Álgebra/Álgebra II
Clase 1 - Números complejos

FAMAF / UNC

25 de agosto de 2020

Introducción

En esta clase introduciremos el conjunto $\mathbb{C}$ de números complejos junto a sus operaciones de suma y multiplicación. Además,

- Definiremos los conceptos de "conjugado", "argumento" y "módulo" de un número complejo;
- Aprenderemos a calcular el inverso de un número complejo;
- Veremos como representar gráficamente los números complejos;

Estas diapositivas estan basadas en la sección A.2 de las *Notas de Álgebra II* del curso, siguiendo la misma numeración.

Números complejos: definición

¿La ecuación $x^2 + 1 = 0$ tiene solución?

En $\mathbb{R}$ no: $x^2 \geq 0$ y por lo tanto $x^2 + 1 > 0$.

Podemos extender $\mathbb{R}$ a otro cuerpo, de tal forma que *toda* ecuación polinómica con coeficentes en $\mathbb{R}$ tenga solución.

Definición

Los *números complejos* es el conjunto $\mathbb{C}$ de los pares ordendados (a, b), denotados $a + ib$, con a, b en $\mathbb{R}$, con las operaciones '$+$' y '$\cdot$', definidas

$$(a + ib) + (c + id) := (a + c) + i(b + d), \tag{1}$$

$$(a + ib) \cdot (c + id) := (ac - bd) + i(ad + bc). \tag{2}$$

- La definición de la suma de dos números complejos es "coordenada a coordenada".

- Por la definición de producto:

$$i^2 = (0 + i \cdot 1)(0 + i \cdot 1) = (0 \cdot 0 - 1 \cdot 1) + i(0 \cdot 1 + 1 \cdot 0) = -1.$$

  Luego, $i^2 = -1$ e i es la solución de la ecuación polinómica $x^2 + 1 = 0$.

- Sabiendo que $i^2 = -1$ y la propiedad distributiva, no necesitamos memorizar la fórmula del producto:

$$\begin{aligned}(a + ib)(c + id) &= ac + iad + ibc + i^2 bd \\ &= ac + iad + ibc - bd \\ &= (ac - bc) + i(ad + bc).\end{aligned}$$

- Al número complejo $i = 0 + i \cdot 1$ lo llamamos el *imaginario puro*.
- Si $z = a + ib$ es un número complejo, diremos que a es la *parte real* de z y la denotamos $a = \mathfrak{Re}\, z$. Por otro lado, b es la *parte imaginaria* de z que es denotada $b = \mathfrak{Im}\, z$.
- Es claro que

$$a + bi = c + di \quad \Leftrightarrow \quad a = c \ \wedge \ b = d.$$

- $\mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$, con la correspondencia $a \to a + i \cdot 0$ y observamos que si nos restringimos a $\mathbb{R}$, tenemos las reglas de adición y multiplicación usuales.

Con la definición de suma y producto los números complejos forman un *anillo conmutativo con 1*.

Es decir, cumplen todas las propiedades de los números enteros, salvo las de orden.

En particular la suma y el producto son conmutativos, asociativos, se cumplen las propiedades distributivas, etc.

Más aún, como veremos más adelante, $\mathbb{C}$ es un cuerpo (como lo es $\mathbb{R}$): es decir todo número complejo no nulo tiene un inverso multiplicativo.

Simbólicamente

$$z \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \exists w \text{ tal que } zw = 1.$$

(w se denota z^{-1}).

- La definición de la suma de dos números complejos es "coordenada a coordenada".
- $0 = 0 + i \cdot 0 \in \mathbb{C}$, es el elemento neutro de la suma.

$$(a + ib) + (0 + i \cdot 0) = (a + 0) + i \cdot (b + 0) = a + i \cdot b.$$

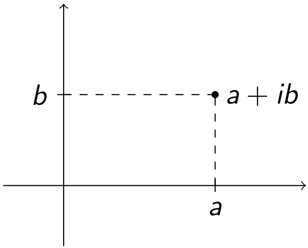
- Si $z = a + ib$, entonces $-z = -a - ib$ es el opuesto aditivo de z.

$$(a + ib) + (-a - i \cdot b) = (a - a) + i \cdot (b - b) = 0 + i \cdot 0.$$

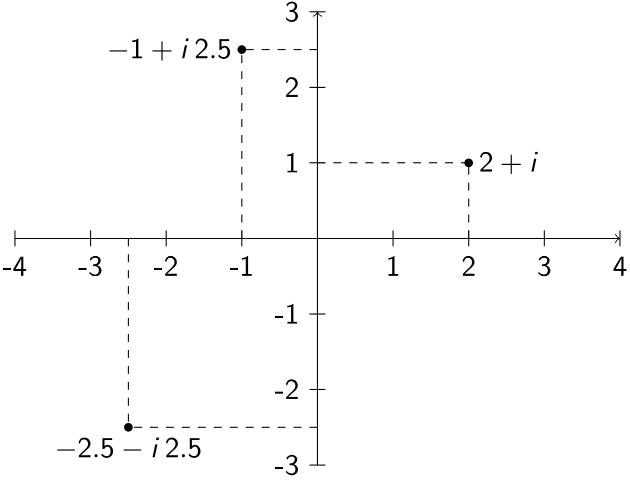
- $1 = 1 + i \cdot 0 \in \mathbb{C}$, es el elemento neutro del producto.

Representación gráfica de los números complejos

Hemos definido los números complejos como pares ordenados y como tales es posible representarlos en el plano $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$:

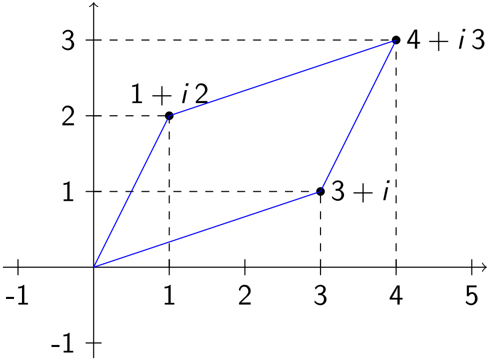


Representemos gráficamente los números $2 + i$, $-1 + i\,2.5$ y $-2.5 - i\,2.5$:



Con esta representación gráfica la definición de la suma de dos números complejos es la suma "coordenada a coordenada".

Ejemplificamos la suma de números complejos en el plano:

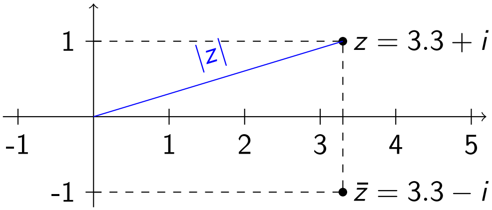


Módulo y conjugado de un número complejo

Definición

Sea $z = a + ib \in \mathbb{C}$.

- El *módulo* de z es $\quad |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$.
- El *conjugado* de z es $\quad \bar{z} = a - ib$.



Proposición

Sean z y w números complejos. Entonces,

1. $|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0.$
2. $z\bar{z} = |z|^2.$
3. $\overline{z+w} = \overline{z} + \overline{w}.$
4. $\overline{zw} = \overline{z}\,\overline{w}.$

Demostración

1. Si $z = a + ib$,

$$|z| = 0 \Leftrightarrow \sqrt{a^2 + b^2} \Leftrightarrow a^2 + b^2 \Leftrightarrow a^2 = 0 \wedge b^2 = 0$$
$$\Leftrightarrow a = 0 \wedge b = 0 \Leftrightarrow z = 0.$$

2. Si $z = a + ib$, entonces $\bar{z} = a - ib$, y

$$z\bar{z} = (a+ib)(a-ib) = a^2 + iab - iba - i^2b^2 = a^2 - (-1)b^2 = a^2 + b^2.$$

3. Si $z = a + ib$ y $w = c + id$, entonces

$$\begin{aligned} \overline{z+w} &= \overline{(a+c) + i(b+d)} = (a+c) - i(b+d), \\ \overline{z} + \overline{w} &= a - ib + c - id = (a+c) - i(b+d). \end{aligned}$$

Por lo tanto $\overline{z+w} = \overline{z} + \overline{w}$.

4. Si $z = a + ib$ y $w = c + id$, entonces

$$\begin{aligned} \overline{zw} &= \overline{(a+ib)(c+id)} = \overline{(ac-bd) + i(ad+bc)} = (ac-bd) - i(ad+bc), \\ \overline{z}\,\overline{w} &= (a-ib)(c-id) = (ac-bd) - i(ad+bc). \end{aligned}$$

Por lo tanto $\overline{zw} = \overline{z}\,\overline{w}$. $\square$

Inverso de un número complejo

Proposición

Sea z un número complejo no nulo. Entonces, $z^{-1} = \dfrac{\overline{z}}{|z|^2}$.

Demostración

Ya vimos que $z\bar{z} = |z|^2$. Como $z \neq 0$, tenemos que $|z| \neq 0$, luego

$$z\frac{\bar{z}}{|z|^2} = \frac{z\bar{z}}{|z|^2} = \frac{|z|^2}{|z|^2} = 1.$$

$\square$

Observación

Multiplicar por un número real es "coordenada a coordenada", luego si $z = a + ib$, tenemos que $z^{-1} = \frac{1}{|z|^2}\,\overline{z}$, es decir

$$(a+ib)^{-1} = \frac{a}{a^2+b^2} - i\frac{b}{a^2+b^2}.$$

Ejemplo

Escribir el inverso de $-1+2i$ en la forma $a+bi$.

Solución

Primero averiguamos el módulo al cuadrado:

$$|-1+2i|^2 = (-1)^2 + 2^2 = 1 + 4 = 5.$$

Como $\overline{-1+2i} = -1-2i$,

$$(-1+2i)^{-1} = -\frac{1}{5} - i\frac{2}{5}.$$

Nunca está demás comprobar el resultado:

$$(-1+2i)(-\frac{1}{5} - i\frac{2}{5}) = \frac{1}{5} + \frac{2}{5}i - \frac{2}{5}i + \frac{4}{5} = \frac{1}{5} + \frac{4}{5} = 1$$

$\square$

Soluciones de ecuaciones polinomiales a coeficientes en $\mathbb{C}$

Extendiendo los números reales a los complejos, encontramos un conjunto de números en donde la ecuación $x^2 + 1 = 0$ tiene solución.

¿Tendremos que extender $\mathbb{R}$ aún más para encontrar soluciones a ecuaciones polinomiales más complejas?

Le respuesta es:

Teorema fundamental del álgebra

La ecuación polinómica

$$x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0,$$

con $a_i \in \mathbb{C}$ $(0 \leq i \leq n-1)$ tiene solución en $\mathbb{C}$.