Álgebra y Álgebra II - Segundo Cuatrimestre 2018
Práctico 4 - Subespacios Vectoriales

(1) Sea $n \in \mathbb{N}$. Mostrar que el conjunto de polinomios sobre $\mathbb{R}$ de grado menor que n es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}[x]$. Este espacio será denotado por P_n.

(2) Decidir si los siguientes subconjuntos de $\mathbb{R}^n$ son subespacios vectoriales:
- (a) $\{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1 = x_n\}$.
- (b) $\{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1 + \cdots + x_n = 1\}$.
- (c) $\{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1 + \cdots + x_n = 0\}$.
- (d) $\{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1 \leq x_2\}$.
- (e) $\{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_n = 1\}$.
- (f) $\{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_n = 0\}$.

(3) Sea $V = C[0, 1]$ el conjunto de las funciones continuas de $[0, 1]$ en $\mathbb{R}$. Decidir en cada caso si el conjunto dado es un subespacio vectorial de V:
- (a) $C^1[0, 1] = \{f : [0, 1] \to \mathbb{R} : f \text{ es derivable}\}$.
- (b) $\{f \in C[0, 1] : f(1) = 1\}$.
- (c) $\{f \in C[0, 1] : \int_0^1 f(x)\,dx = 0\}$.

(4) En cada caso caracterizar con ecuaciones el subespacio vectorial dado por generadores.
- (a) $\langle(1, 0, 3), (0, 1, -2)\rangle \subseteq \mathbb{R}^3$.
- (b) $\langle(1, 2, 0), (0, -1, 1), (2, 3, -1)\rangle \subseteq \mathbb{R}^3$.
- (c) $\langle(1, 1, 0, 0), (0, 1, 1, 0), (0, 0, 1, 1)\rangle \subseteq \mathbb{R}^4$.
- (d) $\langle 1 + x + x^2,\ x - x^2 + x^3,\ 1 - x,\ 1 - x^2,\ x - x^2,\ 1 + x^4\rangle \subseteq \mathbb{R}[x]$.

(5) Dar una base y la dimensión de los siguientes subespacios vectoriales.
- (a) $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 :\ z = x + y\}$.
- (b) $W = \{(x, y, z, w, u) \in \mathbb{R}^5 :\ w = x + z,\ y = x - z,\ u = 2x - 3z\}$.
- (c) $W = \{p(x) = a + bx + cx^2 + dx^3 \in P_4 :\ a + d = b + c\}$.
- (d) $W = \{p(x) \in P_4 :\ p'(0) = 0\}$.

(6)
- (a) Expresar $\mathbb{R}^2$ como suma de dos subespacios no nulos.
- (b) Encuentre dos complementos distintos del subespacio generado por $(1, 2)$ en $\mathbb{R}^2$.

(7) Sean $V = \mathbb{R}^6$ y sean W_1 y W_2 los siguientes subespacios de V:

$$W_1 = \{(u, v, w, x, y, z) :\ u + v + w = 0,\ x + y + z = 0\};$$

$$W_2 = \langle(1, -1, 1, -1, 1, -1), (1, 2, 3, 4, 5, 6), (1, 0, -1, -1, 0, 1), (2, 1, 0, 0, 0, 0)\rangle.$$

(a) Determinar $W_1 \cap W_2$ y describirlo por generadores y con ecuaciones.

(b) Determinar $W_1 + W_2$ y describirlo por generadores y con ecuaciones.

(c) ¿Es la suma $W_1 + W_2$ directa?

(d) Dar un complemento de W_1.

(e) Dar un complemento de W_2.

(f) Decir cuáles de los siguientes vectores están en $W_1 \cap W_2$ y cuáles en $W_1 + W_2$:

$$(1,1,-2,-2,1,1);\ (0,0,0,1,0,-1);\ (1,1,1,0,0,0);\ (3,0,0,1,1,3);\ (-1,2,5,6,5,4).$$

(g) Para los vectores v del punto anterior en $W_1 + W_2$, hallar $w_1 \in W_1$ y $w_2 \in W_2$ tales que $v = w_1 + w_2$.

(8) Sea $S = \{v_1, v_2, v_3, v_4\} \subset \mathbb{R}^4$ donde

$$v_1 = (-1,0,1,2) \quad v_2 = (3,4,-2,5) \quad v_3 = (0,4,1,11) \quad v_4 = (1,4,0,9).$$

(a) Describir implícitamente el subespacio $W = \langle\, S \,\rangle$.

(b) Si $W_1 = \langle\, v_1, v_2, v_3 + v_4 \,\rangle$ y $W_2 = \langle\, v_3, v_4 \,\rangle$ describir $W_1 \cap W_2$ implícitamente.

Coordenadas y cambio de base

(9) Probar que los vectores $v_1 = (1,0,-i)$, $v_2 = (1+i, 1-i, 1)$, $v_3 = (i,i,i)$ forman una base de $\mathbb{C}^3$ y dar las coordenadas de un vector (x,y,z) en esta base.

(10) Dados los siguientes vectores de $\mathbb{R}^4$

$$v_1 = (1,1,0,0) \quad v_2 = (0,0,1,1) \quad v_3 = (1,0,0,4) \quad v_4 = (0,0,0,2).$$

(a) Demostrar que $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ es una base de $\mathbb{R}^4$.

(b) Hallar las coordenadas de los vectores de la base canónica respecto de $\mathcal{B}$.

(c) Hallar las matrices de cambio de base de la base canónica a $\mathcal{B}$ y viceversa.

(11) Sea $V = P_3$. Sean

$$g_1 = 1 - x, \quad g_2 = x + x^2, \quad g_3 = (x+1)^2.$$

(a) Demostrar que $\mathcal{B} = \{g_1, g_2, g_3\}$ es una base de V.

(b) Hallar las matrices de cambio de base con respecto a $\mathcal{B}$ y a la base canónica $\{1, x, x^2\}$.

(12) Sea $\mathcal{B} = \left\{ \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \right\}$.

(a) Demostrar que $\mathcal{B}$ es una base de $M_{2\times 3}(\mathbb{R})$.

(b) Hallar las coordenadas de $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ con respecto a la base $\mathcal{B}$.

(c) Hallar las matrices de cambio de base de la base canónica a $\mathcal{B}$ y viceversa.

(13) Sea $W = < v_1, v_2 >$ el subespacio de $\mathbb{C}^3$ generado por $v_1 = (1, 0, i)$ y $v_2 = (1 + i, 1, -1)$.

(a) Demostrar que $\mathcal{B}_1 = \{v_1, v_2\}$ es una base de W.

(b) Describir W implícitamente.

(c) Demostrar que los vectores $w_1 = (1, 1, 0)$ y $w_2 = (1, i, 1 + i)$ pertenecen a W y que $\mathcal{B}_2 = \{w_1, w_2\}$ es otra base de W.

(d) ¿Cuáles son las coordenadas de v_1 y v_2 en la base ordenada $\mathcal{B}_2$?

(e) Hallar las matrices de cambio de base $P_{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2}$ y $P_{\mathcal{B}_2,\mathcal{B}_1}$.

EJERCICIOS ADICIONALES

(1) Sea $V = C[0, 1]$ el espacio vectorial de las funciones continuas en $[0, 1]$. Decidir en cada caso si el conjunto dado es un subespacio vectorial de V.

(a) $\{f \in C[0, 1] : f(1) = 0\}$.

(b) $\{f \in C[0, 1] : f(1) \geq 0\}$.

(c) $\{f \in C[0, 1] : f(1) = f(0)\}$.

(d) $\{f \in C[0, 1] : \int_0^1 (f(x))^2 dx = 0\}$.

(2) Sea $V = \mathbb{R}^n$. Decidir en cada caso si el conjunto dado es un subespacio vectorial de V.

(a) $\{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \,|\, \exists\, j > 1 : x_1 = x_j\}$.

(b) $\{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \,|\, x_1 x_n = 0\}$.

(3) Sea $\mathbb{R}[x]$ el espacio vectorial de polinomios con coeficientes reales. Decidir si el subconjunto de polinomios de grado par, junto con el polinomio nulo, es un subespacio vectorial.

(4) Sea $V = M_n(\mathbb{R})$ el espacio vectorial de matrices $n \times n$. Decidir en cada caso si el conjunto dado es un subespacio vectorial de V.

(a) El conjunto de matrices $n \times n$ invertibles.

(b) El conjunto de matrices $n \times n$ NO invertibles.

(c) El conjunto de matrices $n \times n$ A tales que $AB = BA$. (B una matriz $n \times n$ fija).

(5) Sean

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 3 & 7 \\ 2 & 1 & -3 & 1 & 1 \end{bmatrix} \text{ y } A_2 = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & -3 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -3 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

y sean W_1 y W_2 los espacios solución de los sistemas homogéneos asociados a A_1 y A_2 respectivamente.

Describir implícitamente $W_1 \cap W_2$ y $W_1 + W_2$.

(6) Decidir si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justificar
   (a) Sean W_1 y W_2 subespacios no nulos de $\mathbb{R}^2$ entonces si $W_1 \cap W_2$ contiene un vector no nulo $W_1 = W_2$
   (b) Sean W_1 y W_2 subespacios de dimensión 2 de $\mathbb{R}^3$ entonces si $W_1 \cap W_2$ contiene un vector no nulo.

(7) Sean W_1, W_2 subespacios de un espacio vectorial V. Probar que $W_1 \cup W_2$ es un subespacio de V si y sólo si $W_1 \subseteq W_2$ o bien $W_2 \subseteq W_1$.