

**Práctico 0**  
**Álgebra II – Año 2024/1**  
**FAMAF**

**Objetivos.**

- o Familiarizarse con los números complejos.
- o Aprender a operar con números complejos (sumar, multiplicar, calcular inversos, conjugados y normas).

**Ejercicios.**

- (1) Expresar los siguientes números complejos en la forma  $a + ib$ . Hallar el módulo y conjugado de cada uno de ellos, y graficarlos.

a)  $(-1 + i)(3 - 2i)$       b)  $i^{131} - i^9 + 1$       c)  $\frac{1+i}{1+2i} + \frac{1-i}{1-2i}$

- (2) Encontrar números reales  $x$  e  $y$  tales que  $3x + 2yi - xi + 5y = 7 + 5i$

- (3) Probar que si  $z \in \mathbb{C}$  tiene módulo 1 entonces  $z + z^{-1} \in \mathbb{R}$ .

- (4) Probar que si  $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  entonces el polinomio  $x^2 + a^2$  tiene siempre dos raíces complejas distintas.

- (5) Simplificar las siguientes expresiones:

a)  $\left(\frac{-3}{\frac{4}{5} + 1}\right)^{-1} \cdot \left(\frac{4}{5} - 1\right) + \frac{1}{3},$       b)  $\frac{a}{2\pi - 6}(\pi - 3)^2 - \frac{2a(\pi^2 - 9)}{\pi - 3}.$

- (6) Demostrar que dados  $z, z_1, z_2$  en  $\mathbb{C}$  se cumple:

$$|\bar{z}| = |z|, \quad |z_1 z_2| = |z_1| |z_2|.$$

- (7) Sean  $z = 1 + i$  y  $w = \sqrt{2} - i$ . Calcular:

- a)  $z^{-1}; 1/w; z/w; w/z.$   
b)  $1 + z + z^2 + z^3 + \dots + z^{2019}.$   
c)  $(z(z + w)^2 - iz)/w.$

- (8) Sumar y multiplicar los siguientes pares de números complejos

- a)  $2 + 3i$  y  $4.$   
b)  $2 + 3i$  y  $4i.$   
c)  $1 + i$  y  $1 - i.$   
d)  $3 - 2i$  y  $1 + i.$

- (9) Expresar los siguientes números complejos en la forma  $a+ib$ . Hallar el módulo, argumento y conjugado de cada uno de ellos y graficarlos.

a)  $2e^{i\pi} - i$ ,      b)  $i^3 - 2i^{-7} - 1$ ,      c)  $(-2 + i)(1 + 2i)$ .

- (10) Sean  $a, b \in \mathbb{C}$ . Decidir si existe  $z \in \mathbb{C}$  tal que:

- a)  $z^2 = b$ . ¿Es único? ¿Para qué valores de  $b$  resulta  $z$  ser un número real?  
 b)  $z$  es imaginario puro y  $z^2 = 4$ .  
 c)  $z$  es imaginario puro y  $z^2 = -4$ .

**Ejercicios de repaso.** Si ya hizo los ejercicios anteriores continúe a la siguiente guía. Los ejercicios que siguen son similares a los anteriores y le pueden servir para practicar antes de los exámenes.

- (11) Expresar los siguientes números complejos en la forma  $a+ib$ . Hallar el módulo y conjugado de cada uno de ellos, y graficarlos.

(a)  $(\cos \theta - i \sin \theta)^{-1}$ ,  $0 \leq \theta < 2\pi$ ,      (b)  $3i(1 + i)^4$ ,      (c)  $\frac{1+i}{1-i}$

- (12) Sea  $z = 2 + \frac{1}{2}i$ , calcular

a)  $\frac{(z+i)(z-i)}{z^2+1}$ .      b)  $z - 2 + \frac{1}{z-2}$ .      c)  $\left| \frac{1}{z-i} \right|^2$ .

- (13) Sea  $z \in \mathbb{C}$ . Calcular  $\frac{1}{z} + \frac{1}{\bar{z}} - \frac{1}{|z|^2}$ .

- (14) (Desigualdad triangular) Sean  $w$  y  $z$  números complejos. Probar que

$$|w + z| \leq |w| + |z|,$$

y la igualdad se cumple si y sólo si  $w = r \cdot z$  para algún número real  $r \geq 0$ .  
 En general, sean  $z_1, z_2, \dots, z_n$  números complejos. Probar que

$$\left| \sum_{k=1}^n z_k \right| \leq \sum_{k=1}^n |z_k|.$$

- (15) Sean  $w$  y  $z$  números complejos. Entonces

$$||w| - |z|| \leq |w - z|.$$