $(z - z_0)$ com expoentes negativos, que são chamadas, respectivamente, **parte regular**[1] (ou analítica) e **parte singular** (ou principal) da série de Laurent, a saber:

$$\begin{aligned}\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n &= \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} c_{-n} (z - z_0)^{-n} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_{-n}}{(z - z_0)^n}\end{aligned}$$

[1] Série de Taylor

Expanda $f(z) = \dfrac{1}{z(z-1)}$ em séries de Laurent válida para $(a)\, 0 < |z| < 1$ e $(b)\, 1 < |z|$.

Resolução:

(a) Podemos reescrever a função $f(z)$ como $f(z) = -\dfrac{1}{z} \cdot \dfrac{1}{1-z}$, aplicando o desenvolvimento obtido em (2) temos, $f(z) = -\dfrac{1}{z}\left[1 + z + z^2 + z^3 + \cdots\right]$. A série converge para $|z| < 1$. Porém, após a multiplicação deste desenvolvimento por $\dfrac{1}{z}$, a série resultante é

$$f(z) = -\frac{1}{z} - 1 - z - z^2 - \cdots$$

converge para $0 < |z| < 1$.

(b) Seja $1 < |z|$, construindo a série que seja convergente para $|1/z| < 1$. Assim reescrevemos a função, como $f(z) = \dfrac{1}{z^2} \cdot \dfrac{1}{1 - \frac{1}{z}}$ usando a (2) substituíndo z por $1/z$:

$f(z) = \dfrac{1}{z^2}\left[1 + \dfrac{1}{z} + \dfrac{1}{z^2} + \dfrac{1}{z^3} + \cdots\right]$. A série converge para $\left|\dfrac{1}{z}\right| < 1$, ou de modo equivalente, para $1 < |z|$. Logo, a série de Laurent é

$$f(z) = \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z^3} + \frac{1}{z^4} + \frac{1}{z^5} + \cdots$$

Expanda $f(z) = \dfrac{1}{z(z-1)}$ em séries de Laurent válida para $(a)\, 0 < |z| < 1$ e $(b)\, 1 < |z|$.

Resolução:

(a) Podemos reescrever a função $f(z)$ como $f(z) = -\dfrac{1}{z} \cdot \dfrac{1}{1-z}$, aplicando o desenvolvimento obtido em (2) temos, $f(z) = -\dfrac{1}{z}\left[1 + z + z^2 + z^3 + \cdots\right]$. A série converge para $|z| < 1$. Porém, após a multiplicação deste desenvolvimento por $\dfrac{1}{z}$, a série resultante é

$$f(z) = -\frac{1}{z} - 1 - z - z^2 - \cdots$$

converge para $0 < |z| < 1$.

(b) Seja $1 < |z|$, construindo a série que seja convergente para $|1/z| < 1$. Assim reescrevemos a função, como $f(z) = \dfrac{1}{z^2} \cdot \dfrac{1}{1 - \frac{1}{z}}$ usando a (2) substituíndo z por $1/z$:

$f(z) = \dfrac{1}{z^2}\left[1 + \dfrac{1}{z} + \dfrac{1}{z^2} + \dfrac{1}{z^3} + \cdots\right]$. A série converge para $\left|\dfrac{1}{z}\right| < 1$, ou de modo equivalente, para $1 < |z|$. Logo, a série de Laurent é

$$f(z) = \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z^3} + \frac{1}{z^4} + \frac{1}{z^5} + \cdots$$

Definição

Seja f uma função complexa de variável complexa. Diz-se que z_0 é um ponto singular de f (ou que f tem no ponto z_0 uma singularidade) se f não é analítica em z_0 (podendo existir em qualquer vizinhança de z_0 pontos onde a função é analítica).
Se existe uma vizinhança de z_0 onde f é analítica, excepto no ponto z_0, então o ponto singular z_0 diz-se um ponto singular isolado (ou uma singularidade isolada).

Exemplo

A função $f(z) = \dfrac{1}{z(z^2+4)}$ tem pontos singulares isolados em $z = 0, z = 2i$ e $z = -2i$.

1. Se todos os coeficientes c_{-n} da parte singular são nulos, quer dizer, se a série de Laurent tem só a parte regular, então, o ponto z_0 diz-se sigularidade removível da função $f(z)$. Neste caso tem-se:

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = L \neq \infty.$$

2. Se a parte singular da série de Laurent contém um número finito k de termos, então o ponto singular z_0 é denominado pôlo de ordem k da função $f(z)$. A função $f(z)$ neste caso pode ser apresentada na forma

$$f(z) = \frac{\varphi(z)}{(z - z_0)^k}, \text{ sendo } \lim_{z \to z_0} \varphi(z) = L \neq 0; \infty$$

e verifica a condição

$$\lim_{z \to z_0} (z - z_0)^k \cdot f(z) = L \neq 0; \infty.$$

Um pôlo de primeira ordem $k = 1$ chama-se pôlo simples.

3. Se na parte singular da série de Laurent há número infinito de termos, então, diz-se que z_0 é singularidade essencial da função $f(z)$.

Para identificar uma singularidade removível ou um pôlo de uma função $f(z)$ pode se, também, utilizar o seguinte critério. Seja

$$f(z) = \frac{h(z)}{\varphi(z)}.$$

Suponha-se que um ponto z_0 representa "zero[2]" de ordem k do numerador $h(z)$ e "zero" de ordem m do denominador $\varphi(z)$. Então,

1. Caso $k \geq m$ o ponto z_0 é uma singularidade removível de $f(z)$;
2. Caso $k < m$ o ponto z_0 é pôlo de ordem $(m-k)$ de $f(z)$.

Definição

Diz-se que um ponto z_0 é "zero" de ordem n de uma função $f(z)$ se

$$f(z_0) = 0, f'(z_0) = 0, f''(z_0) = 0, \ldots, f^{(n-1)}(z_0) = 0, \text{ mas } f^{(n)}(z_0) \neq 0.$$

[2] Zero da função

Exemplo

Ache os pontos singulares finitos de $f(z) = \dfrac{\ln(1+z)}{(z-i)z^4}$ *e caracterize-os.*

Resolução:
A função tem dois pontos singulares isolados $z_1 = i$ e $z_2 = 0$.
A singularidade $z_1 = i$ é pôlo de primeira ordem, ou seja, pôlo simples de $f(z)$, pois

$$\lim_{z\to z_1}(z-z_1)f(z) = \lim_{z\to i}(z-i)\frac{\ln(1+z)}{(z-i)z^4} = \lim_{z\to i}\frac{\ln(1+z)}{z^4} = \ln(1+i) \neq 0; \infty.$$

E no ponto singular $z_2 = 0$ cumpre-se:

$$\lim_{z\to z_2}(z-z_2)^3 f(z) = \lim_{z\to 0} z^3\frac{\ln(1+z)}{(z-i)z^4} = i\lim_{z\to 0}\frac{\ln(1+z)}{z} = i \neq 0; \infty.$$

Logo, o ponto $z_2 = 0$ é pôlo tripo de $f(z)$.

Resíduos

Seja $f(z)$ uma função analítica no interior de um disco $\mathcal{D}$ com o centro num ponto z_0, excluindo o próprio z_0. Suponhamos que z_0 seja um ponto singular isolado de $f(z)$. Chama-se resíduo da função $f(z)$ em z_0 ao número **Res** $f(z_0)$ onde

$$\textbf{Res}\, f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma^+} f(z)dz,$$

onde Γ^+ é um contorno fechado simples todo contido em $\mathcal{D}$ e que envolve o ponto z_0 uma vez no sentido positivo.
Desta definição resulta que o resíduo de uma função $f(z)$ num ponto singular isolado é igual ao coeficiente c_{-1} da série de Laurent de $f(z)$ na vizinhança de z_0, isto é,

$$\textbf{Res}\, f(z_0) = c_{-1}.$$

O resíduo de uma função $f(z)$ no ponto no infinito é dado por

$$\textbf{Res}\, f(\infty) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma^-} f(z)dz,$$

onde Γ^- é um contorno fechado simples envolvendo todos os pontos singulares finitos de $f(z)$ uma vez no sentido negativo.
Desta definição resulta que

$$\textbf{Res}\, f(\infty) = -\frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma^+} f(z)dz = -c_{-1},$$

sendo que c_{-1} é coeficiente da série de Laurent da função $f(z)$ na vizinhança do ponto $z = \infty$.

Classifique a sigularidade e calcule o resíduo no ponto singular encontrado $f(z) = \dfrac{\sin 2z}{z^4}$.

Resolução:

1. Suponhamos que z_0 seja singularidade removível de $f(z)$. Então, **Res** $f(z_0) = 0$;
2. Seja z_0 pôlo simples de $f(z)$. Então, o resíduo calcula-se pela fórmula:

$$\textbf{Res}\, f(z_0) = \lim_{z \to z_0} \left[(z - z_0) f(z)\right];$$

3. Seja z_0 pôlo múltiplo de ordem k, então, o resíduo calcula-se pela fórmula:

$$\textbf{Res}\, f(z_0) = \frac{1}{(k-1)!} \lim_{z \to z_0} \frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}} \left[(z - z_0)^k f(z)\right];$$

4. Suponhamos que z_0 seja uma singularidade essencial de $f(z)$. Para achar **Res** $f(z_0)$ neste caso é preciso determinar o coeficiente c_{-1} no desenvolvimento da série de Laurent de $f(z)$ na vizinhança do ponto z_0. Então,

$$\textbf{Res}\, f(z) = c_{-1};$$

5. Para encontrar o resíduo da função $f(z)$ no ponto infinito é necessário desenvolver $f(z)$ em série de Laurent na vizinhança do ponto $z = \infty$ e determinar o coeficiente c_{-1}. Então,

$$\textbf{Res}\, f(\infty) = -c_{-1}.$$

Exemplo

Calcule o integral, aplicando o teorema sobre resíduos $\oint_{\Gamma+} \frac{\cos(z)}{z^2(e^{iz}+1)}dz, \Gamma\colon |z-3| = 4.$

Resolução: A função subintegral $f(z) = \frac{\cos(z)}{z^2(e^{iz}+1)}$ é analítica em todos pontos, situados no interior e sobre o contorno Γ, excepto em dois pontos singulares $z_1 = 0$ e $z_2 = \pi$, logo

$$\mathcal{I} = \oint_{\Gamma+} \frac{\cos(z)}{z^2(e^{iz}+1)}dz = 2\pi i \left[\textbf{Res}\, f(0) + \textbf{Res}\, f(\pi)\right]$$

As singularidades $z_1 = 0$ é pôlo duplo, enquanto que, $z_2 = \pi$ é pôlo simples de $f(z)$.

$$\begin{aligned}\textbf{Res}\, f(0) &= \frac{1}{1!}\lim_{z\to 0}\frac{d}{dz}\left[(z^2 f(z)\right] \\ &= \lim_{z\to 0}\frac{d}{dz}\left[\frac{\cos(z)}{e^{iz}+1}\right] \\ &= \lim_{z\to 0}\frac{-\sin(z)\cdot(e^{iz}+1) - i\cos(z)\cdot e^{iz}}{(e^{iz}+1)^2} \\ &= -\frac{i}{4};\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\textbf{Res}\, f(\pi) &= \lim_{z\to\pi}\left[(z-\pi)f(z)\right] \\ &= \lim_{z\to\pi}\frac{(z-\pi)\cos(z)}{z^2(e^{iz}+1)} \\ &= -\frac{1}{\pi^2};\end{aligned}$$

Assim,

$$\mathcal{I} = 2\pi i\left(-\frac{i}{4} - \frac{1}{\pi^2}\right) = \frac{\pi}{2} + \frac{2}{\pi}i$$

Muito Obrigado!!!

Previna-se da Covid-19.[3]

[3] Fica em casa, lave frequentemente as mãos.