Práctico 0
Álgebra II – Año 2024/1
FAMAF

Ejercicios resueltos

(1) Expresar los siguientes números complejos en la forma $a+ib$. Hallar el módulo y conjugado de cada uno de ellos, y graficarlos.

a) $(-1+i)(3-2i)$ *b)* $i^{131}-i^{9}+1$ *c)* $\frac{1+i}{1+2i}+\frac{1-i}{1-2i}$

Solución:

a) $(-1+i)(3-2i) = -3+3i+2i-2i^2 = -3+5i+2 = \boxed{-1+5i}$

$|(-1+i)(3-2i)| = |-1+5i| = \sqrt{(-1)^2+5^2} = \sqrt{1+25} = \boxed{\sqrt{26}}$

$\overline{(-1+i)(3-2i)} = \overline{-1+5i} = \boxed{-1-5i}$

b) $i^{131}-i^{9}+1 = i^{4\cdot 32+3}-i^{4\cdot 2+1}+1 = (i^4)^{32}\cdot i^3-(i^4)^2\cdot i^1+1 = i^3-i+1 = -i-i+1 = \boxed{1-2i}$

$|i^{131}-i^{9}+1| = |1-2i| = \sqrt{1^2+(-2)^2} = \sqrt{1+4} = \boxed{\sqrt{5}}$

$\overline{i^{131}-i^{9}+1} = \overline{1-2i} = \boxed{1+2i}$

c) $\dfrac{1+i}{1+2i}+\dfrac{1-i}{1-2i} = \dfrac{(1+i)(1-2i)+(1-i)(1+2i)}{1^2+2^2} = \dfrac{2Re(1-2i+i-2i^2)}{5} = \boxed{\dfrac{6}{5}}$

$$\left|\frac{1+i}{1+2i}+\frac{1-i}{1-2i}\right| = \left|\frac{6}{5}\right| = \boxed{\frac{6}{5}}$$

$$\overline{\frac{1+i}{1+2i}+\frac{1-i}{1-2i}} = \overline{\frac{6}{5}} = \boxed{\frac{6}{5}}$$

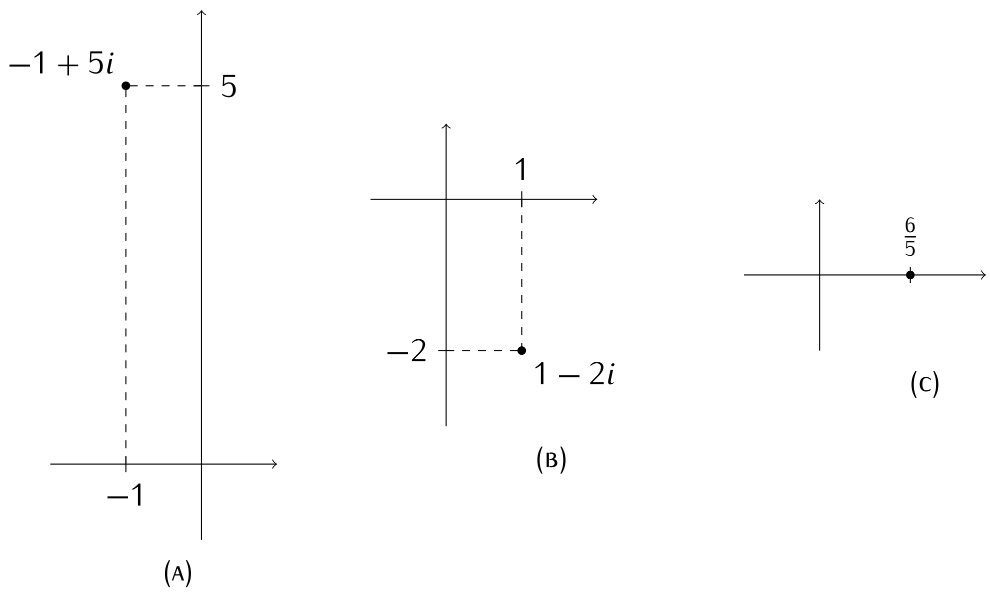

FIGURA 1. Ejercicio 1

(2) Encontrar números reales x e y tales que $3x + 2yi - xi + 5y = 7 + 5i$.

SOLUCIÓN: Sean $x, y \in \mathbb{R}$, separo las partes real e imaginaria de la ecuación y planteo un sistema de ecuaciones:

$$3x + 2yi - xi + 5y = 7 + 5i \implies \begin{cases} \operatorname{Re}(3x + 2yi - xi + 5y) &= \operatorname{Re}(7 + 5i) \\ \operatorname{Im}(3x + 2yi - xi + 5y) &= \operatorname{Im}(7 + 5i) \end{cases}$$

$$\implies \begin{cases} 3x + 5y &= 7 \\ 2y - x &= 5 \end{cases}$$

$$\begin{array}{rl|rl|l} 3(2y-5) + 5y & = 7 & 2 \cdot 2 - 5 & = x & \boxed{\begin{array}{ll} y & = 2 \\ x & = -1 \end{array}} \\ 6y - 15 + 5y & = 7 & -1 & = x & \\ 11y & = 22 & & & \\ y & = 2 & & & \end{array}$$

(3) Probar que si $z \in \mathbb{C}$ tiene módulo 1 entonces $z + z^{-1} \in \mathbb{R}$.

SOLUCIÓN: Sabemos que el inverso de z se puede escribir $z^{-1} = \frac{\overline{z}}{|z|^2}$. Como por hipótesis tenemos que $|z| = 1$, resulta $z^{-1} = \overline{z}$. Luego:

$$z + z^{-1} = z + \overline{z} = 2\operatorname{Re}(z) \in \mathbb{R}$$ □

(4) Probar que si $a \in \mathbb{R} \backslash \{0\}$ entonces el polinomio $x^2 + a^2$ tiene siempre dos raíces complejas distintas.

SOLUCIÓN: Se iguala a 0 el polinomio:

$$0 = x^2 + a^2 = x^2 - (ia)^2 = (x + ai)(x - ai) \implies \begin{cases} x_1 &= ai \\ x_2 &= -ai \end{cases}$$

Se tendrá $x_1 \neq x_2 \Leftrightarrow a \neq 0$.

(5) Simplificar las siguientes expresiones:

a) $\left(\dfrac{-3}{\frac{4}{5}+1}\right)^{-1} \cdot \left(\dfrac{4}{5} - 1\right) + \dfrac{1}{3}$, b) $\dfrac{a}{2\pi - 6}(\pi - 3)^2 - \dfrac{2a(\pi^2 - 9)}{\pi - 3}$.

Solución:

(6) Demostrar que dados z, z_1, z_2 en $\mathbb{C}$ se cumple:

$$|\bar{z}| = |z|, \qquad |z_1\, z_2| = |z_1|\,|z_2|.$$

Solución:

Si $z = a + bi$, entonces $\overline{z} = a - bi$. Luego:

$$|\bar{z}| = \sqrt{a^2 + (-b)^2} = \sqrt{a^2 + b^2} = |z|.$$

Si $z_1 = a + bi$, $z_2 = c + di$, entonces $z_1\, z_2 = (ac - bd) + (ad + bc)i$. Luego:

$$\begin{aligned} |z_1\, z_2| &= \sqrt{(ac - bd)^2 + (ad + bc)^2} \\ &= \sqrt{a^2c^2 - 2acbd + b^2d^2 + a^2d^2 + 2adbc + b^2c^2} \\ &= \sqrt{a^2c^2 + b^2d^2 + a^2d^2 + b^2c^2}. \end{aligned}$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned} |z_1|\,|z_2| &= \sqrt{a^2 + b^2}\,\sqrt{c^2 + d^2} \\ &= \sqrt{a^2c^2 + a^2d^2 + b^2c^2 + b^2d^2}, \end{aligned}$$

con lo que resulta que $|z_1\, z_2| = |z_1|\,|z_2|$.

(7) Sean $z = 1 + i$ y $w = \sqrt{2} - i$. Calcular:

a) z^{-1}; $1/w$; z/w; w/z.

b) $1 + z + z^2 + z^3 + \cdots + z^{2019}$.

c) $(z(z + w)^2 - iz)/w$.

Solución:

(8) Sumar y multiplicar los siguientes pares de números complejos

a) $2 + 3i$ y 4.

b) $2 + 3i$ y $4i$.
c) $1 + i$ y $1 - i$.
d) $3 - 2i$ y $1 + i$.

Solución:

(9) Expresar los siguientes números complejos en la forma $a + ib$. Hallar el módulo, argumento y conjugado de cada uno de ellos y graficarlos.

a) $2e^{i\pi} - i$, b) $i^3 - 2i^{-7} - 1$, c) $(-2 + i)(1 + 2i)$.

Solución:

(10) Sean $a, b \in \mathbb{C}$. Decidir si existe $z \in \mathbb{C}$ tal que:
a) $z^2 = b$. ¿Es único? ¿Para qué valores de b resulta z ser un número real?
b) z es imaginario puro y $z^2 = 4$.
c) z es imaginario puro y $z^2 = -4$.

Solución: