Álgebra y Álgebra II - Segundo Cuatrimestre 2020
Práctico 1 - Vectores en $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$

Objetivos

- Aprender las operaciones básicas de $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$ (suma de vectores, multiplicación por escalares, producto escalar, calcular normas y ángulos).
- Familiarizarse con los conceptos de ortogonalidad y paralelismo.
- Aprender a describir rectas y planos de forma impícita y paramétrica.

Vectores y producto escalar

1. Dados $v = (-1, 2 - 0)$, $w = (2, -3, -1)$ y $u = (1, -1, 1)$, calcular:
   a) $2v + 3w - 5u$,
   b) $5(v + w)$,
   c) $5v + 5w$ (y verificar que es igual al vector de arriba).

2. Calcular los siguientes productos escalares.
   a) $\langle(-1, 2 - 0), (2, -3, -1)\rangle$,
   b) $\langle(4, -1), (-1, 2)\rangle$.

3. Dados $v = (-1, 2 - 0)$, $w = (2, -3, -1)$ y $u = (1, -1, 1)$, verificar que:

$$\langle 2v + 3w, -u\rangle = -2\langle v, u\rangle - 3\langle w, u\rangle$$

4. Probar que
   a) $(2, 3, -1)$ y $(1, -2, -4)$ son ortogonales.
   b) $(2, -1)$ y $(1, 2)$ son ortogonales. Dibujar en el plano.
5. Encontrar
   a) un vector no nulo ortogonal a $(3, -4)$,
   b) un vector no nulo ortogonal a $(2, -1, 4)$,
   c) un vector no nulo ortogonal a $(2, -1, 4)$ y $(0, 1, -1)$,

6. Encontrar la longitud de los vectores.

   (a) $(2, 3)$, (b) (t, t^2), (c) $(\cos\phi, \operatorname{sen}\phi)$.

7. Calcular $\langle v, w\rangle$ y el ángulo entre v y w para los siguientes vectores.

   (a) $v = (2, 2), w = (1, 0)$, (b) $v = (-5, 3, 1), w = (2, -4, -7)$.

8. Sea $v = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ y recordar los vectores $e_!$, e_2 y e_3 dados en la página 12 del apunte. Verificar que
$$v = x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3 = \langle v, e_1\rangle e_1 + \langle v, e_2\rangle e_2 + \langle v, e_3\rangle e_3.$$

9. Probar, usando sólo las propiedades **P1**, **P2**, y **P3** del producto escalar, que dados $v, w, u \in \mathbb{R}^n$ y $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$,
   a) se cumple:
   $$\langle \lambda_1 v + \lambda_2 w, u\rangle = \lambda_1\langle v, u\rangle + \lambda_2\langle w, u\rangle.$$
   b) Si $\langle v, w\rangle = 0$, es decir si v y w son ortogonales, entonces
   $$\langle \lambda_1 v + \lambda_2 w, \lambda_1 v + \lambda_2 w\rangle = \lambda_1^2\langle v, v\rangle + \lambda_2^2\langle w, w\rangle.$$

10. Dados $v, w, \in \mathbb{R}^n$, probar que si $\langle v, w\rangle = 0$, es decir si v y w son ortogonales, entonces
$$||v + w||^2 = ||v||^2 + ||w||^2.$$
¿Cuál es el nombre con que se conoce este resultado en $\mathbb{R}^2$?

11. Sean $v, w \in \mathbb{R}^2$, probar usando solo la definición explícita del producto escalar en $\mathbb{R}^2$ que
$$|\langle v, w\rangle| \leq ||v||\,||w|| \qquad \text{(Desigualdad de Schwarz).}$$
[Ayuda: elevar al cuadrado y aplicar la definición.]

Rectas y planos

12. En cada uno de los siguientes casos determinar si los vectores $\overrightarrow{vw}$ y $\overrightarrow{xy}$ son equivalentes y/o paralelos.
    a) $v = (1, -1)$, $w = (4, 3)$, $x = (-1, 5)$, $y = (5, 2)$.
    b) $v = (1, -1, 5)$, $w = (-2, 3, -4)$, $x = (3, 1, 1)$, $y = (-3, 9, -17)$.

13. Sea R_1 la recta que pasa por $p_1 = (2, 0)$ y es ortogonal a $(1, 3)$.
    a) Dar la descripción paramétrica e implícita de R_1.
    b) Graficar en el plano a R_1.
    c) Dar un punto p por el que pase R_1 distinto a p_1.
    d) Verificar si $p + p_i$ y $-p$ pertenece a R_1

14. Repetir el ejercicio anterior con las siguientes rectas.
    a) R_2: recta que pasa por $p_2 = (0, 0)$ y es ortogonal a $(1, 3)$.
    b) R_3: recta que pasa por $p_3 = (1, 0)$ y es paralela a R_1.

15. Calcular, numérica y graficamente, las intersecciones $R_1 \cap R_2$ y $R_1 \cap R_3$.

16. Sea $v_0 = (2, -1, 1)$.
    a) Describir paramétricamente el conjunto $P_1 = \{w \in \mathbb{R}^3 : \langle v_0, w \rangle = 0\}$.
    b) Describir paramétricamente el conjunto $P_2 = \{w \in \mathbb{R}^3 : \langle v_0, w \rangle = 1\}$.
    c) ¿Qué relación hay entre P_1 y P_2?

17. Escribir la ecuación paramétrica y la ecuación normal de los siguientes planos.
    a) π_1: el plano que pasa por $(0, 0, 0)$, $(1, 1, 0)$, $(1, -2, 0)$.
    b) π_2: el plano que pasa por $(1, 2, -2)$ y es perpendicular a la recta que pasa por $(2, 1, -1)$, $(3, -2, 1)$.
    c) $\pi_3 = \{w \in \mathbb{R}^3 : w = s(1, 2, 0) + t(2, 0, 1) + (1, 0, 0);\ s, t \in \mathbb{R}\}$.

18. ¿Cuáles de las siguientes rectas cortan al plano π_3 del ejercicio 17*c*)? Describir la intersección en cada caso.

    (*a*) $\{w : w = (3, 2, 1) + t(1, 1, 1)\}$, (*b*) $\{w : w = (1, -1, 1) + t(1, 2, -1)\}$,
    (*c*) $\{w : w = (-1, 0, -1) + t(1, 2, -1)\}$, (*d*) $\{w : w = (1, -2, 1) + t(2, -1, 1)\}$.

19. Sea $L = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : ax + by = c\}$ una recta en $\mathbb{R}^2$. Sean p y q dos puntos por los que pasa L.
    a) ¿Para qué valores de c puede asegurar que $(0, 0) \in L$?
    b) ¿Para qué valores de c puede asegurar que $\lambda q \in L$?, donde $\lambda \in \mathbb{R}$.
    c) ¿Para qué valores de c puede asegurar que $p + q \in L$?

20. Sea L una recta en $\mathbb{R}^2$. Probar que L pasa por $(0, 0)$ si y sólo si pasa por $p + \lambda q$ para todo par de puntos distintos p y q de L y para todo $\lambda \in \mathbb{R}$.

Ejercicios de repaso

Si ya hizo los ejercicios anteriores continue a la siguiente guía. Los ejercicios que siguen son similares a los anteriores y le pueden servir para practicar antes de los exámenes.

21. Probar, usando sólo las propiedades **P1**, **P2**, y **P3** del producto escalar, que dados $v, w, u \in \mathbb{R}^n$ y $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$,
    a) $||\lambda_1 v|| = |\lambda_1|\, ||v||$.
    b)
    $$\langle \lambda_1 v + \lambda_2 w, \lambda_1 v + \lambda_2 w \rangle = \lambda_1^2 ||v||^2 + 2\langle v, w \rangle + \lambda_2^2 ||w||^2.$$

22. ¿Qué parejas de vectores son perpendiculares entre sí?

(*a*) $(1,-1,1)$ y $(2,1,5)$,
(*b*) $(1,-1,1)$ y $(2,3,1)$,
(*c*) $(-5,2,7)$ y $(3,-1,2)$
(*d*) $(\pi,2,1)$ y $(2,-\pi,0)$.

23. Dados $v, w, \in \mathbb{R}^n$, probar que

$$||v+w||^2 + ||v-w||^2 = 2||v||^2 + 2||w||^2. \qquad (*)$$

Hay un resultado clásico de la geometría elemental que dice *"la suma de los cuadrados de las longitudes de los cuatro lados de un paralelogramo es igual a la suma de los cuadrados de las longitudes de las dos diagonales de éste"* (Ley del paralelogramo). Relacione geométricamente el resultado (*) aplicado a $\mathbb{R}^2$ con la Ley del paralelogramo.