

Práctico 0
Álgebra II – Año 2024/1
FAMAF

Objetivos.

- Familiarizarse con los números complejos.
- Aprender a operar con números complejos (sumar, multiplicar, calcular inversos, conjugados y normas).

Ejercicios.

- (1) Expresar los siguientes números complejos en la forma $a + ib$. Hallar el módulo y conjugado de cada uno de ellos, y graficarlos.

a) $(-1 + i)(3 - 2i)$ b) $i^{131} - i^9 + 1$ c) $\frac{1+i}{1+2i} + \frac{1-i}{1-2i}$

- (2) Encontrar números reales x e y tales que $3x + 2yi - xi + 5y = 7 + 5i$

- (3) Probar que si $z \in \mathbb{C}$ tiene módulo 1 entonces $z + z^{-1} \in \mathbb{R}$.

- (4) Probar que si $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ entonces el polinomio $x^2 + a^2$ tiene siempre dos raíces complejas distintas.

- (5) Simplificar las siguientes expresiones:

a) $\left(\frac{-3}{\frac{4}{5} + 1}\right)^{-1} \cdot \left(\frac{4}{5} - 1\right) + \frac{1}{3},$ b) $\frac{a}{2\pi - 6}(\pi - 3)^2 - \frac{2a(\pi^2 - 9)}{\pi - 3}.$

- (6) Demostrar que dados z, z_1, z_2 en \mathbb{C} se cumple:

$$|\bar{z}| = |z|, \quad |z_1 z_2| = |z_1| |z_2|.$$

- (7) Sean $z = 1 + i$ y $w = \sqrt{2} - i$. Calcular:

- a) $z^{-1}; 1/w; z/w; w/z.$
b) $1 + z + z^2 + z^3 + \dots + z^{2019}.$
c) $(z(z + w)^2 - iz)/w.$

- (8) Sumar y multiplicar los siguientes pares de números complejos

- a) $2 + 3i$ y $4.$
b) $2 + 3i$ y $4i.$
c) $1 + i$ y $1 - i.$
d) $3 - 2i$ y $1 + i.$

- (9) Expresar los siguientes números complejos en la forma $a+ib$. Hallar el módulo, argumento y conjugado de cada uno de ellos y graficarlos.

a) $2e^{i\pi} - i$, b) $i^3 - 2i^{-7} - 1$, c) $(-2 + i)(1 + 2i)$.

- (10) Sean $a, b \in \mathbb{C}$. Decidir si existe $z \in \mathbb{C}$ tal que:

- a) $z^2 = b$. ¿Es único? ¿Para qué valores de b resulta z ser un número real?
 b) z es imaginario puro y $z^2 = 4$.
 c) z es imaginario puro y $z^2 = -4$.

Ejercicios de repaso. Si ya hizo los ejercicios anteriores continúe a la siguiente guía. Los ejercicios que siguen son similares a los anteriores y le pueden servir para practicar antes de los exámenes.

- (11) Expresar los siguientes números complejos en la forma $a+ib$. Hallar el módulo y conjugado de cada uno de ellos, y graficarlos.

(a) $(\cos \theta - i \sin \theta)^{-1}$, $0 \leq \theta < 2\pi$, (b) $3i(1 + i)^4$, (c) $\frac{1+i}{1-i}$

- (12) Sea $z = 2 + \frac{1}{2}i$, calcular

a) $\frac{(z+i)(z-i)}{z^2+1}$. b) $z - 2 + \frac{1}{z-2}$. c) $\left| \frac{1}{z-i} \right|^2$.

- (13) Sea $z \in \mathbb{C}$. Calcular $\frac{1}{z} + \frac{1}{\bar{z}} - \frac{1}{|z|^2}$.

- (14) (Desigualdad triangular) Sean w y z números complejos. Probar que

$$|w + z| \leq |w| + |z|,$$

y la igualdad se cumple si y sólo si $w = r \cdot z$ para algún número real $r \geq 0$.
 En general, sean z_1, z_2, \dots, z_n números complejos. Probar que

$$\left| \sum_{k=1}^n z_k \right| \leq \sum_{k=1}^n |z_k|.$$

- (15) Sean w y z números complejos. Entonces

$$||w| - |z|| \leq |w - z|.$$