Práctico 5
Álgebra II – Año 2024/1
FAMAF

AUTOVALORES Y AUTOVECTORES

Objetivos.

- Familiarizarse con las nociones de autovalor y autovector de una matriz cuadrada.
- Aprender a calcular el polinomio característico, los autovalores, y los autoespacios de una matriz cuadrada.

Ejercicios. Los ejercicios con el símbolo ⓐ tienen una ayuda al final del archivo para que recurran a ella después de pensar un poco.

(1) Para cada una de las siguientes matrices, hallar sus autovalores reales, y para cada autovalor, dar una descripción paramétrica del autoespacio asociado sobre $\mathbb{R}$.

$$\text{(a)}\ \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}, \quad \text{(b)}\ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}, \quad \text{(c)}\ \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad \text{(d)}\ \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ 1 & -1 \end{bmatrix},$$

$$\text{(e)}\ \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 1 & \lambda & 0 \\ 0 & 1 & \lambda \end{bmatrix},\ \lambda \in \mathbb{R}, \quad \text{(f)}\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \operatorname{sen}\theta \\ 0 & -\operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix}, 0 \leq \theta < 2\pi.$$

(2) Calcular los autovalores complejos de las matrices (d) y (f) del ejercicio anterior, y para cada autovalor, dar una descripción paramétrica del autoespacio asociado sobre $\mathbb{C}$.

Observación. Es oportuno destacar algunos fenómenos que podemos observar en los ejercicios (1)-(2).

(i) Una matriz con coeficientes reales puede no tener autovalores reales pero sí complejos (matriz (d)) o tener ambos (matriz (f)).
(ii) Para describir paramétricamente los autoespacios podemos necesitar distintas cantidades de parámetros para los distintos autovalores (la matriz (c)). Esta cantidad mínima de parámetros es lo que llamaremos *dimensión*.
(iii) La cantidad de autovalores distintos es menor o igual al tamaño de la matriz. Incluso puede tener un sólo autovalor (matriz (d) y más generalmente la matriz (e) del Ejercicio (9)) o tener tantos como el tamaño (matriz (b) y (f)).

(3) Probar que hay una única matriz $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ tal que $(1,1)$ es autovector de autovalor 2, y $(-2,1)$ es autovector de autovalor 1.

(4) Sea $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$, y sea $f(x) = ax^2 + bx + c$ un polinomio, con $a, b, c \in \mathbb{K}$. Sea $f(A)$ la matriz $n \times n$ definida por

$$f(A) = aA^2 + bA + c\,\mathrm{Id}_n\,.$$

Probar que todo autovector de A con autovalor λ es autovector de $f(A)$ con autovalor $f(\lambda)$.

(5) Sea $A \in \mathbb{K}^{2\times 2}$.

a) Probar que el polinomio característico de A es $\chi_A(x) = x^2 - \mathrm{Tr}(A)x + \det(A)$.

b) Si A no es invertible, probar que los autovalores de A son 0 y $\mathrm{Tr}(A)$.

(6) Sea $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$. Probar que el polinomio $\tilde{\chi}_A(x) = \det(x\,\mathrm{Id}_n - A)$ y el polinomio característico de A tienen las mismas raíces.

Observación Algunos libros definen el polinomio característico de la matriz A como $\tilde{\chi}_A(x) = \det(x\,\mathrm{Id}_n - A)$. Como vemos en el ejercicio anterior, ambas definiciones sirven para encontrar autovalores de A. El polinomio $\tilde{\chi}_A(x)$ tiene la particularidad de ser mónico, o sea que el coeficiente del término x^n es 1.

(7) Probar que si $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ es una matriz nilpotente entonces 0 es el único autovalor de A. Usar esto para deducir que la matriz $\mathrm{Id}_n - A$ es invertible (esta es otra demostración del Ejercicio (13) del Práctico 3).

(8) Decidir si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justificar.

a) Existe una matriz invertible A tal que 0 es autovalor de A.

b) Si A es invertible, entonces todo autovector de A es autovector de A^{-1}.

Ejercicios de repaso Si ya hizo los ejercicios anteriores continue con la siguiente guía. Los ejercicios que siguen son similares y le pueden servir para practicar antes de los exámenes.

(9) Repetir los Ejercicios 1 y 2 con las siguientes matrices.

$$\text{(a)}\ \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \qquad \text{(b)}\ \begin{bmatrix} -9 & 4 & 4 \\ -8 & 3 & 4 \\ -16 & 8 & 7 \end{bmatrix}, \qquad \text{(c)}\ \begin{bmatrix} 4 & 4 & -12 \\ 1 & -1 & 1 \\ 5 & 3 & -11 \end{bmatrix},$$

(d) $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & -1 \end{bmatrix}$, (e) $\begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & \lambda & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \lambda & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & \lambda \end{bmatrix}$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

(10) Sea $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$, y sea $f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$, $n \geq 1$, $a_i \in \mathbb{K}$, $a_n \neq 0$, un polinomio. Sea $f(A)$ la matriz $n \times n$ definida por

$$f(A) = a_0 \operatorname{Id}_n + a_1 A + \cdots + a_n A^n.$$

Probar que todo autovector de A con autovalor λ es autovector de $f(A)$ con autovalor $f(\lambda)$.

(11) En este ejercicio consideraremos el polinomio $\tilde{\chi}_A(x) = \det(x \operatorname{Id}_n - A)$.

a) Calcular el polinomio $\tilde{\chi}_A(x)$ de las siguientes matrices.

$$A_2 := \begin{bmatrix} 0 & -a_0 \\ 1 & -a_1 \end{bmatrix}, \qquad A_3 := \begin{bmatrix} 0 & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & -a_2 \end{bmatrix}.$$

donde a_0, a_1, a_2 son escalares.

b) ⓐ Sean $a_0, ..., a_{n-1}$ escalares. Calcular el polinomio $\tilde{\chi}_A(x)$ de

$$A_n := \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & -a_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & & \vdots & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & -a_{n-1} \end{bmatrix}.$$

c) Deducir que dado un polinomio mónico $p(x)$ siempre existe una matriz A tal que $\tilde{\chi}_A(x) = p(x)$.

(12) ⓐ **En este ejercicio consideraremos el polinomio $\tilde{\chi}_A(x) = \det(x \operatorname{Id}_n - A)$.** Sea $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$, y $\tilde{\chi}_A(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0$. Probar que

a) $a_0 = (-1)^n \det(A)$.

b) $a_{n-1} = -\operatorname{Tr}(A)$.

(13) ⓐ **En este ejercicio consideraremos el polinomio $\tilde{\chi}_A(x) = \det(x \operatorname{Id}_n - A)$.** Sea $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Probar que si $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{C}$ son los autovalores de A (posiblemente repetidos), entonces se cumple que:

a) $\det(A) = \lambda_1 \cdots \lambda_n$.

b) $\operatorname{Tr}(A) = \lambda_1 + \cdots + \lambda_n$.

Aclaración. Los Ejercicios (12) (b) y (13) (b) no son fáciles de probar y no son evaluables. Pero ya que enunciamos los items (a) es interesante saber que valen los items (b).

Ayudas. (11) *b)* Desarrollar el determinante por la primera fila y hacer inducción.

(12) (a) Evaluar el polinomio $\tilde{\chi}_A(x)$ en un valor apropiado para obtener el término independiente a_0.

(12) (b) Desarrollar el determinante de $x \operatorname{Id} - A$ por la primera columna y hacer inducción en el tamaño de la matriz. Es decir, primero

$$\tilde{\chi}_A(x) = \det(x \operatorname{Id} - A) =$$
$$(x - a_{11}) \det((x \operatorname{Id} - A)(1|1)) + a_{21} \det((x \operatorname{Id} - A)(2|1)) + \cdots + (-1)^n a_{n1} \det((x \operatorname{Id} - A)(n|1)).$$

De estos sumandos, el único sumando donde hay x^{n-1} es $(x - a_{11}) \det((x \operatorname{Id} - A)(1|1))$. Además, $\det((x \operatorname{Id} - A)(1|1))$ es el polinomio característico de la submatriz $A(1|1)$. Podemos aplicar la hipótesis inductiva a esta matriz y deducir que el coeficiente de x^{n-1} en el producto de polinomios $(x - a_{11}) \det((x \operatorname{Id} - A)(1|1))$ es $-\operatorname{Tr}(A)$.

(13) Sobre $\mathbb{C}$ podemos descomponer el polinomio $\tilde{\chi}_A(x)$ de la siguiente manera

$$\tilde{\chi}_A(x) = (x - \lambda_1)(x - \lambda_2) \cdots (x - \lambda_n). \qquad (\diamondsuit)$$

Con esta igualdad podemos calcular los términos a_0 y a_{n-1} de $\tilde{\chi}_A(x)$ de dos maneras. La primera es la obtenida en el Ejercicio (12). La segunda es usando la multiplicación del lado derecho de $(\diamondsuit)$. Para el término a_0 hay que evaluar en un valor apropiado. Para el término a_{n-1} hay que notar que para obtener x^{n-1} debemos elegir una x de todos los factores salvo en uno y un término del estilo $-\lambda_i$. Igualando lo que obtengamos probamos el ejercicio.