Práctico 0
Álgebra II – Año 2024/1
FAMAF

Ejercicios resueltos

(1) Expresar los siguientes números complejos en la forma $a + ib$. Hallar el módulo y conjugado de cada uno de ellos, y graficarlos.

a) $(-1+i)(3-2i)$ *b)* $i^{131} - i^9 + 1$ *c)* $\frac{1+i}{1+2i} + \frac{1-i}{1-2i}$

Solución:

a) $(-1+i)(3-2i) = -3+3i+2i-2i^2 = -3+5i+2 = \boxed{-1+5i}$

$|(-1+i)(3-2i)| = |-1+5i| = \sqrt{(-1)^2+5^2} = \sqrt{1+25} = \boxed{\sqrt{26}}$

$\overline{(-1+i)(3-2i)} = \overline{-1+5i} = \boxed{-1-5i}$

b) $i^{131} - i^9 + 1 = i^{4\cdot 32+3} - i^{4\cdot 2+1} + 1 = (i^4)^{32}\cdot i^3 - (i^4)^2 \cdot i^1 + 1 = i^3 - i + 1 = -i - i + 1 = \boxed{1-2i}$

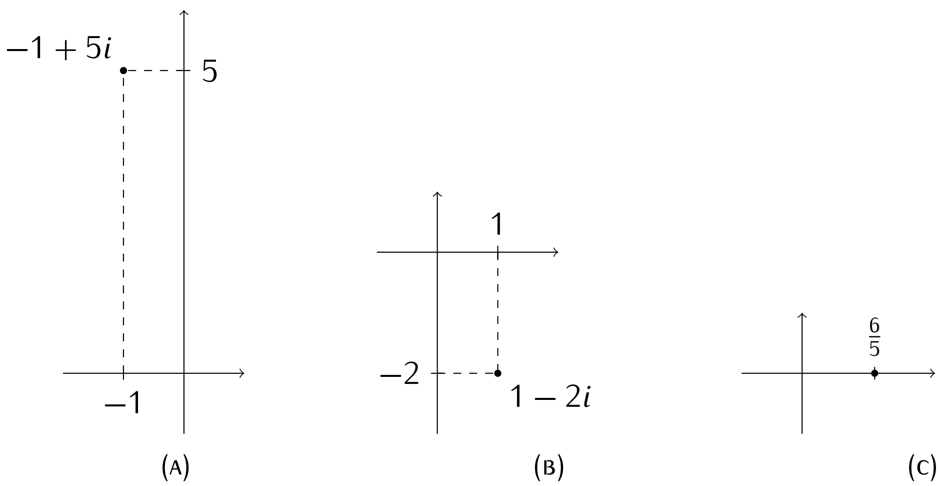
$|i^{131} - i^9 + 1| = |1-2i| = \sqrt{1^2+(-2)^2} = \sqrt{1+4} = \boxed{\sqrt{5}}$

$\overline{i^{131} - i^9 + 1} = \overline{1-2i} = \boxed{1+2i}$

c) $\dfrac{1+i}{1+2i} + \dfrac{1-i}{1-2i} = \dfrac{(1+i)(1-2i)+(1-i)(1+2i)}{1^2+2^2} = \dfrac{2Re(1-2i+i-2i^2)}{5} = \boxed{\dfrac{6}{5}}$

$\left|\dfrac{1+i}{1+2i} + \dfrac{1-i}{1-2i}\right| = \left|\dfrac{6}{5}\right| = \boxed{\dfrac{6}{5}}$

$\overline{\dfrac{1+i}{1+2i} + \dfrac{1-i}{1-2i}} = \overline{\dfrac{6}{5}} = \boxed{\dfrac{6}{5}}$ □



(A) (B) (C)

Figura 1. Ejercicio 1

(2) Encontrar números reales x e y tales que $3x + 2yi - xi + 5y = 7 + 5i$

Solución: Sean $x, y \in \mathbb{R}$, separo las partes real e imaginaria de la ecuación y planteo un sistema de ecuaciones:

$$3x + 2yi - xi + 5y = 7 + 5i \implies \begin{cases} \mathrm{Re}(3x + 2yi - xi + 5y) &= \mathrm{Re}(7 + 5i) \\ \mathrm{Im}(3x + 2yi - xi + 5y) &= \mathrm{Im}(7 + 5i) \end{cases}$$
$$\implies \begin{cases} 3x + 5y &= 7 \\ 2y - x &= 5 \end{cases}$$

$$\begin{array}{rl|rl|l} 3(2y-5) + 5y &= 7 & 2 \cdot 2 - 5 &= x & \\ 6y - 15 + 5y &= 7 & -1 &= x & \boxed{\begin{array}{ll} y &= 2 \\ x &= -1 \end{array}} \\ 11y &= 22 & & & \\ y &= 2 & & & \end{array}$$

□

(3) Probar que si $z \in \mathbb{C}$ tiene módulo 1 entonces $z + z^{-1} \in \mathbb{R}$.

Solución: Sabemos que el inverso de z se puede escribir $z^{-1} = \frac{\overline{z}}{|z|^2}$. Como por hipótesis tenemos que $|z| = 1$, resulta $z^{-1} = \overline{z}$. Luego:

$z + z^{-1} = z + \overline{z} = 2\,\mathrm{Re}(z) \in \mathbb{R}$ □

(4) Probar que si $a \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ entonces el polinomio $x^2 + a^2$ tiene siempre dos raíces complejas distintas.

Solución: Se iguala a 0 el polinomio:

$$0 = x^2 + a^2 = x^2 - (ia)^2 = (x + ai)(x - ai) \implies \begin{cases} x_1 &= ai \\ x_2 &= -ai \end{cases}$$

Se tendrá $x_1 \neq x_2 \Leftrightarrow a \neq 0$. □

(5) Demostrar que dados z, z_1, z_2 en $\mathbb{C}$ se cumple:

$$|\bar{z}| = |z|, \qquad |z_1\, z_2| = |z_1|\,|z_2|.$$

Solución:

Si $z = a + bi$, entonces $\overline{z} = a - bi$. Luego:

$$|\bar{z}| = \sqrt{a^2 + (-b)^2} = \sqrt{a^2 + b^2} = |z|.$$

Si $z_1 = a + bi$, $z_2 = c + di$, entonces $z_1\, z_2 = (ac - bd) + (ad + bc)i$. Luego:

$$\begin{aligned} |z_1\, z_2| &= \sqrt{(ac - bd)^2 + (ad + bc)^2} \\ &= \sqrt{a^2c^2 - 2acbd + b^2d^2 + a^2d^2 + 2adbc + b^2c^2} \\ &= \sqrt{a^2c^2 + b^2d^2 + a^2d^2 + b^2c^2}. \end{aligned}$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned} |z_1|\,|z_2| &= \sqrt{a^2 + b^2}\,\sqrt{c^2 + d^2} \\ &= \sqrt{a^2c^2 + a^2d^2 + b^2c^2 + b^2d^2}, \end{aligned}$$

con lo que resulta que $|z_1\, z_2| = |z_1|\,|z_2|$. □

(6) Sean $z = 1 + i$ y $w = \sqrt{2} - i$. Calcular:

a) z^{-1}; $1/w$; z/w; w/z.

b) $1 + z + z^2 + z^3 + \cdots + z^{2019}$.

c) $(z(z+w)^2 - iz)/w$.

Solución:

a)

$$\begin{aligned} z^{-1} &= \frac{\overline{z}}{|z|^2} = \frac{1-i}{2}, \\ \frac{1}{w} &= \frac{1}{\sqrt{2}-i} = \frac{\sqrt{2}+i}{(\sqrt{2}-i)(\sqrt{2}+i)} = \frac{\sqrt{2}+i}{3}, \\ \frac{z}{w} &= \frac{1+i}{\sqrt{2}-i} = \frac{(1+i)(\sqrt{2}+i)}{3} = \frac{\sqrt{2}+1+i(\sqrt{2}+1)}{3}, \\ \frac{w}{z} &= \frac{\sqrt{2}-i}{1+i} = \frac{(\sqrt{2}-i)(1-i)}{2} = \frac{\sqrt{2}-1-i(\sqrt{2}+1)}{2}. \end{aligned}$$

b) Por un lado

$$1 + z + z^2 + z^3 + \cdots + z^{2019} = \frac{1-z^{2020}}{1-z} = \frac{1-(1+i)^{2020}}{-i} = i(1-z^{2020}).$$

Por otro lado, tenemos que $1+i = \sqrt{2}e^{i\pi/4}$, luego $z = \sqrt{2}e^{i\pi/4}$, y por lo tanto $z^{2020} = 2^{1010}e^{i1010\pi/4} = 2^{1010}e^{i252\pi} = 2^{1010}e^{i0} = 2^{1010}$.

Por lo tanto,

$$1 + z + z^2 + z^3 + \cdots + z^{2019} = i(1-z^{2020}) = i(1-2^{1010}).$$

c) Primero calculemos el numerador por partes:

$$\begin{aligned} z(z+w)^2 &= (1+i)(1+i+\sqrt{2}-i)^2 = (1+i)(1+\sqrt{2})^2 \\ &= (1+i)(1+2\sqrt{2}+2) = (1+i)(3+2\sqrt{2}) \\ &= 3+2\sqrt{2}+3i+2i\sqrt{2}. \end{aligned}$$

Luego,

$$\begin{aligned} z(z+w)^2 - iz &= 3+2\sqrt{2}+3i+2i\sqrt{2} - i(1+i) \\ &= 3+2\sqrt{2}+3i+2i\sqrt{2} - i - i^2 \\ &= 3+2\sqrt{2}+3i+2i\sqrt{2} - i + 1 \\ &= 4+2\sqrt{2}+2i+2i\sqrt{2}. \end{aligned}$$

Dividir por w es multiplicar por $\overline{w}/|w|^2 = \dfrac{\sqrt{2}+i}{3}$, y por lo tanto,

$$\begin{aligned} \frac{z(z+w)^2 - iz}{w} &= \frac{(4+2\sqrt{2}+2i+2i\sqrt{2})(\sqrt{2}+i)}{3} \\ &= \frac{4\sqrt{2}+4+2\sqrt{2}+2i\sqrt{2}+2\sqrt{2}+2i-2+2\sqrt{2}i+2i^2}{3} \\ &= \frac{6\sqrt{2}+4+4i}{3}. \end{aligned}$$

□

(7) Sumar y multiplicar los siguientes pares de números complejos

a) $2+3i$ y 4.
b) $2+3i$ y $4i$.
c) $1+i$ y $1-i$.
d) $3-2i$ y $1+i$.

Solución: *a)*

$$\begin{aligned} 2+3i+4 &= 6+3i, \\ (2+3i)\cdot 4 &= 8+12i. \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} 2+3i+4i &= 2+7i, \\ (2+3i)\cdot 4i &= -12+8i. \end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned} 1+i+1-i &= 2, \\ (1+i)\cdot(1-i) &= 1-i+i-i^2 = 1+1 = 2. \end{aligned}$$

d)

$$\begin{aligned} 3-2i+1+i &= 4-i, \\ (3-2i)\cdot(1+i) &= 3-2i+3i-2i^2 = 5+i. \end{aligned}$$

□

(8) Expresar los siguientes números complejos en la forma $a+ib$. Hallar el módulo, argumento y conjugado de cada uno de ellos y graficarlos.

a) $2e^{i\pi}-i$, *b)* $i^3-2i^{-7}-1$, *c)* $(-2+i)(1+2i)$.

Solución:

a)

$$\begin{aligned} 2e^{i\pi}-i &= 2(\cos(\pi)+i\sin(\pi))-i = 2(-1)-i = -2-i, \\ |2e^{i\pi}-i| &= \sqrt{(-2)^2+(-1)^2} = \sqrt{4+1} = \sqrt{5}, \\ \overline{2e^{i\pi}-i} &= -2+i. \end{aligned}$$

Faltaría calcular el argumento. Debemos calcular θ tal que

$$-2-i = \sqrt{5}(\cos(\theta)+i\sin(\theta)).$$

Por un lado, $|-2-i| = \sqrt{5}$, y por otro lado, $-2/\sqrt{5} = \cos(\theta)$ y $-1/\sqrt{5} = \sin(\theta)$. Luego, $\theta = \arctan(-1/-2) = \arctan(1/2)$.

b) Como $(-i)\cdot i = 1$, tenemos que $i^{-1} = -i$. Luego, $i^{-7} = (-i)^7 = -i^7 = -i^4\cdot i^3 = -i^3 = -i\cdot i^2 = i$.

$$\begin{aligned} i^3-2i^{-7}-1 &= -i-2i+1 = 1-3i, \\ |i^3-2i^{-7}-1| &= \sqrt{1^2+(-3)^2} = \sqrt{1+9} = \sqrt{10}, \\ \overline{i^3-2i^{-7}-1} &= 1+3i. \end{aligned}$$

Faltaría calcular el argumento. Debemos calcular θ tal que

$$1 - 3i = \sqrt{10}(\cos(\theta) + i\sin(\theta)).$$

Por un lado, $|1-3i| = \sqrt{10}$, y por otro lado, $1/\sqrt{10} = \cos(\theta)$ y $-3/\sqrt{10} = \sin(\theta)$. Luego, $\theta = \arctan(-3/1) = \arctan(-3)$.

c)

$$\begin{aligned}
(-2+i)(1+2i) &= -2 + i - 4i - 2 = -4 - 3i \\
|(-2+i)(1+2i)| &= \sqrt{(-4)^2 + (-3)^2} = \sqrt{16+9} = \sqrt{25} = 5, \\
\overline{(-2+i)(1+2i)} &= -4 + 3i.
\end{aligned}$$

Faltaría calcular el argumento. Debemos calcular θ tal que

$$-4 - 3i = 5(\cos(\theta) + i\sin(\theta)).$$

Por un lado, $|-4-3i| = 5$, y por otro lado, $-4/5 = \cos(\theta)$ y $-3/5 = \sin(\theta)$. Luego, $\theta = \arctan(-3/-4) = \arctan(3/4)$.

□

(9) Sean $a, b \in \mathbb{C}$. Decidir si existe $z \in \mathbb{C}$ tal que:
a) $z^2 = b$. ¿Es único? ¿Para qué valores de b resulta z ser un número real?
b) z es imaginario puro y $z^2 = 4$.
c) z es imaginario puro y $z^2 = -4$.

Solución:

a) Si $b = 0$, entonces $z = 0$ es la única solución. Si $b \neq 0$, usaremos la forma polar de b. Si $b = re^{i\theta}$ con $r \neq 0$, entonces $z = \pm\sqrt{r}e^{i\theta/2}$ son los dos valores posible de z tal que $z^2 = b$. Ahora bien, $z \in \mathbb{R}$ si y solo si $e^{i\theta/2} \in \mathbb{R}$ si y solo si $\theta/2 \in \{0, \pi\} + 2\pi\mathbb{Z}$ si y solo si $\theta \in \{0, 2\pi\} + 4\pi\mathbb{Z}$. Como wl argumento de b es θ, concluimos que $z \in \mathbb{R}$ si y solo si el argumento de b es un múltiplo entero de 2π, es decir si b es real positivo.

b) Si z es imaginario puro, entonces $z = ia$ para algún $a \in \mathbb{R}$. Luego, $z^2 = -a^2 = 4$, y por lo tanto $a^2 = -4$, lo que no tiene solución en $\mathbb{R}$.

c) Si z es imaginario puro, entonces $z = ia$ para algún $a \in \mathbb{R}$. Luego, $z^2 = -a^2 = -4$, y por lo tanto $a^2 = 4$, lo que tiene solución en $\mathbb{R}$, a saber, $a = \pm 2$.

□