Práctico 9

Coordenadas, Matrices de transformaciones lineales y Diagonalización

Objetivos.

- Aprender a calcular coordenadas y la matriz de cambio de base.
- Aprender a calcular la matriz de una transformación lineal.
- Saber decidir si una transformación lineal es diagonalizable.
- Aprender a construir transformaciones lineales que satisfagan las propiedades solicitadas.

Ejercicios. Los ejercicios con el símbolo ⓐ tienen una ayuda al final del archivo para que recurran a ella después de pensar un poco.

(1) Dar las coordenadas del polinomio $2x^2 + 10x - 1 \in \mathbb{K}_3[x]$ en la base ordenada

$$\mathcal{B} = \{1, x+1, x^2+x+1\}.$$

(2) Dar las coordenadas de la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ en la base ordenada

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

Más generalmente, dar las coordenadas de cualquier matriz $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ en la base $\mathcal{B}$.

(3) (a) Dar una base del subespacio $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{K}^3 \mid x - y + 2z = 0\}$.

(b) Dar las coordenadas de $w = (1, -1, -1)$ en la base que haya dado en el item anterior.

(c) Dado $(x, y, z) \in W$, dar las coordenadas de (x, y, z) en la base que haya calculado en el item anterior.

(4) Sea $\mathcal{C}$ la base canónica de $\mathbb{K}^2$ y $\mathcal{B} = \{(1, 0), (1, 1)\}$ otra base de $\mathbb{R}^2$.

(a) Encontrar la matriz de cambio de base $P_{\mathcal{C},\mathcal{B}}$ de $\mathcal{C}$ a $\mathcal{B}$.
(b) Encontrar la matriz de cambio de base $P_{\mathcal{B},\mathcal{C}}$ de $\mathcal{B}$ a $\mathcal{C}$.
(c) ¿Qué relación hay entre $P_{\mathcal{C},\mathcal{B}}$ y $P_{\mathcal{B},\mathcal{C}}$?
(d) Encontrar $(x, y), (z, w) \in \mathbb{K}^2$ tal que $[(x, y)]_{\mathcal{B}} = (1, 4)$ y $[(z, w)]_{\mathcal{B}} = (1, -1)$.
(e) Determinar las coordenadas de $(2, 3)$ y $(0, 1)$ en las bases $\mathcal{B}_2$.

(5) Sea $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^{3\times 3}$.

(a) Calcular la inversa de P.
(b) ⓐ Dar una base ordenada $\mathcal{B}$ de $\mathbb{K}^3$ tal que P es la matriz de cambio de coordenadas de la base canónica de $\mathbb{K}^3$ a la base $\mathcal{B}$.
(c) Encontrar $(x, y, z) \in \mathbb{K}^3$ tal que su vector de coordenadas con respecto a $\mathcal{B}$ es

$$[(x, y, z)]_{\mathcal{B}} = (2, -1, -1).$$

(6) Sea $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ la transformación lineal definida por

$$T(x, y, z) = (x - y, x - z).$$

Sean $\mathcal{C}$ la base canónica de $\mathbb{R}^3$ y $\mathcal{B}' = \{(1, 1), (1, -1)\}$ base de $\mathbb{R}^2$.

(a) Calcular la matriz $[T]_{\mathcal{C}\mathcal{B}'}$, es decir la matriz de T respecto de las bases $\mathcal{C}$ y $\mathcal{B}'$.

(b) Sea $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Dar las coordenadas de $T(x, y, z)$ respecto de la base $\mathcal{B}'$.

(c) Sea $S : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ una transformación lineal tal que su matriz respecto a las bases $\mathcal{B}'$ y $\mathcal{C}$ es

$$[S]_{\mathcal{B}'\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Calcular la matriz de la composición $T \circ S : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ con respecto a la base $\mathcal{B}'$.

(d) Calcular la matriz de $T \circ S$ respecto a la base $\mathcal{B}$ del Ejercicio (4) usando las matrices de cambio de base calculadas en ese ejercicio.

(7) Sea A la primer matriz del Ejercicio 1 del Práctico 5 y $T_A : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ la transformación lineal dada por $T_A(v) = Av$. Hallar los autovalores de T_A, y para cada uno de ellos, dar una base de autovectores del correspondiente autoespacio. Decidir si T_A es o no diagonalizable. En caso de serlo dar una matriz invertible P tal que $P^{-1}AP$ es diagonal.

Repetir esto para cada una de las matrices de dicho ejercicio.

(8) Repetir el ejercicio anterior para cada matriz del Ejercicio 1 del Práctico 5 pero ahora consideradando a la transformación como una transformación lineal entre los $\mathbb{C}$-espacios vectoriales $\mathbb{C}^n$.

(9) Sea $T : V \longrightarrow V$ una transformación lineal y $v \in V$ un autovector de autovalor λ. Probar las siguientes afirmaciones.

(a) Si $\lambda = 0$, entonces $v \in \mathrm{Nu}(T)$.

(b) Si $\lambda \neq 0$, entonces $v \in \mathrm{Im}(T)$.

(c) Si $T^2 = 0$, entonces $T - \mathrm{Id}$ es un isomorfismo.

(10) ⓐ Sea V un espacio vectorial de dimensión 3 y $T : V \longrightarrow V$ una transformación lineal. Supongamos que existe $v \in V$ tal que $T^3(v) = 0$ pero $T^2(v) \neq 0$.

(a) ⓐ Probar que $\mathcal{B} = \{v, T(v), T^2(v)\}$ es una base de V.

(b) Calcular la matriz de T respecto de la base $\mathcal{B}$.

(c) Calcular los autovalores de T y sus correspondientes autoespacios. Decidir si T es diagonalizable.

(11) Definir en cada caso una transformación lineal $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ que satisfaga las condiciones requeridas. ¿Es posible definir más de una transformación lineal?

(a) $(1, 0, 0) \in \mathrm{Nu}(T)$

(b) $(1, 0, 0) \in \mathrm{Im}(T)$

(c) $(1, 0, 0), (1, 2, 1) \in \mathrm{Nu}(T)$ y $(1, 0, 0) \in \mathrm{Im}(T)$

(12) Decidir si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justificar.

(a) Existe una transformación lineal $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $\langle (1, 2, 3), (2, 1, -1) \rangle$ es el autoespacio asociado a 0 y $\langle (3, 1, 1), (1, 1, 3) \rangle$ es el autoespacio asociado a 5.

(b) Existe una transformación lineal $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $\langle (1, 2, 3) \rangle$ es el autoespacio asociado a 0 y $\langle (3, 1, 1) \rangle$ es el autoespacio asociado a 5.

(c) Existe una transformación lineal $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $\{(1,0,1),(0,1,0)\}$ es una base de $\mathrm{Nu}(T)$ y $\{(1,0,-1),(0,1,0)\}$ es una base de la $\mathrm{Im}(T)$.

(d) Existe una transformación lineal $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $\{(1,0,1)\}$ es una base de $\mathrm{Nu}(T)$ y $\{(1,0,-1),(0,1,0)\}$ es una base de la $\mathrm{Im}(T)$.

Ejercicios de repaso. Si ya hizo los ejercicios anteriores continue con la siguiente guía. Los ejercicios que siguen son similares y le pueden servir para practicar antes de los exámenes.

(13) Repetir el ejercicio (4) con la base canónica de $\mathbb{R}^3$ y la base $\mathcal{B}_3 = \{(1,0,0),(1,1,0),(1,1,1)\}$. Considerar las 3-upla $(1,2,3)$ y $(0,1,2)$ para los últimos dos items.

(14) Repetir los últimos items del Ejercicio (6) con la transformación lineal $S \circ T$ y la base del ejercicio anterior.

(15) ⓐ Sea V un espacio vectorial con base $\mathcal{B} = \{v_1, ..., v_n\}$ y $A = (a_{ij}) \in \mathbb{K}^{n\times n}$ una matriz. Sea $\mathcal{B}' = \{v'_1, ..., v'_n\}$ donde

$$v'_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} v_i \text{ para todo } 1 \leq j \leq n.$$

Probar que $\mathcal{B}'$ es una base de V si y sólo si A es inversible. En tal caso determinar la matriz de cambio de base de la base $\mathcal{B}'$ a la base $\mathcal{B}$ y viceversa.

(16) Para cada una de las siguientes transformaciones lineales, hallar sus autovalores, y para cada uno de ellos, dar una base de autovectores del espacio propio asociado. Luego, decir si la transformación considerada es o no diagonalizable.
(a) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $T(x,y) = (y,0)$.
(b) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $T(x,y,z) = (x+2z, -x-y+z, x+2y+z)$.
(c) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $T(x,y,z) = (4x+y+5z, 4x-y+3z, -12x+y-11z)$.
(d) $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$, $T(x,y,z,w) = (2x-y, x+4y, z+3w, z-w)$.

(17) Repetir el Ejercicio (10) pero para cualquier $n \in \mathbb{N}$ en vez de 3.

Ayudas. (5b) Usar que $P_{\mathcal{C},\mathcal{B}} = P_{\mathcal{B},\mathcal{C}}^{-1}$ y recordar como se define $P_{\mathcal{B},\mathcal{C}}$.

(10a) Es suficiente probar que $\mathcal{B} = \{v, T(v), T^2(v)\}$ es LI. Sean a, b, c escalares tales que $av + bT(v) + cT^2(v) = 0$. Si aplicamos T^2 en ambos lados deducimos que $aT^2(v) = 0$ dado que $T^3(v) = 0$. Entonces $a = 0$ porque (completar argumento). Con un razonamiento similar deducir que $a = b = c = 0$.

(15) Es suficiente probar que $\mathcal{B}'$ es LI si y sólo si A es invertible. Usar una estrategia similar a la demostración del Teorema 3.3.1 para probar esta equivalencia.