Álgebra/Álgebra II
Clase 18 - Matriz de una transformación lineal. Diagonalización

FAMAF / UNC

06 de junio de 2024

Observación

Con sólo conocer cuanto vale la transformación en una base conocemos cuanto vale en todo el espacio.

En efecto, a la matriz de la transformación la armamos calculando la transformación en los vectores de una base. Y la proposición anterior nos dice que para calcular la transformación en un vector cualquier debemos multiplicar por esa matriz.

También vale lo siguiente.

Teorema

Sean V un espacio vectorial de dimensión finita sobre el cuerpo $\mathbb{K}$ y $\{v_1, \ldots, v_n\}$ una base ordenada de V. Sean W un espacio vectorial sobre el mismo cuerpo y $\{w_1, \ldots, w_n\}$, vectores cualesquiera de W. Entonces existe una única transformación lineal T de V en W tal que

$$T(v_j) = w_j, \quad j = 1, \ldots, n.$$

Corolario

Sea V un espacio vectorial de dimensión finita sobre el cuerpo $\mathbb{K}$, sean $\mathcal{B}$, $\mathcal{B}'$ bases ordenadas de V. Entonces

$$[v]_{\mathcal{B}} = [\mathrm{Id}]_{\mathcal{B}'\mathcal{B}}\,[v]_{\mathcal{B}'}, \quad \forall v \in V.$$

Demostración

Por la proposición 3.5.1 tenemos que

$$[\mathrm{Id}]_{\mathcal{B}'\mathcal{B}}[v]_{\mathcal{B}'} = [\mathrm{Id}(v)]_{\mathcal{B}} = [v]_{\mathcal{B}}.$$

Definición

Sea V un espacio vectorial de dimensión finita sobre el cuerpo $\mathbb{K}$ y sean $\mathcal{B}$ y $\mathcal{B}'$ bases ordenadas de V. La matriz $P = [\mathrm{Id}]_{\mathcal{B}'\mathcal{B}}$ es llamada la *matriz de cambio de base* de la base $\mathcal{B}'$ a la base $\mathcal{B}$.

Teorema 4.5.3

Sean V, W y Z espacios vectoriales de dimensión finita con bases $\mathcal{B}$, $\mathcal{B}'$ y $\mathcal{B}''$, respectivamente.

Sean $T : V \longrightarrow W$ y $U : W \longrightarrow Z$ transformaciones lineales.

Entonces la matriz de la tranfomación lineal

$$UT : V \longrightarrow Z,$$

es decir la composición de T con U, satisface

$$[UT]_{\mathcal{B}\mathcal{B}''} = [U]_{\mathcal{B}'\mathcal{B}''}[T]_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}$$

(multiplicación de matrices)

Corolario

Sea V un espacio vectorial de dimensión finita sobre el cuerpo $\mathbb{K}$ y sean $\mathcal{B}$ y $\mathcal{B}'$ bases ordenadas de V. La matriz de cambio de base $P = [\mathrm{Id}]_{\mathcal{B}'\mathcal{B}}$ es invertible y su inversa es $P^{-1} = [\mathrm{Id}]_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}$

Demostración

$$[\mathrm{Id}]_{\mathcal{B}\mathcal{B}'} P = [\mathrm{Id}]_{\mathcal{B}\mathcal{B}'} [\mathrm{Id}]_{\mathcal{B}'\mathcal{B}} = [\mathrm{Id}]_{\mathcal{B}'} = \mathrm{Id}\,.$$

Luego $= [\mathrm{Id}]_{\mathcal{B}\mathcal{B}'} = P^{-1}$.

$\square$

Notación

Si $T : V \longrightarrow V$ es Una transformación lineal que va de un espacio en si mismo, diremos que T es un *operador lineal en* V.

Si $\mathcal{B}$ es una base de V, $[T]_{\mathcal{B}}$ denota la matriz de T en la base $\mathcal{B}$ y $\mathcal{B}$, o sea si la base de salida y llegada es la misma, entonces usamos un sólo subíndice.

Corolario 4.5.3

Sea V un espacio vectorial de dimensión finita con base $\mathcal{B}$ y $U, T : V \longrightarrow V$ dos transformaciones lineales. Entonces

(1) $[UT]_{\mathcal{B}} = [U]_{\mathcal{B}}[T]_{\mathcal{B}}$

(2) *T es un isomorfismo si y sólo si $[T]_{\mathcal{B}}$ es una matriz invertible. En tal caso*

$$[T^{-1}]_{\mathcal{B}} = [T]_{\mathcal{B}}^{-1}$$

Los espacios vectoriales no tienen una base "natural" es decir una que es más importante que otras. Cuando trabajamos con bases estamos haciendo una elección y hay infinitas elecciones posible.

El siguiente teorema nos dice como se relacionan las matrices de una transformación lineal respecto a distintas bases.

Teorema

Sea V un espacio vectorial de dimensión finita sobre el cuerpo $\mathbb{K}$ y sean

$$\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_n\}, \qquad \mathcal{B}' = \{w_1, \ldots, w_n\}$$

bases ordenadas de V. Sea T es un operador lineal sobre V. Entonces, si P es la matriz de cambio de base de $\mathcal{B}'$ a $\mathcal{B}$, se cumple que

$$[T]_{\mathcal{B}'} = P^{-1}[T]_{\mathcal{B}}P.$$

Es decir

$$[T]_{\mathcal{B}'} = [\mathrm{Id}]_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}[T]_{\mathcal{B}}[\mathrm{Id}]_{\mathcal{B}'\mathcal{B}}.$$

Demostración

Tenemos que $T = \operatorname{Id} T$ y $T = T \operatorname{Id}$, luego

$$\begin{aligned}
[T]_{\mathcal{B}'\mathcal{B}'} &= [\operatorname{Id} T]_{\mathcal{B}'\mathcal{B}'} \\
&= [\operatorname{Id}]_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}[T]_{\mathcal{B}'\mathcal{B}} && \text{(teorema 4.5.3)} \\
&= [\operatorname{Id}]_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}[T \operatorname{Id}]_{\mathcal{B}'\mathcal{B}} \\
&= [\operatorname{Id}]_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}[T]_{\mathcal{B}\mathcal{B}}[\operatorname{Id}]_{\mathcal{B}'\mathcal{B}} && \text{(teorema 4.5.3).}
\end{aligned}$$

Por lo tanto $[T]_{\mathcal{B}'} = [\operatorname{Id}]_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}[T]_{\mathcal{B}}[\operatorname{Id}]_{\mathcal{B}'\mathcal{B}} = P^{-1}[T]_{\mathcal{B}\mathcal{B}}P$.

□

Las fórmulas

$$[T]_{\mathcal{B}'} = [\mathrm{Id}]_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}[T]_{\mathcal{B}}[\mathrm{Id}]_{\mathcal{B}'\mathcal{B}} \qquad (*)$$

$$[\mathrm{Id}]_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}[\mathrm{Id}]_{\mathcal{B}'\mathcal{B}} = \mathrm{Id} \qquad (**)$$

$$[v]_{\mathcal{B}} = [\mathrm{Id}]_{\mathcal{B}'\mathcal{B}}[v]_{\mathcal{B}'} \qquad (***)$$

son importantes por si mismas y debemos recordarlas.

Como ya dijimos, la matriz $P = [\mathrm{Id}]_{\mathcal{B}'\mathcal{B}}$ es llamada la matriz de cambio de base de la base $\mathcal{B}'$ a la base $\mathcal{B}$.

La matriz de cambio de base nos permite calcular los cambios de coordenadas de los vectores y los cambio de base de las transformaciones lineales.

Observación

Sea $T : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$ operador lineal, $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ base ordenada y $\mathcal{C}$ la base canónica, entonces

$$[T]_{\mathcal{B}\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} Tv_1 & Tv_2 & \cdots & Tv_n \end{bmatrix}.$$

Observación

Pudimos probar el teorema de cambio de base usando adecuadamente el teorema 4.5.3, es decir la fórmula

$$[UT]_{\mathcal{B}\mathcal{B}''} = [U]_{\mathcal{B}'\mathcal{B}''}[T]_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}$$

Con igual argumento podemos deducir otras igualdades que son útiles para armar todas las matrices a partir de matrices asociadas a bases canónicas, que, como dijimos en la observación anterior, es fácil calcularlas.

Observación

Sea $T : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ una transformación lineal.

Sean $\mathcal{B}$ y $\mathcal{B}'$ bases de $\mathbb{R}^n$.

Entonces

$$[T]_{\mathcal{B}'\mathcal{B}} = [\mathrm{Id}]_{\mathcal{C}\mathcal{B}}\,[T]_{\mathcal{C}\mathcal{C}}\,[\mathrm{Id}]_{\mathcal{B}'\mathcal{C}} = [\mathrm{Id}]_{\mathcal{B}\mathcal{C}}^{-1}\,[T]_{\mathcal{C}\mathcal{C}}\,[\mathrm{Id}]_{\mathcal{B}'\mathcal{C}}$$

En palabras: para ir de $\mathcal{B}'$ a $\mathcal{B}$ con T, primero vamos de $\mathcal{B}'$ a $\mathcal{C}$, despues de $\mathcal{C}$ a $\mathcal{C}$ con T y finalmente vamos de $\mathcal{C}$ a $\mathcal{B}$.

Las matrices $[\mathrm{Id}]_{\mathcal{B}\mathcal{C}}$ y $[\mathrm{Id}]_{\mathcal{B}'\mathcal{C}}$ son fáciles de calcular, ubicamos los vectores de $\mathcal{B}$ y $\mathcal{B}'$ como columnas. Similarmente, la matriz de T en la base canónica también es fácil de calcular.

Observación

Sean $\mathcal{B}$ y $\mathcal{B}'$ dos bases de $\mathbb{R}^n$.
Entonces la matriz de cambio de base de $\mathcal{B}'$ a $\mathcal{B}$ es

$$[\mathrm{Id}]_{\mathcal{B}'\mathcal{B}} = [\mathrm{Id}]_{\mathcal{C}\mathcal{B}}\,[\mathrm{Id}]_{\mathcal{B}'\mathcal{C}} = [\mathrm{Id}]_{\mathcal{B}\mathcal{C}}^{-1}\,[\mathrm{Id}]_{\mathcal{B}'\mathcal{C}}$$

En palabras, "para ir de $\mathcal{B}'$ a $\mathcal{B}$, primero vamos de $\mathcal{B}'$ a $\mathcal{C}$ y despues vamos de $\mathcal{C}$ a $\mathcal{B}$".

Las matrices $[\mathrm{Id}]_{\mathcal{B}\mathcal{C}}$ y $[\mathrm{Id}]_{\mathcal{B}'\mathcal{C}}$ son fáciles de calcular, ponemos los vectores de $\mathcal{B}$ y $\mathcal{B}'$ como columnas.

Autovalores y autovectores de una transformación lineal. Diagonalización.

- Ahora veremos los autovalores y autovectores desde una perspectiva de las transformaciones lineales.

- Muchos conceptos y demostraciones se repiten o son similares al caso de la matrices.

- Sea V espacio vectorial de dimensión finita. Un operador lineal en V es *diagonalizable* si existe una base ordenada $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ de V y $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ tal que

$$T(v_i) = \lambda_i v_i, \qquad 1 \leq i \leq n.$$

- En general, los operadores diagonalizables permiten hacer cálculos sobre ellos en forma sencilla, por ejemplo el núcleo del operador anterior es $\mathrm{Nu}(T) = \langle v_i : \lambda_i = 0 \rangle$ y su imagen es $\mathrm{Im}(T) = \langle v_i : \lambda_i \neq 0 \rangle$.

- Otra propiedad importante de los operadores diagonalizables es que la matriz de la transformación lineal en una base adecuada es diagonal (de allí viene el nombre de diagonalizable).

$$[T]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}.$$

Definición 3.6.1

Sea $T : V \longrightarrow V$ una transformación lineal. Un *autovalor de* T es un escalar $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que existe un vector no nulo $v \in V$ con

$$T(v) = \lambda v$$

En tal caso, se dice que v *es un autovector (asociado a* λ*)*.

El *autoespacio asociado a* λ es

$$V_\lambda = \{v \in V \mid T(v) = \lambda v\} = \{\text{autovectores asociados a } \lambda\} \cup \{0\}$$

Lema

Sea $T : V \longrightarrow V$ una transformación lineal y $\mathcal{B}$ una base de V. Las siguientes afirmaciones son equivalentes

- $\lambda \in \mathbb{R}$ y $v \in V$ son autovalor y autovector de T
- $v \in \mathrm{Nu}(T - \lambda\,\mathrm{Id})$
- $\lambda \in \mathbb{R}$ y $[v]_{\mathcal{B}}$ son autovalor y autovector de $[T]_{\mathcal{B}}$

Demostración

$$T(v) = \lambda v \Leftrightarrow T(v) - \lambda v = (T - \lambda\,\mathrm{Id})v = 0$$

$$T(v) = \lambda v \Leftrightarrow \lambda[v]_{\mathcal{B}} = [\lambda v]_{\mathcal{B}} = [T(v)]_{\mathcal{B}} = [T]_{\mathcal{B}}\,[v]_{\mathcal{B}}$$

$\square$

Consecuencia

- Para calcular los autovalores y autovectores de una transformación T, elegimos una base $\mathcal{B}$ y calculamos los autovalores y autovectores de $[T]_{\mathcal{B}}$.
- No importa que base elijamos porque $[T]_{\mathcal{B}'} = P^{-1}[T]_{\mathcal{B}}P$ y en el Ejercicio 8 del 1er TP vimos que estas matrices tienen iguales autovalores.

Teorema 3.6.1

Sea $T : V \longrightarrow V$ una tranfomación lineal. Entonces V_λ es un subespacio vectorial.

La demostración es como en el caso de matrices.

Notar que podemos definir V_λ para cualquier $\lambda \in \mathbb{R}$. Así, λ es autovalor si y sólo si $V_\lambda \neq 0$

Teorema 3.6.2

Sea $T : V \longrightarrow V$ una tranfomación lineal.

Sean v_1, ..., v_m autovectores de T con autovalores λ_1, ..., λ_m, respectivamente.

Si todos los autovalores son distintos, entonces los vectores v_1, ..., v_m son LI

Demostración

La demostración es por inducción.

Caso base. Si $m = 1$, entonces vale porque los autovectores son no nulos por definición y en tal caso el conjunto $\{v_1\}$ es LI.

Paso inductivo. Para $m + 1$ procedemos como sigue.

Sean $c_1, \ldots, c_{m+1}$ escalares tales que

$$c_1 v_1 + \cdots + c_m v_m + c_{m+1} v_{m+1} = 0 \qquad (*)$$

$$\begin{aligned} T(*) \quad &\rightsquigarrow c_1 \lambda_1 v_1 + \cdots + c_m \lambda_m v_m + c_{m+1} \lambda_{m+1} v_{m+1} = 0 \\ \lambda_{m+1} \cdot (*) \quad &\rightsquigarrow c_1 \lambda_{m+1} v_1 + \cdots + c_m \lambda_{m+1} v_m + c_{m+1} \lambda_{m+1} v_{m+1} = 0 \end{aligned}$$

Restando miembro a miembro obtenemos

$$c_1(\lambda_1 - \lambda_{m+1}) v_1 + \cdots + c_m(\lambda_m - \lambda_{m+1}) v_m = 0$$

Por (HI), $c_i(\lambda_i - \lambda_{m+1}) = 0$ para todo $1 \leq i \leq m$.

Dado que los autovalores son distintos, $c_i = 0$ para todo $1 \leq i \leq m$. Por lo tanto $c_{m+1} = 0$ y los vectores son LI. □

Definición 3.6.3

Sea V un espacio vectorial de dimensión finita y $T : V \longrightarrow V$ una transformación lineal. Se dice que T es *diagonalizable* si V tiene una base formada por autovectores.

Lema

Sea $T : V \longrightarrow V$ una transformación lineal diagonalizable. Sea $\mathcal{B} = \{v_1, ..., v_n\}$ una base de autovectores de T con autovalores asociados λ_1, ..., λ_n. Entonces

$$[T]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & & & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \cdots & & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & & & \vdots \\ & \vdots & & & & \\ & & & & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & & 0 & \lambda_n \end{bmatrix}$$

En efecto, las columnas de $[T]_{\mathcal{B}}$ son los vectores de coordenada

$$[T(v_i)]_{\mathcal{B}} = [\lambda_i v_i]_{\mathcal{B}} = \lambda_i [v_i]_{\mathcal{B}}$$

y $[v_i]_{\mathcal{B}}$ tiene todas entradas 0 excepto un 1 en el lugar i.

Se preguntarán cómo saber si una transformación lineal es diagonalizable.

La primera respuesta es: calcular todos los autovalores y autovectores.

A continuación veremos algunos criterios a tener en cuenta.

Corolario 3.6.3

Si V es un espacio vectorial de dimensión n y $T : V \longrightarrow V$ es una transformación lineal con n autovalores distintos entonces T es diagonalizable.

Demostración

En efecto, cada autovalor tiene al menos un autovector.

Elijamos un autovector v_1, ..., v_n para cada autovalor.

Por el Teorema 3.6.2 estos vectores son LI.

Dado que son tantos como la dimensión de V forman una base.

$\square$

Corolario

Si V es un espacio vectorial de dimensión y $T : V \longrightarrow V$ es una transformación lineal con autovalores λ_1, ..., λ_m. Si

$$\dim V = \dim V_{\lambda_1} + \cdots + \dim V_{\lambda_m}$$

Demostración

La demostración es similar a la anterior.

Primero elegimos una base para cada autoespacio.

Despues vemos que la unión de estas bases es un conjunto LI gracias al Teorema 3.6.2.

Finalmente la unión es una base de V por l forman una base del espacio total. $\square$

Proposición

Sea $T : V \to V$ *con* $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ *una base de autovectores con autovalores* $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$*.*

Entonces $\mathrm{Nu}(T) = \langle v_i : \lambda_i = 0 \rangle$ *e* $\mathrm{Im}(T) = \langle v_i : \lambda_i \neq 0 \rangle$*.*

Demostración

Reordenemos: tal que $\lambda_i = 0$ para $1 \leq i \leq k$ y $\lambda_i \neq 0$ para $k < i \leq n$.

$$v \in V \quad \Rightarrow \quad v = x_1 v_1 + \cdots + x_k v_k + x_{k+1} v_{k+1} + \cdots + x_n v_n,$$

y entonces

$$T(v) = \lambda_{k+1} x_{k+1} v_{k+1} + \cdots + \lambda_n x_n v_n. \tag{1}$$

Luego

$$\begin{aligned} T(v) = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad x_{k+1} = \cdots = x_n = 0 \quad \Leftrightarrow \quad v = x_1 v_1 + \cdots + x_k v_k \\ &\Leftrightarrow \quad v \in \langle v_i : \lambda_i = 0 \rangle. \end{aligned}$$

También es claro por la ecuación (1) que

$$\begin{aligned}\operatorname{Im}(T) &= \{\lambda_{k+1}x_{k+1}v_{k+1} + \cdots + \lambda_n x_n v_n : x_i \in \mathbb{K}\}\\ &= \{\mu_{k+1}v_{k+1} + \cdots + \mu_n v_n : \mu_i \in \mathbb{K}\}\\ &= \langle v_i : \lambda_i \neq 0\rangle.\end{aligned}$$

$\square$

Definición 3.6.2

Sea V un espacio vectorial de dimensión finita y $T : V \longrightarrow V$ una transformación lineal. El *polinomio característico de T* es el polinomio característico de la matriz $[T]_{\mathcal{B}}$ donde $\mathcal{B}$ es una base de V. Es decir,

$$\chi_T(x) = \det([T]_{\mathcal{B}} - x\,\mathrm{Id})$$

Observación

Notar que no importa que base usemos para calcular el polinomio característico dado que $[T]_{\mathcal{B}'} = P^{-1}[T]_{\mathcal{B}}P$.

Proposición 3.6.4

Sea $T : V \longrightarrow V$ una transformación lineal. Entonces λ es autovalor de T si y sólo si λ es raíz del polinomio característico.

Corolario

Sea $T : V \longrightarrow V$ una transformación lineal. Supongamos que

$$\chi_T(x) = (-1)^n (x - \lambda_1)^{d_1} \cdots (x - \lambda_m)^{d_m}$$

Entonces

(1) $1 \leq \dim V_{\lambda_i} \leq d_i$ para todo i.

(2) T es diagonalizable si y sólo si $\dim V_{\lambda_i} = d_i$ para todo i.

El punto de partida de esta sección es la siguiente simple observación.

Observación

Sea $T : V \longrightarrow W$ una tranfomación lineal. Si conocemos cuanto vale $T(v_i)$ para todos los vectores de una base $\mathcal{B} = \{v_1, ..., v_n\}$ de V, entonces podemos calcular $T(v)$ para todo $v \in V$.

Pues al ser $\mathcal{B}$ una base, si $v \in V$ entonces $v = x_1 v_1 + \cdots + x_n v_n$ y por lo tanto

$$T(v) = x_1 T(v_1) + \cdots + x_n T(v_n)$$

Más aún, una transformación queda determinada por cuanto vale en una base.

Teorema 3.1.1

Sea V un espacio vectorial con base $\mathcal{B} = \{v_1, ..., v_n\}$.

Sea W un espacio vectorial y $\{w_1, ..., w_n\}$ vectores de W.

Entonces existe una única transformación lineal $T : V \longrightarrow W$ tal que $T(v_i) = w_i$ para todo i.

Notar que los w_i's pueden ser cualesquiera vectores y se pueden repetir.

Este teorema nos permite construir transformaciones lineales con propiedades específicas (ver los ejercicios del Práctico 9)

Observación

Lo que nos dice el teorema es que para definir una transformación lineal es suficiente que definamos cuanto vale en una base.

Si bien estamos acostumbrados a definir funciones usando fórmulas en el caso de las transformaciones lineales no es necesario.

Si quisieramos dar una fórmula podemos usar las coordenadas en la base.

Y si estamos en $\mathbb{R}^n$ podemos usar las coordenadas usuales usando la matriz de la transformación y el teorema que nos dice como se relacionan las matrices en distintas bases.