ANÁLISE MATEMÁTICA III

Cálculo Operacional

Licenciatura em Engenharias

Universidade Eduardo Mondlane
Faculdade de Ciências
Departamento de Matemática e Informática

*** 29 de Maio de 2022 ***

Contéudo

Transformada de Laplace

- Nesta aula estudaremos a Transformadas de Laplace;
- A transformada de Laplace pode ser usada para resolver equações diferenciais lineares e sistemas de equações diferenciais lineares.

Definição

Suponha que f é uma função definida para $t \geqslant 0$. A transformada de Laplace de f, que denotaremos de $\mathcal{L}\{f(t)\}$ ou $F(p)$, é definida como

$$\mathcal{L}\{f(t)\} \equiv F(p) = \int_0^\infty e^{-pt} f(t)dt,$$

sempre que essa integral convergir.

Observação

- $\displaystyle\int_0^\infty e^{-pt} f(t)dt = \lim_{A \to \infty} \int_0^A e^{-pt} f(t)dt;$
- Diz-se que a integral converge quando existe o limite, caso contrário, diz-se que a integral diverge.

Definição (Função Contínua por Partes)

Uma função f é contínua por partes em um intervalo $[\alpha, \beta]$ quando podemos particionar esse intervalo em uma quantidade finita de pontos $\alpha = t_0 \leqslant t_1 \leqslant \cdots \leqslant t_n = \beta$ de modo que f é contínua em cada subintervalo $]t_{i-1}, t_i[$, $i = 1, 2, \ldots, n$ e os limites laterais de f nos extremos desses subintervalos sempre existem.

Definição

Diz-se que uma função f é de ordem exponencial no intervalo $[0, \infty[$ se existem constantes $C > 0$ e α, tais que

$$|f(t)| \leqslant Ce^{\alpha t}, \quad \forall t > 0.$$

Condição de existência da transformada de Laplace

Teorema

Se $f : [0, \infty[\to \mathbb{R}$ é uma função contínua por partes e de ordem exponencial, então existe um número α tal que

$$\int_0^\infty e^{-pt} f(t) dt$$

converge para todos os valores $p > \alpha$.

Exemplo

Calcule $\mathcal{L}\{f(t)\}$ se $f(t) = 1,\ \ t \geqslant 0$

Resolução:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}\{f(t)\} &= \int_0^\infty e^{-pt} dt \\
&= \lim_{A \to \infty} \int_0^A e^{-pt} dt \\
&= -\frac{1}{p} \lim_{A \to \infty} e^{-pt} \Big|_0^A \\
&= -\frac{1}{p} \lim_{A \to \infty} \left(e^{-pA} - 1 \right) \\
&= \frac{1}{p}.
\end{aligned}
$$

Exemplo

Calcule $\mathcal{L}\{f(t)\}$ se $f(t) = e^{at}, \ t \geqslant 0$

Resolução:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}\{f(t)\} &= \int_0^{\infty} e^{-pt} e^{at} dt \\
&= \lim_{A \to \infty} \int_0^{A} e^{-(p-a)t} dt \\
&= -\frac{1}{p-a} \lim_{A \to \infty} e^{-(p-a)t} \Big|_0^A \\
&= -\frac{1}{p-a} \lim_{A \to \infty} \left(e^{-(p-a)A} - 1\right) \\
&= \frac{1}{p-a}, \quad p > a.
\end{aligned}
$$

Exemplo

Calcule $\mathcal{L}\{f(t)\}$ se $f(t) = t,\ t \geqslant 0$

Resolução: Temos $F(p) = \int_0^\infty e^{-pt} t\,dt$. Integrando por partes, i.e,

$u = t, dv = e^{-pt}dt \Leftrightarrow v = -\frac{e^{-pt}}{p}$

$$
\begin{aligned}
F(p) &= \lim_{A\to\infty}\left(-\frac{e^{-pt}t}{p}\Big|_0^A + \frac{1}{p}\int_0^A e^{-pt}dt\right)\\
&= \frac{1}{p}\lim_{A\to\infty}\left(-\frac{A}{e^{pA}} + \int_0^A e^{-pt}dt\right)\\
&= -\frac{1}{p^2}\lim_{A\to\infty} e^{-pt}\Big|_0^A = -\frac{1}{p^2}\lim_{A\to\infty}\left(e^{-pA} - 1\right)\\
&= \frac{1}{p^2} = \frac{1!}{p^2}.
\end{aligned}
$$

Exemplo

Calcule $\mathcal{L}\{f(t)\}$ se $f(t) = t^2, \ t \geqslant 0$

Resolução: Temos $F(p) = \int\limits_0^{\infty} e^{-pt} t^2 dt$. Integrando por partes, i.e,

$$u = t^2, dv = e^{-pt}dt \Leftrightarrow v = -\frac{e^{-pt}}{p}.$$

$$\begin{aligned} F(p) &= \lim_{A\to\infty}\left(-\frac{e^{-pt}t^2}{p}\Big|_0^A + \frac{1}{p}\int\limits_0^A e^{-pt}2t dt\right) \\ &= \frac{1}{p}\lim_{A\to\infty}\left(-\frac{A^2}{e^{pA}} + 2\int\limits_0^A e^{-pt} t dt\right) \end{aligned}$$

Exemplo

Podemos usar o exemplo anterior para calcular a integral que aparece a direita, i.e,

$$F(p) = \frac{2}{p} \cdot \frac{1}{p^2} = \frac{2}{p^3} = \frac{2!}{p^3}.$$

Em Geral

$$\mathcal{L}\{t^n\} = \frac{n!}{p^{n+1}}, \quad p > 0,\ n \in \mathbb{N}.$$

Teorema (Linearidade)

Sejam f, g funções cujas Transformadas de Laplace existam. Então:

$$\mathcal{L}\{af(t) + bg(t)\} = a\mathcal{L}\{f(t)\} + b\mathcal{L}\{g(t)\}, \quad \forall a, b \in \mathbb{R}.$$

Exemplo

Usando a linearidade, calcule $\mathcal{L}\{\cos at\}$ e $\mathcal{L}\{\sin at\}$.
Resolução: Segundo a fórmula de Euler

$$e^{iat} = \cos(at) + i\sin(at).$$

Por linearidade

$$\mathcal{L}\{e^{iat}\} = \mathcal{L}\{\cos(at)\} + i\mathcal{L}\{\sin(at)\}.$$

Mas

$$\mathcal{L}\{e^{iat}\} = \frac{1}{p - ia} = \frac{(p + ia)}{(p - ia)(p + ia)} = \frac{p + ia}{p^2 + a^2}$$

Exemplo

Assim,

$$\mathcal{L}\{\cos(at)\} + i\mathcal{L}\{\sin(at)\} = \frac{p}{p^2+a^2} + i\frac{a}{p^2+a^2}.$$

Portanto,

$$\mathcal{L}\{\cos(at)\} = \frac{p}{p^2+a^2}$$

e

$$\mathcal{L}\{\sin(at)\} = \frac{a}{p^2+a^2}.$$

Exemplo

Calcule $\mathcal{L}\{f(t)\}$, se $f(t) = 5e^{-2t} - 3\sin(4t), \;\; t \geqslant 0$.
Resolução: Usando a linearidade da transformada, teremos

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{f(t)\} &= 5\mathcal{L}\{e^{-2t}\} - \mathcal{L}\{\sin(4t)\} \\ &= \frac{5}{p+2} - \frac{12}{p^2+4} \end{aligned}$$

Teorema

Se $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(p)$ então $\mathcal{L}\{f(at)\} = \frac{1}{a}F\left(\frac{p}{a}\right)$.

Teorema (Teorema de Deslocamento)

Se $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(p)$ então $\mathcal{L}\{e^{at}f(t)\} = F(p-a)$.

Usando o teorema anterior, facilmente deduz-se que:

1. $\mathcal{L}\{e^{at}t^n\} = \dfrac{n!}{(p-a)^n},\ p > a, n \in \mathbb{N};$
2. $\mathcal{L}\{e^{at}\cos(bt)\} = \dfrac{p-a}{(p-a)^2+b^2},\ p > a;$
3. $\mathcal{L}\{e^{at}\sin(bt)\} = \dfrac{b}{(p-a)^2+b^2},\ p > a$

Exemplo

Se a transformada de $f(t)$ é $F(p) = \dfrac{p+4}{p^2-6p+9}$, determine $f(t)$.

Resolução: $F(p) = \dfrac{p+4}{(p-3)^2} = \dfrac{p-3+7}{(p-3)^2} = \dfrac{1}{p-3} + \dfrac{7}{(p-3)^2}$.

Portanto,

$$f(t) = e^{3t} + 7e^{3t}t.$$

Exemplo

Se a transformada de $f(t)$ é $F(p) = \dfrac{2p-5}{(p-2)(p^2+2p+5)}$, determine $f(t)$.

Resolução: $F(p) = \dfrac{A}{p-2} + \dfrac{Bp+C}{p^2+2p+5}$. Portanto,

$$A(p^2+2p+5) + (Bp+C)(p-2) \equiv 2p-5.$$

- $p = 2: 13A = -1 \Leftrightarrow A = -\dfrac{1}{13}$;
- $p^2: A + B = 0 \Leftrightarrow B = \dfrac{1}{13}$;
- $p^0: 5A - 2C = -5 \Leftrightarrow 2C = 5\left(-\dfrac{1}{13}+1\right) \Leftrightarrow C = \dfrac{30}{13}$.

Exemplo

$$
\begin{aligned}
F(p) &= -\frac{1}{13}\frac{1}{p-2}+\frac{1}{13}\frac{p+30}{p^2+2p+5}\\
&= -\frac{1}{13}\frac{1}{p-2}+\frac{1}{13}\frac{p+1+29}{(p+1)^2+2^2}\\
&= -\frac{1}{13}\frac{1}{p-2}+\frac{1}{13}\frac{p+1}{(p+1)^2+2^2}+\frac{29}{26}\frac{2}{(p+1)^2+2^2}
\end{aligned}
$$

Portanto,

$$f(t) = -\frac{1}{13}e^{2t}+\frac{1}{13}e^{-t}\cos 2t+\frac{29}{26}e^{-t}\sin 2t.$$

Teorema (Transformada da derivada)

- Se $f(t)$ é contínua e de ordem exponencial e $f(t)$ é contínua por partes para $t \geqslant 0$, então
$$\mathcal{L}\{f'(t)\} = p\mathcal{L}\{f(t)\} - f(0);$$
- Se $f(t)$ e $f'(t)$ são contínuas e $f''(t)$ contínua por partes, então
$$\mathcal{L}\{f''(t)\} = p^2\mathcal{L}\{f(t)\} - pf(0) - f'(0);$$
- Analogamente, se $f(t), f'(t), \cdots, f^{(n-1)}(t)$ são contínuas e $f^{(n)}(t)$ contínua por partes, então
$$\mathcal{L}\{f^{(n)}(t)\} = p^n\mathcal{L}\{f(t)\} - p^{n-1}f(0) - p^{n-2}f'(0) - \cdots - f^{(n-1)}(0);$$

Exemplo

Ontenha $\mathcal{L}\{t\cos(at)\}$.
Resolução: seja $f(t) = t\cos(at)$.

- $f'(t) = \cos(at) - at\sin(at)$;
- $f''(t) = -a\sin(at) - a\sin(at) - at\cos(at) = -2a\sin(at) - a^2t\cos(at)$;

Pelo teorema anterior,

$$p^2\mathcal{L}\{t\cos(at)\} - pf(0) - f'(0) = \mathcal{L}\{-2a\sin(at) - a^2t\cos(at)\}$$

$$p^2\mathcal{L}\{t\cos(at)\} - 1 = -2a\mathcal{L}\{\sin(at)\} - a^2\mathcal{L}\{t\cos(at)\}$$

$$p^2\mathcal{L}\{t\cos(at)\} + a^2\mathcal{L}\{t\cos(at)\} = \frac{-2a^2}{p^2+a^2} + 1$$

$$(p^2+a^2)\mathcal{L}\{t\cos(at)\} = \frac{p^2-a^2}{p^2+a^2}$$

$$\mathcal{L}\{t\cos(at)\} = \frac{p^2-a^2}{(p^2+a^2)^2}$$

Teorema (Derivada da Imagem)

Se $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(p)$, então

$$\mathcal{L}\{t^n f(t)\} = (-1)^n \frac{d^n F(p)}{dp^n}$$

Exemplo

Ontenha $\mathcal{L}\{t^2 \cos^2(2t)\}$
Resolução: Segundo o teorema anterior,

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{t^2 \cos^2(2t)\} &= (-1)^2 \frac{d^2}{dp^2}\mathcal{L}\{\cos^2 2t\} = \frac{d^2}{dp^2}\mathcal{L}\left\{\frac{1+\cos 4t}{2}\right\} \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{p} + \frac{p}{p^2+16}\right)'' \\
&= \frac{1}{p^3} + \frac{p(p^2-48)}{(p^2+16)^2}
\end{aligned}$$

,

Resolução de equações diferenciais usando transformada de Laplace

- Nesta aula discutiremos como a transformada de Laplace pode ser usada para resolver equações diferencias lineares e sistemas de equações diferencias lineares.

Definição

Se a transformada da função $f(t)$ é a função

$$F(p) = \int_0^\infty e^{-pt} f(t)\,dt,$$

então a transformada de Laplace inversa da função $F(p)$, é por definição a função $f(t)$, i.e,

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(p)\} = f(t).$$

Propriedades

- Se existe $\mathcal{L}^{-1}\{F(p)\}$ contínua, então a função $f(t)$ é única transformada inversa contínua de $F(p)$;
- Se as transformadas inversas de Laplace de duas funções $F(p)$ e $G(p)$ existem, então, para quaisquer constantes a e b,

$$\mathcal{L}^{-1}\{aF(p) + bG(p)\} = a\mathcal{L}^{-1}\{F(t)\} + b\mathcal{L}^{-1}\{g(t)\};$$

- Se $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(p)$, então $\mathcal{L}^{-1}\{F(p-a)\} = e^{at}f(t)$.

Importante

- Se $f(t)$ é contínua e de ordem exponencial e $f(t)$ é contínua por partes para $t \geqslant 0$, então
$$\mathcal{L}\{f'(t)\} = p\mathcal{L}\{f(t)\} - f(0);$$
- Se $f(t)$ e $f'(t)$ são contínuas e $f''(t)$ contínua por partes, então
$$\mathcal{L}\{f''(t)\} = p^2\mathcal{L}\{f(t)\} - pf(0) - f'(0);$$
- Analogamente, se $f(t), f'(t), \cdots, f^{(n-1)}(t)$ são contínuas e $f^{(n)}(t)$ contínua por partes, então
$$\mathcal{L}\{f^{(n)}(t)\} = p^n\mathcal{L}\{f(t)\} - p^{n-1}f(0) - p^{n-2}f'(0) - \cdots - f^{(n-1)}(0).$$

Resolução de EDO's Lineares

- Consideremos o problema de Cauchy

$$x'' + ax' + bx = f(t), \quad x(0) = x_0, \quad x'(0) = x_1,$$

onde a, b, x_0, x_1 são constantes;

- Designemos por $X(p)$ a transformada de Laplace de $x(t)$.

Resolução de EDO's Lineares

- Por linearidade da transformada de Laplace, podemos escrevrer:

$$\mathcal{L}\{x''(t)\} + a\mathcal{L}\{x'(t)\} + b\mathcal{L}\{x(t)\} = \mathcal{L}\{f(t)\};$$

- Pelo Teorema da transformada da derivada,

$$[p^2X(p) - px(0) - x'(0)] + a[pX(p) - x(0)] + bX(p) = F(p)$$

ou

$$(p^2 + ap + b)X(p) = F(p) + px_0 + x_0' + ax_0;$$

- Resolvendo a equação algébrica anterior, acharemos o $X(p)$. Assim, a solução do problema de Cauchy $x(t)$ é achada mediante a aplicação da transformada inversa de Laplace, i.e, $x(t) = \mathcal{L}^{-1}\{X(p)\}$.

Exemplo

Resolva $x'' + 2x' + 5x = e^{-t}\sin t, \quad x(0) = 0,\ x'(0) = 1.$
Resolução: Seja $\mathcal{L}\{x(t)\} = X(p)$.

- Aplicando a transformada de Laplace, obtemos:

$$(p^2X(p) - px(0) - x'(0)) + 2(pX(p) - x(0)) + 5X(p) = \frac{1}{(p+1)^2+1}.$$

- Usando as condições iniciais, obtemos:

$$(p^2 + 2p + 5)X(p) - 1 = \frac{1}{p^2+2p+2}.$$

- Isolando $X(p)$, temos:

$$X(p) = \frac{p^2+2p+3}{(p^2+2p+2)(p^2+2p+5)}$$

Exemplo

- Temos que decompor $X(p)$ em frações parciais, i.e,

$$X(p) = \frac{p^2 + 2p + 3}{(p^2 + 2p + 2)(p^2 + 2p + 5)} = \frac{Ap + B}{p^2 + 2p + 2} + \frac{Cp + D}{p^2 + 2p + 5},$$

ou seja,

$$\begin{aligned} p^2 + 2p + 3 &= (Ap + B)(p^2 + 2p + 5) + (Cp + D)(p^2 + 2p + 2) \\ &= (A + C)p^3 + (2A + B + 2C + D)p^2 + \\ &\qquad (5A + 2C + 2B + 2D) + 5B + 2D \end{aligned}$$

- Comparando os termos de mesmo grau obtemos o sistema $A + C = 0,\ \ 2A + B + 2C + D = 1,\ \ 5A + 2C + 2B + 2D = 2,\ \ 5B + 2D = 3$, cuja solução é $A = 0,\ B = 2/3,\ C = 0,\ D = 1/3$.

Exemplo

- Assim,

$$\begin{aligned} X(p) &= \frac{2}{3}\frac{1}{p^2+2p+2}+\frac{1}{3}\frac{1}{p^2+2p+5} \\ &= \frac{2}{3}\frac{1}{(p+1)^2+1}+\frac{1}{3}\frac{1}{(p+1)^2+2^2} \end{aligned}$$

- Aplicando a transformada inversa de Laplace:

$$x(t) = \frac{2}{3}e^{-t}\sin t + \frac{1}{3}e^{-t}\sin 2t.$$

De modo análogo, a transformada de Laplace pode ser aplicada na resolução de sistemas de equações diferenciais de coeficiente constantes.

Exemplo

Resolva o sistema: $\begin{cases} x' - 2x - y = 2e^{t} \\ y' - x - 2y = -3e^{4t} \end{cases}$, com $x(0) = y(0) = 0$.

Resolução: Suponhamos que $\mathcal{L}\{x(t)\} = X(p)$ e $\mathcal{L}\{y(t)\} = Y(p)$.

- Aplicando o terorema sobre a transformada da derivada, teremos:

$$\mathcal{L}\{x'\} = pX(p) - x(0) = pX(p), \quad \mathcal{L}\{y'\} = pY(p) - y(0) = pY(p).$$

Assim,

$$\begin{cases} pX - 2X - Y = \frac{2}{p-1} \\ pY - X - 2Y = \frac{-3}{p-4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (p-2)X - Y = \frac{2}{p-1} \\ -X + (p-2)Y = \frac{-3}{p-4} \end{cases}$$

Exemplo

$$X(p) = \frac{\begin{vmatrix} \frac{2}{p-1} & -1 \\ -\frac{3}{p-4} & p-2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} p-2 & -1 \\ -1 & p-2 \end{vmatrix}} = \frac{2p^2-15p+19}{(p^2-4p+3)(p-1)(p-4)}$$

$$= \frac{2p^2-15p+19}{(p-1)^2(p-2)(p-3)}$$

Decompondo $X(p)$ em frações simples:

$$X(p) = \frac{A}{p-1} + \frac{B}{(p-1)^2} + \frac{C}{p-3} + \frac{D}{p-4}.$$

Exemplo

$$
\begin{aligned}
2p^2 - 15p + 19 &= A(p-1)(p-3)(p-4) + B(p-3)(p-4) \\
&\quad + C(p-1)^2(p-4) + D(p-1)^2(p-3).
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
p = 1:&\ 6 = -6B \Leftrightarrow B = -1; \\
p = 3:&\ -8 = -4C \Leftrightarrow C = 2; \\
p = 4:&\ -9 = 9D \Leftrightarrow D = -1; \\
p^3:&\ A + C + D = 0 \Leftrightarrow A = -1.
\end{aligned}
$$

Logo,

$$X(p) = -\frac{1}{p-1} + \frac{1}{(p-1)^2} + \frac{2}{p-3} - \frac{1}{p-4}.$$

Aplicando a transformada inversa de Laplace:

$$x(t) = -e^t + te^t + 2e^{3t} - e^{4t}.$$

Exemplo

Podemos usar a primeira equação do sistema para determinar y, i.e,

$$\begin{aligned} y &= x' - 2x - 2e^{t} \\ &= (te^{t} + 6e^{3t} - 4e^{4t}) - 2(-e^{t} + te^{t} + 2e^{3t} - e^{4t}) - 2e^{t} \\ &= -te^{t} + 2e^{3t} - 2e^{4t}. \end{aligned}$$

Muito Obrigado!!!

Previna-se da Covid-19.[1]

[1]Fica em casa, lave frequentemente as mãos.