Álgebra/Álgebra II
Clase 12- Subespacios vectoriales.

FAMAF / UNC

30 de abril de 2024

Resumen

En esta clase veremos que

- más ejemplos de subespacios,
- combinaciones lineales de vectores,
- vectores generadores de subespacios, y
- Determinación implícita de un subespacio de $\mathbb{K}^n$ a partir de generadores
- Intersección y suma de subespacios vectoriales .

El tema de esta clase está contenido de la sección 4.2 del apunte de clase "Álgebra II / Álgebra - Notas del teórico".

Ejemplos de subespacio vectoriales

4. Sean $V = \mathbb{K}^n$ y $1 \leq j \leq n$. Definimos

$$W = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) : x_i \in \mathbb{K}\ (1 \leq i \leq n), x_j = 0\}.$$

Es decir W es el subconjunto de V de todas las n-tuplas con la coordenada j igual a 0. Por ejemplo si $j = 1$

$$W = \{(0, x_2, \ldots, x_n) : x_i \in \mathbb{K}\ (2 \leq i \leq n)\}.$$

Veamos que este último es un subespacio.
Si $(0, x_2, \ldots, x_n), (0, y_2, \ldots, y_n) \in W$ y $\lambda \in \mathbb{K}$, entonces

$$(0, x_2, \ldots, x_n) + \lambda(0, y_2, \ldots, y_n) = (0, x_2 + \lambda y_2, \ldots, x_n + \lambda y_n) \in W.$$

La demostración para $j > 1$ es completamente análoga.

5. Sea $\operatorname{Sim}_n(\mathbb{K}) = \{A \in M_n(\mathbb{K}) : A^{\mathrm{t}} = A\}$.

Es claro que: $\quad A \in \operatorname{Sim}_n(\mathbb{K}) \Leftrightarrow [A]_{ij} = [A]_{ji}\ \forall i, j.$

Proposición

$A \in \operatorname{Sim}_n(\mathbb{K})$ *es subespacio de* $M_n(\mathbb{K})$

Demostración

Sean $A = [a_{ij}]$, $B = [b_{ij}]$ tales que $A = A^{\mathrm{t}}$ y $B = B^{\mathrm{t}}$ y sea $\lambda \in \mathbb{K}$, entonces debemos verificar que: $\quad A + \lambda B \in \operatorname{Sim}_n(\mathbb{K})$.

$$\begin{aligned}
[(A+\lambda B)^{\mathrm{t}}]_{ij} &= [(A+\lambda B)]_{ji} && \text{(definición de transpuesta)}\\
&= [A]_{ji} + \lambda [B]_{ji} && \text{(def. de suma y prod. por escalar)}\\
&= [A]_{ij} + \lambda [B]_{ij} && (A \text{ y } B \text{ simétricas})\\
&= [A+\lambda B]_{ij} && \text{(def. de suma y prod. por escalar)}
\end{aligned}$$

Luego $A + \lambda B \in \operatorname{Sim}_n(\mathbb{K})$. $\square$

6. El conjunto $\mathbb{R}[x] = \{P(x) : P(x) \text{ es polinomio en } \mathbb{R}\}$, es subespacio de $\mathrm{F}(\mathbb{R})$, pues $\mathbb{R}[x] \subset \mathrm{F}(\mathbb{R})$ y las operaciones de suma y producto por un escalar son cerradas en $\mathbb{R}[x]$.

7. Sea $\mathrm{C}(\mathbb{R})$ las funciones continuas de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$. Entonces, $\mathrm{C}(\mathbb{R})$ es subespacio de $\mathrm{F}(\mathbb{R})$.

   Demostración

   Sean f, g funciones continuas, es decir $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$ y $\lim_{x\to a} g(x) = g(a)$, $\forall a \in \mathbb{R}$. Sea $\lambda \in \mathbb{R}$. Por las propiedades de los límites

$$\lim_{x\to a}(f + \lambda g)(x) = \lim_{x\to a} f + \lambda \lim_{x\to a} g(x) = f(a) + \lambda g(a) = (f + \lambda g)(a)$$

$\square$

De forma análoga, el conjunto $\mathbb{R}[x]$ es subespacio de $\mathrm{C}(\mathbb{R})$.

Combinaciones lineales

Definición

Sea V espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$ y $v_1, \ldots, v_n$ vectores en V. Dado $v \in V$, diremos que v *es combinación lineal de los* $v_1, \ldots, v_n$ si existen escalares $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ en $\mathbb{K}$, tal que

$$v = \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n.$$

Ejemplo

Sean $v_1 = (1, 0)$, $v_2 = (0, 1)$ en $\mathbb{C}^2$ ¿es $v = (i, 2)$ combinación lineal de v_1, v_2? La respuesta es sí, pues

$$v = iv_1 + 2v_2.$$

Observar además que es la única combinación lineal posible, pues si

$$v = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2,$$

entonces

$$(i, 2) = (\lambda_1, 0) + (0, \lambda_2) = (\lambda_1, \lambda_2),$$

luego $\lambda_1 = i$ y $\lambda_2 = 2$.

Ejemplo

Puede ocurrir que un vector sea combinación lineal de otros vectores de varias formas diferentes. Por ejemplo, si $v = (i, 2)$ y $v_1 = (1, 0)$, $v_2 = (0, 1)$, $v_3 = (1, 1)$, tenemos que

$$\begin{aligned} v &= iv_1 + 2v_2 + 0v_3, \qquad\qquad \text{y también} \\ v &= (i-1)v_1 + v_2 + v_3. \end{aligned}$$

Ejemplo

Sean $(0, 1, 0)$, $(0, 1, 1)$ en $\mathbb{C}^3$ ¿es $(1, 1, 0)$ combinación lineal de $(0, 1, 0)$, $(0, 1, 1)$? La respuesta es no, pues si

$$(1, 1, 0) = \lambda_1(0, 1, 0)+\lambda_2(0, 1, 1) = (0, \lambda_1, 0)+(0, \lambda_2, \lambda_2) = (0, \lambda_1+\lambda_2, \lambda_2),$$

luego, la primera coordenada nos dice que $1 = 0$, lo cual es absurdo.

Ejemplo

Demostrar que $(7,5,4)$ es combinación lineal de los vectores $(1,-5,2),(1,-1,1)$ y escribir la combinación lineal explícita.

Solución

Planteamos la ecuación:

$$\begin{aligned}(7,5,4) &= \lambda_1(1,-5,2)+\lambda_2(1,-1,1)\\ &= (\lambda_1+\lambda_2,-5\lambda_1-\lambda_2,2\lambda_1+\lambda_2).\end{aligned}$$

Por consiguiente, esta ecuación se resuelve con el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned}\lambda_1+\lambda_2 &= 7\\ -5\lambda_1-\lambda_2 &= 5\\ 2\lambda_1+\lambda_2 &= 4.\end{aligned}$$

Ahora bien, usando el método de Gauss

$$\left[\begin{array}{rr|r} 1 & 1 & 7 \\ -5 & -1 & 5 \\ 2 & 1 & 4 \end{array}\right] \underset{F3-2F_1}{\xrightarrow{F_2+5F_1}} \left[\begin{array}{rr|r} 1 & 1 & 7 \\ 0 & 4 & 40 \\ 0 & -1 & -10 \end{array}\right] \xrightarrow{F_2/4} \left[\begin{array}{rr|r} 1 & 1 & 7 \\ 0 & 1 & 10 \\ 0 & -1 & -10 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{F_3+F_2} \left[\begin{array}{rr|r} 1 & 1 & 7 \\ 0 & 1 & 10 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{F_1-F_2} \left[\begin{array}{rr|r} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 10 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Luego $\lambda_1 = -3$ y $\lambda_2 = -10$, es decir,

$$(7,5,4) = -3(1,-5,2) + 10(1,-1,1).$$

$\square$

Teorema

Sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$ y sean $v_1, \ldots, v_k \in V$. Entonces

$$W = \{\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_k v_k : \lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{K}\}$$

es un subespacio vectorial. Es decir, el conjunto de las combinaciones lineales de $v_1, \ldots, v_k$ es un subespacio vectorial.

Demostración

Sean $\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_k v_k$, $\mu_1 v_1 + \cdots + \mu_k v_k$ dos combinaciones lineales de $v_1, \ldots, v_k$ y $\lambda \in \mathbb{K}$, entonces

$$\begin{aligned}(\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_k v_k) + \lambda(\mu_1 v_1 + \cdots + \mu_k v_k) & \\ &= \lambda_1 v_1 + \lambda\mu_1 v_1 + \cdots + \lambda_k v_k + \lambda\mu_k v_k \\ &= (\lambda_1 + \lambda\mu_1)v_1 + \cdots + (\lambda_k + \lambda\mu_k)v_k,\end{aligned}$$

que es una combinación lineal de $v_1, \ldots, v_k$ y por lo tanto pertenece a W. $\square$

Definición

Sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$ y sean $v_1, \ldots, v_k \in V$. Al subespacio vectorial $W = \{\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_k v_k : \lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{K}\}$ de las combinaciones lineales de $v_1, \ldots, v_k$ se lo denomina *subespacio generado por* $v_1, \ldots, v_k$ y se lo denota

$$W = \langle v_1, \ldots, v_k \rangle = \operatorname{gen}\{v_1, \ldots, v_k\} = \operatorname{span}\{v_1, \ldots, v_k\}.$$

Además, en este caso, diremos que el conjunto $S = \{v_1, \ldots, v_k\}$ *genera* al subespacio W o que los vectores $v_1, \ldots, v_k$ *generan* W.

Observación

Un caso especial, que será de suma importancia, es el caso en que consideramos todo V.

Estudiaremos en las clases que siguen conjuntos de generadores de V llamados *bases*, que tienen la propiedad de que todo vector de V se escribe de una única forma como c.l. de los generadores.

Determinación “implícita” de un subespacio de $\mathbb{K}^n$

En general, si queremos averiguar si un vector concreto $(b_1, b_2, \ldots, b_m) \in \mathbb{K}^m$ es combinación lineal de vectores $v_1, \ldots, v_n \in \mathbb{K}^m$, debemos plantear la ecuación

$$(b_1, b_2, \ldots, b_m) = \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n, \tag{*}$$

y resolver el sistema correspondiente, así como lo hicimos en el ejemplo de la página 9.

Es decir, si

$$W = \{\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n : \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K}\},$$

queremos averiguar si el vector $(b_1, b_2, \ldots, b_m) \in \mathbb{K}^m$ pertenece a W o, equivalentemente, si es combinación lineal de $v_1, \ldots, v_n$.:

Ahora, si

$$\begin{aligned} v_1 &= (a_{11}, a_{21}, \ldots, a_{m1}), \\ v_2 &= (a_{12}, a_{22}, \ldots, a_{m2}), \\ &\vdots \\ v_n &= (a_{1n}, a_{2n}, \ldots, a_{mn}), \end{aligned}$$

la ecuación (*) de la página anterior se traduce en el sistema de ecuaciones

$$\begin{array}{ccccccccc} a_{11}\lambda_1 & + & a_{12}\lambda_2 & + & \cdots & + & a_{1n}\lambda_n & = & b_1 \\ \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \\ a_{m1}\lambda_1 & + & a_{m2}\lambda_2 & + & \cdots & + & a_{mn}\lambda_n & = & b_m. \end{array}$$

De la matriz ampliada original $\left[\begin{array}{c|c} A & b \end{array}\right]$ podemos obtener una MERF equivalente $\left[\begin{array}{c|c} A' & b' \end{array}\right]$ y el sistema asociado.

$$\begin{array}{cccc}
x_{k_1} & + & \sum_{j\neq k_1,\ldots,k_r} a'_{1j}\, x_j & = & b'_1 \\
x_{k_2} & + & \sum_{j\neq k_1,\ldots,k_r} a'_{2j}\, x_j & = & b'_2 \\
\vdots & & & \vdots & \\
x_{k_r} & + & \sum_{j\neq k_1,\ldots,k_r} a'_{rj}\, x_j & = & b'_r \\
 & & 0 & = & b'_{r+1} \\
 & & \vdots & & \\
 & & 0 & = & b'_m,
\end{array}$$

donde $k_1 < k_2 < \cdots < k_r$.

Por lo tanto, el sistema tiene solución si y solo si $b'_{r+1} = \cdots = b'_m = 0$. Luego,

$$W = \{(b_1, b_2, \ldots, b_m) \in \mathbb{K}^m : b'_{r+1} = \cdots = b'_m = 0\}.$$

Las ecuaciones $b'_{r+1} = \cdots = b'_m = 0$ son las ecuaciones implícitas que definen a W y nos permiten decidir rápidamente si un vector pertenece o no a W, simplemente viendo si sus coordenadas satisfacen las ecuaciones.

Ejemplo

Caracterizar mediante ecuaciones el subespacio del subespacio generado por

$$v_1 = (3,1,2,-1), \quad v_2 = (6,2,4,-2),$$
$$v_3 = (3,0,1,1), \quad v_4 = (15,3,8,-1).$$

Solución

En otras palabras, queremos describir implícitamente el conjunto de los $b = (b_1, b_2, b_3, b_4) \in \mathbb{R}^4$ tales que $b \in \langle v_1, v_2, v_3, v_4 \rangle$.

O sea, los $b = (b_1, b_2, b_3, b_4) \in \mathbb{R}^4$ tales que

$$b = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 + \lambda_4 v_4 \tag{*}$$

con $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4 \in \mathbb{R}$.

Planteemos la fórmula (*) en como un sistema de ecuaciones. Obtenemos:

$$\begin{aligned} b_1 &= 3\lambda_1 + 6\lambda_2 + 3\lambda_3 + 15\lambda_4 \\ b_2 &= \lambda_1 + 2\lambda_2 + 3\lambda_4 \\ b_3 &= 2\lambda_1 + 4\lambda_2 + \lambda_3 + 8\lambda_4 \\ b_4 &= -\lambda_1 - 2\lambda_2 + \lambda_3 - \lambda_4 \end{aligned}$$

Luego, escrito como producto de matrices, el sistema es

$$\begin{bmatrix} 3 & 6 & 3 & 15 \\ 1 & 2 & 0 & 3 \\ 2 & 4 & 1 & 8 \\ -1 & -2 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ \lambda_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{bmatrix}$$

Resolvamos el sistema anterior.

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 3 & 6 & 3 & 15 & b_1 \\ 1 & 2 & 0 & 3 & b_2 \\ 2 & 4 & 1 & 8 & b_3 \\ -1 & -2 & 1 & -1 & b_4 \end{array}\right] \xrightarrow[\substack{F_3-2F_2 \\ F_4+F_2}]{F1-3F_2} \left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 3 & 6 & b_1-3b_2 \\ 1 & 2 & 0 & 3 & b_2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & b_3-2b_2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & b_4+b_2 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[F_4-F_3]{F_1-3F_3} \left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 & b_1+3b_2-3b_3 \\ 1 & 2 & 0 & 3 & b_2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & b_3-2b_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3b_2-b_3+b_4 \end{array}\right].$$

Luego el sistema tiene solución si y solo si $b_1+3b_2-3b_3=0$ y $3b_2-b_3+b_4=0$. Por lo tanto, el subespacio que estamos buscando es

$$\langle v_1, v_2, v_3, v_4\rangle = \{(b_1, b_2, b_3, b_4) \in \mathbb{R}^4 \mid b_1+3b_2-3b_3=0, 3b_2-b_3+b_4=0\}. \quad \square$$

Notemos que podemos repetir todo el razonamiento anterior para cualesquiera vectores $v_1, \ldots, v_k$ en cualquier $\mathbb{R}^n$ y cualquier $b \in \mathbb{R}^n$.

Sólo hay que tener presente que multiplicar una matriz por un vector columna es lo mismo que hacer una combinación lineal de las columnas de la matriz:

Es decir, si

$$A = \begin{bmatrix} | & | & & | \\ v_1 & v_2 & \cdots & v_k \\ | & | & & | \end{bmatrix},$$

entonces

$$A \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_k \end{bmatrix} = \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_k v_k$$

Conclusión

Sean $v_1, \ldots, v_k \in \mathbb{K}^n$ y $A \in \mathbb{K}^{n\times k}$ la matriz cuyas columnas son los vectores $v_1, \ldots, v_k$, es decir

$$A = \begin{bmatrix} | & | & & | \\ v_1 & v_2 & \cdots & v_k \\ | & | & & | \end{bmatrix}.$$

Entonces

- El subespacio vectorial $\langle v_1, \ldots, v_k \rangle$ es igual al conjunto de los $b \in \mathbb{K}^n$ para los cuales el sistema $AX = b$ tiene solución.
- Las ecuaciones vienen dadas por las filas nulas de la MERF equivalente a A. En particular, si no tiene filas nulas entonces $\langle v_1, \ldots, v_k \rangle = \mathbb{K}^n$ porque el sistema $AX = b$ siempre tiene solución.

Intersección y suma de subespacios vectoriales

Teorema

Sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$. Entonces la intersección de subespacios vectoriales es un subespacio vectorial.

Demostración

Veamos el caso de la intersección de dos subespacios.

Debemos probar que si $W_1,\ W_2$ subespacios $\Rightarrow W_1 \cap W_2$ es subespacio.

Observemos: $\quad w \in W_1 \cap W_2 \quad \Leftrightarrow \quad w \in W_1 \ \wedge \ w \in W_2.$

$$\begin{aligned}
\text{Sea } \lambda \in \mathbb{K}.\ u, v \in W_1 \cap W_2 \quad &\Rightarrow \quad u, v \in W_1 \ \wedge \ u, v \in W_2 \\
&\Rightarrow \quad u + \lambda v \in W_1 \ \wedge \ u + \lambda v \in W_2 \\
&\Rightarrow \quad u + \lambda v \in W_1 \cap W_2.
\end{aligned}$$

Luego $W_1 \cap W_2$ es subespacio. $\square$

Ejemplo

Sean

$$W_1 = \{(x, y, z) : -3x + y + 2z = 0\}$$

y

$$W_2 = \{(x, y, z) : x - y + 2z = 0\}.$$

Encontrar generadores de $W_1 \cap W_2$.

Solución

Es claro que

$$W_1 \cap W_2 = \{(x, y, z) : -3x + y + 2z = 0 \ \wedge \ x - y + 2z = 0\}.$$

Por lo tanto debemos resolver el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} -3x + y + 2z = 0 \\ x - y + 2z = 0 \end{cases}$$

Reduzcamos la matriz del sistema a una MRF:

$$\begin{bmatrix} -3 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{F_1+3F_2} \begin{bmatrix} 0 & -2 & 8 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{F_1/(-2)} \begin{bmatrix} 0 & 1 & -4 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{F_2+F_1} \begin{bmatrix} 0 & 1 & -4 \\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

Por lo tanto, $x_2 - 4x_3 = 0$ y $x_1 - 2x_3 = 0$, es decir $x_2 = 4x_3$ y $x_1 = 2x_3$.

Luego,

$$W_1 \cap W_2 = \{(2t, 4t, t) : \mathrm{t} \in \mathbb{R}\} = \{t(2,4,1) : \mathrm{t} \in \mathbb{R}\}.$$

La respuesta es entonces: $(2,4,1)$ es generador $W_1 \cap W_2$.

$\square$

Teorema

Sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$ y sean $v_1, \dots, v_k \in V$. Entonces, la intersección de todos los subespacios vectoriales que contienen a $v_1, \dots, v_k$ es igual a $\langle v_1, \dots, v_k \rangle$.

Demostración

Denotemos

- $U = \bigcap$ de todos los subespacios vectoriales $\supseteq \{v_1, \dots, v_k\}$.

Probaremos que $U = \langle v_1, \dots, v_k \rangle$ con la doble inclusión, es decir probando que

$$U \subseteq \langle v_1, \dots, v_k \rangle \quad \text{y} \quad \langle v_1, \dots, v_k \rangle \subseteq U.$$

$(U \subseteq \langle v_1, ..., v_k \rangle)$

Primero, $U \subseteq \langle v_1, ..., v_k \rangle$ vale puesto que $\langle v_1, ..., v_k \rangle$ es un subespacio que contiene a $\{v_1, ..., v_k\}$.

$(\langle v_1, \ldots, v_k \rangle \subseteq U)$

U es intersección de subespacios $\Rightarrow$ (teor. p. 22) U es un subespacio.

Luego, $\{v_1, ..., v_k\} \subset U \Rightarrow \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_k v_k \in U, \quad \forall \lambda_1, ..., \lambda_k \in \mathbb{K}$.

Por lo tanto $\langle v_1, ..., v_k \rangle \subseteq U$. $\square$

Observación

Si V es un $\mathbb{K}$-espacio vectorial, S y T subespacios de V.

Entonces $S \cup T$ *no es necesariamente un subespacio* de V.

En efecto, consideremos en $\mathbb{R}^2$ los subespacios

$$S = \mathbb{R}(1,0) \quad \text{ y } T = \mathbb{R}(0,1).$$

- $(1,0) \in S$ y $(0,1) \in T \Rightarrow (1,0),(0,1) \in S \cup T$.
- Ahora bien $(1,0)+(0,1) = (1,1) \notin S \cup T$, puesto que $(1,1) \notin S$ y $(1,1) \notin T$.

Definición

Sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$ y sean $S_1, \dots, S_k$ subconjuntos de V. definimos

$$S_1 + \cdots + S_k := \{s_1 + \cdots + s_k : s_i \in S_i, 1 \leq i \leq k\},$$

el conjunto *suma de los* $S_1, \dots, S_k$.

Teorema

Sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$ y sean $W_1, \dots, W_k$ subespacios de V. Entonces $W = W_1 + \cdots + W_k$ es un subespacio de V.

Demostración

Ejercicio (ver apunte). $\square$

Proposición

Sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$ y sean $v_1, \ldots, v_r$ elementos de de V. Entonces

$$\langle v_1, \ldots, v_r \rangle = \langle v_1 \rangle + \cdots + \langle v_r \rangle.$$

Demostración

Probemos el resultado viendo que los dos conjuntos se incluyen mutuamente.
($\subseteq$) Sea $w \in \langle v_1, \ldots, v_r \rangle$, luego $w = \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_r v_r$. Como $\lambda_i v_i \in \langle v_i \rangle$, $1 \leq i \leq r$, tenemos que $w \in \langle v_1 \rangle + \cdots + \langle v_r \rangle$. En consecuencia, $\langle v_1, \ldots, v_r \rangle \subseteq \langle v_1 \rangle + \cdots + \langle v_r \rangle$.
($\supseteq$) Si $w \in \langle v_1 \rangle + \cdots + \langle v_r \rangle$, entonces $w = w_1 + \cdots + w_r$ con $w_i \in \langle v_i \rangle$ para todo i. Por lo tanto, $w_i = \lambda_i v_i$ para algún $\lambda_i \in \mathbb{K}$ y $w = \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_r v_r \in \langle v_1, \ldots, v_r \rangle$. En consecuencia, $\langle v_1 \rangle + \cdots + \langle v_r \rangle \subseteq \langle v_1, \ldots, v_r \rangle$.