MANUAL DA DISCIPLINA DE

MÉTODOS NUMÉRICOS

Maputo, Julho de 2015

CAPÍTULO 1 – CÁLCULO COM NUMÉROS APROXIMADOS

1.1 NOÇÃO DE ERRO

Nenhum resultado obtido através de cálculos eletrónicos ou métodos numéricos tem valor se não tivermos conhecimento e controle sobre os possíveis erros envolvidos no processo.

A análise dos resultados obtidos através de um método numérico representa uma etapa fundamental no processo das soluções numéricas.

FONTES DE ERROS

Dado um problema, para se chegar a um resultado numérico é necessário realizar uma sequência pré-estabelecida de passos. Em cada um destes passos pode existir uma parcela de erro que se acumula ao montante do processo.

Estes erros surgem basicamente de duas formas: aqueles inerentes `a formulação matemática do problema (relacionados `a aproximação da situação física e a erros nos dados) e aqueles que aparecem no processo de solução numérica (erros de truncamento e de arredondamento).

Os erros de truncamento surgem, em geral, pela substituição de um processo infinito (de somas ou integrais) ou infinitesimal por outro finito.

Erros também podem surgir pelo facto que as operações aritméticas quase nunca podem ser efectuadas com precisão completa; estes são denominados de erros de arredondamento. A maioria dos números tem representações decimais infinitas que devem ser arredondadas. Mesmo se os dados de um problema podem ser expressos exactamente por representações decimais finitas, a divisão pode introduzir números que devem ser arredondados e a multiplicação pode produzir mais dígitos do que podem ser razoavelmente mantidos.

Os tipos de arredondamento mais utilizados são:

- tipo corte: as casas em excesso são simplesmente abandonadas;
- para o número de máquina mais próximo: se a máquina trabalha com *d* algarismos significativos para a mantissa de um número, então analisa-se o algarismo de ordem *d+1*. Se este for maior ou igual a 5, soma-se uma unidade ao algarismo de ordem *d*; caso contrário, o algarismo de ordem *d* permanece inalterado.

1.2 ERROS ABSOLUTOS E RELATIVOS

ERRO ABSOLUTO

A diferença entre um valor exacto x e sua aproximação $\bar{x}$ é dito **erro absoluto** o qual se denota por Δx ou ε_x, isto é: $\Delta x = \left| x - \bar{x} \right|$

Na prática, o valor exato é quase sempre não conhecido. Como o erro é definido por $\Delta x = \left| x - \bar{x} \right|$ consequentemente também será não conhecido.

Uma solução para este problema é ao invés de determinar o erro, determinar uma cota para o erro. Isso permitirá que, mesmo não conhecendo o erro, saber que ele está entre dois valores conhecidos.

Dizemos que um número $\varepsilon > 0$ é uma cota para o erro ε_x se $\left|\varepsilon_x\right| < \varepsilon$

$$|e_x| < \epsilon \iff |x - \tilde{x}| < \epsilon \iff \tilde{x} - \epsilon < x < \tilde{x} + \epsilon$$

Assim, mesmo não conhecendo o valor exacto, podemos afirmar que ele esta entre $\bar{x} - \varepsilon$ e $\bar{x} + \varepsilon$ que são valores conhecidos.

É evidente que uma cota ε só tem algum valor prático se for maior que zero.

ERRO RELATIVO

Erro relativo é determinado pela divisão do erro absoluto de um número pelo seu valor aproximado:

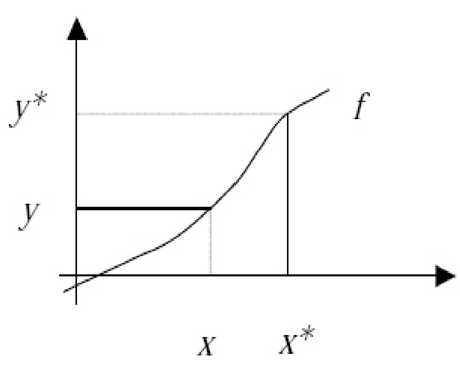
$$R_x = \frac{\left| x - \bar{x} \right|}{\left| \bar{x} \right|}$$

1.3 COMPARAÇÃO DE EXACTIDÃO

Diz-se que a aproximação efectuada em relação a x é mais exacta que a de y se e somente se $R_x < R_y$

1.4 PROPAGAÇÃO DE ERROS

Sabendo que $\bar{x}$ é um valor aproximado de x. Como determinar $y = f(x)$? Será que $\bar{y} = f(\bar{x})$ é uma boa aproximação?



$$\Delta y = y - \bar{y} = f(x) - f(\bar{x}) = f(\bar{x} + \Delta x) - f(\bar{x})$$

Com base nesta premissa, pode-se constatar que o Majorante do erro absoluto da aproximação $\bar{y}$ de y é:

$$\Delta y \leq \left| f_x' \right|_{\max} * \Delta x$$

Aplicando o resultado acima, para funções de várias variáveis, obteremos a fórmula abaixo que se designa por Fórmula Fundamental de Cálculo de Erros:

$$\Delta f \leq \left| f_{x_1}' \right| * \Delta x_1 + \left| f_{x_2}' \right| * \Delta x_2 + \ldots + \left| f_{x_n}' \right| * \Delta x_n$$

1.4 EXERCICIOS

1. Use a técnica de truncamento para aproximar π com quatro casas decimais, sabendo que: $\pi = 3{,}1415926535...$

3. Que valor é mais exato quando se usam:
    - 3,14 Aproximado de π
    - 2,718 Aproximado de e

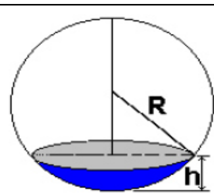
4. Determine a área e o erro absoluto de um jardim trapezial, dado que: $a = 5 \pm 0{,}01$; $b = 15 \pm 0{,}02$ e $h = 4 \pm 0{,}01$

5. Considerando a relação $t = \dfrac{\cos(x)}{y} + e^{-yz}$, com os seguintes dados:

$$x = 1.3 \pm 0.1$$
$$y = 0.25 \pm 4\%$$
$$z = 1.7 \pm 3 * 10^{-1}$$

Determine o valor aproximado de *t* e o majorante do erro absoluto.

6. O volume v de um líquido num tanque esférico de raio r está relacionado com a profundidade h do líquido da seguinte forma:

	$v = \dfrac{\pi h^2(3r - h)}{3}$.

Calcule o volume do líquido e o erro absoluto para um tanque com profundidade $h = 0.5$ e raio $r = 1$ sabendo que nas extração dos dados cometeu-se um erro de 10^{-2} para cada um dos dados.

7. Uma corrente eléctrica atravessa uma resistência R de 20Ω. A resistência foi medida com um erro relativo que não excede 0.01. A intensidade da corrente I é de $3 \pm 10\%$ A. Sabendo que a tensão da corrente é dada por V = R*I, determine o valor aproximado da tensão da corrente e o limite superior do erro absoluto.

CAPÍTULO 2 – INTERPOLAÇÃO E APROXIMAÇÃO POLINOMIAL

2.1 INTRODUÇÃO

Interpolação é o processo de estimar valores de uma função f para valores de x diferentes de x_i, para $i = 0,...,n$, sabendo-se apenas os valores de $f(x)$ nos pontos $x_0, x_1,..., x_n$. A interpolação ajuda-nos a responder problemas do tipo:

Qual é o valor de $f(x_i)$ para $x_1 < x_i < x_2$, dado que:

x	x_0	x_1	x_2	.....	x_n
$f(x)$	$f(x_0)$	$f(x_1)$	$f(x_2)$	......	$f(x_n)$

- Interpolar uma função f(x) consiste em aproximar essa função por uma outra função g(x).
- g(x) é escolhida entre uma classe de funções definidas a priori e que satisfaçam algumas propriedades.
- A função g(x) é então usada em substituição à função f(x).

A necessidade de se efectuar esta substituição surge em várias situações, como por exemplo:

- Quando são conhecidos somente valores numéricos da função por um conjunto de pontos (não dispondo da sua forma analítica) e é necessário calcular o valor da função em um ponto não tabelado (exemplo anterior);
- Quando a função em estudo tem uma expressão tal que operações como a diferenciação e a integração são difíceis ou impossíveis de serem realizadas. Neste caso, podemos então procurar uma outra função que seja aproximada a função dada e cujo o manuseio seja mais bem simples.

As funções que substituem as funções dadas podem ser de tipos variados, tais como polinomiais, trigonométricas, exponenciais e logarítmicas. Neste capítulo, será considerado apenas o estudo das funções polinomiais.

2.2 DEFINIÇÃO DO POLINÓMIO INTERPOLADOR

A interpolação polinomial é de grande interesse do ponto de vista teórico e prático em áreas como teoria da aproximação, equações não lineares, integração e derivação numéricas e solução numérica de equações diferenciais e integrais.

Dada uma função $f(x)$ conhecida em n pontos $(x_i, f(x_i))$, $i = 0,...,n$, o objectivo da interpolação polinomial consiste em determinar o polinómio de grau $\leq n$,

$$p_n(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ... + a_n x^n \,,$$

Que coincide com $f(x)$ naqueles pontos, isto é, $p_n(x) = f(x_i) = f_i \quad , \forall i = 0,...,n$

Exemplo:

Determinar o polinómio interpolador que aproxima $f(x)$ dada na tabela seguinte:

x	-1	0	1
$f(x)$	2	3	2

Neste caso, procuramos o polinómio $p_n(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$ que satisfaz a igualdade $p_n(x) = f(x_i) = f_i$, para $i = 0,1,2$. Ora:

$$\begin{cases} p_2(x_0) = f(x_0) \\ p_2(x_1) = f(x_1) \\ p_2(x_2) = f(x_2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_0 + a_1 x_0 + a_2 x_0^2 = f(x_0) \\ a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_1^2 = f(x_1) \\ a_0 + a_1 x_2 + a_2 x_2^2 = f(x_2) \end{cases} ,$$

ou seja,

$$\begin{cases} a_0 - a_1 + a_2 = 2 \\ a_0 = 3 \\ a_0 + a_1 + a_2 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_2 = -1 \\ a_0 = 3 \\ a_1 = 0 \end{cases} .$$

Consequentemente, o nosso polinómio interpolador é $p_2(x) = 3 - x^2$

2.3 INTERPOLAÇÃO POLINOMIAL DE LAGRANGE

Seja dada a função $f(x)$ abaixo:

x	x_0	x_1	x_2	.....	x_n
$f(x)$	$f(x_0)$	$f(x_1)$	$f(x_2)$	......	$f(x_n)$

Consideremos o seguinte:

$$L_i(x) = \prod_{j=0, j\neq i}^{n} \frac{(x - x_j)}{(x_i - x_j)} = \frac{(x - x_0)\cdots(x - x_{i-1})(x - x_{i+1})\cdots(x - x_n)}{(x_i - x_0)\cdots(x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1})\cdots(x_i - x_n)}.$$

Onde:

$$L_i(x) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & j = i \\ 0, & j \neq i \end{cases}$$

Então, o polinómio obtido através da aplicação de:

$$p_n(x) = \sum_{i=0}^{n} L_i(x) f_i$$

Chama-se *Polinómio de Lagrange* e a interpolação recorrendo a este polinómio, chama-se ***interpolação polinomial de Lagrange.***

Exemplo:

Dada a tabela da função $f(x)$:

x	1	2	4
$f(x)$	1	1.41	2

Obtenha o polinómio interpolador de Lagrange e o seu valor em $x = 3$.

Passo 1: Procuramos $p_2(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$, tal que:

$$p_2(x) = \sum_{i=0}^{2} L_i(x) f_i$$

Passo 2: Determinar os polinómios

$$L_0(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} = \frac{(x-2)(x-4)}{(1-2)(1-4)}$$
$$= \frac{1}{3}(x-2)(x-4) = \frac{8}{3} - 2x + \frac{1}{3}x^2,$$

$$L_1(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} = \frac{(x-1)(x-4)}{(2-1)(2-4)}$$
$$= -\frac{1}{2}(x-1)(x-4) = -2 + \frac{5}{2}x - \frac{1}{2}x^2$$

$$L_2(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} = \frac{(x-1)(x-2)}{(4-1)(4-2)}$$
$$= \frac{1}{6}(x-1)(x-2) = \frac{1}{3} - \frac{1}{2}x + \frac{1}{6}x^2.$$

Passo 3: Aplicar a fórmula:

$$\begin{aligned} p_2(x) &= L_0(x) f_0 + L_1(x) f_1 + L_2(x) f_2 \\ &= \frac{1}{3}(x-2)(x-4) \times 1 - \frac{1}{2}(x-1)(x-4) \times 1.41 \\ &+ \frac{1}{6}(x-1)(x-2) \times 2 \\ &= \frac{1.54}{3} + \frac{1.05}{2}x - \frac{0.23}{6}x^2. \end{aligned}$$

O valor do polinómio no ponto $x = 3$ é:

$$p_2(3) = \frac{1.54}{3} + \frac{1.05}{2} \times 3 - \frac{0.23}{6} \times 3^2 = 1.7433.$$

2.4 INTERPOLAÇÃO DE NEWTON

2.4.1 INTERPOLAÇÃO DE NEWTON COM DIFERENÇAS DIVIDIDAS

De acordo com o teorema da unicidade do polinómio interpolador, toda interpolação de *n* pontos por um polinómio de grau *n-1* é única e pode ser obtida pelo método de Lagrange. No entanto, existem outras maneiras de construir o polinómio *p(x)* que podem ser mais convenientes. Uma dessas maneiras é a interpolação de Newton, que permite a inserção de pontos adicionais de maneira simples e menos susceptível à deterioração por erros de arredondamento. O método consiste em determinar o seguinte polinómio:

$$p(x) = a_0 + a_1(x - x_1) + a_2(x - x_1)(x - x_2) + \ldots + a_{n-1}(x - x_1)\ldots(x - x_{n-1}).$$

Por construção, o valor de *p* calculado em $x = x_0$ é

$p(x_0) = a_0$

Além disso, como *p(x)* é o polinómio interpolador, $p(x_0) = f_0$, portanto,

$a_0 = f(x_0)$

Da mesma forma,

$$f(x) = f(x_0) + (x - x_0)\, f[x_0, x]$$

ou seja,

$$f[x, x_0] = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

e assim por diante, os coeficientes são determinados recursivamente e o k-ésimo coeficiente é determinado em função dos pontos de interpolação e dos coeficientes anteriores pela expressão

$$a_k = \frac{f_{k+1} - a_0 - \sum_{j=1}^{k-1} a_j (x_{k+1} - x_1)\ldots(x_{k+1} - x_j)}{\prod_{j=1}^{k}(x_{k+1} - x_j)}.$$

A fórmula acima pode ser convenientemente descrita através da notação de diferenças divididas. Seja a função f[xk; xk+1; : : : ; xl+1] definida pela relação de recorrência

$$f[x_k, x_{k+1}, \dots, x_l, x_{l+1}] = \frac{f[x_{k+1}, x_{k+1}, \dots, x_{l+1}] - f[x_k, x_{k+1}, \dots, x_l]}{x_{l+1} - x_k}$$

e

$$f[x_k] = f_k \doteq f(x_k).$$

Assim, podemos verificar que

$$f[x_k, x_{k+1}] = \frac{f[x_{k+1}] - f[x_k]}{x_{k+1} - x_k}$$

e

$$f[x_k, x_{k+1}, x_{k+2}] = \frac{f[x_{k+1}, x_{k+2}] - f[x_k, x_{k+1}]}{x_{k+2} - x_k}.$$

Os coeficientes são calculados a partir da sequência de diferenças divididas calculadas recursivamente:

x	$f(x)$	$f[x_i, x_{i+1}]$	$f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}]$	$f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}, x_{i+3}]$	$\dots$
x_0	f_0				
		$f[x_0, x_1]$			
x_1	f_1		$f[x_0, x_1, x_2]$		
		$f[x_1, x_2]$		$f[x_0, x_1, x_2, x_3]$	$\dots$
x_2	f_2		$f[x_1, x_2, x_3]$	$\vdots$	
		$f[x_2, x_3]$	$\vdots$		
x_3	f_3	$\vdots$			
$\vdots$	$\vdots$				

Assim sendo, o polinómio passa a ser escrito da seguinte forma:

$$\begin{aligned} f(x) = {} & f(x_0) + (x - x_0)\, f[x_0, x_1] + (x - x_0)(x - x_1)\, f[x_0, x_1, x_2] \\ & + \cdots + (x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_{n-1})\, f[x_0, \dots, x_n] \\ & + (x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_n)\, f[x, x_0, \dots, x_n]. \end{aligned}$$

Exemplo:

Seja dada a seguinte função tabelada:

x	-1	0	2
f(x)	4	1	-1

Determine o polinómio interpolador de Newton recorrendo as diferenças divididas.

Resolução:

1. Construir a tabela de diferenças divididas

x	Ordem 0	Ordem 1	Ordem 2
-1	4		
		-3	
0	1		2/3
		-1	
2	-1		

2. Aplicar a fórmula de Newton

$$p_2(x) = f(x_0) + (x - x_0)f[x_0, x_1] + (x - x_0)(x - x_1)f[x_0, x_1, x_2].$$

$$p_2(x) = 4 + (x + 1)(-3) + (x + 1)(x - 0)(2/3)$$

$$p_2(x) = \frac{2}{3}x^2 - \frac{7}{3}x + 1$$

2.4.2 INTERPOLAÇÃO DE NEWTON COM DIFERENÇAS FINITAS

Designa-se diferença finita descendente de primeira ordem de $f(x)$, para $x = x_i$, à seguinte quantidade:

$$\triangle f(x_i) = \triangle f_i = f(x_{i+1}) - f(x_i)$$

De um modo geral, as diferenças descendentes de ordem k de $f(x)$, define-se por:

$$\triangle^k f_i = \triangle\left(\triangle^{k-1} f_i\right) = \triangle^{k-1} f_{i+1} - \triangle^{k-1} f_i$$

As mesmas podem ser representadas em tabela, da seguinte forma:

$$
\begin{array}{cccccc}
\hline\hline
x & f(x) & \triangle & \triangle^2 & \triangle^3 & \cdots \\
\hline\hline
x_0 & f(x_0) & & & & \\
 & & \triangle f_0 & & & \\
x_1 & f(x_1) & & \triangle^2 f_0 & & \\
 & & \triangle f_1 & & \triangle^3 f_0 & \cdots \\
x_2 & f(x_2) & & \triangle^2 f_1 & \vdots & \\
 & & \triangle f_2 & \vdots & & \\
x_3 & f(x_3) & \vdots & & & \\
\vdots & \vdots & & & &
\end{array}
$$

Quando os nós da interpolação x_0 , x_1 , x_2 ,..., xn são igualmente espaçados, pode-se usar uma relação de modo a simplificar o polinómio interpolador.

Tendo como base: $x = x_0 + q * h$, então

$$\theta = \frac{x - x_0}{h}$$

Onde:

$$x_0 = x_{ND} \text{ e } h = x_{i+1} - x_i$$

Surge a fórmula interpoladora de Gregory – Newton:

$$p_n(x) = f(x_{ND}) + \frac{(x - x_{ND})\Delta f_{ND}}{1!*h} + \frac{(x - x_{ND})(x - x_{ND+1})\Delta^2 f_{ND}}{2!*h^2} + \frac{(x - x_{ND})(x - x_{ND+1})(x - x_{ND+2})\Delta^3 f_{ND}}{3!*h^3} + \ldots$$

Onde x_{ND} é a marca da interpolação e é determinado escolhendo entre os x_i o máximo inferior a x .

Exemplo:

Dada a função tabelada:

x	1.34	1.44	1.54	1.64	1.74
$f(x)$	1.38	1.62	1.87	2.14	2.42

1. Construir a tabela de diferenças finitas

x	$f(x)$	Δf	$\Delta^2 f$	$\Delta^3 f$	$\Delta^4 f$
1.34	**1.38**				
		0.24			
1.44	**1.62**		**0.01**		
		0.25		**0.01**	
1.54	**1.87**		**0.02**		**-0.02**
		0.27		**-0.01**	
1.64	**2.14**		**0.01**		
		0.28			
1.74	**2.41**				

2. Determine f(1.5) recorrendo ao polinómio interpolador de Newton.

$$h = 0.1$$
$$x_{ND} = 1.44$$

$$f(1.5) \approx f(1.44) + \frac{(x-1.44)*(0.25)}{1!*0.1} + \frac{(x-1.44)(x-1.54)*(0.02)}{2!*(0.1)^2} + \frac{(x-1.44)(x-1.54)(x-1.64)*(-0.01)}{3!*(0.1)^3}$$

$$f(1.5) \approx 1.76704$$

$$R\%\ f(1.5) = 1.76704$$

2.6 EXERCICIOS

1. Considere a seguinte tabela de valores de uma função $f \in C(\Re)$:

x	0	1	2	3
$f(x)$	-3	-1	11	39

Determine o polinómio interpolador de f

2. Seja dada a função tabelada:

x	1	3	4
$f(x)$	5	12	-1

a) Determine o polinómio interpolador de Lagrange.
b) Determine $f(3.5)$

3. Use o polinómio interpolador de Lagrange para determinar $f(8.4)$ se $f(8.1) = 16.94410$, $f(8.3) = 17.56492$, $f(8.6) = 18.505115$ e $f(8.7) = 18.82091$

4. Determine o polinómio que interpola os seguintes valores:

x	$f(x)$
-1.0	1.0
0.0	2.0
1.0	3.0

5. Conhecem-se as coordenadas de cinco pontos de uma curva plana que representa uma região de uma peça em corte. Determine o polinómio de Lagrange de grau 4 que interpola a referida curva sabendo que os pontos de coordenadas conhecidas são: $P_1 = (1,2)$, $P_2 = (2,1)$, $P_3 = (3,1)$, $P_4 = (4;2,5)$ e $P_5 = (5;4)$

   Determine ainda valores aproximados para as ordenadas dos pontos cujas abcissas são 0, 2,5 e 6.

6. Considere a tabela de valores da função f definida por $f(x) = \lg x$, para x>0:

X	2,0	2,2	2,5	3,0
$Log_{10}(x)$	0,3010	0,3424	0,3979	0,4771

a) Construa a tabela de diferenças divididas.

b) Determine $\lg(2.05)$ utilizando o polinómio de Newton.

7. Sabendo que $sen(0) = 0$, $sen(\pi/4) = \sqrt{2}/2$ e $sen(\pi/2) = 1$, determine usando a formula de interpolação de Newton o valor de $sen(\pi/3)$.

8. São dados os seguintes pontos onde x é a variável independente e y é dependente

X	1.0	1.5	2.0	2.5	3.0
Y	66	52	18	11	10

Pede-se para determinar f(2.2) recorrendo a interpolação de newton com diferenças finitas.

9. Um paraquedista realizou cinco saltos, saltando de alturas distintas em cada salto, foi testada a precisão de seus saltos em relação a um determinado alvo de raio 5 m, de acordo com a altura. A distância apresentada na tabela abaixo é relativa à circunferência.

Altura (m)	1º salto de 1500	2º salto de 1250	3º salto de 1000	4º salto de 750	5º salto de 500
Distância do alvo (m)	35	25	15	10	7

Levando em consideração os dados acima, a que provável distancia cairia o paraquedista se ele saltasse de uma altura de 850 m?

CAPÍTULO 3 - DERIVAÇÃO E INTEGRAÇÃO NUMÉRICA

3.1 DERIVAÇÃO NUMÉRICA

Derivar é geralmente mais fácil que integrar. A ideia deste método de aproximação é bastante simples, pois baseia-se em expansões em séries de Taylor.

Considere a definição de derivada de uma função $f(x)$ no ponto x:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Esta expressão é uma aproximação para o valor exacto de $f'(x)$ se h tende a zero. Para qualquer valor finito de h, um erro de truncamento é introduzido. A ordem da aproximação a diferenças pode ser obtida através de um desenvolvimento em série de Taylor de $f(x+h)$, por exemplo, em torno do ponto x. Desenvolvendo $f(x+h)$, obtém-se:

$$f(x+h) = f(x) + h\, f'(x) + \frac{h^2}{2}\, f''(x) + \ldots$$

e, portanto,

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = f'(x) + \frac{h}{2}\, f''(x) + \ldots .$$

Diz-se que a aproximação $f'(x)$ é de primeira ordem em h e escreve-se:

$f'(x) = \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h} + O(h).$	Fórmula da derivada com diferença ascendente ou avanço.

Aproximações de primeira ordem em diferenças finitas podem ser obtidas para $f'(x)_i$, conforme:

$$f'_i = \frac{f_{i+1} - f_i}{h} + O(h)$$

De igual modo, recorrendo à série de Taylor tendo como base a diferença em atraso ou descendente, temos:

$$f(x-h) = f(x) - hf'(x) + \frac{h^2}{2} f''(x) - \frac{h^3}{6} f''´(x).....$$

Resolvendo a expresão acima em ordem de $f´(x)$, obtêm-se:

$f'(x) = \frac{f(x) - f(x-h)}{h} + O(h)$	Fórmula da derivada com diferença descendente ou atraso

Fórmulas com diferentes ordens de aproximação podem ser obtidas. A mais importante é a de segunda ordem ou centrada. Por expansões em série de Taylor em torno do ponto x resultam:

$$f_i' = \frac{f_{i+1} - f_{i-1}}{2h} + O(h^2)$$

Empregando o mesmo princípio, para as derivadas de ordem superior resulta:

$$f_i^{(2)} = \frac{f_{i+1} - 2\,f_i + f_{i-1}}{h^2} + O(h^2),$$

$$f_i^{(3)} = \frac{f_{i+2} - 2\,f_{i+1} + 2\,f_{i-1} - f_{i-2}}{2\,h^3} + O(h^2),$$

$$f_i^{(4)} = \frac{f_{i+2} - 4\,f_{i+1} + 6\,f_i - 4\,f_{i-1} + f_{i-2}}{h^4} + O(h^2),$$

Exemplo:

Seja dada a função tabelada abaixo:

x	$1,3$	$1,4$	$1,5$
$f(x)$	$1,700$	$1,869$	$2,037$

Determine $f'(1.4)$.

Resolução:

$$f'(1,4) = \frac{f(1,5) - f(1,3)}{2\,0,1} = 1,685$$

3.2 INTEGRAÇÃO NUMÉRICA

Seja f uma função contínua no intervalo $[a;b]$ da qual se conhece uma primitiva F. Então o valor da integral definida de f pode ser calculada utilizando a fórmula de Newton-Leibnitz.

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

Em muitos casos a determinação de uma primitiva de f é muito difícil ou às vezes até impossível. Além disso, nos problemas práticos, quase sempre conhece-se apenas uma tabela da função f e para estes casos a ideia de primitiva carece de significado. Para esses casos os métodos de integração numérica são as ferramentas adequadas para determinar aproximações para os valores das integrais definidas.

Os métodos de integração numérica como veremos a seguir consistem em determinar o valor de uma integral definida utilizando uma sequência de valores da função f.

3.2.1 MÉTODO DE TRAPEZIO

Seja dado o seguinte integral $I = \int_a^b f(x)dx$. A determinação da solução de I através do Método de Trapézio segue os seguintes passos:

Passo 1: Escolher *N* e determinar $h = \frac{b-a}{N}$

Passo 2: Construir tabela através da determinação de x_i e $f(x_i)$:

$x_i = a + i * h$

$x_0 = a$

x_i	x_0	x_1	…………..	x_n
$f(x_i)$	$f(x_0)$	$f(x_1)$		$f(x_n)$

Passo 3: Determinação da solução aproximada através da fórmula:

$$I = \int_a^b f(x)dx = \frac{h}{2}\left[f(x_0) + f(x_n) + 2*(f(x_1) + f(x_2) + ... + f(x_{n-1}))\right]$$

Passso 4 : Resposta

3.2.2 MÉTODO DE SIMPSON

Pressupostos:

- N têm de ser um número par;
- Quanto maior for o N melhor será a precisão da aproximação;

Seja dado o seguinte integral $I = \int_a^b f(x)dx$. A determinação da solução de I através do Método de Simpson segue os seguintes passos:

Passo 1: Escolher *N* e determinar $h = \frac{b-a}{N}$

Passo 2: Construir tabela através da determinação de x_i e $f(x_i)$:

$x_i = a + i * h$

$x_0 = a$

x_i	x_0	x_1	…………..	x_{2n}
$f(x_i)$	$f(x_0)$	$f(x_1)$		$f(x_n)$

Nota:

x_{2n} - Significa último valor, isto é, trata-se de x_n. A inclusão de *2n* é para garantir que o *n* seja um número par.

Passo 3: Determinação da solução aproximada através da fórmula:

$$I = \int_a^b f(x)dx = \frac{h}{3}\left[f(x_0) + f(x_{2n}) + 4(f(x_1) + f(x_3) + ... + f(x_{2n-1})) + 2(f(x_2) + f(x_4) + ... + f(x_{2n}))\right]$$

Passso 4 : Resposta

Exemplo:

Determine o integral $I = \int_1^{1.6} \frac{senx}{x} dx$ considerando $N = 6$

Resolução:

Passo 1: $N = 6$ e $h = \frac{1.6-1}{6} = 0.1$

Passo 2: Tabela

X	1	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5	1.6
F(x)	0.84147	0.81019	0.77670	0.74120	0.70389	0.66500	0.62473

Passo 3:

$$I = \int_a^b \frac{senx}{x} dx = \frac{0.1}{3}\left[0.84147 + 0.62473 + 4(0.81019 + 0.74120 + 0.66500) + 2(0.77670 + 0.70389)\right] = 0.44310$$

3.3 EXERCICIOS

1. Calcule aproximação da segunda derivada de $f(x) = \cos 2x$ em x = 0.7, com $h = 0.1$

2. Considere a seguinte tabela de dados:

x	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0
f(x)	2,415	2,637	2,907	3,193	3,381

Determine $f'(0.4)$, $f''(0.4)$ e $f'''(0.4)$.

3. Use a fórmula de Trapézios com $n = 2$ para calcular a integral $\int_0^2 (3x^3 - 3x + 1)dx$

Compare seu resultado com o resultado exacto.

4. Determine uma aproximação para $\frac{\pi}{4}$ considerando que $\frac{\pi}{4} = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$ e usando a fórmula do trapézio com $n = 10$.
5. Um corpo se desloca ao longo do eixo Ox sob ação de uma força variável *F*. Calcular o trabalho realizado para se deslocar o corpo de $x = 0$ até $x = 3.5$ sendo dado:

x	0.0	0.5	1.0	1.5	2.0	2.5	3.0	3.5
F	1.5	0.75	0.5	0.75	1.5	2.75	5.5	6.75

4. Calcule a integral abaixo por :

$$\int_1^4 \sqrt{x}\, dx$$

a) Regra dos Trapézios usando 4 subdivisões de [a,b] (6 casas decimais)

5. Considere $\int_0^1 senx dx$. Mostre que o resultado obtido pelo método de Simpson com h = 0.5 é próximo do resultado exato.

6. Utilizando o método de Simpson, calcule numericamente a integral definida

$$\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} e^{\cos^2 t}\, dt,$$

a partir dos dados da seguinte tabela:

t	$-\pi/3$	$-\pi/6$	0	$\pi/6$	$\pi/3$
$f(t)$	$e^{1/4}$	$e^{3/4}$	e	$e^{3/4}$	$e^{1/4}$

Onde e = 2.718282

7. Seja $f(x) = \int_0^x e^{\cos y} dy$

Use o método de 10-trapézio para calcular $f(5)$.

CAPÍTULO 4 - ZEROS DE FUNÇÕES

Dada uma função $f: R \to R$, diz-se que $a \in R$ é um zero da função f se $f(a) = 0$. Observe que determinar os zeros de uma função f é equivalente a determinar as raízes da equação $f(x) = 0$, ou seja determinar os valores de $x \in R$ que satisfazem $f(x) = 0$.

4.1 DELIMITAÇÃO DOS ZEROS DE UMA FUNÇÃO

Dada uma função $f: R \to R$, delimitar os zeros de f significa determinar intervalos $(a;b)$ que contenham os zeros de f. Existem dois métodos para resolver este problema, que são, Método Analítico e Gráfico.

4.1.1 MÉTODO ANALÍTICO

Este método é baseado no seguinte teorema:

Seja $f: R \to R$ uma função contínua. Se existem dois valores a e b que pertencem a R, tal que $f(a) * f(b) < 0$, então existe um c que pertence ao intervalo $(a;b)$: $f(c) = 0$.

O Teorema acima assegura que f troca de sinal em $(a;b)$, o que significa que existe pelo menos um zero de f nesse intervalo.

Exemplo:

Seja dada a seguinte função $f(x) = x^3 - x$ em R. Delimite os zeros de f.

1. Vamos escolher de forma aleatória dois números que pertençam ao conjunto R
   $a = -2$ e $b = 2$

2. Verificar se o teorema é satisfeito nos pontos escolhidos através da seguinte condição: $f(a) * f(b) < 0$

   $f(-2) = (-2)^3 - (-2) = -6$ e $f(2) = (2)^3 - (2) = 6$

   Fazendo $f(-2) * f(2) = -36 < 0$. Assim sendo, f têm pelo menos um zero no intervalo $(-2;2)$

4.1.2 MÉTODO GRÁFICO

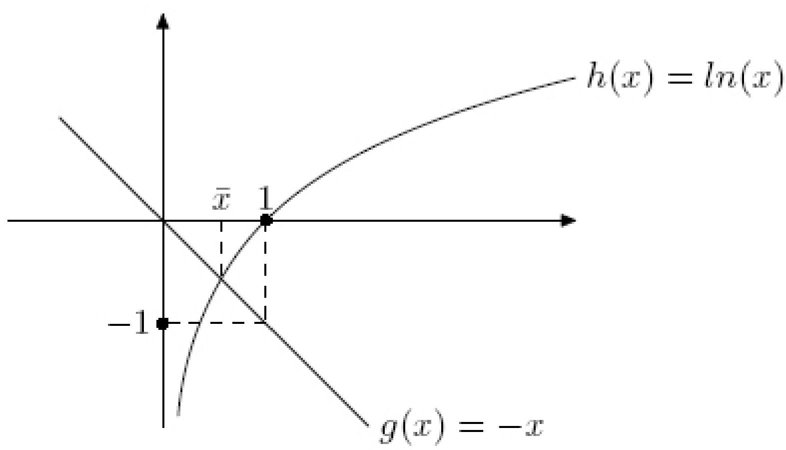
Tendo como base a definição de delimitação de zeros, para encontrar os intervalos que contém os zeros da função, o método gráfico sugere o seguinte:

- Transformar f numa igualdade de duas funções $g(x) = h(x)$ que sem muito esforço se possam esboçar os seus gráficos;
- Esboçar da melhor maneira possível os gráfico de g e h e determinar por inspecção os intervalos onde estão os pontos de intersecção de g e h.

Exemplo:

Delimitar os zeros de $f(x) = x + \ln x$

- $f(x) = 0 \Leftrightarrow x + \ln x = 0 \Leftrightarrow \ln x = -x$
- Vamos esboçar os gráficos



- Pode-se notar que $x \in (0;1)$

4.2 MÉTODO DE BISSECÇÃO

Seja dada a seguinte função contínua $f : R \rightarrow R$. Vamos supor que existe um intervalo $(a_0;b_0)$ onde $f(a_0)*f(b_0)<0$. Pelo teorema visto no ponto 3.1, f contém pelo menos um zero em $(a_0;b_0)$.

Para determinar o zero aproximado de f, pode-se utilizar o método de bissecção que consiste em determinar uma sequência de intervalos $(a_k;b_k)$ que satisfaçam a condição $f(a_k)*f(b_k)<0$, onde tomará os seguintes valores $k=0,1,2,3,4.......,N$. Esta determinação de intervalos é feita recorrendo a tabela abaixo:

k	a_k	b_k	$c_k = \frac{a_k + b_k}{c_k}$	$f(a_k)*f(c_k)$	$\varepsilon = \left\lvert \frac{b_k - a_k}{2} \right\rvert$

Exemplo:

Determinar a solução aproximada da seguinte função $f(x)=x^2-5$ no intervalo $[2;3]$ com erro igual a $\varepsilon = 0.1$

4.3 MÉTODO ITERATIVO GERAL

Seja dada uma função f e um intervalo que contém o zero da função $[a;b]$. Pretende-se determinar a solução aproximada da função com erro inferior a ε recorrendo ao Método Iterativo Geral.

De forma resumida, o método iterativo geral pode ser descrito como a sequência dos seguintes passos:

Passo 1: Transformar f numa igualdade do tipo $x=\varphi(x)$:

Passo 2: Verificar a convergência de $\varphi(x)$ recorrendo ao critério de convergência $|\varphi'(x)| \leq M < 1$

Passo 3: Determinar $x_0 \quad e \quad FC$

Nota: Se x_0 não for indicado, então, atribui-se o valor de a.

Fórmula concreta (FC): $x_{m+1} = \varphi(x_m)$

Passo 4: Tabela

m	x_m	x_{m+1}	$\varepsilon = \mid x_{m+1} - x_m \mid$

Passo 5: R: $x = \bar{x} \pm \bar{\varepsilon}$

Exemplo:

Determine pelo método iterativo geral, com erro inferior a 0.1, o zero aproximado da função $f(x) = 1 + x + e^x$ no intervalo $[-2;-1]$.

Resolução:

1. Transformar f em $x = \varphi(x)$:

$$x = -e^x - 1$$

2. Verificar a convergência de $\varphi(x)$

$$|\varphi'(x)| \leq M < 1$$
$$\varphi'(x) = -e^x$$
$$|\varphi'(x)| = |-e^x| \leq e^{-1} = \frac{1}{e} < 1 \quad converge$$

3. Determinar $x_0 \quad e \quad FC$:

$$x_0 = -2$$
$$FC: x_{m+1} = -e^{x_m} - 1$$

4. Tabela

m	Xm	Xm+1	E
0	-2	-1,135335283	0,864664717
1	-1,13533528	-1,321314372	0,185979089
2	-1,32131437	-1,266784417	0,054529954

Resposta: $x = -1{,}3 \pm 0.1$

4.4 MÉTODO DAS SECANTES

Apresentamos abaixo um exemplo do algoritmo do Método das Secantes.

Calcule $\sqrt{5}$ com erro inferior a 0.01 no intervalo $[2;3]$. Aplique o Método das Secantes.

Resolução

Dados:	Passo 1: Hipóteses
$f(x) = x^2 - 5$ $\varepsilon = 0.01$ $x \in [2;3]$	f, f', f'' $cont.$ $[2;3]$ $f' = 2x \neq 0$ $f'' = 2 \neq 0$ Passo 2: Determinação de x_0 e x_F : $x_F = 3$ pq $f(3) * f''(3) > 0$ $x_0 = 2$ pq $f(2) * f(3) < 0$

Passo 3: Fórmula Concreta:

$$x_{m+1} = \frac{x_F * f(x_m) - x_m * f(x_F)}{f(x_m) - f(x_F)}$$

$$x_{m+1} = \frac{3x_m^2 - 4x_m - 15}{x_m^2 - 9}$$

Passo 4: Tabela:

m	Xm	Xm+1	E
0	2,00000	2,20000	0,20000
1	2,20000	2,23077	0,03077
2	2,23077	2,23529	0,00452

Passo 5: Resposta:

$$x = 2.24 \pm 0.01$$

4.5 MÉTODO DAS TANGENTES (NEWTON)

Passo 1. Verificar Hipóteses

$$f, f', f'' \quad cont. \ [a;b]$$
$$f' \neq 0$$
$$f'' \neq 0$$

Passo 2. Determinar x_0

$x_0 \in [a;b]: f(x) * f''(x) > 0$

Passo 3: Fórmula concreta

$$x_{m+1} = x_m - \frac{f(x_m)}{f'(x_m)}$$

Passo 4: Tabela

m	x_m	x_{m+1}	$\varepsilon = \lvert x_{m+1} - x_m \rvert$

Passo 5: Resposta

Calcule $\sqrt{5}$ com erro inferior a 0.01 no intervalo $[2;3]$. Aplique o Método das Tangentes.

$f(x) = x^2 - 5$
$\varepsilon = 0.01$

$Hip:$
$f, f', f'' \; cont[2;3]$
$f' = 2x \neq 0$
$f'' = 2 \neq 0$

$Determinação \quad de \quad x_0:$

$f(x) * f''(x) > 0$
$f(3) = 4$

$f''(3) = 2 \quad então \quad x_0 = 3$

Tabela:

M	Xm	Xm+1	E
0	3,00000	2,33333	0,66667
1	2,33333	2,23810	0,09524
2	2,23810	2,23607	0,00203

R% $x = 2.24 \pm 0.01$

4.6 EXERCICIOS

1. Localize as raizes da equação $-1 + e^{-2x} + x = 0$ usando o método gráfico.

2. Prove que a equação $f(x) = x^2 + tgx = 0$ tem uma raiz no intervalo [1,2].

3. Determine um intervalo contendo um zero de $f(x) = 2^x - 3x^2$.

4. Mostre que as seguintes equações têm pelo menos uma solução nos intervalos dados:

   (a) $x \cos x - 2x2 + 3x - 1 = 0$, $[0.2; 0.3]$ e $[1.2; 1.3]$.

   (b) $2x \cos(2x) - (x - 2) = 0$, $[2; 3]$ e $[3; 4]$.

5. Ache intervalos contendo soluções das seguintes equações:

   (a) $x - 3^{-x} = 0$

   (b) $x^3 - 2x^2 - 4x + 3 = 0$

   (c) $x^3 + 4.001x^2 + 4.002x + 1.101 = 0$

7. Isolar os zeros da função

   (a) $f(x) = x^3 - 9x + 3$.

   (b) $f(x) = x \ln x - 3,2$.

   (c) $f(x) = 5 \log x - 2 + 0,4x$.

   (d) $f(x) = \sqrt{x} - 5e^{-x}$.

8. Determinar um valor aproximado para $\sqrt{5}$, com erro inferior a 10^{-2}.

9. Achar um limite para o número de interacções necessárias para alcançar uma aproximação à solução de uma equação, que se encontra no intervalo [1, 2], com uma exactidão até 10^{-4}.

10. Utilizando o Método Iterativo, determine para $\varepsilon = 0{,}001$ a solução da equação $x + 2\ln(x) = 0$

11. Seja $f(x) = x^2 - 6$ e $x_0 = 1$. Use o método de Newton para determinar a solução aproximada.

12. Pelo método das Secantes, determine uma aproximação para $x \in [1;2]$ da função $f(x) = e^{-x} - \cos(x)$ com erro $\varepsilon = 0{,}001$

13. Use o método de Newton com $\varepsilon = 0{,}0001$ para achar as soluções dos seguintes problemas:

a) $x-0.8-0.2sen(x)=0$; $x \in \left[0;\frac{\pi}{2}\right]$

b) $(x-2)^2-\ln(x)=0;\ x \in [1;2]$

14. Seja $f(x)=e^x-3x$ que tem zero em $[1;2]$. Calcule usando o método das secantes uma aproximação para este zero tomando com $\varepsilon = 0{,}01$

15. Considerando a seguinte equação: $2\cos(x)-0.5e^x=0$ Utiliza como valor inicial $x_0=0.5$. Aplique o método iterativo geral para determinar a solução da equação.

CAPÍTULO 5 - RESOLUÇÃO NUMÉRICA DE SISTEMAS DE EQUAÇÕES

Estima-se que em 75% dos problemas científicos, a solução de um sistema linear de equações aparece em algum estágio da solução. Podemos, entre outros, citar os seguintes problemas:

Interpolação, ajuste de curvas, solução de sistemas de equações não lineares, solução de equações diferenciais usando diferenças finitas e cálculo de autovalores e autovetores.

Um sistema de equações lineares, às vezes simplesmente dito sistema linear, é uma equação do tipo $Ax = b$. Usando os valores de A, x e b temos:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{21} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

Um sistema linear pode também ser representado na seguinte forma:

$$\begin{array}{c} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{array}$$

Resolver o sistema de equações, significa determinar um vetor $\bar{x} = (\bar{x}_1; \bar{x}_2; ....; \bar{x}_n)$ que satisfaça todas equações do sistema.

Existem duas classes de métodos para solução de sistemas lineares. Os denominados métodos directos e os denominados métodos iterativos. A escolha de uma ou outra classe para a solução do sistema $Ax = b$ vai depender de características e propriedades da matriz A.

5.1 MÉTODOS DIRECTOS

Os métodos diretos são aqueles em que após um número finito de etapas e não se considerando os erros de arredondamento encontramos a solução do sistema.

Um sistema linear da forma

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{nn}x_n &= b_n \end{aligned}$$

onde $a_{ii} \neq 0$ para *i = 1, 2, . . . , n* é dito um sistema triangular. Sua solução é dada por *retro substituição* através da fórmula de recorrência.

$$x_i = \frac{b_i - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}x_j}{a_{ii}}, \qquad i = n-1, n-2, \ldots, 1$$

Onde $x_n = \frac{b_n}{a_{nn}}$. Este algoritmo pode ser incorporado ao método de eliminação de Gauss para encontrar a solução de um sistema.

5.1.1 MÉTODO DE ELIMINAÇÃO DE GAUSS

Este é um esquema eficiente para resolver um sistema $Ax = b$ de n equações a n incógnitas de pequeno tamanho (ordem 10). O passo crucial é construir um sistema triangular superior $A'x = b'$ equivalente que pode ser resolvido por retro substituição.
Dois sistemas lineares de dimensão n x n são equivalentes desde que os seus conjuntos de soluções sejam os mesmos. Teoremas de álgebra linear mostram que quando certas operações são aplicadas a um dado sistema, os conjuntos soluções não muda.
As seguintes operações, quando aplicadas a um sistema linear, resultam num sistema equivalente:

- Mudança de ordem de duas equações.
- Multiplicação de uma equação por uma constante não nula.
- Adição de um múltiplo de uma equação a uma outra equação.

Descreve-se, a seguir, o método de eliminação de Gauss para um sistema de ordem 3, sendo que o mesmo processo pode ser aplicado a sistemas de qualquer ordem.
Assim, considere um sistema do tipo

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$$

que pode ser representado pela matriz aumentada

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & b_3 \end{bmatrix} \text{linha pivô se } a_{11} \neq 0$$

O objectivo é obter um sistema triangular da forma

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ 0 & a'_{22} & a'_{23} & b'_2 \\ 0 & 0 & a''_{33} & b''_3 \end{bmatrix}$$

Para melhor perceber o método, a seguir apresenta-se um exemplo:

Considere o sistema dado por

$$\begin{array}{lccccccc} l_1 \rightarrow & x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 4 \\ l_2 \rightarrow & 2x_1 & + & 3x_2 & + & x_3 & = & 9 \\ l_3 \rightarrow & x_1 & - & x_2 & - & x_3 & = & -2 \end{array}$$

Passo 1

Podemos eliminar a incógnita x1 nas linha l2 e na linha l3 fazendo repectivamente as seguintes operações:

$$l_2 \leftarrow (-2)l_1 + l_2 \quad (\text{substituir } l_2 \text{ por } (-2) \times l_1 + l_2)$$
$$l_3 \leftarrow (-1)l_1 + l_3$$

teremos então o seguinte sistema equivalente

$$\begin{array}{lccccccc} l_1 \rightarrow & x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 4 \\ l_2 \rightarrow & & & x_2 & - & x_3 & = & 1 \\ l_3 \rightarrow & & & -2x_2 & - & 2x_3 & = & -6 \end{array}$$

Passo 2

Vamos agora eliminar a incógnita x2 na linha l3 fazendo a seguinte operação:

$$l_3 \leftarrow (2)l_2 + l_3$$

Teremos então o seguinte sistema equivalente

$$\begin{array}{lccccccc} l_1 \rightarrow & x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 4 \\ l_2 \rightarrow & & & x_2 & - & x_3 & = & 1 \\ l_3 \rightarrow & & & & - & 4x_3 & = & -4 \end{array}$$

Temos agora um sistema triangular que pode ser resolvido com o algoritmo da retro substituição.

$$\begin{cases} -4x_3 = -4 \Longrightarrow x_3 = 1 \\ x_2 = 1 + x_3 \Longrightarrow x_2 = 2 \\ x_1 = (4 - x2 - x3) \Longrightarrow x_1 = 1 \end{cases} \qquad \therefore \qquad x = (1, 2, 1)^t$$

5.2 MÉTODOS ITERATIVOS

Nesta secção descreve-se os métodos iterativos de Jacobi e Gauss-Seidel. Tais métodos são eficazes para sistemas de grande porte, economizando tempo computacional, principalmente os esparsos, na qual os métodos directos são ineficientes. A técnica iterativa para resolver um sistema linear Ax = b de n×n elementos, será proposto da seguinte forma: parte-se de uma aproximação inicial X_0 e então constrói-se consecutivamente os vetores x1, x2, ..., até que a condição de convergência seja satisfeita.

5.2.1 MÉTODO DE JACOBI

Considere o sistema:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n & = & b_n \end{cases}$$

E exigindo que $a_{ii} \neq 0, i = 1, 2, \ldots, n$.

Passo 1: Isola-se o vector X mediante a separação do elemento diagonal, conforme:

$$\begin{cases} x_1 &= \dfrac{b_1}{a_{11}} - \dfrac{1}{a_{11}}(a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n) \\ x_2 &= \dfrac{b_2}{a_{22}} - \dfrac{1}{a_{22}}(a_{21}x_1 + a_{23}x_3 + \cdots + a_{2n}x_n) \\ \vdots & \vdots \quad \vdots \\ x_n &= \dfrac{b_n}{a_{nn}} - \dfrac{1}{a_{nn}}(a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn-1}x_{n-1}) \end{cases}$$

Passo 2: Extrai-se a matriz G

$$\begin{bmatrix} 0 & -\dfrac{a_{12}}{a_{11}} & -\dfrac{a_{13}}{a_{11}} & \dots & -\dfrac{a_{1n}}{a_{11}} \\ -\dfrac{a_{21}}{a_{22}} & 0 & -\dfrac{a_{23}}{a_{22}} & \dots & -\dfrac{a_{2n}}{a_{22}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ -\dfrac{a_{n1}}{a_{nn}} & -\dfrac{a_{n2}}{a_{nn}} & -\dfrac{a_{n3}}{a_{nn}} & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

Passo 3: Verifica-se a convergência da transformação

$$\|G\| < 1$$

Passo 4: Determina-se o vector inicial:

$$X_0 = (x_1^{(0)}; x_2^{(0)}; ...; x_n^{(0)})$$

Caso o problema não indique de forma explícita, nesta disciplina iremos adoptar a seguinte solução inicial: $X_0 = (0;0;...;0)$

Passo 5: Preenche-se a tabela recorrendo ao método de Jacobi que corresponde a resolver

$$\begin{cases} x_1^{(k)} = \dfrac{1}{a_{11}}(b_1 - a_{12}x_2^{(k-1)} - ... - a_{1n}x_n^{(k-1)}) \\ x_2^{(k)} = \dfrac{1}{a_{22}}(b_2 - a_{21}x_1^{(k-1)} - .... - a_{2n}x_n^{(k-1)}) \\ .... \\ x_n^{(k)} = \dfrac{1}{a_{nn}}(b_n - a_{n1}x_1^{(k-1)} - ... - a_{nn-1}x_{n-1}^{(k-1)}) \end{cases}$$

Até que o critério de convergência seja satisfeito.

k	$x_1^{(k)}$	$x_2^{(k)}$	....	$x_n^{(k)}$	$\left\| X^{(k)} - X^{(k-1)} \right\|$

5.2.2 MÉTODO DE GAUSS-SEIDEL

Seja dado o seguinte sistema:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n & = & b_n \end{cases}$$

E exigindo que $a_{ii} \neq 0, i = 1, 2, \ldots, n$. O Método de Gauss Seidel para determinação da solução aproximada do sistema dado, compreende os seguintes passos:

Passo 1: Isola-se o vector X mediante a separação do elemento diagonal, conforme:

$$\begin{cases} x_1 &= \dfrac{b_1}{a_{11}} - \dfrac{1}{a_{11}}(a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n) \\ x_2 &= \dfrac{b_2}{a_{22}} - \dfrac{1}{a_{22}}(a_{21}x_1 + a_{23}x_3 + \cdots + a_{2n}x_n) \\ \vdots & \vdots \quad \vdots \\ x_n &= \dfrac{b_n}{a_{nn}} - \dfrac{1}{a_{nn}}(a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn-1}x_{n-1}) \end{cases}$$

Passo 2: Extrai-se a matriz G

$$\begin{bmatrix} 0 & -\dfrac{a_{12}}{a_{11}} & -\dfrac{a_{13}}{a_{11}} & \dots & -\dfrac{a_{1n}}{a_{11}} \\ -\dfrac{a_{21}}{a_{22}} & 0 & -\dfrac{a_{23}}{a_{22}} & \dots & -\dfrac{a_{2n}}{a_{22}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ -\dfrac{a_{n1}}{a_{nn}} & -\dfrac{a_{n2}}{a_{nn}} & -\dfrac{a_{n3}}{a_{nn}} & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

Passo 3: Verifica-se a convergência da transformação

$\|G\| < 1$

Passo 4: Determina-se o vector inicial:

$X_0 = (x_1^{(0)}; x_2^{(0)}; ...; x_n^{(0)})$

Caso o problema não indique de forma explícita, nesta disciplina iremos adoptar a seguinte solução inicial: $X_0 = (0;0;...;0)$

Passo 5: Preenche-se a tabela recorrendo ao método de Gauss-Seidel que corresponde a resolver

$$\begin{cases} x_1^{(k)} = \dfrac{1}{a_{11}}(b_1 - a_{12}x_2^{(k-1)} - ... - a_{1n}x_n^{(k-1)}) \\ x_2^{(k)} = \dfrac{1}{a_{22}}(b_2 - a_{21}x_1^{(k)} - .... - a_{2n}x_n^{(k-1)}) \\ .... \\ x_n^{(k)} = \dfrac{1}{a_{nn}}(b_n - a_{n1}x_1^{(k)} - ... - a_{nn-1}x_{n-1}^{(k)}) \end{cases}$$

Até que o critério de convergência seja satisfeito.

k	$x_1^{(k)}$	$x_2^{(k)}$	....	$x_n^{(k)}$	$\left\| X^{(k)} - X^{(k-1)} \right\|$

Passo 6: **R%** $X = (x_1 \pm \Delta x_1; x_2 \pm \Delta x_2; ...; x_n \pm \Delta x_n)$

Exemplo:

Pelo método de Gauss-Seidel, determine a solução do seguinte sistema de equações:

$$\begin{cases} 10\,x_1 + x_2 + x_3 & = & 12 \\ x_1 + 10\,x_2 + x_3 & = & 12 \\ x_1 + x_2 + 10\,x_3 & = & 12 \end{cases}$$

EXERCÍCIOS

1. Resolva o sistema linear abaixo utilizando o método de eliminação de Gauss

$$\begin{aligned} 3x_1 - 2x_2 + 5x_3 &= 20 \\ 6x_1 - 9x_2 + 12x_3 &= 51 \\ -5x_1 + 2x_3 &= 1 \end{aligned}$$

2. Calcule a norma de A para as seguintes matrizes:

$$\begin{bmatrix} 0,902 & 0,803 \\ 0,481 & 0,401 \end{bmatrix} \qquad \text{e} \qquad \begin{bmatrix} 1,1 & 5,03 \\ 1,5 & 7,601 \end{bmatrix}$$

3. Determine a inversa da matriz A

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 4 \\ -2 & 8 & -6 \\ 3 & -5 & 15 \end{bmatrix}$$

4. Determine a solução do sistema Ax = b, sabendo que:

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 2 \\ 1 & 6 & 3 \\ 2 & 2 & 7 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 9 \\ 10 \\ 11 \end{pmatrix}$$

5. Dado o sistema Ax = b, mostre que o método iterativo de Jacobi converge e determine a sua solução aproximada:

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 2 \\ 1 & 6 & 3 \\ 2 & 2 & 7 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 9 \\ 10 \\ 11 \end{pmatrix}$$

6. Resolver o sistema linear abaixo, pelo método de Jacobi com chute inicial $x^{(0)} = \{1,1,1,1\}$, tolerância $\varepsilon = 10^{-3}$:

$$\begin{bmatrix} 9 & 1 & -2 & 2 \\ 1 & 15 & -3 & 2 \\ 1 & -2 & 8 & 3 \\ 2 & 2 & 1 & 12 \end{bmatrix} . \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 10,5 \\ 14,6 \\ 18,1 \\ 19,4 \end{Bmatrix}$$

7. Resolver o sistema linear abaixo, pelo método de Gauss Seidel com chute inicial $x^{(0)} = \{0,0,0,0\}$, tolerância $\varepsilon = 10^{-3}$:

$$\begin{bmatrix} 10 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & -6 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 6 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 8 \end{bmatrix} . \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 2,5 \\ -2,5 \\ 2,1 \\ 0,1 \end{Bmatrix}$$

8. Considere o sistema linear **Ax = b**, onde:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 10 & -1 & 4 \\ 1 & 10 & 9 \\ 2 & -3 & -10 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, \quad \text{e} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \\ 9 \end{bmatrix}$$

Pelo método de Gauss Seidel, determine a solução do sistema com erro $\varepsilon = 10^{-3}$

CAPÍTULO 6 - EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINARIAS (EDO´s)

6.1 INTRODUÇÃO

O estudo das equações diferenciais foi motivado inicialmente por problemas da física, ou seja problemas de mecânica, electricidade, termodinâmica, magnetismo etc. Actualmente muitas outras áreas do conhecimento têm a formulação teórica de seus problemas utilizando essas equações. Entre outras podemos destacar as seguintes áreas, Química, Ecologia, Biologia, Economia e Sociologia.

Suponha $f : R^n \to R$ e $y : R \to R$, com derivadas até ordem n. Dizemos que uma equação diferencial ordinária tem ordem n se é uma equação que pode ser escrita como

$$y^n = f(x, y, y´,..., y^n); \; y^n = \text{derivada de ordem } n.$$

Uma função $y = \varphi(x)$ é dita como solução da equação acima se:

a) $y = \varphi(x)$ possui derivadas até n;

b) $y^n = f(x, \varphi(x),...., \varphi^{n-1}(x))$

6.2 EDO´s DE PRIMEIRA ORDEM

$$y´= f(x, y(x))$$

Seguem abaixo os métodos numéricos que nos ajudam a determinar as soluções aproximadas das EDO´s.

6.2.1 MÉTODO DE EULER

Passo 1: Extracção de dados

Passo 2: Determinação das fórmulas concretas

$x_{k+1} = x_k + h$

$y_{k+1} = y_k + h * f(x_k; y_k)$

Passo 3: Tabela

k	x_k	y_k

Passo 4: Resposta

Exemplo:

Determine a solução da equação diferencial $y' = -xy$, com $y(0) = 1$ no intervalo $[0;0.5]$ e $h = 0.1$

Resolução:

Passo 1: Extracção de dados

$f(x; y) = -xy$

$x_0 = 0$

$y_0 = 1$

$h = 0.1$

Passo 2: Determinação das fórmulas concretas

$x_{k+1} = x_k + h \leftrightarrow x_{k+1} = x_k + 0.1$

$y_{k+1} = y_k + h * f(x_k; y_k) \leftrightarrow y_{k+1} = y_k - 0.1 * x_k * y_k$

Passo 3: Tabela

k	x_k	y_k
0	0	1
1	0.1	1
2	0.2	0.99

3	0.3	0.9702
4	0.4	0.941094
5	0.5	0.903450

Passo 5: $y = 0.903450$

6.2.2 MÉTODO DE RANGE KUTTA 4 – RK 4

Passo 1: Extracção de dados

Passo 2: Determinação das fórmulas concretas

$$x_{l+1} = x_l + h$$

$$y_{l+1} = y_l + \frac{h}{6} * (k_1 + 2 * k_2 + 2 * k_3 + k_4)$$

$$k_1 = f(x_l; y_l)$$
$$k_2 = f(x_l + \frac{h}{2}; y_l + \frac{h}{2} k_1)$$
$$k_3 = f(x_l + \frac{h}{2}; y_l + \frac{h}{2} k_2)$$
$$k_4 = f(x_l + h; y_l + h * k_3$$

Passo 3: Tabela

k	x_k	y_k	k_1	k_2	k_3	k_4

Passo 4: Resposta

Exemplo

Passo 1: Extracção de dados

$f(x;y) = -xy$

$x_0 = 0$

$y_0 = 1$

$h = 0.1$

Passo 2: Determinação das fórmulas concretas

$x_{l+1} = x_l + h \leftrightarrow x_{l+1} = x_l + 0.1$

$$y_{l+1} = y_l + \frac{h}{6} * (k_1 + 2 * k_2 + 2 * k_3 + k_4)$$

$k_1 = f(x_l; y_l) \leftrightarrow k_1 = -x_l * y_l$

$$k_2 = f(x_l + \frac{h}{2}; y_l + \frac{h}{2} k_1) \leftrightarrow k_2 = -(x_l + 0.05)(y_l + 0.05 * k_1)$$

$$k_3 = f(x_l + \frac{h}{2}; y_l + \frac{h}{2} k_2) \leftrightarrow k_3 = -(x_l + 0.05)(y_l + 0.05 * k_2)$$

$k_4 = f(x_l + h; y_l + h * k_3 \leftrightarrow k_4 = -(x_l + 0.1)(y_l + 0.1 * k_3)$

Passo 3: Tabela

k	x_k	y_k	k_1	k_2	k_3	k_4
0	0	1	0	-0.05	-0.049875	-0.099501
1	0.1	0.99502	-0.09950	-0.148506	-0.148138	-0.196040
2	0.2	0.980199	-0.196040	-0.242599	-0.242017	-0.256799
3	0.3	0.955997	-0.256799	-0.329580	-0.328831	-0.369246
4	0.4	0.923116	-0.329246	-0.407094	-0.406243	-0.441246
5	0.5	0.882497	-0.441246	-0.473239	-0.472359	-0.501157

Passo 4: Resposta

$y = 0.882497$

6.3 EXERCÍCIOS

1. Determine a solução numérica aproximada da seguinte Equação Diferencial Ordinária, com o passo h = 0.2

$$\begin{cases} y'(x) + 2y(x) = 0 & \forall x \in [0, 1] \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

a) Pelo de Euler
b) Pelo método de Runge – Kutta 4

2. Considere a equação diferencial ordinária, dado por:

$$\begin{cases} xy'(x) - x^2 y(x) - 2 = 0 & \forall x \in [1, 2] \\ y(1) = 3 \end{cases}$$

Fazendo h = 0.1, determine a solução aproximada usando o método de Euler.

3. Seja dada a equação $y' = 1 - x\sqrt[3]{y}$ com $y(0) = 1$ no intervalo [0;5] e com N=5. Determine a solução aproximada pelo método de Runge Kutta – 4.