Álgebra y Álgebra II - Segundo Cuatrimestre 2018
Práctico 6 - Autovalores y Autovectores

(1) Hallar los autovalores, autovectores y autoespacios de la siguientes matrices A_i, $i = 1, \dots, 4$ y decidir si son semejantes o no a una matriz diagonal D_i, $i = 1, \dots, 4$. Cuando sí lo sean, dar una P_i tal que $D_i = P_i^{-1} A_i P_i$. Considerarlas primero como matrices reales y luego como complejas.

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad A_2 = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \qquad A_3 = \begin{bmatrix} -9 & 4 & 4 \\ -8 & 3 & 4 \\ -16 & 8 & 7 \end{bmatrix} \qquad A_4 = \begin{bmatrix} 6 & -3 & -2 \\ 4 & -1 & -2 \\ 10 & -5 & -3 \end{bmatrix}.$$

(2) Para cada una de las siguientes transformaciones lineales T hallar sus autovalores y para cada uno de ellos dar una base de autovectores del espacio propio asociado. Luego decir si la transformación considerada es o no diagonalizable.

(a) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $T(x, y) = (y, 0)$.

(b) $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$, $T(x, y, z, w) = (2x - y, x + 4y, z + 3w, z - w)$.

(c) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $T(x, y, z) = (x + 2z, z - x - y, x + 2y + z)$.

(d) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $T(x, y, z) = (4x + y + 5z, 4x - y + 3z, -12x + y - 11z)$.

(3) (a) Sea $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$. Probar que el término independiente del polinomio característico de A es $(-1)^n \det(A)$ y que el coeficiente de grado $(n - 1)$ es $-\operatorname{tr}(A)$.

(b) Concluir que si A es una matriz 2×2 entonces el polinomio característico de A es $x^2 - \operatorname{tr}(A)x + \det(A)$ y por lo tanto, si A no es invertible, entonces A tiene autovalores 0 y $\operatorname{tr}(A)$.

(4) Sea $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$. Probar que si $c_1, \dots, c_n$ son los autovalores de A (posiblemente repetidos), entonces $\det(A) = c_1 \dots c_n$ y $\operatorname{tr}(A) = c_1 + \cdots + c_n$.

(5) Probar que hay una única transformación lineal T de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^2$ tal que $(1, 1)$ es autovector de autovalor 2 y $(-2, 1)$ es autovector de autovalor 1. Calcular $\det(T)$ y dar la matriz de T en la base canónica de $\mathbb{R}^2$.