Práctico 0
Álgebra II – Año 2024/1
FAMAF

Objetivos.

- Familiarizarse con los números complejos.
- Aprender a operar con números complejos (sumar, multiplicar, calcular inversos, conjugados y normas).

Ejercicios.

(1) Expresar los siguientes números complejos en la forma $a+ib$. Hallar el módulo y conjugado de cada uno de ellos, y graficarlos.

a) $(-1+i)(3-2i)$ *b)* $i^{131}-i^9+1$ *c)* $\frac{1+i}{1+2i}+\frac{1-i}{1-2i}$

(2) Encontrar números reales x e y tales que $3x+2yi-xi+5y=7+5i$

(3) Probar que si $z\in\mathbb{C}$ tiene módulo 1 entonces $z+z^{-1}\in\mathbb{R}$.

(4) Probar que si $a\in\mathbb{R}\backslash\{0\}$ entonces el polinomio x^2+a^2 tiene siempre dos raíces complejas distintas.

(5) Simplificar las siguientes expresiones:

a) $\left(\dfrac{-3}{\frac{4}{5}+1}\right)^{-1}\cdot\left(\dfrac{4}{5}-1\right)+\dfrac{1}{3}$, b) $\dfrac{a}{2\pi-6}(\pi-3)^2-\dfrac{2a(\pi^2-9)}{\pi-3}$.

(6) Demostrar que dados z, z_1, z_2 en $\mathbb{C}$ se cumple:

$$|\bar{z}|=|z|,\qquad |z_1\,z_2|=|z_1|\,|z_2|.$$

(7) Sean $z=1+i$ y $w=\sqrt{2}-i$. Calcular:
a) z^{-1}; $1/w$; z/w; w/z.
b) $1+z+z^2+z^3+\cdots+z^{2019}$.
c) $(z(z+w)^2-iz)/w$.

(8) Sumar y multiplicar los siguientes pares de números complejos
a) $2+3i$ y 4.
b) $2+3i$ y $4i$.
c) $1+i$ y $1-i$.
d) $3-2i$ y $1+i$.

(9) Expresar los siguientes números complejos en la forma $a+ib$. Hallar el módulo, argumento y conjugado de cada uno de ellos y graficarlos.

a) $2e^{i\pi} - i$, b) $i^3 - 2i^{-7} - 1$, c) $(-2+i)(1+2i)$.

(10) Sean $a, b \in \mathbb{C}$. Decidir si existe $z \in \mathbb{C}$ tal que:
a) $z^2 = b$. ¿Es único? ¿Para qué valores de b resulta z ser un número real?
b) z es imaginario puro y $z^2 = 4$.
c) z es imaginario puro y $z^2 = -4$.

Ejercicios de repaso. Si ya hizo los ejercicios anteriores continue a la siguiente guía. Los ejercicios que siguen son similares a los anteriores y le pueden servir para practicar antes de los exámenes.

(11) Expresar los siguientes números complejos en la forma $a+ib$. Hallar el módulo y conjugado de cada uno de ellos, y graficarlos.

(a) $(\cos\theta - i\sin\theta)^{-1},\ 0 \leq \theta < 2\pi$, (b) $3i(1+i)^4$, (c) $\dfrac{1+i}{1-i}$

(12) Sea $z = 2 + \frac{1}{2}i$, calcular

a) $\dfrac{(z+i)(z-i)}{z^2+1}$. *b)* $z - 2 + \dfrac{1}{z-2}$. *c)* $\left|\dfrac{1}{z-i}\right|^2$.

(13) Sea $z \in \mathbb{C}$. Calcular $\frac{1}{z} + \frac{1}{\bar{z}} - \frac{1}{|z|^2}$.

(14) (Desigualdad triangular) Sean w y z números complejos. Probar que

$$|w+z| \leq |w| + |z|,$$

y la igualdad se cumple si y sólo si $w = r \cdot z$ para algún número real $r \geq 0$. En general, sean $z_1, z_2, \ldots, z_n$ números complejos. Probar que

$$\left|\sum_{k=1}^{n} z_k\right| \leq \sum_{k=1}^{n} |z_k|.$$

(15) Sean w y z números complejos. Entonces

$$||w| - |z|| \leq |w - z|.$$