

Álgebra/Álgebra II

Clase 16 - Isomorfismos

FAMAF / UNC

14 de mayo de 2024

Los dos teoremas que vamos a ver aquí son muy fuertes, en el sentido que dan mucha información por si solos y que además serán de utilidad para estudiar transformaciones inyectivas, suryectivas y biyectivas.

Las demostraciones son elegantes, en el sentido que sólo requieren que razonemos pegando algunas ideas y resultados pero sin trabajar en cuentas largas y tediosas.

Las demostraciones no son difíciles, pero requieren concentración y maduración de ideas y conceptos; hacer ejercicios ayuda a asimilarlos.

El siguiente resultado relaciona las dimensiones del núcleo y la imagen.

Teorema

Sea $T : V \longrightarrow W$ una transformación lineal. Si V es de dimensión finita entonces

$$\dim V = \dim \text{Nu}(T) + \dim \text{Im}(T)$$

Observar que este resultado relaciona en forma general dos subespacios que “viven” en espacios diferentes.

- $\text{Nu}(T) \in V$,
- $\text{Im}(T) \in W$.
- Si $n = \dim V$,

tenemos que $n = \dim \text{Nu}(T) + \dim \text{Im}(T)$ cualquiera sea T .

Demostración

Sea $\{v_1, \dots, v_k\}$ una base del $\text{Nu}(T)$ ($\Rightarrow \dim \text{Nu } T = k$).

Sea $\{v_1, \dots, v_k, w_1, \dots, w_m\}$ una base de V obtenida completando la base de $\text{Nu}(T)$ ($\Rightarrow \dim V = k + m$).

Si probamos que $\{T(w_1), \dots, T(w_m)\}$ es una base de $\text{Im}(T)$ el teorema queda demostrado.

Pues, de ser así, deducimos que

$$\begin{aligned}\dim V &= k + m \\ &= |\{v_1, \dots, v_k\}| + |\{w_1, \dots, w_m\}| \\ &= \dim \text{Nu}(T) + |\{T(w_1), \dots, T(w_m)\}| \\ &= \dim \text{Nu}(T) + \dim \text{Im}(T)\end{aligned}$$

Esto lo probaremos en las siguientes pantallas.

Queremos ver que $\{T(w_1), \dots, T(w_m)\}$ genera $\text{Im}(T)$ y es L.I.

$\{T(w_1), \dots, T(w_m)\}$ genera $\text{Im}(T)$:

Sea $w \in \text{Im}(T) \Rightarrow w = T(v)$, para algún $v \in V$.

Como $v = \mu_1 v_1 + \dots + \mu_k v_k + \lambda_1 w_1 + \dots + \lambda_m w_m$

\Rightarrow

$$\begin{aligned} w = T(v) &= T(\mu_1 v_1 + \dots + \mu_k v_k + \lambda_1 w_1 + \dots + \lambda_m w_m) \\ &= \mu_1 \underbrace{T(v_1)}_0 + \dots + \mu_k \underbrace{T(v_k)}_0 + \lambda_1 T(w_1) + \dots + \lambda_m T(w_m) \\ &= \lambda_1 T(w_1) + \dots + \lambda_m T(w_m) \end{aligned}$$

Luego $w \in \langle T(w_1), \dots, T(w_m) \rangle$.

$\{T(w_1), \dots, T(w_m)\}$ es LI:

Sea $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ tales que

$$\lambda_1 T(w_1) + \dots + \lambda_m T(w_m) = 0 \quad (*)$$

debemos ver que $\lambda_1 = \dots = \lambda_m = 0$.

Ahora bien

$$T(\lambda_1 w_1 + \dots + \lambda_m w_m) = \lambda_1 T(w_1) + \dots + \lambda_m T(w_m) \stackrel{(*)}{=} 0.$$

Es decir $\lambda_1 w_1 + \dots + \lambda_m w_m \in \text{Nu}(T) = \langle v_1, \dots, v_k \rangle$.

\Rightarrow

$$\lambda_1 w_1 + \dots + \lambda_m w_m = \mu_1 v_1 + \dots + \mu_k v_k.$$

Luego

$$0 = -\mu_1 v_1 - \cdots - \mu_k v_k + \lambda_1 w_1 + \cdots + \lambda_m w_m$$

Dado que $\{v_1, \dots, v_k, w_1, \dots, w_m\}$ es LI, la igualdad

$$-\mu_1 v_1 - \cdots - \mu_k v_k + \lambda_1 w_1 + \cdots + \lambda_m w_m = 0$$

implica que

$$\mu_1 = \cdots = \mu_k = \lambda_1 = \cdots = \lambda_m = 0$$

Luego

$$\lambda_1 T(w_1) + \cdots + \lambda_m T(w_m) = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = \cdots = \lambda_m = 0,$$

y por lo tanto $T(w_1), \dots, T(w_m)$ es LI.



El siguiente lema es importante por si mismo y además será necesario más adelante.

Lema

Sea $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ y R la MERF equivalente a A . Entonces

$$\begin{array}{c} \dim\{\text{soluciones del sistema homogéneo } AX = 0\} \\ \parallel \\ |\text{variables libres de } RX = 0|. \end{array}$$

A continuación damos una idea de la demostración.

Idea de la demostración

Sea r el número de filas no nulas de R y k_1, \dots, k_r las columnas donde aparecen los 1's principales.

Entonces, $k_1 < k_2 < \dots < k_r$ y el sistema de ecuaciones asociado a R es:

$$\begin{array}{rclcl} x_{k_1} & + & \sum_{j \neq k_1, \dots, k_r} b_{1j} x_j & = & 0 \\ x_{k_2} & + & \sum_{j \neq k_1, \dots, k_r} b_{2j} x_j & = & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ x_{k_r} & + & \sum_{j \neq k_1, \dots, k_r} b_{rj} x_j & = & 0 \end{array}$$

Sean $x_{j_1}, x_{j_2}, \dots, x_{j_{n-r}}$ las $n - r$ variables libres (es decir los x_j con $j \neq k_1, \dots, k_r$)

Luego,

$$\begin{aligned}
x_{k_1} &= -\sum_{i=1}^{n-r} b_{1j_i} x_{j_i} \\
x_{k_2} &= -\sum_{i=1}^{n-r} b_{2j_i} x_{j_i} \\
&\vdots \\
x_{k_r} &= -\sum_{i=1}^{n-r} b_{rj_i} x_{j_i}
\end{aligned}$$

Es decir, el subespacio formado por las soluciones de $AX = 0$, consta de n -uplas (x_1, x_2, \dots, x_n) , donde

- $x_k = x_{j_i}$, para algún $i = 1, \dots, n-r$, o
- $x_k = \text{c.l. de los } x_{j_i}$.

Por lo tanto,

$$W = \left\{ \sum_{i=1}^{n-r} x_{j_i} w_i : x_{j_1}, \dots, x_{j_{n-r}} \in \mathbb{K} \right\}$$

para algunos w_1, \dots, w_{n-r} que son l.l.

Luego $\dim(W) = n - r$.



Definición

Sea $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$.

- El *rango fila* de A es la dimensión del subespacio de \mathbb{R}^n generado por las filas de A .
- El *rango columna* de A es la dimensión del subespacio de \mathbb{R}^m generado por las columnas de A .

Teorema

Sea $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$. El *rango fila* de A es igual al *rango columna* de A .

Notar que si $n \neq m$, estamos comparando subespacios de distintos espacios vectoriales.

Demostración

Consideremos la transformación lineal $T : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ dada por la multiplicación por A .

Es decir, $T(v) = Av$ para todo $v \in \mathbb{R}^n$

La demostración consiste en comparar el núcleo y la imagen de T con los espacios fila y columna de A .

Primero, el espacio columna de A es igual a la imagen de T .

Esto es por la forma en que multiplicamos matrices:

$$A = \begin{bmatrix} | & | & \cdots & | \\ v_1 & v_2 & \cdots & v_k \\ | & | & & | \end{bmatrix} \Rightarrow$$
$$T(e_i) = A \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = v_i$$

Luego $T(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = T(\sum \lambda_i e_i) = \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n$

\Rightarrow

$\text{Im}(T) = \langle v_1, \dots, v_n \rangle$. Entonces, rango columna de $A = \dim \text{Im}(T)$.

Segundo, por el Corolario 2.5.2 las filas no nulas de la MERF equivalente a A forman una base del espacio fila de A .

Por lo tanto, el rango fila de A es igual a la cantidad de 1's principales de la MERF. O dicho de otro modo,

- Rango fila de A es igual a n menos la cantidad de variables libres.
(n es la cantidad de columnas de A .)

Por otro lado, el $\text{Nu}(T)$ es igual al conjunto de soluciones de $AX = 0$.

Entonces, por el lema anterior,

- $\dim \text{Nu}(T)$ es igual a la cantidad de variables libres

En resumen: sea r la cantidad de variables libres:

- (1) Rango columna de A es igual a $\dim \operatorname{Im}(T)$
- (2) Rango fila de A es igual a n menos la cantidad de variables libres:
 $n - r$.
- (3) $\dim \operatorname{Nu}(T)$ es igual a la cantidad de variables libres: r .
- (4) $\dim \mathbb{R}^n = n$.

Por lo tanto, por el teorema de la dimensión,

$$\dim(\mathbb{K}^n) = \dim \operatorname{Nu}(T) + \dim \operatorname{Im}(T)$$

$$n = r + \operatorname{rgcol}(A) \quad (\text{por (4), (3) y (1)})$$

$$n = n - \operatorname{rgfil}(A) + \operatorname{rgcol}(A) \quad (\text{por (2)})$$

$$0 = -\operatorname{rgfil}(A) + \operatorname{rgcol}(A).$$



Ahora estudiaremos transformaciones lineales inyectivas, sobreyectivas y biyectivas.

Este tipo de transformaciones nos dan información acerca de dimensiones, generadores y conjuntos LI.

Sea $T : V \rightarrow W$ lineal. Veremos:

- T es inyectiva $\Leftrightarrow \text{Nu } T = 0 \Leftrightarrow \dim \text{Nu } T = 0$.
- T inyectiva $\Leftrightarrow T$ de LI es LI.
- T sobreyectiva $\Leftrightarrow T$ de generadores de V es generadores de W .
- T biyectiva $\Leftrightarrow T$ de base es base.

Definición 4.3.1-4.3.2

Sean V, W espacios vectoriales sobre un cuerpo \mathbb{K} y sea $T : V \rightarrow W$ una transformación lineal.

- T es *epimorfismo* si T es suryectiva.
Es decir si $\text{Im}(T) = W$.
- T es *monomorfismo* si T es inyectiva (o $1 - 1$).
Es decir, $T(v_1) = T(v_2) \Rightarrow v_1 = v_2$.
- T es un *isomorfismo* si es monomorfismo y epimorfismo (es decir si es inyectiva y suryectiva).

Observación 4.3.1

- T es epimorfismo si y sólo si

T es lineal y $\forall w \in W, \exists v \in V$ tal que $T(v) = w$.

Esto se deduce inmediatamente de la definiciones de función suryectiva y de $\text{Im}(T)$.

- T es monomorfismo si y sólo si

T es lineal y $\forall v_1, v_2 \in V : v_1 \neq v_2 \Rightarrow T(v_1) \neq T(v_2)$.

Esto se obtiene aplicando el contrarrecíproco a la definición de función inyectiva.

Proposición 4.3.1

Sea $T : V \rightarrow W$ una transformación lineal. Entonces T es monomorfismo si y sólo si $\text{Nu}(T) = 0$.

Demostración

(\Rightarrow) Debemos ver que $T(v) = 0 \Rightarrow v = 0$.

$$T(v) = 0 \wedge T(0) = 0 \xrightarrow{T \text{ mono}} v = 0.$$

(\Leftarrow) Sean $v_1, v_2 \in V$ tal que $T(v_1) = T(v_2)$. Entonces

$$0 = T(v_1) - T(v_2) \xrightarrow{T \text{ lineal}} T(v_1 - v_2) \Rightarrow v_1 - v_2 \in \text{Nu}(T) = \{0\}.$$

Luego, $v_1 - v_2 = 0$, es decir $v_1 = v_2$.



Observación 4.3.2

Sea $T : V \rightarrow W$ transformación lineal,

(1) T es epimorfismo $\Leftrightarrow \text{Im}(T) = W \Leftrightarrow \dim \text{Im}(T) = \dim W$.

(2) T es monomorfismo $\Leftrightarrow \text{Nu}(T) = 0 \Leftrightarrow \dim \text{Nu}(T) = 0$.

Proposición 4.3.2

Sea $T : V \rightarrow W$ transformación lineal. Entonces,

(1) T es monomorfismo si y sólo si T de un conjunto LI es LI.

(2) T es epimorfismo si y sólo si T de un conjunto de generadores de V es un conjunto de generadores de W .

En las próximas pantallas veremos la demostración.

(1) (\Rightarrow) Sea $\{v_1, \dots, v_n\}$ LI en V y $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ tales que

$$\lambda_1 T(v_1) + \dots + \lambda_n T(v_n) = 0.$$

Debemos probar que $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0$.

$$\begin{aligned} 0 &= \lambda_1 T(v_1) + \dots + \lambda_n T(v_n) && \text{(hipótesis)} \\ &= T(\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n) && \text{(linealidad de } T) \\ &\Rightarrow \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n = 0 && (T \text{ mono)} \\ &\Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0 && (\{v_1, \dots, v_n\} \text{ LI}) \end{aligned}$$

Por lo tanto, $T(v_1), \dots, T(v_n)$ son LI.

(1) (\Leftarrow) Si $\text{Nu } T = 0 \Rightarrow T$ es mono (proposición p. 19)

Veamos, entonces, que $\text{Nu } T = 0$, es decir: $T(v) = 0 \Rightarrow v = 0$.

Probemos el contrarecíproco: $v \neq 0 \Rightarrow T(v) \neq 0$

$$\begin{aligned} v \neq 0 &\Rightarrow v \text{ es LI} \\ &\Rightarrow T(v) \text{ es LI} && \text{(hipótesis)} \\ &\Rightarrow T(v) \neq 0 && . \end{aligned}$$

Luego

$$\begin{aligned} (v \neq 0 \Rightarrow T(v) \neq 0) &\Rightarrow (T(v) = 0 \Rightarrow v = 0) \\ &\Rightarrow \text{Nu}(T) = 0 \\ &\Rightarrow T \text{ es mono.} \end{aligned}$$

(2) (\Rightarrow) Sea $V = \langle v_1, \dots, v_n \rangle$ y $w \in W$.

Debemos ver que $w \in \langle T(v_1), \dots, T(v_n) \rangle$

Como T es epimorfismo, existe $v \in V$ tal que $T(v) = w$.

$$v = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n \quad (v_1, \dots, v_n \text{ genera } V)$$

$$\Downarrow$$

$$T(v) = T(\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n) \quad (\text{aplicamos } T)$$

$$= \lambda_1 T(v_1) + \dots + \lambda_n T(v_n) \quad (T \text{ lineal})$$

$$\Downarrow$$

$$w = \lambda_1 T(v_1) + \dots + \lambda_n T(v_n) \quad (w = T(v))$$

$$\Downarrow$$

$$w \in \langle T(v_1), \dots, T(v_n) \rangle.$$

(2) (\Leftarrow) Debemos ver que: $w \in W \Rightarrow$ existe $v \in V$ tal que $w = T(v)$.

Sea $\{v_1, \dots, v_n\}$ una base de V .

Por hipótesis $T(v_1), \dots, T(v_n)$ generan W .

Es decir dado cualquier $w \in W$, existen $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ tales que

$$w = \lambda_1 T(v_1) + \dots + \lambda_n T(v_n),$$

y por lo tanto

$$\begin{aligned} w &= \lambda_1 T(v_1) + \dots + \lambda_n T(v_n) \\ &= T(\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n) && (T \text{ lineal}) \\ &= T(v), \end{aligned}$$

con

$$v = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n.$$



Corolario

Sea $T : V \rightarrow W$ transformación lineal. Entonces T es un isomorfismo si y solo si T de una base de V es una base de W .

Demostración

(\Rightarrow) Sea \mathcal{B} base de V . Como T es isomorfismo, T es mono y epi, luego por proposición 4.3.2, $T(\mathcal{B})$ es LI y genera W , es decir, es base de W .

(\Leftarrow) Sea \mathcal{B} base de V y $T : V \rightarrow W$ transformación lineal tal que $T(\mathcal{B})$ es base. Por lo tanto, manda un conjunto LI a un conjunto LI y un conjunto de generadores de V a un conjunto de generadores de W . Por proposición 4.3.2, T es mono y epi, por lo tanto T es un isomorfismo. \square

Corolario

Sean V y W dos \mathbb{K} -espacios vectoriales de dimensión finita tal que V es isomorfo a W . Entonces $\dim(V) = \dim(W)$.

Recordar que si una función es biyectiva entonces se puede definir la función inversa.

Teorema 4.3.3

Sea $T : V \longrightarrow W$ un isomorfismo. Entonces la función inversa

$$T^{-1} : W \longrightarrow V$$

es también un isomorfismo.

Es decir, T^{-1} es una transformación lineal biyectiva.

Demostración

Sean $w_1, w_2 \in W$, $\lambda \in \mathbb{K}$, probemos que

$$T^{-1}(w_1 + \lambda w_2) = T^{-1}(w_1) + \lambda T^{-1}(w_2).$$

Sean $v_i = T^{-1}(w_i) \Rightarrow T(v_i) = w_i$.

$$\begin{aligned} T^{-1}(w_1 + \lambda w_2) &= T^{-1}(T(v_1) + \lambda T(v_2)) && (w_i = T(v_i)) \\ &= T^{-1}(T(v_1 + \lambda v_2)) && (T \text{ lineal}) \\ &= (T^{-1} \circ T)(v_1 + \lambda v_2) && (\text{def de } \circ) \\ &= v_1 + \lambda v_2 && (T^{-1} \circ T = \text{Id}) \\ &= T^{-1}(w_1) + \lambda T^{-1}(w_2). && (v_i = T^{-1}(w_i)) \quad \square \end{aligned}$$

Teorema 4.3.4

Sea $T : V \longrightarrow W$ una transformación lineal con $\dim V = \dim W$.
Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes

- (1) T es un isomorfismo.
- (2) T es monomorfismo.
- (3) T es epimorfismo.
- (4) $\{v_1, \dots, v_n\}$ base de $V \Rightarrow \{T(v_1), \dots, T(v_n)\}$ base de W .

Vamos a probar

- $(1) \Rightarrow (2) \Rightarrow (3) \Rightarrow (1)$,
- $(1) \Rightarrow (4) \wedge (4) \Rightarrow (1)$

Del primer ítem obtenemos $(1) \Leftrightarrow (2) \Leftrightarrow (3)$.

Del segundo ítem obtenemos $(1) \Leftrightarrow (4)$.

Luego $(1) \Leftrightarrow (2) \Leftrightarrow (3) \Leftrightarrow (4)$.

Demostración

(1) \Rightarrow (2). Obvio, de la definición de iso.

(2) \Rightarrow (3). Usaremos el teorema de la dimensión del núcleo y la imagen:

$$\begin{aligned}T \text{ mono} &\Rightarrow \dim \text{Nu } T = 0 && \text{(proposición de p. 19)} \\&\Rightarrow \dim \text{Im } T = \dim V = \dim W && \text{(teorema de la dimensión)} \\&\Rightarrow \text{Im } T = W \\&\Rightarrow T \text{ epi}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(3) \Rightarrow (1). \quad T \text{ epi} &\Rightarrow \dim \text{Im } T = \dim V = \dim W \\&\Rightarrow \dim \text{Nu } T = 0 && \text{(teorema de la dim.)} \\&\Rightarrow \text{Nu } T = 0 \\&\Rightarrow T \text{ mono} && \text{(proposición de p. 19)}\end{aligned}$$

$T \text{ epi y } T \text{ mono} \Rightarrow T \text{ iso.}$

(1) \Rightarrow (4). Sea $\{v_1, \dots, v_n\}$ una base de V .

Entonces $\{v_1, \dots, v_n\}$ es LI y genera V .

Proposición de p. 20 $\Rightarrow \{T(v_1), \dots, T(v_n)\}$ es LI

$\{T(v_1), \dots, T(v_n)\}$ genera W .

Por lo tanto $\{T(v_1), \dots, T(v_n)\}$ es una base de W .

(4) \Rightarrow (1). Como T de una base es una base, entonces

- T de un conjunto LI es un conjunto LI,
- T de un conjunto de generadores de V es un conjunto de generadores de W .

Por lo tanto, por proposición de p. 20, T es monomorfismo y epimorfismo.

Luego T es un isomorfismo. □

Definición 4.3.2

Dos espacios vectoriales V y W se dicen *isomorfos*, en símbolos $V \cong W$, si existe un isomorfismo $T : V \longrightarrow W$

Corolario 4.3.5 (del teorema 4.3.4)

Sean V y W espacios de vectoriales dimensión finita. Entonces

$$\dim V = \dim W \quad \Rightarrow \quad V \cong W.$$

Idea de la demostración

Si $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$ una base de V y $\mathcal{B}' = \{w_1, \dots, w_n\}$ una base de W

$$T : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}' \quad \text{definida por } T(v_i) = w_i,$$

se puede extender a un isomorfismo $T : V \rightarrow W$.



Ejemplo

Recordemos:

$$\mathbb{K}_n[x] = \{a_0 + a_1x + \cdots + a_{n-1}x^{n-1} : a_0, a_1, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{K}\}.$$

Entonces,

$$\mathbb{K}_n[x] \cong \mathbb{K}^n.$$

Demostración

Es consecuencia inmediata del corolario anterior, pues ambos tienen dimensión n .

Explícitamente, $1, x, \dots, x^{n-1}$ es base de $\mathbb{K}_n[x]$ y sea e_1, \dots, e_n la base canónica de \mathbb{K}^n , entonces un isomorfismo de $\mathbb{K}_n[x]$ a \mathbb{K}^n viene dado por la única transformación lineal $T : \mathbb{K}_n[x] \rightarrow \mathbb{K}^n$ tal que

$$T(x^i) = e_{i+1}, \quad i = 0, \dots, n-1.$$



Resultados MI 1 (a tener en cuenta)

Sea $T : V \longrightarrow W$ una transformación lineal con V, W de dimensión finita.

- $\{v_1, \dots, v_k\}$ genera $V \Rightarrow \{T(v_1), \dots, T(v_k)\}$ genera $\text{Im}(T)$.
- $\dim V = \dim \text{Nu}(T) + \dim \text{Im}(T)$.
- T mono $\Leftrightarrow \text{Nu}(T) = 0$.
- T mono $\Leftrightarrow T$ de LI es LI.
- T epi $\Leftrightarrow T(\text{generadores de } V) = \text{generadores de } W$.
- T iso $\Leftrightarrow T(\text{base de } V) = \text{base de } W$.

Resultados MI 2 (a tener en cuenta)

Si $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, sea A la matriz $m \times n$ asociada a A y R una MRF de A .

- $\text{Nu}(T) = \{x : Ax = 0\}$, $\text{Im}(T) = \{b : Ax = b, \text{algún } x\}$.
- $\text{rango fila de } A = \text{rango columna de } A$.
- $|\text{filas no nulas de } A| = \text{rg-fil } A = \text{rg-col } A = \dim \text{Im}(A)$.
- $\dim \text{Nu}(A) = |\text{variables libres de } RX = 0| = n - \text{rg-fil } A$.