ANÁLISE MATEMÁTICA III

Séries númericas, Séries de Funções e Séries de Fourier

Licenciatura em Engenharias

Universidade Eduardo Mondlane
Faculdade de Ciências
Departamento de Matemática e Informática

*** 29 de Maio de 2022 ***

Conteúdo

Definição

Seja $f(x)$ uma função indefinidamente derivável num ponto $a \in \mathbb{R}$. Chama-se **Série de Taylor** de f no ponto a à série de potências

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

ou seja

$$f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \cdots$$

Observação

No caso particular de $a = 0$, obtemos a série

$$f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

que se designa por **Série de MacLaurin** de f.

Exemplo

Desenvolver a função e^x em potências de x.

Resolução:

Vamos achar desenvolvimento de $f(x) = e^x$ no ponto $x = 0$

$$f(x) = e^x, f'(x) = e^x, f''(x) = e^x, f'''(x) = e^x, \ldots, f^{(n)}(x) = e^x$$

substituindo o ponto $x = 0$ temos

$$f(0) = 1, f'(0) = 1, f''(0) = 1, f'''(0) = 1, \ldots, f^{(n)}(0) = 1$$

portanto

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

Exemplo

Desenvolver a função $\cos x$ em potências de x.

Resolução:

Vamos achar desenvolvimento de $f(x) = \cos x$ no ponto $x = 0$

$$f(x) = \cos x, f'(x) = -\sin x, f''(x) = -\cos x, f'''(x) = \sin x, f^{(4)}(x) = \cos x, \ldots$$

substituindo o ponto $x = 0$ temos:

$$f(0) = 1, f'(0) = 0, f''(x) = -1, f'''(x) = 0, f^{(4)}(x) = 1, \ldots, f^{(n)}(0) = (-1)^n$$

$$f(x) = \cos(x) = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n}$$

Desenvolvimentos notáveis

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad x \in \mathbb{R};$$

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}, \quad x \in \mathbb{R};$$

$$\mathrm{sh}(x) = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad x \in \mathbb{R};$$

$$\mathrm{ch}(x) = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}, \quad x \in \mathbb{R};$$

$$\ln(x+1) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n, \quad |x| < 1;$$

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n, \quad |x| < 1;$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} x^n, \quad |x| < 1;$$

$$\frac{1}{(1-x)^2} = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) x^n, \quad |x| < 1;$$

$$\frac{1}{(1+x)^2} = -1 + 2x - 3x^2 + 4x^3 - \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} (n+1) x^n, \quad |x| < 1;$$

Séries de Fourier

- Na aula passada estudamos séries de Taylor para representar funções como séries de potências. Sob certas condições, escrevemos $f(x)$ como

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n,$$

onde $c_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}$;

- Nosso objectivo nesta aula será representar uma função períodica como série de **senos** e **cossenos**.

Funções Periódicas

- Uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, é **periódica** de período T se existe $T \in \mathbb{R}^+$, tal que

$$f(x+T) = f(x), \ \forall x \in \mathbb{R}.$$

- O menor valor de T de uma função periódica é chamado de **período fundamental** de f;
- O gráfico de uma função periódica é obtido pela repetição periódica de seu gráfico num intervalo qualquer de comprimento T;
- se $f(x)$ e $g(x)$ têm período T, então $c_1 f(x) + c_2 g(x)$ com quaisquer constantes c_1 e c_2 também tem o período T.

Exemplo

$f(x) = \cos x$ *é* 2π *periódica;* $g(x) = \cos(nx)$ *é* $\dfrac{2\pi}{n}$ *periódica;* "$T_k = \dfrac{2\pi}{k}, k \in \mathbb{N}$"

Propriedades das funções pares e ímpares

- O produto de duas funções pares é uma função par;
- O produto de duas funções ímpares é uma função par;
- O produto de uma função ímpar por uma função par é uma função ímpar;
- Se f é par, então $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_{0}^{a} f(x)dx$;
- Se f é ímpar, então $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$;

Relações Importantes

Para todo $n, k \in \mathbb{N}$, temos:

- $$\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx = \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx = 0;$$
- $$\int_{-\pi}^{\pi} \sin(nx)\cos(kx)dx = 0;$$
- $$\int_{-\pi}^{\pi} \sin(nx)\sin(kx)dx = \begin{cases} 0, & \text{se } n \neq k \\ \pi, & \text{se } n = k \end{cases};$$
- $$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx)\cos(kx)dx = \begin{cases} 0, & \text{se } n \neq k \\ \pi, & \text{se } n = k \end{cases};$$

Definição

Seja $f(x)$ uma função 2π periódica, tal que f e f' são contínuas por partes no intervalo $]-\pi,\pi[$. Então $f(x)$ pode ser representada em **Série de Fourier**:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nx), \tag{1}$$

com os coeficientes

- $a_0 = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx;$
- $a_n = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx;$
- $b_n = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx dx;$

que converge para f onde f for contínua e para $\dfrac{f(x^+)+f(x^-)}{2}$ onde for descontínua.

Determinação do Coeficiente a_0

Supondo que podemos integrar termo a termo a equação (1):

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \frac{a_0}{2}\int_{-\pi}^{\pi} dx + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx dx + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx dx$$
$$= a_0\pi.$$

Portanto,

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx;$$

Determinação do Coeficiente a_n

Supondo que podemos integrar termo a termo e multiplicando ambos membros de (1) por de por $\cos kx$:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx dx = \frac{a_0}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\cos kx dx + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx\cos kx dx + b_n\int_{-\pi}^{\pi}\sin nx\cos kx dx\right)$$
$$= a_n\pi$$

Portanto,

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx.$$

Analogamente determina-se o b_n.

Exemplo

Obtenha o desenvolvimento de $f(x) = \begin{cases} 0, & \textit{se } -\pi \leq x < 0 \\ \pi, & \textit{se } 0 \leq x < \pi \end{cases}$ *em série de Fourier*

Resolução:

$$
\begin{aligned}
a_0 &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0} 0dx + \int_{0}^{\pi} \pi dx\right) \\
&= \pi; \\
a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nxdx = \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0} 0\cos nxdx + \int_{0}^{\pi} \pi\cos nxdx\right) \\
&= \left.\frac{\sin nx}{n}\right|_{0}^{\pi} \\
&= 0.
\end{aligned}
$$

Continuação da resolução:

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx dx = \frac{1}{\pi}\left(\int\limits_{-\pi}^{0} 0\sin nx dx + \int\limits_{0}^{\pi} \pi \sin nx dx\right)$$
$$= -\frac{\cos nx}{n}\Big|_0^{\pi} = \frac{1-\cos n\pi}{n}$$

sendo

$$\cos n\pi = \begin{cases} 1, & \text{se } n \text{ par} \\ -1, & \text{se } n \text{ ímpar} \end{cases}$$

então

$$b_n = \begin{cases} 0, & \text{se } n \text{ par} \\ \frac{2}{n}, & \text{se } n \text{ ímpar} \end{cases}$$

Assim,

$$f(x) = \frac{\pi}{2} + 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin[(2n-1)x]}{2n-1}$$
$$= \frac{\pi}{2} + \frac{2}{1}\sin x + \frac{2}{3}\sin 3x + \frac{2}{5}\sin 5x + \cdots$$

Exemplo

Calcule $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}$

Resolução: Considerando a série obtida em no exemplo anterior, em $x = \pi/2$, temos:

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2} + 2\left(\frac{1}{1}\sin\frac{\pi}{2} + \frac{1}{3}\sin\frac{3\pi}{2} + \frac{1}{5}\sin\frac{5\pi}{2} + \cdots\right) = \pi$$

$$\pi = 2\left(\frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \cdots\right) + \frac{\pi}{2}.$$

Portanto,

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} &= \frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \cdots \\ &= \frac{\pi}{4}\end{aligned}$$

Séries de Fourier de *Cossenos* (desenvolvimento par)

A série de Fourier de uma função par de período 2π é uma **série de Fourier de cossenos**

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$$

com os coeficientes

- $a_0 = \frac{2}{\pi} \int\limits_0^{\pi} f(x)dx;$
- $a_n = \frac{2}{\pi} \int\limits_0^{\pi} f(x)\cos(nx)dx;$

Séries de Fourier de *Senos* (desenvolvimento ímpar)

A série de Fourier de uma função ímpar de período 2π é uma **série de Fourier de senos**

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nx)$$

com

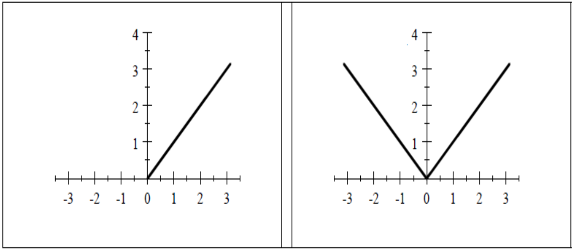
$$b_n = \frac{2}{\pi} \int\limits_0^{\pi} f(x)\sin(nx)dx$$

Exemplo

Seja $f(x) = x, 0 \leq x \leq \pi$. Como escrever $f(x)$ como uma série que tenha apenas cossenos?

Resolução:

- Se f for uma função par, podemos escrevê-la como uma soma de cossenos.
- A função está definida apenas no intervalo $[0, \pi]$, temos que estendê-la ao intervalo $[-\pi, 0]$ de maneira que ela seja par;



Função $f(x)$ original — $f_1(x)$ é sua extensão par...

Continuação da resolução

- Agora estendê-la ao resto da recta de maneira que ela seja 2π periódica. Assim,

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} xdx = \frac{2}{\pi}\cdot\frac{\pi^2}{2} = \pi.$$

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos nx dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\cos nx dx \\
&= \frac{2}{\pi}\left(\frac{x\sin nx}{n}\Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi}\frac{\sin nx}{n}dx\right) \\
&= \frac{2}{\pi}\frac{\cos nx}{n^2}\Big|_0^{\pi} \\
&= \frac{2(\cos n\pi - 1)}{\pi n^2} = \begin{cases} 0, & \text{se } n \text{ par} \\ -\frac{4}{\pi n^2}, & \text{se } n \text{ ímpar} \end{cases}
\end{aligned}$$

Portanto,

$$f(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos[(2n-1)x]}{(2n-1)^2}.$$

Definição

Seja $f(x)$ uma função $2l$ periódica tal que f e f' são contínuas por partes no intervalo $]-l, l[$. Então $f(x)$ pode ser representada em Série de Fourier:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right), \tag{2}$$

sendo

- $a_0 = \dfrac{1}{l} \displaystyle\int_{-l}^{l} f(x)dx;$
- $a_n = \dfrac{1}{l} \displaystyle\int_{-l}^{l} f(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right) dx;$
- $b_n = \dfrac{1}{l} \displaystyle\int_{-l}^{l} f(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) dx.$

Exemplo

Expanda $f(x) = x, \ -2 < x < 2$ *em série de Fourier*

Resolução: A função dada é ímpar no intervalo $]-2,2[$, portanto, o desenvolvimento de f será em série de senos;

$$b_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)dx = \frac{2}{2}\int_0^2 x\sin\left(\frac{n\pi x}{2}\right)dx$$

$$= -\frac{2}{n\pi}x\cos\left(\frac{n\pi x}{2}\right)\Big|_0^2 + \frac{2}{n\pi}\int_0^2 \cos\left(\frac{n\pi x}{2}\right)dx$$

$$= \frac{4(-1)^{n+1}}{n\pi}.$$

Portanto,

$$f(x) = \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin\left(\frac{n\pi x}{2}\right).$$

Definição

Suponhamos que f seja uma função $2l$ periódica, definida num intervalo não simétrico $]a, a+2l[,\ a \in \mathbb{R}$. Se f for uma função que pode ser representada em Séries de Fourier, então

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right), \tag{3}$$

sendo

- $a_0 = \dfrac{1}{l} \displaystyle\int_a^{a+2l} f(x)dx;$
- $a_n = \dfrac{1}{l} \displaystyle\int_a^{a+2l} f(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right) dx;$
- $b_n = \dfrac{1}{l} \displaystyle\int_a^{a+2l} f(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) dx;$

Muito Obrigado!!!

Previna-se da Covid-19.[1]

[1] Fica em casa, lave frequentemente as mãos.