Álgebra/Álgebra II
Clase 19 - Espacios vectoriales 5

FAMAF / UNC

5 de noviembre de 2020

Resumen

Dado V espacio vectorial de dimensión finita, veremos

- la definición de dimensión,
- todo subconjunto LI puede se completado a una base,
- de todo subconjunto de generadores se puede extraer una base.

Veremos también la forma de encontrar bases de subespacios de $\mathbb{K}^n$. Se hará usando operaciones elementales de fila.

El tema de esta clase está contenido de la sección 3.3 y 3.4 del apunte de clase "Álgebra II / Álgebra - Notas del teórico".

Recordemos este importante resultado de la clase anterior:

Sea V un espacio vectorial y $T \subset V$, finito tal que $\langle T \rangle = V$. Sea $S \subset V$.

Entonces

$$\langle T \rangle = V, \quad S \text{ es LI } \Rightarrow |S| \leq |T|. \tag{P1}$$

El contrarrecíproco también nos resultará de utilidad

$$\langle T \rangle = V, \quad |S| > |T| \Rightarrow S \text{ es LD}. \tag{P2}$$

Corolario

Si V es un espacio vectorial de dimensión finita, entonces dos bases cualesquiera de V tienen el mismo número de elementos.

Demostración

V es de dimensión finita $\Rightarrow \exists\, \mathcal{B}$ base con $|\mathcal{B}| < \infty$.

Sea $\mathcal{B}'$ otra base de V.

Como $\mathcal{B}$ es base $\Rightarrow \langle \mathcal{B} \rangle = V$ y $\mathcal{B}'$ es LI $\overset{(P1)}{\Rightarrow} |\mathcal{B}'| \leq |\mathcal{B}|$.

Como $\mathcal{B}'$ es base $\Rightarrow \langle \mathcal{B}' \rangle = V$ y $\mathcal{B}$ es LI $\overset{(P1)}{\Rightarrow} |\mathcal{B}| \leq |\mathcal{B}'|$.

En consecuencia $|\mathcal{B}| = |\mathcal{B}'|$. $\square$

Hemos demostrado: si V es un espacio vectorial de dimensión finita y $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ dos bases de V, entonces $|\mathcal{B}| = |\mathcal{B}'|$.

Esto nos permite hacer la siguiente definición.

Definición

Sea V espacio vectorial de dimensión finita.

Diremos que n es *la dimensión de V* y denotaremos $\dim V = n$, si existe una base de V de n vectores.

Si $V = \{0\}$, entonces definimos $\dim V = 0$.

Ejemplos

Sean $m, n \in \mathbb{N}$.

(1) $\dim \mathbb{K}^n = n$, pues la base canónica tiene n elementos.

(2) $\dim M_{m\times n}(\mathbb{K}) = mn$, pues la base canónica de $M_{m\times n}(\mathbb{K})$ tiene mn elementos.

(3) $\dim \mathbb{K}_n[x] = n$, pues $1, x, x^2, \ldots, x^{n-1}$ es una base.

Corolario

Sea V un espacio vectorial de dimensión finita y sea $n = \dim V$. Entonces

(1) $S \subset V$ *y* $|S| > n \Rightarrow S$ *es LD.*

(2) $S \subset V$ *y* $|S| < n \Rightarrow \langle S \rangle \subsetneq V$.

Demostración

Sea $\mathcal{B}$ base de V.

(1) Como $\mathcal{B}$ es base $\Rightarrow \langle \mathcal{B} \rangle = V$ y $|S| > |\mathcal{B}| \overset{(P2)}{\Rightarrow} S$ es LD.

(2) Supongamos que $\langle S \rangle = V$.

Como $\mathcal{B}$ es base $\Rightarrow \mathcal{B}$ es LI.

$\langle S \rangle = V$ y $\mathcal{B}$ es LI $\overset{(P1)}{\Rightarrow} n = |\mathcal{B}| \leq |S|$. Absurdo.

□

Lema

Sea V espacio vectorial.

- *Sea $S \subset V$ y S es LI.*
- *Sea w tal que $w \notin \langle S \rangle$.*

Entonces $S \cup \{w\}$ es LI.

Demostración

Sean $v_1, \ldots, v_n$ vectores distintos de S y $\lambda_i, \lambda \in \mathbb{K}$ tales que

$$\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n + \lambda w = 0. \tag{1}$$

Debemos probar que $\lambda_i = 0$, $1 \leq i \leq n$, y $\lambda = 0$.

Supongamos que $\lambda \neq 0$, entonces podemos dividir la ecuación por λ y haciendo pasaje de término obtenemos

$$w = \left(-\frac{\lambda_1}{\lambda}\right) v_1 + \cdots \left(-\frac{\lambda_n}{\lambda}\right) v_n.$$

Luego w estaría en el subespacio generado por S, lo cual contradice la hipótesis.

Por lo tanto $\lambda = 0$ y, en consecuencia

$$\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n = 0.$$

Como S es un conjunto linealmente independiente, todo $\lambda_i = 0$.

$\square$

Teorema

Sea V espacio vectorial de dimensión finita n y S_0 un subconjunto LI de V. Entonces S_0 es finito y existen $w_1, \ldots, w_m$ vectores en V tal que $S_0 \cup \{w_1, \ldots, w_m\}$ es una base de V.

Corolario

Sea W un subespacio de un espacio vectorial con de dimensión finita n y S_0 un subconjunto LI de W. Entonces, S_0 se puede completar a una base de W.

Corolario

Sea V espacio vectorial de dimensión finita y $V \neq \{0\}$, entonces $\dim V > 0$.

Corolario

Si W es un subespacio propio de un espacio vectorial de dimensión finita V, entonces W es de dimensión finita y $\dim W < \dim V$.

Demostración

Si $W = \{0\}$, entonces $\dim W = 0$, como $W \subsetneq V$, tenemos que V es no nulo y por lo tanto $\dim W = 0 < \dim V$.

Si $W \neq \{0\}$, sea $\mathcal{B}'$ base de W.
Si $\langle \mathcal{B}' \rangle = V$, entonces $W = V$, absurdo. Luego $\langle \mathcal{B}' \rangle \neq V \Rightarrow$ existen $w_1, \dots, w_r$ que completan a una base de $V \Rightarrow$
$\dim(W) = \dim(V) - r < \dim(V)$.

□

Hemos visto que si V es un espacio de dimensión finita, entonces todo conjunto LI se puede extender a una base. También vale:

Teorema

Sea $V \neq 0$ espacio vectorial y S un conjunto finito de generadores de V, entonces existe un subconjunto $\mathcal{B}$ de S que es una base.

El siguiente resultado relaciona dimensión con suma e intersección de subespacios.

Teorema

Si W_1, y W_2 son subespacios de dimensión finita de un espacio vectorial, entonces $W_1 + W_2$ es de dimensión finita y

$$\dim(W_1 + W_2) = \dim W_1 + \dim W_2 - \dim(W_1 \cap W_2).$$

Dimensiones de subespacios

- Si A matriz $m \times n$, en donces $W = \{x : Ax = 0\}$ es un subespacio.
- ¿Cuál es la dimensión de W? ¿Qué relación tiene con R, la MRF equivalente a A?
- Veremos que si r es la cantidad de filas no nulas de R, entonces $\dim(W) = n - r$.

Ejemplo

Encontrar una base del subespacio

$$W = \left\{ (x, y, z, w) \in \mathbb{R} : \quad \begin{array}{rcl} x - y - 3z + \ \ w & = & 0 \\ y + 5z + 3w & = & 0 \end{array} \right\}.$$

Solución

W está definido implícitamente y usando el método de Gauss podemos describirlo paramétricamente, pues:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 5 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{F_1+F_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 5 & 3 \end{bmatrix}.$$

Por lo tanto, el sistema de ecuaciones que define W es equivalente a

$$\begin{aligned} x + 2z + 4w &= 0 \\ y + 5z + 3w &= 0, \end{aligned}$$

es decir

$$\begin{aligned} x &= -2z - 4w \\ y &= -5z - 3w, \end{aligned}$$

y entonces

$$\begin{aligned} W &= \{(-2z - 4w, -5z - 3w, z, w) : z, w \in \mathbb{R}\} \\ &= \{(-2, -5, 1, 0)z + (-4, -3, 0, 1)w : z, w \in \mathbb{R}\} \\ &= \langle (-2, -5, 1, 0), (-4, -3, 0, 1) \rangle. \end{aligned}$$

Concluimos entonces que $(-2, -5, 1, 0), (-4, -3, 0, 1)$ es una base de W y, por lo tanto, su dimensión es 2. $\square$

Proposición

Sea A matriz $m \times n$ y sea $W = \{x : Ax = 0\}$.

Sea R una MRF equivalentes por filas a A y sea r la cantidad de filas no nulas de R.

Entonces $\dim(W) = n - r$.

Demostración

Es posible hacer este demostración con las herramientas actuales. Sin embargo, haremos una demostración mucho más conceptual de este hecho cuando veamos transformaciones lineales. $\square$

Definición

Sea $A = [a_{ij}] \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$.

- El *vector fila i* es el vector $(a_{i1}, \dots, a_{in}) \in \mathbb{K}^n$.
- El *espacio fila* de A es el subespacio de $\mathbb{K}^n$ generado por los m vectores fila de A.
- El vector columna j es el vector $(a_{1j}, \dots, a_{mj}) \in \mathbb{K}^m$.
- El *espacio columna* de A es el subespacio de $\mathbb{K}^m$ generado por los n vectores columna de A

Ejemplo

Sea

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

El vector fila 1 es $(1, 2, 0, 3, 0)$, el vector columna 4 es $(3, 4, 0)$, etc.

Sea W el espacio fila de A. entonces

$$W = \langle (1, 2, 0, 3, 0), (0, 0, 1, 4, 0), (0, 0, 0, 0, 1) \rangle$$

Sea U el espacio columna de A. Entonces:

$$U = \langle (1, 0, 0), (2, 0, 0), (0, 1, 0), (3, 4, 0), (0, 0, 1) \rangle = \mathbb{R}^3.$$

Teorema

Sean A matriz $m \times n$ con coeficientes en $\mathbb{K}$, P matriz $m \times m$ invertible y $B = PA$. Entonces el el espacio fila de A es igual al espacio fila de B.

Demostración

Sea W_1 espacio fila de A y W_2 espacio fila de B.

Sea $A = [a_{ij}]$, $P = [p_{ij}]$ y $B = [b_{ij}]$. Como $B = PA$, tenemos que la fila i de B es

$$\begin{aligned}
(b_{i1}, \ldots, b_{in}) &= (F_i(P).C_1(A), \ldots, F_i(P).C_n(A)) \\
&= (\sum_{j=1}^{m} p_{ij} a_{j1}, \ldots, \sum_{j=1}^{m} p_{ij} a_{jn}) \\
&= \sum_{j=1}^{m} p_{ij} (a_{j1}, \ldots, a_{jn}). \qquad (*)
\end{aligned}$$

- por (*) cada vector fila de B se puede obtener como combinación lineal de los vectores fila de A.
- Por lo tanto el espacio fila de B está incluido en el espacio fila de A: $W_2 \subset W_1$.
- P invertible $\Rightarrow \exists P^{-1}$.
- $P^{-1}B = P^{-1}PA = A$.
- Un razonamiento análogo al (*) de la página anterior $\Rightarrow$ espacio fila de A está incluido en el espacio fila de B: $W_1 \subset W_2$.

$$W_2 \subset W_1 \quad \wedge \quad W_1 \subset W_2 \qquad \Rightarrow \qquad W_1 = W_2. \quad \square$$

Corolario

Sean A matriz $m \times n$ y R la MRF equivalente por filas a A. Entonces,

(1) el espacio fila de A es igual al espacio fila de R,

(2) las filas no nulas de R forman una base del espacio fila de A.

Demostración

(1) R la MRF equivalente por filas a $A \Rightarrow R = PA$ con P invertible $\overset{Teor.ant.}{\Rightarrow}$ espacio fila de A = espacio fila de B.

(2) R es MRF $\Rightarrow$ cada fila no nula comienza con un 1 y en esa coordenada todas las demás filas tienen un 0 $\Rightarrow$ las filas no nulas de R son LI $\Rightarrow$ las filas no nulas de R son base.

$\square$

Corolario

Sean A matriz $n \times n$. Entonces, A es invertible si y sólo si las filas de A son una base de $\mathbb{K}^n$.

Demostración

Si A es invertible entonces la MERF de A es la identidad, por lo tanto el espacio fila de A genera $\mathbb{K}^n$.

Por otro lado, si el espacio fila de A genera $\mathbb{K}^n$, el espacio fila de la MERF es $\mathbb{K}^n$ y por lo tanto la MERF de A es la identidad y en consecuencia A es invertible.

Hemos probado que A es invertible si y sólo si las n filas de A generan $\mathbb{K}^n$.

Como $\dim \mathbb{K}^n = n$, todo conjunto de n generadores es una base. $\square$

Bases de subespacios

El corolario de la p. 21 nos permite encontrar fácilmente la dimensión de un subespacio de $\mathbb{K}^n$ generado explícitamente por m vectores.

- Sea $v_1, \ldots, v_m \in \mathbb{K}^n$ y $W = \langle v_1, \ldots, v_m \rangle$,
- Consideramos la matriz

$$A = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_m \end{bmatrix}$$

- Calculamos R, una MRF equivalente por filas a A.
- $W =$ espacio fila de R.
- Si R tiene r filas no nulas, las r filas no nulas son una base de W.
- Por consiguiente, $\dim W = r$.

Ejemplo

Encontrar una base de $W = \langle (1,0,1),(1,-1,0),(5,-3,2)\rangle$.

Solución

Formemos la matriz cuyas filas son los vectores que generan W, es decir

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 5 & -3 & 2 \end{bmatrix}.$$

Entonces

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 5 & -3 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow[F_3-5F_1]{F_2-F_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & -3 & -3 \end{bmatrix} \xrightarrow{-F_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & -3 \end{bmatrix} \xrightarrow{F_3-3F_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Por lo tanto, $\dim W = 2$ y $(1,0,1),(0,1,1)$ es una base de W. $\square$

Subconjuntos LI de un sistema de generadores

- Dada un conjunto de generadores de un subespacio W de $\mathbb{K}^n$ "sabemos" encontrar una base de W.

- Esa base de W, en general, utiliza otros vectores (no necesariamente los generadores).

- Veremos a continuación que dado $S = \{v_1, \ldots, v_m\}$ y $W = \langle S \rangle$, podemos encontrar fácilmente un subconjunto de S base de W.

Teorema

Sea $v_1, \ldots, v_r$ *vectores en* $\mathbb{K}^n$ *y* $W = \langle v_1, \ldots, v_r \rangle$.

Sea A *la matriz formada por las filas* $v_1, \ldots, v_r$ *y* R *una MRF equivalente por filas a* A *que se obtiene* ***sin*** *el uso de permutaciones de filas.*

Si $i_1, i_2, \ldots, i_s$ *filas no nulas de* $R \Rightarrow v_{i_1}, v_{i_2}, \ldots, v_{i_s}$ *base de* W.

Demostración

Se hará por inducción sobre r.

Si $r = 1$ es trivial ver que vale la afirmación.

Supongamos que tenemos el resultado probado para $r - 1$ (hipótesis inductiva).

Sea $W' = \langle v_1, \ldots, v_{r-1} \rangle$ y sea A' la matriz formada por las $r-1$ filas $v_1, \ldots, v_{r-1}$. Sea R' la MRF equivalente por filas a A' que se obtiene sin usar permutaciones de filas. Por hipótesis inductiva, si $i_1, i_2, \ldots, i_s$ son las filas no nulas de R', entonces $v_{i_1}, v_{i_2}, \ldots, v_{i_s}$ es una base de W'.
Sea

$$R_0 = \begin{bmatrix} R' \\ v_r \end{bmatrix}.$$

Si $v_r \in W'$, entonces $v_{i_1}, v_{i_2}, \ldots, v_{i_s}$ es una base de W y

$$R = \begin{bmatrix} R' \\ 0 \end{bmatrix}$$

es la MRF de A.
Si $v_r \notin W'$, entonces $v_{i_1}, v_{i_2}, \ldots, v_{i_s}, v_r$ es una base de W y la MRF de A tiene la última fila no nula. $\square$

Finalmente, terminaremos la clase con un teorema que resume algunas equivalencias respecto a matrices invertibles.

Teorema

Sea A matriz $n \times n$ con coeficientes en $\mathbb{K}$. Entonces son equivalentes

(1) *A es invertible.*

(2) *A es equivalente por filas a Id_n.*

(3) *A es producto de matrices elementales.*

(4) *El sistema $AX = Y$ tiene una única solución para toda matriz Y de orden $n \times 1$.*

(5) *El sistema homogéneo $AX = 0$ tiene una única solución trivial.*

(6) $\det A \neq 0$.

(7) *Las filas de A son LI.*

(8) *Las columnas de A son LI.*