

Álgebra/Álgebra II

Clase 3 - Rectas y planos 1

FAMAF / UNC

1° de septiembre de 2020

En esta clase introduciremos las nociones de “norma”, “distancia” y “ángulo” en \mathbb{R}^n usando el producto escalar.

Además veremos varias maneras de describir una recta en el plano.

Estas diapositivas están basadas en las Secciones 1.3 y 1.5 de las *Notas de Álgebra II* disponibles en Classroom, siguiendo la misma numeración. Allí se pueden encontrar más detalles y el sustento teórico de todas nuestras afirmaciones.

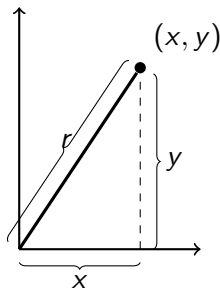
La norma de un vector

Definición

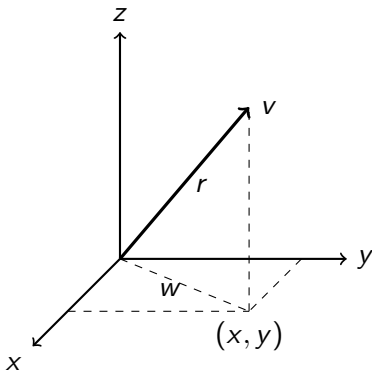
Si $v \in \mathbb{R}^n$, la *norma de v* o *longitud de v* es

$$\|v\| = \sqrt{\langle v, v \rangle}.$$

Si $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, entonces $\|(x, y)\| = \sqrt{x^2 + y^2}$ (teorema de Pitágoras).



Si $n = 3$, por la aplicación reiterada del teorema de Pitágoras obtenemos que la longitud de $v = (x, y, z)$ es $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.



En general, si $v = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \Rightarrow \|v\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}$.

Proposición

Sea $v \in \mathbb{R}^n$ y $\lambda \in \mathbb{R}$, entonces

$$\|\lambda v\| = |\lambda| \|v\|.$$

Demostración

$\|\lambda v\|^2 = \langle \lambda v, \lambda v \rangle$, por **P3**,

$$\langle \lambda v, \lambda v \rangle = \lambda \langle v, \lambda v \rangle = \lambda^2 \langle v, v \rangle.$$

Es decir $\|\lambda v\|^2 = \lambda^2 \|v\|^2$, por lo tanto, $\|\lambda v\| = |\lambda| \|v\|$. □

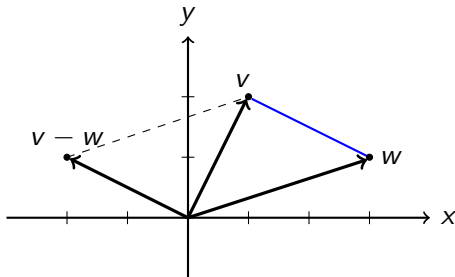
Distancia en \mathbb{R}^n

Definición

Sea $v, w \in \mathbb{R}^n$, entonces la *distancia* entre v y w es $\|v - w\|$.

Observación

La norma del vector $v - w$ es la longitud del segmento que une w con v .



Interpretación geométrica del producto escalar

Sean $v_1 = (x_1, y_1)$ y $v_2 = (x_2, y_2)$ en \mathbb{R}^2 ; veremos a continuación que

$$\langle v_1, v_2 \rangle = \|v_1\| \|v_2\| \cos(\theta), \quad (1)$$

donde θ es el ángulo comprendido entre v_1 y v_2 .

Sea α_1 el ángulo comprendido entre v_1 y el eje horizontal y α_2 el ángulo comprendido entre v_2 y el eje horizontal. Entonces,

$$v_1 = \|v_1\|(\cos(\alpha_1), \sin(\alpha_1)), \quad v_2 = \|v_2\|(\cos(\alpha_2), \sin(\alpha_2)),$$

por lo tanto

$$\langle v_1, v_2 \rangle = \|v_1\| \|v_2\| (\cos(\alpha_1) \cos(\alpha_2) + \sin(\alpha_1) \sin(\alpha_2)).$$

Por otro lado, por la propiedad de la suma de los cosenos tenemos que

$$\cos(\alpha_1) \cos(\alpha_2) + \sin(\alpha_1) \sin(\alpha_2) = \cos(\alpha_1 - \alpha_2).$$

Es decir,

$$\langle v_1, v_2 \rangle = \|v_1\| \|v_2\| \cos(\alpha_1 - \alpha_2),$$

y precisamente, $\theta = \alpha_1 - \alpha_2$ es el ángulo comprendido entre v_1 y v_2 .

Esto se puede generalizar a \mathbb{R}^n : el ángulo comprendido entre v_1 y v_2 es

$$\theta = \arccos \left(\frac{\langle v_1, v_2 \rangle}{\|v_1\| \|v_2\|} \right).$$

Vectores perpendiculares

El producto escalar $\langle v, w \rangle$ puede ser igual a 0 para determinados vectores, incluso ambos distintos de 0.

Por ejemplo, si $v = (1, 2, 3)$ y $w = (2, 1, -\frac{4}{3})$, entonces

$$\langle v, w \rangle = 2 + 2 - 4 = 0.$$

Definición

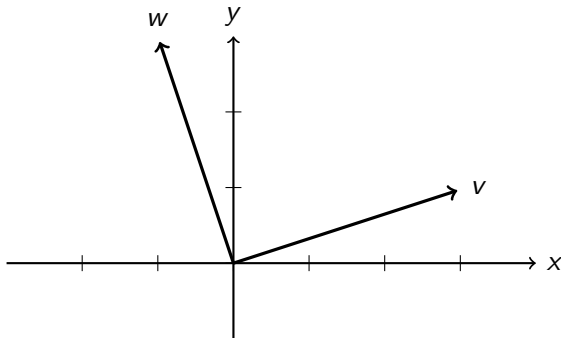
Decimos que dos vectores v y w en \mathbb{R}^n son *perpendiculares* u *ortogonales* si $\langle v, w \rangle = 0$. Cuando v y w son ortogonales denotamos $v \perp w$.

Ejemplo

En \mathbb{R}^2 consideremos los vectores

$$v = (3, 1), \quad w = (-1, 3),$$

representados en la siguiente figura:



Luego, vemos que $\langle v, w \rangle = 0$, y por lo tanto v es perpendicular a w , lo cual concuerda con nuestra intuición.

Es claro que esta definición algebraica de perpendicularidad está de acuerdo con la interpretación geométrica del producto escalar:

v y w perpendiculares (geométricamente)



el ángulo comprendido entre v y w es $\theta = 90^\circ$



$$\cos(\theta) = 0$$



$$\langle v, w \rangle = \|v\| \|w\| \cos(\theta) = 0.$$

Rectas en \mathbb{R}^2

Definición

Una *recta* está formada por el conjunto de puntos (x, y) en \mathbb{R}^2 que satisfacen la ecuación

$$ax + by = c, \quad (2)$$

con $a, b, c \in \mathbb{R}$ y tal que a, b no pueden ser simultáneamente 0. También suele decirse que la ecuación (??) es la *ecuación implícita de la recta*.

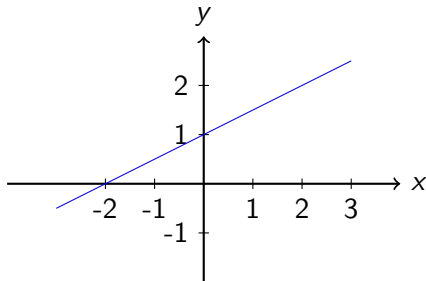
Más formalmente, la recta es el conjunto

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : ax + by = c\}.$$

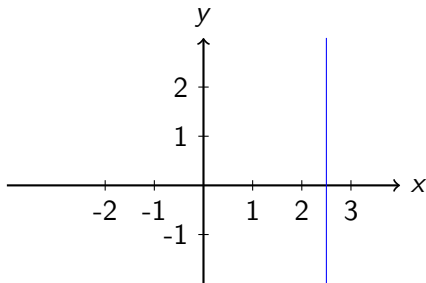
Observación

- Si $b \neq 0$, entonces la recta es $y = -\frac{a}{b}x + \frac{c}{b}$,
- si $b = 0$, entonces $a \neq 0$ y la recta es $x = \frac{c}{a}$.

Rectas en \mathbb{R}^2 : ejemplos



La recta $-\frac{1}{2}x + y = 1$.



La recta $x = 2.5$.

Si consideramos el vector (a, b) en \mathbb{R}^2 , $c \in \mathbb{R}$ y L la recta definida por los puntos (x, y) tal que $ax + by = c$, entonces

$$\begin{aligned} L &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : ax + by = c\} \\ &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \langle (x, y), (a, b) \rangle = c\}. \end{aligned}$$

Ahora bien, consideremos (x_0, y_0) un punto de la recta, entonces, obviamente tenemos que $\langle (x_0, y_0), (a, b) \rangle = c$.

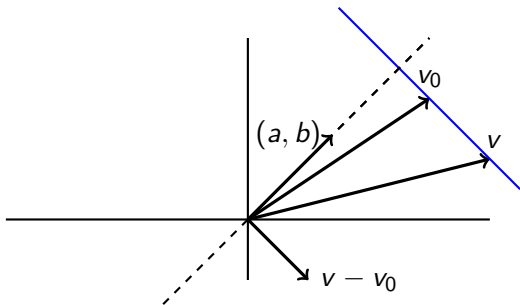
Por lo tanto

$$L = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \langle (x, y), (a, b) \rangle = \langle (x_0, y_0), (a, b) \rangle\}.$$

Por la propiedad **P2** del producto escalar, llegamos a la conclusión que

$$L = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \langle (x, y) - (x_0, y_0), (a, b) \rangle = 0\}.$$

Sea $v_0 = (x_0, y_0)$ y $v = (x, y)$, representemos gráficamente la situación:



La recta L es, entonces, *la recta perpendicular a (a, b) y que pasa por v_0 .*

Conclusión

La ecuación implícita de la recta L perpendicular a (a, b) y que pasa por (x_0, y_0) es

$$ax + by = \langle (x_0, y_0), (a, b) \rangle.$$

Ejemplo

Encontrar la ecuación implícita de la recta que pasa por $(2, -1)$ y es perpendicular a $(-2, 3)$.

Solución

Por lo visto anteriormente la recta esta formada por los puntos (x, y) tales que

$$-2x + 3y = c$$

y debemos determinar el valor de c . Como $(2, -1)$ pertenece a la recta

$$c = -2 \cdot 2 + 3 \cdot (-1) = -7.$$

Luego, la ecuación implícita de la recta es

$$-2x + 3y = -7.$$

