Álgebra/Álgebra II
Clase 10 - Autovalores y autovectores

FAMAF / UNC

25 de abril de 2024

Resumen

En esta clase definiremos

Resumen

En esta clase definiremos

- autovalor

Resumen

En esta clase definiremos

- autovalor
- autovector

Resumen

En esta clase definiremos

- autovalor
- autovector
- polinomio característico

Resumen

En esta clase definiremos

- autovalor
- autovector
- polinomio característico

Y explicaremos como calcularlos.

Resumen

En esta clase definiremos

- autovalor
- autovector
- polinomio característico

Y explicaremos como calcularlos.

El tema de esta clase está contenido de la sección 3.6 del apunte de clase "Álgebra II / Álgebra - Notas del teórico".

Sea $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ y $v = (t_1, \ldots, t_n) \in \mathbb{K}^n$. Entonces, podemos ver a v como una matriz columna de $n \times 1$ y multiplicar A por v:

$$Av = A \begin{bmatrix} t_1 \\ \vdots \\ t_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}t_1 + \cdots + a_{1n}t_n \\ \vdots \\ a_{n1}t_1 + \cdots + a_{nn}t_n \end{bmatrix}.$$

Sea $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ y $v = (t_1, \dots, t_n) \in \mathbb{K}^n$. Entonces, podemos ver a v como una matriz columna de $n \times 1$ y multiplicar A por v:

$$Av = A \begin{bmatrix} t_1 \\ \vdots \\ t_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}t_1 + \cdots + a_{1n}t_n \\ \vdots \\ a_{n1}t_1 + \cdots + a_{nn}t_n \end{bmatrix}.$$

Mirada de esta forma la multiplicación de matrices es una operación que toma una matriz $n \times n$ y un vector de $\mathbb{K}^n$ y devuelve otro vector de $\mathbb{K}^n$ y es lo que llamaremos luego una *transformación lineal* de $\mathbb{K}^n$ en $\mathbb{K}^n$:

$$A(v + \lambda w) = Av + \lambda Aw, \quad \forall v, w \in \mathbb{K}^n, \lambda \in \mathbb{K},$$

(conmuta con la suma de vectores y la multiplicación por escalares).

Definición

Sea $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$. Se dice que $\lambda \in \mathbb{K}$ es un *autovalor* de A y si existe $v \in \mathbb{K}^n$ no nulo tal que

$$Av = \lambda v.$$

En ese caso decimos que v es un *autovector* asociado a λ

Definición

Sea $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$. Se dice que $\lambda \in \mathbb{K}$ es un *autovalor* de A y si existe $v \in \mathbb{K}^n$ no nulo tal que

$$Av = \lambda v.$$

En ese caso decimos que v es un *autovector* asociado a λ

Estudiar los autovalores y autovectores de una matriz es un problema fundamental en álgebra lineal y tiene aplicaciones en muchas áreas de la matemática y la física.

Definición

Sea $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$. Se dice que $\lambda \in \mathbb{K}$ es un *autovalor* de A y si existe $v \in \mathbb{K}^n$ no nulo tal que

$$Av = \lambda v.$$

En ese caso decimos que v es un *autovector* asociado a λ

Estudiar los autovalores y autovectores de una matriz es un problema fundamental en álgebra lineal y tiene aplicaciones en muchas áreas de la matemática y la física.

Ejemplo

1 es un autovalor de Id_n y todo $v \in \mathbb{K}^n$ es un autovector asociado a 1 pues

$$\mathrm{Id}_n v = v$$

Observación

El autovalor puede ser 0 pero el autovector *nunca* puede ser 0

Observación

El autovalor puede ser 0 pero el autovector *nunca* puede ser 0

Ejemplo

0 es un autovalor de $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ y $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ es un autovector asociado a 0 pues

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = 0 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Observación

La existencia de autovalores dependen del cuerpo donde estamos trabajando.

Observación

La existencia de autovalores dependen del cuerpo donde estamos trabajando.

Por ejemplo sea $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Entonces, A no tiene autovalores reales.

Observación

La existencia de autovalores dependen del cuerpo donde estamos trabajando.

Por ejemplo sea $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Entonces, A no tiene autovalores reales.

Veremos que si permitimos autovalores complejos entonces A sí tiene autovalores.

Observación

La existencia de autovalores dependen del cuerpo donde estamos trabajando.

Por ejemplo sea $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Entonces, A no tiene autovalores reales.

Veremos que si permitimos autovalores complejos entonces A sí tiene autovalores.

Etos resultados se verán en el ejemplo de la página 22.

Definición

Dado $i \in \{1, ..., n\}$, se denota e_i al vector de $\mathbb{K}^n$ cuyas coordenadas son todas ceros excepto la coordenada i que es un 1.

Definición

Dado $i \in \{1, \dots, n\}$, se denota e_i al vector de $\mathbb{K}^n$ cuyas coordenadas son todas ceros excepto la coordenada i que es un 1.

$$e_i = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

El conjunto $\{e_1, \dots, e_n\}$ se llama *base canónica* de $\mathbb{K}^n$.

Definición

Dado $i \in \{1, \ldots, n\}$, se denota e_i al vector de $\mathbb{K}^n$ cuyas coordenadas son todas ceros excepto la coordenada i que es un 1.

$$e_i = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

El conjunto $\{e_1, \ldots, e_n\}$ se llama *base canónica* de $\mathbb{K}^n$.

Ejemplo

En $\mathbb{K}^3$ la base canónica es $e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $e_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $e_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Ejemplo: Matriz diagonal

Sea $D \in \mathbb{K}^{n \times n}$ una matriz diagonal con entradas λ_1, λ_2, ..., λ_n.

Entonces e_i es un autovector con autovalor $\lambda_i \ \forall\, i \in \{1, ..., n\}$

Ejemplo: Matriz diagonal

Sea $D \in \mathbb{K}^{n\times n}$ una matriz diagonal con entradas λ_1, λ_2, ..., λ_n.

Entonces e_i es un autovector con autovalor λ_i $\forall\, i \in \{1, ..., n\}$

Demostración

Ejemplo: Matriz diagonal

Sea $D \in \mathbb{K}^{n\times n}$ una matriz diagonal con entradas λ_1, λ_2, ..., λ_n.

Entonces e_i es un autovector con autovalor λ_i $\forall\, i \in \{1, ..., n\}$

Demostración

Recordar que la multiplicación De_i se corresponde con multiplicar cada fila de e_i por el elemento correspondiente de la diagonal.

Como las filas (en este caso entradas) de e_i son todas nulas excepto un 1 en la entrada i queda queda

$$De_i = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ \lambda_i \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = \lambda_i e_i$$

Observación

- Puede haber varios autovectores con el mismo autovalor.

Observación

- Puede haber varios autovectores con el mismo autovalor.
- Vimos esto en el ejemplo con Id y en el caso de la diagonal si tiene entradas iguales sucede lo mismo.

Observación

- Puede haber varios autovectores con el mismo autovalor.
- Vimos esto en el ejemplo con Id y en el caso de la diagonal si tiene entradas iguales sucede lo mismo.
- Más aún el conjunto de todos los autovectores con un mismo autovalor es *invariante por la suma y la multiplicación por escalares.*

Observación

- Puede haber varios autovectores con el mismo autovalor.
- Vimos esto en el ejemplo con Id y en el caso de la diagonal si tiene entradas iguales sucede lo mismo.
- Más aún el conjunto de todos los autovectores con un mismo autovalor es *invariante por la suma y la multiplicación por escalares.*
- En particular los múltiplos de un autovector son autovectores con el mismo autovalor.

Definición

Sea $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ y $\lambda \in \mathbb{K}$ un autovalor de A. El *autoespacio* asociado a λ es

$$V_\lambda = \{v \in \mathbb{K}^n \mid Av = \lambda v\}.$$

Es decir, V_λ es el conjunto formado por todos los autovectores asociados a λ y el vector nulo.

Definición

Sea $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ y $\lambda \in \mathbb{K}$ un autovalor de A. El *autoespacio* asociado a λ es

$$V_\lambda = \{v \in \mathbb{K}^n \mid Av = \lambda v\}.$$

Es decir, V_λ es el conjunto formado por todos los autovectores asociados a λ y el vector nulo.

Teorema

Si v y w pertenecen al autoespacio de A asociado a λ, entonces $v + tw$ también pertenece a V_λ.

Definición

Sea $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ y $\lambda \in \mathbb{K}$ un autovalor de A. El *autoespacio* asociado a λ es

$$V_\lambda = \{v \in \mathbb{K}^n \mid Av = \lambda v\}.$$

Es decir, V_λ es el conjunto formado por todos los autovectores asociados a λ y el vector nulo.

Teorema

Si v y w pertenecen al autoespacio de A asociado a λ, entonces $v + tw$ también pertenece a V_λ.

Demostración

Definición

Sea $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ y $\lambda \in \mathbb{K}$ un autovalor de A. El *autoespacio* asociado a λ es

$$V_\lambda = \{v \in \mathbb{K}^n \mid Av = \lambda v\}.$$

Es decir, V_λ es el conjunto formado por todos los autovectores asociados a λ y el vector nulo.

Teorema

Si v y w pertenecen al autoespacio de A asociado a λ, entonces $v + tw$ también pertenece a V_λ.

Demostración

$$A(v + tw) = Av + tAw = \lambda v + t\lambda w = \lambda(v + tw).$$

$\square$

Proposición

Un autovector no puede tener dos autovalores distintos.

Proposición

Un autovector no puede tener dos autovalores distintos.

Por lo tanto, autovectores con autovalores distintos son distintos.

Proposición

Un autovector no puede tener dos autovalores distintos.

Por lo tanto, autovectores con autovalores distintos son distintos.

Demostración

Proposición

Un autovector no puede tener dos autovalores distintos.

Por lo tanto, autovectores con autovalores distintos son distintos.

Demostración

Supongamos que $Av = \lambda v$ y $Av = \mu v$. Entonces $\lambda v = \mu v$ y por lo tanto

$$(\lambda - \mu)v = \begin{bmatrix} (\lambda - \mu)v_1 \\ \vdots \\ (\lambda - \mu)v_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

Como $v \neq 0$ por ser autovector, alguna de sus coordenadas es no nula. Entonces $\lambda - \mu$ tiene que ser 0 o dicho de otro modo $\lambda = \mu$. □

Problema

Hallar los autovalores de $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ y para cada autovalor, describir explícitamente o paramétricamente el autoespacio asociado

Problema

Hallar los autovalores de $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ y para cada autovalor, describir explícitamente o paramétricamente el autoespacio asociado

- En otras palabras nos preguntamos que $\lambda \in \mathbb{K}$ y que $v \in \mathbb{K}^n$ satisfacen

$$Av = \lambda v \iff Av - \lambda v = 0 \iff (A - \lambda \,\mathrm{Id})v = 0.$$

Problema

Hallar los autovalores de $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ y para cada autovalor, describir explícitamente o paramétricamente el autoespacio asociado

- En otras palabras nos preguntamos que $\lambda \in \mathbb{K}$ y que $v \in \mathbb{K}^n$ satisfacen

$$Av = \lambda v \Longleftrightarrow Av - \lambda v = 0 \Longleftrightarrow (A - \lambda\,\mathrm{Id})v = 0.$$

- La última igualdad es un sistema de ecuaciones lineales. Queremos ver entonces si existe un $v \in \mathbb{K}^n$ no nulo que sea solución del sistema homogéneo

$$(A - \lambda\,\mathrm{Id})X = 0. \tag{*}$$

Problema

Hallar los autovalores de $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ y para cada autovalor, describir explícitamente o paramétricamente el autoespacio asociado

- En otras palabras nos preguntamos que $\lambda \in \mathbb{K}$ y que $v \in \mathbb{K}^n$ satisfacen

$$Av = \lambda v \iff Av - \lambda v = 0 \iff (A - \lambda \operatorname{Id})v = 0.$$

- La última igualdad es un sistema de ecuaciones lineales. Queremos ver entonces si existe un $v \in \mathbb{K}^n$ no nulo que sea solución del sistema homogéneo

$$(A - \lambda \operatorname{Id})X = 0. \tag{*}$$

- Un sistema $BX = 0$ tiene solución no trivial sii $\det(B) = 0$. Por lo tanto (*) tiene solución no trivial si y sólo si

$$\det(A - \lambda \operatorname{Id}) = 0.$$

Conclusión

$\lambda \in \mathbb{K}$ es un autovalor de A y $v \in \mathbb{K}^n$ es un autovector asociado a λ si y sólo si

- $\det(A - \lambda\,\mathrm{Id}) = 0$
- *v es solución del sistema homogéneo* $(A - \lambda\,\mathrm{Id})X = 0$

Conclusión

$\lambda \in \mathbb{K}$ es un autovalor de A y $v \in \mathbb{K}^n$ es un autovector asociado a λ si y sólo si

- $\det(A - \lambda\,\mathrm{Id}) = 0$
- *v es solución del sistema homogéneo* $(A - \lambda\,\mathrm{Id})X = 0$

Esta es casi la respuesta a nuestro problema. Para dar una respuesta más operativa introducimos el siguiente polinomio.

Definición

Sea $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$. El *polinomio característico* de A es

$$\chi_A(x) = \det(x\,\mathrm{Id} - A)$$

Definición

Sea $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$. El *polinomio característico* de A es

$$\chi_A(x) = \det(x\,\mathrm{Id} - A)$$

Ejemplo

El polinomio característico de Id_n es

$$\chi_{\mathrm{Id}_n}(x) = (x-1)^n$$

Definición

Sea $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$. El *polinomio característico* de A es

$$\chi_A(x) = \det(x\,\mathrm{Id} - A)$$

Ejemplo

El polinomio característico de Id_n es

$$\chi_{\mathrm{Id}_n}(x) = (x-1)^n$$

Demostración

Definición

Sea $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$. El *polinomio característico* de A es

$$\chi_A(x) = \det(x\,\mathrm{Id} - A)$$

Ejemplo

El polinomio característico de Id_n es

$$\chi_{\mathrm{Id}_n}(x) = (x - 1)^n$$

Demostración

$x\,\mathrm{Id} - \mathrm{Id} = (x - 1)\,\mathrm{Id}$ es una matriz diagonal con $(x - 1)$ en todas las entradas de la diagonal. Entonces el determinante es el producto de la diagonal. $\square$

En general, si $A = [a_{ij}]$ matriz $n \times n$, tenemos que

$$\chi_A(x) = \det(x\,Id - A) = \det \begin{bmatrix} x - a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & x - a_{22} & \cdots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & x - a_{nn} \end{bmatrix}$$

y el polinomio característico de A es un polinomio de grado n, En general, si $A = [a_{ij}]$ matriz $n \times n$, tenemos que

$$\chi_A(x) = \det(x\,Id - A) = \det \begin{bmatrix} x - a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & x - a_{22} & \cdots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & x - a_{nn} \end{bmatrix}$$

y el polinomio característico de A es un polinomio de grado n, más precisamente

$$\chi_A(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0.$$

Esto se puede demostrar por inducción.

Ejemplo

El polinomio característico de $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ es $\chi_A(x) = x^2$.

Ejemplo

El polinomio característico de $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ es $\chi_A(x) = x^2$.

Demostración

Ejemplo

El polinomio característico de $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ es $\chi_A(x) = x^2$.

Demostración

$x \operatorname{Id} - A = \begin{bmatrix} x & -1 \\ 0 & x \end{bmatrix}$ es triangular superior. Entonces el determinante es el producto de la diagonal. □

Ejemplo

Si $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, entonces $\chi_A(x) = (x - a)(x - d) - bc$.

Ejemplo

El polinomio característico de $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ es $\chi_A(x) = x^2$.

Demostración

$x \operatorname{Id} - A = \begin{bmatrix} x & -1 \\ 0 & x \end{bmatrix}$ es triangular superior. Entonces el determinante es el producto de la diagonal. $\square$

Ejemplo

Si $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, entonces $\chi_A(x) = (x-a)(x-d) - bc$.

Demostración

Ejemplo

El polinomio característico de $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ es $\chi_A(x) = x^2$.

Demostración

$x \operatorname{Id} - A = \begin{bmatrix} x & -1 \\ 0 & x \end{bmatrix}$ es triangular superior. Entonces el determinante es el producto de la diagonal. $\square$

Ejemplo

Si $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, entonces $\chi_A(x) = (x-a)(x-d) - bc$.

Demostración

$x \operatorname{Id} - A = \begin{bmatrix} x-a & -b \\ -c & x-d \end{bmatrix}$ y usamos la fórmula del determinante de una matriz 2×2. $\square$

Proposición

Sea $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$*. Entonces* $\lambda \in \mathbb{K}$ *es autovalor si y sólo si* λ *es raíz del polinomio característico.*

Proposición

Sea $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$. *Entonces* $\lambda \in \mathbb{K}$ *es autovalor si y sólo si* λ *es raíz del polinomio característico.*

Demostración

Proposición

Sea $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$. Entonces $\lambda \in \mathbb{K}$ es autovalor si y sólo si λ es raíz del polinomio característico.

Demostración

$$
\begin{aligned}
\lambda \text{ es autovalor} \quad &\Leftrightarrow \text{existe } v \neq 0 \text{ tal que } Av = \lambda v \\
&\Leftrightarrow 0 = \lambda v - Av = \lambda \operatorname{Id} v - Av = (\lambda \operatorname{Id} - A)v \\
&\Leftrightarrow (\lambda \operatorname{Id} - A)X = 0 \text{ tiene solución no trivial} \\
&\Leftrightarrow \chi_A(\lambda) = \det(\lambda \operatorname{Id} - A) = 0 \\
&\Leftrightarrow \lambda \text{ es raíz del polinomio característico.}
\end{aligned}
$$

□

Método para encontrar autovalores y autovectores de A

Método para encontrar autovalores y autovectores de A

1. Calcular $\chi_A(x) = \det(x\,\mathrm{Id} - A)$,

Método para encontrar autovalores y autovectores de A

1. Calcular $\chi_A(x) = \det(x \operatorname{Id} - A)$,
2. Encontrar las raíces $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ de $\chi_A(x)$.
   (no siempre se puede. No hay una fórmula o método general para encontrar las raíces de polinomios de grado 5 o superior).

Método para encontrar autovalores y autovectores de A

1. Calcular $\chi_A(x) = \det(x \operatorname{Id} - A)$,
2. Encontrar las raíces $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ de $\chi_A(x)$.
   (no siempre se puede. No hay una fórmula o método general para encontrar las raíces de polinomios de grado 5 o superior).
3. Para cada i con $1 \leq i \leq k$ resolver el sistema de ecuaciones lineales:

$$(\lambda_i \operatorname{Id} - A)X = 0.$$

   Las soluciones no triviales de este sistema son los autovectores con autovalor λ_i.

Ejemplo

Encontrar autovalores y autovectores de la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Ejemplo

Encontrar autovalores y autovectores de la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Solución

Ejemplo

Encontrar autovalores y autovectores de la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Solución

1. $\chi_A(x) = \det \begin{bmatrix} x-3 & 2 \\ -1 & x \end{bmatrix} = x^2 - 3x + 2 = (x-1)(x-2).$

Ejemplo

Encontrar autovalores y autovectores de la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Solución

1. $\chi_A(x) = \det \begin{bmatrix} x-3 & 2 \\ -1 & x \end{bmatrix} = x^2 - 3x + 2 = (x-1)(x-2).$
2. Los autovalores de A son las raíces de $\chi_A(x)$: 1 y 2.

Ejemplo

Encontrar autovalores y autovectores de la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Solución

1. $\chi_A(x) = \det \begin{bmatrix} x-3 & 2 \\ -1 & x \end{bmatrix} = x^2 - 3x + 2 = (x-1)(x-2).$
2. Los autovalores de A son las raíces de $\chi_A(x)$: 1 y 2.
3. Debemos resolver los sistemas de ecuaciones:

$$(A - \mathrm{Id})X = 0, \qquad (A - 2\,\mathrm{Id})X = 0.$$

Es decir, debemos resolver los sistemas

$$\begin{bmatrix} 3-1 & -2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \text{(S1)}$$

$$\begin{bmatrix} 3-2 & -2 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \text{(S2)}$$

Es decir, debemos resolver los sistemas

$$\begin{bmatrix} 3-1 & -2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \Rightarrow \qquad \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \text{(S1)}$$

$$\begin{bmatrix} 3-2 & -2 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \Rightarrow \qquad \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \text{(S2)}$$

(S1) $\begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{F_1-2F_2} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow x_1 - x_2 = 0 \Rightarrow (t, t)$ es solución.

(S2) $\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow{F_2-F_1} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow x_1 - 2x_2 = 0 \Rightarrow (2t, t)$ es solución.

Respuesta final

- Los autovalores de A son 1 y 2.

Respuesta final

- Los autovalores de A son 1 y 2.
- El auto espacio correspondiente al autovalor 1 es

$$V_1 = \{t(1,1) : t \in \mathbb{R}\}.$$

Respuesta final

- Los autovalores de A son 1 y 2.
- El auto espacio correspondiente al autovalor 1 es

$$V_1 = \{t(1,1) : t \in \mathbb{R}\}.$$

- El auto espacio correspondiente al autovalor 2 es

$$V_2 = \{t(2,1) : t \in \mathbb{R}\}.$$

$\square$

Ejemplo

Sea $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$.

1. Encontrar los autovalores y autovectores *reales* de A.
2. Encontrar los autovalores y autovectores *complejos* de A.

Ejemplo

Sea $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$.

1. Encontrar los autovalores y autovectores *reales* de A.
2. Encontrar los autovalores y autovectores *complejos* de A.

Solución

Ejemplo

Sea $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$.

1. Encontrar los autovalores y autovectores *reales* de A.
2. Encontrar los autovalores y autovectores *complejos* de A.

Solución

1. $x \operatorname{Id} - A = \begin{bmatrix} x & 1 \\ -1 & x \end{bmatrix}$, luego

$$\chi_A(x) = x^2 + 1.$$

El polinomio no tiene raíces reales, por lo tanto no existen autovalores reales (obviamente no hay autovectores).

2. En este caso, el polinomio característico se factoriza:

$$\chi_A(x) = x^2 + 1 = (x+i)(x-i),$$

y este polinomio *sí* tiene raíces (complejas): i y $-i$.

2. En este caso, el polinomio característico se factoriza:

$$\chi_A(x) = x^2 + 1 = (x + i)(x - i),$$

y este polinomio *sí* tiene raíces (complejas): i y $-i$.

En este caso, entonces, i y $-i$ son los autovalores y es fácil ver que

$$V_i = \{\omega(i, 1) : \omega \in \mathbb{C}\}, \qquad V_{-i} = \{\omega(-i, 1) : \omega \in \mathbb{C}\}.$$

Nunca está de más comprobar los resultados:

2. En este caso, el polinomio característico se factoriza:

$$\chi_A(x) = x^2 + 1 = (x + i)(x - i),$$

y este polinomio *sí* tiene raíces (complejas): i y $-i$.

En este caso, entonces, i y $-i$ son los autovalores y es fácil ver que

$$V_i = \{\omega(i, 1) : \omega \in \mathbb{C}\}, \qquad V_{-i} = \{\omega(-i, 1) : \omega \in \mathbb{C}\}.$$

Nunca está de más comprobar los resultados:

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ i \end{bmatrix} = i \begin{bmatrix} i \\ 1 \end{bmatrix}.$$

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -i \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -i \end{bmatrix} = (-i) \begin{bmatrix} -i \\ 1 \end{bmatrix}.$$