

Práctico 1
Álgebra II – Año 2024/1
FAMAF

VECTORES EN \mathbb{R}^2 Y \mathbb{R}^3

Objetivos.

- Aprender las operaciones básicas de \mathbb{R}^2 y \mathbb{R}^3 (suma de vectores, multiplicación por escalares, producto escalar, calcular normas y ángulos).
- Familiarizarse con los conceptos de ortogonalidad y paralelismo.
- Aprender a describir rectas y planos de forma implícita y paramétrica.

Ejercicios

Los ejercicios con el símbolo @ tiene una ayuda al final del archivo para que recurran a ella después de pensar un poco.

Vectores y producto escalar.

- (1) Dados $v = (-1, 2, 0)$, $w = (2, -3, -1)$ y $u = (1, -1, 1)$, calcular:
- a) $2v + 3w - 5u$,
 - b) $5(v + w)$,
 - c) $5v + 5w$ (y verificar que es igual al vector de arriba).
- (2) Calcular los siguientes productos escalares.
- a) $\langle (-1, 2, 0), (2, -3, -1) \rangle$,
 - b) $\langle (4, -1), (-1, 2) \rangle$.
- (3) Dados $v = (-1, 2, 0)$, $w = (2, -3, -1)$ y $u = (1, -1, 1)$, verificar que:
- $$\langle 2v + 3w, -u \rangle = -2\langle v, u \rangle - 3\langle w, u \rangle$$
- (4) Probar que
- a) $(2, 3, -1)$ y $(1, -2, -4)$ son ortogonales.
 - b) $(2, -1)$ y $(1, 2)$ son ortogonales. Dibujar en el plano.
- (5) Encontrar
- a) un vector no nulo ortogonal a $(3, -4)$,
 - b) un vector no nulo ortogonal a $(2, -1, 4)$,
 - c) un vector no nulo ortogonal a $(2, -1, 4)$ y $(0, 1, -1)$.

(6) Encontrar la longitud de los vectores.

(a) $(2, 3)$,

(b) (t, t^2) ,

(c) $(\cos \phi, \sin \phi)$.

(7) Calcular $\langle v, w \rangle$ y el ángulo entre v y w para los siguientes vectores.

(a) $v = (2, 2), w = (1, 0)$,

(b) $v = (-5, 3, 1), w = (2, -4, -7)$.

(8) Recordar los vectores e_1, e_2 y e_3 dados en la página 12 del apunte. Sea $v = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$. Verificar que

$$v = x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3 = \langle v, e_1 \rangle e_1 + \langle v, e_2 \rangle e_2 + \langle v, e_3 \rangle e_3.$$

(9) Probar, usando sólo las propiedades **P1**, **P2**, y **P3** del producto escalar, que dados $v, w, u \in \mathbb{R}^n$ y $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$,

a) se cumple:

$$\langle \lambda_1 v + \lambda_2 w, u \rangle = \lambda_1 \langle v, u \rangle + \lambda_2 \langle w, u \rangle.$$

b) Si $\langle v, w \rangle = 0$, es decir si v y w son ortogonales, entonces

$$\langle \lambda_1 v + \lambda_2 w, \lambda_1 v + \lambda_2 w \rangle = \lambda_1^2 \langle v, v \rangle + \lambda_2^2 \langle w, w \rangle.$$

(10) Dados $v, w \in \mathbb{R}^n$, probar que si $\langle v, w \rangle = 0$, es decir si v y w son ortogonales, entonces

$$\|v + w\|^2 = \|v\|^2 + \|w\|^2.$$

¿Cuál es el nombre con que se conoce este resultado en \mathbb{R}^2 ?

(11) @ Sean $v, w \in \mathbb{R}^2$, probar usando solo la definición explícita del producto escalar en \mathbb{R}^2 que

$$|\langle v, w \rangle| \leq \|v\| \|w\| \quad (\text{Desigualdad de Schwarz}).$$

Rectas y planos.

(12) En cada uno de los siguientes casos determinar si los vectores \vec{vw} y \vec{xy} son equivalentes y/o paralelos.

a) $v = (1, -1), w = (4, 3), x = (-1, 5), y = (5, 2)$.

b) $v = (1, -1, 5), w = (-2, 3, -4), x = (3, 1, 1), y = (-3, 9, -17)$.

(13) Sea R_1 la recta que pasa por $p_1 = (2, 0)$ y es ortogonal a $(1, 3)$.

a) Dar la descripción paramétrica e implícita de R_1 .

b) Graficar en el plano a R_1 .

c) Dar un punto p por el que pase R_1 distinto a p_1 .

d) Verificar si $p + p_1$ y $-p$ pertenecen a R_1 .

(14) Repetir el ejercicio anterior con las siguientes rectas.

a) R_2 : recta que pasa por $p_2 = (0, 0)$ y es ortogonal a $(1, 3)$.

- b)* R_3 : recta que pasa por $p_3 = (1, 0)$ y es paralela a R_1 .
- (15) Calcular, numérica y gráficamente, las intersecciones $R_1 \cap R_2$ y $R_1 \cap R_3$.
- (16) Sea $v_0 = (2, -1, 1)$.
- Describir paramétricamente el conjunto $P_1 = \{w \in \mathbb{R}^3 : \langle v_0, w \rangle = 0\}$.
 - Describir paramétricamente el conjunto $P_2 = \{w \in \mathbb{R}^3 : \langle v_0, w \rangle = 1\}$.
 - ¿Qué relación hay entre P_1 y P_2 ?
- (17) Escribir la ecuación paramétrica y la ecuación normal de los siguientes planos.
- π_1 : el plano que pasa por $(0, 0, 0)$, $(1, 1, 0)$, $(1, -2, 0)$.
 - π_2 : el plano que pasa por $(1, 2, -2)$ y es perpendicular a la recta que pasa por $(2, 1, -1)$, $(3, -2, 1)$.
 - $\pi_3 = \{w \in \mathbb{R}^3 : w = s(1, 2, 0) + t(2, 0, 1) + (1, 0, 0); s, t \in \mathbb{R}\}$.
- (18) ¿Cuáles de las siguientes rectas cortan al plano π_3 del ejercicio (c)? Describir la intersección en cada caso.
- $\{w : w = (3, 2, 1) + t(1, 1, 1)\}$,
 - $\{w : w = (1, -1, 1) + t(1, 2, -1)\}$,
 - $\{w : w = (-1, 0, -1) + t(1, 2, -1)\}$,
 - $\{w : w = (1, -2, 1) + t(2, -1, 1)\}$.
- (19) Sea $L = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : ax + by = c\}$ una recta en \mathbb{R}^2 . Sean p y q dos puntos por los que pasa L .
- ¿Para qué valores de c puede asegurar que $(0, 0) \in L$?
 - ¿Para qué valores de c puede asegurar que $\lambda q \in L$? donde $\lambda \in \mathbb{R}$.
 - ¿Para qué valores de c puede asegurar que $p + q \in L$?
- (20) Sea L una recta en \mathbb{R}^2 . Probar que L pasa por $(0, 0)$ si y sólo si pasa por $p + \lambda q$ para todo par de puntos p y q de L y para todo $\lambda \in \mathbb{R}$.

Ayudas

- ((11)) Elevar al cuadrado y aplicar la definición.