Álgebra y Álgebra II - Segundo Cuatrimestre 2018
Práctico 3 - Espacios Vectoriales

(1) motivación geométrica 1

(2) motivación geométrica 2

(3) motivación geométrica 3

(4) Decidir si los siguientes conjuntos son $\mathbb{R}$-espacios vectoriales, con las operaciones abajo definidas.

(a) $\mathbb{R}^n$, con $v \oplus w = v - w$, y el producto por escalares usual.

(b) $\mathbb{R}^2$, con $(x, y) \oplus (x_1, y_2) = (x + x_1, 0)$, $c \odot (x, y) = (cx, 0)$.

(5) Sea $\mathbb{K}$ un cuerpo. Si $(V, \oplus, \odot)$ un $\mathbb{K}$-espacio vectorial y S un conjunto cualquiera, sea

$$V^S = \{f : S \to V\}, \text{ el conjunto de funciones de } S \text{ en } V.$$

Definimos en V^S la suma y el producto por escalares de la siguiente manera: Si $f, g \in V^S$ y $c \in \mathbb{K}$ entonces $f + g : S \to V$ y $c \cdot f : S \to V$ están dadas por

$$(f + g)(x) = f(x) \oplus g(x), \quad (c \cdot f)(x) = c \odot f(x), \qquad \forall\, x \in S.$$

Probar que $(V^S, +, .)$ es un $\mathbb{K}$-espacio vectorial.

En el caso en que $V = \mathbb{K}$, denotaremos $F(S)$.

(6) Sea $V = C[0, 1]$ el conjunto de las funciones continuas de $[0, 1]$ en $\mathbb{R}$. Probar que V es un espacio vectorial.

(7) En cada caso, determinar si el subconjunto indicado es linealmente independiente.

(a) $\{(1, 0, -1), (1, 2, 1), (0, -3, 2)\} \subseteq \mathbb{R}^3$.

(b) $\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & -3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \right\} \subseteq M_{2\times 3}(\mathbb{R})$.

(c) $\{1, \operatorname{sen}(x), \cos(x)\} \subset F(\mathbb{R})$ (ver Ej. (5)).

(d) $\{1, 2\operatorname{sen}^2(x), \cos^2(x)\} \subset F(\mathbb{R})$.

(8) Dar 3 vectores en $\mathbb{R}^3$ que son LD, y tales que dos cualesquiera de ellos son LI.

(9) ¿Cual es la dimensión de $\mathbb{C}^n$ cuando se lo considera como $\mathbb{R}$-espacio vectorial?.

(10) Calcular la dimensión y exhibir una base de:

(a) $S = \{A \in \mathbb{R}^{n\times n} : A = A^t\}$.

(b) $S = \{A \in \mathbb{C}^{n\times n} : A = \bar{A}^t\}$ (considerado como $\mathbb{R}$-subespacio de $\mathbb{C}^{n\times n}$).

(11) (a) Extender, de ser posible, el conjunto $\{(1,2,0,0),(1,0,1,0)\}$ a una base de $\mathbb{R}^4$.
(b) Extender, de ser posible, el conjunto $\{(1,2,1,1),(1,0,1,1),(3,2,3,3)\}$ a una base de $\mathbb{R}^4$.

EJERCICIOS ADICIONALES

(1) Decidir si los siguientes conjuntos son espacios vectoriales sobre $\mathbb{R}$ con las operaciones abajo definidas.
(a) El conjunto de polinomios, con el producto por escalares (reales) usual, pero con suma $p(x) \oplus q(x) = p'(x) + q'(x)$ (suma de derivadas).
(b) $\mathbb{R}^3$ con:

$$(x,y,z) \oplus (x',y',z') = (x+x', y+y'-1, z+z');$$
$$c \odot (x,y,z) = (cx, cy+1-c, cz).$$

(2) (a) Hallar reales a y b tales que $1+2i = a(1+i) + b(1-i)$.
(b) Hallar complejos w y z tales que $1+2i = z(1+i) + w(1-i)$.

(3) Sea $\{f_1,...,f_n\}$ un conjunto LI de funciones *pares* de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ (i.e., $f(x) = f(-x)$ para todo x) y sea $\{g_1,...,g_m\}$ un conjunto LI de funciones *impares* de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ (i.e., $f(-x) = -f(x)$ para todo x). Probar que $\{f_1,...,f_n,g_1,...,g_m\}$ es LI.

(4) En cada caso extender los conjuntos dados (LI) a una base de dos maneras distintas.
(a) $\left\{ \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right\} \subseteq M^{2\times 2}(\mathbb{R})$.
(b) $\{x - 2x^2, 1 - x + x^2, x\} \subseteq P_4$.

(5) Sea $\mathbb{K}$ un cuerpo.
(a) Probar que si $p_i(x), i = 1,\ldots,n$ son polinomios en $\mathbb{K}[x]$ tales que sus grados son todos distintos entonces $\{p_1(x),\ldots,p_n(x)\}$ es un conjunto LI en $\mathbb{K}[x]$.
(b) Probar que $\{1, 1+x, (1+x)^2\}$ es una base de P_3
(c) Probar que P_3 es generado por $\{1, 2+2x, 1-x+x^2, 2-x^2\}$. ¿Es ese conjunto una base?

(6) Decidir si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justificar
(a) Todo conjunto de 3 vectores en $\mathbb{R}^4$ se extiende a una base.

(b) Si α, β y γ son vectores LI en el $\mathbb{R}$-espacio vectorial V, entonces $\alpha + \beta$, $\alpha + \gamma$ y $\beta + \gamma$ también son LI.