Álgebra/Álgebra II
Clase 07 - Álgebra de matrices 2

FAMAF / UNC

09 de abril de 2024

Resumen

En esta clase veremos

- La relación entre sistemas de ecuaciones y multiplicación de matrices.
- Las matrices elementales, que servirán para recuperar como productos las operaciones elementales de fila de las matrices.
- La definición de inversa de una matriz (cuando existe) y algunas propiedades de la inversa de una matriz.

Sistemas de ecuaciones y multiplicación de matrices

Sistema de m ecuaciones lineales con n incógnitas:

$$\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & y_1 \\ \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \cdots & + & a_{mn}x_n & = & y_m \end{array} \qquad (*)$$

donde $y_1, \ldots, y_m$ y $a_{i,j}$ $(1 \leq i \leq m,\ 1 \leq j \leq n)$ son números en $\mathbb{K}$.

Si denotamos

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}, \qquad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \qquad Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix},$$

y hacemos el producto de matrices

$$A \cdot X = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

obtenemos

$$
\begin{bmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix}.
$$

Como dos matrices son iguales si y sólo si sus coeficientes son iguales, la igualdad anterior significa que recuperamos el sistema de ecuaciones original.

Esto nos dice que la notación matricial antes utilizada para expresar un sistema de ecuaciones

$$AX = Y$$

es consistente con el, ahora definido, producto de matrices

$$A \cdot X = Y.$$

Ejemplo

Sea el sistema de ecuaciones

$$\left\{\begin{array}{r} 3x+6y+3z+15w=-3 \\ x+2y+3w=1 \\ 2x+4y+z+8w=0 \end{array}\right.$$

La matriz del sistema es

$$A=\begin{bmatrix} 3 & 6 & 3 & 15 \\ 1 & 2 & 0 & 3 \\ 2 & 4 & 1 & 8 \end{bmatrix}.$$

Si multiplicamos A por el vector X de la incógnitas obtenemos:

$$\begin{bmatrix} 3 & 6 & 3 & 15 \\ 1 & 2 & 0 & 3 \\ 2 & 4 & 1 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3x + 6y + 3z + 15w \\ x + 2y + 3w \\ 2x + 4y + z + 8w \end{bmatrix}.$$

Si igualamos AX al vector columna correspondiente a las constantes, obtenemos

$$AX = \begin{bmatrix} 3 & 6 & 3 & 15 \\ 1 & 2 & 0 & 3 \\ 2 & 4 & 1 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3x + 6y + 3z + 15w \\ x + 2y + 3w \\ 2x + 4y + z + 8w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Como dos matrices son iguales si y solo si sus coeficientes son iguales, en la primera fila recuperamos la primera ecuación, en la segunda, la segunda, etc.

Pregunta

- ¿Cuál es la relación entre las operaciones elementales que nos llevan A a una MERF y el producto de matrices?

Respuesta

- Veremos que hacer una operación elemental en la matriz A es lo mismo que multiplicar A por una matriz elemental (a definir más abajo), y que
- reducir por filas a A se obtiene multiplicando repetidas veces a A por matrices elementales.

Observación

- En el lenguaje matricial, al vector $v = (t_1, t_2, \ldots, t_n) \in \mathbb{R}^n$, lo representamos como la matriz columna

$$\begin{bmatrix} t_1 \\ t_2 \\ \vdots \\ t_n \end{bmatrix}.$$

- Para saber si v, es solución del sistema $AX = Y$ debemos verificar que vale la igualdad $Av = Y$.

- $$v \in \mathbb{R}^n \text{ es solución de } AX = Y \Longleftrightarrow Av = Y.$$

- $$\mathrm{Sol}(*) = \{v \in \mathbb{R}^n \mid Av = Y\}.$$

Esta observación es útil como herramienta para demostrar ciertas propiedades de los sistemas.

Proposición

Sean v y w soluciones del sistema homogéneo $AX = 0$. Entonces $v + tw$ también es solución del sistema $AX = 0$ para todo $t \in \mathbb{R}$.

Demostración

$$\begin{aligned}
A(v+tw) &= Av + A(tw) && \text{(distributividad)} \\
&= 0 + (At)w && (AV = 0 + \text{asociatividad}) \\
&= (tA)w && \text{(conmutatividad} \times \text{escalares)} \\
&= t(Aw) && \text{(conmutatividad} \times \text{escalares)} \\
&= t0 && (Aw = 0) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

$\square$

Matrices elementales

Definición

Una matriz $m \times m$ se dice *elemental* si fue obtenida por medio de una única operación elemental a partir de la matriz identidad Id_m.

Ejemplo

Las siguientes matrices (coloreadas) son elementales:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{F_2+2F_1} \boxed{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}},$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{F_1 \leftrightarrow F_4} \boxed{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}},$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{3F_2} \boxed{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}.$$

Matrices elementales 2×2

E1. Si $c \neq 0$, multiplicar por c la primera fila y multiplicar c por la segunda fila son, respectivamente,

$$\begin{bmatrix} c & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & c \end{bmatrix},$$

E2. si $c \in \mathbb{K}$, sumar a la fila 2 la fila 1 multiplicada por c o sumar a la fila 1 la fila 2 multiplicada por c son, respectivamente,

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ c & 1 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{bmatrix} 1 & c \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

E3. Finalmente, intercambiando la fila 1 por la fila 2 obtenemos la matriz

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Matrices elementales $m \times m$

E1. Si $c \neq 0$, multiplicar por c la fila k de la matriz identidad, resulta en la matriz elemental que tiene todos 1's en la diagonal, excepto en la posición k, k donde vale c, es decir si $e(\mathrm{Id}_m) = [a_{ij}]$, entonces

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \text{ e } i \neq k, \\ c & \text{si } i = j = k, \\ 0 & \text{si } i \neq j. \end{cases}$$

Gráficamente,

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccc} & & \overset{k}{\downarrow} & & \end{array} \\ \xrightarrow{k} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & & & \vdots \\ 0 & \cdots & c & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & & \cdots & 1 \end{bmatrix} \end{array} \tag{E1}$$

E2. si $c \in \mathbb{K}$, sumar a la fila r la fila s multiplicada por c.

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ c & \text{si } i = r, \, j = s, \\ 0 & \text{otro caso.} \end{cases}$$

Gráficamente,

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccccc} & & \overset{r}{\downarrow} & & \overset{s}{\downarrow} & & \end{array} \\ \xrightarrow{r} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & & \cdots & & & 0 \\ \vdots & \ddots & & & & & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & \cdots & c & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & & & & \ddots & & \vdots \\ 0 & \cdots & & \cdots & & & 1 \end{bmatrix} \end{array} \tag{E2}$$

E3. Finalmente, intercambiar la fila r por la fila s resulta ser

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } (i = j,\ i \neq r,\ i \neq s) \text{ o } (i = r,\ j = s) \text{ o } (i = s,\ j = r) \\ 0 & \text{otro caso.} \end{cases}$$

Gráficamente,

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccccc} & & \overset{r}{\downarrow} & & \overset{s}{\downarrow} & & \end{array} \\ \begin{array}{c} \\ \\ \xrightarrow{r} \\ \\ \xrightarrow{s} \\ \\ \\ \end{array} & \begin{bmatrix} 1 & \cdots & & \cdots & & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & & & & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & & & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & & \cdots & & \cdots & 1 \end{bmatrix} \end{array} \tag{E3}$$

Si e es una operación elemental por filas, denotemos, como antes, $e(A)$ la matriz que se obtien a partir de A haciendo la operación elemental e.

Teorema

Sea A matriz $n \times n$, sea e una operación elemental por fila , entonces

$$e(A) = e(\mathrm{Id}_m)A.$$

Demostración

Hagamos en las siguientes pantallas la prueba para matrices 2×2.

La prueba en general es similar.

E1. Si $c \neq 0$, y sea e la operación elemental de multiplicar por c la primera fila. Entonces, $E = e(\mathrm{Id}_2)$ resulta en la matriz elemental

$$E = \begin{bmatrix} c & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ahora bien,

$$\begin{aligned} EA &= \begin{bmatrix} c & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} c \, . \, a_{11} + 0 \, . \, a_{21} & c \, . \, a_{12} + 0 \, . \, a_{22} \\ 0 \, . \, a_{11} + 1 \, . \, a_{21} & 0 \, . \, a_{12} + 1 \, . \, a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c \, . \, a_{11} & c \, . \, a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = e(A). \end{aligned}$$

De forma análoga se demuestra en el caso que la operación elemental sea multiplicar la segunda fila por c.

E2. Sea $c \in \mathbb{K}$, y sea e la operación elemental de a la fila 2 le sumarle la fila 1 multiplicada por c. Entonces. $E = e(\mathrm{Id}_2)$ resulta en la matriz elemental:

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ c & 1 \end{bmatrix}.$$

Ahora bien,

$$EA = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ c & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ c \,.\, a_{11} + a_{21} & c \,.\, a_{12} + a_{22} \end{bmatrix} = e(A).$$

La demostración es análoga si la operación elemental es sumar a la fila 1 la fila 2 multiplicada por c.

E3. Finalmente, sea e intercambiar la fila 1 por la fila 2. Entonces, $E = e(\mathrm{Id}_2)$ es la matriz elemental

$$E = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Ahora bien,

$$EA = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{11} & a_{12} \end{bmatrix} = e(A).$$

□

Corolario

Sean A y B matrices $m \times n$. Entonces

- *B equivalente por filas a A si y sólo si $B = PA$ donde P es producto de matrices elementales.*

Más aún,

- *si $e_1, e_2, \ldots, e_k$ son operaciones elementales de fila y $E_i = e_i(\mathrm{Id})$, entonces*

$$B = e_k(e_{k-1}(\cdots(e_1(A))\cdots)) \Rightarrow B = E_k E_{k-1} \cdots E_1 A.$$

Demostración ($\Rightarrow$)

Si B equivalente por filas a A existen operaciones elementales $e_1, \ldots, e_k$ tal que

$$B = e_k(e_{k-1}(\cdots(e_1(A))\cdots)).$$

Más formalmente, si

- $A_1 = e_1(A)$,
- $A_i = e_i(A_{i-1})$ para $i = 2, \ldots, k$, y
- $e_k(A_{k-1}) = B$.

Entonces, si $E_i = e_i(\mathrm{Id}_m)$, por el teorema anterior

- $A_1 = E_1 A$,
- $A_i = E_i A_{i-1}$ para $i = 2, \ldots, k$, y
- $E_k A_{k-1} = B$.

En otras palabras

$$B = PA \quad \text{con} \quad P = E_k E_{k-1} \cdots E_1.$$

Demostración ($\Leftarrow$)

Si $B = PA$, con $P = E_k E_{k-1} \cdots E_1$ donde $E_i = e_i(\mathrm{Id}_m)$ es una matriz elemental, entonces (razonamiento similar al anterior)

$$B = PA = E_k E_{k-1} \cdots E_1 A$$

Más formalmente, si

- $A_1 = E_1 A$,
- $A_i = E_i A_{i-1}$ para $i = 2, \ldots, k$, y
- $E_k A_{k-1} = B$.

Luego, por el teorema anterior,

- $A_1 = e_1(A)$,
- $A_i = e_i(A_{i-1})$ para $i = 2, \ldots, k$, y
- $e_k(A_{k-1}) = B$,

Por lo tanto, B es equivalente por filas a A. $\square$

Matrices invertibles

Definición

Sea A una matriz $n \times n$ con coeficientes en $\mathbb{K}$.

Una matriz $B \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$ es *inversa de A* si $BA = AB = \mathrm{Id}_n$.

En ese caso, diremos que A es *invertible*.

Ejemplo

La matriz $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ tiene inversa $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ pues es fácil comprobar que

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Preguntas (y respuestas)

- ¿Toda matriz no nula tiene inversa?

  Respuesta: **no**, por ejemplo

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- Si la matriz tiene una inversa ¿es única?

  Respuesta: **sí.** Se verá en la próxima pantalla.

- Si $BA = \mathrm{Id}_n$ ¿es cierto que $AB = \mathrm{Id}_n$? Es decir, ¿si A tiene inversa a izquierda, entonces tiene inversa a derecha y es la misma matriz?

  Respuesta: **sí.** Se verá en la clase que viene.

Proposición

Sea $A \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$*,*

1. *sean* $B, C \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$ *tales que* $BA = \mathrm{Id}_n$ *y* $AC = \mathrm{Id}_n$*, entonces* $B = C$*;*
2. *si* A *invertible la inversa es única.*

Demostración

1.

$$B = B\,\mathrm{Id}_n = B(AC) = (BA)C = \mathrm{Id}_n\, C = C.$$

2.

Sean B y C inversas de A, es decir $BA = AB = \mathrm{Id}_n$ y $CA = AC = \mathrm{Id}_n$. En particular, $BA = \mathrm{Id}_n$ y $AC = \mathrm{Id}_n$, luego, por 1., $B = C$. □

Definición

Sea $A \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$ invertible. A la única matriz inversa de A la llamamos *la matriz inversa de A* y la denotamos A^{-1}.

Ejemplo

Sea A la matriz

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Entonces, A es invertible y su inversa es

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Esto se resuelve comprobando que $AA^{-1} = \mathrm{Id}_3$ y $A^{-1}A = \mathrm{Id}_3$.

Teorema

Sea A matriz $n \times n$ con coeficientes en $\mathbb{K}$. Entonces

- *si A invertible, entonces A^{-1} es invertible y su inversa es A, es decir*

$$(A^{-1})^{-1} = A.$$

Demostración

$$\begin{aligned} AA^{-1} = \mathrm{Id}_n \quad &\Rightarrow \quad \text{la inversa a izquierda de } A^{-1} \text{ es } A, \\ A^{-1}A = \mathrm{Id}_n \quad &\Rightarrow \quad \text{la inversa a derecha de } A^{-1} \text{ es } A, \end{aligned}$$

Concluyendo: A es la inversa de A^{-1}.

$\square$

Teorema

Sean A y B matrices $n \times n$ con coeficientes en $\mathbb{K}$. Entonces

- *si A y B son invertibles, entonces AB es invertible y*

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}.$$

Demostración

Simplemente debemos comprobar que $B^{-1}A^{-1}$ es inversa a izquierda y derecha de AB:

$$(B^{-1}A^{-1})AB = B^{-1}(A^{-1}A)B = B^{-1}\operatorname{Id}_n B = B^{-1}B = \operatorname{Id}_n .$$

Análogamente,

$$AB(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = A\operatorname{Id}_n A^{-1} = AA^{-1} = \operatorname{Id}_n .$$

□

Observación

Si $A_1, \dots, A_k$ son invertibles, entonces $A_1 \dots A_k$ es invertible y su inversa es

$$(A_1 \dots A_k)^{-1} = A_k^{-1} \dots A_1^{-1}.$$

El resultado es una generalización del punto (2) del teorema anterior y su demostración se hace por inducción en k (usando (2) del teorema anterior). Se deja como ejercicio al lector.

Observación

La suma de matrices invertibles no necesariamente es invertible, por ejemplo $A + (-A) = 0$ que no es invertible.