Álgebra/Álgebra II
Clase 10 - Autovalores y autovectores

FAMAF / UNC

25 de abril de 2024

Resumen

En esta clase definiremos

- autovalor
- autovector
- polinomio característico

Y explicaremos como calcularlos.

El tema de esta clase está contenido de la sección 3.6 del apunte de clase "Álgebra II / Álgebra - Notas del teórico".

Sea $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ y $v = (t_1, \ldots, t_n) \in \mathbb{K}^n$. Entonces, podemos ver a v como una matriz columna de $n \times 1$ y multiplicar A por v:

$$Av = A \begin{bmatrix} t_1 \\ \vdots \\ t_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} t_1 + \cdots + a_{1n} t_n \\ \vdots \\ a_{n1} t_1 + \cdots + a_{nn} t_n \end{bmatrix}.$$

Mirada de esta forma la multiplicación de matrices es una operación que toma una matriz $n \times n$ y un vector de $\mathbb{K}^n$ y devuelve otro vector de $\mathbb{K}^n$ y es lo que llamaremos luego una *transformación lineal* de $\mathbb{K}^n$ en $\mathbb{K}^n$:

$$A(v + \lambda w) = Av + \lambda Aw, \quad \forall v, w \in \mathbb{K}^n, \lambda \in \mathbb{K},$$

(conmuta con la suma de vectores y la multiplicación por escalares).

Definición

Sea $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$. Se dice que $\lambda \in \mathbb{K}$ es un *autovalor* de A y si existe $v \in \mathbb{K}^n$ no nulo tal que

$$Av = \lambda v.$$

En ese caso decimos que v es un *autovector* asociado a λ

Estudiar los autovalores y autovectores de una matriz es un problema fundamental en álgebra lineal y tiene aplicaciones en muchas áreas de la matemática y la física.

Ejemplo

1 es un autovalor de Id_n y todo $v \in \mathbb{K}^n$ es un autovector asociado a 1 pues

$$\mathrm{Id}_n\, v = v$$

Observación

El autovalor puede ser 0 pero el autovector *nunca* puede ser 0

Ejemplo

0 es un autovalor de $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ y $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ es un autovector asociado a 0 pues

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = 0 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Observación

La existencia de autovalores dependen del cuerpo donde estamos trabajando.

Por ejemplo sea $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Entonces, A no tiene autovalores reales.

Veremos que si permitimos autovalores complejos entonces A sí tiene autovalores.

Etos resultados se verán en el ejemplo de la página 22.

Definición

Dado $i \in \{1, ..., n\}$, se denota e_i al vector de $\mathbb{K}^n$ cuyas coordenadas son todas ceros excepto la coordenada i que es un 1.

$$e_i = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

El conjunto $\{e_1, ..., e_n\}$ se llama *base canónica* de $\mathbb{K}^n$.

Ejemplo

En $\mathbb{K}^3$ la base canónica es $e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $e_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $e_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Ejemplo: Matriz diagonal

Sea $D \in \mathbb{K}^{n\times n}$ una matriz diagonal con entradas λ_1, λ_2, ..., λ_n.

Entonces e_i es un autovector con autovalor λ_i $\forall\, i \in \{1, ..., n\}$

Demostración

Recordar que la multiplicación De_i se corresponde con multiplicar cada fila de e_i por el elemento correspondiente de la diagonal.

Como las filas (en este caso entradas) de e_i son todas nulas excepto un 1 en la entrada i queda queda

$$De_i = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ \lambda_i \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = \lambda_i e_i$$

□

Observación

- Puede haber varios autovectores con el mismo autovalor.
- Vimos esto en el ejemplo con Id y en el caso de la diagonal si tiene entradas iguales sucede lo mismo.
- Más aún el conjunto de todos los autovectores con un mismo autovalor es *invariante por la suma y la multiplicación por escalares.*
- En particular los múltiplos de un autovector son autovectores con el mismo autovalor.

Definición

Sea $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ y $\lambda \in \mathbb{K}$ un autovalor de A. El *autoespacio* asociado a λ es

$$V_\lambda = \{v \in \mathbb{K}^n \mid Av = \lambda v\}.$$

Es decir, V_λ es el conjunto formado por todos los autovectores asociados a λ y el vector nulo.

Teorema

Si v y w pertenecen al autoespacio de A asociado a λ, entonces $v + tw$ también pertenece a V_λ.

Demostración

$$A(v + tw) = Av + tAw = \lambda v + t\lambda w = \lambda(v + tw).$$

$\square$

Proposición

Un autovector no puede tener dos autovalores distintos.

Por lo tanto, autovectores con autovalores distintos son distintos.

Demostración

Supongamos que $Av = \lambda v$ y $Av = \mu v$. Entonces $\lambda v = \mu v$ y por lo tanto

$$(\lambda - \mu)v = \begin{bmatrix} (\lambda - \mu)v_1 \\ \vdots \\ (\lambda - \mu)v_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

Como $v \neq 0$ por ser autovector, alguna de sus coordenadas es no nula. Entonces $\lambda - \mu$ tiene que ser 0 o dicho de otro modo $\lambda = \mu$. □

Problema

Hallar los autovalores de $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ y para cada autovalor, describir explícitamente o paramétricamente el autoespacio asociado

- En otras palabras nos preguntamos que $\lambda \in \mathbb{K}$ y que $v \in \mathbb{K}^n$ satisfacen

$$Av = \lambda v \iff Av - \lambda v = 0 \iff (A - \lambda\,\mathrm{Id})v = 0.$$

- La última igualdad es un sistema de ecuaciones lineales. Queremos ver entonces si existe un $v \in \mathbb{K}^n$ no nulo que sea solución del sistema homogéneo

$$(A - \lambda\,\mathrm{Id})X = 0. \tag{*}$$

- Un sistema $BX = 0$ tiene solución no trivial sii $\det(B) = 0$. Por lo tanto (*) tiene solución no trivial si y sólo si

$$\det(A - \lambda\,\mathrm{Id}) = 0.$$

Conclusión

$\lambda \in \mathbb{K}$ es un autovalor de A y $v \in \mathbb{K}^n$ es un autovector asociado a λ si y sólo si

- $\det(A - \lambda\,\mathrm{Id}) = 0$
- *v es solución del sistema homogéneo* $(A - \lambda\,\mathrm{Id})X = 0$

Esta es casi la respuesta a nuestro problema. Para dar una respuesta más operativa introducimos el siguiente polinomio.

Definición

Sea $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$. El *polinomio característico* de A es

$$\chi_A(x) = \det(x \operatorname{Id} - A)$$

Ejemplo

El polinomio característico de Id_n es

$$\chi_{\operatorname{Id}_n}(x) = (x-1)^n$$

Demostración

$x \operatorname{Id} - \operatorname{Id} = (x-1)\operatorname{Id}$ es una matriz diagonal con $(x-1)$ en todas las entradas de la diagonal. Entonces el determinante es el producto de la diagonal. $\square$

En general, si $A = [a_{ij}]$ matriz $n \times n$, tenemos que

$$\chi_A(x) = \det(x\,Id - A) = \det \begin{bmatrix} x - a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & x - a_{22} & \cdots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & x - a_{nn} \end{bmatrix}$$

y el polinomio característico de A es un polinomio de grado n, más precisamente

$$\chi_A(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0.$$

Esto se puede demostrar por inducción.

Ejemplo

El polinomio característico de $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ es $\chi_A(x) = x^2$.

Demostración

$x \operatorname{Id} - A = \begin{bmatrix} x & -1 \\ 0 & x \end{bmatrix}$ es triangular superior. Entonces el determinante es el producto de la diagonal. $\square$

Ejemplo

Si $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, entonces $\chi_A(x) = (x - a)(x - d) - bc$.

Demostración

$x \operatorname{Id} - A = \begin{bmatrix} x - a & -b \\ -c & x - d \end{bmatrix}$ y usamos la fórmula del determinante de una matriz 2×2. $\square$

Proposición

Sea $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$. Entonces $\lambda \in \mathbb{K}$ es autovalor si y sólo si λ es raíz del polinomio característico.

Demostración

$$
\begin{aligned}
\lambda \text{ es autovalor} \quad & \Leftrightarrow \text{existe } v \neq 0 \text{ tal que } Av = \lambda v \\
& \Leftrightarrow 0 = \lambda v - Av = \lambda \operatorname{Id} v - Av = (\lambda \operatorname{Id} - A)v \\
& \Leftrightarrow (\lambda \operatorname{Id} - A)X = 0 \text{ tiene solución no trivial} \\
& \Leftrightarrow \chi_A(\lambda) = \det(\lambda \operatorname{Id} - A) = 0 \\
& \Leftrightarrow \lambda \text{ es raíz del polinomio característico.}
\end{aligned}
$$

□

Método para encontrar autovalores y autovectores de A

1. Calcular $\chi_A(x) = \det(x \operatorname{Id} - A)$,
2. Encontrar las raíces $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ de $\chi_A(x)$.
   (no siempre se puede. No hay una fórmula o método general para encontrar las raíces de polinomios de grado 5 o superior).
3. Para cada i con $1 \leq i \leq k$ resolver el sistema de ecuaciones lineales:

   $$(\lambda_i \operatorname{Id} - A)X = 0.$$

   Las soluciones no triviales de este sistema son los autovectores con autovalor λ_i.

Ejemplo

Encontrar autovalores y autovectores de la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Solución

1. $\chi_A(x) = \det \begin{bmatrix} x-3 & 2 \\ -1 & x \end{bmatrix} = x^2 - 3x + 2 = (x-1)(x-2).$
2. Los autovalores de A son las raíces de $\chi_A(x)$: 1 y 2.
3. Debemos resolver los sistemas de ecuaciones:

$$(A - \mathrm{Id})X = 0, \qquad (A - 2\,\mathrm{Id})X = 0.$$

Es decir, debemos resolver los sistemas

$$\begin{bmatrix} 3-1 & -2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \Rightarrow \qquad \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{S1}$$

$$\begin{bmatrix} 3-2 & -2 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \Rightarrow \qquad \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{S2}$$

(S1) $\begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{F_1-2F_2} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow x_1 - x_2 = 0 \Rightarrow (t, t)$ es solución.

(S2) $\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow{F_2-F_1} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow x_1 - 2x_2 = 0 \Rightarrow (2t, t)$ es solución.

Respuesta final

- Los autovalores de A son 1 y 2.
- El auto espacio correspondiente al autovalor 1 es

$$V_1 = \{t(1,1) : t \in \mathbb{R}\}.$$

- El auto espacio correspondiente al autovalor 2 es

$$V_2 = \{t(2,1) : t \in \mathbb{R}\}.$$

$\square$

Ejemplo

Sea $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$.

1. Encontrar los autovalores y autovectores *reales* de A.
2. Encontrar los autovalores y autovectores *complejos* de A.

Solución

1. $x \operatorname{Id} - A = \begin{bmatrix} x & 1 \\ -1 & x \end{bmatrix}$, luego

$$\chi_A(x) = x^2 + 1.$$

El polinomio no tiene raíces reales, por lo tanto no existen autovalores reales (obviamente no hay autovectores).

2. En este caso, el polinomio característico se factoriza:

$$\chi_A(x) = x^2 + 1 = (x+i)(x-i),$$

y este polinomio *sí* tiene raíces (complejas): i y $-i$.

En este caso, entonces, i y $-i$ son los autovalores y es fácil ver que

$$V_i = \{\omega(i,1) : \omega \in \mathbb{C}\}, \qquad V_{-i} = \{\omega(-i,1) : \omega \in \mathbb{C}\}.$$

Nunca está de más comprobar los resultados:

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ i \end{bmatrix} = i \begin{bmatrix} i \\ 1 \end{bmatrix}.$$

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -i \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -i \end{bmatrix} = (-i) \begin{bmatrix} -i \\ 1 \end{bmatrix}.$$

$\square$