Práctico 0
Álgebra II – Año 2024/1
FAMAF

Objetivos.

- Familiarizarse con los números complejos.
- Aprender a operar con números complejos (sumar, multiplicar, calcular inversos, conjugados y normas).

Ejercicios.

(1) Expresar los siguientes números complejos en la forma $a+ib$. Hallar el módulo y conjugado de cada uno de ellos, y graficarlos.

a) $(-1+i)(3-2i)$ *b)* $i^{131}-i^9+1$ *c)* $\frac{1+i}{1+2i}+\frac{1-i}{1-2i}$

(2) Encontrar números reales x e y tales que $3x+2yi-xi+5y=7+5i$

(3) Probar que si $z \in \mathbb{C}$ tiene módulo 1 entonces $z+z^{-1} \in \mathbb{R}$.

(4) Probar que si $a \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ entonces el polinomio x^2+a^2 tiene siempre dos raíces complejas distintas.

(5) Demostrar que dados z, z_1, z_2 en $\mathbb{C}$ se cumple:

$$|\bar{z}| = |z|, \qquad |z_1\, z_2| = |z_1|\,|z_2|.$$

(6) Sean $z=1+i$ y $w=\sqrt{2}-i$. Calcular:
a) z^{-1}; $1/w$; z/w; w/z.
b) $1+z+z^2+z^3+\cdots+z^{2019}$.
c) $(z(z+w)^2-iz)/w$.

(7) Sumar y multiplicar los siguientes pares de números complejos
a) $2+3i$ y 4.
b) $2+3i$ y $4i$.
c) $1+i$ y $1-i$.
d) $3-2i$ y $1+i$.

(8) Expresar los siguientes números complejos en la forma $a+ib$. Hallar el módulo, argumento y conjugado de cada uno de ellos y graficarlos.

a) $2e^{i\pi}-i$, *b)* $i^3-2i^{-7}-1$, *c)* $(-2+i)(1+2i)$.

(9) Sean $a, b \in \mathbb{C}$. Decidir si existe $z \in \mathbb{C}$ tal que:
a) $z^2=b$. ¿Es único? ¿Para qué valores de b resulta z ser un número real?
b) z es imaginario puro y $z^2=4$.
c) z es imaginario puro y $z^2=-4$.

Ejercicios de repaso. Si ya hizo los ejercicios anteriores continue a la siguiente guía. Los ejercicios que siguen son similares a los anteriores y le pueden servir para practicar antes de los exámenes.

(10) Expresar los siguientes números complejos en la forma $a+ib$. Hallar el módulo y conjugado de cada uno de ellos, y graficarlos.

a) $(\cos\theta - i\sin\theta)^{-1}$, $0 \leq \theta < 2\pi$, *b)* $3i(1+i)^4$, *c)* $\dfrac{1+i}{1-i}$.

(11) Sea $z = 2 + \frac{1}{2}i$, calcular

a) $\dfrac{(z+i)(z-i)}{z^2+1}$. *b)* $z - 2 + \dfrac{1}{z-2}$. *c)* $\left|\dfrac{1}{z-i}\right|^2$.

(12) Sea $z \in \mathbb{C}$. Calcular $\dfrac{1}{z} + \dfrac{1}{\bar{z}} - \dfrac{1}{|z|^2}$.

(13) (Desigualdad triangular) Sean w y z números complejos. Probar que

$$|w+z| \leq |w| + |z|,$$

y la igualdad se cumple si y sólo si $w = r \cdot z$ para algún número real $r \geq 0$. En general, sean $z_1, z_2, \ldots, z_n$ números complejos. Probar que

$$\left|\sum_{k=1}^{n} z_k\right| \leq \sum_{k=1}^{n} |z_k|.$$

(14) Sean w y z números complejos. Entonces

$$||w| - |z|| \leq |w - z|.$$