MULENGA, ALBERTO

Investigação Operacional

uma abordagem introdutória

Curso: Área de Formação em Ciências de Administração e Gestão

Maputo, 2010

Prefácio

Investigação Operacional é uma metodologia administrativa que inclui, um conjunto de quatro ciências fundamentais para o processo de análise e preparação das decisões: a economia, a matemática, a estatística e a informática. Não sendo necessário explicar a importância relativa que estas disciplinas têm para o processo de tomada de decisão ao nível empresarial ou mesmo individual, neste manual, estas disciplinas, são tomadas e usadas como ferramentas para a manipulação das variáveis usadas na análise e preparação das decisões.

O manual de apontamentos de Investigação Operacional para os cursos de formação em ciências de administração, gestão e tecnológicas, apresenta um conjunto de 6 capítulos, 68 exemplos resolvidos e 62 exercícios propostos, dando mais relevância aos problemas de optimização linear e modelos de apoio a decisão. Em cada capítulo, são apresentados os conceitos teóricos com exemplos resolvidos e uma secção de exercícios propostos com indicação das soluções e no fim deste, uma lista de referências com pelo menos três livros.

Os conteúdos dos capítulos são apresentados de forma simples e elementar para facilitar a compreensão dos mesmos, sendo assim, muitos dos problemas, estão estruturados de forma a motivar o estudante na criação dos modelos económico matemáticos, sem deixar de lado a interpretação económica das variáveis bem como das soluções dos modelos elaborados.

O autor apresenta, desde já, as suas desculpas pelos erros que poderão ser encontradas ao longo do manual. [(1)]

O autor: Alberto Mulenga
Maputo, 2010

[(1)] Todas as observações podem ser enviadas para: mulengamz@yahoo.com.br

ÍNDICE

1. INTRODUÇÃO

1.1 Definição da investigação operacional

O nome “Investigação Operacional – IO" apareceu pela primeira vez durante a Segunda Guerra Mundial, quando equipas de investigadores procuravam desenvolver métodos para resolver determinados problemas de operações militares. O sucesso destas aplicações levou o mundo académico e empresarial a procurar utilizar as técnicas criadas em problemas de administração. Segundo Ackoff, R.L(1968), por volta de 1950 a investigação operacional ou Operations Research (Britânico), Management Science (Americano) e Pesquisa Operacional (Brasileiro), já era reconhecida como objecto de estudo nas universidades e no mundo académico.

Churchman (1971), no seu livro sobre “Introdução à teoria dos sistemas”, considerou a Investigação Operacional, como a aplicação de instrumentos, técnicas e métodos científicos a problemas referentes ao funcionamento de um sistema, permitindo que os encarregados do seu controle, alcancem soluções óptimas para tais problemas. Para Richard, S.L (1974), a investigação operacional é uma aplicação sistemática da abordagem científica à investigação de problemas operacionais existentes ou previstos que requerem decisões pelos administradores. O Conselho da Sociedade de Pesquisa Operacional da Inglaterra, considera a investigação operacional como o ataque da ciência moderna a problemas complexos, como consequência da administração de grandes sistemas de homens, máquinas, materiais e dinheiro.

De um modo geral, a investigação operacional tem em vista trabalhar com factores inter-relacionados, aplicando sobre estes um conjunto de aspectos, diferentes técnicas quantitativas para permitir com um bom censo resolver problemas empresariais ao nível da administração.

A investigação operacional pode ser definida como:

- A arte de dar respostas óptimas a problemas que tratados de outra forma teriam respostas piores;
- O bom censo expresso em termos quantitativos;
- Ciência da preparação das decisões;
- A aplicação do método científico à direcção de uma empresa ou projecto, visando a optimização de suas decisões ou políticas, etc.

A abordagem mais característica da investigação operacional, utilizada pelos especialistas, consiste em procurar desenvolver um modelo científico do sistema em estudo, incorporando a medição ou quantificação de factores, tais como: o acaso e o risco; mediante os quais pode – se prever e comparar os resultados através do controle da estratégia usada, do número de alternativas de decisão, etc. O objectivo da pesquisa operacional é ajudar ao gestor a estabelecer suas linhas de acção de maneira científica, como resultado do emprego do **método quantitativo**, para equacionar e solucionar os problemas existentes

.

A Investigação Operacional tem sido vista pelos gestores e outros praticantes sob dois enfoques diferentes quanto à abordagem, mas coerentes e complementares na aplicação prática no campo da gestão empresarial:

(a) Enfoque clássico – busca da solução óptima. O investigador nesta aabordagem tem um conjunto de variáveis quantitativas, ele faz relaões funcionais ou sistema de equações, resolve obtém uma solução óptima.

(b) Enfoque actual – uso de modelos para identificação correcta do problema. Aqui o investigador, já utiliza variáveis quantitativas e qualitativas, relaciona as variáveis e produz modelos económico matemáticos. Do modelos derivam – se alternativas de solução e finalmente é escolhida uma destas alternativas como solução viável para o problema.

Pela natureza da investigação operacional muitas definições da investigação operacional podem ser feitas, todas estarão correctas se tiverem argumentos aceitáveis. Devemos salientar que historicamente o sucesso da investigação operacional sempre ficou relacionado com:

- A aplicação do método científico;
- A abordagem por equipa e inter - disciplinar;
- O envolvimento no controlo e organização dos problemas dos sistemas (pessoas – máquinas, recursos) para a obtenção de soluções óptimas.

1.2 Características e técnicas da investigação operacional

Características da Investigação Operacional

As principais características da investigação operacional são:

1. **Visão sistémica** – o estudo da Investigação Operacional consiste em construir um modelo de um sistema real existente como meio de analisar e compreender o comportamento desta situação. Esta visão é actualmente a mais importante da tendência da administração. O método da visão sistémica consiste em considerar a empresa ou cada parte da mesma como um sistema com várias variáveis inter-relacionadas. O sistema aqui considerado pode existir actualmente ou pode estar em concepção. No primeiro caso, o objectivo do estudo tem sido de analisar o desempenho do sistema para escolher um curso de acções no sentido de aprimorá-lo. No segundo caso, o objectivo é identificar a melhor estrutura do futuro sistema.

2. **A abordagem por equipa** – que consiste no uso de conhecimentos científicos por equipas inter- disciplinares (formação de conjuntos e subconjuntos de equipas entre o pessoal técnico, treinado, mestres, especialistas, etc.) para fazer um esforço conducente a determinação da melhor forma de utilização de recursos limitados. Esta característica multi- disciplinar de resolver os problemas organizacionais deu um novo enfoque a investigação operacional – a visão sistémica dos problemas.

3. **Uso de modelos matemáticos mais formais através das técnicas estatísticas e ou quantitativas** – esta característica facilita o processo de análise de decisão pela

visualização da estrutura real em análise e pela representação das informações e suas inter-relações.

4. **Buscar a optimização da solução dum problema** – que consiste em seleccionar a alternativa que melhor conduzirá a maximização dos lucros ou minimização dos custos.

5. **Emprego de simulação sobre os modelos** - que consiste em imitar o funcionamento de um sistema real, que não pode ser compreendido tal como está, recorrendo a uma representação adequada para fins experimentais ou de estudo do sistema real, desde que o sistema real seja determinístico e não estocástico.

O desenvolvimento dos computadores digitais, face a sua velocidade de processamento, capacidade de armazenamento e recuperação das informações, constituiu um imenso progresso da Investigação Operacional. Outro facto que actualmente contribuí para o uso intensivo de modelos em análise de decisões é a disseminação dos micro-computadores, que se tornaram unidades de processamentos descentralizados dentro das empresas, o que leva aos profissionais da investigação operacional num trabalho conjunto com os informáticos a desenvolverem softwares apropriados e modelos mais versáteis, rápidos e interactivos.

De uma forma geral, e segundo Taha, HA(1997), Andrade, EL(1998), um trabalho de Investigação Operacional, deve desenvolver-se seguindo as seguintes fases:

1. Definição do problema;
2. Construção do modelo;
3. Solução do modelo;
4. Validação do modelo;
5. Implementação da solução

(*) Avaliação

Técnicas da investigação operacional

A descrição sobre o conjunto das técnicas que compõem a investigação operacional, até aos nossos dias, não tem uma uniformidade. Assim, encontram-se "técnicas" designadas como "teorias", "métodos" ou "modelos" e vice-versa. Além disso, em cada uma das categorias, uma determinada técnica aparece com vários títulos diferentes; várias técnicas diferentes podem aparecer com o mesmo título e mesmo o nome investigação operacional aparece inserido numa outra categoria, etc.

Entre muitos autores, destacam-se Quesnay (1759), Walras (1874), Markov (1856 – 1922), von Neumann (1937), Kantorovich (1939), Wicks e Yewdale (1971), Ackoff (1971), Duckworth (1972), etc., que contribuíram significativamente na divisão da Investigação Operacional em diversas categorias.

O critério usado na sucinta descrição foi o de tratar em separado, quando possível, as várias técnicas, teorias, métodos e modelos que precisamente são discutidos em muitas outras áreas do conhecimento científico.

1. Estatística matemática: teoria das probabilidades e estatística;
2. Teoria de informação e apoio a decisão: análise de decisão e jogos, problemas das filas de espera, gestão de estoques, planeamento e controlo de projectos, etc.,
3. Programação matemática: linear, inteira, dinâmica, não linear, problemas de transporte e distribuição ou afectação de recursos, etc.,
4. Simulação e método de Monte Carlo, dinâmica industrial, análise de redes, etc.

Mesmo considerando que a análise quantitativa é importante para a tomada de decisão, é necessário esclarecer aos utilizadores das técnicas ou métodos quantitativos, que nem todos os problemas são susceptíveis de solução pelas técnicas quantitativas. Uma aplicação bem sucedida dos métodos quantitativos, implica uma interacção entre as ciências matemáticas e as ciências do comportamento, pois o sistema em estudo interage com seres humanos, pois:

- Nem todos factores de um dado problema podem ser quantificados quando temos variáveis qualitativas.
- Variáveis não controláveis podem dificultar ao máximo o processo de modelação do problema, fazendo com que os modelos sejam menos perfeitos.
- O uso de números e de equações, dá uma aparência de exactidão científica.
- O desejo de confrontar demais os métodos quantitativos pode ser perigoso, pois chega-se a soluções matemáticas que carecem de uma interpretação social.

(Modelos de Optimização Linear --- Modelos de Apoio a Decisão)

Matemática, Soluções exactas **Objectivo**: solução óptima	Teoria de Informação Soluções viáveis **Objectivo**: Gerir melhor os recurso e satisfazer os interesses de uma organização

Referências:

ACKOFF, RL, Sasieni, M.W(1968) – Fundamentals of Operations Research, John Wiley & Sans, Inc USA.
ANDRADE, EL (1998) – Introdução à Pesquisa Operacional – métodos e modelos para a análise de decisão, 2ª edição, editora LTC, RJ, Brasil
FARIA, AN(1978) – Dinâmica da Administração – perspectivas e projectos, editora LTC, Rio de Janeiro, Brasil;
HILLIER, FS; Gerald, J.L(1995) – Introduction to Operations Research – sexth Edition, McGraw-Hill, International Editions, Singapure;
TAHA, HA(2003) – Operations Research an Introduction, sixth edition, Prentice – Hall International, Inc, USA

2 PROGRAMAÇÃO LINEAR

2.1 INTRODUÇÃO

Designa - se por programação linear (PL) um conjunto de técnicas que permitem resolver os problemas de optimização, num sistema de recursos limitados, sendo lineares, quer a função objectivo, quer as restrições.

A importância especial da programação linear, resulta não só das potencialidades dos seus algorítmos de resolução e da sua grande aplicação prática, mas também da sua génese de estar directamente relacionada com o desenvolvimento dos próprios conceitos fundamentais das teorias de optimização. Os principais desenvolvimentos teóricos da programação linear são devidos a Kantorovich (1939) e a um grupo de cientístas americanos que lançaram as bases da programação linear entre 1939 à 1951, nos quais se destacam os nomes de von Neumann, Harold, W.Kuhn e A.W.Tucker.

A programação linear lida-se com problemas que dizem respeito à atribuição e a distribuíção de recursos entre as diversas tarefas ou actividades que devem ser realizadas. Normalmente, os recursos disponíveis não são suficientes para que todas as actividades sejam executadas no nível desejado. Assim, o que se procura, é encontrar a melhor distribuição possível dos recursos, de forma a atingir um valor óptimo objectivo que pode ser a maximização dos lúcros ou a minimização dos custos.

Assim, um problema de programação linear é caracterizado por três elementos básicos:
1. Variáveis de decisão, que são o centro das atenções na resolução do problema;
2. Existência de um objectivo, expresso em termos das variáveis de decisão;
3. Existência de restrições à aplicação dos recursos, tanto em relação às quantidades disponíveis como em relação à forma de emprego.

Os estudos de programação linear permitem responder questões como:
1. Estando presentes certas condições de produção, qual a quantidade de um determinado produto, entre vários, que se deve produzir para obter o maior lúcro possível?.
2. Sendo impostas algumas especificações, qual é a composição da mistura que corresponde ao custo mínimo?.
3. Estando impostas as condições de trabalho, como repartir o conjunto de mão-de-obra entre as diferentes tarefas e especialidades, com o objectivo de minimizar as despesas ou maximizar a eficiência?.

Exemplo 2.1. Uma companhia de montagem de lâmpadas, usa dois modelos para a montagem: o modelo actual automático e o modelo antigo com acessoria. Cada pessoa no modelo actual requer 1 hora de trabalho se vier do departamento de corte e 3 horas se vier do departamento de verificação. No modelo antigo, cada pessoa necessita de 2 horas de trabalho, se vier do departamento de corte e 4 horas de trabalho se, fôr do departamento de verificação. O número máximo de horas de trabalho por dia para o departamento de corte e de 32 enquanto no departamento de verificação é 84. Se a companhia recebe um lucro de 50 u.m. por cada lâmpada vinda do modelo actual e 80 u.m. do modelo antigo, quantas lâmpadas devem ser produzidas por dia em cada modelo de modo que a companhia maximize o lucro diário?.

Resolução
Este é um exemplo típico de um problema de programação linear. Para tornar claro, as relações entre o objectivo e as restrições, apresenta-se a tabela 1.

Tabela 1.1. Resumo dos dados do problema.

Departamento	Horas de trabalho por pessoa		número máximo de horas de trabalho
	modelo actual	modelo antigo	
de Corte	1	2	32
de verificação	3	4	84
lucros por lampada	50	80	

2.1.1 Formulação do modelo matemático dos problemas de programação linear

O método usado para a formulação dos problemas de programação linear tem uma determinada lógica, ainda que esta não seja rigorosamente seguida:

1. Análise qualitativa do problema, que depende da experiência adquirida anteriormente, isto é, a sensibilidade de analisar e relacionar a informação;
2. Formulação do problema, i.é, a definição das variáveis de decisão, da função objectiva e das restrições;
3. Elaboração do modelo matemático que consiste na indicação das relações entre as variáveis de decisão, a função objectivo e as restrições.

Retomando ao exemplo 2.1, teremos:
Variáveis de decisão:
x_1 – número de lâmpadas produzidas no modelo actual por dia;
x_2 – número de lâmpadas produzidas no modelo antigo por dia.

Função objectivo:
O objectivo da companhia é decidir quantas lâmpadas são necessárias por dia para cada modelo, de modo que ele tenha o máximo de lucro diário.
A função lucro deste problema é*:* $L = 50x_1+80x_2 \rightarrow$ função objectivo

Restrições
Restrições são inequações ou equações que representam as relações entre as quantidades produzidas, as composições das horas e a disponibilidade máxima do recurso. Assim temos:
- Restrição para o departamento de corte: $1x_1 + 2x_2 \leq 32$
- Restrição para o departamento de verificação: $3x_1 + 4x_2 \leq 84$
- Como não podemos produzir um número negativo de lâmpadas, então adiciona-se as restrições de não negatividade: $x_1 \geq 0$ e $x_2 \geq 0$ ou usualmente $x_1, x_2 \geq 0$.

Partindo das situações anteriores, escreve-se o modelo matemático do problema de programação linear.

Maximizar $Z = 50x_1 + 80x_2$ $\rightarrow$ função objectiva

Sujeito à $\begin{cases} 1x_1 + 2x_2 \leq 32 \\ 3x_1 + 4x_2 \leq 84 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$ $\rightarrow$ conjunto das restrições

Qualquer solução que satisfaz todas as restrições do modelo é uma ***solução possível ou admissível.*** Por exemplo, o para de valores $x_1 = 2$ e $x_2 = 5$ é uma solução possível poís não viola nenhuma das restrições incluindo as de não negatividade. Para verificar basta substituir em cada uma das restrições:
1ª restrição: 1*2 + 2*5 = 12 < 32, verdadeiro;
2ª restrição: 3*2 + 4*5 = 26 < 84, verdadeiro;
o lucro possível para esta solução é: Z = 50*2 +80*5 = 500 u.m.

Variando os valores a atribuir as variáveis de decisão, podemos encontrar outra solução admissível, entretanto o objectivo da optimização linear é encontrar entre todas as soluções possíveis, uma ***solução óptima possível***. Para que o processo não seja por tentativas, existem métodos específicos que são usados para encontrar as soluções óptimas. Para o exemplo 2.1, a solução óptima é: $x_1 = 20$; $x_2 = 6$ com Zmax = 1480 u.m.

No exemplo anterior, assumimos que tanto a função objectiva como as restrições são todas lineares. Intrinsecamente utilizamos duas proposições:

Proposição 1. Porporcionalidade – nos modelos de programação linear, a contribuição das variáveis de decisão na função objectivo e nas restrições é directamente proporcional aos valores que as variáveis assumem.

Proposição 2. Aditividade – a contribuição total de todas as variáveis na função objectivo e em cada restrição é igual a soma das contribuições individuais de cada variável.

Exemplo 2.2. Um alfaiate tem disponível 16 m^2 de algodão, 11 m^2 de seda e 15 m^2 de lâ. A confecção de um fato necessita de 2 m^2 de algodão, 1 m^2 de seda e 1 m^2 de lã, e um vestido gasta 1, 2 e 3 m^2 dos mesmos tecidos, respectivamente. Se um fato é vendido à 30 u.m (unidades de medida) e um vestido por 50 u.m., quantas unidades de cada artigo fato ou vestido deve o alfaiate confeccionar de modo a obter maior lucro?.

Resolução

	artigos		
tecidos	fato	vestido	Disponível
algodão	2	1	16
seda	1	2	11
lâ	1	3	15
preço de venda (u.m)	30	50	

O modelo económico - matemático correspondente é:

Maximizar $Z = 30x_1 + 50x_2$ $\rightarrow$ função objectivo max $Z = f(x_1,x_2)$

$$\text{Sujeito à } \begin{cases} 2x_1 + 1x_2 \leq 16 \\ 1x_1 + 2x_2 \leq 11 \\ 1x_1 + 3x_2 \leq 15 \\ x_1 ; x_2 \geq 0 \end{cases} \rightarrow \text{ conjunto de restrições incluindo as de não negatividade}$$

Exemplo 2.3. Um indivíduo pretende fazer uma selecção dum conjunto de 5 alimentos básicos. Por forma a conseguir estruturar uma dieta que, do ponto de vista nutritivo, tenha como normas mínimas de calorias e vitaminas, respectivamente, 70 e 50 unidades, gastando o mínimo possível. Os preços de venda dos alimentos, bem como a sua composição em elementos nutritivos são dados pelo seguinte quadro.

Elemento nutritivo	Alimentos				
	A	B	C	D	E
Calorias	1	0	1	1	2
Vitaminas	0	1	0	1	1
Custo unitário	2	20	3	11	12

Elabore o modelo matemático do problema.

Resolução

Minimizar $W = 2x_1 + 20x_2 + 3x_3 + 11x_4 + 12x_5$

$$\text{Sujeito à } \begin{cases} 1x_1 + 0x_2 + 1x_3 + 1x_4 + 2x_5 \geq 70 \\ 0x_1 + 1x_2 + 0x_3 + 1x_4 + 1x_5 \geq 50 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0 \end{cases}$$

Exemplo 2.4. Um agricultor precisa de 100 kg de Azoto (N), 120 kg de Fósforo (P) e 120 kg de Potássio (K), para adubar a sua plantação. Ele tem duas possibilidades no mercado, sendo uma na forma líquida em tambores que contém 50 kg de N, 20 kg de P e 10 kg de K ao preço de 30 u.m cada; outra empresa fornece adubo em sacos, contendo 10, 20 e 40 kg de N, P e K, respectivamente, ao preço de 20 u.m cada saco. Quantas embalagens de cada fonte deverá o agricultor comprar para suprir as suas necessidades pelo menor custo.

Resolução

Composição de adubo	Possibilidades de Mercado		Necessidade mínima
	Tambor	Sacos	
Azoto	50	10	100
Fósforo	20	20	120
Potássio	10	40	120
Custo (u.m)	30	20	

O modelo matemático correspondente é:

Minimizar W = 30 x_1 + 20x_2

$$\text{Sujeito à}\begin{cases}50x_1 + 10x_2 \geq 100\\ 20x_1 + 20x_2 \geq 120\\ 10x_1 + 40x_2 \geq 120\\ x_1, x_2 \geq 0\end{cases}$$

2.1.2 Definição geral dos problemas de programação linear

Todos os problema de optimização linear (programação linear), podem ser representados na forma:

Maximizar $Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_mx_m$ $\longrightarrow$ função objectivo ou de oportunidades

$$\text{Sujeito à}\begin{cases}a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1m}x_m \leq b_1\\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2m}x_m \leq b_2\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \longrightarrow \text{conjunto das restrições}\\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nm}x_m \leq b_n\\ x_1, x_2, \ldots, x_n \geq 0\end{cases}$$

Admite-se que, em lugar de maximizar, haja minimizar, e em lugar de menor ou igual (≤) seja maior ou igual (≥) ou mesmo igual (=).

Assim, para os problemas de maximização usa-se o sinal (≤) e para os problemas de minmização usa-se o sinal (≥). Se uma ou mais restrições apresentar o sinal de igualdade (=), esta pode ser substituida por duas inequações, em seguida uma das inequações deverá ser multiplicada por (-1), caso seja necessário, para satisfazer a função objectivo.

Por exemplo: $2x_1+3x_2 = 4$ equivale a escrever o sistema $\begin{cases}2x_1 + 3x_2 \leq 4\\ 2x_1 + 3x_2 \geq 4\end{cases}$

Na notação algébrica, o problema de programação linear pode ser representado na seguinte forma:

$$\text{Maximizar } Z = \sum_{i=1}^{m} c_i x_i \qquad ; \quad i = 1,2,\ldots,m$$

$$\text{Sujeito à}\begin{cases}\sum_{i=1}^{m} a_{ij}x_j \leq b_j & ; \quad j = 1,2,\ldots,n\\ x_i \geq 0\end{cases}$$

Ou ainda na forma matricial tem-se:

Maximizar Z = ΣCX

Sujeito à $\begin{cases} AX \le B \\ X \ge 0 \end{cases}$

onde A é matriz dos coeficientes das restrições, C e B são os vectores linha e coluna respectivamente.

2.1.3 EXERCÍCIOS PROPOSTOS

Exercício 2.1. Um padeiro dispõe de 150, 90 e 150 unidades dos ingredientes A, B e C respectivamente. Cada pão necessita de 1 unidade de A, 1 de B e 2 de C, e um bolo precisa de 5, 2 e 1 unidades de A, B e C, respectivamente. Se um pão é vendido a 35 u.m., e um bolo é vendido por 80 u.m. Como deve o padeiro distribuir as matérias-primas disponíveis de modo a obter o maior lucro?. Elabore o modelo matemático correspondente a este problema de programação linear.

Exercício 2.2. Cada kg do alimento A custa 85 u.m. e contém 2 unidades de proteína, 6 de hidrato de carbono e 1 de gordura. O alimento B que se pode comprar a 45 u.m. por kg, contém 1, 1 e 3 unidades, daqueles produtos, respectivamente. Supondo que as necessidades semanais mínimas de uma pessoa são 8 unidades de proteínas, 12 de hidrato de carbono e 9 de gordura. Elabore o modelo económico - matemático de forma que a pessoa economize os seus gastos.

Exercício 2.3. Certa empresa fabrica 2 produtos P1 e P2. O lucro por unidade de P1 é de 100 contos e o lucro unitário de P2 é de 150 contos. A empresa necessita de 2 horas para fabricar uma unidade de P1 e 3 horas para fabricar uma unidade de P2. O tempo mensal disponível para essas atividades é de 120 horas. As demandas esperadas para os dois produtos levaram a empresa a decidir que os montantes produzidos de P1 e P2 não devem ultrapassar 40 unidades de P1 e 30 unidades de P2 por mês. Construa e resolva o modelo do sistema de produção mensal com o objetivo de maximizar o lucro da empresa.

Exercício 2.4. A empresa Sementes de Moçambique (SEMOC), pretende semear arroz e milho, dispondo para tal de áreas que não excedem, respectivamente, 3 e 4 hectare nos arredores de Boane. Por outro lado, as suas disponibilidades em trabalho são apenas de 9 horas diárias. Admitindo que, por cada hectare semeado de arroz é necessário 1 hora de trabalho diário e por cada hectare de milho são necessárias 2 horas. Sabendo que por cada hectare de arroz semeado o lucro é de 5 u.m. e por cada hectare de milho 2 u.m, formule o problema como um problema de programação linear.

Exercício 2.5. Dois países A e B, emprestam dinheiro a outro pais C. Por cada unidade monetária concedida pelo pais A, este cobra anualmente do pais C, uma tonelada de cortiça, 5 toneladas de trigo e 3 toneladas de peixe. Por cada unidade monetária concedida pelo pais B, são cobrados anualmente ao pais C, uma tonelada de cortiça, 2 toneladas de trigo e 8 toneladas de peixe. Anualmente o pais C não tem disponíveis mais de 20 toneladas de cortiça, 100 toneladas de trigo e 120 toneladas de peixe. Sabendo que por cada unidade monetária emprestada, o pais C recebe do pais A 500 espingardas e do pais B 300 metralhadoras, formule o problema de programação linear que maximize o número de armas que C pode adquirir por este processo.

Exercício 2.6. Uma companhia de aluguel de camiões possuí dois tipos: o tipo A com 2 m^3 de espaço refregerado e 4 m^3 de espaço não refregerado e o tipo B com 3 m^3 refregerado e 3 m^3 não refregerado. Uma fábrica de produtos alimentícios precisou transportar 9 m^3 de produto refregerado e 12 m^3 de produto não refregerado. Quantos camiões de cada tipo deve ser ela alugado, de modo a minimizar o custo, se o aluguel de um camião do tipo A é 30 u.m por km e do B é 40 u.m por km.
Formule o problema de programação linear da fábrica que necessita de transportar os seus produtos.

Exercício 2.7. Uma pequena manufatura produz dois modelos, Standart e Luxo, de um certo produto. Cada unidade do modelo standart requer 3 horas de lixação e 1 hora de polimento. Cada unidade do modelo de luxo exige 1 hora de lixação e 4 horas de polimento. A fábrica dispõe de 2 lixadores e 3 polidores, cada uma trabalha 40 horas semanais. As margens de lucro são 24 e 32 unidades de medida, respectivamente, para cada unidade standart e luxo. Não existem restrições de demanda para ambos os modelos. Elabore um modelo de programação linear que permita calcular a produção semanal que maximiza a margem total de lucro do fabricante.

Exercício 2.8. Um médico tem de escrever um artigo, para publicação numa revista, subordinada ao tema da composição de uma refeição à base de carnes e legumes, em quantidades de acordo com um mínimo nutricional exigido e de modo a que o custo dessa refeição fosse mínimo. Ele sabe que cada refeição deve conter um mínimo de 8 unidades de carbohidratos, 15 unidades de proteinas e 6 unidades de vitaminas.
Sabe também, que o custo de cada unidade de carne é de 5 u.m. e o custo de cada unidade de legumes é de 4 u.m.
O número de unidades dos três factores contidos em cada unidade dos dois alimentos acima descritos são:

	Carne	Legumes
Carbohidratos	3	1
Proteinas	4	4
Vitaminas	1	1

O dietista pretende indicar que quantidades de cada alimento devem ser compradas para que se possa obter o mínimo nutricional requerido com um custo mínimo. A que conclusão terá chegado?.

2.2 RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS DE PL PELO MÉTODO GRÁFICO

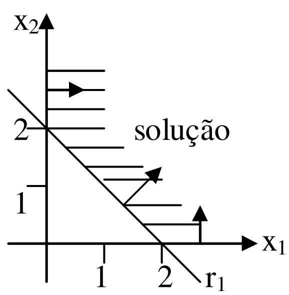
O método gráfico pode ser aplicado para resolver os problemas de programação linear de forma eficiente, apenas quando a função objectivo e o conjunto das restrições tiver duas variáveis de decisão.

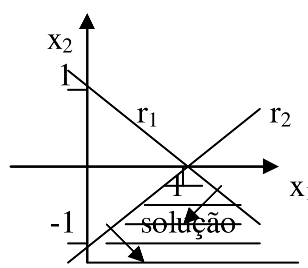
Para compreender o procedimento de resolução, comecemos por introduzir a noção de domínio ou conjunto solução de um sistema de inequações.

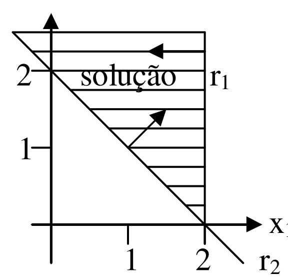
2.2.1 Domínio das soluções admissíveis

Dado um sistema de inequações, para encontrar o domínio solução, deve-se representar cada uma das inequações no sistema de coordenadas rectangulares de Descartes, em seguida indicar a intersecção de todos os semi-planos que satisfazem as inequações. É precisamente a área intersecção de todos os semi-planos, o conjunto ou domínio solução do sistema de inequações.
Exemplos:

a) $\begin{cases} x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \\ x_1 + x_2 \geq 2 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x_1 + x_2 \leq 1 \\ x_1 - x_2 \geq 1 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x_1 \leq 2 \\ x_1 + x_2 \geq 2 \end{cases}$

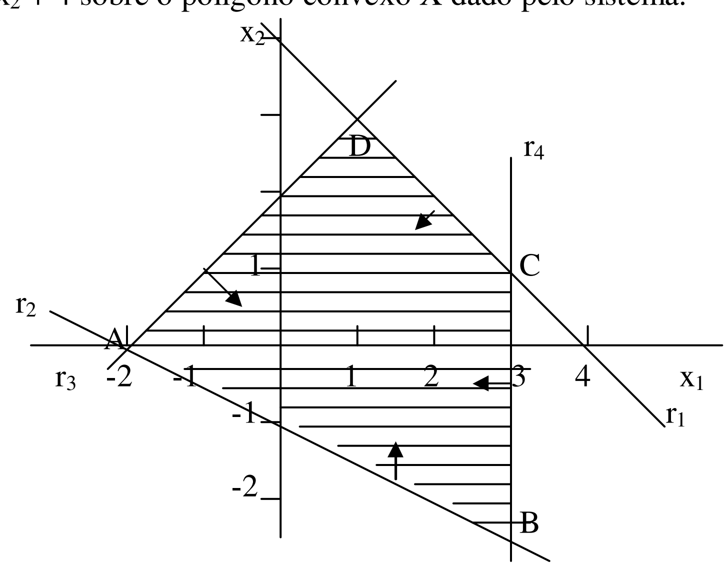






Agora que podemos determinar o conjunto solução, vamos calcular o máximo e mínimo da função $f = x_1 - 2x_2 + 4$ sobre o polígono convexo X dado pelo sistema.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \leq 4 \\ x_1 + 2x_2 \geq -2 \\ x_1 - x_2 \geq -2 \\ x_1 \leq 3 \end{cases}$$



Os pontos A, B, C e D são chamados pontos extremos do polígono.
As coordenadas de cada ponto podem ser obtidas resolvendo o sistema de duas equações de rectas que passam por cada ponto.

Assim, a solução do sistema $\begin{cases} x_1 + 2x_2 = -2 \\ x_1 - x_2 = -2 \end{cases}$ define as coordenadas do ponto A(-2;0).

Assim: A = $r_2 \cap r_3 \rightarrow$ A(-2;0) ; B = $r_2 \cap r_4 \rightarrow$ B(3,-5/2);
C = $r_1 \cap r_4 \rightarrow$ C(3,1) e D = $r_1 \cap r_3 \rightarrow$ D(1;3).

Calculando o valor da função f em cada ponto extremo temos:
f(A) = 2; f(B) = 12; f(C) = 5 e f(D) = -1, portanto, o máximo da função f sobre X é 12 e ocorre no ponto B e o mínimo é –1, ocorre no ponto D.

Para os problemas de programação linear com inequações a duas variáveis, o método gráfico consiste em construir através das restrições um conjunto das soluções possíveis e tomar o ponto máximo (para maximização) ou mínimo (para minimização) como solução óptima.

Vejamos através de um exemplo.

Resolver gráficamente o problema de programação linear:

Maximizar $Z = 3x_1 + 2x_2$

Sujeito à $\begin{cases} -3x_1 + 4x_2 \leq 12 \\ 2x_1 + x_2 \leq 14 \\ 2x_1 - 3x_2 \leq 6 \\ x_1; x_2 \geq 0 \end{cases}$

Passo 1. Transformar as inequações em equações:

Maximizar $Z = 3x_1 + 2x_2$

Sujeito à $\begin{cases} -3x_1 + 4x_2 = 12 & r_1 \\ 2x_1 + x_2 = 14. & r_2 \\ 2x_1 - 3x_2 = 6 & r_3 \\ x_1 = 0; x_2 = 0 & r_4, r_5 \end{cases}$

Passo 2. Representar num mesmo sistema de coordenadas, todas rectas e considerar os semi-planos que satisfazem as inequações correspondentes.

R_1:

x_1	x_2
0	3
-4	0

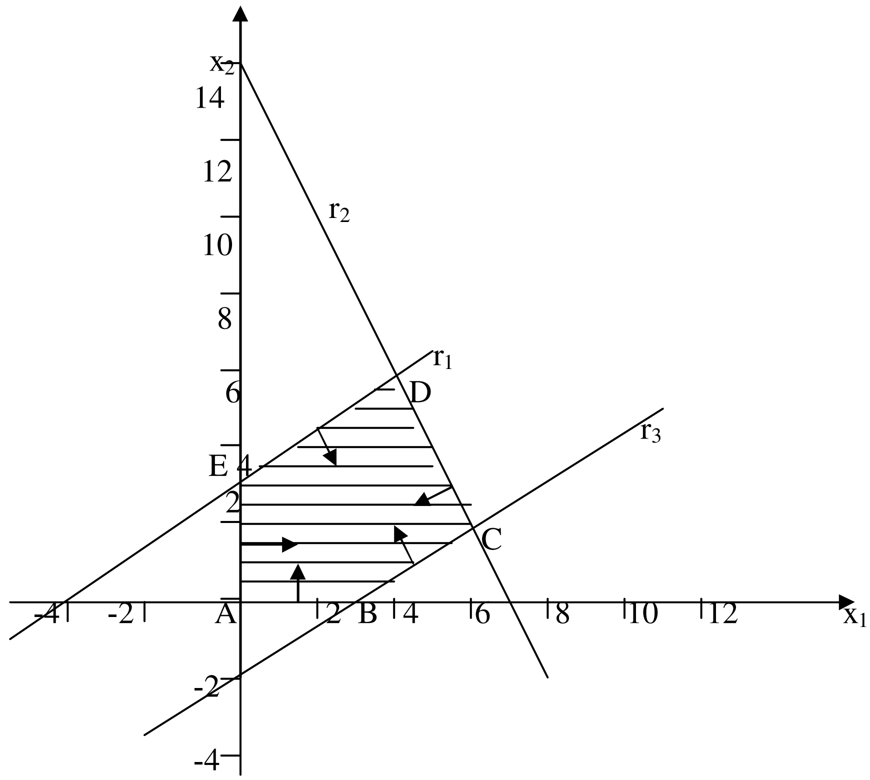
R_2:

x_1	x_2
0	14
7	0

R_3:

x_1	x_2
0	-2
3	0

R_4: $x_2 = 0$; R_5: $x_1 = 0$



Como encontrar o ponto óptimo?.

Conhecida a região, domínio solução ou conjunto das oportunidades da solução, existêm duas possibilidades para chegar a solução.

Primeira possibilidade:

1. Calcular as coordenadas de todos os pontos que estão nas extremidades da área do domínio solução (neste caso os pontos são A,B,C,D e E).
2. Calcular o valor da função objectivo para cada ponto. O valor máximo é a solução óptima para o problema de maximização e o mínimo é solução óptima para o problema de minimização

.

Da figura anterior teremos:	Para maximizar $Z = 3x_1 + 2x_2$
$A = r_4 \cap r_5 = \{x_1=0 \;\Lambda\; x_2 = 0\} \Rightarrow A(0;0)$	$Z(A) = 0 + 0 = 0;$
$B = r_3 \cap r_4 = \{2x_1-3x_2 = 6 \;\Lambda\; x_2 = 0\} \Rightarrow B(3;0)$	$Z(B) = 9 +0 = 9;$
$C = r_2 \cap r_3 = \{2x_1+x_2 = 14 \;\Lambda\; 2x_1-3x_2 = 6\} \Rightarrow C(6;2)$	$Z(C) = 18+ 4 = 22;$
$D = r_1 \cap r_2 = \{-3x_1+4x_2 = 12 \;\Lambda\; 2x_1+x_2 =14\} \Rightarrow D(4;6)$	$Z(D) = 12+12 = 24;$
$E = r_1 \cap r_5 = \{-3x_1+4x_2 = 12 \;\Lambda\; x_1 = 0\} \Rightarrow E(0;3)$	$Z(E) = 0 + 6 = 6$

Segundo os valores da função objectivo e pelo objectivo exposto a solução óptima é SPL = $\{x_1 = 4; x_2 = 6$ com $Z_{max} = 24$ unidades de medida$\}$.

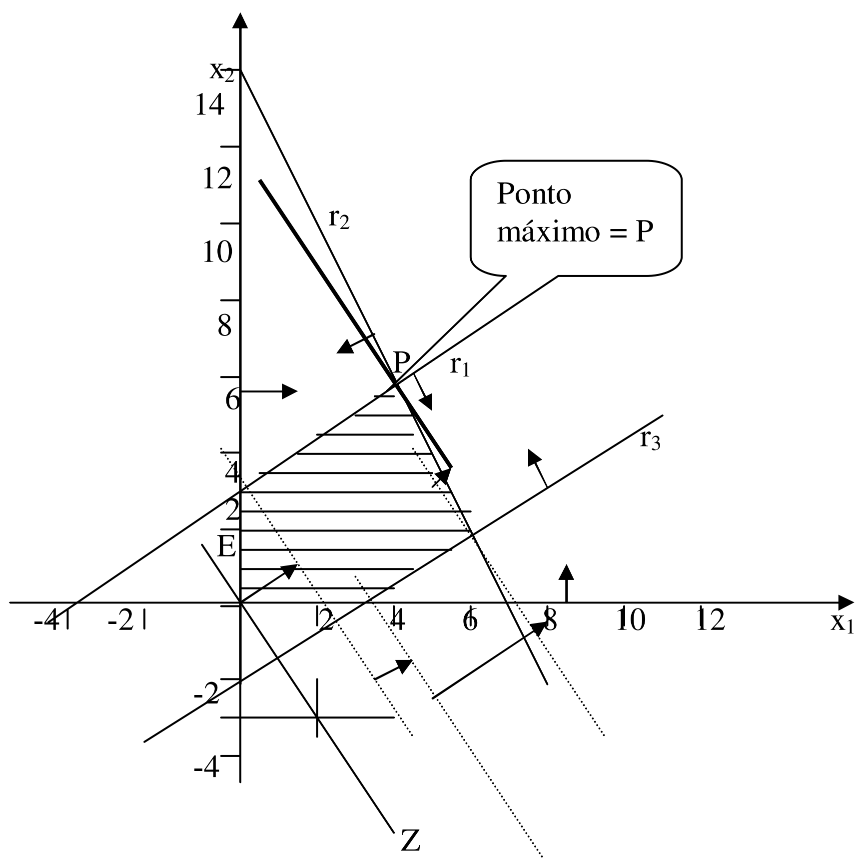
Segunda possibilidade:

A segunda possibilidade e mais prática na abordagem da programação linear consiste em:

1. Igualar a função objectivo a zero, o que significa que o valor mínimo de Z é igual a zero e em seguida expressar x_2 em função de x_1 ou vice-versa: $x_2 = f(x_1)$, é a recta Z.
2. Traçar a recta Z no mesmo sistema cartesiano onde estão todas restrições anteriores. A recta z ou $x_2 = f(x_1)$, deve passar pelos pontos Po(0,0) e por um outro qualquer $P_1(x_1,x_2)$.
3. Deslocar ou traçar uma família de rectas paralelas à função objectivo no sentido desejado, até atingir o primeiro ponto (min) ou o último ponto (max). Este é o ponto óptimo. As coordenadas deste ponto definem as quantidades a combinar na função objectivo.

$Z = 3x_1+2x_2= 0 \Rightarrow x_2 = -\frac{3x_1}{2}$ Recta Z:

x_1	x_2
0	0
2	-3



$$P = r1 \cap r2 \Rightarrow \begin{cases} -3x_1 + 4x_2 = 12 \\ 2x_1 + x_2 = 14 \quad /(*-4) \end{cases} \qquad \begin{array}{r} \begin{cases} -3x_1 + 4x_2 = 12 \\ -8x_1 - 4x_2 = -56 \; + \end{cases} \\ \hline -11x_1 + 0 = -44 \end{array} \quad \text{de onde } x_1 = 4$$

Substituindo na equação 2, temos $x_2 = 6$; logo a solução é

$S = \{x_1 = 4; x_2 = 6 \text{ com } Z_{max} = 24\}$

Observações:

Nos problemas de programação linear podem ocorrer os seguintes casos:

- Uma única solução, esta é obtida num ponto extremo do domínio solução;
- Duas ou mais soluções (solução múltipla), quando a função objectivo assume o seu valor óptimo em mais de um ponto extremo;
- Uma solução infinita, geralmente quando as restrições estão mal elaboradas, pois tendo recursos finitos não se poderia aumentar infinitamente os lucros ou despesas;
- Não ter nenhuma solução, quando as restrições não apresentam um plano comum.

Exemplo 2.5.Uma pessoa precisa de 10, 12, e 12 unidades dos produtos químicos A, B e C, respectivamente para o seu jardim. Um produto líquido contém 5, 2 e 1 unidades de A, B e C, respectivamente por vidro; um produto em pó contém 1, 2 e 4 unidades de A, B e C, respectivamente por caixa. Se o produto líquido custa 3 u.m. por vidro e o produto em pó custa 2 u.m. por caixa, quantos vidros e quantas caixas ele deve comprar para minimizar o custo e satisfazer as necessidades?.

Resolução

A seguinte tabela resume os dados do problema

	Unidades por vidro	Unidades por caixa	Unidades Necessárias
Produto A	5	1	10
Produto B	2	2	12
Produto C	1	4	12
Preço (u.m)	3	2	

O modelo matemático é:

Minimizar W = $3x_1 + 2x_2$ recta W, se w = 0 então $x_2 = -\dfrac{3x_1}{2}$

Sujeito à $\begin{cases} 5x_1 + 1x_2 \geq 10 \\ 2x_1 + 2x_2 \geq 12 \\ 1x_1 + 4x_2 \geq 12 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$ as equações são $\begin{cases} 5x_1 + 1x_2 = 10 & r_1 \\ 2x_1 + 2x_2 = 12 & r_2 \\ 1x_1 + 4x_2 = 12 & r_3 \\ x_1 = 0; x_2 = 0 \end{cases}$

R_1:

x_1	x_2
0	10
2	0

R_2:

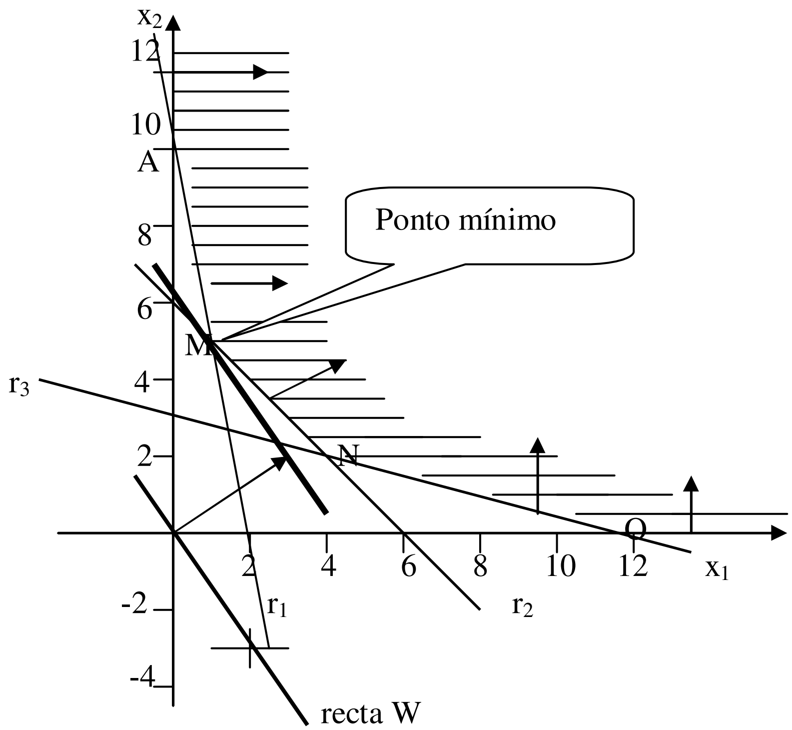
x_1	x_2
0	6
6	0

R_3:

x_1	x_2
0	3
12	0

W:

x_1	x_2
0	0
2	-3



A, M, N e O são os pontos extremos do domínio solução e M é o ponto mínimo.
M = r1 $\cap$ r2, resolvendo o sistema de duas equações temos:

$$\begin{cases} 5x_1 + 1x_2 = 10 \\ 2x_1 + 2x_2 = 12 \end{cases} \quad \text{solução} \quad \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 5 \end{cases} \qquad ; W_{min} = 3*1+2*5 = 13$$

Resposta: a pessoa deve comprar 1 vidro e 5 caixas e terá um custo mínimo de 13 unidades monetárias.

Exemplo 2.6. Uma empresa pode recorrer à utilização de dois computadores A e B para obter a emissão dos recibos aos seus clientes. Cada período de utilização do computador A é de 4 horas, custa à empresa 20 u.m e obtém-se a emissão de 1200 recibos, enquanto que um período de utilização do computador B é de 3 horas e custa a empresa 50 u.m., obtendo em contrapartida 1900 recibos. Sabendo que a empresa não consegue obter automáticamente, a emissão de todos os recibos, nas 84 horas e com os 760 u.m que dispõe mensalmente para a utilização dos computadores A e B, como é que se pode programar a utilização destes, de modo a obter o máximo de recibos.

Resolução
Tabela auxiliar dos dados:

	Computador A	Computador B	Disponível por mês
Horas por período	4	3	84
Custo por período	20	50	760
Recibos por computador/p	1200	1900	

O modelo do problema é:

Maximizar $Z = 1200x_1 + 1900x_2$ Recta Z = 0 $\Rightarrow$ $x_2 = -\frac{12x_1}{19}$

Sujeito à $\begin{cases} 4x_1 + 3x_2 \le 84 \\ 20x_1 + 50x_2 \le 760 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$ $\begin{cases} 4x_1 + 3x_2 = 84 & r_1 \\ 20x_1 + 50x_2 = 760 & r_2 \\ x_1 = 0; x_2 = 0 \end{cases}$

R_1:

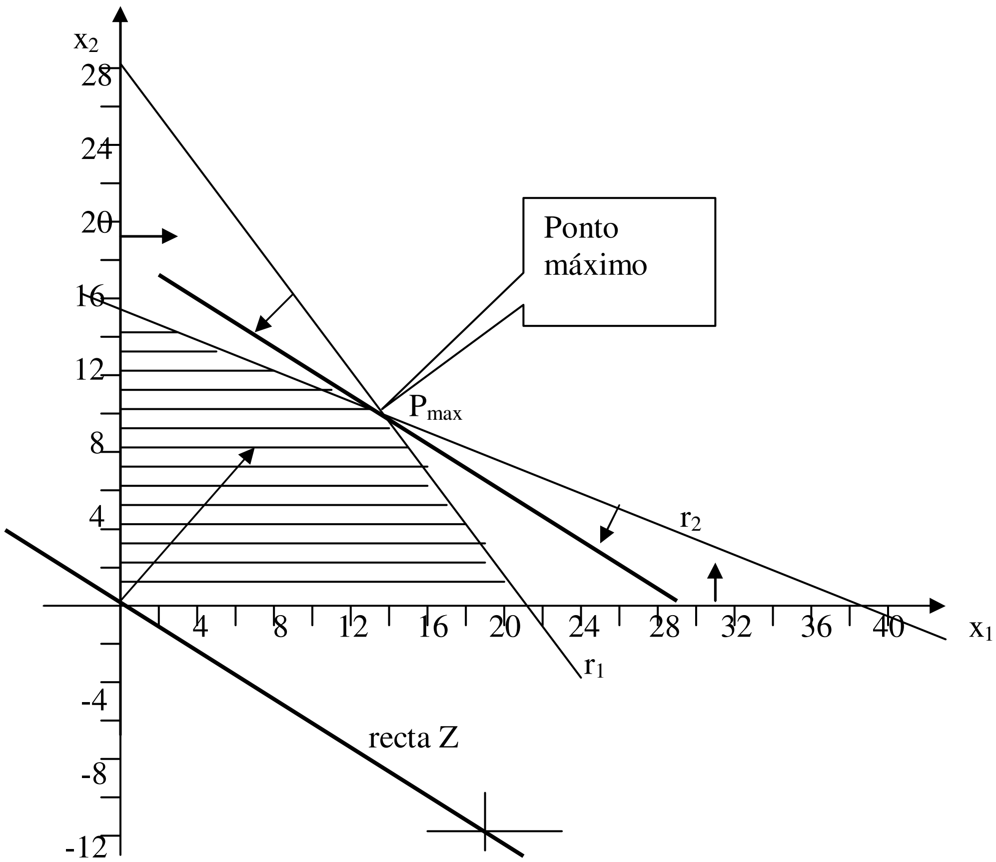
x_1	x_2
0	28
21	0

R_2:

x_1	x_2
0	15.2
38	0

Z:

x_1	x_2
0	0
19	-12



O ponto P_{max}= R1 $\cap$ R2 e do sistema $\begin{cases} 4x_1 + 3x_2 = 84 \\ 20x_1 + 50x_2 = 760 \end{cases}$

Calculamos os valores: $x_1 = \frac{68}{7}$; $x_2 = \frac{96}{7}$; $Z_{max} = \frac{244400}{7}$.

Resposta: a empresa deve programar utilizar 9.71 vezes o computador A e 13.71 vezes o computador B . O número máximo de recibos que irá emitir será igual a 34914.

Resumo:

Teorema 1. (teorema fundamental de programação linear): se existe um valor óptimo da função objectivo num problema de programação linear, este valor ocorre em um ou mais pontos extremos da região das soluções admissíveis.

Teorema 2 (teorema de existência de solução): Dado um problema de programação linear e S o conjunto solução da função objectivo $z = ax_1 + bx_2$

- Se S é uma área fechada, então existe um máximo e um mínimo para z.;
- Se S não é uma área fechada e a > 0 e b > 0, então existe apenas o mínimo da função z e não existe o ponto máximo sobre S;
- Se S é um conjunto vazio, não existe nem máximo nem mínimo da função z.

2.2.2 Procedimento do método

As regras gerais para a resolução dos problemas de programação linear pelo método gráfico, resumem-se nos passos:

Passo 1. Para um problema prático, destacar e colocar numa tabela as informações relevantes;
Passo 2. Escrever o modelo matemático do problema usando a sequência:

- Introduzir as variáveis de decisão e escrever a função objectivo;
- Escrever as restrições do problema, usando inequações ou equações;
- Escrever as restrições de não negatividade.

Passo 3. Representar num gráfico o conjunto solução. De acordo com o teorema 2 se existe solução, calcular as coordenadas deste ponto extremo.
Passo 4. Usando as coordenadas do passo 3, calcular o valor da função objectivo;
Passo 5. Interpretar a solução óptima, em função do enunciado do problema original.

2.2.3 EXERCÍCIOS PROPOSTOS

Exercício 2.9. Uma carpintaria deseja estabelecer um programa diário de produção dos seus artigos. Actualmente, a carpintaria faz apenas dois produtos: mesa e armário, ambos de um só modelo. Para efeito de simplificação, vamos considerar que a carpintaria tem limitações em somente dois recursos: madeira e mão-de-obra, cujas disponibilidades diárias são 12 m^2 e 8 homens por hora (H.h), respectivamente.
O processo de produção é tal que, para fazer 1 mesa a fábrica gasta 2 m^2 de madeira e 2 H.h de mão-de-obra. Para fazer um armário, a fábrica gasta 3 m^2 de madeira 1 H.h de mão-de-obra. Além disso, o fabricante sabe que cada mesa dá uma margem de contribuíção para lucro de 4 u.m, e cada armário, de 1 u.m.

a) Formule o modelo de programação linear que descreve este problema.
b) Usando o método gráfico, resolva o problema do fabricante de modo a encontrar o programa de produção que maximiza a margem de contribuição para lucro.
(***Resp***: $x_1 = 4$; $x_2 = 0$; $Z_{max} = 16$ u.m.)

Exercício 2.10. Um fabricante dispõe de 24, 37 e 18 quilos de madeira, plástico e aço, respectivamente. O produto A requer 1, 3 e 2 quilos de madeira, plástico e aço e o produto B requer 3, 4 e 1 quilos, respectivamente. Se A é vendido por 20 u.m e B por 30 u.m, quantos quilos de cada produto ele deve fazer de modo a obter o máximo rendimento bruto.
Escreva o modelo e resolva-o gráficamente. (***Resp:*** x_1= 3; x_2 = 7; Z_{max} = 270 u.m)

Exercício 2.11. A companhia Cervejas de Moçambique precisa, de 90, 120 e 260 caixas de cerveja de alta, média e baixa qualidades, respectivamente. Existem duas fábricas: a cerveja 2M que produz por dia 10, 30 e 40 caixas de alta, média e baixa qualidades e a cerveja Laurentina que produz por dia 20, 10 e 30 caixas, respectivamente. Se o custo operacional de cada fábrica for de 20 u.m por dia, durante quantos dias deve funcionar cada fábrica de modo a se minimizar o custo e satisfazer as necessidades da companhia.
(***Resp***: x_1 = 5; x_2 = 2; W_{min} = 140 u.m)

Exercício 2.12. Um paciente num hospital necessita no mínimo de 84 unidades de um medicamento M1, e 120 unidades de outro medicamento M2 por dia. Cada grama da substância A contém 10 unidades da M1 e 8 unidades da M2 e cada grama de substância B contém 2 unidades da M1 e 4 unidades da M2. Se cada grama de A custa 3 u.m e de B custa 1 u.m, quantas gramas de cada substância A e B, que o paciente deve tomar por dia de modo que ele melhore e minimize o seu dinheiro. Qual é o valor mínimo que ele vai gastar por dia. (***Resp***: x_1 = 4; x_2 = 22; W_{min} = 34 u.m)

Exercício 2.13. Usando o método gráfico, resolva as seguintes alíneas dos problemas de programação linear.

a) Maximizar $Z = 5x_1+5x_2$

$$\text{Sujeito à} \begin{cases} 2x_1 + x_2 \le 10 \\ x_1 + 2x_2 \le 8 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

(***Resp***: x_1 = 4; x_2 = 2; Z_{max} = 30)

b) Minimizar W = $10x_1+30x_2$

$$\text{Sujeito à} \begin{cases} 2x_1 + x_2 \ge 16 \\ x_1 + x_2 \ge 12 \\ x_1 + 2x_2 \ge 14 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

(***Resp***: x_1=14; x_2=0; W_{min} =140)

c) Maximizar $Z = 3x_1+4x_2$

$$\text{Sujeito à} \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 \le 12 \\ 4x_1 + 6x_2 \le 24 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

(***Resp***: x_1 =2.4; x_2 = 2.4; Z_{max} = 16.8

d) Minimizar $W = 20x_1+10x_2$

$$\text{Sujeito à} \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \ge 30 \\ 2x_1 + x_2 \le 26 \\ -2x_1 + 5x_2 \le 34 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

(***Resp***: x_1= 3; x_2= 8; W_{min} =140)

2.3 RESOLUÇÃO DOS PROBLEMAS DE PROGRAMAÇÃO LINEAR PELO MÉTODO SIMPLEX

2.3.1 Variáveis de folga, excesso e não restritas

Em todos os problemas anteriores, usamos os sinais (≤) e (≥) nas inequações das restrições e depois resolvemos o problema assumindo que todas variáveis eram não negativas. Nesta secção vamos definir dois tipos especiais de variáveis: as variáveis de ***folga*** e de ***excesso***, associadas com as restrições da forma ≤ e ≥ respectivamente, também faz-se uma introdução do conceito de variáveis ***não restritas***, cujo valor pode ser positivo, zero ou negativo.

Variável de Folga

Introduz-se uma variável de folga, para cada restrição do tipo ≤ no primeiro membro da inequação e transfoma-se esta em equação.

Uma variável de folga representa a diferença entre o limite máximo de um determinado recurso e as quantidades do mesmo recurso que forem usadas pelas diferentes actividades. Por exemplo, matemáticamente a restrição $6x_1 + 4x_2 \leq 24$ é equivalente a $6x_1 + 4x_2 + x_3 = 24$ e $x_3 \geq 0$, a variável de folga x_3 representa a quantidade do recurso que não foi utilizada: $x_3 = 24 - 6x_1 - 4x_2$.

Variável de Excesso

Restrições do tipo ≥ normalmente referem-se a quantidade mínima necessária que deve ser utilizada na combinação de diferentes actividades. A introdução de uma variável de excesso numa inequação, transforma esta em equação.

As variáveis de excesso representam o excesso da quantidade do recurso obtido pela combinação das actividades em relação ao recurso mínimo necessário. Por exemplo, a restrição $x_1 + x_2 \geq 80$, matemáticamente é equivalente a $x_1+x_2 - x_3 = 80$ e $x_3 \geq 0$.
A condição de não negatividade de x_3, significa que a quantidade atribuída a variável de excesso foi produzida na combinação das actividades x_1 e x_2 .($x_3 = x_1+ x_2 - 80$).

Variável não Restrita

Nos modelos passados assumimos a condição de não negatividade para todas variáveis. Suponhamos que num dado problema uma variável possa assumir qualquer valor real. Por exemplo:

Maximizar $Z = 0.20x_1 + 0.15x_2 + 0.25x_3$

$$\text{Sujeito à } \begin{cases} 0.25x_1 + 0.20x_2 + x_3 = 20 \\ x_1, x_2 \geq 0 \\ x_3 \ \ \textit{nao restrito} \quad \text{ou} \quad x_3 \in \text{R} \end{cases}$$

A variável x_3 pode ser de excesso ou folga. Em termos matemáticos a variável não restrita é substituida por duas variáveis não negativas: $x_3 = x_3^+ - x_3^-$ onde $x_3^+ ; x_3^- \geq 0$.

- Se $x_3^+ > 0$ e $x_3^- = 0$ então x_3^+ é variável de folga;

- Se $x_3^- > 0$ e $x_3^+ = 0$ então x_3^- é variável de excesso;
- Se $x_3^+ > 0$ e $x_3^- > 0$, o problema de propgramação linear não tem solução.

De um modo geral, o modelo será:
Maximizar $Z = 0.20x_1 + 0.15x_2 + 0.25x_3^+ - 0.25x_3^-$

$$\text{Sujeito à } \begin{cases} 0.25x_1 + 0.20x_2 + x_3^+ - x_3^- = 20 \\ x_1, x_2, x_3^+, x_3^- \geq 0 \end{cases}$$

Resumo:

1. Uma inequação do tipo ≤ (≥) converte-se em uma equação se for adiccionada a variável de folga (excesso) no primeiro membro.
2. Um modelo de programação linear está na forma padrão (standard) se:
   - Todas as restrições (com excepção das restrições de não negatividade) forem equações, com os valores do segundo membro não negativos;
   - Todas as variáveis são não negativas;
   - A função objectivo é do tipo de maximização ou minimização.
3. Para tornar o valor do segundo membro de uma inequação não negativo, multiplica-se ambos os membros desta por (-1);
4. Se existe uma variável não restrita, ao passar o problema da PL para a forma padrão, esta variável deverá ser substituida por duas variáveis não negativas
5. A maximização de $z = f(x_1,x_2,...,x_m)$ é equivalente a minimizar $-z = -f(x_1,x_2,...,x_m)$.

Exemplo 2.7. Escrever os seguintes problemas de programação linear na forma padrão.

Modelo do Problema PL	Forma padrão do modelo do problema de PL
a) Max $Z = 30x_1 + 50x_2$ Sujeito à $\begin{cases} 2x_1 + x_2 \leq 16 \\ x_1 + 2x_2 \leq 11 \\ x_1 + 3x_2 \leq 15 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$	Maximizar $Z = 30x_1 + 50x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5$ Sujeito à $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 + 0x_4 + 0x_5 = 16 \\ x_1 + 2x_2 + 0x_3 + x_4 + 0x_5 = 11 \\ x_1 + 3x_2 + 0x_3 + 0x_4 + x_5 = 15 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0 \end{cases}$
b) Min $W = 3x_1 + 2x_2$ Sujeito à $\begin{cases} 5x_1 + x_2 \geq 10 \\ 2x_1 + 2x_2 \geq 12 \\ x_1 + 4x_2 \geq 12 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$	Minimizar $W = 3x_1 + 2x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5$ Sujeito à $\begin{cases} 5x_1 + x_2 - x_3 + 0x_4 + 0x_5 = 10 \\ 2x_1 + 2x_2 + 0x_3 - x_4 + 0x_5 = 12 \\ 1x_1 + 4x_2 + 0x_3 + 0x_4 - x_5 = 12 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0 \end{cases}$
c) Max $Z = 2x_1 + 3x_2 + 5x_3$ Sujeito. à $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 \geq -5 \\ -6x_1 + 7x_2 - 9x_3 \leq 4 \\ x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 10 \\ x_1, x_2 \geq 0; x_3 \in R \end{cases}$	Max $Z = 2x_1 + 3x_2 + 5x_3^+ - 5x_3^- + 0x_4 + 0x_5 + Ma_1$ Sujeito à $\begin{cases} -x_1 - x_2 + x_3^+ - x_3^- + x_4 + 0x_5 + 0a_1 = 5 \\ -6x_1 + 7x_2 + -9x_3^+ + 9x_3^- + 0x_4 + x_5 + 0a_1 = 4 \\ x_1 + 3x_2 + 4x_3^+ - 4x_3^- + 0x_4 + 0x_5 + a_1 = 10 \\ x_1, x_2, x_3^+, x_3^-, x_4, x_5, a_1 \geq 0 \end{cases}$

Até agora, foi apresentado o método gráfico para a resolução dos problemas de programação linear nos quais só tinhamos duas variáveis de decisão. Quando o número das variáveis aumenta, este método ainda que seja correto torna a procura de solução muito trabalhosa. Uma alternativa deste método é a utilização do método simplex.

O Método Simplex foi apresentado pelo G.Danztig (1947), como um método prático para a resolução dos problemas de programação linear. O Simplex pode ser descrito como um processo matricial para resolver problemas de programação linear na forma padrão.

Actualmente o método simplex é uma das ferramentas fundamentais de resolução dos problemas de programação linear nos diversos casos em que eles se apresentam. Nesta abordagem serão apresentados em separado os algorítmos de resolução para cada um dos casos. Deve-se salientar que em todos casos existem 4 etapas fundamentais.

1. ***Tabela simplex inicial***. A tabela simplex inicial para um problema de maximização de programação linear é como se segue.

V.básicas (base)	x_1 x_2 ... x_m	x_{m+1} ... x_{m+n}	Recursos−Termos Independentes
x_{m+1} x_{m+2} ... x_{m+n}	a_{11} a_{12} ... a_{1m} a_{21} a_{22} ... a_{2m} .... a_{n1} a_{n2} ... a_{nm}	1 0 ... 0 0 1 ... 0 .... 0 0 ... 1	b_1 b_2 ... b_n
Z	$-c_1$ $-c_2$ ... $-c_m$	0 0 0	0

- Da tabela inicial, nota-se que as variáveis básicas (base) são todas variáveis de folga ou de excesso;
- Os coeficientes – c_i, são opostos da função objectivo e são importantes na indicação da coluna pivô, por isso são chamados *indicadores* da coluna pivô;
- O elemento no canto inferior direito é zero, ele corresponde ao valor da função objectivo inicial.

2. ***Determinação do elemento pivô.*** Um elemento pivô de uma tabela simplex é obtido da seguinte forma:

- Escolhe-se na linha dos coeficientes da função objectivo, o maior elemento negativo (max) ou o maior elemento positivo (min), e a coluna que contém este elemento chama-se *coluna pivô*;
- Divide-se cada termo independente pelo correspondente elemento positivo da coluna pivô. A linha que apresentar o menor quociente positivo é chamada *linha pivô;*
- O elemento que situa-se no cruzamento entre a linha pivô e a coluna pivô é chamado *elemento pivô.*

Se a tabela não tem nenhum indicador negativo (max) ou positivo (min), esta é *uma tabela terminal* e não tem pivô.

3. ***Cálculo da nova tabela simplex.*** Seja T_1 a tabela simplex com *n* linhas e *m+n* colunas, cujo o elemento pivô é a_{ij} da matrix A. Uma nova tabela T_2 é calculada a partir da tabela T_1, usando operações elementares sobre as linhas da matriz A de tal forma que apareça um "1" na posição pivô e zeros "0" nas outras posições da coluna pivô, i.é:

- Divide-se cada elemento da linha pivô l_i da tabela T_1 pelo elemento pivô a_{ij}, obtendo-se a correspondente linha na tabela T_2 (l_i').

$$l_i' = \frac{1}{a_{ij}} * l_i$$

- Se a coluna pivô de T_1 é denotada por x_i, então a correspondente coluna de T_2, será denotada também por x_i;
- Cada uma das outras linhas l_k' da tabela T_2 é obtida subtraindo o múltiplo conveniente da linha l_i' à linha l_k, onde $k = 1,n$.

$$l_k' = l_k - a_{ki} * l_i'$$

4. ***Interpretação da tabela terminal.*** Depois de tantas repetições das etapas (2) e (3), chega-se a uma tabela terminal, a qual não tem nenhum indicador de pivô negativo (max) ou positivo (min).

V.básicas (base)	x_1 x_2 ... x_m	x_{m+1} ... x_{m+n}	Termos Independentes
x_1	1 0 ... 0	a* ... a*	b_1^*
x_2	0 1 ... 0	a* ... a*	b_2^*
...	....	....	...
x_m	0 0 ... 1	a* ... a*	b_n^*
Z	C_1^* c_2^* ... c_m^*	c* ... c*	Z_0

- Zo – é o valor óptimo da função objectivo;
- x_i – tem uma raiz diferente de zero se estiver marcado por 1 numa única posição da coluna correspondente e zeros nas restantes linhas (x_i pertence a base).
- x_i é igual a zero se não estiver na base, apresentando óbviamente um $c_i \neq 0$.

2.3.2 Maximização com restrições da forma $\leq$

Os problemas de maximização com restrições da forma **≤,** são resolvidos aplicando-se o simpelx directo. Se houver alguma restrição da forma ≥ ou mesmo = esta deverá ser transformada a forma canônica do problema de maximização.

Os passos gerais para os problemas de maximização são:
Passo 1. Escrever o problema na forma canônica ou na forma padrão;
Passo 2. Introduzir as variáveis de folga ($+x_{m+n}$) e rescrever o sistema inicial na forma padrão;
Passo 3. Apresentar a tabela simplex inicial;

Passo 4. Se a tabela simplex inicial tiver algum valor negativo na linha da função objectivo e na coluna correspondente haver algum valor positivo, determinar o elemento pivô e realizar as operações necessárias para obter a nova tabela;
Passo 5.. Repetir o processo do passo 4 até que todos os indicadores da linha z sejam positivos. Assim chega-se à tabela terminal e deve-se interpretar a solução obtida .

Exemplo 2.8. Resolver o seguinte problema de programação linear pelo método simplex.
Maximizar $Z = x_1 + 9x_2 + x_3$

$$\text{Sujeito à} \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 \leq 9 \\ 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 \leq 15 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{cases}$$

Resolução
O problema já está na forma canônica, portanto, vai-se introduzir as variáveis de folga.
Maximizar $Z = x_1 + 9x_2 + x_3 + 0x_4 + 0x_5$

$$\text{Sujeito à} \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 1x_4 + 0x_5 = 9 \\ 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 0x_4 + 1x_5 = 15 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0 \end{cases}$$

Tabela simplex inicial

Base	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b_i
x_4	1	**2**	3	1	0	9 ⟵ 9/2= **4.5** min
x_5	3	2	2	0	1	15 → 15/2=7.5
Z	−1	−9	−1	0	0	0

1ª Iteração

base	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b_i
x_2	1/2	1	3/2	1/2	0	9/2 → $l_1' = ½*l_1$
x_5	2	0	−1	−1	1	6 → $l_2'=l_2 - 2l_1'$
Z	7/2	0	25/2	9/2	0	81/2 →$l_3' = l_3+9l_1'$

Solução: $Z_{max} = 81/2$, $x_1 = 0$, $x_2 = 9/2$, $x_3 = x_4 = 0$, $x_5 = 6$

Exemplo 2.9.Resolver o problema do alfaiate pelo método simplex.
Max $Z = 30x_1 + 50x_2$

$$\text{Suj. à} \begin{cases} 2x_1 + 1x_2 \leq 16 \\ 1x_1 + 2x_2 \leq 11 \\ 1x_1 + 3x_2 \leq 15 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Resolução

Max $Z = 30x_1 + 50x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5$

$$\text{Suj. à}\begin{cases} 2x_1 + 1x_2 + x_3 + 0x_4 + 0x_5 = 16 \\ 1x_1 + 2x_2 + 0x_3 + x_4 + 0x_5 = 11 \\ 1x_1 + 3x_2 + 0x_3 + 0x_4 + x_5 = 15 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0 \end{cases}$$

Tabela simplex inicial

base	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b_i
x_3	2	1	1	0	0	16 $\rightarrow$ 16/1 = 16
x_4	1	2	0	1	0	11 $\rightarrow$ 11/2 = 5.5
x_5	1	**3**	0	0	1	15 $\rightarrow$ **15/3** = 5 min
Z	-30	**-50**	0	0	0	0

1ª Iteração

base	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b_i
x_3	5/3	0	1	0	-1/3	11 $\rightarrow l_1'=l_1-l_3'$ (33/5)
x_4	**1/3**	0	0	1	-2/3	1 $\rightarrow l_2'=l_2-2*l_3'$ (**3**)
x_2	1/3	1	0	0	1/3	5 $\rightarrow l_3'=1/3*l_3$ (15)
Z	**-40/3**	0	0	0	50/3	250 $\rightarrow l4'=l_4+50l_3'$

2ª Iteração

base	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b_i
x_3	0	0	1	-5	**3**	6 $\rightarrow l_1'=l_1 - 5/3 * l_2'$ (**2**)
x_1	1	0	0	3	-2	3 $\rightarrow l_2'=3*l_2$ (neg)
x_2	0	1	0	-1	1	4 $\rightarrow l_3'=l_3-1/3*l_2'$ (4)
Z	0	0	0	40	**-10**	290 $\rightarrow l_4'=l_4+40/3l_2'$

3ª Iteração

Base	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b_i
x_5	0	0	1/3	-5/3	1	2 $\rightarrow l_1'=1/3*l_1$
x_1	1	0	2/3	-1/3	0	7 $\rightarrow l_2'=l_2+2*l_1'$
x_2	0	1	-1/3	2/3	0	2 $\rightarrow l_3'=l_3-l_1'$
Z	0	0	10/3	70/3	0	310 $\rightarrow l4'=l_4+10l_1'$

Solução: $x_1 = 7$; $x_2 = 2$; $x_3 = x_4 = 0$; $x_5 = 2$; $Z_{max} = 310$

Exemplo 2.10. Resolva o seguinte problema de programação linear.

Maximizar $Z = 4x_1 + 2x_2 + 3x_3$

$$\text{Sujeito à}\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 \leq 11 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 \leq 20 \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 \leq 20 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{cases}$$

Resolução

Maximizar $Z = 4x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 0(x_4+x_5+x_6)$

$$\text{Sujeito à} \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + 0x_5 + x_6 = 11 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 + 0x_4 + x_5 + 0x_6 = 20 \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 0x_4 + 0x_5 + x_6 = 20 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0 \end{cases}$$

Tabela inicial Simplex

base	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	b_i
x_4	1	1	1	1	0	0	11 $\rightarrow$ (11)
x_5	**2**	3	1	0	1	0	20 $\rightarrow$ (**10**) min
x_6	1	3	2	0	0	1	20 $\rightarrow$ (20)
Z	**-4**	-2	-3	0	0	0	0

1ª Iteração

base	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	b_i
x_4	0	-1/2	**1/2**	1	-1/2	0	1 $\rightarrow l_1'=l_1 - l_2'$ (**2**)
x_1	1	3/2	1/2	0	1/2	0	10 $\rightarrow l_2'=1/2*l_2$ (20)
x_6	0	3/2	3/2	0	-1/2	1	10 $\rightarrow l_3'=l_3 - l_2'$ (20/3)
Z	0	4	**-1**	0	2	0	40 $\rightarrow l_4'=l_4+4l_2'$

2ª Iteração

base	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	b_i
x_3	0	-1	1	2	-1	0	2 $\rightarrow l_1'=2l_1$
x_1	1	2	0	1	1	0	9 $\rightarrow l_2'=l_2 - 1/2l_1'$
x_6	0	3	0	-3	1	1	7 $\rightarrow l_3'=l_3 - 3/2l_1'$
Z	0	3	0	2	1	0	42 $\rightarrow l_4'=l_4+l_1'$

Solução: $x_1 = 9$; $x_2 = 0$; $x_3 = 2$; $x_4 = 0$; $x_5 = 0$; $x_6 = 7$; $Z_{max} = 42$

2.3.3 Minimização com restrições da forma $\geq$

O processo iterativo do método simplex sempre exige uma solução básica inicial a partir da qual se busca uma solução óptima. Nos problemas de maximização esta solução básica inicial era formada pelas variáveis de folga, já que as restrições eram do tipo ($\leq$). Quando as restrições são do tipo ($\geq$) ou (=), não existe essa solução básica inicial.

Vejamos:

Minimizar $W = 16x_1 + 12x_2 + 5x_3$

$$\text{Sujeito à} \begin{cases} 8x_1 + 4x_2 + 4x_3 \geq 16 \\ 4x_1 + 6x_2 + 0x_3 \geq 12 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{cases}$$

Como devem ser introduzidas variáveis de excesso a forma padrão do problema de minimização é:

Minimizar $W = 16x_1 + 12x_2 + 5x_3 + 0x_4 + 0x_5$

$$\text{Sujeito à} \begin{cases} 8x_1 + 4x_2 + 4x_3 - x_4 + 0x_5 = 16 \\ 4x_1 + 6x_2 + 0x_3 + 0x_4 - x_5 = 12 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0 \end{cases}$$

O processo de resolução anteriormente realizado leva as variáveis de excesso x_4 e x_5 a valores negativos ($x_4 = -16$ e $x_5 = -12$), violando a condição de não negatividade.

Conclusão:
Para resolver este tipo de problemas são introduzidas algumas modificações nas equações das restrições em seguida pode se usar o procedimento dual, os métodos de duas fases, de grande M e o Dual simplex, que são modificações do método simplex directo.

Método de duas fases

Para os problemas de minimização na forma canônica, o método simplex em duas fases tem os seguintes passos:
Passo 1. Introduzir as variáveis de excesso ($-x_{m+n}$) e artificiais (+ai) para cada restrição.
Passo 2. Criar uma nova função objectivo formada pela:

- soma dos coeficientes das equações para a mesma variável tomados com o sinal negativo $d = -(a_{11}+_{21}+...+a_{n1})$;
- soma dos coeficientes das variáveis artificiais que é igual a zero;
- nova função objectivo que é igual a soma dos termos intependentes tomados com o sinal negativo ($Z_a = -(b_1+ b_2 +...+ b_n)$)

Passo 3. Escreve-se a tabela inicial do simplex para a 1ª fase do processo de resolução do problema.
Passo 4. Aplica-se normalmente o procedimento do método simplex, tomando-se como função objectivo a última linha. Quando a solução óptima for atingida dois casos podem ocorrer:

- Za = 0: neste caso foi obtida uma solução básica do problema original e o processo de solução deve continuar, desprezando-se as variáveis artificiais e os elementos da última linha. É o início da fase 2 do processo.
- Za ≠ 0: neste caso o problema original não tem solução viável.

Exemplo 2.11. Resolva o seguinte problema pelo método de duas fases.
Minimizar $W = 16x_1 + 12x_2 + 5x_3$

$$\text{Sujeito à} \begin{cases} 8x_1 + 4x_2 + 4x_3 \geq 16 \\ 4x_1 + 6x_2 + 0x_3 \geq 12 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{cases}$$

Resolução
Minimizar $W = 16x_1 + 12x_2 + 5x_3 + 0x_4 + 0x_5 + 0a_1 + 0a_2$

Sujeito à $\begin{cases} 8x_1 + 4x_2 + 4x_3 - x_4 + 0x_5 + a_1 + 0a_2 = 16 \\ 4x_1 + 6x_2 + 0x_3 + 0x_4 - x_5 + 0a_1 + a_2 = 12 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, a_1, a_2 \geq 0 \end{cases}$

Maximizar $Za = -12x_1 - 10x_2 - 4x_3 + 1x_4 + 1x_5 + 0a_1 + 0a_2 - 28$

Tabela inicial simpelx

Base	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	a_1	a_2	b_i
a_1	**8**	4	4	-1	0	1	0	16 $\rightarrow$ (**2**)
a_2	4	6	0	0	-1	0	1	12 $\rightarrow$ (3)
W	-16	-12	-5	0	0	0	0	0
Z_a	**-12**	-10	-4	1	1	0	0	-28

1ª Fase (iteração 1)

Base	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	a_1	a_2	b_i
x_1	1	1/2	1/2	-1/8	0	1/8	0	2 $\rightarrow l_1' = 1/8 * l_1$ (4)
a_2	0	**4**	-2	1/2	-1	-1/2	1	4 $\rightarrow l_2' = l_2 - 4l_1'$ (**1**)
W	0	-4	3	-2	0	2	0	32 $\rightarrow l_3' = l_3 + 16l_1'$
Za	0	**-4**	2	-1/2	1	3/2	0	-4 $\rightarrow l_4' = l_4 + 12l_1'$

1ª Fase (iteração 2)

base	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	a_1	a_2	b_i
x_1	1	0	3/4	-3/16	1/8	3/16	-1/8	3/2 $\rightarrow l_1' = l_1 - 1/2 l_2'$
x_2	0	1	-1/2	1/8	-1/4	-1/8	1/4	1 $\rightarrow l_2' = ¼ * l_2$
W	0	0	1	-3/2	-1	3/2	1	36 $\rightarrow l_3' = l_3 + 4l_2'$
Za	0	0	0	0	0	1	1	0 $\rightarrow l_4' = l_4 + 4l_2'$

Como na última linha o valor da função objectivo artificial é igual a zero, a fase 1 termina e a solução encontrada é solução básica inicial para a fase 2.

Tabela inicial simplex (2ª fase)

base	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b_i
x_1	1	0	**3/4**	-3/16	1/8	3/2 $\rightarrow l_1' = l_1 - 1/2 l_2'$ (**2**)
x_2	0	1	-1/2	1/8	-1/4	1 $\rightarrow l_2' = ¼ * l_2$ (neg)
W	0	0	**1**	-3/2	-1	36 $\rightarrow l_3' = l_3 + 4l_2'$

Lembre-se que o objectivo é de minimizar, portanto os inicadores da linha pivô devem ser todos negativos.

2ª fase (iteração 1)

base	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b_i
x_1	4/3	0	1	-1/4	1/6	2 $\rightarrow l_1' = 4/3 l_1$
x_2	2/3	1	0	0	-1/6	2 $\rightarrow l_2' = l_2 + 1/2 l_1'$
W	-4/3	0	0	-5/4	-7/6	34 $\rightarrow l_3' = l_3 - l_1'$

Solução $x_1 = 0$; $x_2 = 2$; $x_3 = 2$; $x_4 = 0$; $x_5 = 0$; $W_{min} = 34$

Exemplo 2.12. Resolver o problema pelo método de duas fases:
Minimizar W = $4x_1 + x_2$

$$\text{Sujeito à} \begin{cases} 3x_1 + x_2 \geq 3 \\ 4x_1 + 3x_2 \geq 6 \\ x_1 + 2x_2 \geq 3 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Resolução
Minimizar $W = 4x_1 + x_2 + 0(x_3+x_4+0x_5) + 0(a_1+a_2+a_3)$

$$\text{Sujeito à} \begin{cases} 3x_1 + x_2 - x_3 + 0x_4 + 0x_5 + a_1 + 0a_2 + 0a_3 = 3 \\ 4x_1 + 3x_2 + 0x_3 - x_4 + 0x_5 + 0a_1 + a_2 + 0a_3 = 6 \\ x_1 + 2x_2 + 0x_3 + 0x_4 - x_5 + 0a_1 + 0a_2 + a_3 = 3 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, a_1, a_2, a_3 \geq 0 \end{cases}$$

Tabela inicial simplex (1ª fase)

base	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	a_1	a_2	a_3	b_i
a_1	**3**	1	-1	0	0	1	0	0	3 $\rightarrow$ (**1**)
a_2	4	3	0	-1	0	0	1	0	6 $\rightarrow$ (3/2)
a_3	1	2	0	0	-1	0	0	1	3 $\rightarrow$ (3)
W	-4	-1	0	0	0	0	0	0	0
Z_a	**-8**	-6	1	1	1	0	0	0	-12

1ª Fase (Iteração 1)

base	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	a_1	a_2	a_3	b_i
x_1	1	1/3	-1/3	0	0	1/3	0	0	1 $\rightarrow l_1'=1/3l_1$ (3)
a_2	0	**5/3**	4/3	-1	0	-4/3	1	0	2 $\rightarrow l_2'=l_2-4l_1'$ (**6/5**)
a_3	0	5/3	1/3	0	-1	-1/3	0	1	2 $\rightarrow l_3'=l_3-l_1'$ (6/5)
W	0	1/3	-4/3	0	0	4/3	0	0	4 $\rightarrow l_4'=l_4+4l_1'$
Z_a	0	**-10/3**	-5/3	1	1	8/3	0	0	-4 $\rightarrow l_5'=l_5+8l_1'$

1ª Fase (Iteração 2)

base	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	a_1	a_2	a_3	b_i
x_1	1	0	-3/5	1/5	0	3/5	-1/5	0	3/5 $\rightarrow l_1'=l_1-1/3l_2'$ (3)
x_2	0	1	4/5	-3/5	0	-4/5	3/5	0	6/5 $\rightarrow l_2'=3/5l_2$ (*negativo*)
a_3	0	0	-1	**1**	-1	1	-1	1	0 $\rightarrow l_3'=l_3-5/3l_2'$ (**0**)
W	0	0	-24/15	1/5	0	24/15	-1/5	0	18/5 $\rightarrow l_4'=l_4-1/3l_2'$
Z_a	0	0	1	**-1**	1	0	2	0	0 $\rightarrow l_5'=l_5+10/3l_2'$

1ª Fase (Iteração 3)

base	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	a_1	a_2	a_3	b_i
x_1	1	0	-2/5	0	1/5	-2/5	0	1/5	3/5 $\rightarrow l_1'=l_1-1/5l_3'$
x_2	0	1	1/5	0	-3/5	-1/5	0	3/5	6/5 $\rightarrow l_2'=l_2+3/5l_3'$
x_4	0	0	-1	**1**	-1	1	-1	1	0 $\rightarrow l_3'=l_3$
W	0	0	-7/5	0	1/5	7/5	0	-1/5	18/5 $\rightarrow l_4'=l_4-1/5l_3'$
Z_a	0	0	0	0	0	1	1	1	0 $\rightarrow l5'=l_5+l_3'$

Como na última linha o valor da função objectivo artificial é igual a zero, a fase 1 termina e a solução encontrada é solução básica inicial para a fase 2.

Tabela inicial simplex (2ª fase)

base	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b_i
x_1	1	0	-2/5	0	**1/5**	3/5 $\rightarrow$ (**3**)
x_2	0	1	1/5	0	-3/5	6/5 $\rightarrow$ (neg)
x_4	0	0	-1	**1**	-1	0 $\rightarrow$ (neg)
W	0	0	-7/5	0	**1/5**	18/5 $\rightarrow$

2ª fase (iteração 1)

base	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b_i
x_5	5	0	-2	0	1	3 $\rightarrow l_1' = 5*l_1$
x_2	3	1	1	0	0	3 $\rightarrow l_2' = l_2 + 3/5 l_1'$
x_4	5	0	-3	1	0	3 $\rightarrow l_3' = l_3 + l_1'$
W	-1	0	-1	0	0	3 $\rightarrow l_4' = l_4 - 1/5 l_1'$

Solução $x_1 = 0$; $x_2 = 3$; $x_3 = 0$; $x_4 = 3$; $x_5 = 3$; $W_{min} = 3$

2.3.4 Maximização e minimização com restrições do tipo ≤ ; =; ≥

Em todos os problemas anteriores foram consideradas restrições com um único tipo de sinal de desigualdade. Nesta secção vamos considerar o caso geral dos problemas de PL com o conjunto das restrições que apresentam os sinais de **≤ ; =** e **≥** desde que não haja números negativos no segundo membro das equações das restrições.

Exemplo:

Maximizar $Z = 2x_1 + x_2$

Sujeito à $\begin{cases} x_1 + x_2 \le 10 \\ -x_1 + x_2 \ge 2 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$

Introduzindo as variáveis de folga ($+x_i$) de excesso ($-x_i$) e apresentando a tabela inicial simplex teremos:

Base	x_1	x_2	x_3	x_4	bi
x_3	1	1	1	0	10
x_4	-1	1	0	-1	2
Z	-2	-1	0	0	0

Da tabela inicial, x_1 e x_2 não são básicas e $x_4 < 0$, logo o conjunto $\{x_1 = 0; x_2 = 0; x_3 = 10; x_4 = -2; z = 0\}$, não é solução válida, poís viola a condição de não negatividade.

Para resolver este tipo de problemas, introduz-se uma outra modificação no método simplex e usa-se o método de grande M.

De um modo geral, para problemas que contêm vários tipos de desigualdade deve-se:

Procedimento geral (Mim = Maior igual menor)
Passo 1. Introduzir uma variável de folga (+xi) para cada restrição da forma ≤;
Passo 2. Introduzir uma variável de excesso (-xi) e uma variável artificial (+ai) para cada restrição da forma ≥;
Passo 3. Introduzir uma variável artificial (+ai) para cada restrição da forma =.
Atenção uma restrição do tipo (=) dá lugar a duas restrições da forma ≥ e ≤, equivalendo a duas inequações uma com (+xi) outra com (-xi+ai) caso seja necessário;
Passo 4. Para cada variável de folga e excesso adicionar 0xi e para cada variável artificial adicionar -Mai na função objectivo, onde M é um grande número positivo.

Método de Grande M

a) Problemas de Maximização

Geralmente problemas de maximização com restrições da forma **≤ ; =** e **≥,** são resolvidos pelo método de grande M. Este método não é um novo método, mas uma modificação do simplex directo.

Procedimento
Passo 1. Realizar o procedimento geral Mim e escrever o sistema na forma padrão incluindo a função objectivo;
Passo 2. Na tabela preliminar simplex, passar para básicas as variáveis artificiais, i.é, procurar eliminar a constante *M* nas colunas *ai* até chegar a tabela simplex inicial com uma solução básica inicial viável.
Passo 3. Escolher um pivô e resolver o simplex, até que todos ci sejam positivos, ter-se-à uma tabela terminal.

Exemplo 2.13. Resolver o problema de maximização pelo método de grande M.
Maximizar $Z = 2x_1 + x_2$

Sujeito à $\begin{cases} x_1 + x_2 \leq 10 \\ -x_1 + x_2 \geq 2 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$

Resolução
Maximizar $Z = 2x_1 + x_2 + 0x_3 + 0x_4 - Ma_1$

Sujeito à $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + 0x_4 + 0a_1 = 10 \\ -x_1 + x_2 + 0x_3 - x_4 + a_1 = 2 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, a_1 \geq 0 \end{cases}$

Tabela preliminar simplex

base	x_1	x_2	x_3	x_4	a_1	bi
x_3	1	1	1	0	0	10
-	−1	1	0	−1	**1**	2
Z	−2	−1	0	0	**M**	0

Vamos procurar encontrar a solução básica inicial viável, para isso temos que eliminar M na coluna a_1 tomando 1 como pivô.

Tabela simplex inicial

base	x_1	x_2	x_3	x_4	a_1	Bi
x_3	1	1	1	0	0	10 $\rightarrow l_1'=l_1$
a_1	−1	**1**	0	−1	1	**2** $\rightarrow l_2'=l_2$
Z	M−2	**−M−1**	0	M	0	-2M $\rightarrow l_3'=l_3-M*l_2'$

Solução básica inicial: $x_1 = 0$; $x_2 = 0$; $x_3 = 10$; $x4 = 0$; $a_1 = 2$ e $z = -2M$.
A solução agora obtida não é final, poís a linha indicadora de pivô apresenta números negativos ($-M-1 < 0$), portanto vamos tentar melhorar.

1ª Iteração

base	x_1	x_2	x_3	x_4	a_1	Bi
x_3	**2**	0	1	1	−1	8 $\rightarrow l_1'=l_1 - l_2'$ (**4**)
x_2	−1	1	0	−1	1	2 $\rightarrow l_2'=l_2$ (neg)
Z	**−3**	0	0	−1	M+1	2 $\rightarrow l_3'=l_3+(M+1)l_2'$

2ª Iteração

base	x_1	x_2	x_3	x_4	a_1	Bi
x_1	1	0	1/2	1/2	−1/2	4 $\rightarrow l_1'=1/2l_1$
x_2	0	1	1/2	−1/2	1/2	6 $\rightarrow l_2'=l_2+l_1'$
Z	0	0	3/2	1/2	M−1/2	14 $\rightarrow l_3'=l_3+3l_1'$

Solução: $x_1 = 4$; $x_2 = 6$; $x_3 = x_4 = 0$; $a_1 = 0$; $Z_{max} = 14$

Observação: Como as variáveis artificiais não têm significado nenhum para o problema, e são iguais a zero na tabela terminal simplex, elas podem não figurar na solução.

b) Problemas de Minimização

Para os problemas de minimização com restrições da forma ≤ ; = e ≥, o método de grande M tem os seguintes passos:

Passo1. Dado um problema de PL com a função objectivo Min $W = \Sigma c_i*x_i$, deve-se converter a função objectivo em Max $Z = -$ Min $W = -\Sigma c_i*x_i$;
Passo 2. Escrever o sistema composto pela função Max $Z = - \Sigma c_i*x_i$ e o conjunto das restrições originais;

Passo 3. Realizar o procedimento geral Mim e escrever o problema de maximização na forma padrão;
Passo 4. Realizar os passos p2 e p3 do caso de maximização. Chegada a tabela terminal simplex o valor da função objectivo será negativo, basta fazer W = -Z para obter o valor mínimo procurado W_{min}.

Exemplo 2.14. Resolver o seguinte problema pelo método de Grande M.

Min $W = 30x_1+30x_2+10x_3$

$$\text{Sujeito}\begin{cases}2x_1 + x_2 + x_3 \geq 6 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 8 \\ x_i \geq 0, \quad i = 1{,}3\end{cases}$$

Resolução

Max Z = - Min W = $-30x_1 - 30x_2 - 10x_3$

$$\text{Sujeito}\begin{cases}2x_1 + x_2 + x_3 \geq 6 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 8 \\ x_i \geq 0, \quad i = \overline{1{,}3}\end{cases}$$

Max $Z = -30x_1-30x_2-10x_3 + 0x_4 + 0x_5 - Ma_1$

$$\text{Sujeito}\begin{cases}2x_1 + x_2 + x_3 - x_4 + 0x_5 + a_1 = 6 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + 0x_4 + x_5 + 0a_1 = 8 \\ x_i \geq 0,\ \text{a}_1 \geq 0;\ i = 1,..,5\end{cases}$$

Tabela preliminar simplex

base	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	a_1	Bi
–	2	1	1	-1	0	**1**	6
x_5	1	1	2	0	1	0	8
Z	30	30	10	0	0	**M**	0

Tabela simplex inicial

base	X_1	x_2	x_3	x_4	x_5	a_1	Bi
a_1	**2**	1	1	-1	0	1	6 $\rightarrow l_1' = l_1$ (**3**)
x_5	1	1	2	0	1	0	8 $\rightarrow l_2' = l_2$ *(8)*
Z	**30-2M**	30-M	10-M	M	0	0	-6M $\rightarrow l_3' = l_3 - Ml_1'$

1ª Iteração

base	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	a_1	Bi
x_1	1	1/2	1/2	-1/2	0	1/2	3 $\rightarrow l_1' = 1/2 l_1$ (6)
x_5	0	1/2	**3/2**	1/2	1	-1/2	5 $\rightarrow l_2' = l_2 - l_1'$ (**10/3**)
Z	0	15	**-5**	15	0	M-15	-90 $\rightarrow l_3' = l_3 + (2M-30) * l_1'$

2ª Iteração

base	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	a_1	Bi
x_1	1	1/3	0	-2/3	-1/3	2/3	4/3 $\rightarrow$ l_1'=l_1-1/2l_2
x_3	0	1/3	1	1/3	2/3	-1/3	10/3 $\rightarrow$ l_2'=2/3l_2
Z	0	50/3	0	50/3	10/3	M-50/3	-220/3$\rightarrow$ l_3'=l_3+5l_2'

Solução: $x_1 = 4/3$; $x_2 = 0$; $x_3 = 10/3$; $x_4 = 0$; $x_5 = 0$; $W_{min} = - Z_{max} = 220/3$

Exemplo 2.15. Resolva o problema pelo método de Grande M

Maximizar $Z = x_1 - x_2 + 3x_3$

$$\text{Sujeito à } \begin{cases} x_1 + x_2 + 0x_3 \leq 20 \\ x_1 + 0x_2 + x_3 = 5 \\ 0x_1 + x_2 + x_3 \geq 10 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{cases}$$

Resolução

Maximizar $Z = x_1 - x_2 + 3x_3 + 0x_4 + 0x_5 - M(a_1+a_2)$

$$\text{Sujeito à } \begin{cases} x_1 + x_2 + 0x_3 + x_4 + 0x_5 + 0a_1 + 0a_2 = 20 \\ x_1 + 0x_2 + x_3 + 0x_4 + 0x_5 + a_1 + 0a_2 = 5 \\ 0x_1 + x_2 + x_3 + 0x_4 - x_5 + 0a_1 + a_2 = 10 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, a_1, a_2 \geq 0 \end{cases}$$

Tabela preliminar 1 simplex

base	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	a_1	a_2	Bi
x_4	1	1	0	1	0	0	0	20
-	1	0	1	0	0	**1**	0	5
-	0	1	1	0	-1	0	1	10
Z	-1	1	-3	0	0	**M**	M	0

Tabela preliminar 2 simplex

base	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	a_1	a_2	Bi
x_4	1	1	0	1	0	0	0	20 $\rightarrow$ l_1'=l_1
a_1	1	0	1	0	0	1	0	5 $\rightarrow$ l_2'=l_2
-	0	1	1	0	-1	0	**1**	10 $\rightarrow$ l_3'=l_3
Z	-M-1	1	-M-3	0	0	0	**M**	-5M $\rightarrow$ l_4'=l_4-Ml_2'

Tabela simplex inicial

base	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	a_1	a_2	Bi
x_4	1	1	0	1	0	0	0	20 $\rightarrow$ l_1'=l_1
a_1	1	0	1	0	0	1	0	5 $\rightarrow$ l_2'=l_2
a_2	0	1	1	0	-1	0	1	10 $\rightarrow$ l_3'=l_3
Z	-M-1	-M+1	-2M-3	0	M	0	0	-15M $\rightarrow$ l_4'=l_4 - Ml_3'

Agora que temos a solução básica, podemos procurar o pivô e optimizar a solução.

1ª Iteração

Base	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	a_1	a_2	Bi
x_4	1	1	0	1	0	0	0	20 $\rightarrow l_1'=l_1$
x_3	1	0	1	0	0	1	0	5 $\rightarrow l_2'=l_2$
a_2	−1	**1**	0	0	−1	−1	1	**5** $\rightarrow l_3'=l_3-l_2'$
Z	M+2	**−M+1**	0	0	M	2M+3	0	15-5M $\rightarrow l_4'=l_4+(2M+3)l_2'$

2ª Iteração

Base	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	a_1	a_2	Bi
x_4	2	0	0	1	1	1	−1	15 $\rightarrow l_1'=l_1-l_3'$
x_3	1	0	1	0	0	1	0	5 $\rightarrow l_2'=l_2$
x_2	−1	1	0	0	−1	−1	1	5 $\rightarrow l_3'=l_3$
Z	3	0	0	0	1	M+4	M−1	10 $\rightarrow l_4'=l_4+(M-1)l_3'$

Solução: $x_1 = 0$; $x_2 = 5$; $x_3 = 5$; $x_4 = 15$; $x_5 = 0$; $Z_{max} = 10$

2.3.5 EXERCÍCIOS PROPOSTOS

Exercício 2.14. Uma empresa fabrica dois tipos de estantes em madeiras diferentes, adquirindo a madeira já cortada, e submetendo-a depois a três operações: furação, polimento e montagem. Suponha que são as seguintes as capacidades fabris, traduzidas pelas taxas de produção horária, ou seja, pelo número de estantes processadas por hora.

Secções	E.tipo A	E.Tipo B
Furação	7	6
Polimento	4	3
Montagem	6	4

Quando funcionam, as três operações têm custos horários de produção de 20, 10, e 22 u.m respectivamente . Para cada estante tipo A e B a madeira necessária é adquirida a 8 e 12 u.m, sendo os preços de venda respectivos 16 e 25 u.m.

a) Formule o problema de programação linear que permite maximizar o lucro da empresa.
b) Escreva o problema na forma padrão e resolva-o.

(***Resp***: $x_1 = 0$; $x_2 = 10/3$; $x_3 = x_4 = 0$; $x_5 = 26/3$; $Z_{max} = 130/3$)

Exercício 2.15 Resolva as seguintes alíneas:

a) Max $Z = 4x_1 - 2x_2 - x_3$

$$\text{Suj à} \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 \le 3 \\ -2x_1 - 2x_2 - x_3 \ge -4 \\ x_1 - x_2 + 0x_3 \le 0 \\ x_i \ge 0 \end{cases}$$

b) Max $Z = 2x_1 + x_2$

$$\text{Suj. à} \begin{cases} x_1 + x_2 \le 5 \\ x_1 + 2x_2 \le 8 \\ x_1 \qquad \le 4 \\ x_i \ge 0 \end{cases}$$

a) ***Resp***: $x_1 = 1$; $x_2 = 1$; $x_3 = 0$; $x_4 = 1$; $x_5 = 0$; $x_6 = 0$; $Z_{max} = 2$

b) ***Resp***: $x_1 = 4$; $x_2 = 1$; $x_3 = 0$; $x_4 = 2$; $x_5 = 0$; $Z_{max} = 9$

Exercício 2.16. Uma companhia possuia, há 10 anos, duas minas: a mina A produzindo por dia 1 tonelada de minério de alto teor, 3 toneladas de minério de médio teor e 5 toneladas de minério de baixo teor; a mina B produzia por dia 2 toneladas de cada um dos teores. A companhia precisou de 80 toneladas de minério de alto teor, 160 de médio teor e 200 de baixo teor. Quantos dias cada mina funcionou, se custava 200 u.m por dia para se fazer funcionar cada uma?.
(***Resp***: $x_1 = 40$; $x_2 = 20$; $x_3 = x_4 = 0$; $x_5 = 40$; $W_{min} = 12.000$ u.m)

Exercício 2.17. Resolva os seguintes problemas de minimização pelo método simplex.

a) Min $W = 5x_1 + 4x_2$

$$\text{Suj à } \begin{cases} 3x_1 + x_2 \ge 8 \\ 4x_1 + 4x_2 \ge 15 \\ x_1 + x_2 \ge 6 \\ x_i \ge 0 \end{cases}$$

b) Min $W = 6x_1 + 8x_2 + 12x_3$

$$\text{Suj. à } \begin{cases} x_1 + 3x_2 + 3x_3 \ge 6 \\ x_1 + 5x_2 + 5x_3 \ge 4 \\ -2x_1 - 2x_2 - 3x_3 \le -8 \\ x_i \ge 0 \end{cases}$$

(a) ***Resp***: $x_1 = 1$; $x_2 = 5$; $x_3 = 0$; $x_4 = 9$; $x_5 = 0$; $W_{min} = 25$
(b) ***Resp***: $x_1 = 3$; $x_2 = 1$; $x_3 = 0$; $x_4 = 0$; $x_5 = 4$; $x_6 = 0$; $W_{min} = 26$

Exercício 2.18. Resolva os exercícios pelos métodos convenientes.

a) Max $Z = x_1 + 2x_2 + 3x_3$

$$\text{Suj à } \begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 4 \\ x_1 + 2x_3 = 5 \\ x_i \ge 0 \end{cases}$$

b) Min $W = 2x_1 + x_2$

$$\text{Suj à } \begin{cases} 2x_1 + 2x_2 \le 8 \\ 3x_1 \ge 3 \\ x_2 \ge 2 \\ x_i \ge 0 \end{cases}$$

c) Min $W = -5x_1 - 12x_2 + 16x_3$

$$\text{Suj à } \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 \le 10 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 \ge 6 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = 1 \\ x_i \ge 0 \end{cases}$$

d) Max $Z = 2x_1 + 3x_2 + x_3$

$$\text{Suj à } \begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 \le 7 \\ -x_1 - x_2 + 2x_3 \le -2 \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 = 4 \\ x_i \ge 0 \end{cases}$$

(a) ***Resp***: $x_1 = 0$; $x_2 = 2$; $x_3 = 5/2$; $x_4 = 0$; $Z_{max} = 23/2$
(b) ***Resp***: $x_1 = 1$; $x_2 = 2$; $x_3 = 2$; $x_4 = 0$; $x_5 = 0$;; $W_{min} = 4$
(c) ***Resp***: $x_1 = 0$; $x_2 = 7/4$; $x_3 = 3/4$; $x_4 = 23/4$; $x_5 = 0$; $W_{min} = 9$
(d) ***Resp***: $x_1 = 0$; $x_2 = 2$; $x_3 = 0$; $x_4 = 11$; $x_5 = 0$; $Z_{max} = 6$)

Resolva os seguintes exercícios de revisão.

1. Método gráfico

a) Max $z = x_1 + x_2$

$$\text{Suj à } \begin{cases} x_1 + x_2 \leq 6 \\ x_1 + 2x_2 \leq 10 \\ x_i \geq 0 \end{cases}$$

b) Min $W = 10x_1 + 20x_2$

$$\text{Suj à } \begin{cases} 6x_1 + 2x_2 \geq 36 \\ 2x_1 + 4x_2 \geq 32 \\ x_2 \geq 20 \\ x_i \geq 0 \end{cases}$$

c) Max $z = 30x_1 + 40x_2$

$$\text{Suj à } \begin{cases} 2x_1 + x_2 \leq 10 \\ x_1 + x_2 \leq 7 \\ x_1 + 2x_2 \leq 12 \\ x_i \geq 0 \end{cases}$$

d) Max $z = 20x_1+10x_2$

$$\text{Suj à } \begin{cases} 3x_1 + x_2 \leq 21 \\ x_1 + x_2 \leq 9 \\ x_1 + 3x_2 \leq 21 \\ x_i \geq 0 \end{cases}$$

e) Min $W = 2x_1+3x_2$

$$\text{Suj à } \begin{cases} 2x_1 + 2x_2 \geq 8 \\ x_1 + 2x_2 \geq 8 \\ x_i \geq 0 \end{cases}$$

2. Método simplex

a) Max $Z = 4x_1 + 2x_2+3x_2$

$$\text{Suj à } \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 \leq 11 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 \leq 20 \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 \leq 20 \\ x_i \geq 0 \end{cases}$$

b) Min $W = 40x_1+12x_2+40x_3$

$$\text{Suj à } \begin{cases} 2x_1 + x_2 + 5x_3 \geq 20 \\ 4x_1 + x_2 + x_3 \geq 30 \\ x_i \geq 0 \end{cases}$$

c) Max $Z = 2x1+5x2$

$$\text{Suj à } \begin{cases} x_1 + 2x_2 \leq 18 \\ 2x_1 + x_2 \leq 21 \\ x_1 + 3x_2 \geq 10 \\ x_i \geq 0 \end{cases}$$

d) Min $W = 3x_1 + 4x_2$

$$\text{Suj à } \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \leq 10 \\ 1x_1 + 3x_2 \geq 5 \\ x_i \geq 0 \end{cases}$$

Referências:

ANDRADE, EL(1998) – Introdução à Pesquisa Operacional – métodos e modelos para a análise de decisão, 2ª edição, editora LTC, RJ, Brasil:cap.3

BARNETT, RA; Michael, RZ (1990) – Finite Mathematics – for business, economics, life science and social sciences, 5th edition, USA:cap 6.

FERREIRA, M.A.M; Isabel A(1995) – Programação Matemática, 2ª edição, Edições Sílabo, Lisboa: pp11 – 40.

RENDER, B; Ralph, M.S,Jr.(1997) – Quantitative Analysis for Management, 6th edition, Prentice – Hall International, Inc. USA: cap7; 8 e 9.

TAHA, HA(1997) – Operations Research - an Introduction, 6th edition, Prentice – Hall International, Inc. USA:cap.2 e 3

3. DUALIDADE E ANÁLISE DE SENSIBILIDADE

3.1 DUALIDADE EM PROGRAMAÇÃO LINEAR

Todo o problema de programação linear, a que chamamos *primal*, tem associado a ele um correspondente problema, chamado *dual*; ambos são complementares e relacionados de forma que a solução óptima de um fornece informações completas sobre o outro.

3.1.1 TRANSFORMAÇÃO DE UM PROBLEMA PRIMAL EM DUAL

Seja dado o seguinte problema de programação linear, na forma literal ou canónica, problema **primal.**

Maximizar $z = c_1x_1+c_2x_2+c_3x_3+...+c_mx_m$

$$\text{Sujeito à}\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + ... + a_{1m}x_m \le b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + ... + a_{2m}x_m \le b_2 \\ ---------------------- \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + ... + a_{nm}x_m \le b_n \\ x_i \ge 0; \quad i = \overline{1,m} \ ; \ j = \overline{1,n} \end{cases}$$

O seu problema **dual** pode ser escrito na forma canónica assim.
Minimizar w = $b_1y_1+b_2y_2+b_3y_3+...+b_ny_n$

$$\text{Sujeito à}\begin{cases} a_{11}y_1 + a_{21}y_2 + a_{31}y_3 + ... + a_{n1}y_n \ge c_1 \\ a_{12}y_1 + a_{22}y_2 + a_{32}y_3 + ... + a_{n2}y_n \ge c_2 \\ ---------------------- \\ a_{1m}y_1 + a_{2m}y_2 + a_{3m}y_3 + ... + a_{nm}y_n \ge c_m \\ y_i \ge 0; \quad i = \overline{1,m} \ ; \ j = \overline{1,n} \end{cases}$$

As variáveis y_j são chamadas variáveis duais.

O problema dual, para os modelos em que o conjunto das restrições tem um único tipo de desigualdades por exemplo $\ge$ ou $\le$, é construído a partir do primal da seguinte forma:

Regras:
Regra 1. Cada linha do problema primal (restrição), corresponde a uma variável no dual (coluna);
Regra 2. Os termos independentes das restrições (recursos), passam para coeficientes da função objectivo no dual;
Regra 3. Se o primal é um problema de maximização, o seu dual será um problema de minimização e vice- versa;
Regra 4. As variáveis do primal e dual são não negativas.

Exemplo 3.1. Apresentar o problema dual do seguinte problema de maximização de programação linear.

Max $z = x_1 + 2x_2$

$$\text{Sujeito à} \begin{cases} x_1 + 5x_2 \le 18 \\ 2x_1 + x_2 \le 15 \\ 5x_1 - 2x_2 \le 20 \\ 0x_1 + x_2 \le 8 \\ x_i \ge 0 \end{cases}$$

O problema dual correspondente é: Min $w = 18y_1+15y_2+20y_3+8y_4$

$$\text{Sujeito à} \begin{cases} y_1 + 2y_2 + 5y_3 + 0y_4 \ge 1 \\ 5y_1 + y_2 - 2y_3 + 1y_4 \ge 2 \\ y_i \ge 0 \end{cases}$$

Voltando a transformação de um primal no seu dual, consideremos a forma matricial dos problemas:

Problema Primal	**Problema Dual**
Max z = $(c_1\ c_2\ \dots\ c_m) \bullet \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_m \end{pmatrix}$	Min $w = (b_1\ b_2\ \dots b_n) \bullet \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix}$
Suj à $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \dots a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} \dots a_{2m} \\ \dots\dots & \dots\dots \\ a_{n1} & a_{n2} \dots a_{nm} \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_m \end{pmatrix} \le \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix}$	Suj à $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \dots a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} \dots a_{n2} \\ \dots\dots & \dots\dots \\ a_{1m} & a_{2m} \dots a_{nm} \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix} \ge \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \dots \\ c_m \end{pmatrix}$

A seguinte tabela mostra as relações entre o problema primal e dual.

Problema Primal	Problema Dual
• n restrições e m variáveis • coeficientes da função objectivo • constantes	• m variáveis e n restrições • constantes • coeficientes da função objectivo
Problema (max) Problema (min) Restrição (P) Variável (D) $\ge$ $\Leftrightarrow$ ≤ 0 $\le$ $\Leftrightarrow$ ≥ 0 $=$ $\Leftrightarrow$ não restrita	Problema (max) Problema (min) Variável (P) Restrição (D) ≥ 0 $\Leftrightarrow$ $\ge$ ≤ 0 $\Leftrightarrow$ $\le$ não restrita $\Leftrightarrow$ $=$

Da representação matricial, pode-se concluir que os coeficientes do problema dual são formados pela matriz transposta dos coeficientes do problema primal.

Primal $\Rightarrow$ max Z = $\sum$CX

Suj à $\begin{cases} AX \le B \\ X \ge 0 \end{cases}$

min W = $\sum$BY $\Leftarrow$ Dual

Suj à $\begin{cases} A^t Y \ge C \\ Y \ge 0 \end{cases}$

Onde A é matriz dos coeficientes do problema primal e A^t é a matriz transposta de A, calculada trocando as linhas com as colunas de A.

Exemplo 3.2. Formar o dual do problema.

Min w = $4x_1 + 8x_2$

$$\text{Sujeito à } \begin{cases} 3x_1 + 7x_2 \ge 40 \\ 1x_1 - 1x_2 \ge 18 \\ 5x_1 + 1x_2 = 22 \\ x_i \ge 0 \end{cases}$$

Resolução

O problema primal tem 3 restrições, portanto 3 variáveis duais sendo a terceira não restrita.

Etapa 1. transformar a equação em duas inequações.

Min w = $4x_1 + 8x_2$

$$\text{Sujeito à } \begin{cases} 3x_1 + 7x_2 \ge 40 \\ 1x_1 - 1x_2 \ge 18 \\ 5x_1 + 1x_2 \ge 22 \\ -5x_1 - 1x_2 \ge -22 \\ x_i \ge 0 \end{cases}$$

Etapa 2. Escrever o dual correspondente com $y_3 = y_3^+ - y_3^-$

Max z = $40y_1 + 18y_2 + 22y_3^+ - 22y_3^-$

$$\text{Suj à } \begin{cases} 3y_1 + 1y_2 + 5y_3^+ - 5y_3^- \le 4 \\ 7y_1 - 1y_2 + 1y_3^+ - 1y_3^- \le 8 \\ y_i \ge 0;\ y_3^+ \ge 0;\ y_3^- \ge 0 \end{cases} \quad \text{ou}$$

Max z = $40y_1 + 18y_2 + 22y_3$

$$\text{Suj à } \begin{cases} 3y_1 + 1y_2 + 5y_3 \le 4 \\ 7y_1 - 1y_2 + 1y_3 \le 8 \\ y_i \ge 0;\ y_3 \text{ nao restrito} \end{cases}$$

3.1.2 INTERPRETAÇÃO ECONÓMICA DAS VARIÁVEIS DUAIS

As variáveis duais podem receber uma interpretação económica, que leva ao cálculo da utilidade marginal (preço de sombra, valor marginal, etc.) dos recursos. Vejamos as relações das suas soluções através de um exemplo.

Exemplo 3.3. Uma indústria dispõe de três recursos A, B e C, em quantidades limitadas, com os quais pretende produzir dois produtos: produto 1 e produto 2. A tabela a baixo dá a utilização unitária de cada recurso em cada um dos produtos e a disponibilidade de cada recurso. A indústria sabe que cada unidade produzida do produto 1 dá uma margem unitária de lucro de 5 u.m., e cada unidade produzida do produto 2 dá uma margem unitária de lucro de 6 u.m. O problema da programação da produção da empresa é determinar a quantidade a ser feita dos produtos 1 e 2, de forma a maximizar a margem total de lucro.

Recurso	Recurso gasto para fazer 1 unidade de		Disponibilidade
	Produto 1	Produto 2	
A	1	2	14
B	1	1	9
C	7	4	56

Resolução

Problema 1:

Maximizar $z = 5x_1 + 6x_2$

$$\text{Sujeito à} \begin{cases} 1x_1 + 2x_2 \leq 14 \\ 1x_1 + 1x_2 \leq 9 \\ 7x_1 + 4x_2 \leq 56 \\ x_i \geq 0 \end{cases}$$

Suponhamos que a indústria tenha a alternativa de vender os recursos A, B e C, em vez de empregá-los na produção dos dois produtos.

O problema agora é encontrar o valor de cada unidade do recurso. É evidente que a venda dos recursos deve fornecer um ganho pelo menos igual ao obtido com a utilização deles na produção.

Sejam

y_1 valor do recurso A por unidade;

y_2 valor do recurso B por unidade e

y_3 valor do recurso C por unidade

O valor total do estoque dos recursos é: $14y_1 + 9y_2 + 56y_3$

Por outro lado, cada um dos produtos pode ser avaliado, levando em conta a utilização dos recursos por unidade fabricada. Assim, o produto 1 gasta 1 unidade do recurso A, 1 unidade de B e 7 unidades de C, sua avaliação em termos do conteúdo de recurso é:
$1y_1 + 1y_2 + 7y_3$

Para o produto 2, analogamente a avaliação é: $2y_1 + 1y_2 + 4y_3$

É claro que essas avaliações dos produtos não podem ser inferiores as margens unitárias de lucro fornecidas por cada um. Assim podemos escrever:

Produto1. $1y_1+1y_2+7y_3 \geq 5$
Produto 2. $2y_1+1y_2+4y_3 \geq 6$

Neste conjunto de inequações o administrador tem interesse em determinar o valor mínimo do estoque total, tendo em conta que as avaliações dos produtos sejam pelo menos iguais aos lucros unitários fornecidos. Em termos de programação linear, estamos a descrever o problema dual.

Problema 2
Minimizar $W = 14y_1+9y_2+56y_3$

$$\text{Sujeito à } \begin{cases} 1y_1 + 1y_2 + 7y_3 \geq 5 \\ 2y_1 + 1y_2 + 4y_3 \geq 6 \\ y_i \geq 0 \end{cases}$$

Conforme as definições anteriores, o problema 1 é *primal* e o problema 2 é o *dual*.

Portanto, as variáveis duais podem ser interpretadas como avaliações unitárias dos recursos relativos as contribuições de cada um para a obtenção do lucro total. Isto significa que, resolvidos os problemas, as variáveis duais indicam as variações que ocorrem no valor da função objectivo do primal, para variações unitárias nos níveis dos recursos.

Relações entre os valores óptimos do primal e do dual

Resolução do problema primal
Atenção: vamos designar de y_i as variáveis de folga.

Maximizar $Z = 5x_1 + 6x_2 +0y_1+0y_2+0y_3$

$$\text{Sujeito à } \begin{cases} 1x_1 + 2x_2 + 1y_1 + 0y_2 + 0y_3 = 14 \\ 1x_1 + 1x_2 + 0y_1 + 1y_2 + 0y_3 = 9 \\ 7x_1 + 4x_2 + 0y_1 + 0y_2 + 1y_3 = 56 \\ x_i \geq 0;\ y_i \geq 0 \end{cases}$$

Tabela simplex inicial

Base	x_1	x_2	y_1	y_2	y_3	bi
y_1	1	**2**	1	0	0	14 → **(7)**
y_2	1	1	0	1	0	9 → (9)
y_3	7	4	0	0	1	56 → (14)
Z	-5	**-6**	0	0	0	0

1ª iteração

Base	x_1	x_2	y_1	y_2	y_3	bi
x_2	1/2	1	1/2	0	0	7 → $l_1'=1/2l_1$
y_2	**1/2**	0	-1/2	1	0	**2** → $l_2'=l_2-l_1'$
y_3	5	0	-2	0	1	28→ $l_3'=l_3-4l_1'$
z	**-2**	0	3	0	0	42→ $l_4'=l_4+6l_1'$

2ª Iteração

Base	x_1	x_2	y_1	y_2	y_3	bi
X_2	0	1	1	-1	0	5 → $l_1'=l_1-1/2l_2'$
x_1	1	0	-1	2	0	4 → $l_2'=2l_2'$
y_3	0	0	3	-10	1	8 → $l_3'=l_3-5l_2'$
Z	0	0	1	4	0	50→ $l_4'=l_4+2l_2'$

Solução primal: $x_1= 4$; $x_2 = 5$; $y_1 = 0$; $y_2 = 0$; $y_3 = 8$ e $Z_{max} = 50$

Resolução do problema dual. Designando por x_i as variáveis de excesso e a_i as variáveis artificiais, logo estamos numa escolha entre o método de grande M e o método de duas fases; vamos optar pelo método de duas fases.

Minimizar $W = 14y_1+9y_2+56y_3+0x_1+0x_2+0a_1+0a_1$

$$\text{Sujeito à } \begin{cases} 1y_1 + 1y_2 + 7y_3 - 1x_1 + 0x_2 + 1a_1 + 0a_2 = 5 \\ 2y_1 + 1y_2 + 4y_3 + 0x_1 - 1x_2 + 0a_1 + 1a_2 = 6 \\ y_i \geq 0; x_i \geq 0; a_i \geq 0 \end{cases}$$

Tabela inicial simplex (1ª fase)

base	Y_1	y_2	y_3	x_1	x_2	a_1	a_2	b_i
a_1	1	1	**7**	-1	0	1	0	**5** → (0.71)
a_2	2	1	4	0	-1	0	1	6 → (1.5)
W	-14	-9	-56	0	0	0	0	0
Z_a	-3	-2	**-11**	1	1	0	0	-11

1ª Fase (iteração 1)

base	y_1	y_2	y_3	x_1	x_2	a_1	a_2	b_i
y_3	1/7	1/7	1	-1/7	0	1/7	0	5/7 →$l_1'=1/7l_1$
a_2	10/7	3/7	0	4/7	-1	-4/7	1	22/7 →$L_2'=l_2-4l_1'$
W	-6	-1	0	-8	0	8	0	40 →$L_3'=l_3+56l_1'$
Z_a	-10/7	-3/7	0	-4/7	1	11/7	0	-22/7→$l_4'=l_4+11l_1'$

1ª Fase (iteração 2)

base	y_1	y_2	y_3	x_1	x_2	a_1	a_2	b_i
y_3	0	1/10	1	-1/5	1/10	1/5	-1/10	2/5 $\rightarrow l_1'=l_1-1/7l_2'$
y_1	1	3/10	0	2/5	-7/10	-2/5	7/10	11/5 $\rightarrow L_2'=7/10l_2'$
W	0	4/5	0	-28/5	-21/5	28/5	21/5	266/5 $\rightarrow L_3'=l_3+6l_2'$
Z_a	0	0	0	0	0	1	1	0 $\rightarrow l_4'=l_4+10/7l_2'$

$Z_a = 0$; a1 = 0 e $a_2 = 0$, logo devemos passar para a segunda fase.

Tabela simplex inicial (2ª fase)

base	y_1	y_2	y_3	x_1	x_2	b_i
y_3	0	**1/10**	1	-1/5	1/10	2/5 $\rightarrow$ (**4**)
y_1	1	3/10	0	2/5	-7/10	11/5 $\rightarrow$ (22/3)
W	0	**4/5**	0	-28/5	-21/5	266/5$\rightarrow$

2ª fase (iteração 1)

base	y_1	y_2	y_3	x_1	x_2	b_i
y_2	0	1	10	-2	1	4 $\rightarrow l_1'=10l_1$
y_1	1	0	-3	1	-1	1 $\rightarrow l_2'=l_2-3/10l_1'$
W	0	0	-8	-4	-5	50 $\rightarrow l_3'=l_3-4/5l_1'$

Solução dual $y_1=1$; $y_2 = 4$; $y_3 = 0$; $x_1 = 0$; $x_2 = 0$ com $W_{min} = 50$

Comparando as duas tabelas terminais e as soluções obtidas chega-se as conclusões ou relações:

Relação 1. Para quaisquer duas soluções viáveis possíveis do primal e dual, tem-se
$Z \leq W \Rightarrow$ exemplo z = 42 e w = 266/5.

Relação 2. As soluções óptimas dos dois problemas guardam entre se a relação:
Max Z = Min W $\Rightarrow Z_{max} = W_{min} = 50$

Relação 3. Os valores das variáveis duais podem ser obtidos da solução do problema primal, bastando tomar os coeficientes da última linha das variáveis básicas iniciais. Se o dual é de maximizar, lemos os valores tal como estão, caso contrário lemos com o sinal oposto, portanto:

Saindo de max (P) para min (D)
$\Rightarrow$ Solução primal: $x_1 = 4$; $x_2 = 5$; $y_1 = 0$; $y_2 = 0$; $y_3 = 8$; $Z_{max} = 50$
$\Rightarrow$ Solução dual: $y_1 = 1$; $y_2 = 4$; $y_3 = 0$; $x_1 = 0$; $x_2 = 0$; $W_{min} = 50$

Saindo de min (P) para max (D)
$\Rightarrow$ Solução primal: $y_1 = 1$; $y_2 = 4$; $y_3 = 0$; $x_1 = 0$; $x_2 = 0$; $W_{min} = 50$
$\Rightarrow$ Solução dual: $x_1 = 4$; $x_2 = 5$; $y_1 = 0$; $y_2 = 0$; $y_3 = 8$; $Z_{max} = 50$

Algumas aplicações da dualidade

Além da aplicação ao estudo de casos na empresa, a dualidade permite-nos entre outros casos:

1. Já que a resolução dos problemas de minimização pelo método de duas fases, leva muitas iterações, uma alternativa é usar a dualidade para obter a solução primal.

2. Resolução rápida dos problemas de programação linear. De facto, em muitos casos o dual tem menos tabelas simplex que o primal, sempre que o número de restrições do primal exceder o número de variáveis.

3. Resolução de problemas de teoria de jogos. Na determinação da estratégia óptima e do valor de um jogo de duas pessoas de soma nula, aplicam-se os conceitos da dualidade. Pois, o modelo matemático de um jogo pode ser convertido num problema de programação linear e as estratégias óptimas de cada jogador serão as soluções do primal e do dual.

Exemplo 3.4. Resolver o seguinte problema de minimização usando o procedimento dual.

Minimizar $W = 3y_1 + 2y_2$

Sujeito à $\begin{cases} y_1 + 2y_2 \geq 10 \\ y_1 + y_2 \geq 8 \\ 2y_1 + y_2 \geq 12 \\ y_i \geq 0 \end{cases}$

Resolução

Max $Z = 10x_1 + 8x_2 + 12x_3 + 0y_1 + 0y_2$

Sujeito à $\begin{cases} 1x_1 + 1x_2 + 2x_3 + 1y_1 + 0y_2 = 3 \\ 2x_1 + 1x_2 + 1x_3 + 0y_1 + 1y_2 = 2 \\ x_i ; y_i \geq 0 \end{cases}$

Tabela simplex inicial

base	x_1	x_2	x_3	y_1	y_2	b_i
Y_1	1	1	**2**	1	0	3 → (**1.5**)
y_2	2	1	1	0	1	2 → (2)
Z	−10	−8	**−12**	0	0	0

1ª Iteração

base	x_1	x_2	x_3	y_1	y_2	b_i
X_3	1/2	1/2	1	1/2	0	3/2 → $l_1'=1/2l_1$
y_2	**3/2**	1/2	0	−1/2	1	1/2 → $l_2'=l_2-l_1'$
Z	**−4**	−2	0	6	0	18→ $l_3'=l_3+12l_1'$

2ª Iteração

base	x_1	x_2	x_3	y_1	y_2	b_i
X_3	0	1/3	1	2/3	-1/3	$4/3 \rightarrow l_1' = l_1 - 1/2 l_2$
x_1	1	**1/3**	0	-1/3	2/3	$1/3 \rightarrow l_2' = 2/3 l_2$
Z	0	**-2/3**	0	14/3	8/3	$58/3 \rightarrow l_3' = l_3 + 4 l_2'$

3ª Iteração – Tabela terminal simplex

base	x_1	x_2	x_3	y_1	y_2	b_i
x_3	-1	0	1	1	-1	$1 \rightarrow l_1' = l_1 - 1/3 l_2$
x_2	3	1	0	-1	2	$1 \rightarrow l_2' = 3 l_2$
Z	2	0	0	4	4	$20 \rightarrow l_3' = l_3 + 2/3 l_2'$

Solução primal: $y_1 = 4$; $y_2 = 4$; $x_1 = 2$; $x_2 = 0$; $x_3 = 0$; $W_{min} = 20$
Solução dual : $x_1 = 0$; $x_2 = 1$; $x_3 = 1$; $y_1 = 0$; $y_2 = 0$; $Z_{max} = 20$

3.1.3 Propriedades operacionais entre o primal e dual

Antes de introduzir a análise de sensibilidade importa referir algumas propriedades que facilitam as operações nas relações entre o problema primal e dual. Para isso voltemos ao exemplo 3.3 do parágrafo 3.1.2 e apresentemos novamente a resolução do problema primal

Problema 1:
Maximizar $Z = 5x_1 + 6x_2$

Sujeito à $\begin{cases} 1x_1 + 2x_2 \le 14 \\ 1x_1 + 1x_2 \le 9 \\ 7x_1 + 4x_2 \le 56 \\ x_i \ge 0 \end{cases}$

Problema 2
Minimizar $W = 14y_1 + 9y_2 + 56y_3$

Sujeito à $\begin{cases} 1y_1 + 1y_2 + 7y_3 \ge 5 \\ 2y_1 + 1y_2 + 4y_3 \ge 6 \\ y_i \ge 0 \end{cases}$

Resolução do problema 1.
Maximizar $Z = 5x_1 + 6x_2 + 0y_1 + 0y_2 + 0y_3$

Sujeito à $\begin{cases} 1x_1 + 2x_2 + 1x_3 + 0x_4 + 0x_5 = 14 \\ 1x_1 + 1x_2 + 0x_3 + 1x_4 + 0x_5 = 9 \\ 7x_1 + 4x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 1x_5 = 56 \\ x_i \ge 0 \end{cases}$

Tabela simplex inicial

Base	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b_i
x_3	1	**2**	1	0	0	$14 \rightarrow$ **(7)**
x_4	1	1	0	1	0	$9 \rightarrow (9)$
x_5	7	4	0	0	1	$56 \rightarrow (14)$
Z	-5	**-6**	0	0	0	0

1ª iteração

Base	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b_i
x_2	1/2	1	1/2	0	0	7 → $l_1'=1/2l_1$
x_4	**1/2**	0	-1/2	1	0	**2** → $l_2'=l_2-l_1'$
x_5	5	0	-2	0	1	28→ $l_3'=l_3-4l_1'$
Z	**-2**	0	3	0	0	42→ $l_4'=l_4+6l_1'$

2ª Iteração

Base	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b_i
x_2	0	1	1	-1	0	5 → $l_1'=l_1-1/2l_2'$
x_1	1	0	-1	2	0	4 → $l_2'=2l_2'$
x_5	0	0	3	-10	1	8 → $l_3'=l_3-5l_2'$
Z	0	0	1	4	0	50→ $l_4'=l_4+2l_2'$

Solução primal: $x_1= 4$; $x_2 = 5$; $x_3 = 0$; $x_4 = 0$; $x_5 = 8$ e $Z_{max} = 50$
Solução dual : $y_1 = 1$; $y_2 = 4$; $y_3 = 0$; $y_4 = 0$; $y_5 = 0$; $W_{min} = 50$

Propriedade 1. Em qualquer iteração do método simplex, no primal ou dual, a matriz que aparece sob as variáveis básicas usadas na solução inicial (variáveis de folga, de excesso ou artificiais), pode ser usada para gerar as contribuições unitárias para o valor da função objectivo (coeficientes da última linha do quadro simplex, designados por Δi).

A prática desta propriedade pode ser vista em três passos:

Passo 1. Identificar os coeficientes originais da função objectivo correspondentes às variáveis básicas na actual iteração e escrevê-los num vector linha, na mesma ordem das linhas da tabela simplex.

Passo 2. Multiplicar o vector resultante pela matriz que aparece sob as variáveis iniciais na respectiva iteração.

Passo 3. Subtrair os coeficientes originais da função objectivo correspondente às variáveis básicas da solução inicial dos respectivos coeficientes obtidos no passo 2.

Demonstração da propriedade 1.
Passo 1: No problema 1, anterior na 2ª iteração as variáveis básicas são: x_2, x_1, x_5 cujos coeficientes da função objectivo são (6, 5, 0)

$$\begin{pmatrix} x_2 & x_1 & x_5 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} 6 & 5 & 0 \end{pmatrix}$$

Passo 2: A matriz que aparece nessa iteração sob as variáveis básicas iniciais (variáveis de folga) é:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 3 & -10 & 1 \end{pmatrix}$$

Multiplicando o vector linha pela matriz dos coeficientes das variáveis básicas temos:

$$\begin{pmatrix} 6 & 5 & 0 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 3 & -10 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

Passo 3: Subtraindo o vector resultante aos valores iniciais das variáveis básicas iniciais obtemos os resultados da terceira linha na iteração final.

Para a variável x_3: $\Delta_3 = 1 - 0 = 1$
Para a variável x_4: $\Delta_4 = 4 - 0 = 4$
Para a variável x_5: $\Delta_5 = 0 - 0 = 0$

Os valores obtidos por esta propriedade são chamados ***multiplicadores do simplex*** e são valores óptimos das variáveis duais. Outros nomes usados são: custos implícitos, custos de oportunidade ou preços de sombra.

Propriedade 2. Em qualquer iteração do primal ou dual os valores das variáveis na base podem ser obtidos pela multiplicação da matriz definida na propriedade 1, pelo vector coluna contendo os valores originais dos recursos (vector dos termos independentes).

Demonstração da propriedade 2.

a) Na 1ª iteração, os valores das variáveis básicas são:

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ -1/2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 14 \\ 9 \\ 56 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ 28 \end{pmatrix}$$

b) Na 2ª iteração, os valores das variáveis básicas são:

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ x_1 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 3 & -10 & 1 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 14 \\ 9 \\ 56 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ o que confirma os resultados obtidos na iteração final.

Propriedade 3. Em qualquer iteração do primal ou dual, os coeficientes de qualquer variável nas restrições podem ser obtidos pela multiplicação da matriz definida na propriedade 1, pelo vector coluna contendo os coeficientes originais da mesma variável nas restrições.

Demonstração da propriedade 3.

a) Os coeficientes originais de x_2 na tabela simplex inicial são: $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$

Na 2ª iteração, os coeficientes de x_2 são obtidos pelo produto:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 3 & -10 & 1 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

b) Os coeficientes originais de x_3 na tabela simplex inicial são: $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Na 2ª iteração, os coeficientes de x_3 são obtidos pelo produto:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 3 & -10 & 1 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Propriedade 4. Em qualquer iteração do método simplex, a substituição das variáveis duais pelos respectivos multiplicadores do simplex, relativos a variáveis básicas da solução inicial, permite obter os coeficientes da equação Z transformada, pela diferença entre o primeiro membro e segundo das restrições correspondentes do dual.

Demonstração da propriedade 4.

Na 1ª iteração do problema 1, temos os seguintes multiplicadores do simplex relativos as variáveis básicas na solução inicial.

Para a variável x_3: $\Delta_3 = 3 \rightarrow$ variável dual y_1
Para a variável x_4: $\Delta_4 = 0 \rightarrow$ variável dual y_2
Para a variável x_5: $\Delta_5 = 0 \rightarrow$ variável dual y_3

As restrições duais correspondentes a x_1 e x_2 são respectivamente:

$$x_1 \rightarrow 1y_1 + 1y_2 + 7y_3 \geq 5$$
$$x_2 \rightarrow 2y_1 + 1y_2 + 4y_3 \geq 6$$

Os coeficientes de Z transformado são obtidos substituindo y_1 por Δ_3; y_2 por Δ_4 e y_3 por Δ_5. Assim:

Para x_1: 1*3 + 1*0 + 7*0 – 5 = -2, logo $\Delta_1 = -2$
Para x_2: 2*3 + 1*0 + 4*0 – 6 = 0, logo $\Delta_2 = 0$

O que confere com os resultados obtidos na resolução do problema. Como $\Delta_1 < 0$, isto significa que a solução ainda não é óptima, x_1 deve entrar na base e por outro lado a solução do dual não é viável, o que nos leva a concluir que:

- Enquanto o primal não for óptimo, o dual será inviável;

- As restrições do dual, correspondentes às variáveis básicas, são satisfeitas como equações, o que significa que a respectiva variável de excesso é nula;

- O problema primal começa com uma solução viável não óptima que deve ser optimizada, enquanto que o dual começa com uma solução inviável com valor superior ao óptimo e continua inviável até que a solução óptima seja atingida.

3.2 MÉTODO DUAL – SIMPLEX

Até agora, nos problemas de programação linear que consideramos era obrigatório que todos os elementos do lado direito da tabela simplex fossem positivos. Isto significa que todas as soluções eram viáveis. Pela propriedade 4, sabemos que as soluções duais são inviáveis até que a solução óptima seja obtida. No entanto é possível que durante o processo de solução, venhamos a ter uma solução dual viável, o que significa inviável no primal.

O método Dual – Simplex se destina a resolver esse tipo de problema. As diferenças em relação ao método simplex se resumem nas regras de entrada e saída de variáveis na base.

3.2.1 Regras de entrada e saída de variáveis na base

Dado um problema de minimização para resolvé-lo pelo método Dual - Simplex deve-se transformar as inequações do tipo ≥ para ≤ , em seguida aplicar as regras 1 e 2 para o problema de minimização.

Regra 1. *Variável que sai*: é a variável básica com o valor mais negativo. Se todas as variáveis básicas tiverem valores positivos, a solução é óptima.

Regra 2. *Variável que entra*: é escolhida entre as variáveis fora da base, da seguinte forma:

- Dividir os coeficientes do lado esquerdo da equação z transformada (coeficientes da função objectivo) pelos correspondentes coeficientes negativos da equação da variável que sai. $\alpha_{ij} = \dfrac{c_i}{a_{ij}}$; $a_{ij} < 0$

- A variável que entra é a que tem o menor valor entre os quocientes encontrados (para o problema de minimização) ou o menor valor absoluto (para o problema de maximização).

Quando, em ambos os casos, não houver coeficientes negativos na linha da variável que sai da base, o problema não tem solução viável.

Exemplo 3.5. Resolver o seguinte problema pelo método dual - simplex.
Minimizar $W = 2x_1 + 1x_2$

$$\text{Sujeito à} \begin{cases} 4x_1 + 3x_2 \geq 6 \\ 1x_1 + 2x_2 \leq 3 \\ x_i \geq 0 \end{cases}$$

Resolução
Para resolver o problema sem usar o método de duas fazes nem do grande M, vamos escrever o problema na forma padrão e introduzimos depois as variáveis de folga.

Minimizar $W = 2x_1 + 1x_2$

$$\text{Sujeito à} \begin{cases} -4x_1 - 3x_2 \leq -6 \\ 1x_1 + 2x_2 \leq 3 \\ x_i \geq 0 \end{cases} \Longrightarrow$$

Min $W = 2x_1 + 1x_2 + 0x_3 + 0x_4$

$$\text{Suj. à} \begin{cases} -4x_1 - 3x_2 + x_3 + 0x_4 = -6 \\ 1x_1 + 2x_2 + 0x_3 + x_4 = 3 \\ x_i \geq 0 \end{cases}$$

Tabela inicial simplex

Base	x_1	x_2	x_3	x_4	bi
x_3	-4	**-3**	1	0	**-6**
x_4	1	2	0	1	3
W	-2	-1	0	0	0
	(1/2)	(**1/3**)			

A variável que sai é x_3 porque $x_3 = -6$; e x_2 entra na base porque 1/3 < 1/2.

1ª iteração

Base	x_1	x_2	x_3	x_4	bi
x_2	4/3	1	-1/3	0	2 $\rightarrow$ $l_1' = -1/3 l_1$
x_4	**-5/3**	0	2/3	1	**-1** $\rightarrow$ $l_2' = l_2 - 2l_1'$
W	-2/3	0	-1/3	0	2 $\rightarrow$ $l_3' = l_3 + l_1'$
	(**2/5**)				

2ª iteração

Base	x_1	x_2	x_3	x_4	Bi
x_2	0	1	1/5	4/5	6/5 $\rightarrow$ $l_1' = l_1 - 4/3 l_2'$
x_1	1	0	-2/5	-3/5	3/5 $\rightarrow$ $l_2' = -3/5 l_2$
W	0	0	-3/5	-2/5	12/5 $\rightarrow$ $l_3' = l_3 + 2/3 l_2'$

Solução X = {3/5; 6/5; 0; 0} $W_{min} = 12/5$
Para a solução dual temos Y = (3/5; 2/5; 0; 0} $Z_{max} = 12/5$

Exemplo 3.6. Resolver o problema de programação linear.
(a) pelo método gráfico (b) pelo método dual - simplex.

Minimizar W = $3x_1 + 2x_2$

$$\text{Sujeito à} \begin{cases} 3x_1 + x_2 \geq 3 & \ldots r_1 \\ 4x_1 + 3x_2 \geq 6 & \ldots r_2 \\ x_1 + x_2 \leq 3 & \ldots r_3 \\ x_i \geq 0 & r_4, r_5 \end{cases}$$

a) Resolução pelo método gráfico

R_1:

x_1	x_2
0	3
1	0

R_2 :

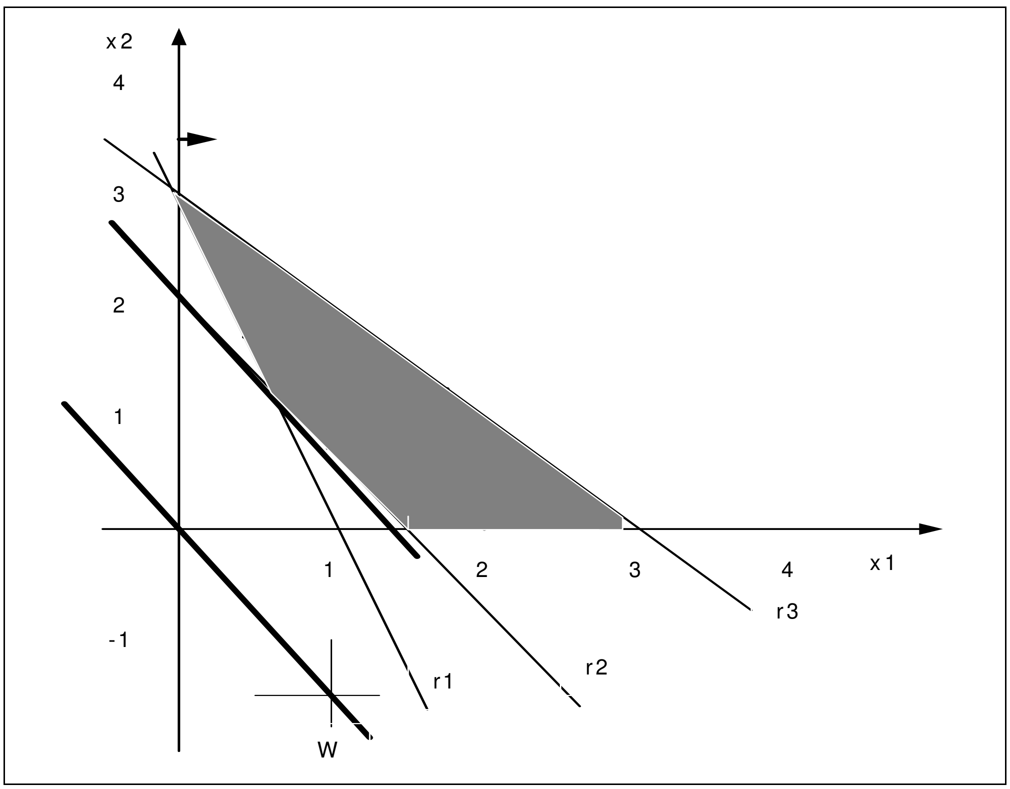
x_1	x_2
0	2
3/2	0

R_3:

x_1	x_2
0	3
3	0

recta W:

x_1	x_2
0	0
1	-3/2



Do gráfico o ponto extremo e mínimo é P = $r_1 \cap r_2$

Resolvendo o sistema das rectas $\begin{cases} 3x_1 + 1x_2 = 3 \\ 4x_1 + 3x_2 = 6 \end{cases}$ teremos a solução

X = (3/5; 6/5) com $W_{min} = 21/5$

b) Resolvendo pelo método dual – simplex, temos:

Minimizar $W = 3x_1 + 2x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5$

$$\text{Sujeito à} \begin{cases} -3x_1 - x_2 + 1x_3 + 0x_4 + 0x_5 = -3 \\ -4x_1 - 3x_2 + 0x_3 + x_4 + 0x_5 = -6 \\ +1x_1 + 1x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 1x_5 = 3 \\ x_i \geq 0 \end{cases}$$

Tabela inicial simplex

Base	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	bi
x_3	-3	-1	1	0	0	-3
x_4	-4	**-3**	0	1	0	**-6**
x_5	1	1	0	0	1	3
W	-3 (3/4)	-2 (**2/3**)	0	0	0	0

1ª Iteração

Base	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	bi
x_3	**-5/3**	0	1	-1/3	0	**-1** $\rightarrow l_1' = l_1 + l_2'$
x_2	4/3	1	0	-1/3	0	2 $\rightarrow l_2' = -1/3 l_2'$
x_5	-1/3	0	0	1/3	1	1 $\rightarrow l_3' = l_3 - l_2'$
W	-1/3 (**1/5**)	0	0	-2/3 (2)	0	4 $\rightarrow l_4' = l_4 + 2l_2'$

2ª Iteração

Base	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	Bi
x_1	1	0	-3/5	1/5	0	3/5 $\rightarrow l_1' = -3/5 l_1$
x_2	0	1	4/5	-3/5	0	6/5 $\rightarrow l_2' = l_2 - 4/3 l_1'$
x_5	0	0	-1/5	2/5	1	6/5 $\rightarrow l_3' = l_3 - 1/3 l_1'$
W	0	0	-1/5	-3/5	0	21/5 $\rightarrow l_4' = l_4 + 1/3 l_1'$

Solução X = (3/5; 6/5; 0;0;6/5) com $W_{min} = 21/5$

3.2.2 EXERCÍCIOS PROPOSTOS

Exercício 3.1. Escreva os problemas na forma canónica e transforme – os em duais.

a) Minimizar $W = 9y_1 + 2y_2$

$$\text{Sujeito à} \begin{cases} 4y_1 + y_2 \geq 13 \\ 3y_1 + y_2 \leq 12 \\ y_i \geq 0 \end{cases}$$

b) Maximizar Z = 16x1 + 12x2

$$\text{Sujeito à} \begin{cases} x_1 + x_2 \geq 16 \\ x_1 - x_2 \leq -9 \\ 3x_1 + x_2 \leq 21 \\ x_i \geq 0 \end{cases}$$

Exercício 3.2. Considere o seguinte problema de programação linear:

Minimizar $W = 5x_1 + 2x_2$

$$\text{Sujeito à} \begin{cases} 2x_1 + x_2 \geq 8 \\ x_1 + x_2 \geq 6 \\ \dfrac{1}{2}x_1 + x_2 \geq 4 \\ x_i \geq 0 \end{cases}$$

a) Escreva o problema dual correspondente.
b) Obtenha a solução do primal a partir da resolução do dual pelo método simplex.
   (***Resp***. X = (0; 8; 0; 2; 4) com W_{min} = 16 u.m)

Exercício 3.3. Considere o seguinte problema de programação linear.
Maximizar $Z = 12x_1 + 15x_2$

$$\text{Sujeito à} \begin{cases} 4x_1 + 3x_2 \leq 12 \\ 2x_1 + 5x_2 \leq 10 \\ x_i \geq 0 \end{cases}$$

Usando o método simplex resolva o problema e apresente as soluções do primal e dual.
(Primal: ***Resp.*** X = (15/7; 8/7; 0; 0) com Z_{max} = 300/7)
(Dual ***: Resp***: Y = (15/7; 12/7; 0; 0) com W_{min} = 300/7)

Exercício 3.4. Nos seguintes casos transformar em duais e depois resolver os problemas.

a) Min $W = 5y_1 + 2y_2$

$$\text{Sujeito à} \begin{cases} 2y_1 + 3y_2 \geq 6 \\ 2y_1 + 1y_2 \geq 7 \\ y_i \geq 0 \end{cases}$$

b) Min $W = 2y_1 + 1y_2 + 3y_3$

$$\text{Sujeito à} \begin{cases} 1y_1 + 1y_2 + 1y_3 \geq 100 \\ 2y_1 + 1y_2 + 0y_3 \geq 50 \\ y_i \geq 0 \end{cases}$$

c) Min $W = 7y_1 + 5y_2$

$$\text{Sujeito à} \begin{cases} 2y_1 + 1y_2 \geq 4 \\ 1y_1 - 2y_2 \geq -8 \\ -2y_1 + y_2 \geq -8 \\ y_i \geq 0 \end{cases}$$

d) Min $W = 2y_1 + 1y_2$

$$\text{Sujeito à} \begin{cases} 2y_1 + 1y_2 = 20 \\ 2y_1 + 1y_2 \geq 10 \\ y_i \geq 0 \end{cases}$$

a) ***Resp***. Y = (0; 7; 15; 0) com W_{min} = 14
b) ***Resp.*** Y = (0; 100; 0; 0; 50) com W_{min} = 100
c) ***Resp.*** Y = (2; 0; 0; 10; 4) com W_{min} = 14
d) ***Resp***. Y = (10; 0; 0; 0; 10) com W_{min} = 20

Exercício 3.5. Uma empresa de transporte dispõe de dois tipos de camiões que podem operar em três percursos diferentes. A capacidade semanal de transporte em cada um dos tipos de camiões e a procura semanal mínima de serviços de carga, expressos em toneladas estão indicados no quadro seguinte.

Percursos	Tipos de camiões		Procura mínima
	Tipo A	Tipo B	
1	10	10	180
2	12	15	200
3	10	10	220

Sabendo que os custos de operação de cada camião são 50 e 80 u.m por semana respectivamente, quantos veículos de cada tipo deve a empresa utilizar nos percursos indicados, de modo a minimizar os custos. (use o procedimento dual se necessário).
(***Resp.*** Y = (22; 0; 40; 64; 0) com W_{min} = 1100 u.m.)

Exercício 3.6. Resolva o seguinte problema de programação linear, primeiro graficamente e depois pelo algoritmo dual do método simplex.
Minimizar $W = 4y_1 + 5y_2$

$$\text{Sujeito à} \begin{cases} y_1 + 2y_2 \geq 80 \\ 3y_1 + y_2 \geq 75 \\ y_i \geq 0 \end{cases}$$

(***Resp.*** Y = (14; 33; 0; 0) com W_{min} = 221)

Exercício 3.7. Resolva os seguintes problemas pelo método dual simplex, se necessário apresente a solução pelo método gráfico. Nota: substituir as equações por duas inequações.

a) Min $W = 4x_1 + 2x_2$

$$\text{suj. à} \begin{cases} x_1 + x_2 = 1 \\ 3x_1 - x_2 \geq 2 \\ x_i \geq 0 \end{cases}$$

b) Min $W = 2x_1+3x_2$

$$\text{suj. à} \begin{cases} 2x_1 + 1x_2 \geq 3 \\ 1x_1 + 1x_2 = 2 \\ x_i \geq 0 \end{cases}$$

Respostas:
a) X = (3/4; 1/4 ; 1/6; 0; 0) W_{min} = 7/2
b) X = (2; 0; 1; 0; 0) W_{min} = 4

3.3 ANÁLISE DE SENSIBILIDADE EM PROGRAMAÇÃO LINEAR

A análise de sensibilidade em modelos de programação linear significa simplesmente procurar uma nova interpretação a partir da solução obtida. Já que tanto os recursos como os preços no mercado estão sujeitos a mudanças contínuas e subsequentes reavaliações, a análise Pós – Optimização é uma ferramenta dinâmica e indispensável ao administrador para avaliar as consequências das mudanças.

A análise de sensibilidade da solução óptima tem como objectivo determinar as condições para as quais a solução óptima obtida é ainda válida. A solução óptima de um problema é calculada com base nos dados do modelo, que podem sofrer variações por várias razões:

- Porque os dados foram estimados e não traduzem a realidade;
- Novas possibilidades apareceram após a formulação do modelo e que devem ser consideradas na implementação da solução.

Conclusão: A análise de sensibilidade tem por objectivo verificar a validade da solução obtida quando submetida a variações nos coeficientes do modelo original.

3.3.1 Variação nas quantidades dos recursos

Exemplo 3.7. Vamos utilizar as tabelas simplex inicial e terminal do problema 3.3
Maximizar $Z = 5x_1 + 6x_2$

$$\text{Sujeito à } \begin{cases} 1x_1 + 2x_2 \le 14 \\ 1x_1 + 1x_2 \le 9 \\ 7x_1 + 4x_2 \le 56 \\ x_i \ge 0 \end{cases}$$

Tabela inicial simplex

base	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b_i
x_3	1	2	1	0	0	14
x_4	1	1	0	1	0	9
x_5	7	4	0	0	1	56
Z	−5	−6	0	0	0	0

Tabela terminal simplex

base	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b_i
x_2	0	1	1	−1	0	5
x_1	1	0	−1	2	0	4
x_5	0	0	3	−10	1	8
Z	0	0	1	4	0	50

Vamos supor que o recurso b_1 seja alterado de 14 para 16. Como esta mudança afectará os valores da solução original.

De acordo com a propriedade 2, os novos valores das variáveis básicas serão:

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ x_1 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 3 & -10 & 1 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 16 \\ 9 \\ 56 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ 14 \end{pmatrix}$$

Como todos os valores são maiores ou iguais a zero, a solução actual é viável e óptima. Assim para $x_1 = 2$; $x_2 = 7$ e $x_5 = 14$ temos Z = 5*2 + 6*7 = 52, o que significa que a variação de b_1 de 14 para 16 trouxe um aumento no lucro $\Delta z = 52 - 50 = +2$ u.m.

Seja a seguinte mudança para o recurso b_1 de 14 para 20.

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ x_1 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 3 & -10 & 1 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 20 \\ 9 \\ 56 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ -2 \\ 26 \end{pmatrix}$$

Como x_1 é negativo, esta solução não é viável, logo deve ser procurada uma outra solução óptima retirando x_1 da base.

De um modo geral, pode-se procurar a variação permissível para cada variável nos recursos sem que a solução se torne inviável.

Demonstração do cálculo dos limites de oscilação dos valores dos recursos.

a) Vamos analisar a variação positiva admissível no recurso b_1 do exemplo 3.7, partindo da solução óptima.

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ x_1 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 3 & -10 & 1 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 14+d \\ 9 \\ 56 \end{pmatrix} \geq 0$$

Resolvendo o produto matricial temos:

$$\begin{pmatrix} 5+d \\ 4-d \\ 8+3d \end{pmatrix} \geq 0 \quad \text{ou} \quad \begin{cases} 5+d \geq 0 \\ 4-d \geq 0 \\ 8+3d \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} d \geq -5 \\ d \leq 4 \\ d \geq -8/3 \end{cases}$$

A maior variação positiva no recurso 1, sem alterar a base é de 4 unidades (d = 4), ou seja o valor máximo admissível é 14+4 = 18 unidades.

b) Vamos analisar agora a variação negativa no recurso 1.

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ x_1 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 3 & -10 & 1 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 14-d \\ 9 \\ 56 \end{pmatrix} \geq 0 \ ; \quad \begin{cases} 5-d \geq 0 \\ 4+d \geq 0 \\ 8-3d \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} d \leq 5 \\ d \geq -4 \\ d \leq 8/3 \end{cases}$$

A maior variação negativa no recurso 1, sem alterar a base deve ser de 8/3 ou o valor mínimo admissível é de 14 – 8/3 = 34/3.

Assim, sem haver alteração na base que forma a solução óptima, a quantidade do recurso 1 pode variar de 34/3 até 18. Com o recurso 2, usando o mesmo raciocínio calcula-se o intervalo de oscilação. Quanto ao recurso 3, cuja variável de folga tem valor positivo na solução básica (tabela terminal), a redução máxima admissível é a própria folga (8 unidades) e qualquer aumento não afecta a solução final.

Intervalo óptimo de variação dos recursos

Para se obter os intervalos de oscilação dos recursos podem se usar os limites:

Δ^+ = limite superior – é igual ao menor quociente absoluto entre o novo valor do recurso na tabela terminal da variável que era básica na tabela inicial (no nosso caso o recurso 1 está associado a x_3) e os coeficientes negativos da mesma variável na tabela terminal (razões negativas).

$$\Delta^+ = \min |\,\text{raz. neg}\,| = \min \left| \left\{ \frac{b_i}{a_{ij}} \right\} \right|;\ a_{ij} < 0$$

Δ^- = limite inferior – é igual ao menor quociente absoluto entre os novos recursos óptimos e os coeficientes positivos da variável associada ao recurso b_i (razões positivas).

$$\Delta^- = \min |\,\text{raz. pos}\,| = \min \left| \left\{ \frac{b_i}{a_{ij}} \right\} \right|;\ a_{ij} > 0$$

Exemplo 3.8. Calcular o intervalo óptimo de oscilação de todos os recursos do exemplo 3.7 anterior.

a) b_1 está associado a $x_3 = 14$ na tabela inicial, logo vamos usar a coluna de x_3 na tabela terminal.

$\Delta^+ = \min |\,\text{raz. neg}\,| = \min \left|\frac{4}{-1}\right| = 4 \uparrow.$ $\qquad \Delta^- = \min |\,\text{raz. pos}\,| = \min \left|\frac{5}{1};\frac{8}{3}\right| = \frac{8}{3} \downarrow.$

⇨ O intervalo é: $14 - 8/3 \le b_1 \le 14 + 4 \iff 34/3 \le b_1 \le 18$

b) b_2 está associado a $x_4 = 9$ na tabela inicial, logo vamos usar a coluna de x_4 na tabela terminal.

$\Delta^+ = \min |\,\text{raz. neg}\,| = \min \left|\frac{5}{-1};\frac{8}{-10}\right| = \frac{4}{5} \uparrow.$

$\Delta^- = \min |\,\text{raz. pos}\,| = \min \left|\frac{4}{2}\right| = 2 \downarrow.$

⇨ O intervalo é: $9 - 2 \le b_2 \le 9 + 4/5 \iff 7 \le b_2 \le 9.8$

c) b_3 está associado a $x_5 = 56$ na tabela inicial, logo vamos usar a coluna de x_5 na tabela terminal.

$\Delta^+ = \min |\,\text{raz. neg}\,| = \min |\,\text{nao existe}\,| = \text{nao limitado} \uparrow.$

$\Delta^- = \min |\,\text{raz. pos}\,| = \min \left|\frac{8}{1}\right| = 8 \downarrow.$

⇨ O intervalo é: $56 - 8 \le b_3 \le 56 + \infty \iff 48 \le b_3 \le \infty$

Exemplo 3.9. Seja o seguinte problema de programação linear, reportando os lucros unitários e as horas gastas na produção de um determinado artigo que passa por três secções:

$$\max imizar \quad z = 16x_1 + 16x_2 \qquad \text{(margem bruta)}$$

$$sujeito \ a \begin{cases} 4x_1 + 4x_2 \le 24 & \text{(seccao de corte)} \\ 4x_1 + 2x_2 \le 18 & \text{(seccao de montagem)} \\ 2x_1 + 6x_2 \le 32 & \text{(seccao de acabamento)} \\ x_i \ge 0 \end{cases}$$

onde x_1 – representa centenas de peças do tipo A a produzir diariamente;
x_2 – representa centenas de peças do tipo B a produzir diariamente.
O quadro óptimo do simplex para este modelo económico matemático é o seguinte

base	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	Recurso
x_2	0	1	1/2	-1/3	0	3
x_1	1	0	-1/4	1/2	0	3
x_5	0	0	-5/2	2	1	8
Z	0	0	4	0	0	96

Admitindo que a disponibilidade do recurso na secção de corte seja alterada de 24 para 30 horas, quais as consequências desta alteração na solução óptima.

Resolução

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ x_1 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/3 & 0 \\ -1/4 & 1/2 & 0 \\ -5/2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 30 \\ 18 \\ 32 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 3/2 \\ -7 \end{pmatrix}$$

x_5 deve sair da base e o novo z é: Z = 16*3/2 + 16*9 = 168

base	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	Recurso
x_2	0	1	1/2	-1/3	0	9
x_1	1	0	-1/4	1/2	0	3/2
x_5	0	0	**-5/2**	2	1	**-7**
Z	0	0	4	0	0	168

Iteração 1. (método dual - simplex)

base	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	Recurso
x_2	0	1	0	1/15	1/5	38/5
x_1	1	0	0	3/10	-1/10	11/5
x_3	0	0	1	-4/5	-2/5	14/5
Z	0	0	0	16/5	8/5	784/5

Solução

X = (11/5; 38/5; 14/5; 0; 0) com Z_{max} = 784/5 e Δz = 304/5

3.3.2 Variação nos coeficientes da função objectivo

As variações nos coeficientes da função objectivo afectam os valores da variável z e influenciam os testes para um problema optimizado. A análise de sensibilidade deve ser feita considerando as variáveis básicas e não básicas.

a) Variação nos coeficientes das variáveis básicas

Estes coeficientes afectam os multiplicadores do simplex que devem ser alterados antes de conferir a optimidade do problema.

Exemplo 3.10. Vamos supor que no exemplo 3.7, o coeficiente de x_2 tenha sido alterado de 6 para 4. A nova função objectivo será $Z = 5x_1 + 4x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5$ e os coeficientes que nos interessam são os das variáveis $(x_2 \;\; x_1 \;\; x_5)$ ou o vector $(4 \quad 5 \quad 0)$.

Usando a propriedade 1 temos: $(4 \quad 5 \quad 0) \bullet \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 3 & -10 & 1 \end{pmatrix} = (-1 \quad 6 \quad 0)$

Assim, os novos multiplicadores do simplex para as variáveis fora da base na tabela terminal são:

x_3: $\Delta_3 = -1 - 0 = -1$

x_4: $\Delta_4 = 6 - 0 = 6$

como $\Delta_3 < 0$, isto significa que a solução actual não continua óptima e deve –se introduzir x_3 na base. Para isso o novo valor da função objectivo é calculado tomando em consideração a nova função objectivo. Z = 5*4 + 4*5 = 40.

Tabela inicial simplex

Base	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b_i
x_2	0	1	1	−1	0	5
x_1	1	0	−1	2	0	4
x_5	0	0	**3**	−10	1	**8**
Z	0	0	**−1**	6	0	40

1ª iteração

Base	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b_i
x_2	0	1	0	7/3	−1/3	7/3
x_1	1	0	0	−4/3	1/3	20/3
x_3	0	0	1	−10/3	1/3	8/3
Z	0	0	0	8/3	1/3	128/3

Como todos Δ_i são maiores ou iguais a zero a nova solução é: X = (20/3; 7/3; 8/3; 0; 0) com $Z_{max} = 128/3$. Sendo assim, a variação de c_2 de 6 para 4 diminuiu o rendimento em $\Delta_z = z_2 - z_1 = 128/3 - 50 = -22/3$ u.m.

Observação: Caso as variáveis fora da base não pertençam à solução inicial, que geralmente é formada pelas variáveis de folga, deve-se aplicar a propriedade 4 para calcular os multiplicadores do simplex.

b) Variação nos coeficientes das variáveis não básicas

Como estes coeficientes não afectam os multiplicadores do simplex, os multiplicadores disponíveis podem ser utilizados para verificar se o problema está optimizado ou não de forma imediata.

Intervalo óptimo de variação dos coeficientes da função objectiva

O intervalo óptimo de oscilação dos coeficientes da função objectivo pode ser obtido calculando os limites:

Δ^+ = limite superior – é igual ao menor quociente absoluto entre os multiplicadores do simplex da tabela terminal e os coeficientes negativos das variáveis não básicas da linha correspondente à variável básica associada ao coeficiente considerado (para o nosso exemplo 3.7, c_1 está associado a $x_1 = 4$ na tabela terminal, logo temos que calcular razões negativas na linha 2).

$$\Delta^+ = \min |\text{raz. neg}| = \min \left| \left\{ \frac{c_i}{a_{ij}} \right\} \right|; a_{ij} < 0$$

Δ^- = limite inferior – é igual ao menor quociente absoluto entre os multiplicadores do simplex da tabela terminal e os coeficientes positivos para a linha considerada (razões positivas).

$$\Delta^- = \min |\text{raz. neg}| = \min \left| \left\{ \frac{c_i}{a_{ij}} \right\} \right|; a_{ij} > 0$$

Exemplo 3.11. Para o exemplo 3.7, encontrar os intervalos óptimos de oscilação dos coeficientes das variáveis x_1, x_2, x_5.

Resolução

A função objectivo é $z = 5x_1 + 6x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5$

As variáveis básicas na tabela terminal são x_1, x_2 e x_5, portanto os coeficientes a variar são $c_1 = 5$; $c_2 = 6$ e $c_5 = 0$.

- O $c_1 = 5$ ou o coeficiente de x_1 corresponde a linha 2 na tabela terminal.

  $\Delta^+ = \min |\text{raz. neg}| = \min \left|\frac{1}{-1}\right| = 1 \uparrow.$ $\qquad \Delta^- = \min |\text{raz. pos}| = \min \left|\frac{4}{2}\right| = 2 \downarrow.$

  $\Rightarrow$ O intervalo é: $5 - 2 \leq c_1 \leq 5 + 1 \iff 3 \leq c_1 \leq 6$

- $c_2 = 6$ ou coeficiente de x_2 corresponde a linha 1 na tabela terminal.

  $\Delta^+ = \min |\text{raz. neg}| = \min \left|\frac{4}{-1}\right| = 4 \uparrow.$ $\qquad \Delta^- = \min |\text{raz. pos}| = \min \left|\frac{1}{1}\right| = 1 \downarrow.$

  $\Rightarrow$ O intervalo é: $6 - 1 \leq c_2 \leq 6 + 4 \iff 5 \leq c_2 \leq 10$

- $c_5 = 0$ ou coeficiente de x_5 corresponde a linha 3 na tabela terminal.

  $\Delta^{+} = \min | \text{raz. neg} | = \min | \frac{4}{-10} | = \frac{2}{5} \uparrow$.

  $\Delta^{-} = \min | \text{raz. pos} | = \min | \frac{1}{3} | = \frac{1}{3} \downarrow$.

  $\Longrightarrow$ O intervalo é: $0 - 1/3 \leq c_5 \leq 0 + 2/5 \iff -1/3 \leq c_5 \leq 2/5$

3.3.3 VARIAÇÕES NOS COEFICIENTES DAS ACTIVIDADES

a) variações nos coeficientes das actividades das variáveis básicas

As alterações nos coeficientes dessas variáveis afectam os elementos da matriz definida na propriedade 1, e como esta matriz é fundamental para toda a análise de sensibilidade, essas variações podem fazer com que a actual solução deixe de ser óptima ou mesmo viável. A forma mais simples dessa análise é admitir que temos um novo problema, portanto, deve-se procurar uma nova solução.

b) variações nos coeficientes das actividades das variáveis fora da base

As alterações nos coeficientes das variáveis fora da base poderão modificar a solução óptima, pois a variável alterada poderá vir a se tornar básica. Assim, uma nova verificação de que o problema está optimizado é necessário e deve ser realizada.

Exemplo 3.12. Dado o seguinte problema de programação linear.
Maximizar $Z = 4x_1 + 6x_2 + x_3$

$$\text{Sujeito à} \begin{cases} 6x_1 + 4x_2 + 1x_3 \leq 24 \\ 4x_1 + 8x_2 + 2x_3 \leq 32 \\ x_i \geq 0 \end{cases}$$

a) Resolva o problema usando o método simplex.

b) Suponha que os coeficientes de x_3 sejam modificados de $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ para $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ qual será o efeito desta mudança na solução óptima do problema.

Resolução
a) Tabela inicial simplex

base	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b_i
x_4	6	4	1	1	0	24 → (6)
x_5	4	**8**	2	0	1	32 → **(4)**
Z	−4	**−6**	**−1**	0	0	0

1ª iteração

Base	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b_i
x_4	**4**	0	0	1	-1/2	**8** $\to l_1'=l_1-4l_2'$
x_2	1/2	1	1/4	0	1/8	4 $\to l_2'=1/8l_2$
Z	**-1**	0	1/2	0	3/4	24$\to l_3'=l_3+6l_2'$

2ª iteração : tabela terminal

Base	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b_i
X_1	1	0	0	1/4	-1/8	2 $\to l_1'=1/4l_1$
X_2	0	1	1/4	-1/8	3/16	3 $\to l_2'=l_2-1/2l_1'$
Z	0	0	1/2	1/4	5/8	26$\to l_3'=l_3+l_1'$

Solução: X = (2; 3; 0; 0; 0) com Z_{max} = 26

b) Para testar se o problema está optimizado depois da mudança dos coeficientes de x_3 devemos retirar da tabela terminal os multiplicadores do simplex correspondentes as variáveis básicas iniciais: $\Delta_4 = 1/4$; $\Delta_5 = 5/8$

Do problema dual e escrevendo as variáveis duais em termos das variáveis de folga temos:

Min W = $24x_4 + 32x_5$

$$\text{Suj à} \begin{cases} 6x_4 + 4x_5 \geq 4 \\ 4x_4 + 8x_5 \geq 6 \\ 1x_4 + 2x_5 \geq 1 \\ x_i \geq 0 \end{cases}$$

A restrição 3 no problema dual, depois da mudança dos coeficientes de x_3 será: $1x_4 + 1x_5 \geq 1$, usando a propriedade 4 o novo multiplicador simplex relativo a x_3 no problema primal é: $\Delta_3 = 1*\Delta_4 + 1*\Delta_5 - 1 = 1*1/4 + 1*5/8 - 1 = -1/8$.

Como Δ_3 é negativo, conclui-se que a solução anterior não continua óptima. Da propriedade 3, podemos encontrar os novos coeficientes de x_3 a partir da tabela terminal.

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{1}{8} \\ -\frac{1}{8} & \frac{3}{16} \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{8} \\ \frac{1}{16} \end{pmatrix}$$

Substituindo na tabela terminal os novos coeficientes de x_3 teremos a nova tabela inicial .

Tabela inicial simplex

Base	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b_i
X_1	1	0	**1/8**	1/4	-1/8	2 $\to$ (**16**)
x_2	0	1	1/16	-1/8	3/16	3 $\to$ (48)
Z	0	0	**-1/8**	1/4	5/8	26

1ª iteração: tabela terminal

base	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b_i
x_3	8	0	1	2	−1	16→$l_1'=8l_1$
x_2	−1/2	1	0	−1/4	1/4	2→$l_2'=l_2-1/16l_1'$
Z	1	0	0	1/2	1/2	28→$l_3'=l_3+1/8l_1'$

Como todos os multiplicadores simplex são positivos ou iguais a zero já temos a nova solução óptima. X = (0; 2; 16; 0; 0) com Z_{max} = 28. Portanto esta variação dos coeficientes de x_3 aumentou o rendimento em 28-26 = +2 u.m.

3.3.4 Adição de uma nova variável

Este caso pode ser considerado como variações simultâneas nos coeficientes da função objectivo e nos coeficientes do vector actividade correspondente à nova variável, que não é básica. Pois no problema inicial a nova variável é considerada como se tivesse coeficientes nulos.

Exemplo 3.13. Analisar o exemplo 3.12, introduzindo agora uma nova variável x_4 conforme o modelo apresentado.

Maximizar Z = $4x_1 + 6x_2 + 1x_3 + 3x_4$

$$\text{Sujeito à } \begin{cases} 6x_1 + 4x_2 + 1x_3 + 2x_4 \le 24 \\ 4x_1 + 8x_2 + 2x_3 + 2x_4 \le 32 \\ x_i \ge 0 \end{cases}$$

Resolução

O teste de optimidade da solução, fornece o multiplicador do simplex para x_4, tomando os coeficientes da restrição 4 no problema dual e da tabela final anterior.

Restrição 4: $2x_5 + 2x_6 \ge 3$

Multiplicadores simplex do problema primal: $\Delta_5 = 1/4$; $\Delta_6 = 5/8$

Multiplicador simplex para x_4 no primal: $\Delta_4 = 2*1/4 + 2*5/8 - 3 = -5/4$

O multiplicador de x_4 indica que este deve entrar na base e seus coeficientes no último quadro do problema serão:

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{1}{8} \\ -\frac{1}{8} & \frac{3}{16} \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{1}{8} \end{pmatrix}$$

A nova tabela simplex inicial com as variáveis de folga renomeadas é:

Base	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	b_i
x_1	1	0	0	**1/4**	1/4	−1/8	2→ (**8**)
x_2	0	1	1/4	1/8	−1/8	3/16	3→ (24)
Z	0	0	1/2	**−5/4**	1/4	5/8	26

1ª iteração

base	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	b_i
x_4	4	0	0	1	1	-1/2	8→ $l_1'=4l_1$
x_2	-1/2	1	1/4	0	-1/4	1/4	2→ $l_2'=l_2-1/8l_1'$
Z	5	0	1/2	0	3/2	0	36→ $L_3'=l_3+5/4l_1'$

A nova solução é X = (0; 2; 0; 8; 0; 0) com Z_{max} = 36
Resp. A introdução da variável x4 com o coeficiente 3 na função objectivo e 2 nas restrições aumenta o rendimento em 36 – 26 = 10u.m.

3.3.5 Adição de uma nova restrição

A adição de uma nova restrição pode alterar a viabilidade da solução, se ela não for redundante. O procedimento para a análise é o seguinte:

1. Testar se a nova restrição é satisfeita para a actual solução óptima, em caso afirmativo, a nova restrição diz-se redundante.
2. Se não for satisfeita, ela deve ser introduzida no sistema e novos cálculos devem ser feitos para-se obter a nova solução óptima.

Exemplo 3.14. analisar o exemplo 3.12, depois de introduzir a restrição 3:
Restrição 3: $2x_1 + 8x_2 + x_3 \leq 24$

Resolução
O novo modelo com a terceira restrição é:

Maximizar $Z = 4x_1 + 6x_2 + 1x_3$

$$\text{Sujeito à} \begin{cases} 6x_1 + 4x_2 + 1x_3 \leq 24 \\ 4x_1 + 8x_2 + 2x_3 \leq 32 \\ 2x_1 + 8x_2 + 1x_3 \leq 24 \\ x_i \geq 0 \end{cases}$$

1. *Teste*: Para o problema anterior a solução óptima é: $x_1 = 2$; $x_2 = 3$; $x_3 = 0$ e Z = 26
   restrição 1: 6*2 + 4*3 + 1*0 = 24 (= 24 verdadeiro)
   restrição 2: 4*2 + 8*3 + 2*0 = 32 (= 32 verdadeiro)
   restrição 3: 2*2 + 8*3 + 1*0 = 28 (> 24 não satisfeita), a nova restrição não é redundante.

2. *Resolução do novo problema*: a solução anterior já não é viável e novas iterações devem ser feitas. Assim, vamos colocar no quadro terminal anterior os coeficientes da nova restrição e a correspondente variável de folga.

Tabela inicial simplex

base	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	b_i
x_{1*}	**1**	0	0	1/4	-1/8	0	2 →
x_{2*}	0	1	1/4	-1/8	3/16	0	3 →
x_6	2	8	1	0	0	1	24→
Z	0	0	1/2	1/4	5/8	0	26

Como x1 e x2 estão na base seus coeficientes na nova restrição devem ser nulos e é por isso que tomamos as suas posições como pivô.

1ª iteração

base	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	b_i
x_1	1	0	0	1/4	-1/8	0	2 → $l_1'=l_1$
x_{2*}	0	**1**	1/4	-1/8	3/16	0	3 → $l_2'=l_2$
x_6	0	8	1	-1/2	1/4	1	20→ $l_3'=l_3-2l_1'$
Z	0	0	1/2	1/4	5/8	0	26→ $l_4'=l_4$

2ª iteração

base	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	b_i
x_1	1	0	0	1/4	-1/8	0	2 → $l_1'=l_1$
x_2	0	1	1/4	-1/8	3/16	0	3 → $l_2'=l_2$
x_6	0	0	**-1**	1/2	-5/4	1	**-4**→ $l_3'=l_3-8l_2'$
Z	0	0	**1/2**	1/4	5/8	0	26→ $l_4'=l_4$

3ª iteração

base	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	b_i
x_1	1	0	0	1/4	-1/8	0	2 → $l_1'=l_1$
x_2	0	1	0	0	1/8	1/4	2 → $l_2'=l_2-1/4l_3'$
x_3	0	0	1	-1/2	5/4	-1	4 → $l_3'=-l_3$
Z	0	0	0	1/2	0	1/2	24→ $l_4'=l_4-1/2l_3'$

Nova solução X = (2; 3; 4; 0; 0; 0) com Z_{max} = 24
Resp. A introdução da restrição 3, com os coeficientes 2, 8 e 1 cujo valor do recurso é 24, reduz o rendimento em 24 – 26 = -2 u.m.

3.3.6 EXERCÍCIOS PROPOSTOS

Exercício 3.8. Dado o problema
Maximizar $Z = 2x_1 + 1x_2$

$$\text{Sujeito à} \begin{cases} 0x_1 + 3x_2 \le 6 \\ 4x_1 + 1x_2 \le 8 \\ 1x_1 + 0x_2 \le 3 \\ x_i \ge 0 \end{cases}$$

a) Resolva o problema.(***Resp:*** $X = (3/2; 2; 0; 0; 3/2)$ $Z_1 = 5$)
b) Se o recurso b_1 for mudado de 6 para 4, qual será o efeito desta mudança no lucro Z.
(***Resp:*** $X = (5/3; 4/3; 0; 0; 4/3)$ $Z_2 = 14/3$ e $\Delta z = -1/3$)
c) Encontre os intervalos óptimos de oscilação de todos os recursos do problema.
(***Resp***: $0 \le b_1 \le 24$; $2 \le b_2 \le 14$; $3/2 \le b_3 \le$ não limitado.

Exercício 3.9. Para o seguinte problema de programação linear:
Maximizar $Z = 1x_1 + 3/2x_2$

$$\text{Sujeito à} \begin{cases} 2x_1 + 2x_2 \le 160 \\ 1x_1 + 2x_2 \le 120 \\ 4x_1 + 2x_2 \le 280 \\ x_i \ge 0 \end{cases}$$

a) Resolva o problema.(***Resp***. $X = (40; 40; 0; 0; 40)$ e $Z_1 = 100$)
b) Se o recurso b_2, variar de 120 para 98 qual será o efeito sobre a solução óptima inicial. (***Resp***: $X = (182/3; 56/3; 4/3; 0; 0)$, $Z_2 = 266/3$ e $\Delta z = -34/3$)
c) Se o coeficiente de x_2 na função objectivo mudar de 3/2 par 2, qual será o efeito sobre z. (***Resp***: $X = (40; 40;0; 0; 40)$, $Z_3 = 120$ e $\Delta z = +20$
d) Encontre os intervalos óptimos tanto dos recursos como dos coeficientes da função objectivo no problema inicial. (***Resp***: $3/4 \le c_1 \le 3/2$; $1 \le c_2 \le 2$
$120 \le b_1 \le 520/3$; $100 \le b_2 \le 160$; $240 \le b_3 \le$ não limitado)

Exercício 3.10. Dado o problema
Maximizar $Z = 2x_1 + 3x_2 + 7x_3 + 9x_4$

$$\text{Sujeito à} \begin{cases} 1x_1 + 1x_2 + 1x_3 + 1x_4 \le 9 \\ 1x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 8x_4 \le 24 \\ x_i \ge 0 \end{cases}$$

a) Resolva o problema (***Resp:*** $X = (4; 0; 5; 0)$ $Z_1 = 43$)
b) Verificar a optimidade da solução, para a seguinte variação nos coeficientes de x_2 de $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ para $\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ (***Resp***: $X = (4; 0; 5; 0)$ $Z_2 = 43$; $\Delta z = 0$)

c) Verificar o mesmo de (b) para x_4 com a variação $\begin{pmatrix}1\\8\end{pmatrix}$ para $\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$.

(***Resp***: X = (0; 0; 0; 9) Z_3 = 81; Δz = +38)

Exercício 3.11. Para o seguinte problema de programação linear:
Minimizar W = $10x_1 + 20x_2$

$$\text{Sujeito à } \begin{cases} 6x_1 + 2x_2 \geq 36 \\ 2x_1 + 4x_2 \geq 32 \\ x_i \geq 0 \end{cases}$$

a) Resolva o problema.(***Resp***. X = (4; 6; 0; 0) e W_1 = 160)
b) No modelo anterior introduza a variável x_3 com coeficiente 3 na função objectivo, 3 na restrição 1 e 1 na restrição 2. Analise o efeito da introdução da nova variável no modelo. (***Resp:*** X = (4; 6; 0; 0; 0), W2 = 160 então Δw = 0)
c) Analisar de novo o problema, mas agora introduzindo a restrição $4x_1 + 2x_2 \geq 30$. (***Resp***: X = (14/3; 17/3; 10/3; 0; 0), W2 = 160 então Δw = 0)

Exercício 3.12. O quadro óptimo do problema de programação linear:

$$\max imizar \ \ Z = 3x_1 + 2x_2$$

$$\text{sujeito a } \begin{cases} 4x_1 + 3x_2 \leq 120 \\ 1x_1 + 3x_2 \leq 60 \\ x1, x2 \geq 0 \end{cases}$$

é o seguinte, com x3 e x4 designando variáveis de folga.

base	x1	x2	x3	x4	bi
X1	1	3/4	1/4	0	30
X4	0	9/4	-1/4	1	30
Z	0	1/4	3/4	0	90

a) Suponha que os coeficiente técnicos de variável x2, mudarem de (3, 3) para (2, 1), obtenha a nova solução óptima através da análise de sensibilidade. (***Resp***:. X = (0,60,0,0), Zmax = 120, Dz = 30)
b) Se os termos independentes ou recursos das restrições forem alterados de (120, 60) para (140, 40), determine a nova solução óptima (as propriedades para encontrar a nova solução). (**Resp**: X = (35, 0,0, 5), Zmax = 105, Dz = 15)

Referências:

ANDRADE, EL(1998) – Introdução à Pesquisa Operacional – métodos e modelos para a análise de decisão, 2ª edição, editora LTC, RJ, Brasil: cap4;
BARNETT, RA; Michael, RZ (1990) – Finite Mathematics – for business, economics, life science and social sciences, 5th edition, USA: cap6;
TAHA, HA(1997) – Operations Research – an introduction, 6th edition, Prentice-Hall International, Inc. USA: cap4.

4 PROBLEMAS DE TRANSPORTE E AFECTAÇÃO

4.1 INTRODUÇÃO

Um dos problemas comuns na administração de empresas é como conseguir fazer operar um conjunto de máquinas como autocarros ou aviões numa rede permissível com um custo mínimo?. Como estruturar as fábricas de produção de um determinado produto em relação aos locais de vendas de tal forma que o lucro das vendas seja máximo. Este e outros casos, são problemas que afectam a rede de transporte.

Segundo Render e Ralph (1997), o conhecimento e utilização dos modelos de problemas de transporte, foi proposto pela primeira vez por Hitchcock, F.L.(1941) no seu estudo chamado “Distribuição de produtos de diversas fontes para vários locais”. Doze anos depois e independentemente Koopmans, T.C(1953), fez uma grande contribuição ao publicar na revista o tema “Sistemas de transporte e sua optimização”. A. Charnes e W.W, Cooper desenvolveram o método de Stepping Stone e em 1955 o método de MODI já era conhecido como um método mais rápido para a optimização dos Problemas de Transporte (PTR).

É importante lembrar que na planificação da distribuição de um produto a *função transporte* leva lugar de destaque, pois, não adianta nada, do ponto de vista do mercado, o fornecedor dispor de um bom produto que não é encontrado pelo cliente no momento que ele o deseja.

A estrutura geral de um modelo de problemas de transporte pode ser vista em três perspectivas:

- Uma empresa que possui fábricas localizadas em algumas cidades e depósitos em outras. A empresa deve determinar um programa de transporte de seus produtos de forma a satisfazer a procura destes e minimizar os seus gastos mas respeitando a capacidade das fábricas e dos depósitos (*transporte directo*);

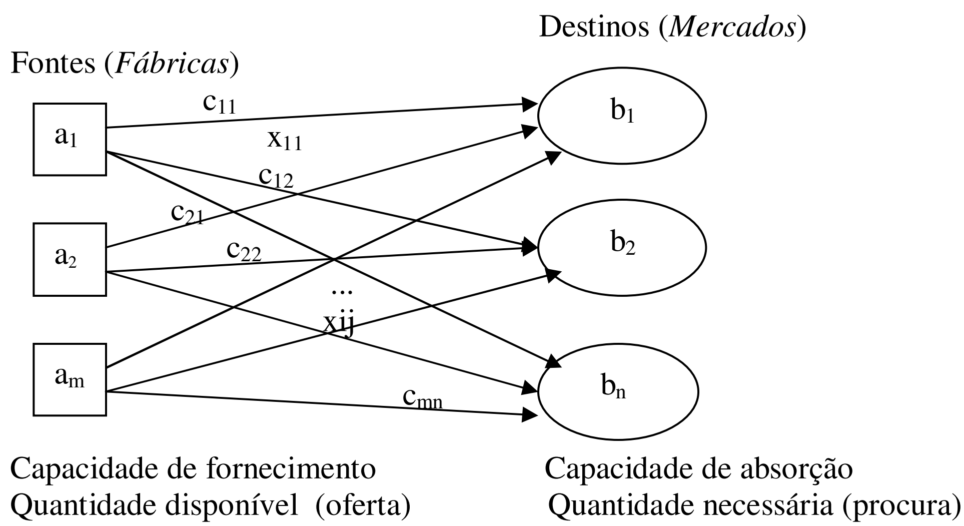
- Uma variante desta situação, é aquela em que os produtos não vão directamente da fonte ao consumidor, mas passa primeiro por outras fontes ou destinos (*transporte com transbordo ou indirecto*).

- A última variante é o caso em que se tem um certo número de serviços que devem ser executados por algumas pessoas ou máquinas, e cada conjunto tarefa - maquina tem seu custo particular de execução (*problemas de afectação ou assignação*).

O que temos em comum nestes três casos é a rede de transporte ligando fontes aos destinos. Neste capítulo, vai-se considerar com maior detalhe o primeiro e último casos, por estes serem situações mais frequentes, pois, o segundo caso é uma situação que pode ser tratada como subproblemas.

Formulação de um problema de transporte

Suponhamos que existem ***m** - fábricas* de um certo produto, cada fonte pode fornecer uma quantidade a_i e por outro lado existem ***n** – mercados*, cada um pode absorver uma quantidade b_j. E sabe-se que o custo de transportar de uma unidade da fonte i para o destino j é c_{ij}. O objectivo do administrador é determinar o número de unidades que devem ser transportadas de cada fonte para cada destino de forma a minimizar o custo total de transporte. Este problema pode ser representado no seguinte esquema:



Os problemas de transporte são um caso particular dos problemas de programação linear, e em especial da programação linear inteira, porque o número de unidades a transportar de uma fábrica (local) para a loja (outro local) deve ser um número inteiro.

O modelo geral dos problema de transporte pode ser formulado assim:

$$\text{Optimizar } Z = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij}$$

$$\text{Sujeito à } \begin{cases} \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i & ;\text{i} = 1,2,\ldots,m \\ \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j & ;\text{j} = 1,2,\ldots,n \\ \sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} \text{b}_{\text{j}} & \\ x_{ij} \in Z_0^{+} & \end{cases}$$

Onde

x_{ij} – é a quantidade transportada de origem i para o destino j;
c_{ij} – é o custo de transporte de uma unidade de a_i para b_j;
a_i – é a quantidade disponível na origem i (oferta);
b_j – é a quantidade necessária no destino j (procura)

O objectivo da programação é determinar as quantidades x_{ij} que devem ser transportadas de cada origem para cada destino de modo a optimizar o produto $\Sigma\Sigma c_{ij}.x_{ij}$.

A restrição $\Sigma a_i = \Sigma b_j$ é condição necessária para que o problema de transporte tenha solução, caso contrário introduzem-se origens e destinos fictícios com custo nulo: $c_{ij} = 0$.

a) se $\Sigma a_i > \Sigma b_j$, introduz-se um destino fictício $b_{n+1} = \Sigma a_i - \Sigma b_j$

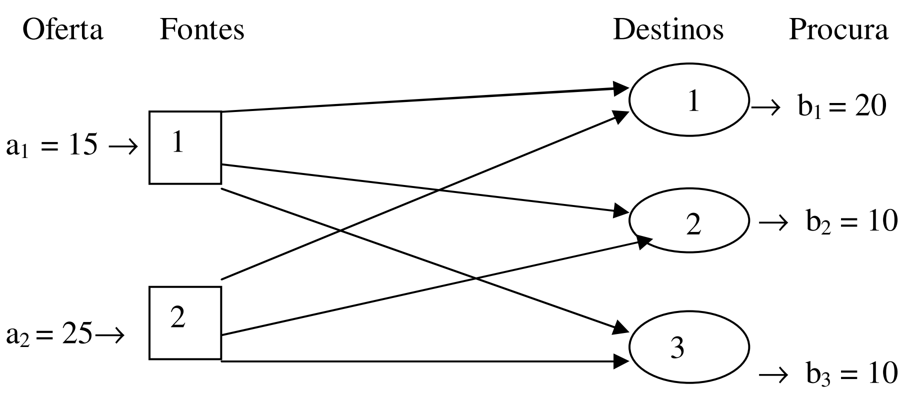
b) se $\Sigma a_i < \Sigma b_j$, introduz-se uma origem fictícia $a_{m+1} = \Sigma b_j - \Sigma a_i$

Esta formulação do problema bem como a sua interpretação dão origem a um quadro padrão do seguinte tipo:

	Destino 1	Destino 2	Destino 3	----------	Destino n	Oferta Ui
Origem 1	c_{11} X_{11}	c_{12} X_{12}	c_{13} X_{13}	--------	c_{1n} X_{1n}	a_1
Origem 2	c_{21} X_{21}	c_{22} X_{22}	c_{23} X_{23}	--------	c_{2n} X_{2n}	a_2
-----------	----------	----------	-----------	----------	-----------	----------
Origem m	c_{m1} X_{m1}	c_{m2} X_{m2}	c_{m3} X_{m3}	----------	c_{mn} X_{mn}	a_m
Procura Vj	b_1	b_2	b_3	----------	b_n	N

A solução dos modelos de distribuição pelo método simplex não é eficiente pelo facto de apresentar o maior número de variáveis, sendo assim foram criados algoritmos especiais para a sua solução.

Exemplo 4.1. Consideremos uma situação com duas fontes e três destinos.



- Custos de transporte por rotas: $c_{11} = 10$; $c_{12} = 3$; $c_{13} = 5$; $c_{21} = 12$; $c_{22} = 7$; $c_{23} = 9$

a) Construir o modelo matemático de programação linear inteira.
b) Construir o quadro modelo do problema de transporte.

Resolução:
Minimizar $W = 10x_{11} + 3x_{12} + 5x_{13} + 12x_{21} + 7x_{22} + 9x_{23}$

$$\text{Sujeito à}\begin{cases} x_{11} + x_{12} + x_{13} = 15 \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} = 25 \\ x_{11} + x_{21} = 20 \\ x_{12} + x_{22} = 10 \\ x_{13} + x_{23} = 10 \\ x_{ij} \in Z_0^+ \end{cases}$$

A tabela simplex correspondente a este modelo tem 6 colunas e 5 linhas, o que torna difícil de manipular a tabela, razão pela qual se dispõe de um algoritmo específico dos problemas de transporte.

Para o problema de programação linear inteira usando o método simplex, teríamos a seguinte solução:
$X_{ij} = (0; 5; 10; 20; 5; 0)$ com $W_{min} = 340$ u.m

O quadro modelo do problema de transporte correspondente é:

	D_1	D_2	D_3	Oferta
O_1	X_{11} 10	X_{12} 3	X_{13} 5	15
O_2	X_{21} 12	X_{22} 7	X_{23} 9	25
Procura	20	10	10	40

Os métodos mais comuns para resolver ou obter a primeira aproximação nos problemas de transporte são:
1. Método ou Regra de Canto Noroeste (NWC);
2. Método de custo (lucro) mínimo (máximo)
3. Método de aproximação de Vogel (VAM).

4.2. MÉTODO DO CANTO NOROESTE

Para encontrar a primeira aproximação de um problema de transporte pelo Método de Canto Noroeste (MCN ; NWC = NorthWest Corner) é necessário seguir os seguintes passos:

Passo 1. Começar por colocar a quantidade necessária no canto noroeste, na posição x_{11}, com uma alocação suficientemente grande.

$$x_{11} = \min\{a_1; b_1\};$$

Passo 2. Ajustar a linha ou coluna satisfeita com zero e simultaneamente passar a coluna ou linha seguinte:

- Se $x_{11} = a_1 \Rightarrow x_{21} = b_1 - a_1 \Rightarrow$ linha seguinte
- Se $x_{11} = b_1 \Rightarrow x_{12} = a_1 - b_1 \Rightarrow$ coluna seguinte

Passo 3. Repetir os passos 1 e 2 até completar o preenchimento de quadro, obtendo-se assim a solução inicial (primeira aproximação), tendo em conta que $\Sigma x_{ij} = a_i$ e $\Sigma x_{ij} = b_j$.

Vamos resolver o exemplo 4.1 usando o método de Canto Noroeste

Resolução:

Como temos $\Sigma a_i = \Sigma b_j = 40$ não é necessário introduzir colunas nem linhas fictícias.

	Destino 1	Destino 2	Destino 3	Oferta
Origem 1	15 $\boxed{10}$	X $\boxed{3}$	X $\boxed{5}$	15
Origem 2	5 $\boxed{12}$	10 $\boxed{7}$	10 $\boxed{9}$	25
Procura	20	10	10	40

Ordem de preenchimento:

$x_{11} = 15$; $x_{12} = 0$; $x_{13} = 0$; linha 1 satisfeita;
$x_{21} = 5$; coluna 1 satisfeita;
$x_{22} = 10$; coluna 2 satisfeita;
$x_{23} = 10$; linha 2 e coluna 3 satisfeitas.

Custo Total = 15*10 + 5*12 + 10*7 + 10*9 = 370 unidades de medida.

Observação:

1. As variáveis : $x_{11} = 15$; $x_{21} = 5$; $x_{22} = 10$ e $x_{23} = 10$ são básicas ($x_{ij} \neq 0$)
2. As variáveis $x_{12} = 0$ e $x_{13} = 0$ são não básicas ($x_{ij} = 0$)
3. Como existem variáveis não básicas, então existe uma outra alocação com o mesmo custo total ou valor da função objectivo: $W_{min} = \Sigma\Sigma c_{ij} * x_{ij} = 370$.

Exemplo 4.2. Quatro postos de gasolina A, B, C e D necessitam de 50, 40, 60 e 40 mil galões de gasolina respectivamente. É possível obter estas quantidades partindo de 3 locais que dispõem de 80; 100 e 50 mil galões. Os custos de transporte de 1000 galões de gasolina do local a_i para o posto b_j estão apresentados no quadro.

	A	B	C	D
1	70	60	60	60
2	50	80	60	70
3	80	50	80	60

Determinar a quantidade de gasolina a ser enviada de cada local para cada posto de modo que as necessidades dos postos sejam satisfeitas e o custo total de transporte seja mínimo.

Resolução:
Como $\Sigma a_i = 80+100+50 = 230$ e $\Sigma b_i = 50+40+60+40 = 190$, temos que introduzir um destino fictício b_{n+1} que necessita de 40 unidades com custo de transporte zero.

	A	B	C	D	**R**esíduo	Oferta Ui
1	50 [70]	30 [60]	X [60]	X [60]	X [0]	80
2	X [50]	10 [80]	60 [60]	30 [70]	X [0]	100
3	X [80]	X [50]	X [80]	10 [60]	40 [0]	50
Necessidade Vj	50	40	60	40	**40**	230

Ordem de alocação dos galões para os postos:
50 galões de gasolina saíram do local 1 para o posto A;
30 galões de gasolina saíram do local 1 para o posto B;
10 galões de gasolina saíram do local 2 para o posto B;
60 galões de gasolina saíram do local 2 para o posto C;
30 galões de gasolina saíram do local 2 para o posto D;
10 galões de gasolina saíram do local 3 para o posto D; e
40 galões de gasolina permaneceram no local 3.

CT = W = 50*70 + 30*60 + 10*80 + 60*60 + 30*70 + 10*60 + 40*0 = 12400 mil u.m.

4.3 MÉTODO DE CUSTO MÍNIMO (LÚCRO MÁXIMO)

O método de custo mínimo (lucro máximo), pode ser aplicado para procurar uma solução inicial viável de menor custo ou maior lucro. O procedimento do método é seguinte:

Passo 1. Começar por colocar o máximo possível à célula ou variável de menor custo unitário (maior lucro) e colocar zero nas células da linha ou coluna satisfeita.

Passo 2. Ajustar os elementos ou a quantidade que resta na linha ou coluna não ajustada, a partir da variável com menor custo (maior lucro).

Passo 3. Repetir o processo para as variáveis com outros custos na ordem crescente (decrescente) até completar o preenchimento do quadro.

Exemplo 4.3. Resolver o exemplo 4.1, pelo método do custo mínimo.
Resolução

	D_1	D_2	D_3	Oferta
Origem 1	[10] x	[3] 10	[5] 5	15
Origem 2	[12] 20	[7] x	[9] 5	25
Procura	20	10	10	40

O preenchimento do quadro seguiu a sequência crescente dos custos:

- $c_{12} = 3 \rightarrow x_{12} = 10$; coluna 2 satisfeita;
- $c_{13} = 5 \rightarrow x_{13} = 5$; linha 1 está satisfeita;
- $c_{23} = 9 \rightarrow x_{23} = 5$; coluna 3 satisfeita;
- $c_{21} = 12 \rightarrow x_{21} = 20$; linha 2 e coluna 1 estão satisfeitas.

$W_{min} = 10*3 + 5*5 + 20*12 + 5*9 = 340$ u.m.

Observação: Usando o método de custo mínimo, diminuímos o custo total de 370 para 340 unidades de medida, i.é, poupou-se 30 unidades de medida.

Exemplo 4.4. Uma empresa tem três fábricas, F_1, F_2, F_3 onde produz uma determinada mercadoria nas quantidades 75, 150 e 100 toneladas respectivamente. Esta mercadoria deve ser enviada para cinco consumidores C_1, C_2, C_3, C_4, e C_5, que necessitam de 100, 60, 40, 75 e 75 toneladas respectivamente. Os custos de transporte por tonelada entre as várias fábricas e os consumidores são os seguintes:

	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5
F_1	3	2	3	4	1
F_2	4	1	2	4	2
F_3	1	0	5	3	2

Usando o método de custo mínimo, determine qual a programação que a empresa deve adoptar por forma a satisfazer as necessidades dos consumidores com um custo de transporte mínimo.

Resolução:

	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	Oferta
F_1	X (3)	X (2)	X (3)	X (4)	75 (1)	75
F_2	35 (4)	X (1)	40 (2)	75 (4)	X (2)	150
F_3	40 (1)	60 (0)	X (5)	X (3)	X (2)	100
F_4*	25 (0)	X (0)	X (0)	X (0)	X (0)	25
Procura	100	60	40	75	75	350

Ordem de preenchimento:

$F_4C_1 = 25$; linha 4 satisfeita; $F_3C_2 = 60$; coluna 2 satisfeita;
$F_3C_1 = 40$; linha 3 satisfeita; $F_1C_5 = 75$; linha 1 e coluna 5 satisfeitas;
$F_2C_3 = 40$; coluna 3 satisfeita; $F_2C_1 = 35$; linha 2 e coluna 1 satisfeitas;
$F_2C_4 = 75$; linha 2 e coluna 4 satisfeitas;

CT = $W_{min} = 75*1 + 35*4 + 40*2 + 75*4 + 40*1 + 60*0 + 25*0 = 635$ u.m.
O valor $F_4C_1 = 25$ para $c_{41}=0$; significa que o consumidor C_1 não recebeu 25 unidades portanto só recebeu 75 unidades, porque as quantidades existentes não chegaram.

Exemplo 4.5. considere o problema de galões, mas agora com os lucros de envio de 1000 galões expostos no quadro e resolva usando:

a) o método de Canto Noroeste;
b) o método de maximização do lucro.

80	70	60	60
50	70	80	70
70	50	80	60

Resolução:
Método do Canto Noroeste.

	A	B	C	D	R	Oferta
1	50 (80)	30 (70)	X (60)	X (60)	X (0)	80
2	X (50)	10 (70)	60 (80)	30 (70)	X (0)	100
3	X (70)	X (50)	X (80)	10 (60)	40 (0)	50
Procura	50	40	60	40	40	230

LT = Z_{max} = 50*80 + 30*70 + 10*70 + 60*80 + 30*70 + 10*60 + 40*0 =14300 u.m

Por se tratar de um problema de maximização do lucro, vamos começar por colocar a posição que tiver o maior lucro unitário possível pela maior quantidade disponível. Note que todas células de maior lucro unitário devem pelo menos ser ocupadas antes de se passar ao lucro imediatamente inferior.

	A	B	C	D	R	Oferta
1	80 50	70 30	60 X	60 X	0 X	80
2	50 X	70 10	80 50	70 40	0 X	100
3	70 X	50 X	80 10	60 X	0 40	50
Procura	50	40	60	40	40	230

Ordem de preenchimento:
$L_{1a} = 80 \rightarrow x_{1a} = 50$; coluna A satisfeita;
$L_{1c} = 80 \rightarrow x_{1c} = 50$;
$L_{3c} = 80 \rightarrow x_{3c} = 10$; coluna C satisfeita;
$L_{1b} = 70 \rightarrow x_{1b} = 30$; linha 1 satisfeita;
$L_{2b} = 70 \rightarrow x_{2b} = 10$; coluna B satisfeita;
$L_{2d} = 70 \rightarrow x_{2d} = 40$; coluna D, linha 2 satisfeitas;
$L_{3r} = 0 \rightarrow x_{3r} = 40$; coluna R satisfeita;

LT = Z_{max} = 50*80 + 30*70 + 10*70 + 50*80 + 40*70 + 10*80 = 14400 u.m
Δz = 14400 – 14300 = 100 u.m.

4.4 MÉTODO DE APROXIMAÇÃO DE VOGEL

O método de aproximação de Vogel (VAM – *Vogel's Approximation Method*) é uma versão desenvolvida do método do custo mínimo, geralmente este método produz uma melhor solução inicial em relação ao método do canto noroeste.

O método de aproximação de Vogel, baseia-se na comparação dos custos (lucros), calculando resíduos ou *penalidades* em cada linha e em cada coluna da matriz. O procedimento para a determinação da solução inicial pelo método de aproximação de Vogel está resumido nos passos:

Passo 1. Para cada linha e coluna da tabela do problema de transporte, determinar a diferença positiva entre o menor custo unitário na linha e coluna e o imediatamente superior custo unitário. Se o problema é de maximização a diferença é calculada para os dois primeiros lucros unitários máximos. (O valor da diferença é o custo de oportunidade por não ter usado a melhor rota).

Penalidade: $p = c_2 - c_1$; $com\ c_1 < c_2$ *para minimização*

: $p = l_1 - l_2$; $com\ l_1 > l_2$ *para maximização*

Passo 2. Identificar a linha ou coluna com o maior custo de oportunidade "*penalidade*".

Passo 3. Na linha ou coluna escolhida, colocar o máximo possível para a variável com o menor custo unitário (maior lucro unitário para os problemas de maximização).

Passo 4. Eliminar a linha ou coluna que estiver completamente satisfeita depois desta alocação. A eliminação é feita colocando X's nas células que não devem participar mais nos próximos cálculos das penalidades.

Passo 5. Repetir os passos 1, 2, 3 e 4 até que a solução inicial seja obtida.

Exemplo 4.6. Sejam dadas 3 origens A, B e C com as possibilidades de 90, 110 e 50 unidades de medida, respectivamente e 4 destinos 1, 2, 3 e 4 que necessitam de 60, 50, 85 e 45 unidades de medida. Sendo dada a matriz dos custos, determinar pelo método de aproximação de Vogel a alocação óptima de modo que o custo de transporte seja mínimo.

	1	2	3	4
A	42	40	40	44
B	46	31	38	35
C	30	38	46	41

Resolução:

$\Sigma a_i = 90 + 110 + 50 = 250$;
$\Sigma b_i = 60 + 50 + 85 + 45 = 240$
como $\Sigma a_i > \Sigma b_i \rightarrow b_5 = 250 - 240 = 10$, introduzimos uma coluna fictícia.

	1	2	3	4	5	Oferta	Penalidades
A	10 (42)	X (40)	70 (40)	X (44)	10 (0)	90	**40** 0 0 2 2
B	X (46)	50 (31)	15 (38)	45 (35)	X (0)	110	31 4 4 3 **8**
C	50 (30)	X (38)	X (46)	X (41)	X (0)	50	30 8 x x x
Procura	60	50	85	45	10	250	
Penali. dades	12 **12** 4 4 4	7 7 **9** x x	2 2 2 2 2	6 6 9 **9** x	0 x x x x		

Para exemplificar, as penalidades foram calculadas da seguinte maneira:

Linha A. $p_a = 40 - 0 = 40$; coluna 1: $p_1 = 42 - 30 = 12$;
Linha B. $p_b = 31 - 0 = 31$; coluna 2: $p_2 = 38 - 31 = 7$;
Linha C. $p_c = 30 - 0 = 30$; etc.

A penalidade máxima nesta série é de 40 u.m, é por isso que escolheu-se a linha A e afectou - se com 10 unidades na posição x_{a5}. Tendo sido satisfeita a coluna 5 colocou-se X's e repetiu-se o cálculo das segundas penalidades.

CT = W_{min} = 10*42 + 70*40 + 10*0 + 50*31 + 15*38 + 45*35 + 50*30 = 8415 u.m

Exemplo 4.7. Resolva o exemplo 4.6, mas agora suponha que a matriz dos custos representa lucros e procure maximizar o lucro total, usando o método de aproximação de Vogel.

Resolução:

	1	2	3	4	5	Oferta	Penalidades
A	X [42]	45 [40]	X [40]	45 [44]	X [0]	90	2 4 4 0 x
B	60 [46]	50 [31]	35 [38]	X [35]	10 [0]	110	**8** 3 3 7 7
C	X [30]	X [38]	50 [46]	X [41]	X [0]	50	5 5 x x x
Procura	60	50	85	45	10	250	
Penali. dades	4 x x x x	2 2 9 **9** *	6 **6** 2 2 *	3 3 **9** x x	0 0 0 0 *		

LT = Z_{max} = 45*40 + 45*44 + 60*46 + 5*31 + 35*38 + 10*0 + 50*46 = 10325 u.m.

4.5 TESTE DE OPTIMIDADE E MELHORAMENTO DE SOLUÇÃO

Nos exercícios anteriores foi referido que estávamos a calcular a primeira aproximação da solução do problema de transporte. De um modo geral, depois de encontrada a primeira aproximação por qualquer um dos métodos anteriores é necessário fazer um teste de optimidade e degenerência.

Uma ***solução é óptima*** se todos os multiplicadores do simplex ou preços de sombra das variáveis não básicas não for menor que zero ($\delta_{ij} \geq 0$, para minimização) e maior que zero ($\delta_{ij} \leq 0$, para maximização).

Uma ***solução é degenerada***, quando o número de células ocupadas for menor do que **m + n –1.** Esta situação pode ocorrer tanto na primeira aproximação como em qualquer estado do melhoramento da solução.

Quando se tem uma solução degenerada, muitas das vezes não se consegue desenvolver o teste de optimidade de solução. Para que sejam desenvolvidos os métodos de teste de optimidade da solução é introduzida uma alocação artificial com uma quantidade bastante pequena (ε = épsilon) em uma ou mais células não ocupadas e considera-se que esta célula está ocupada. Depois de encontrada a solução óptima do problema retira-se da tabela a alocação artificial fazendo $\varepsilon = 0$.

Chama-se ***circuito de avaliação*** um caminho mais (+), menos (-) , que começa numa variável não básica ($x_{ij} = 0$), passa por células com variáveis básicas ($x_{ij} \neq 0$) e termina na posição inicial.

Um circuito deve ter um ***percurso fechado,*** descrevendo ângulos rectos ou razos ao passar de uma célula para outra.

O teste de optimidade de solução pode ser feito usando dois procedimentos:

- método das pedras;
- método de MODI (Modified Distribution)

4.5.1 Método das Pedras para o teste de solução

O método proposto por Stepping Stone, consiste em avaliar os custos efectivos das rotas para encontrar a rota mais viável do problema de transporte com objectivo de melhorar a solução. Os passos do procedimento são:

Passo 1. Identificar todas as células não alocadas ou todas as variáveis não básicas;
Passo 2. Traçar todos circuitos de avaliação tendo em conta que cada circuito deve começar e terminar na mesma variável não básica, passando por variáveis básicas e deve-se movimentar só no sentido vertical ou horizontal.

Passo 3. Começando da variável não básica colocar o sinal (+) e sinal (-) em todos os cantos alternando até passar em todos cantos do circuito de avaliação.

Passo 4. Para cada circuito, calcular os preços de sombra δ_{ij} como adição entre a soma dos custos (lucros) com o sinal (+) e soma dos custos (lucros) com o sinal (-).

$\delta_{ij} = \Sigma(+c_{ij}) + \Sigma(-c_{ij})$ ou $\delta_{ij} = \Sigma(+l_{ij}) + \Sigma(-l_{ij})$

Passo 5. Se todos os *preços de sombra* forem positivos ($\delta_{ij} \geq 0$, para minimização) ou negativos ($\delta_{ij} \leq 0$, para maximização) a solução é óptima caso contrário a solução pode ser melhorada.

4.5.2 Método de MODI para o teste de solução

Para aplicar o método de MODI, começa–se também com a solução da primeira aproximação, mas agora, partindo dos valores dos custos ou lucros calcula-se os valores de cada coluna v_j e linha u_i.

Passo 1. Partindo da tabela da primeira aproximação, construir um sistema de equações, escrevendo uma equação para cada variável básica, i.é:

$u_i + v_j = c_{ij}$ para $x_{ij} \neq 0$

Passo 2. Depois de todas equações serem escritas, faz-se um qualquer u_i ou v_j igual a zero, de preferência o que aparecer em mais equações.

Passo 3. Resolver o sistema de equações do passo 1, tomando em conta que um u_i ou v_j é nulo. Determina-se assim os valores dos restantes *u's* e *v's*.

Passo 4. Calculam-se os preços de sombra "multiplicadores do simplex" para cada variável não básica usando a formula:

$\delta_{ij} = c_{ij} - u_i - v_j$ para $x_{ij} = 0$

Passo 5. Se todos os *preços de sombra* forem positivos ($\delta_{ij} \geq 0$, para minimização) ou negativos ($\delta_{ij} \leq 0$, para maximização) a solução é óptima caso contrário a solução pode ser melhorada.

4.5.3. Método de Stepping Stone para o Melhoramento da Solução

Tendo-se chegado a conclusão pelo método de MODI ou das pedras de que a solução pode ser melhorada seguem-se os passos de melhoramento da solução.

Passo 1. Identifica-se a célula com o *menor* preço de sombra (para minimização) ou *maior* preço de sombra (para maximização) δ_{ij} e a variável não básica x_{ij} correspondente entra na base. Se houver empate deve-se fazer uma escolha aleatória da variável que deve entrar na base entre as variáveis com os preços de sombra empatados.

Passo 2. Traça-se um circuito de avaliação mais e menos partindo da variável que deve entrar na base, passando por células com variáveis básicas e terminando na posição inicial.

Passo 3. Partindo da célula escolhida no passo 1, fazer uma nova alocação mais - menos com a maior quantidade possível, respeitando que $\Sigma x_{ij} = a_i$ e $\Sigma x_{ij} = b_j$

Passo 4. Usando o método de MODI ou pedras, teste a nova solução se é óptima, caso contrário, use o método de Stepping Stone para melhorar novamente.

Exemplo 4.8. Uma empresa manufactura cadeiras em três fábricas e manda-as para três armazéns onde posteriormente os clientes compram-nas. A gerência deseja maximizar o lucro no fim de cada lote vendido. Os lucros unitários variam com as distâncias entre os armazéns e as fábricas conforme a tabela.

Fábrica	1	2	3	Oferta
1	20	22	14	40
2	15	20	13	50
3	22	23	18	30
Procura	28	38	54	

a) Estabeleça a solução inicial pelo método de lucro máximo.
b) Use o método de aproximação de Vogel, para obter a solução base.
c) Partindo da solução aproximada de Vogel, use o método das pedras e o algoritmo de Stepping Stone para determinar a solução óptima.

Resolução

a) Pelo método de lucro máximo:

	1	2	3	Oferta
1	28 (20)	8 (22)	4 (14)	40
2	X (15)	X (20)	50 (13)	50
3	X (22)	30 (23)	X (18)	30
Procura	28	38	54	120

LT = Z_{max} = 28*20 + 8*22+4*14 +50*13+30*23 = 2132 u.m

b) Pelo método de aproximação de Vogel

	1	2	3	Oferta	Penalidades u_i
1	28 [20]	X [22]	12 [14]	40	2 **6** *
2	X [15]	38 [20]	12 [13]	50	**5** 2 *
3	X [22]	X [23]	30 [18]	30	1 x *
Procura	28	38	54	120	
Penalidades v_j	2 2 x	1 x x	4 4 **4**		

LT = Z_{max} = 28*20 + 12*14 + 38*20 + 12*13 + 30*18 = 2184 u.m.; Δz = 52 u.m.

***c) Teste 1 de optimidade de solução** (método das pedras):*

- As variáveis não básicas na tabela da alínea (b) são: x_{12}; x_{21}; x_{31} e x_{32}
- Para melhor compreensão vamos apresentar em separado o circuito de cada variável.

Para x_{12}, o circuito é: $x_{12} \rightarrow x_{22} \rightarrow x_{23} \rightarrow x_{13} \rightarrow x_{12}$

	1	2	3	Oferta
1	28 [20]	X(+) [22]	12 (-) [14]	40
2	X [15]	38 (-) [20]	12 (+) [13]	50
3	X [22]	X [23]	30 [18]	30
Procura	28	38	54	120

Para x_{21}, o circuito é: $x_{21} \rightarrow x_{23} \rightarrow x_{13} \rightarrow x_{11} \rightarrow x_{21}$

	1	2	3	Oferta
1	(-) 28 [20]	X [22]	12 (+) [14]	40
2	X (+) [15]	38 [20]	12 (-) [13]	50
3	X [22]	X [23]	30 [18]	30
Procura	28	38	54	120

Para x_{31}, o circuito é: $x_{31} \rightarrow x_{33} \rightarrow x_{13} \rightarrow x_{11} \rightarrow x_{31}$

	1	2	3	Oferta
1	28 (-) [20]	X [22]	12 (+) [14]	40
2	X [15]	38 [20]	12 [13]	50
3	X(+) [22]	X [23]	30 (-) [18]	30
Procura	28	38	54	120

Para x_{32}, o circuito é: $x_{32} \rightarrow x_{33} \rightarrow x_{23} \rightarrow x_{22} \rightarrow x_{32}$

	1	2	3	Oferta
1	28 [20]	X [22]	12 [14]	40
2	X [15]	38(-) [20]	12 (+) [13]	50
3	X [22]	X(+) [23]	30 (-) [18]	30
Procura	28	38	54	120

Traçados os circuitos com sinais (+) e (-), vamos calcular os *preços de sombra* δ_{ij} para cada variável do circuito, tomando um lucro negativo para a célula com sinal (-) e positivo para a célula com (+).

$\delta_{ij} = \Sigma(+l_{ij}) + \Sigma(-l_{ij})$

$\delta_{12} = 22 - 20 + 13 - 14 = 1$; $\Leftarrow$ x_{12} deve entrar na base)

$\delta_{21} = 15 - 13 + 14 - 20 = -4$;

$\delta_{31} = 22 - 18 + 14 + 20 = -2$;

$\delta_{32} = 23 - 18 + 13 - 20 = -2$.

O problema é de maximização e $\delta_{12} = 1 > 0$, logo, conclui-se que a solução actual pode ser melhorada introduzindo a variável x_{12} na base. E como o mínimo das alocações com sinal (-) é 12, então 12 é a quantidade máxima a colocar na posição x_{12} em seguida faz-se um ajustamento das quantidades que estão no circuito de variável x_{12}: *min{38;12}=12*.

	1	2	3	Oferta
1	28 [20]	12 [22]	X [14]	40
2	X [15]	26 [20]	24 [13]	50
3	X [22]	X [23]	30 [18]	30
Procura	28	38	54	120

LT = Zi = 28*20 + 12*22 + 26*20 + 24*13 + 30*18 = 2196 u.m; Δz = 12 u.m

Teste 2 de optimidade de solução

Para x_{13}: $x_{13} \to x_{12} \to x_{22} \to x_{23} \to x_{13}$ de onde $\delta_{13} = 14 - 22 + 20 - 13 = -1$;
Para x_{21}: $x_{21} \to x_{22} \to x_{12} \to x_{11} \to x_{21}$ de onde $\delta_{21} = 15 - 20 + 22 - 20 = -3$;
Para x_{31}: $x_{31} \to x_{33} \to x_{23} \to x_{22} \to x_{12} \to x_{11} \to x_{31}$ de onde $\delta_{31} = 22 - 18 + 13 - 20 + 22 - 20 = -1$;
Para x_{32}: $x_{32} \to x_{33} \to x_{23} \to x_{22} \to x_{32}$ de onde $\delta_{32} = 23 - 18 + 13 - 20 = -2$;

Como todos os preços de sombra são negativos $\forall \delta_{ij} < 0$, então já encontramos o lucro máximo ou a solução óptima.
Resp. $Z_{opt} = 2196$ u.m

Exemplo 4.9. No exercício 4.1, obtenha a primeira aproximação pelo VAM. Usando o método de MODI e o método de Stepping Stone teste a optimidade da solução do problema. Realize todas as iterações até encontrar a solução óptima.

	1 (v_1)	2 (v_2)	3 (v_3)	4 (v_4)	5 (v_5)	Oferta	Penalidades
1 (u_1)	X [10]	X [5]	X [6]	15 [7]	10 [0]	25	**5** 1 1 **3** x x
2 (u_2)	X [8]	20 [2]	X [7]	5 [6]	X [0]	25	2 **4** 1 2 **2** x
3 (u_3)	15 [9]	X [3]	20 [4]	15 [8]	X [0]	50	3 1 **4** 1 1 *
Procura	15	20	20	35	10	100	
Penalidades	1 1 1 1 1 *	1 1 x x x x	2 2 2 x x x	1 1 1 1 2 *	0 x x x x x		

CT = W_{min} = 15*7 + 10*0 + 20*2 + 5*6 + 15*9 + 20*4 + 15*8 = 510 u.m

Teste 1 de optimidade de solução

variáveis *básicas* — *variáveis não básicas (preços de sombra)*

$u_i + v_j = c_{ij}$ — valores de u_i e v_j — $\delta_{ij} = c_{ij} - u_i - v_j$

$$\begin{cases} u_1 + v_4 = 7 \\ u_1 + v_5 = 0 \\ u_2 + v_2 = 2 \\ u_2 + v_4 = 6 \\ u_3 + v_1 = 9 \\ u_3 + v_3 = 4 \\ u_3 + v_4 = 8 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} v_4 = 8 \rightarrow u_1 = -1 \\ u_2 = -2 \rightarrow v_2 = 4 \\ v_4 = 8 \rightarrow u_2 = -2 \\ u_3 = 0 \rightarrow v_1 = 9 \\ u_3 = 0 \rightarrow v_3 = 4 \\ u_3 = 0 \rightarrow v_4 = 8 \\ u_1 = -1 \rightarrow v_5 = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \delta_{11} = 10 + 1 - 9 = 2 \\ \delta_{12} = 5 + 1 - 4 = 2 \\ \delta_{13} = 6 + 1 - 4 = 3 \\ \delta_{21} = 8 + 2 - 9 = 1 \\ \delta_{23} = 7 + 2 - 4 = 5 \\ \delta_{25} = 0 + 2 - 1 = 1 \\ \delta_{32} = 3 + 0 - 4 = -1 \quad ; (x_{32}) \\ \delta_{35} = 0 - 0 - 1 = -1 \end{cases}$$

Como o problema é de minimização, os preços de sombra mostram que a variável x_{32} deve entrar na base. O circuito correspondente é: $x_{32} \to x_{34} \to x_{24} \to x_{22} \to x_{32}$

	1 (v_1)	2 (v_2)	3 (v_3)	4 (v_4)	5 (v_5)	Oferta
1 (u_1)	[10] X	[5] X	[6] X	[7] 15	[0] 10	25
2 (u_2)	[8] X	(-) [2] 20	[7] X	(+) [6] 5	[0] X	25
3 (u_3)	[9] 15	[3] X (+)	[4] 20	[8] 15 (-)	[0] X	50
Procura	15	20	20	35	10	100

O min{15; 20} = 15, portanto vamos deslocar 15 unidades e a nova tabela é:

	1 (v_1)	2 (v_2)	3 (v_3)	4 (v_4)	5 (v_5)	Oferta
1 (u_1)	[10] X	[5] X	[6] X	[7] 15	[0] 10	25
2 (u_2)	[8] X	[2] 5	[7] X	[6] 20	[0] X	25
3 (u_3)	[9] 15	[3] 15	[4] 20	[8] X	[0] X	50
Procura	15	20	20	35	10	100

CT = Wi = 15*7 + 10*0 + 5*2 + 20*6 + 15*9 + 15*3 + 20*4 = 495 u.m; Δw = 15 u.m

Teste 2 de optimidade de solução

Variáveis básicas $u_i + v_j = c_{ij}.$ — valores de u_i e v_j — variáveis não básicas $\delta_{ij} = c_{ij} - u_i - v_j$

$$\begin{cases} u_1 + v_4 = 7 \\ u_1 + v_5 = 0 \\ u_2 + v_2 = 2 \\ u_2 + v_4 = 6 \\ u_3 + v_1 = 9 \\ u_3 + v_2 = 3 \\ u_3 + v_3 = 4 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} v_4 = 7 \rightarrow u_1 = 0 \\ u_1 = 0 \rightarrow v_5 = 0 \\ v_2 = 3 \rightarrow u_2 = -1 \\ u_2 = -1 \rightarrow v_4 = 7 \\ u_3 = 0 \rightarrow v_1 = 9 \\ u_3 = 0 \rightarrow v_2 = 3 \\ u_3 = 0 \rightarrow v_3 = 4 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \delta_{11} = 10 - 0 - 9 = 1 \\ \delta_{12} = 5 - 0 - 3 = 2 \\ \delta_{13} = 6 - 0 - 4 = 2 \\ \delta_{21} = 8 + 1 - 9 = 0 \\ \delta_{23} = 7 + 1 - 4 = 4 \\ \delta_{25} = 0 + 1 - 0 = 1 \\ \delta_{34} = 8 - 0 - 7 = 1 \\ \delta_{35} = 0 - 0 - 0 = 0 \end{cases}$$

Todos os preços de sombra não são negativos então já encontramos a solução óptima.

CT = $W_{min} = \Sigma\Sigma c_{ij}.x_{ij}$ = 495 u.m

4.6 PROBLEMAS DE AFECTAÇÃO

Um outro tipo de problema de distribuição é o chamado *problema de afectação* (alocação). O problema de afectar n - pessoas a n - tarefas é um caso particular do problema de transporte. O modelo de programação linear para os problemas de alocação tem um custo de alocação C_{ij} da pessoa i para a tarefa j e é definido por.

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se a pessoa } i \text{ e' alocada a tarefa } j \\ 0 & \text{caso contrario} \end{cases}$$

O modelo geral de PL inteira para problemas de afectação é definido da seguinte maneira

$$\text{Optimizar } Z = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}$$

$$\text{Sujeito à } \begin{cases} \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1 & ;\ i = 1,2,\ldots n \\ \sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1 & ;\ j = 1,2,\ldots n \\ x_{ij} \in Z_0^+ \end{cases}$$

Observações:

1. A matriz dos custos ou lucros deve ser quadrada, caso contrário usa - se linhas ou colunas fictícias.
2. Todos os problemas de alocação podem ser resolvidos pelos métodos vistos nos problemas de transporte, mas como se trata de um problema de transporte degenerado temos um método específico, chamado Método Húngaro.

Algoritmo do método Húngaro

Passo 1. Em cada linha da matriz quadrada dos custos ou lucros identificar o menor custo (maior lucro) e subtrair a este elemento todos outros formando um novo quadro.

Passo 2. Repetir o passo 1 para colunas do novo quadro, e formar um outro novo quadro.

Passo 3. Se existirem no quadro resultante k - zeros, de modo que haja apenas um zero em cada linha e um zero em cada coluna, esta é a solução óptima.
O valor óptimo será $Z = \Sigma\Sigma c_{ij} * x_{ij}$ com $x_{ij} = 1$.

Passo 4. Se o passo 3 não se verifica, traçar um *número mínimo de rectas* (horizontais e verticais), para cortar o *máximo número de zeros*. Se o número de linhas ou colunas for maior que o número de rectas, passe ao passo 5

Passo 5. Procedimento da iteração para a obtenção da solução
1. Escolher o menor elemento não cortado no novo último quadro.
2. Subtrair este elemento todos outros não cortados.
3. Somar este elemento a todos outros que estão no cruzamento de duas rectas.
4. Os restantes elementos não são alterados.
5. Escrever o novo quadro e verificar o passo 3.

Exemplo 4.10. Durante a estação chuvosa, 3 províncias encontravam-se com inundações. O Governo teve três equipas de peritos para tratar da situação de emergência. Os custos de transporte das equipas para cada província são dados na quadro. Que equipa deve ir para que província para minimizar o custo. Calcule este custo total.

Província / Equipa	1	2	3
1	2200	**2400**	2000
2	1800	2800	**2200**
3	**1500**	3200	2700

Resolução
Quadro 1. Mínimos das linhas do quadro inicial: 2000; 1800; 1500

Província / Equipa	1	2	3
1	200	400	0
2	0	1000	400
3	0	1700	1200

Quadro 2. Mínimos das colunas do quadro 1: 0; 400; 0

Província / Equipa	1	2	3
1	200	0	0
2	0	600	***400***
3	0	1300	1200

Teste 1. número de linhas é maior que o número de rectas (n = 3; r = 2).
Quadro 3. Mínimo elemento não cortado no quadro 2 é $x_{23} = 400$

Província / Equipa	1	2	3
1	600	***0***	0
2	0	200	***0***
3	***0***	900	800

Teste 2. n = 3, r =3, já temos a solução óptima

Voltando ao quadro inicial e somando os custos das posições x_{12}, x_{23} e x_{31}, obtemos:
CT = 1500 + 2400 + 2200 = 6100 u.m.

Exemplo 4.11. Quatro construções diferentes devem ser levantadas em um Campus Universitário por 4 empreiteiros. Determinar que empreiteiro deve fazer que construção para que o custo dos 4 edifícios seja mínimo. A tabela dos custos que cada empreiteiro propõe para cada edifício está apresentados no quadro.

Edifício / Empreiteiro	1	2	3	4
1	48	48	50	44
2	56	60	60	68
3	96	94	90	85
4	42	44	54	46

Resolução

Quadro 1. Mínimos das linhas do quadro inicial: 44; 56; 85; 42

Edifício / Empreiteiro	1	2	3	4
1	4	4	6	0
2	0	4	4	12
3	11	9	5	0
4	0	2	12	4

Quadro 2. Mínimos das colunas do quadro 1: 0; 2; 4; 0

Edifício / Empreiteiro	1	2	3	4
1	4	2	2	0
2	0	2	0	12
3	11	7	***1***	0
4	0	0	8	4

Teste 1. n = 4; r = 3 ; ainda não é solução

Quadro 3. Mínimo elemento não cortado no quadro 2 é $x_{33} = 1$

Empreiteiro \ Edifício	1	2	3	4
1	3	1	1	***0***
2	***0***	2	0	13
3	10	6	***0***	0
4	0	***0***	8	5

Teste 2: n = 4, r = 4 já temos a solução do problema.

CT = 56 + 44 + 90 + 44 = 234 u.m

Exemplo 4.12. Uma empresa de consultoria foi solicitada para avaliar 4 projectos. A empresa tem disponível 4 técnicos independentes. Os custos de cada consultoria variam conforme o quadro (em mil meticais).

Consultor \ Projecto	1	2	3	4
1	10.3	18.2	15.9	8.6
2	12.0	17.4	x	6.4
3	11.1	20.1	16.8	9.1
4	x	19.6	17.5	8.2

(x – significa que o consultor i não pode avaliar o projecto j.
Usando o método Húngaro, determine a distribuição dos consultores para avaliar os 4 projectos, de tal modo que minimize o custo total.

Resolução

Quadro 1. Mínimos das linhas do quadro inicial: 8.6; 6.4; 9.1; 8.2.

Consultor \ Projecto	1	2	3	4
1	1.7	9.6	7.3	0
2	5.6	11.0	x	0
3	2.0	11.0	7.7	0
4	x	11.4	9.3	0

Quadro 2. Mínimos das colunas do quadro 1: 1.7; 9.6; 7.3; 0

Projecto / Consultor	1	2	3	4
1	0	0	0	0
2	3.9	1.4	x	0
3	***0.3***	1.4	0.4	0
4	x	1.8	2.0	0

Teste 1. n = 4; r = 2, ainda não é solução.

Quadro 3. Mínimo elemento não cortado no quadro 2 é 0.3

Projecto / Consultor	1	2	3	4
1	0	0	0	0.3
2	3.6	1.1	x	0
3	0	1.1	***0.1***	0
4	x	1.5	1.7	0

Teste 2. n = 4; r = 3; ainda não é solução

Quadro 4. Mínimo elemento não cortado no quadro 3 é 0.1:

Projecto / Consultor	1	2	3	4
1	0.1	0	0	0.4
2	3.6	***1.0***	x	0
3	0	1.0	0	0
4	x	1.4	1.6	0

Teste 3. n = 4; r = 3; ainda não temos solução

Quadro 5. Mínimo elemento não cortado no quadro 4 é 1.0:

Projecto / Consultor	1	2	3	4
1	0.1	0	***0***	1.4
2	2.6	***0***	x	0
3	***0***	1.0	0	1.0
4	x	0.4	0.6	***0***

Teste 4. n = 4; r = 4; já temos temos solução CT = 11.1+17.4+15.9+8.2 = 52.6 u.m.

4.7 EXERCÍCIOS PROPOSTOS

Exercício 4.1. São dadas as seguintes condições do problema de transporte: Capacidade de fornecimento das fontes: $a_1 = 25$; $a_2 = 25$; $a_3 = 50$; Capacidade de absorção dos destinos: $b_1 = 15$; $b_2 = 20$; $b_3 = 20$; $b_4 = 35$. Os custos associados ao transporte de 1 u.m da fonte i para o destino j estão no quadro.

10	5	6	7
8	2	7	6
9	3	4	8

Usando o método de Canto Noroeste, encontre a primeira aproximação e o custo mínimo.
Resp.// $W_{min} = 625$ u.m.

Exercício 4.2. Uma empresa transportadora é alugada para levar artigos de três fábricas F_1, F_2 e F_3 para 4 armazéns A_1, A_2, A_3 e A_4 de onde são vendidos para os clientes a porta. O lucro de transporte de uma carrada está indicado por cada rota, bem como a capacidade das fábricas e dos armazéns.

	A_1	A_2	A_3	A_4	Oferta
F_1	26	26	20	21	450
F_2	21	24	20	21	300
F_3	18	20	19	20	250
Procura	200	340	150	270	

Determinar as quantidades que devem ser transportadas de cada fábrica para cada armazém para que a empresa transportadora maximize o seu lucro. Use o método do lucro máximo.
Resp.// LT = 22320 u.m.

Exercício 4.3. Uma companhia tem três camiões que abastecem um certo produto a cinco supermercados. As distâncias que os camiões devem andar até a cada supermercado, as necessidades dos supermercados e as capacidades dos camiões estão na seguinte tabela.

	Sup1	Sup2	Sup3	Sup4	Sup5	Oferta (Ui)
Camião 1	6	4	5	4	8	15
Camião 2	7	6	7	4	3	48
Camião 3	8	7	6	9	5	33
Procura (Vj)	12	15	21	24	24	

Usando o método de aproximação de Vogel, determina que camião deve abastecer que supermercado para minimizar a distância total percorrida.
Resp.// CT = $W_{min} = \Sigma\Sigma cij*xij = 450$ km.

Exercício 4.4. A empresa “Pepe Rápido” tem 4 armazéns: A_1, A_2, A_3 e A_4 cuja capacidade é de, respectivamente 75, 50, 60 e 15 toneladas de um determinado produto. Os seus vendedores conseguiram promover o produto junto a 4 compradores: B_1, B_2, B_3 e B_4, estabelecendo contratos de 35, 50, 90 e 25 toneladas respectivamente. Sabendo que os custos de transporte por tonelada entre os armazéns e os compradores são dados pelo quadro seguinte, encontre o programa óptimo de distribuição para esta empresa indicando qual é o custo total de transporte mínimo.

a) usando o método do canto noroeste (NWC – NorthWest Corner Method)
b) usando o método de aproximação de Vogel (VAM – Vogel Approximation Method)

	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	0.7	1.0	1.2	3.0
A_2	1.0	0.0	1.0	2.0
A_3	1.1	0.5	1.2	0.5
A_4	0.2	1.0	2.0	1.0

Resp.// a) Pelo NWC: CT = 184.5 u.m; (b) Pelo VAM: CT = 137.5 u.m ; Δz = 47 u.m

Exercício 4.5. O general Ambrósio comanda 4 bases de operações: B_1, B_2, B_3 e B_4 com, respectivamente, 150, 200, 100 e 150 aviões, e tem como missão o bombardeamento de 3 alvos diferentes. Os aviões são diferentes, com altitudes de voo variados e considerando as várias distâncias aos alvos, o general preencheu o seguinte quadro com as toneladas de bombas que podem ser lançadas em cada alvo, provenientes de cada base.

	A_1	A_2	A_3
B_1	2	6	5
B_2	3	8	9
B_3	10	7	7
B_4	8	4	7

Sabendo que se pretendem 200 bombardeamentos diários em cada alvo, use os método de NWC e VAM para ajudar o general a encontrar o programa óptimo de voo que maximiza a quantidade de bombas lançadas.

Resp.//: NWC: Q_{max} = 3400 bombas; VAM: Q_{max} = 4800 bombas ; Δz = 1400 bombas.

Exercício 4.6. Uma organização não governamental fornece trabalhadores temporários para 4 sectores laborais da APIE. A organização tem que distribuir 21 trabalhadores dos seus 2 gabinetes de recrutamento, conforme a seguinte tabela.

Sector / Gabinete	Custo de transporte por sector				Oferta
	1	2	3	4	
Gabinete 1	14	15	10	17	12
Gabinete 2	12	18	11	16	9
Requisições	3	6	8	4	

a) Estabeleça a solução inicial usando o método de aproximação de Vogel.
b) Usando o método das pedras e depois o algoritmo de Stepping Stone, determine a solução óptima do problema.
Resp//: (a) W_1 = 276 u.m; (b) W_{opt} = 272 u.m; Δw = 4 u.m

Exercício 4.7. Três barragens têm capacidade de produção de 25, 40 e 30 milhões de Kwh. As barragens alimentam três cidades que necessitam em média 30, 35 e 25 milhões de Kwh. Os preços de transporte de 1000 Kwh de cada uma das barragens para cada cidade estão apresentados na tabela.

	cidade 1	cidade 2	cidade 3
Barragem 1	\$6.0	\$7.0	\$4.0
Barragem 2	\$3.2	\$3.0	\$3.5
Barragem 3	\$5.0	\$4.8	\$4.5

a) Pelo método de canto noroeste, encontre a distribuição inicial de energia de modo a minimizar o custo de transporte;
b) Procure melhorar a solução, usando o método de aproximação de Vogel.
c) Teste a optimidade de solução dada pelo método de Vogel, optimizando - o.
Resp//: (a) W_1 = 383.5 u.m; (b) W_2 = 346 u.m ; (c) W_{op} = 346 u.m

Exercício 4.8 Uma empresa tem três armazéns nas cidades de Maputo, Beira e Nampula, e tem lojas nas cidades de Xai-Xai, Chimoio, Quelimane e Inhambane. Os custos de transporte de um dado produto dos armazéns às lojas apresentam-se na tabela.

	X	C	Q	I	Oferta
armazém 1	38	30	30	45	17
armazém 2	60	25	50	32	32
armazém 3	42	20	16	70	30
	10	14	15	28	

a) Estabeleça as soluções iniciais usando o método de canto noroeste.
b) A partir da solução obtida pelo método de canto noroeste, determine a solução óptima pelo método de MODI.
Resp.//: (a) NWC: W_1 = 3095 u.m (b) W_{opt} = 1796 u.m

Exercício 4.9. Três modistas recebem requisições de clientes que pretendem um novo tipo de vestido para o verão. Uma pesquisa de mercado mostrou que existem 4 tipos de vestidos com maior procura.

Tamanho do vestido :	1	2	3	4
Quantidade :	100	200	450	150

As modistas acordaram produzir uma certa quantidade dos vestidos, segundo os tipos indicados para satisfazer a bastante procura. As quantidades máximas que cada modista pode produzir são:

Modista (i)	:	1	2	3
Quantidade	:	150	450	250

Os lucros unitários de cada vestido produzido pela modista i, sendo do tipo j, quando comprado estão no quadro.

Modista \ Tamanho	1	2	3	4
1	2.5	4.0	5.0	2.0
2	3.0	3.5	5.5	1.5
3	2.0	4.5	4.5	2.5

a) Usando o método de aproximação de Vogel, resolva o problema.
b) Melhore a solução anterior caso seja necessário de modo que as modistas tenham o máximo lucro possível.
   Resp//. (a) VAM, $Z_1 = 3850$ u.m (b) $Z_{opt} = 3850$ u.m

Exercício 4.10. Uma companhia aérea pode comprar o seu combustível a qualquer um dos seus três fornecedores. As necessidades da companhia para um mês em cada um dos três aeroportos em que ela opera são: 100, 180 e 300 mil galões, respectivamente no aeroporto 1, 2 e 3. Cada fornecedor pode abastecer cada um dos aeroportos com os preços em mil meticais o galão, dados na seguinte tabela.

	Aeroporto 1	Aeroporto 2	Aeroporto 3
Fornecedor 1	92	89	90
Fornecedor 2	91	91	95
Fornecedor 3	87	90	92

Cada fornecedor está no entanto limitado pelo número de galões que pode abastecer respectivamente por mês. Estas capacidades são de 320; 270 e 150 mil galões respectivamente para fornecedor 1, 2 e 3. Para determinar a política de aquisição do combustível que suprirá as necessidades da companhia em cada aeroporto a um custo mínimo.

a) Estabeleça a solução básica usando o método do canto noroeste.
b) Usando o método de aproximação de Vogel, qual é a política de aquisição que minimiza o custo.
c) Verifique se a distribuição (b) é óptima. Caso contrário optimize-a.
   Resp.// (a) $W_1 = 53520$ u.m; (b) $W_2 = 51990$ u.m (c) $W_{opt} = 51990$ u.m

Exercício 4.11. Um treinador de uma equipa de natação pretende escolher os elementos que competirão na estafeta 4*200 (estilos por métros), nos próximos jogos olímpicos. Os nadadores em causa tiveram as seguintes melhores marcas em cada estilo, na última época.

Estilo / Nome do nadador	Ruços	Mariposa	Costas	Livre
João	2.3	3.0	2.7	2.1
António	2.5	2.5	2.6	2.0
Filipe	2.3	3.0	2.7	2.0
Vasco	2.4	2.9	2.6	2.1

Usando o método Húngaro, determine que estilo cada nadador deverá fazer dentro da equipa de modo a alcançar o menor tempo para percorrer os 200 metros no conjunto dos 4 percursos. Qual serrá esse tempo mínimo.
Resp.// João → Bruços; António→ Mariposa; Filipe → Livre e Vasco→Costas
T_{min} = 9.4 minitos.

Exercício 4.12. Cinco indivíduos (A, B, C, D e E) pretendem adquirir automóvel às suas necessidades. O indivíduo A pretende um carro pequeno que não lhe crie problemas de estacionamento; o B um carro confortável para viagens; C necessita de um carro resistente; D quer um automóvel de pouco consumo; e E pretende um carro mais espaçoso. Um vendedor possui 5 modelos (Citroen BX; Fiat Uno; Autobianchi Y10; Renault 5 GTL e Toyota Starlet) que lhe parecem adequados aos 5 potenciais compradores. Numa tentativa de ponderar as suas preferências, o vendedor construiu o seguinte quadro onde colocou as ordens de preferência (de 1 a 5) de cada comprador em relação a cada um dos carros:

	A	B	C	D	E
BX	5	1	1	4	1
UNO	2	3	2	1	3
Y10	1	5	5	3	5
R5 GTL	3	3	4	1	3
Starlet	3	1	3	2	2

Que carro deverá o vendedor apresentar a cada um dos indivíduos por forma a optimizar as preferências dos mesmos.
Resp.//: BX → E; UNO → C; Y10 → A; R5 →D e Starlet →B

Referências:
ANDRADE, EL(1998) – Introdução à Pesquisa Operacional – métodos e modelos para a Análise de decisão, 2ª edição, editora LTC, RJ, Brasil: cap5;
FERREIRA, M.A.M; Isabel, A(1995) – Programação Matemática, 2ª edição, Edições Sílabo, Lisboa: pp91.
RENDER, B; Ralhp, M.S.Jr.(1997) – Quantitative Analysis for Management, 6th edition, Prentice – Hall International, Inc, USA: cap.10
TAHA, H.A(1997 – Operations Research – an introduction, 6th edition, Prentice – Hall International, Inc, USA: cap.5.
SHAMBLIN, J.E; G.T. Stevens, Jr(1989) – Pesquisa Operacional – uma abordagem básica, Editora Atlas, S.A, São Paulo: cap 11.

5 ANÁLISE DE DECISÃO

5.1 INTRODUÇÃO

A selecção de entre maneiras diferentes de agir está directamente ligada à planificação da actividade a realizar. Os gestores e administradores as vezes consideram a planificação o seu trabalho central, pois precisam estar constantemente escolhendo: O que fazer ?; Quem irá fazer?; Quando e aonde fazer?; Ocasionalmente ou até como fazer?.

Entretanto não se deve esquecer que esta fase é apenas uma etapa (planificação), mesmo que seja rápida e não envolva grandes deliberações, etc.

A tomada da decisão faz parte do quotidiano de cada um. A planificação ocorre na vida individual, na família ou na empresa ao nível da administração sempre que for preciso optar por um curso de acção para atingir um determinado objectivo, pois há sempre limitações como o tempo, dinheiro, recursos humanos, materiais, etc., contra a nossa ganância.

As decisões quando tomadas sem ter em conta uma informação perfeita ou ignorando os graus de risco, elas surpreendem os administradores com a dinâmica da problemática da sociedade que está em constante evolução, modificando a medida do possível as condições iniciais.

Segundo Faria (1977), o processo decisório deve ser conduzido através de uma análise, avaliação e escolha da alternativa mais conveniente entre as possíveis para alcançar o objectivo pretendido. Um processo assim realizado segundo os trabalhos divulgados por Laplace, Abraham, Wald(1939) é um processo decisório conduzido com uma metodologia racional e sistemática.

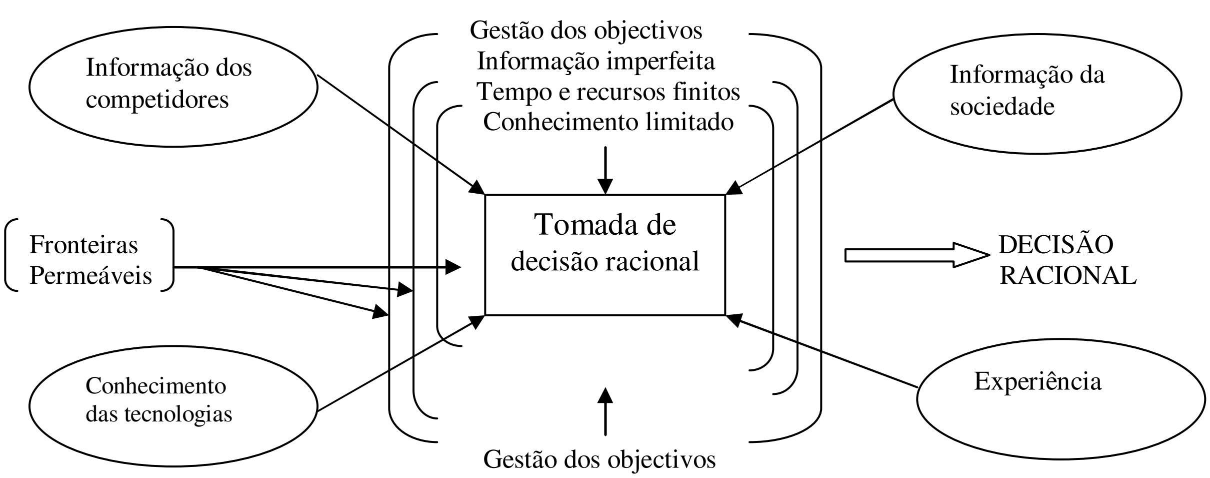


Figura 5.1. Fronteiras de racionalidade decisória.

Tomar uma decisão é eleger entre muitas possibilidades a melhor, analisando o conjunto das informações disponíveis que devem ser consideradas na definição do problema. Deve-se estimar particularmente os efeitos das decisões anteriores, supondo-se que foi realizado um esforço para controlar os fenómenos e as suas consequências.

Uma decisão é um curso de acção escolhido por um indivíduo ou organização, baseando nas reflexões, como o meio mais adequado à sua disposição para alcançar os seus objectivos. Deve-se salientar que muitas dessas opções envolvem vários graus de incerteza, porque nem sempre as influências internas e do ambiente podem ser inteiramente entendidas, tornando-se imperfeitos os sistemas de informação.

5.1.1 Aspectos interdisciplinares da gestão da tomada das decisões

A tomada de uma decisão correcta para Harrison (1995), é um processo dinâmico sendo função de uma boa combinação de informações que são obtidas de diferentes formas desde análise qualitativa do problema envolvendo disciplinas do comportamento até as disciplinas quantitativas.

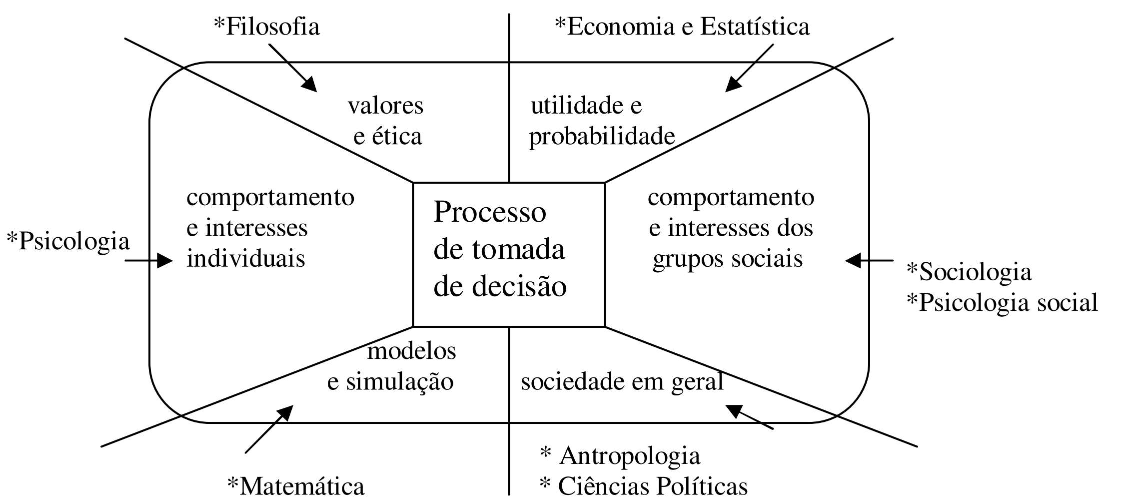


Figura 5.2. Rede multe - disciplinar da tomada de decisão

Alguns pontos de acção das disciplinas indicadas na figura 5.2 são:
- Psicologia – contribui na análise dos comportamentos dos indivíduos envolvidos;
- Filosofia – apoia o processo na identificação dos valores e ética das pessoas envolvidas;
- Economia e estatística – é usada na determinação dos níveis da utilidade da solução, níveis do sucesso esperado bem como os níveis das oportunidades usando a teoria das probabilidades e econometria;
- Sociologia e psicologia social – é usada na análise do comportamento de cada grupo envolvido na decisão segundo os seus interesses;

- Antropologia e ciências políticas – serve para análise da sociedade em geral e das tendências da sociedade, leis e orientação política do pais;
- Matemática – é aproveitada para fornecer raciocínio lógico na modelação dos problemas na linguagem quantitativa bem como a consequente simulação de casos.

Importa referir que o maior grupo das disciplinas que influencia na tomada das decisões opera sobretudo com variáveis não controláveis e muito poucas são as disciplinas com variáveis controláveis, o que faz com que modelos econométricos tenham soluções dentro do tempo e espaço limitado.

5.1.2 Etapas da tomada de decisão

Geralmente identificam-se cinco fases ou etapas fundamentais na tomada de qualquer decisão, ainda que em muitas outras literaturas possam aparecer 6 etapas distintas;

1. Definição do problema;
2. Análise do problema;
3. Desenvolvimento das soluções alternativas;
4. Escolha da melhor alternativa (solução);
5. Conversão da decisão em acção.

O primeiro passo é o mais difícil, daí que seja importante a utilização nesta etapa do método científico, o segundo e terceiro passos são relativamente fáceis, envolvendo usualmente trabalhos de acessória, pesquisa pertinente para libertar ideias através de reuniões, debates, discussões, etc. Os dois últimos fluem directamente dos outros, obedecendo a melhor tecnologia administrativa disponível.

Em resumo, apresenta - se uma descrição de cada fase, indicando algumas perguntas que poderão ser feitas em cada etapa.

Definição do problema – aqui, formulam-se perguntas como:

- Os factores que estão ligados ao problema devem-se ao método científico ou não?;
- A essência do problema foi observada directa ou indirectamente?;
- A informação do problema deriva de uma fonte primária ou secundária?;
- O problema inicial foi revisto, a medida que a informação adicional e relevante se tornou disponível ou não?;
- Houve informação irrelevante descartada ou não?;
- A definição revista do problema, foi submetida a pessoas com conhecimento directo sobre a situação verificada?.

Análise do problema – as perguntas durante a análise são:

- É possível dividir o problema em partes ou não?;
- É possível definir correctamente uma componente do problema ou não?;
- O problema pode ser estudado experimentalmente de acordo com o método científico?;

- As possíveis soluções concordam com as informações sobre o problema, com as autoridades em termos de leis em vigor e com as fontes do conhecimento metodológico?;
- Que pessoas ou grupos de pessoas têm interesses especiais na resolução do problema? e porquê?.

Desenvolvimento das soluções alternativas – esta etapa está direccionada para a comparação das diversas soluções candidatas:
- Formulam-se soluções e as alternativas de solução do problema. As alternativas de solução, poderão ser apresentadas por diversos grupos de especialistas na matéria;
- Avaliam-se as alternativas, comparando se foram consideradas todas as variáveis chave do problema e cumpriram-se as exigências do problema;
- Avaliam-se as técnicas apresentadas para cada alternativa em função dos custos, tempo, benefícios, nível de utilização da informação disponível, etc.

Escolha da melhor alternativa – após um trabalho aturado na comparação das alternativas de solução apresentadas é escolhida uma, que deve ser a solução do problema, as perguntas essenciais nesta etapa são:
- A aparente solução perfeita foi testada na solução do problema ou deve-se a análise laboratorial?;
- O esquema de solução apresentado está favorável com os conhecimentos, compreensão, técnicas e métodos padrões prescritos?;
- A decisão tem em conta elementos de risco e incerteza ou não?.

Conversão da decisão em acção – é necessário reflectir nesta etapa sobre:
- Se foi desenvolvido um plano que claramente identifica as acções exigidas na solução do problema?;
- Se foi definida a sequência das acções e em cada passo existe um responsável ou não?;
- O tipo de sistema de controle de resultados, i.é, se foi projectado ou não um mecanismo para fazer teste da solução?;
- A existência de um feedback para que os resultados obtidos possam ser comparados com os esperados.

De um modo geral em todas as fases o factor informação foi sempre referido, isto mostra que para a tomada de decisão o mais importante é a ***informação***, ela funciona como matéria prima para o gestor.

5.1.3 Tipos de decisões

Na introdução da investigação operacional, foi referido que as decisões podem ser classificadas de acordo com o nível estratégico em que elas ocorrem na empresa e pelo grau de sua estruturação. Neste parágrafo vamos considerar mais dois critérios de classificação das decisões, classificando-as quanto a sua frequência e quanto ao nível de informação usada para tomar esta decisão.

Quanto a frequência as decisões podem ser classificadas em:

a) *Decisões rotineiras* – são tomadas para problemas que ocorrem com frequência, envolvendo um padrão, com um mínimo de certeza da solução do problema, e diz-se que as soluções são praticamente programadas.

b) *Decisões não rotineiras* – são aquelas que são tomadas para um problema novo. Estas decisões devem merecer maior cautela, devido a novidade do problema não tendo nenhuma solução programada, pois os métodos já existentes ainda não foram experimentados.

c) *Decisões negociáveis* – são aquelas que resultam de um jogo de interesse, nas quais cada contraparte tem seu proveito.

Por outro lado o tipo das decisões tomadas ao nível das pessoas ou empresas dependem do nível do conhecimento da informação sobre a situação. Assim, existem três tipos de decisões que podem ser tomadas, segundo a quantidade de informação disponível sobre o problema.

a) *Decisões com certeza* – são decisões tomadas a luz de uma informação completa. Portanto, são conhecidas as consequências de cada alternativa de escolha e naturalmente escolhe-se a alternativa que maximiza os lucros.

b) *Decisões com incerteza* – são tomadas mesmo tendo uma informação limitada. Nesta situação não se conhecem os níveis de probabilidade de ocorrência dos resultados, pois muitas das vezes dependem dos estados de natureza.

c) *Decisões com risco* – são tomadas em função de uma informação parcial relativa ao problema em estudo. Neste caso, conhece-se a probabilidade de ocorrência de bons resultados. Os modelos da teoria de decisão para gestão dos problemas empresariais usam tipicamente dois critérios: maximização do valor esperado e minimização dos custos esperados.

Todas as decisões com certeza, supomos que produzirão logicamente um produto de utilidade na empresa, no indivíduo e por isso, nesta secção serão abordados os dois últimos, porque é neles onde a informação influi negativamente na tomada das decisões.

5.2 DECISÕES COM INCERTEZA

5.2.1 Rendimentos e estados de natureza

Um dos objectivos essenciais do estudo da teoria de decisão é ajudar a criar um padrão de soluções para problemas semelhantes ou relacionados. Nos métodos qualitativos as etapas de resolução de um problema dependem de uma reflexão sustentada com uma boa argumentação. A introdução dos métodos quantitativos cria no decisor não só uma argumentação como também uma fundamentação numérica.

Naturalmente qualquer empresa com uma variável económica, seja por exemplo uma função de produção ou venda de mercadorias, tem a sua disposição um conjunto de opções a fazer no mercado para maximizar o seu lucro e contrariamente a este objectivo existe uma série de empresas concorrentes no ramo que podem diminuir este rendimento agindo no sentido oposto.

As várias opções que uma empresa tem, e que a partir das quais procura escolher aquela que maximiza os seus rendimentos ou minimiza os custos são chamadas *alternativas de decisão.*

As variações do estado do mercado face a variáveis não controláveis, as empresas concorrentes ou a sociedade em geral e que de uma ou outra forma podem influenciar os rendimentos da empresa são chamados *estados de natureza.*

A matriz de dupla entrada construída pelas variáveis: alternativa de decisão e estados de natureza quando estas apresentam mais de uma modalidade é chamada de *matriz de decisão.*

5.2.2 Critérios de decisão em condições de incerteza

Quando não é conhecida a probabilidade de ocorrência de cada estado de natureza, isto é, não é possível quantificar as influências não controláveis e é necessário escolher um curso de acção sobre estes em condições de incerteza, existem seis critérios geralmente usados.

1. Maximin
2. Maximax
3. Maximédia
4. Realismo
5. Minimax
6. Minimin

1. *Critério maximin* – baseia-se numa visão pessimista, o administrador examina o lucro mínimo para cada alternativa e escolhe aquela que apresentar o maior lucro mínimo, i.é, uma decisão conservadora "não fazer nada" ou não perder muito

escolhendo o máximo dos mínimos. Pode-se adoptar este critério quando se prefere um mínimo risco.

2. *Critério Maximax de Hurwicz* – baseia-se numa visão optimista, o administrador deverá examinar o lucro máximo para cada alternativa e escolher aquela que apresentar o maior lucro máximo, i.é, uma decisão arriscada escolhendo o máximo dos máximos. Pode-se adoptar este critério quando se tem uma mínima esperança de rentabilidade.

3. *Critério Maximédia de Laplace* – este critério supõe que todas as influências não controláveis têm a mesma probabilidade e escolhe-se a alternativa que tiver o maior valor da média aritmética, "princípio de insuficiência razão".

4. *Critério de realismo de Hurwicz* – este critério escolhe a opção que apresentar o maior rendimento esperado. O critério baseia-se na escolha de um coeficiente de realismo α, que exprime o grau de realismo: se a visão é optimista α estará próximo de 1, se é pessimista α estará perto de zero. O valor do rendimento esperado é dado pela fórmula.

$$RE\ (linha\ i) = \alpha * l_{max} + (1-\alpha)*l_{min}$$

5. *Critério Minimax* – este critério consiste em admitir que os estados de natureza estão fora do controlo dos administradores, e portanto, se um estado de natureza não é realmente aquele suposto ou então ele muda, o administrador perde a oportunidade por não ter escolhido a alternativa correspondente. Para minimizar estas perdas, calcula-se as perdas de oportunidade para cada estado de natureza e em seguida escolhe-se a alternativa que apresentar o mínimo de todas perdas máximas.

$$\text{PO} = \text{PerdOport (ij)} = \max (v_{ij}) - v_{kj}$$

Onde
PerdOport (ij)= perda de oportunidade
max (vij) – é o valor máximo na alternativa i, estado de natureza j
v_{kj} - é o valor ou rendimento esperado na alternativa k, estado de natureza j.

A perda de oportunidade representa o valor que se poderia ganhar se escolhesse a alternativa correspondente ao valor v_{kj}.

6. *Critério Minimin* – o critério de perda de oportunidade ou decisão arriscada, consiste em optar pela alternativa que minimiza a perda de oportunidade, escolhendo o mínimo de todas perdas mínimas.

Exemplo 5.1 Uma empresa do grupo TDM pretende fazer um inquérito ao nível da cidade de Maputo em relação a um novo tipo de serviço. Segundo informações do pré - estudo da equipa de marketing, um inquérito usando uma amostra grande produz um lucro de 500 cts se o serviço é aceite, mas que produziria um prejuízo de 300 cts se o serviço for pouco aceite. Se o inquérito for de pequena amostra produzirá um ganho de

275 cts para serviço aceite e um prejuízo de 80 cts para serviço pouco aceite. Se a pesquisa não necessitar uma amostra a empresa não tem a perder nem a ganhar.

a) Apresente a matriz de decisão, indicando as alternativas e os estados de natureza de que depende a decisão.
b) Utilizando os critérios maximin, maximax, maximédia, minimax e minimin, calcule os resultados potenciais e diga qual é a dimensão da amostra que a empresa deverá usar.
c) Se o coeficiente de realismo for 0.3, qual será o resultado potencial.

Resolução

a) Matriz de decisão

Alternativa De decisão	Estados de Natureza Serviço aceite	Serviço pouco aceite
Amostra grande (a_1)	500	-300
Amostra pequena (a_2)	275	-80
Não fazer nada (a_3)	0	0

b) Cálculo dos rendimentos esperados das 3 alternativas:

maximin = max {-300; -80; 0} = 0 $\rightarrow$ não fazer nada

maximax = max {500; 275; 0} = 500 $\rightarrow$ amostra grande

maximédia = max {100; 97.5; 0} = 100 $\rightarrow$ amostra grande

Para aplicar os critérios minimax e minimin é necessário elaborar a tabela das perdas de oportunidade.

Procedimento de cálculo:

Serviço aceite: $\max(v_{ij}) = 500$; então v_{kj} pode assumir os valores 500; 275 e 0

Serviço pouco aceite: $\max(v_{ij}) = 0$; v_{kj} pode assumir os valores 0; -80; -300

Alternativa De decisão	Estados de Natureza Serviço aceite	Serviço pouco aceite
Amostra grande (a_1)	0	300
Amostra pequena (a_2)	225	80
Não fazer nada (a_3)	500	0

minimax = min{300; 225; 500} = 225 $\rightarrow$ amostra pequena

minimin = min {0; 80; 0} = 0 $\rightarrow$ fazer amostra grande ou não fazer nada

c) Vamos calcular o rendimento esperado para cada linha ou alternativa.

RE (linha i) = $\alpha * l_{max} + (1-\alpha)*l_{min}$

$RE(a_1) = 0.3*500 - 0.7*300 = -60$ cts

$RE(a_2) = 0.3*275 - 0.7*80 = 26.5$ cts

$RE(a_3) = 0.3*0 + 0.7*0 = 0$ cts

max {-60; 26.5; 0} = 26.5 $\rightarrow$ amostra pequena

Os diversos resultados potenciais estão apresentados no quadro resumo

Alternativa De decisão	Optimista maximax	Pessimista Maximin	PerdOport minimax	PerdOport minimin	Maximédia Max{média}	Realismo Max(rend)
a_1	**500**	-300	300	**0**	**100**	-60
a_2	275	-80	**225**	80	97.5	**26.5**
a_3	0	**0**	500	**0**	0	0

Os seis resultados potenciais não são os lucros previstos, eles são simplesmente números que podem ajudar a escolha da melhor solução. Lembre-se que estamos a trabalhar com variáveis não controláveis.

Conceito de base	Critério	Proposta	Resultado Potencial
Optimista	maximax	amostra grande	500
Pessimista	maximin	não fazer nada	0
PerdOport conservador	minimax	amostra pequena	225
PerdOport arriscada	minimin	a. grande /nf. nada	0
Igual probabilidade	maximédia	amostra grande	100
Realismo	maxRendEsp	amostra pequena	26.5

Exemplo 5.2. Uma bomba de gasolina de um proprietário independente deve ser construída num determinado distrito do pais. A Marta é gestora da actividade comercial do proprietário e ela pretende maximizar os lucros que a bomba deve trazer ao seu proprietário. O problema da Marta é de decidir o tamanho da estação de abastecimento. O capital anual de retorno depende do tamanho da bomba, do número de carros abastecidos por ano (situação do mercado) e da quantidade de gasolina encomendada. Depois de uma análise cuidadosa, Marta elaborou a seguinte tabela.

Tamanho da estação	situação do mercado –estados de natureza		
(alternativas)	Bom mercado	Razoável mercado	Péssimo mercado
Pequena (a_1)	50.000	20.000	-10.000
Médio (a_2)	80.000	30.000	-20.000
Grande (a_3)	100.000	30.000	-40.000
Muito Grande (a_4)	300.000	25.000	-160.000

Por exemplo, se Marta construir uma estação de abastecimento pequena e a situação do mercado for boa, ela ganha um valor de 50.000,00 mts por dia.

a) Usando os critérios maximax, maximin e maximédia qual é a alternativa que a Marta deve optar.
b) Usando o critério de realismo para $\alpha = 0.8$ qual deve ser a decisão.
c) Elabora a tabela de perda de oportunidade e indique a decisão se usar o critério minimax.

Resolução

a) maximax = max {50; 80; 100; 300} = 300 mil → estação muito grande
maximin = max {-10; -20; -40; -160} = -10 mil → estação pequena
maximédia = max{20; 30; 30; 55} = 55 → estação muito grande

b) Cálculo dos rendimentos esperados por cada alternativa
$RE(a_1) = 50*0.8 – 10*0.2 = 38$
$RE(a_2) = 80*0.8 – 20*0.2 = 60$
$RE(a_3) = 100*0.8 – 40*0.2 = 72$
$RE(a_4) = 300*0.8 – 160*0.2 = 208$

Max {38; 60; 72; 208} = 208 mil → estação muito grande

c) Tabela de perda de oportunidade

Tamanho da estação (alternativas)	Situação do Mercado –Estados de natureza		
	Bom mercado	Razoável mercado	Péssimo mercado
Pequena (a_1)	250.000	10.000	0.000
Médio (a_2)	220.000	0.000	10.000
Grande (a_3)	200.000	0.000	30.000
Muito Grande (a_4)	0.000	5.000	150.000

Minimax = min {250; 220; 200; 150} = 150 mil → estação muito grande

5.3 DECISÕES COM RISCO

Quando os graus de incerteza são quantificados a tomada de decisão com incerteza passa para uma decisão com risco. Trata-se de uma situação de decisão onde são conhecidas as probabilidades de ocorrência de todos os estados de natureza. Nesta secção é considerado um dos métodos mais populares de tomada de decisão com risco que consiste em seleccionar a alternativa com o maior valor esperado.

Se é conhecida a matriz de decisão com todos os ganhos e as probabilidades sobre todos os estados de natureza também são conhecidas é possível calcular o valor ou rendimento esperado para cada alternativa. Para um grande número de estados de natureza este valor é dado pela soma.

$$RE\,(a_i) = x_{i1}*p(e_1) + x_{i2}*p(e_2) + ... + x_{ij}*p(e_j) \quad \text{ou} \quad RE(a_i) = \Sigma x_{ij}*p(e_j)$$

Onde
a_i - é a alternativa i
x_{ij} – é o ganho na alternativa i estado de natureza j.
$p(e_j)$ – é a probabilidade de ocorrência do estado de natureza e_j

Para os problemas de tomada de decisão com risco, a melhor alternativa pode ser escolhida usando dois critérios básicos:

- *Critério de maior (menor) valor monetário* – consiste, basicamente em face a várias alternativas escolher aquela que apresenta o maior (menor para custos) valor esperado.

$$Alternativa(a_i) = \max RE(a_i) \quad \text{com} \quad RE(a_i) = \sum x_{ij} * p(e_j)$$

- *Critério de menor risco* – consiste em escolher a alternativa com menor variância.

$$Alternativa(a_i) = \min Var(a_i) \quad \text{com} \quad Var(a_i) = \sum x^2{}_{ij} * p(e_j) - \left(\sum x_{ij} * p(e_j)\right)^2$$

$$\text{Ou} \quad Var(a_i) = RE(x^2) - (RE(x))^2$$

Exemplo 5.3. João Tomás é fundador e presidente da companhia Tomás Lamber, com diferentes capitais investidos no Sul de Moçambique. João pretende expandir a sua actividade comercial, construindo mais fábricas de sabão a medida que localiza um novo mercado no centro e norte do país. Para tal ele tem três alternativas: construir uma fábrica grande, pequena ou não construir nenhuma fábrica.
Uma avaliação preliminar das condições do desenvolvimento do seu negócio mostrou que, para um mercado favorável a firma ganha 200 contos se construir uma fábrica grande, 100 contos se construir pequena fábrica, por outro lado ele perde 180 contos e 20 contos respectivamente para grande e pequena fábrica e finalmente não ganha nem perde se não construir a fábrica. Supondo que a probabilidade de que o mercado seja favorável é igual 0.5.

a) Apresente a matriz de decisão e calcule os rendimentos esperados para cada alternativa.
b) Se o objectivo for de maximizar o ganho qual será a alternativa a escolher.
c) Se o objectivo for minimizar o risco qual será a alternativa a escolher.

Resolução

a)

Alternativas	Estados de natureza Mercado favorável	 Mercado não favorável	RE(ai)
Construir fábrica grande (a_1)	200.000	-180.000	10.000
Construir fábrica pequena (a_2)	100.000	-20.000	40.000
Não construir nada (a_3)	0.000	0.000	0.000
Probabilidades	0.5	0.5	

.

$RE(a_1) = 0.5*200.000 + 0.5*(-180.000) = 10.000$
$RE(a_2) = 0.5*100.000 + 0.5*(-20.000) = \mathbf{40.000} \longleftarrow$
$RE(a_3) = 0.5*0.000 + 0.5*(0.000) = 0.000$

b) Se o objectivo for de maior valor esperado, o Sr. João deverá construir uma fábrica pequena.

d) $Var(a_1) = 0.5*200000^2 + 0.5*180000^2 - (10000)^2 = 3.61*10^{10}$
$Var(a_2) = 0.5*100000^2 + 0.5*20000^2 - (40000)^2 = \mathbf{0.36*10^{10}}$ ⟵

Como não se incorre nenhum risco na alternativa 3, tem sentido comparar os riscos das duas alternativas. Nesta situação deve-se escolher também a alternativa de fazer uma fábrica pequena.

5.3.1 Valor esperado da informação perfeita

Segundo a análise feita na tabela anterior, concluiu-se que a melhor alternativa para o Sr. João Lamber era construir uma fábrica pequena. Se existir uma empresa publicitária para promover a marca de sabão que será produzida pela firma, provavelmente pode mudar a decisão anterior. Neste contexto, supondo que existe uma informação de que o mercado é favorável, construiu-se uma fábrica grande e teve-se um rendimento de 200+65 = 265 cts. A informação que a firma teve sobre o estado do mercado é designada por *informação perfeita,* e os 65 cts correspondem ao valor da informação.

Nesta secção, vamos considerar dois conceitos relativos a teoria de decisão: valor esperado da informação perfeita (VEIP) e rendimento esperado com informação perfeita (REIP).

O valor ou rendimento esperado com informação perfeita é o valor esperado ou a média que se recebe a longo prazo, se tiver uma informação perfeita antes de tomar a decisão. Para calcular este valor, escolhe-se a melhor alternativa para cada estado de natureza e multiplica-se este ganho pela probabilidade de ocorrência do estado de natureza.

$REIP = \max(x_{i1})*p(e_1) + \max(x_{i2})*p(e_2) + ... + \max(x_{ij})*p(e_j)$

Ou $REIP = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\left(\max(x_{ij}) * p(ej)\right)$

O valor esperado da informação perfeita corresponde a diferença entre o rendimento esperado com informação perfeita e o rendimento esperado sem informação perfeita.

VEIP = REIP – max(RE) ou VEIP = REIP - RESIP

Para o exemplo anterior vamos calcular o REIP; max(RE) e VEIP:

1. O maior ganho para um mercado favorável é 200 cts construindo uma fábrica grande; para um mercado não favorável é 0 que se obtém não construindo nada, de onde calculamos:
   REIP = 200.000*0.5 + 0.000*0.5 = 100.000

2. O rendimento máximo esperado sem informação é maxRE = 40.000. calculado em (a)
3. VEIP = REIP – max(RE) = 100.000 – 40.000 = 60.000

Exemplo 5.4 Um fabricante de fogões tem uma nova marca de fogão e tem um novo mecanismo que reduz o consumo de energia, mas que aumenta o preço do fogão. Se o preço de energia fica alto, os fogões vão vender-se bem, com um rendimento de 60 cts/f, se o preço de energia baixa, a empresa corre o risco de perder 10 cts/f. A marca antiga de fogão tem um lucro esperado de 30 cts/f se o custo de energia fica alto e 50 cts/f se o preço decresce. O departamento de marketing da empresa estima uma probabilidade de 0.70 de que o custo de energia fique alto.

a) Apresente a matriz de decisão que reporta esta informação.
b) Calcule o rendimento esperado e a variância para cada tipo de fogão.
c) Se o fabricante pretende maximizar o seu rendimento esperado, que marca de fogão deveria vender? E se o fabricante quer menor risco na venda dos seus fogões que alternativa deverá escolher.
d) Calcule o rendimento esperado com informação perfeita bem como o valor esperado da informação

Resolução

a)

Estados de natureza	Alternativas de decisão –lucros esperados		Probabilidades
	Novo fogão	antigo fogão	
Alto preço	60	30	0.70
Baixo preço	-10	50	0.30

b) Rendimentos esperados — variâncias

RE(nf) = 60*0.70 – 10*0.30 = **39** cts — $\text{Var(nf)} = 0.7*60^2 + 0.3*10^2 - 39^2 = 1029$

RE(af) = 30*0.70 + 50*0.30 = 36 cts. — $\text{Var(af)} = 0.7*30^2 + 0.30*50^2 - 36^2 =$ **84**

c) Para o critério de maior valor esperado, o fabricante deve escolher novo fogão. Se ele pretende minimizar o risco, deve produzir antigo fogão.

.

d) REIP = 60*0.70 + 50*0.3 = 42 + 15 = 57 cts
VEIP = 57 – 39 = 18 cts.

Se forem calculadas perdas de oportunidade para os problemas de análise de decisão com risco pode se usar o critério de mínimo custo esperado de oportunidade (CO), segundo o qual deve-se escolher a alternativa que apresentar o menor valor esperado.

Voltando para o exemplo 5.3 temos as perdas de oportunidade:

Alternativas	Estados de natureza		
	Mercado favorável	Mercado não favorável	CO(ai)
Construir fábrica grande (a_1)	0.000	180.000	90.000
Construir fábrica pequena (a_2)	100.000	20.000	60.000
Não construir nada (a_3)	200.000	0.000	100.000
Probabilidades	0.5	0.5	

.

$CO(a_1) = 0.5*0.000 + 0.5*180.000 = 90.000$
$CO(a_2) = 0.5*100.000 + 0.5 * 20.000 = 60.000$
$CO(a_3) = 0.5*200.000 + 0.5 * 0.000 = 100.000$

Usando o critério de mínimo custo de oportunidade deve-se construir pequena fábrica.

É importante notar que o mínimo (CO) resulta no máximo valor esperado da informação perfeita (VEIP): Min(CO) = max(VEIP) = 60.000,00 mts.

Exemplo 5.5 Um fabricante de brinquedos está a elaborar uma nova marca de bonecas, e deve decidir o nível de esforço no mercado. O sucesso depende da resposta dos clientes e os gerentes estimaram o lucro nos vários casos em mil meticais.

Estados de natureza (vendas)	Alternativas de decisão (rendimentos em função do nível de esforço)			Probabilidades
	Alto (a)	Médio (m)	Baixo (b)	
Boas (b)	80	70	50	0.2
Médias (m)	50	45	40	0.4
Não boas (ma)	-25	-10	0	0.4

a) Qual é o nível óptimo de esforço, se o fabricante pretender maior valor monetário. Qual o rendimento esperado deste nível. O risco apresentado por este nível também é óptimo?
b) Se uma companhia de publicidade que custa 12 mil meticais, aumentar as probabilidades para p(b) = 0.3; p(m) = 0.5 e p(ma)=0.2. Valerá contratar esta companhia.

Resolução

a) RE(a) = 80*0.2 + 50*0.4 – 25*0.4 = 26 mil meticais; Var(a) = 1854
RE(m) = 70*0.2 + 45*0.4 – 10*0.4 = **28 mil meticais**; Var(m) = 1046
RE(b) = 50*0.2 + 40*0.4 + 0*0.4 = 26 mil meticais; Var(b) = 464

Resposta. O nível óptimo de esforço é o médio com um RESIP = 28 mil meticais. Infelizmente o risco deste esforço não é o melhor.

.

b) RE(a) = 80*0.3 + 50*0.5 – 25*0.2 = 44 cts
RE(m) = 70*0.3 + 45*0.5 – 10*0.2 = 41.5 cts
RE(b) = 50*0.3 + 40*0.5 + 0*0.2 = 35 cts
REIP = RE(óptimo) – custo = 44 – 12 = 32 mil meticais > 28 mil meticais.

Resposta:
A companhia de publicidade pode ser contratada, pois tem se um lucro de 4 cts em cada lote de bonecas boas, medias e más aplicando-se o nível mais alto de esforço.

5.3.2 Análise de sensibilidade

No problema da firma de João Tomas Lamber, foram determinadas várias decisões cada uma com o seu valor esperado. As conclusões obtidas dependiam dos valores económicos e de duas probabilidades de mercado favorável e não favorável. A análise de sensibilidade investiga como a decisão altera se é dada uma mudança nos dados do problema. E nesta secção considera-se o impacto que esta mudança faz em termos dos valores das probabilidades.

Seja p = probabilidade de mercado favorável
Vamos expressar o rendimento esperado em termos de p
RE(fábrica grande) = 200*p -180*(1-p) = 380*p – 180
RE(fábrica pequena) = 100*p - 20*(1-p) = 120*p -20
RE(não fazer nada) = 0*p + 0*(1-p) = 0

Se colocar as rectas que correspondem as alternativas em função das probabilidades podemos ver na figura 5.3 de que a melhor decisão é não fazer nada enquanto p estiver entre 0 e o ponto 1 onde RE(a_2) = RE(a_3). Se a probabilidade estiver entre o ponto 1 e o ponto 2, a melhor alternativa é construir uma pequena fábrica. E só se recomenda construir uma grande fábrica se a probabilidade for maior do que a do ponto 2.

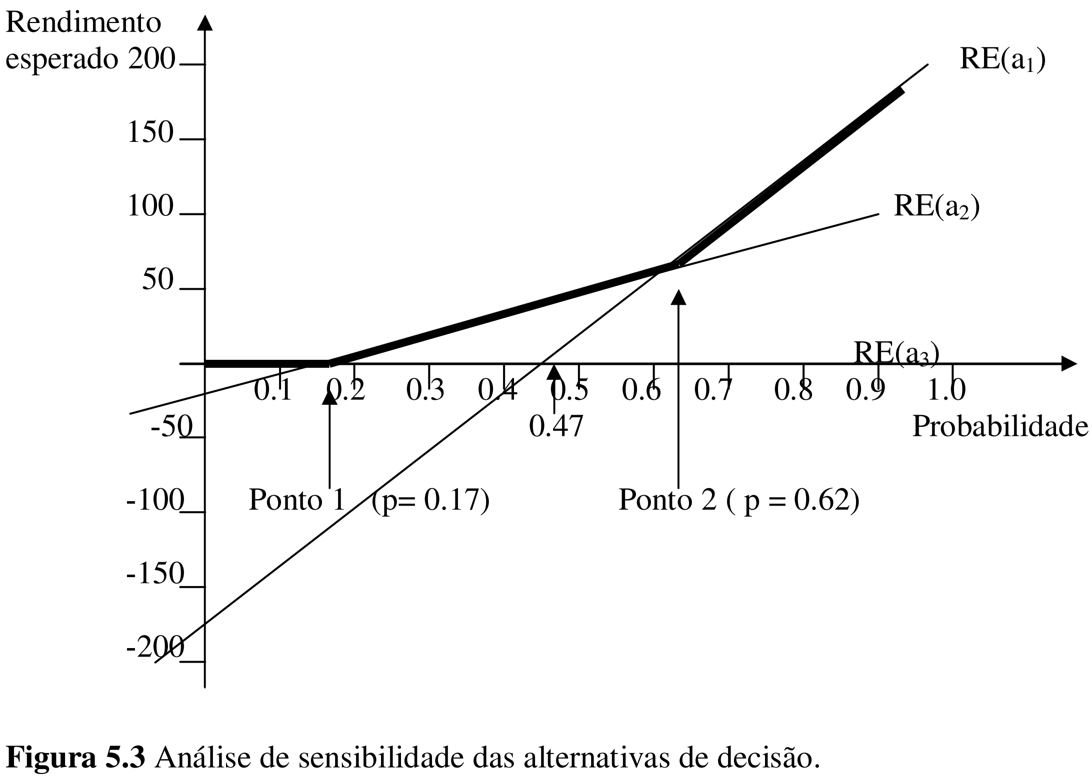


Figura 5.3 Análise de sensibilidade das alternativas de decisão.

As probabilidades dos pontos 1 e 2 podem ser calculadas da seguinte forma:
Ponto 1: $RE(a_2) = RE(a_3) = 0 \Leftrightarrow 120p_1 - 20 = 0$, então $p_1 = 0.17$
Ponto 2: $RE(a_1) = RE(a_2) \Leftrightarrow 380p_2 - 180 = 120p_2 - 20$, então $p_2 = 0.62$

Os resultados desta análise de sensibilidade estão apresentados na tabela.

Intervalo de probabilidade	Decisão a tomar
Se a probabilidade é menor que 0.17	Não fazer nada
Se a probabilidade está entre 0.17 e 0.62	Construir fábrica pequena
Se a probabilidade é maior que 0.62	Construir fábrica grande

5.4 ANÁLISE MARGINAL DAS ALTERNATIVAS DE DECISÃO

Nos casos anteriores, consideramos situações onde o número das alternativas e estados de natureza era reduzido. O que acontece quando tivermos o número das alternativas de decisão e estados de natureza muito grandes?.

Por exemplo, para um restaurante grande, necessita um estoque para seus clientes desde 0 a 100 pratos diferentes e por outro lado, precisa de cerca de 100 funcionários por dia. Para estes casos usando os procedimentos da teoria de decisão já apresentados, teríamos uma matriz de decisão muito grande para a análise de decisão. Assim, para identificar os valores esperados e os custos de oportunidade recorre-se à análise marginal de decisão.

A análise marginal é um procedimento de tomada de decisão que é utilizado para seleccionar o nível óptimo de realização de um determinado evento, normalmente quando o número de alternativas e dos estados de natureza é muito grande. A análise marginal envolve dois outros conceitos: rendimento marginal (RM) e custo marginal (CM).

Por exemplo, um ardina “distribuidor de jornal” por dia compra cada jornal por 5 contos, o jornal é vendido por 8 contos. Se não se vender o jornal até ao fim dia ele não ganha nada (0 contos). Neste caso o rendimento marginal provém da venda de cada jornal, (RM = 8 – 5 = 3 contos). O custo marginal é a perda causada por cada jornal não vendido e corresponde a 5 contos, até ao fim do dia (CM = 5 contos).

Se existe um número finito de alternativas, estados de natureza e são conhecidas as probabilidades de ocorrência de cada estado de natureza usa – se *a análise marginal com distribuições discretas.* Se o número das alternativas e estados de natureza é muito grande e a distribuição das probabilidades associadas aos estados de natureza pode ser descrita pela distribuição normal, *a análise marginal com distribuição normal é apropriada.*

5.4.1 Análise marginal com distribuição discreta

Dado um nível de probabilidade p, o procedimento da análise marginal consiste em calcular e verificar se o valor esperado do rendimento marginal (RM) é igual ou excede o valor esperado do custo marginal (CM).

Seja:

- p – a probabilidade de que a procura de um determinado bem seja maior ou igual a oferta disponível.
- 1 – p = q - a probabilidade de que a procura seja menor do que a oferta disponível.

Destas designações os valores esperados do RM e CM são p*RM e (1-p)*CM e a melhor regra de decisão é obtida da desigualdade:

$$p*RM \geq (1-p)*CM \qquad (1)$$

Usando transformações matemáticas determina-se o nível de probabilidade p que ajuda a resolver o problema da análise marginal.

$$P \geq \frac{CM}{RM + CM} \qquad (2)$$

A equação (2) significa que a probabilidade p de vender mais uma unidade é maior ou igual a CM/(RM+CM) e as restantes unidades ficam em estoque.

Passos da análise marginal discreta

Passo 1. Determinar o valor da probabilidade p para um problema concreto.
Passo 2. Construir a tabela das probabilidades e as probabilidades acumuladas.
Passo 3. Retirar ou ler da tabela a probabilidade p de vender menor ou maior quantidade do artigos em análise.

Exemplo 5.6. Um café bar, produz café que é vendido aos moradores da zona. O material necessário para se preparar uma chávena do tipo C1 custa 4 contos, por sua vez esta é vendida ao cliente por 6 contos. O proprietário que tinha alugado as instalações antes estimou as vendas diárias e calculou as probabilidades conforme a tabela abaixo, por exemplo $p(x \leq 5) = 0.15$).

X - vendas diárias (número de chávenas)	Probabilidade até X vendas diárias.
4	0.05
5	0.15
6	0.15
7	0.20
8	0.25
9	0.10
10	0.10

a) Calcule o rendimento marginal e o custo marginal do café bar para cada chávena preparada.
b) Calcular a probabilidade de vender mais uma chávena por dia.
c) Adicione a coluna das probabilidades acumuladas e faça uma discussão dos resultados conforme a regra obtida em (b) e diga qual é o número máximo de

chávenas que deverão ser preparadas por dia.

Resolução

a) RM = preço de venda – preço de compra = 6-4 = 2 cts.
   CM = preço de compra = 4 cts.

b) Cálculo da probabilidade de vender mais uma chávena :

$$P \geq \frac{CM}{RM + CM} = \frac{4}{2+4} = 0.66$$

c)

X - vendas diárias (número de chávenas)	Probabilidade de X vendas diárias .	Probabilidade acumulada – $p(x_i)$
4	0.05	$1.00 \geq 0.66$
5	0.15	$0.95 \geq 0.66$
6	0.15	$0.80 \geq 0.66$
7	0.20	0.65
8	0.25	0.45
9	0.10	0.20
10	0.10	0.10

Comentário:

- Da tabela, a probabilidade de vender 8 ou mais chávenas é igual a 0.45 (=0.25+0.10+0.10), nomeadamente é a soma das probabilidades de vender 8; 9 e 10 chávenas.
- A probabilidade de vender 7 ou mais chávenas é igual a 0.65 e de vender 6 ou mais é 0.80.
- Da alínea (b), para que se venda mais uma chávena por dia é necessário que $p(x_i) \geq 0.66$ e como $p(6) = 0.80 \geq 0.66$ conclui-se que deve-se preparar 6+1 = 7 chávenas por dia.

5.4.1 Análise marginal com distribuição normal

Se a procura ou venda de um determinado produto pode ser descrita usando a distribuição normal, a análise marginal com distribuição normal é conveniente para analisar a situação económica, devendo-se para tal calcular quatro parâmetros importantes para esta análise:

1. A média ou vendas médias do produto μ.
2. O desvio padrão das vendas do produto σ
3. O rendimento marginal do produto RM
4. O custo marginal do produto CM

Uma vez estas quantidades conhecidas, o processo da escolha da melhor política de decisão é semelhante à análise marginal com distribuição discreta.

Passos da análise marginal com distribuição normal

Passo 1. Determinar o valor da probabilidade p, que segue a distribuição normal

$$P = \frac{CM}{CM + RM}$$

Passo 2. Na curva da distribuição normal, localizar a área correspondente a esta probabilidade. Para uma área abaixo da curva da função densidade da distribuição normal, determinar o valor crítico z, fazendo apenas: P(x > z) = p.

Passo 3. Usando a relação da distribuição normal padrão e transformações matemáticas calcular o valor óptimo de X a produzir ou vender.

$z = \frac{x - \mu}{\sigma}$ de onde $x = \mu + z*\sigma$

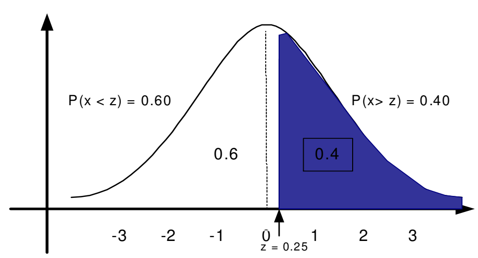
Exemplo 5.7. O número de pedidos de cópias que o jornal Imparcial recebe, segue uma distribuição normal com média de 500 e desvio padrão de 100 exemplares por dia. O custo marginal é de 40 contos e o rendimento marginal é de 60 contos. Qual é o número óptimo de exemplares que o jornal imparcial deve produzir por dia.

Resolução:

Calculamos o valor de p: $P = \frac{CM}{CM + RM} = \frac{40}{40 + 60} = 0.40$

Para uma distribuição normal X ≈ N(μ, σ), equivale a escrever z ≈ N(0, 1), de onde devemos encontrar z tal que P(x > z) = 0.4.

P(0 < Z < z) = 0.5 – 0.4 = 0.1
Φ(z) - Φ(0) = 0.1; z = 0.25
(ver a tabela da distribuição normal).



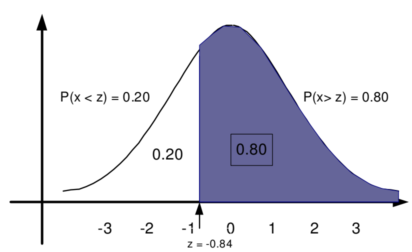
Cálculo do valor óptimo: $x = \mu + z*\sigma = 500 + 0.25*100 = 525$ exemplares.

Se a probabilidade p for maior que 0.5, teremos logicamente um z crítico negativo.

Vejamos o exemplo seguinte: se CM = 80 contos; RM = 20 contos; μ = 1000 exemplares e σ = 100 exemplares

Teremos: $P = \frac{CM}{CM + RM} = \frac{80}{80 + 20} = 0.80$

P(z < Z < 0) = 0.5 –P(Z< z)
= 0.5 - 0.2
= 0.3
Φ(0) - Φ(z) = 0.3 ; z = -0.84
(ver tabela da distribuição normal).

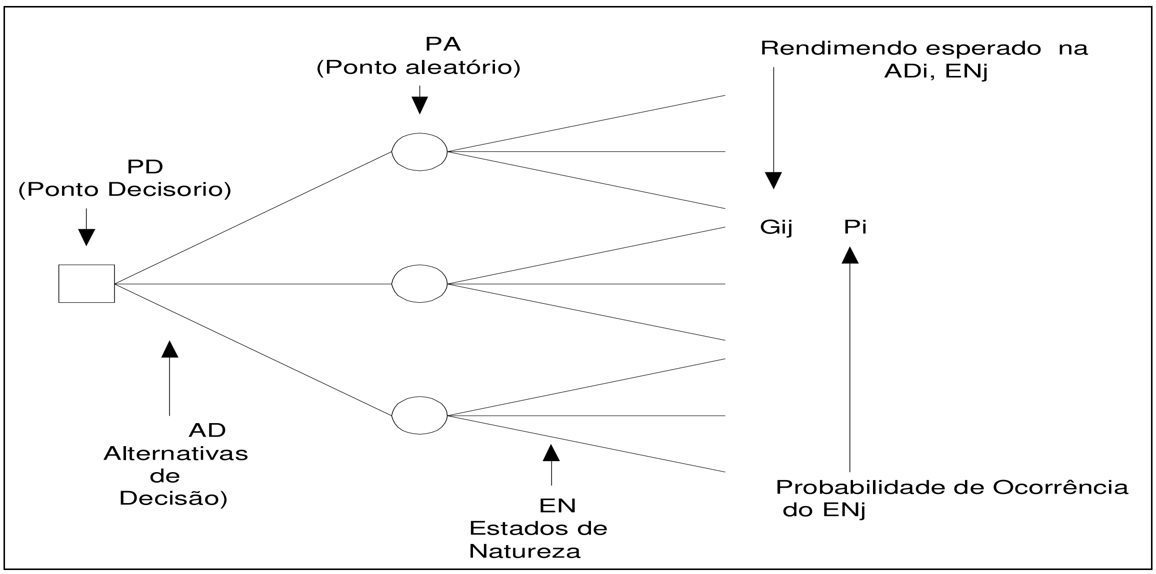


Calculo do valor óptimo: $x = \mu + z*\sigma = 1000 – 0.84*100 = 916$ exemplares.

5.5 ÁRVORE DE DECISÃO

As árvores de decisão são uma alternativa das tabelas ou matrizes de decisão. É uma forma gráfica de traçar um atalho através de um labirinto decisório. Sendo assim qualquer problema que pode ser representado por uma matriz de decisão pode também ser representado numa árvore de decisão.

Todas as árvores de decisão têm em comum alguns elementos fundamentais:
1. Ponto decisório – é o ponto de decisão onde se escolhe uma alternativa entre tantas que estão ligados a este ponto. O ponto decisório também é chamado nó e representa-se por um *quadrado*.
2. Alternativas – geralmente aqui são representadas por *linhas* e partem do ponto decisório.
3. Estados de natureza – são os eventos aleatórios que podem ocorrer em cada alternativa e são representados por um *nó circular* que liga estes as alternativas.



Passos da análise de decisão usando árvores de decisão

1. Definição do problema, inclui a indicação das alternativas de decisão e os estados de natureza;
2. Apresentar a estrutura da árvore de decisão;
3. Atribuir probabilidades aos estados de natureza que partem do nó circular bem como deve-se conhecer o ganho associado a cada estado de natureza;
4. Estimar o ganho esperado em cada alternativa e estado de natureza.
5. Resolver o problema, calculando o rendimento esperado (RE) para cada nó do estado de natureza, como produto entre a probabilidade de ocorrência do evento aleatório pelo ganho esperado.
6. Comparar todos os rendimentos esperados das alternativas e escolher aquela que apresentar o maior ou menor valor, conforme o tipo de problema a tratar.

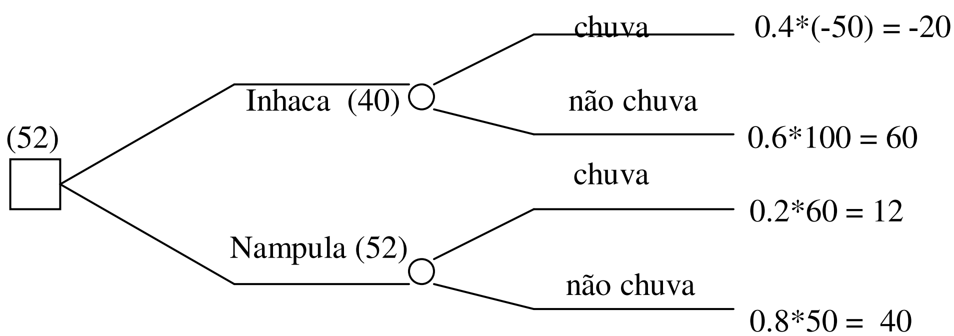
Exemplo 5.8. Um casal está a planear suas férias. Estão a considerar duas opções: ir fazer uma visita a ilha de Inhaca ou visitar seus amigos que vivem na província de Nampula. Decidiram atribuir pontuação as opções que dependem do nível de satisfação. Por exemplo atribuem 100 pontos ir a ilha se o tempo estiver bom –50 pontos se chover. Por outro lado, ir a Nampula vale 50 pontos se o tempo estiver bom e 60 pontos se chover, a probabilidade de chuva na ilha estima-se em 0.4 e na província de Nampula em 0.2.

a) Se o casal deseja maximizar o número de pontos, deveria ir a ilha de Inhaca ou visitar amigos em Nampula.
b) Se o objectivo do casal é minimizar o risco, onde deveria passar as suas férias.

Resolução

a) Critério de maior valor monetário

alternativa	probabilidade	chuva	não chuva
Ir a Inhaca	0.4	-50	100
Ir a Nampula	0.2	60	50



RE(Inhaca) = 0.4*(-50) + 0.6*100 = 40 pontos
RE(Nampula) = 0.2*60+0.8*50 = 52 pontos

R// Segundo o prognostico apresentado a família deverá ir passar os seus dias na província de Nampula.

b) Critério de menor risco:

Var(inhaca) = 0.4*2500 + 0.6*10000 – 1600 = 5400
Var(Nampula) = 0.2*3600 +0.8*2500 – 2704 = 16

R// O casal deverá passar as suas férias na cidade de Nampula.

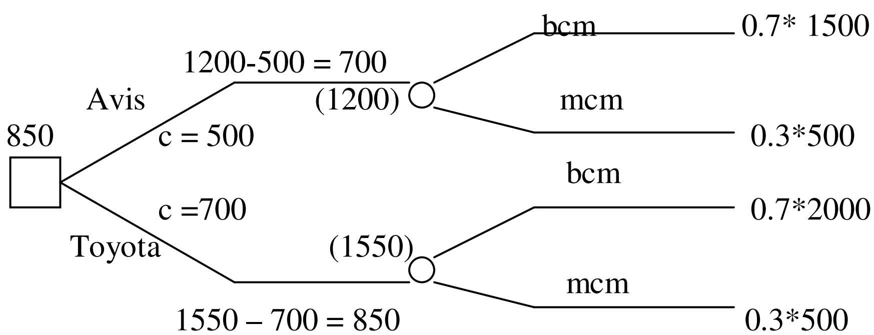
Exemplo 5.9. Uma empresa pretende tomar uma decisão de aluguer de uma viatura para o novo chefe de produção. No mercado existem duas empresas vocacionadas nesta área, sendo a AVIS e a TOYOTA. Uma viatura alugada a Avis custa 500 MT ao mês, enquanto que a da Toyota são 700 MT. Se a empresa optar pela Toyota terá um rendimento de 2000 MT ao mês em operação e manutenção caso a viatura esteja em boas condições mecânicas e de 500 MT caso não esteja. Na empresa Avis, o rendimento é de 1500 MT para boas condições mecânicas e 500 MT se as condições mecânicas do carro não forem boas. A probabilidade de encontrar uma viatura em boas condições é 0.7.

a) Com ajuda de uma árvore de decisão, qual deverá ser a firma com que a empresa deverá celebrar o contrato de aluguer para maximizar o rendimento.
b) Caso a empresa tenha conhecimento do estado das condições mecânicas da viatura qual deverá ser o valor esperado.
c) Calcule o valor da informação ou VEIP.

Resolução

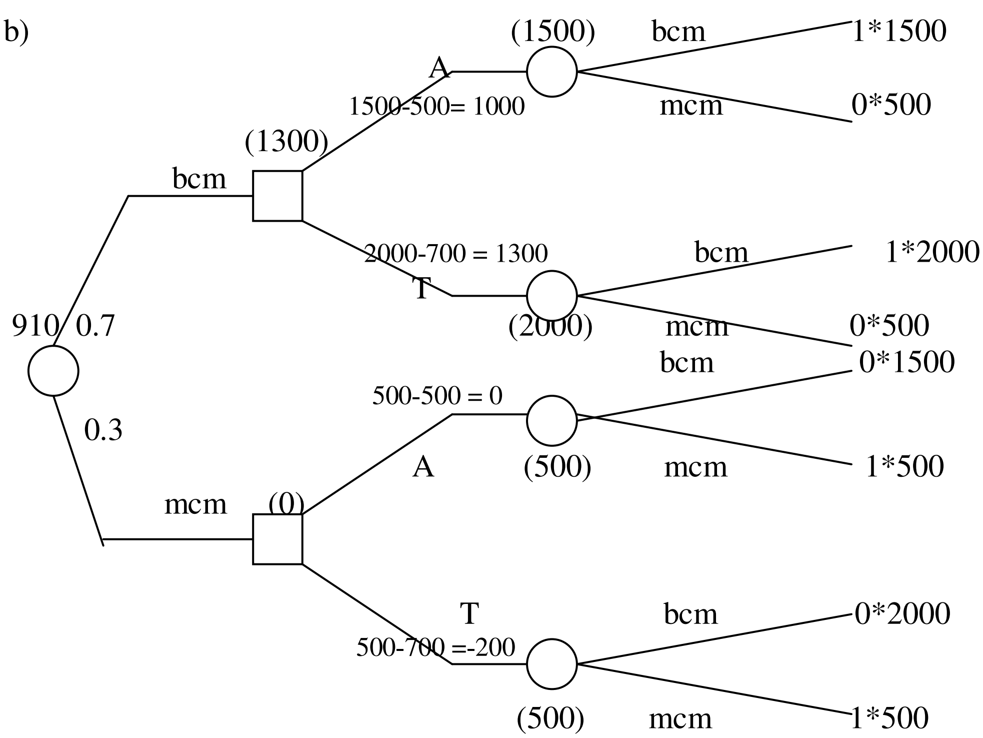
Alternativa	Boas	Mas	Custos	Probabilidade de boas condições
Avis	1500	500	500	0.7
Toyota	2000	500	700	0.7

a)



Resp. A empresa deverá celebrar o contrato com a Toyota e terá um RE = 850 u.m.

b)



REIP = 1300*0.7 + 0*0.3 = 910 u.m

c) Vinf = VEIP = REIP – max (RE) = 910 – 850 = 60 u.m.

Exemplo 5.10. A Vidreira de Moçambique, prevê uma greve nos seus fornecedores de matéria prima, e a direcção da produção pretende decidir se é rentável armazenar uma grande, pequena ou nenhuma quantidade de matéria prima, para utilizar nas próximas semanas. A grande quantidade custa 50 u.m e a pequena 20 u.m. Se há uma greve parcial, a fábrica encontrará um custo adicional de 50 u.m. se não tiver matéria prima. No caso de uma greve total, estima-se um custo adicional de 100 u.m. se só tem pequena quantidade de matéria prima e um custo de 200 u.m se não tiver nada. A probabilidade de uma greve parcial é igual a 0.3 e a probabilidade de uma greve total é de 0.1.

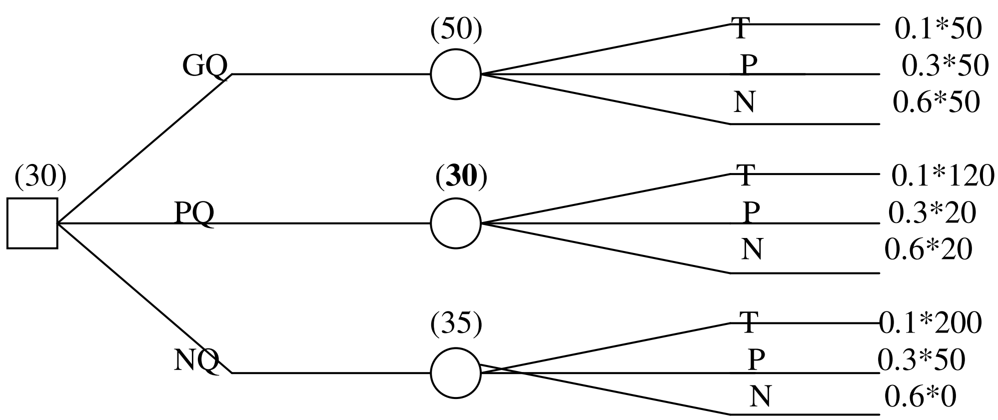
a) Elabore uma tabela de custos condicionais.
b) Usando árvore de decisão determine a alternativa óptima se o objectivo for : (b_1) minimizar os custos da empresa; (b_2) minimizar o risco.
c) Calcule o custo esperado com informação perfeita e o valor da informação.

Resolução

a) Tabela de custos

Estados de natureza	Alternativas de decisão (quantidades a armazenar)			probabilidade
	GQ	PQ	NQ	
G(nenhuma)	50 = 50	20 = 20	0 = 0	0.6
G(parcial)	50 = 50	20 = 20	0+50=50	0.3
G(total)	50 = 50	20+100 = 120	0+200=200	0.1

b)

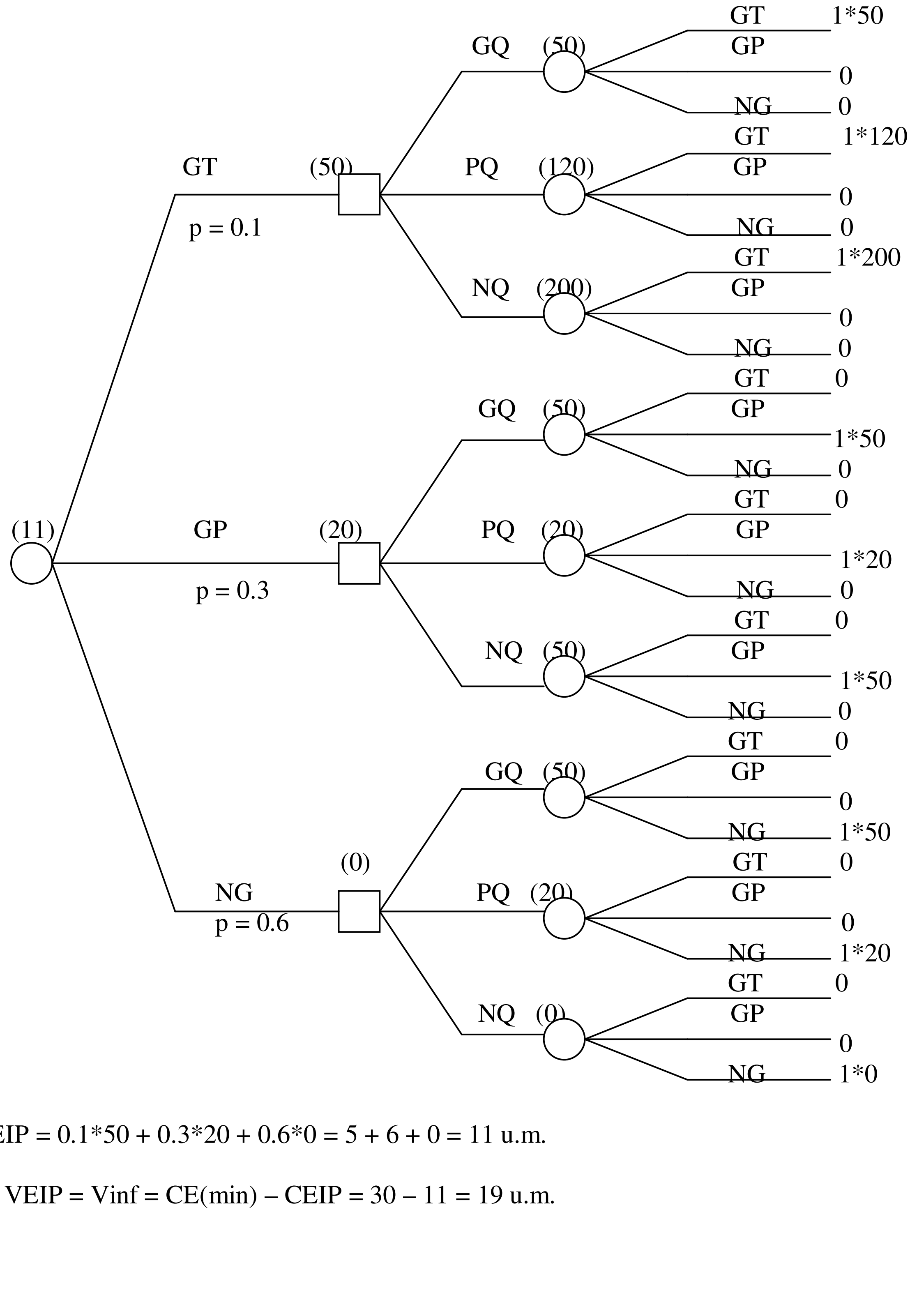


(b_1) Custos esperados
CE(GQ) = 5 + 15 + 30 = 50
CE(PQ) = 12 + 6 + 12 = **30**
CE(NQ) = 20 +15 + 0 = 35

(b_2) variância
Var(GQ) = 250 + 750 + 1500 – 2500 = **0**
Var(PQ) = 1440 + 120 + 240 – 900 = 900
Var(NQ) = 4000 + 750 + 0 –1225 =3525

Resposta:
(b_1). A decisão óptima para minimizar os custos é armazenar pequena quantidade de matéria prima.
(b_2) Se o objectivo é minimizar o risco deve-se armazenar grande quantidade.

b)

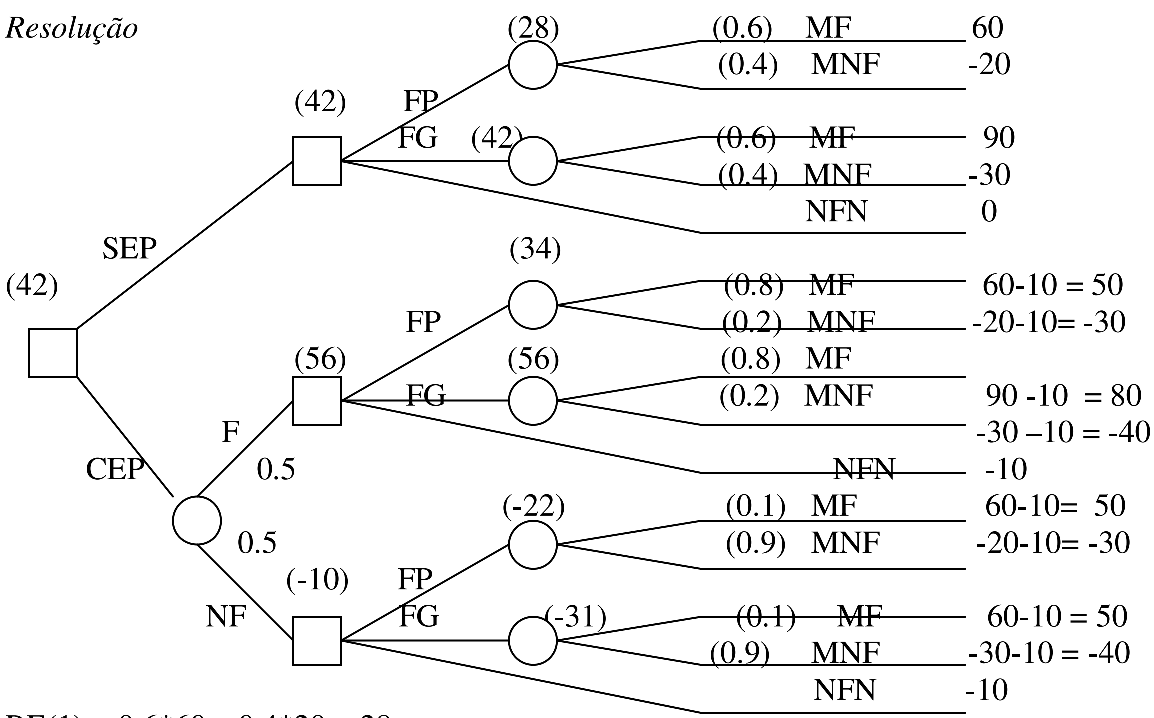


CEIP = 0.1*50 + 0.3*20 + 0.6*0 = 5 + 6 + 0 = 11 u.m.

c) VEIP = Vinf = CE(min) – CEIP = 30 – 11 = 19 u.m.

Exemplo 5.11. Mónica sempre apreciou sapatos de crianças desde os seus 7 anos de idade quando a sua mãe fosse fazer compras com ela. Hoje a Sra. Mónica está a considerar a possibilidade de abrir uma empresa de produção de botas para crianças entre 10 à 15 anos de idade. Como os sapatos terão que ser de alta qualidade e estáveis para a movimentação das crianças, o projecto envolve um desenvolvimento de um modelo inicial. Sendo assim a Mónica decidiu fazer um estudo piloto para saber se a venda das botas de crianças é adequada ou não. Segundo as estimativas um estudo piloto custa 10 u.m., por outro lado este estudo piloto pode ser bem sucedido ou não. As alternativas básicas de decisão são de construir uma fábrica grande, pequena ou não construir nada. Com um mercado favorável, Mónica tem um rendimento esperado de 90 u.m se a fábrica for grande ou 60 u.m para uma fábrica pequena. Entretanto se o mercado não é favorável a Mónica estimou uma perda de 30 u.m para uma grande fábrica e apenas 20 u.m. para uma fábrica pequena. A probabilidade de um mercado favorável dada por um estudo piloto bem sucedido é igual a 0.8 e a probabilidade de um mercado não favorável dada por estudo piloto mal sucedido é estimada em 0.9. A probabilidade de um estudo piloto bem sucedido é igual a 0.5. Por outro lado, se não for conduzido um estudo piloto a probabilidade de um mercado favorável é de 0.6. Usando uma árvore de decisão que recomendação daria a Sra. Mónica.

Resolução



RE(1) = 0.6*60 – 0.4*20 = 28 u.m
RE(2) = 0.6*90 – 0.4*30 = 42 u.m
RE(3) = 0.8*50 – 0.2*30 = 34 u.m
RE(4) = 0.8*80 – 0.2*40 = 56 u.m
RE(5) = 0.1*50 – 0.9*30 = -22 u.m
RE(7) = 0.1*50 – 0.9*40 = -31 u.m

RE(sep) = maxRE = 42 u.m. RE(cep) = 0.5*56 –0.5*10 = 23 u.m

Resposta: Comparando os rendimentos esperados a decisão deve ser de não fazer nenhum estudo piloto e construir uma fábrica grande, pois segundo as estimativas tem-se um rendimento esperado de 42 u.m.

5.6 EXERCÍCIOS PROPOSTOS

Exercício 5.1. Uma casa especializada em equipamentos electrónicos pretende expandir o seu negócio para as periferias da cidade de Maputo. O problema do administrador é determinar o tamanho da nova loja de tal modo que num futuro próximo não haja problemas de gerir a ligação: produto – cliente – custos de operação. Sendo assim ele desenvolveu a seguinte tabela de lucros possíveis conforme o prognostico da situação do mercado.

Alternativas (construir loja)	Situação do mercado		
	Favorável	Não favorável	Péssimo
Grande	550	110	-310
Média	300	129	-100
Pequena	200	100	-32
Na fazer nada	0	0	0

a) Usando os critérios maximax e maximin qual deverá ser a decisão óptima.
b) Se o critério de realismo for de 0.8, qual será a nova decisão.
c) Desenvolva a tabela de perda de oportunidades e use o critério minimax para escolher a alternativa óptima.

Resposta:
a) loja de tamanho grande RE(g) = 550; Não fazer loja RE(nfn) = 0;
b) loja de tamanho grande RE(g) = 378;
c) loja de tamanho médio RE(m) = 250

Exercício 5.2. A DINAGECA, precisa de decidir a sua nova política de produção dos mapas de Moçambique. A decisão depende fundamentalmente da aceitação dos mapas perante os seus potenciais clientes. As primeiras informações recebidas na secção de exploração do mercado revelaram que há duas possibilidades: produzir mapas no formato A0 ou A4. O custo de produção dos mapas é 70 u.m. para A0 e 40 u.m. para A4. O departamento de estudos e previsão estimou que, se os mapas forem muito requisitados a Dinageca ganha uma economia de 200 e 150 respectivamente para os formatos A0 e A4. se forem menos requisitados ganha – se apenas 50 para A0 e 80 para A4.

a) Apresente a matriz de decisão para a situação descrita no problema.
b) Se as probabilidades de maior requisição dos mapas forem $p(a_0) = 0.6$ e $p(a_4) = 0.8$, qual o formato que a Dinageca deve produzir para maximizar o seu rendimento.
c) Supondo que a Dinageca pretende minimizar o risco de produzir mapas que não serão comprados, que decisão deverá tomar.

Resposta: (a) ---; b) RE(A0) = 70; RE(A4) = 96, deve-se produzir o formato A4.; Var(A0) = 20100; Var(A4) = 10064; deve produzir A4

Exercício 5.3. Suponha que tem duas alternativas de investimento de igual montante. No essencial, estimou-se que com a alternativa A tem hipótese de ganhar 3 e 18 mil u.m. com probabilidades 0.3 e 0.4 respectivamente, e de perder 5 mil u.m com probabilidade 0.3. Com a alternativa B pode ganhar 500 u.m. ou 4500 u.m., com igual chance. Qual das alternativas deverá preferir se:

a) Pretender maximizar o ganho que espera obter no investimento.
b) Pretender escolher a alternativa de menor risco.

Resposta:

a) RE(A) = 6600 u.m; RE(B) = 2500, deverá preferir no investimento A;
b) Var(A) = 96240000; Var(B) = 4000000; deverá preferir no investimento B.

Exercício 5.4. O administrador de um certo hospital, pretende experimentar um novo projecto para quartos dos doentes, colocando aparelhos de ar condicionado e aumentar os preços. Se for colocado um aparelho grande num determinado quarto e este for solicitado pelos doentes o hospital recebe uma receita de 150 u.m. Se o aparelho de ar condicionado for pequeno a receita é apenas de 60 u.m. Caso o quarto não seja solicitado mas que tenha algum aparelho de ar condicionado o hospital perde uma quantia equivalente a 85 e 45 u.m. respectivamente para grande e pequeno tipo.

a) Construir a tabela que apresenta as alternativas de decisão.
b) Usando o critério maximédia determine a alternativa que o administrador deverá implementar.
c) Se o critério de realismo for igual a 0.75 determine a melhor alternativa.

Resposta:

a) –
b) RE(g) = 32.5; RE(p) = 7.5; deve-se colocar aparelhos de tamanho grande.
d) RE(g) = 91.25; RE(p) = 33.75; deve-se colocar aparelhos de tamanho grande.

Exercício 5.5. A Sr. Miller, acaba de abrir um Take Away na escola Josina Machel, segundo a sua funcionária de cozinha a preparação de uma sande, tem um custo 4 contos. A sande é vendida aos alunos da escola por 6.750,00 meticais. O Sr. Miller pensa em guardar ao máximo as seguintes quantidades de sandes já preparadas: 10, 15, 20, 25 e 30 unidades. A probabilidade de vender 10 sandes é 10%, a chance de vender 15 é 20%, de 20 é 30%. Existe 30% de probabilidade de vender 25 sandes por hora, e finalmente existe 10% de probabilidade de vender 30 sandes.

a) Qual será o rendimento marginal pela venda de uma sande neste Take Away.
b) Calcule a probabilidade de vender mais uma sande.
c) Qual é o número máximo de sandes que deverão ser preparadas aguardando os clientes por hora.

Resposta:

a) RM = 2.750,00 meticais.;
b) P = 0.59 ou 59%;
c) Deverão ficar já preparadas 20 + 1 = 21 sandes.

Exercício 5.6. Guebi Simon, é gestor de produção de um departamento da empresa Platex. O custo marginal de cada plástico nesta empresa é de 35.00 meticais. O rendimento marginal quando o plástico é vendido é de 15.00 meticais. Durante o ano passado, a média das vendas foi de 45.000 plásticos com um desvio padrão de 4.450 plásticos. Faça uma análise deste sector de produção e proponha quantos plásticos deste tipo deverão ser postos no mercado para o ano.
Resposta: Para o ano são necessários 42686 plásticos.

Exercício 5.7. Dois países vizinhos não tem boas relações diplomáticas, e o nível de comércio entre eles está baixo. Os ministros dos negócios estrangeiros dos dois países, pretendem reunir-se para decidir se devem fechar todo o comércio, manter o nível actual ou aumentar. Os peritos estimaram as probabilidades de fechar em 0.5 de manter em 0.4 e aumentar em 0.1. Uma empresa está a considerar a opção entre três produtos: O produto A venderia –se bem dentro do pais e não no pais vizinho, o produto C venderia – se bem no outro pais e o produto B venderia – se igualmente nos dois países conforme a tabela dos lucros prognosticados.

Estados de natureza		Lucros dos produtos		
situação comercial	probabilidade	A	B	C
Fechado	0.5	100	90	60
Normal	0.4	80	95	100
Aumentado	0.1	40	80	150

a) Se a empresa pretende maximizar os seus lucros, qual seria o produto a vender. (use árvore de decisão)
b) Calcule o rendimento esperado com informação perfeita e o valor da informação.

Resposta:
a) A empresa deveria vender o produto B com RESIP = 91 u.m
b) REIP = 105; Vinf = 14 u.m.

Exercício 5.8. Uma universidade tem dois planos para começar o programa de graduação dos seus estudantes num novo curso. O objectivo é maximizar o aumento da população estudantil que ingressa naquele curso. Entretanto, o número de ingressos depende do nível de interesse na nova área que pode ser alto, médio ou baixo. A projecção do aumento de estudantes em função do interesse e dos planos é dada na seguinte tabela.

Interesse dos estudantes	probabilidade	Aumento de estudantes	
		Plano 1	Plano 2
Alto	0.6	220	200
Médio	0.3	170	180
Baixo	0.1	110	150

a) Usando uma árvore de decisão qual dos planos que a universidade deverá seguir.
b) Se a universidade tiver conhecimento do nível de interesse dos estudantes qual será o número total de estudantes esperado para ingressar naquele curso.

Resposta:
a) A universidade deverá seguir o plano 1, com um total de 194 estudantes esperados.
b) O novo número de estudantes é igual a 201.

Exercício 5.9. Uma boutique especializada na venda de perfumes para senhoras pretende expandir a sua actividade comercial construindo uma representação no bairro do Jardim. O problema da gestora principal é determinar o tamanho do novo estabelecimento comercial de tal modo que não dificulte a relação servidor – cliente. Sendo assim ela desenvolveu uma tabela de possíveis lucros esperados para cada tamanho previsto (em mil mts/dia)

Alternativa (estabelecimento)	Fluxo de clientes Maior	Menor
Médio (me)	120	-50
Pequeno (pe)	160	-90
Nenhum (ne)	0	0

a) Usando uma árvore de decisão e supondo que a boutique pretende maximizar o seu rendimento, qual será o tamanho do estabelecimento.(tome p(ma) = 0.4; p(me)= 0.6. c
b) Faça uma análise de sensibilidade do problema que a boutique enfrenta.

Resposta:

a) RE(me) = 18 u.m; RE(pe) = 10 u.m. e RE(ne) = 0; decisão: construir estabelecimento de tamanho médio;
b) Se $p < 30$ não construir nada; se $0.30 \leq p \leq 0.5$ construir um estabelecimento de tamanho médio e se $p > 0.5$ construir estabelecimento de tamanho pequeno.

Exercício 5.10. Uma firma pretende comercializar o produto A. Para isso poderá optar pela sua importação ou fabricá-lo ela própria. Os lucros estimados (em milhares de unidades monetárias) dependem do nível da procura que se vier a registar e são dados no quadro seguinte:

Procura	fabrico	importação
Alta	180	100
Baixa	20	80

a) se a firma estimar em 0.7 e 0.3 as probabilidades da procura vir a ser alta e baixa, respectivamente, qual a decisão que deve ser tomada?.
b) Que decisão deverá ser tomada se o objectivo da empresa fosse minimizar o risco?.

Resposta:

a) RE(F) =132; RE(I) = 94; deverá fabricar o produto A;
b) Var(F) = 5376; Var(I) = 84; deverá importar o produto ª

Referência:

ANDRADE, EL(1998) – Introdução à Pesquisa Operacional – métodos e modelos para a Análise de decisão, 2ª edição, editora LTC, RJ, Brasil: cap8;

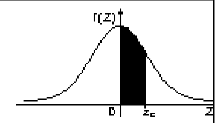
HARRISON, E. Frank (1995) – The managerial Decision Making Process, fourth Edition, USA.

MULENGA, A.C(1999) – Introdução ao processo decisório - UEM, Maputo.

RENDER, B; Ralph, M.S.Jr.(1997) – Quantitative Analysis for Management, 6th edition, Prentice – Hall International, Inc, USA: cap.2 e 3;

TAHA, H. A(1997 – Operations Research – an introduction, 6th edition, Prentice – Hall International, Inc, USA: cap.14.

Anexo 1. Valores da função de distribuição normal padrão (faixa central).
F (z) é uma função impar, portanto F (-z) = F (z).
Exemplo: F (-2,34) = - F (2.34) = - 0.4904, para z > 3.99 usar F (z) = 0.5



z_c	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,0000	0,0040	0,0080	0,0120	0,0160	0,0199	0,0239	0,0279	0,0319	0,0359
0,1	0,0398	0,0438	0,0478	0,0517	0,0557	0,0596	0,0636	0,0675	0,0714	0,0753
0,2	0,0793	0,0832	0,0871	0,0910	0,0948	0,0987	0,1026	0,1064	0,1103	0,1141
0,3	0,1179	0,1217	0,1255	0,1293	0,1331	0,1368	0,1406	0,1443	0,1480	0,1517
0,4	0,1554	0,1591	0,1628	0,1664	0,1700	0,1736	0,1772	0,1808	0,1844	0,1879
0,5	0,1915	0,1950	0,1985	0,2019	0,2054	0,2088	0,2123	0,2157	0,2190	0,2224
0,6	0,2257	0,2291	0,2324	0,2357	0,2389	0,2422	0,2454	0,2486	0,2517	0,2549
0,7	0,2580	0,2611	0,2642	0,2673	0,2704	0,2734	0,2764	0,2794	0,2823	0,2852
0,8	0,2881	0,2910	0,2939	0,2967	0,2995	0,3023	0,3051	0,3078	0,3106	0,3133
0,9	0,3159	0,3186	0,3212	0,3238	0,3264	0,3289	0,3315	0,3340	0,3365	0,3389
1,0	0,3413	0,3438	0,3461	0,3485	0,3508	0,3531	0,3554	0,3577	0,3599	0,3621
1,1	0,3643	0,3665	0,3686	0,3708	0,3729	0,3749	0,3770	0,3790	0,3810	0,3830
1,2	0,3849	0,3869	0,3888	0,3907	0,3925	0,3944	0,3962	0,3980	0,3997	0,4015
1,3	0,4032	0,4049	0,4066	0,4082	0,4099	0,4115	0,4131	0,4147	0,4162	0,4177
1,4	0,4192	0,4207	0,4222	0,4236	0,4251	0,4265	0,4279	0,4292	0,4306	0,4319
1,5	0,4332	0,4345	0,4357	0,4370	0,4382	0,4394	0,4406	0,4418	0,4429	0,4441
1,6	0,4452	0,4463	0,4474	0,4484	0,4495	*0,4505	0,4515	0,4525	0,4535	0,4545
1,7	0,4554	0,4564	0,4573	0,4582	0,4591	0,4599	0,4608	0,4616	0,4625	0,4633
1,8	0,4641	0,4649	0,4656	0,4664	0,4671	0,4678	0,4686	0,4693	0,4699	0,4706
1,9	0,4713	0,4719	0,4726	0,4732	0,4738	0,4744	0,4750	0,4756	0,4761	0,4767
2,0	0,4772	0,4778	0,4783	0,4788	0,4793	0,4798	0,4803	0,4808	0,4812	0,4817
2,1	0,4821	0,4826	0,4830	0,4834	0,4838	0,4842	0,4846	0,4850	0,4854	0,4857
2,2	0,4861	0,4864	0,4868	0,4871	0,4875	0,4878	0,4881	0,4884	0,4887	0,4890
2,3	0,4893	0,4896	0,4898	0,4901	0,4904	0,4906	0,4909	0,4911	0,4913	0,4916
2,4	0,4918	0,4920	0,4922	0,4925	0,4927	0,4929	0,4931	0,4932	0,4934	0,4936
2,5	0,4938	0,4940	0,4941	0,4943	0,4945	0,4946	0,4948	0,4949	0,4951	0,4952
2,6	0,4953	0,4955	0,4956	0,4957	0,4959	0,4960	0,4961	0,4962	0,4963	0,4964
2,7	0,4965	0,4966	0,4967	0,4968	0,4969	0,4970	0,4971	0,4972	0,4973	0,4974
2,8	0,4974	0,4975	0,4976	0,4977	0,4977	0,4978	0,4979	0,4979	0,4980	0,4981
2,9	0,4981	0,4982	0,4982	0,4983	0,4984	0,4984	0,4985	0,4985	0,4986	0,4986
3,0	0,4986	0,4987	0,4987	0,4988	0,4988	0,4989	0,4989	0,4989	0,4990	0,4990
3,1	0,4990	0,4991	0,4991	0,4991	0,4992	0,4992	0,4992	0,4992	0,4992	0,4993
3,2	0,4993	0,4993	0,4994	0,4994	0,4994	0,4994	0,4994	0,4994	0,4995	0,4995
3,3	0,4995	0,4995	0,4995	0,4996	0,4996	0,4996	0,4996	0,4996	0,4996	0,4996
3,4	0,4996	0,4997	0,4997	0,4997	0,4997	0,4997	0,4997	0,4997	0,4997	0,4997
3,5	0.4998	0.4998	0.4998	0.4998	0.4998	0.4998	0.4998	0.4998	0.4998	0.4998
3,6	0.4998	0.4998	0.4998	0.4998	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999
3,7	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999
3,8	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999
3,9	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999