Álgebra/Álgebra II
Clase 4 -Sistemas de ecuaciones lineales 2

FAMAF / UNC

21 de marzo de 2024

En la clase 3 motivamos la idea general del método de Gauss a través de ejemplos y vimos el concepto de sistemas de ecuaciones lineales equivalentes.

En esta clase presentaremos las nociones de:

- Matriz.
- Matriz ampliada.
- Operaciones elementales por fila.

Relacionaremos todos estos conceptos con los sistemas de ecuaciones lineales.

- Matriz: representará un sistema de ecuaciones homogéneo.
- Matriz ampliada: representara un sistema de ecuaciones lineales no homogéneo.
- Operaciones elementales por fila: representarán ciertas operaciones entre las diferentes ecuaciones del sistema.

Definición

Una *matriz* $m \times n$ es un arreglo de números reales de m filas y n columnas.

$\mathbb{R}^{m\times n}$ y $M_{m\times n}(\mathbb{R})$ denotan el conjunto de matrices $m \times n$.

Ejemplos

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & \pi \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} \sqrt{2} & \frac{1}{2} & 9 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 10 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Convenciones

La notación $A = [a_{ij}] \in \mathbb{R}^{m \times n}$ quiere decir que A es una matriz $m \times n$ de la siguiente forma

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

La *fila i* de una matriz es la fila (una n-upla) ubicada en la posición i desde arriba:

$$F_i \longrightarrow \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

La *columna i* de una matriz es la columna (una m-upla) ubicada en la posición i desde la izquierda:

$$\begin{array}{c} \hspace{3.5em} C_i \\ \hspace{3.5em} \downarrow \\ \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & \color{red}{a_{1i}} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & \color{red}{a_{2i}} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & \color{red}{a_{mi}} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \end{array}$$

Convenciones

- Sea $A = [a_{ij}] \in \mathbb{R}^{m \times n}$ una matriz. Escribiremos $[A]_{ij}$ para denotar la entrada a_{ij} de A.

- Dos matrices del mismo tamaño $A = [a_{ij}] \in \mathbb{R}^{m \times n}$ y $B = [b_{ij}] \in \mathbb{R}^{m \times n}$ son iguales si cada una de sus entradas lo son:

$$A = B \quad \Longleftrightarrow \quad a_{ij} = b_{ij}, \quad 1 \leq i \leq m,\ 1 \leq j \leq n$$

Sistemas de ecuaciones

Usaremos matrices para representar los sistemas de ecuaciones.

Definición

Si $A = [a_{ij}] \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $X = [x_i] \in \mathbb{R}^{n\times 1}$ e $Y = [y_i] \in \mathbb{R}^{m\times 1}$ entonces

$$AX = Y$$

representa al sistema de ecuaciones

$$\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & y_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & y_2 \\ \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \cdots & + & a_{mn}x_n & = & y_m. \end{array} \tag{E}$$

(se usa en la pantalla 20)

También lo podemos denotar

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ \\ y_m \end{bmatrix}$$

Ejemplo

El sistema de ecuaciones

$$
\begin{array}{cccc}
x_1 & & +2x_3 & = 1 \\
x_1 & -3x_2 & +3x_3 & = 2 \\
2x_1 & -3x_2 & +5x_3 & = 3 \\
x_1 & & +3x_3 & = -1
\end{array}
$$

es representado de la forma $AX = Y$:

$$
\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & -3 & 3 \\ 2 & -3 & 5 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}
$$

- Si una incógnita no aparece en una ecuación, el correspondiente coeficiente de la matriz es 0.
- La cantidad de incógnitas queda determinada por la cantidad de columnas de la matriz A.

Operaciones elementales por fila: motivación

Las *operaciones elementales por fila* son:

- transformaciones con las cuales podemos modificar una matriz de manera tal que los correspondientes sistemas de ecuaciones tengan las mismas soluciones.
- la versión "matricial" de las combinaciones lineales de ecuaciones que hicimos en la clase anterior para encontrar las soluciones de los sistemas.

Observación

Hay tres tipos de operaciones las cuales definiremos a continuación.

En una matriz A de $m \times n$, cada fila puede ser considerada un vector en $\mathbb{R}^n$.

Si la fila i de A es

$$\begin{bmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \end{bmatrix},$$

y la denotamos $F_i(A)$ o simplemente F_i si A. Si $c \in \mathbb{K}$, entonces

- $cF_i = \begin{bmatrix} ca_{i1} & ca_{i2} & \cdots & ca_{in} \end{bmatrix}$.
- $F_r + F_s = \begin{bmatrix} a_{r1} + a_{s1} & a_{i2} + a_{s2} & \cdots & a_{in} + a_{sn} \end{bmatrix}$.
- $F_i = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$, la fila nula.

Operaciones elementales por fila: definición

Definición

Sea $A = [a_{ij}]$ una matriz $m \times n$, diremos que e es una *operación elemental por fila* si aplicada a la matriz A se obtiene $e(A)$ de la siguiente manera:

E1. multiplicando la fila r por una constante $c \neq 0$, o

E2. cambiando la fila F_r por $F_r + tF_s$ con $r \neq s$, para algún $t \in \mathbb{K}$, o

E3. permutando la fila r por la fila s.

E1, E2 y E3 son tres tipos de operaciones elementales,

E1: multiplicar la fila i por un número real $c \neq 0$.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \xrightarrow{c\,F_i} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c\,a_{i1} & c\,a_{i2} & \cdots & c\,a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Ejemplo

Multiplicar la primer fila por -2:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} -2 & -4 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$$

E2: sumar a la fila r un múltiplo de la fila s.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{sn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{r1} & a_{r2} & \cdots & a_{rn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \xrightarrow{F_r + tF_s} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{sn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{r1} + ta_{s1} & a_{r2} + ta_{s2} & \cdots & a_{rn} + ta_{sn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Ejemplo

Sumar a la segunda fila la primer fila multiplicada por 3:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} \xrightarrow{F_2 + 3F_1} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 + 3 \cdot 1 & 4 + 3 \cdot 2 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 6 & 10 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$$

E3: intercambiar las fila r y s.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{r1} & a_{r2} & \cdots & a_{rn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{sn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \xrightarrow{F_r \leftrightarrow F_s} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{sn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{r1} & a_{r2} & \cdots & a_{rn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Ejemplo

Intercambiar la segunda y tercer fila:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} \xrightarrow{F_3 \leftrightarrow F_2} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 6 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

Convenciones

- Si A es una matriz, $e(A)$ denotará la matriz que obtenemos después de modificar a A por cierta operación elemental e.

Ejemplo

Si e es la operación intercambiar la segunda y tercer fila y $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$,

entonces $e(A) = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 6 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$.

- Como hicimos en los ejemplos, cuando le apliquemos una operación elemental a una matriz especificaremos arriba de una flecha que operación aplicamos:

$$A \quad \xrightarrow{e} \quad e(A)$$

Esta notación es obligatoria para la corrección de exámenes.

Teorema

A cada operación elemental por fila e le corresponde otra operación elemental e′ (del mismo tipo que e) tal que $e'(e(A)) = A$ y $e(e'(A)) = A$. En otras palabras, la operación inversa de una operación elemental es otra operación elemental del mismo tipo.

Demostración

E1. Para $c \neq 0$, la operación inversa de cF_r es $\dfrac{1}{c}F_r$.

E2. La operación inversa de $F_r + cF_s$ es $F_r - cF_s$ $(r \neq s)$.

E3. La operación inversa de permutar la fila r por la fila s es la misma operación.

$\square$

Observación

- Las operaciones elementales son operaciones lineales entre filas, es decir del tipo $sF + tF'$ donde $s, t \in \mathbb{R}$ y F, F' son filas.
- De una sucesión de operaciones elementales obtenemos una matriz donde cada fila es combinación lineal de las filas de la matriz original.

Definición

Consideremos un sistema como en (E) y sea A la matriz correspondiente al sistema. La *matriz ampliada* del sistema es

$$A' = \left[\begin{array}{ccc|c} a_{11} & \cdots & a_{1n} & y_1 \\ a_{21} & \cdots & a_{2n} & y_2 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} & y_m \end{array}\right] \tag{1}$$

que también podemos denotar

$$A' = [A|Y].$$

Observación

Hay una correspondencia biunívoca entre

$$\text{sistemas de ecuaciones lineales} \quad \longleftrightarrow \quad \text{matrices ampliadas.}$$

Ejemplo

Dado el sistema

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & -3 & 3 \\ 2 & -3 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix},$$

la matriz ampliada es

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & -3 & 3 & 2 \\ 2 & -3 & 5 & 3 \end{array}\right].$$

Operaciones elementales $\longrightarrow$ operaciones entre ecuaciones

Sea $AX = Y$ un sistema de ecuaciones lineales y $[A|Y]$ su matriz ampliada.

- La matriz ampliada, es una matriz con una columna más. La raya vertical es para distinguir los coeficientes de las variables de las constantes a las que se igualan las ecuaciones.
- Es decir, si el sistema es $AX = Y$ donde A es matriz $m \times n$, entonces la matriz ampliada es $[A|Y]$ es una matriz $m \times (n+1)$, es decir de m-filas y $n+1$-columnas.
- Podemos aplicar la operaciones elementales por fila a una matriz ampliada, y eso es lo que haremos en las próximas pantallas.

Operaciones elementales por fila en matrices ampliadas

La relación biunívoca entre sistemas de ecuaciones lineales y matrices ampliadas, resulta en:

$$\begin{array}{c}\text{Multiplicar fila } r \text{ por } c \neq 0\\ \updownarrow \\ \text{multiplicar ecuación } r\text{-ésima por } c \neq 0.\end{array} \tag{E1}$$

$$\begin{array}{c}\text{Cambiar fila } F_r \text{ por } F_r + tF_s \text{ con } r \neq s\text{, para algún } t \in \mathbb{K}\\ \updownarrow \\ \text{sumar a la ecuación } r\text{-ésima } t \text{ veces la ecuación } s\text{-ésima.}\end{array} \tag{E2}$$

$$\begin{array}{c}\text{Permutar fila } r \text{ por fila } s\\ \updownarrow \\ \text{permutar la ecuación } r\text{-ésima por la ecuación } s\text{-ésima.}\end{array} \tag{E3}$$

Teorema

Sea $[A|Y]$ la matriz ampliada de un sistema de ecuaciones lineales y sea $[B|Z]$ una matriz que se obtiene a partir de $[A|Y]$ por medio de operaciones elementales. Entonces, los sistemas $[A|Y]$ y $[B|Z]$ tienen las mismas soluciones.

Demostración

- $[A|Y] \rightsquigarrow [B|Z] \quad \Rightarrow \quad \text{filas}[B|Z] = \text{c. l. filas}[A|Y]$.
- Luego, Soluciones$[A|Y] \Rightarrow$ Soluciones$[B|Z]$.

Como toda operación elemental tiene inversa $\Rightarrow$

- $[B|Z] \rightsquigarrow [A|Y] \quad \Rightarrow \quad \text{filas}[A|Y] = \text{c. l. filas}[B|Z]$.
- Luego, Soluciones$[B|Z] \Rightarrow$ Soluciones$[A|Y]$.

Por lo tanto Soluciones$[A|Y] =$ Soluciones$[B|Z]$. $\square$

Ejemplo

Resolvamos el siguiente sistema:

$$\begin{aligned} 2x_1 - 6x_2 + x_3 &= 2 \\ x_1 - 4x_2 &= 1 \\ 2x_1 - 4x_2 - x_3 &= 0, \end{aligned}$$

para $x_i \in \mathbb{R}$ $(1 \leq i \leq 4)$.

La matriz ampliada correspondiente a este sistema de ecuaciones es

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -6 & 1 & 2 \\ 1 & -4 & 0 & 1 \\ 2 & -4 & -1 & 0 \end{array}\right].$$

Encontraremos una matriz que nos dará un sistema de ecuaciones equivalente, pero con soluciones mucho más evidentes:

$$
\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -6 & 1 & 2 \\ 1 & -4 & 0 & 1 \\ 2 & -4 & -1 & 0 \end{array}\right]
\xrightarrow{F_1 \leftrightarrow F_2}
\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -4 & 0 & 1 \\ 2 & -6 & 1 & 2 \\ 2 & -4 & -1 & 0 \end{array}\right]
$$

$$
\xrightarrow[F_3-2F_1]{F_2-2F_1}
\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -4 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & -1 & -2 \end{array}\right]
\xrightarrow{F_2/2}
\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -4 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1/2 & 0 \\ 0 & 4 & -1 & -2 \end{array}\right]
$$

$$
\xrightarrow[F_3-4F_2]{F_1+4F_2}
\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & -2 \end{array}\right]
\xrightarrow{F_3/(-3)}
\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2/3 \end{array}\right]
$$

$$
\xrightarrow[F2-(1/2)F_3]{F_1-2F_3}
\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -1/3 \\ 0 & 1 & 0 & -1/3 \\ 0 & 0 & 1 & 2/3 \end{array}\right].
$$

Volvamos a las ecuaciones: el nuevo sistema de ecuaciones, equivalente al original, es

$$\begin{aligned} x_1 &= -\frac{1}{3} \\ x_2 &= -\frac{1}{3} \\ x_3 &= \frac{2}{3}, \end{aligned}$$

Por lo tanto, el sistema tiene una sola solución:

$$(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{2}{3}).$$

Sistemas homogéneos

Si el sistema de ecuaciones lineales es homogéneo, es decir del tipo $AX = 0$, entonces la matriz ampliada es

$$[A|0].$$

Haciendo operaciones elementales sucesivas llegamos a otra matriz

$$[B|0].$$

Luego, en este caso (sistema homogéneo) la convención es no escribir la matriz ampliada para resolver el sistema, sino trabajar directamente sobre la matriz A.