PRÁCTICO 1

Vectores en $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$
Álgebra II – Año 2024/1 – FAMAF

Objetivos.

- Aprender las operaciones básicas de $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$ (suma de vectores, multiplicación por escalares, producto escalar, calcular normas y ángulos).
- Familiarizarse con los conceptos de ortogonalidad y paralelismo.
- Aprender a describir rectas y planos de forma impícita y paramétrica.

Ejercicios

Los ejercicios con el símbolo ⓐ tiene una ayuda al final del archivo para que recurran a ella después de pensar un poco.

Vectores y producto escalar.

(1) Dados $v = (-1, 2, 0)$, $w = (2, -3, -1)$ y $u = (1, -1, 1)$, calcular:
   a) $2v + 3w - 5u$,
   b) $5(v + w)$,
   c) $5v + 5w$ (y verificar que es igual al vector de arriba).

(2) Calcular los siguientes productos escalares.
   a) $\langle(-1, 2, 0), (2, -3, -1)\rangle$,
   b) $\langle(4, -1), (-1, 2)\rangle$.

(3) Dados $v = (-1, 2, 0)$, $w = (2, -3, -1)$ y $u = (1, -1, 1)$, verificar que:

$$\langle 2v + 3w, -u\rangle = -2\langle v, u\rangle - 3\langle w, u\rangle$$

(4) Probar que
   a) $(2, 3, -1)$ y $(1, -2, -4)$ son ortogonales.
   b) $(2, -1)$ y $(1, 2)$ son ortogonales. Dibujar en el plano.

(5) Encontrar
   a) un vector no nulo ortogonal a $(3, -4)$,
   b) un vector no nulo ortogonal a $(2, -1, 4)$,
   c) un vector no nulo ortogonal a $(2, -1, 4)$ y $(0, 1, -1)$.

(6) Encontrar la longitud de los vectores.

(a) $(2,3)$, (b) (t,t^2), (c) $(\cos\phi, \operatorname{sen}\phi)$.

(7) Calcular $\langle v, w\rangle$ y el ángulo entre v y w para los siguientes vectores.

(a) $v=(2,2), w=(1,0)$, (b) $v=(-5,3,1), w=(2,-4,-7)$.

(8) Recordar los vectores e_1, e_2 y e_3 dados en la página 12 del apunte. Sea $v=(x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{R}^3$. Verificar que

$$v = x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3 = \langle v, e_1\rangle e_1 + \langle v, e_2\rangle e_2 + \langle v, e_3\rangle e_3.$$

(9) Probar, usando sólo las propiedades **P1**, **P2**, y **P3** del producto escalar, que dados $v,w,u\in\mathbb{R}^n$ y $\lambda_1,\lambda_2\in\mathbb{R}$,

a) se cumple:

$$\langle \lambda_1 v + \lambda_2 w, u\rangle = \lambda_1\langle v, u\rangle + \lambda_2\langle w, u\rangle.$$

b) Si $\langle v, w\rangle = 0$, es decir si v y w son ortogonales, entonces

$$\langle \lambda_1 v + \lambda_2 w, \lambda_1 v + \lambda_2 w\rangle = \lambda_1^2\langle v, v\rangle + \lambda_2^2\langle w, w\rangle.$$

(10) Dados $v,w\in\mathbb{R}^n$, probar que si $\langle v, w\rangle = 0$, es decir si v y w son ortogonales, entonces

$$||v+w||^2 = ||v||^2 + ||w||^2.$$

¿Cuál es el nombre con que se conoce este resultado en $\mathbb{R}^2$?

(11) ⓐ Sean $v,w\in\mathbb{R}^2$, probar usando solo la definición explícita del producto escalar en $\mathbb{R}^2$ que

$$|\langle v, w\rangle| \leq ||v||\,||w|| \qquad \text{(Desigualdad de Schwarz)}.$$

Rectas y planos.

(12) En cada uno de los siguientes casos determinar si los vectores $\overrightarrow{vw}$ y $\overrightarrow{xy}$ son equivalentes y/o paralelos.

a) $v=(1,-1)$, $w=(4,3)$, $x=(-1,5)$, $y=(5,2)$.
b) $v=(1,-1,5)$, $w=(-2,3,-4)$, $x=(3,1,1)$, $y=(-3,9,-17)$.

(13) Sea R_1 la recta que pasa por $p_1=(2,0)$ y es ortogonal a $(1,3)$.

a) Dar la descripción paramétrica e implícita de R_1.
b) Graficar en el plano a R_1.
c) Dar un punto p por el que pase R_1 distinto a p_1.
d) Verificar si $p+p_1$ y $-p$ pertenecen a R_1

(14) Repetir el ejercicio anterior con las siguientes rectas.

a) R_2: recta que pasa por $p_2=(0,0)$ y es ortogonal a $(1,3)$.
b) R_3: recta que pasa por $p_3=(1,0)$ y es paralela a R_1.

(15) Calcular, numérica y graficamente, las intersecciones $R_1 \cap R_2$ y $R_1 \cap R_3$.

(16) Sea $v_0 = (2, -1, 1)$.

a) Describir paramétricamente el conjunto $P_1 = \{w \in \mathbb{R}^3 : \langle v_0, w\rangle = 0\}$.

b) Describir paramétricamente el conjunto $P_2 = \{w \in \mathbb{R}^3 : \langle v_0, w\rangle = 1\}$.

c) ¿Qué relación hay entre P_1 y P_2?

(17) Escribir la ecuación paramétrica y la ecuación normal de los siguientes planos.

a) π_1: el plano que pasa por $(0, 0, 0)$, $(1, 1, 0)$, $(1, -2, 0)$.

b) π_2: el plano que pasa por $(1, 2, -2)$ y es perpendicular a la recta que pasa por $(2, 1, -1)$, $(3, -2, 1)$.

c) $\pi_3 = \{w \in \mathbb{R}^3 : w = s(1, 2, 0) + t(2, 0, 1) + (1, 0, 0);\ s, t \in \mathbb{R}\}$.

(18) ¿Cuáles de las siguientes rectas cortan al plano π_3 del ejercicio *c)*? Describir la intersección en cada caso.

(a) $\{w : w = (3, 2, 1) + t(1, 1, 1)\}$, ($b$) $\{w : w = (1, -1, 1) + t(1, 2, -1)\}$,

(c) $\{w : w = (-1, 0, -1) + t(1, 2, -1)\}$, ($d$) $\{w : w = (1, -2, 1) + t(2, -1, 1)\}$.

(19) Sea $L = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : ax + by = c\}$ una recta en $\mathbb{R}^2$. Sean p y q dos puntos por los que pasa L.

a) ¿Para qué valores de c puede asegurar que $(0, 0) \in L$?

b) ¿Para qué valores de c puede asegurar que $\lambda q \in L$? donde $\lambda \in \mathbb{R}$.

c) ¿Para qué valores de c puede asegurar que $p + q \in L$?

(20) Sea L una recta en $\mathbb{R}^2$. Probar que L pasa por $(0, 0)$ si y sólo si pasa por $p+\lambda q$ para todo par de puntos p y q de L y para todo $\lambda \in \mathbb{R}$.

Ayudas

(11) Elevar al cuadrado y aplicar la definición.

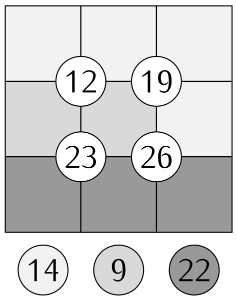
PRÁCTICO 2

Sistemas de ecuaciones
Álgebra II – Año 2024/1 – FAMAF

Objetivos.

- Aprender a plantear y resolver sistemas de ecuaciones lineales.

(1) *Juego Suko.* Colocar los números del 1 al 9 en las celdas de la siguiente tabla de modo que el número en cada círculo sea igual a la suma de las cuatro celdas adyacentes, y la suma de las celdas del mismo color sea igual al número en el círculo de igual color.



(2) Encontrar los coeficientes reales del polinomio $p(x) = ax^2 + bx + c$ de manera tal que $p(1) = 2$, $p(2) = 7$ y $p(3) = 14$.

(3) Determinar cuáles de las siguientes matrices son MERF.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -3 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

(4) Para cada una de las MERF del ejercicio anterior,

a) asumir que es la matriz de un sistema homogéneo, escribir el sistema y dar las soluciones del sistema.

b) asumir que es la matriz ampliada de un sistema no homogéneo, escribir el sistema y dar las soluciones del sistema.

(5) Para cada uno de los siguientes sistemas de ecuaciones, describir explícita o paramétricamente todas las soluciones e indicar cuál es la MERF asociada al sistema.

a) $\begin{cases} -x-y+4z=0 \\ x+3y+8z=0 \\ x+2y+5z=0 \end{cases}$ (d) $\begin{cases} -x-y+4z=1 \\ x+3y+8z=3 \\ x+2y+5z=1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x-3y+5z=0 \\ 2x-3y+z=0 \\ -y+3z=0 \end{cases}$ (e) $\begin{cases} x-3y+5z=1 \\ 2x-3y+z=3 \\ -y+3z=1 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x-z+2t=0 \\ -x+2y-z+2t=0 \\ -x+y=0 \end{cases}$ (f) $\begin{cases} x-z+2t=1 \\ -x+2y-z+2t=3 \\ -x+y=1 \end{cases}$

(6) Para cada uno de los siguientes sistemas, describir implícitamente el conjunto de los vectores (b_1, b_2, b_3) o (b_1, b_2, b_3, b_4) para los cuales cada sistema tiene solución.

a) $\begin{cases} x-3y+5z=b_1 \\ 2x-3y+z=b_2 \\ -y+3z=b_3 \end{cases}$ *c)* $\begin{cases} -x-y+4z=b_1 \\ x+3y+8z=b_2 \\ x+2y+5z=b_3 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x-z+2t=b_1 \\ -x+2y-z+2t=b_2 \\ -x+y=b_3 \\ y-z+2t=b_4 \end{cases}$

(7) Sea $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & 2016 \\ 2 & 3 & 4 & \cdots & 2017 \\ 3 & 4 & 5 & \cdots & 2018 \\ \vdots & & & & \vdots \\ 100 & 101 & 102 & \cdots & 2115 \end{bmatrix}$.

a) Encontrar todas las soluciones del sistema $AX = 0$.

b) Encontrar todas las soluciones del sistema $AX = \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$.

(8) Sea $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 0 \end{bmatrix}$. Reduciendo A por filas,

a) encontrar todas las soluciones sobre $\mathbb{R}$ y $\mathbb{C}$ del sistema $AX = 0$.

b) encontrar todas las soluciones sobre $\mathbb{R}$ y $\mathbb{C}$ del sistema $AX = \begin{bmatrix} 1 \\ i \\ 0 \end{bmatrix}$.

(9) Suponga que tiene que resolver un sistema de ecuaciones lineales homogéneo y que tras hacer algunas operaciones elementales por fila a la matriz asociada obtiene una matriz con la siguiente forma

$$\begin{pmatrix} a & * & * & * \\ 0 & b & * & * \\ 0 & 0 & c & * \\ 0 & 0 & 0 & d \end{pmatrix}$$

donde $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ y $*$ son algunos números reales. ¿Qué conclusiones puede inferir acerca del conjunto de soluciones a partir de los valores de a, b, c y d?

(10) Suponga que tiene que resolver un sistema de ecuaciones lineales y que tras hacer algunas operaciones elementales por fila a la matriz ampliada obtiene una matriz con la siguiente forma

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a & * & * & * & * \\ 0 & b & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 & d & * \end{array}\right)$$

donde $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ y $*$ son algunos números reales. ¿Qué conclusiones puede inferir acerca del conjunto de soluciones a partir de los valores de a, b, c y d?

(11) Suponga que tiene que resolver un sistema de m ecuaciones lineales con n incógnitas. Antes de empezar a hacer cuentas y apelando a la teoría, ¿Qué puede afirmar acerca del conjunto de soluciones en base a m y n? ¿Cómo saber si es vacío o no vacío? ¿Si tiene una o varias soluciones?

(12) ⓐ Sean $\lambda_1, ..., \lambda_n \in \mathbb{R}$ y $b_1, ..., b_n \in \mathbb{R}$.

a) Para cada $n \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$, plantear un sistema de ecuaciones lineales que le permita encontrar un polinomio $p(x)$ con coeficientes reales de grado $n - 1$ tal que

$$p(\lambda_1) = b_1, \ldots, p(\lambda_n) = b_n.$$

b) ¿Se le ocurre alguna condición con la cual pueda afirmar que el sistema anterior no tiene solución?

c) ¿Puede dar una forma general del sistema para cualquier n?

PRÁCTICO 3

Álgebra de matrices
Álgebra II – Año 2024/1 – FAMAF

Objetivos.

- Familiarizarse con las matrices y sus operaciones de suma y multiplicación, Ejercicios (1) – (8).
- Familiarizarse con la notación de subíndices para las entradas de matrices, Ejercicios (8) y (9).
- Aprender la noción de matriz inversa y cómo cálcularla, Ejercicios (10) – (13).
- Usar matrices para la resolución de sistemas de ecuaciones, Ejercicios (14) – (19).

Ejercicios. Los ejercicios con el símbolo ⓐ tienen una ayuda al final del archivo para que recurran a ella después de pensar un poco.

(1) Sean

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -2 & 0 & -1 \\ 1 & 3 & 5 \end{bmatrix}, \qquad C = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Verificar que $A(BC) = (AB)C$, es decir que vale la asociatividad del producto.

(2) Determinar cuál de las siguientes matrices es A, cuál es B y cuál es C de modo tal que sea posible realizar el producto ABC y verificar que $A(BC) = (AB)C$.

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

(3) Calcular A^2 y A^3 para la matriz $A = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 6 & 8 \end{bmatrix}$.

(4) ⓐ Dar ejemplos de matrices no nulas A y B de orden 2×2 tales que

a) $A^2 = 0$ (dar dos ejemplos).

b) $AB \neq BA$.

c) $A^2 = -\mathrm{I}_2$.

d) $A^2 = A \neq \mathrm{I}_2$.

(5) ⓐ Sea $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ tal que $AB = BA$ para toda $B \in \mathbb{R}^{2\times 2}$. Probar que A es un múltiplo de I_2.

(6) Para cada $n \in \mathbb{N}$, con $n \geq 2$, hallar una matriz no nula $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ tal que $A^n = 0$ pero $A^{n-1} \neq 0$.

(7) ⓐ Dar condiciones necesarias y suficientes sobre matrices A y B de tamaño $n \times n$ para que

a) $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$.

b) $A^2 - B^2 = (A-B)(A+B)$.

(8) ⓐ Sean

$$v = \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times 1} \quad \text{y} \quad A = \begin{bmatrix} | & | & & | \\ C_1 & C_2 & \cdots & C_n \\ | & | & & | \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{m\times n},$$

es decir, $C_1, \ldots, C_n$ denotan las columnas de A. Probar que $Av = \sum_{j=1}^{n} v_j C_j$.

(9) Si A es una matriz cuadrada $n \times n$, se define la *traza* de A como $\operatorname{Tr}(A) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_{ii}$.

a) Calcular la traza de las matrices del ejercicio (10).

b) ⓐ Probar que si $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ y $c \in \mathbb{R}$ entonces

$$\operatorname{Tr}(A + cB) = \operatorname{Tr}(A) + c\operatorname{Tr}(B) \quad \text{y} \quad \operatorname{Tr}(AB) = \operatorname{Tr}(BA).$$

(10) Para cada una de las siguientes matrices, usar operaciones elementales por fila para decidir si son invertibles y hallar la matriz inversa cuando sea posible.

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} -1 & -1 & 4 \\ 1 & 3 & 8 \\ 1 & 2 & 5 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & -3 & 3 & -8 \\ -2 & 1 & 2 & -2 \\ 1 & 2 & 1 & 4 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & -3 & 5 \\ 2 & -3 & 1 \\ 0 & -1 & 3 \end{bmatrix}.$$

(para que hagan menos cuentas: las matrices 3×3 aparecieron en el Práctico 2).

(11) Sea A la primera matriz del ejercicio anterior. Hallar matrices elementales $E_1, E_2, \ldots, E_k$ tales que $E_k E_{k-1} \cdots E_2 E_1 A = \mathrm{I}_3$.

(12) ¿Es cierto que si A y B son matrices invertibles entonces $A + B$ es una matriz invertible? Justificar su respuesta.

(13) ⓐ Una matriz $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ se dice *nilpotente* si $A^k = 0$ para algún $k \in \mathbb{N}$. Probar que si una matriz A es nilpotente, entonces $\mathrm{I}_n - A$ es invertible.

(14) Sean v y w dos soluciones del sistema homogéneo $AX = 0$. Probar que $v + tw$ también es solución para todo $t \in \mathbb{K}$.

(15) Sea v una solución del sistema $AX = Y$ y w una solución del sistema homogéneo $AX = 0$. Probar que $v + tw$ también es solución del sistema $AX = Y$ para todo $t \in \mathbb{K}$.

(16) Probar que si el sistema homogéneo $AX = 0$ posee alguna solución no trivial, entonces el sistema $AX = Y$ no tiene solución o tiene al menos dos soluciones distintas.

(17) Supongamos que los sistemas $AX = Y$ y $AX = Z$ tienen solución. Probar que el sistema $AX = Y + tZ$ también tiene solución para todo $t \in \mathbb{K}$.

(18) Sean A una matriz invertible $n \times n$, y B una matriz $n \times m$. Probar que los sistemas $BX = Y$ y $ABX = AY$ tienen las mismas soluciones.

(19) ⓐ Sean A y B matrices $r \times n$ y $n \times m$ respectivamente. Probar que:

a) Si $m > n$, entonces el sistema $ABX = 0$ tiene soluciones no triviales.

b) Si $r > n$, entonces existe un Y, $r \times 1$, tal que $ABX = Y$ no tiene solución.

Ejercicios de repaso. Si ya hizo los ejercicios anteriores continue con la siguiente guía. Los ejercicios que siguen son similares y le pueden servir para practicar antes de los exámenes.

(20) ⓐ Probar que si $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ y $B, C \in \mathbb{R}^{n\times p}$ entonces $A(B + C) = AB + AC$.

(21) Probar que si $A, B \in \mathbb{R}^{m\times n}$ y $C \in \mathbb{R}^{n\times p}$ entonces $(A + B)C = AC + BC$.

(22) Sea $v = [v_1 \cdots v_m] \in \mathbb{R}^{1\times m}$ y $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$. Probar que $vA = \sum_{i=1}^{m} v_i F_i$, donde $F_1, \ldots, F_m$ denotan las filas de A.

(23) Sea $D = (d_{ij}) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ una matriz diagonal y $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{m\times n}$. Probar que $AD = (d_{jj}a_{ij}) \in \mathbb{R}^{m\times n}$.

(24) Probar las siguientes afirmaciones:

a) Si $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ son matrices diagonales, entonces $AB = BA$.

b) Si $A = c\,\mathrm{I}_n$ para algún $c \in \mathbb{R}$, entonces $AB = BA$ para toda $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$.

(25) Probar que si $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ es una matriz diagonal tal que $\mathrm{Tr}(A^2) = 0$, entonces $A = 0$.

(26) Sea A matriz 2×2 tal que $\mathrm{Tr}(A) = 0$ y $\mathrm{Tr}(A^2) = 0$.

a) Probar que $A^2 = 0$.

b) ¿Es cierta la recíproca?

(27) Probar que si A y B son matrices $n \times n$ *que conmutan entre sí*, entonces para todo $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ se cumple que:

$$(A+B)^k = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} A^j B^{k-j}.$$

(28) Sea $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$. La *matriz traspuesta* de A es la matriz $A^t \in \mathbb{R}^{n\times m}$ tal que $(A^t)_{ij} = A_{ji}$, $1 \le i \le n$, $1 \le j \le m$.

a) Dar las matrices traspuestas de las matrices A, B y C de los ejercicios (1) y (2).

b) Probar que si $A, B \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $C \in \mathbb{R}^{n\times p}$ y $c \in \mathbb{R}$ entonces

$$(A+cB)^t = A^t + cB^t, \qquad (BC)^t = C^t B^t.$$

c) Probar que si $D \in \mathbb{R}^{n\times n}$ es invertible, entonces D^t también lo es y $(D^t)^{-1} = (D^{-1})^t$.

(29) Una matriz A se dice *simétrica* si $A^t = A$. Una matriz B se dice *antisimétrica* si $B^t = -B$. Probar que toda matriz se puede expresar como la suma de una matriz simétrica y una antisimétrica.

(30) Decidir si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justificar.

a) Si A y B son matrices cuadradas tales $AB = BA$ pero ninguna es múltiplo de la otra, entonces A o B es diagonal.

b) Existen una matriz 3×2, A, y una matriz 2×3, B, tales que AB es una matriz invertible.

c) Existen una matriz 2×3, A, y una matriz 3×2, B, tales que AB es una matriz invertible.

Ayudas.

(4) Probar con algunos 0 y 1 en las entradas.

(5) Elegir matrices B apropiadas con muchos ceros y **un** 1.

(7) El objetivo del ejercicio es completar los puntos suspensivos en la siguiente frase:

“$(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$ si y sólo si A y B satisfacen ..... ”

Desarrollen el cuadrado de la suma $A + B$ usando que el producto de matrices es distributivo y vean que les “sobra” para obtener la fórmula del binomio. Misma idea para el item (b).

(8) Usar la notación de subíndices para las entradas de matrices.

(9) *b)* Usar la notación de subíndices para las entradas de matrices.

(13) Pensar en la fórmula de $\sum_{i=0}^{n} a^i$ vista en álgebra I/Matemática Discreta I.

(19) Recordar el ejercicio (11) del Práctico 2.

(20) Usar la notación de subíndices para las entradas de matrices.

PRÁCTICO 4

Determinantes
Álgebra II – Año 2024/1 – FAMAF

Objetivos.

- Aprender a calcular el determinante de una matriz.
- Aprender a utilizar operaciones elementales por filas y/o columnas para calcular el determinante.
- Aplicar las propiedades del determinante para calcular el determinante de un producto de matrices, y para decidir si una matriz cuadrada es o no invertible.

Ejercicios. Los ejercicios con el símbolo ⓐ tienen una ayuda al final del archivo para que recurran a ella después de pensar un poco.

(1) Calcular el determinante de las siguientes matrices.

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 7 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} -3 & 2 & 4 \\ 1 & -1 & 2 \\ -1 & 4 & 0 \end{bmatrix}, \qquad C = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 5 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 5 \end{bmatrix}.$$

(2) Sean

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 3 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Calcular:

a) $\det(AB)$.
b) $\det(BA)$.
c) $\det(A^{-1})$.
d) $\det(A^4)$.
e) $\det(A+B)$.
f) $\det(A+tB)$, con $t \in \mathbb{R}$.

(3) Calcular el determinante de las siguientes matrices haciendo la reducción a matrices triangulares superiores.

$$A = \begin{bmatrix} a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & 1 & a \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 3 & 3 & 3 \\ 1 & 3 & 5 & 5 & 5 \\ 1 & 3 & 5 & 7 & 7 \\ 1 & 3 & 5 & 7 & 9 \end{bmatrix}.$$

(4) Sean A, B y C matrices $n \times n$, tales que $\det A = -1$, $\det B = 2$ y $\det C = 3$. Calcular:

a) $\det(PQR)$, donde P, Q y R son las matrices que se obtienen a partir de A, B y C mediante operaciones elementales por filas de la siguiente manera

$$A \xrightarrow{F_1+2F_2} P, \quad B \xrightarrow{3F_3} Q \quad \text{y} \quad C \xrightarrow{F_1 \leftrightarrow F_4} R.$$

Es decir,
- P se obtiene a partir de A sumando a la fila 1 la fila 2 multiplicada por 2.
- Q se obtiene a partir de B multiplicando la fila 3 por 3.
- R se obtiene a partir de C intercambiando las filas 1 y 4.

b) $\det(A^2BC^tB^{-1})$ y $\det(B^2C^{-1}AB^{-1}C^t)$.

(5) Sea

$$A = \begin{bmatrix} x & y & z \\ 3 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Sabiendo que $\det(A) = 5$, calcular el determinante de las siguientes matrices.

$$B = \begin{bmatrix} 2x & 2y & 2z \\ 3/2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \qquad C = \begin{bmatrix} x & y & z \\ 3x+3 & 3y & 3z+2 \\ x+1 & y+1 & z+1 \end{bmatrix}.$$

(6) Determinar todos los valores de $c \in \mathbb{R}$ tales que las siguientes matrices sean invertibles.

$$A = \begin{bmatrix} 4 & c & 3 \\ c & 2 & c \\ 5 & c & 4 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & c & -1 \\ c & 1 & 1 \\ 0 & 1 & c \end{bmatrix}.$$

(7) Calcular el determinante de las siguientes matrices, usando operaciones elementales por fila y/o columnas u otras propiedades del determinante. Determinar cuáles de ellas son invertibles.

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 3 & 2 & -6 \\ 0 & 4 & 4 & -5 \\ 5 & -6 & -3 & 2 \\ -3 & 7 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix},$$

$$C = \begin{bmatrix} -2 & 3 & 2 & -6 & 0 \\ 0 & 4 & 4 & -5 & 0 \\ 5 & -6 & -3 & 2 & 0 \\ -3 & 7 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -13 & 6 & \frac{1}{3} \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 11 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \sqrt{2} & 2 & 1 & \pi & 0 \end{bmatrix},$$

$$E = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 4 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 4 \end{bmatrix}.$$

(8) Sean A y B matrices $n \times n$. Probar que:

a) $\det(AB) = \det(BA)$.

b) Si B es invertible, entonces $\det(BAB^{-1}) = \det(A)$.

c) ⓐ $\det(-A) = (-1)^n \det(A)$.

(9) Sean $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ escalares, la matriz de *Vandermonde* asociada es

$$\mathrm{V} = \begin{bmatrix} 1 & \lambda_1 & \lambda_1^2 & \cdots & \lambda_1^{n-1} \\ 1 & \lambda_2 & \lambda_2^2 & \cdots & \lambda_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \lambda_n & \lambda_n^2 & \cdots & \lambda_n^{n-1} \end{bmatrix}.$$

Esta es la matriz del sistema de ecuaciones del ejercicio (12) *c)* del Práctico 2.

a) Si $n = 2$, probar que $\det(\mathrm{V}_n) = \lambda_2 - \lambda_1$.

b) Si $n = 3$, probar que $\det(\mathrm{V}_n) = (\lambda_3 - \lambda_2)(\lambda_3 - \lambda_1)(\lambda_2 - \lambda_1)$.

c) Probar que $\det(\mathrm{V}_n) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (\lambda_j - \lambda_i)$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

d) Dar una condición necesaria y suficiente para que la matriz de Vandermonde sea invertible.

e) Dados $b_1, \ldots, b_n$ y $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ secuencias de números reales, dar una condición suficiente para que exista un polinomio de grado n, digamos p, tal que

$$p(\lambda_1) = b_1, \ldots, p(\lambda_n) = b_n.$$

(ver ejercicio (12) del Práctico 2).

(10) Decidir si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justificar con una demostración o con un contraejemplo, según corresponda.

a) Sean A y B matrices $n \times n$. Entonces $\det(A + B) = \det(A) + \det(B)$.

b) Existen una matriz 3×2, A, y una matriz 2×3, B, tales que $\det(AB) \neq 0$.

c) Sea A una matriz $n \times n$. Si A^n es no invertible, entonces A es no invertible.

Ejercicios de repaso. Si ya hizo los ejercicios anteriores continue con la siguiente guía. Los ejercicios que siguen son similares y le pueden servir para practicar antes de los exámenes.

(11) Determinar todos los valores de $c \in \mathbb{K}$ tales que la siguiente matriz sea invertible.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & c & -c \\ -1 & 2 & -1 \\ c & -c & c \end{bmatrix}.$$

(12) Sabiendo que $\det \begin{bmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ x & y & z \end{bmatrix} = -1$, calcular $\det \begin{bmatrix} -2a & -2b & -2c \\ 2p+x & 2q+y & 2r+z \\ 3x & 3y & 3z \end{bmatrix}$.

(13) Probar que

$$\det \begin{bmatrix} 1+x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ x_1 & 1+x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ x_1 & x_2 & 1+x_3 & \cdots & x_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & 1+x_n \end{bmatrix} = 1 + x_1 + x_2 + \cdots + x_n.$$

(14) Una matriz A $n \times n$ se dice *antisimétrica* si $A^t = -A$.

a) ⓐ Probar que si n es impar y A es antisimétrica, entonces $\det(A) = 0$.

b) ⓐ Para cada n par, encontrar una matriz A antisimétrica $n \times n$ tal que $\det(A) \neq 0$.

Ayudas.

c) Analizar primero los casos $n = 2, 3$.

(9) *c)* En Wikipedia hay una posible demostración.

a) Usar el ejercicio *c)*.

b) Encontrar primero una matriz A_0 para el caso 2×2. Para $n = 2m$ considerar la matriz $2m \times 2m$ formada por m bloques diagonales iguales a A_0.

PRÁCTICO 5

Autovalores y autovectores
Álgebra II – Año 2024/1 – FAMAF

Objetivos.

- Familiarizarse con las nociones de autovalor y autovector de una matriz cuadrada.
- Aprender a calcular el polinomio característico, los autovalores, y los autoespacios de una matriz cuadrada.

Ejercicios. Los ejercicios con el símbolo ⓐ tienen una ayuda al final del archivo para que recurran a ella después de pensar un poco.

(1) Para cada una de las siguientes matrices, hallar sus autovalores reales, y para cada autovalor, dar una descripción paramétrica del autoespacio asociado sobre $\mathbb{R}$.

a) $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$,

b) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$,

c) $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$,

d) $\begin{bmatrix} 3 & -5 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$,

e) $\begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 1 & \lambda & 0 \\ 0 & 1 & \lambda \end{bmatrix}$, $\lambda \in \mathbb{R}$

f) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \operatorname{sen}\theta \\ 0 & -\operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$, $0 \leq \theta < 2\pi$.

(2) Calcular los autovalores complejos de las matrices *d)* y *f)* del ejercicio anterior, y para cada autovalor, dar una descripción paramétrica del autoespacio asociado sobre $\mathbb{C}$.

Observación. Es oportuno destacar algunos fenómenos que podemos observar en los ejercicios (1)-(2).

(i) Una matriz con coeficientes reales puede no tener autovalores reales pero sí complejos (matriz (d)) o tener ambos (matriz (f)).

(ii) Para describir paramétricamente los autoespacios podemos necesitar distintas cantidades de parámetros para los distintos autovalores (la matriz (c)). Esta cantidad mínima de parámetros es lo que llamaremos *dimensión*.

(iii) La cantidad de autovalores distintos es menor o igual al tamaño de la matriz. Incluso puede tener un sólo autovalor (matriz (d) y más generalmente la matriz (e) del Ejercicio (9)) o tener tantos como el tamaño (matriz (b) y (f)).

(3) Probar que hay una única matriz $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ tal que $(1,1)$ es autovector de autovalor 2, y $(-2,1)$ es autovector de autovalor 1.

(4) Sea $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$, y sea $f(x) = ax^2 + bx + c$ un polinomio, con $a, b, c \in \mathbb{K}$. Sea $f(A)$ la matriz $n \times n$ definida por

$$f(A) = aA^2 + bA + c \operatorname{Id}_n .$$

Probar que todo autovector de A con autovalor λ es autovector de $f(A)$ con autovalor $f(\lambda)$.

(5) Sea $A \in \mathbb{K}^{2\times 2}$.

a) Probar que el polinomio característico de A es $\chi_A(x) = x^2 - \operatorname{Tr}(A)x + \det(A)$.

b) Si A no es invertible, probar que los autovalores de A son 0 y $\operatorname{Tr}(A)$.

(6) Sea $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$. Probar que el polinomio $\tilde{\chi}_A(x) = \det(x \operatorname{Id}_n - A)$ y el polinomio característico de A tienen las mismas raíces.

Observación Algunos libros definen el polinomio característico de la matriz A como $\tilde{\chi}_A(x) = \det(x \operatorname{Id}_n - A)$. Como vemos en el ejercicio anterior, ambas definiciones sirven para encontrar autovalores de A. El polinomio $\tilde{\chi}_A(x)$ tiene la particularidad de ser mónico, o sea que el coeficiente del término x^n es 1.

(7) Probar que si $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ es una matriz nilpotente entonces 0 es el único autovalor de A. Usar esto para deducir que la matriz $\operatorname{Id}_n - A$ es invertible (esta es otra demostración del ejercicio (13) del Práctico 3).

(8) Decidir si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justificar.

a) Existe una matriz invertible A tal que 0 es autovalor de A.

b) Si A es invertible, entonces todo autovector de A es autovector de A^{-1}.

(9) Repetir los ejercicios (1) y (2) con las siguientes matrices.

a) $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$, *b)* $\begin{bmatrix} -9 & 4 & 4 \\ -8 & 3 & 4 \\ -16 & 8 & 7 \end{bmatrix}$, *c)* $\begin{bmatrix} 4 & 4 & -12 \\ 1 & -1 & 1 \\ 5 & 3 & -11 \end{bmatrix}$,

d) $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & -1 \end{bmatrix}$,

e) $\begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & \lambda & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \lambda & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & \lambda \end{bmatrix}$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

Ejercicios de repaso Si ya hizo los ejercicios anteriores continue con la siguiente guía. Los ejercicios que siguen son similares y le pueden servir para practicar antes de los exámenes.

(10) Sea $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$, y sea $f(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$, $n \geq 1$, $a_i \in \mathbb{K}$, $a_n \neq 0$, un polinomio. Sea $f(A)$ la matriz $n \times n$ definida por

$$f(A) = a_0 \operatorname{Id}_n + a_1A + \cdots + a_nA^n.$$

Probar que todo autovector de A con autovalor λ es autovector de $f(A)$ con autovalor $f(\lambda)$.

(11) En este ejercicio consideraremos el polinomio $\tilde{\chi}_A(x) = \det(x \operatorname{Id}_n - A)$.

a) Calcular el polinomio $\tilde{\chi}_A(x)$ de las siguientes matrices.

$$A_2 := \begin{bmatrix} 0 & -a_0 \\ 1 & -a_1 \end{bmatrix}, \qquad A_3 := \begin{bmatrix} 0 & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & -a_2 \end{bmatrix}.$$

donde a_0, a_1, a_2 son escalares.

b) ⓐ Sean $a_0, \ldots, a_{n-1}$ escalares. Calcular el polinomio $\tilde{\chi}_A(x)$ de

$$A_n := \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & -a_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & & \vdots & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & -a_{n-1} \end{bmatrix}.$$

c) Deducir que dado un polinomio mónico $p(x)$ siempre existe una matriz A tal que $\tilde{\chi}_A(x) = p(x)$.

(12) ⓐ **En este ejercicio consideraremos el polinomio $\tilde{\chi}_A(x) = \det(x \operatorname{Id}_n - A)$.** Sea $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$, y $\tilde{\chi}_A(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0$. Probar que

a) $a_0 = (-1)^n \det(A)$.

b) $a_{n-1} = -\operatorname{Tr}(A)$.

(13) ⓐ **En este ejercicio consideraremos el polinomio $\tilde{\chi}_A(x) = \det(x\,\mathrm{Id}_n - A)$.** Sea $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Probar que si $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{C}$ son los autovalores de A (posiblemente repetidos), entonces se cumple que:

a) $\det(A) = \lambda_1 \cdots \lambda_n$.

b) $\mathrm{Tr}(A) = \lambda_1 + \cdots + \lambda_n$.

Aclaración. Los ejercicios (12) (b) y (13) (b) no son fáciles de probar y no son evaluables. Pero ya que enunciamos los items (a) es interesante saber que valen los items (b).

Ayudas. (11) *b)* Desarrollar el determinante por la primera fila y hacer inducción.

(12) (a) Evaluar el polinomio $\tilde{\chi}_A(x)$ en un valor apropiado para obtener el término independiente a_0.

(12) (b) Desarrollar el determinante de $x\,\mathrm{Id} - A$ por la primera columna y hacer inducción en el tamaño de la matriz. Es decir, primero

$$\tilde{\chi}_A(x) = \det(x\,\mathrm{Id} - A) =$$
$$(x - a_{11})\det((x\,\mathrm{Id} - A)(1|1)) + a_{21}\det((x\,\mathrm{Id} - A)(2|1)) + \cdots + (-1)^n a_{n1}\det((x\,\mathrm{Id} - A)(n|1)).$$

De estos sumandos, el único sumando donde hay x^{n-1} es $(x - a_{11})\det((x\,\mathrm{Id} - A)(1|1))$. Además, $\det((x\,\mathrm{Id} - A)(1|1))$ es el polinomio característico de la submatriz $A(1|1)$. Podemos aplicar la hipótesis inductiva a esta matriz y deducir que el coeficiente de x^{n-1} en el producto de polinomios $(x - a_{11})\det((x\,\mathrm{Id} - A)(1|1))$ es $-\mathrm{Tr}(A)$.

(13) Sobre $\mathbb{C}$ podemos descomponer el polinomio $\tilde{\chi}_A(x)$ de la siguiente manera

$$\tilde{\chi}_A(x) = (x - \lambda_1)(x - \lambda_2)\cdots(x - \lambda_n). \qquad (\diamondsuit)$$

Con esta igualdad podemos calcular los términos a_0 y a_{n-1} de $\tilde{\chi}_A(x)$ de dos maneras. La primera es la obtenida en el ejercicio (12). La segunda es usando la multiplicación del lado derecho de $(\diamondsuit)$. Para el término a_0 hay que evaluar en un valor apropiado. Para el término a_{n-1} hay que notar que para obtener x^{n-1} debemos elegir una x de todos los factores salvo en uno y un término del estilo $-\lambda_i$. Igualando lo que obtengamos probamos el ejercicio.

PRÁCTICO 6

Espacios y subespacios vectoriales
Álgebra II – Año 2024/1 – FAMAF

Objetivos.

- Familiarizarse con los conceptos de espacio y subespacio vectorial.
- Familiarizarse con los conceptos de conjunto de generadores e independencia lineal, base y dimensión de un espacio vectorial.
- Aprender a caracterizar los subespacios de $\mathbb{K}^n$ por generadores y de manera implícita.
- Dado un subespacio W de $\mathbb{K}^n$, aprender a extraer una base de cualquier conjunto de generadores de W, y a completar cualquier subconjunto linealmente independiente de W a una base.

Ejercicios. Los ejercicios con el símbolo ⓐ tienen una ayuda al final del archivo para que recurran a ella después de pensar un poco.

(1) Decidir si los siguientes subconjuntos de $\mathbb{R}^3$ son subespacios vectoriales.
  a) $A = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \;:\; x_1 + x_2 + x_3 = 1\}$.
  b) $B = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \;:\; x_1 + x_2 + x_3 = 0\}$.
  c) $C = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \;:\; x_1 + x_2 + x_3 \geq 0\}$.
  d) $D = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \;:\; x_3 = 0\}$.
  e) $B \cup D$.
  f) $B \cap D$.
  g) $G = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \;:\; x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{Q}\}$.

Observación En los items *a)*, *b)* y *c)* del ejercicio (1) podemos apreciar como un simple cambio en la condición que define al subconjunto hace que dicho subconjunto sea o no un subespacio vectorial. Este es un fenómeno que pasa en general. De hecho podríamos haber definido subconjuntos similares para todo $\mathbb{R}^n$. Lo mismo sucede en los ejercicios (21) y (22). En **Ayudas**, al final del práctico, están las respuestas a los ejercicios (1), (2) y (21).

(2) Decidir en cada caso si el conjunto dado es un subespacio vectorial de $M_{n\times n}(\mathbb{K})$.
  a) El conjunto de matrices invertibles.
  b) El conjunto de matrices A tales que $AB = BA$, donde B es una matriz fija.
  c) El conjunto de matrices triangulares superiores.

(3) ⓐ Sea L una recta en $\mathbb{R}^2$. Dar una condición necesaria y suficiente para que L sea un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^2$.

(4) Sean V un $\mathbb{K}$-espacio vectorial, $v \in V$ no nulo y $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ tales que $\lambda v = \mu v$. Probar que $\lambda = \mu$.

(5) Sean W_1, W_2 subespacios de un espacio vectorial V. Probar que $W_1 \cup W_2$ es un subespacio de V si y sólo si $W_1 \subseteq W_2$ o $W_2 \subseteq W_1$.

(6) Sean $u = (1, 1)$, $v = (1, 0)$, $w = (0, 1)$ y $z = (3, 4)$ vectores de $\mathbb{R}^2$.
   a) Escribir z como combinación lineal de u, v y w, con coeficientes todos no nulos.
   b) Escribir z como combinación lineal de u y v.
   c) Escribir z como combinación lineal de u y w.
   d) Escribir z como combinación lineal de v y w.

   Observación. En este ejercicio vemos como un vector se puede escribir de muchas maneras como combinación lineal de vectores dados. Esto pasa porque $\{u, v, w\}$ es LD.

(7) Sean $p(x) = (1 - x)(x + 2)$, $q(x) = x^2 - 1$ y $r(x) = x(x^2 - 1)$ en $\mathbb{R}[x]$.
   a) Describir todos los polinomios de grado menor o igual que 3 que son combinación lineal de p, q y r.
   b) Elegir a tal que el polinomio x se pueda escribir como combinación lineal de p, q y $2x^2 + a$.

(8) Dar un conjunto de generadores para los siguientes subespacios vectoriales.
   a) Los conjuntos de soluciones de los sistemas homogéneos del ejercicio (5) del Práctico 2.
   b) Los conjuntos descriptos en el ejercicio (6) del Práctico 2.

(9) En cada caso, caracterizar con ecuaciones al subespacio vectorial dado por generadores.
   a) $\langle(1, 0, 3), (0, 1, -2)\rangle \subseteq \mathbb{R}^3$.
   b) $\langle(1, 2, 0, 1), (0, -1, -1, 0), (2, 3, -1, 4)\rangle \subseteq \mathbb{R}^4$.

(10) En cada caso, determinar si el subconjunto indicado es linealmente independiente.
   a) $\{(1, 0, -1), (1, 2, 1), (0, -3, 2)\} \subseteq \mathbb{R}^3$.
   b) $\left\{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & -3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}\right\} \subseteq M_{2\times 3}(\mathbb{R})$.

(11) Dar un ejemplo de un conjunto de 3 vectores en $\mathbb{R}^3$ que sean LD, y tales que dos cualesquiera de ellos sean LI.

(12) Probar que si α, β y γ son vectores LI en el $\mathbb{R}$-espacio vectorial V, entonces $\alpha+\beta$, $\alpha+\gamma$ y $\beta+\gamma$ también son LI.

(13) Extender, de ser posible, los siguientes conjuntos a una base de los respectivos espacios vectoriales.
  a) Los conjuntos del ejercicio (10).
  b) $\{(1,2,0,0),(1,0,1,0)\} \subseteq \mathbb{R}^4$.
  c) $\{(1,2,1,1),(1,0,1,1),(3,2,3,3)\} \subseteq \mathbb{R}^4$.

(14) Dar subespacios vectoriales W_0, W_1, W_2 y W_3 de $\mathbb{R}^3$ tales que $W_0 \subset W_1 \subset W_2 \subset W_3$ y $\dim W_0 = 0$, $\dim W_1 = 1$, $\dim W_2 = 2$ y $\dim W_3 = 3$.

(15) Sea V un espacio vectorial de dimensión n y $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$ una base de V.
  a) Probar que cualquier subconjunto no vacío de $\mathcal{B}$ es LI.
  b) Para cada $k \in \mathbb{N}_0$, con $0 \leq k \leq n$, dar un subespacio vectorial de V de dimensión k.

(16) Dar una base y calcular la dimensión de $\mathbb{C}^n$ como $\mathbb{C}$-espacio vectorial y como $\mathbb{R}$-espacio vectorial.

(17) Exhibir una base y calcular la dimensión de los siguientes subespacios.
  a) Los subespacios del ejercicio (8).
  b) $W = \{(x,y,z,w,u) \in \mathbb{R}^5 \;:\; y = x - z,\ w = x + z,\ u = 2x - 3z\}$.
  c) $W = \langle (1,0,-1,1),(1,2,1,1),(0,1,1,0),(0,-2,-2,0) \rangle \subseteq \mathbb{R}^4$.
  d) Matrices triangulares superiores 2×2 y 3×3.
  e) Matrices triangulares superiores $n \times n$ para cualquier $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$.

(18) Sean W_1 y W_2 los siguientes subespacios de $\mathbb{R}^3$:

$$W_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;:\; x + y - 2z = 0\},$$
$$W_2 = \langle (1,-1,1),(2,1,-2),(3,0,-1) \rangle.$$

  a) Determinar $W_1 \cap W_2$, y describirlo por generadores y con ecuaciones.
  b) Determinar $W_1 + W_2$, y describirlo por generadores y con ecuaciones.

(19) Decidir si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justificar.
  a) Si W_1 y W_2 son subespacios vectoriales de $\mathbb{K}^8$ de dimensión 5, entonces $W_1 \cap W_2 = 0$.
  b) Si W es un subespacio de $\mathbb{K}^{2\times 2}$ de dimensión 2, entonces existe una matriz triangular superior no nula que pertence a W.
  c) Sean $v_1, v_2, w \in \mathbb{K}^n$ y $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ tales que $Av_1 = Av_2 = 0 \neq Aw$. Si $\{v_1, v_2\}$ es LI, entonces $\{v_1, v_2, w\}$ también es LI.
  d) ⓐ $\{1, \operatorname{sen}(x), \cos(x)\}$ es un subconjunto LI del espacio de funciones de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$.
  e) ⓐ $\{1, \operatorname{sen}^2(x), \cos^2(x)\}$ es un subconjunto LI del espacio de funciones $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$.

f) ⓐ $\{e^{\lambda_1 x}, e^{\lambda_2 x}, e^{\lambda_3 x}\}$ es un subconjunto LI del espacio de funciones de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$, si λ_1, λ_2 y λ_3 son todos distintos.

Ejercicios de repaso Si ya hizo los ejercicios anteriores continue con la siguiente guía. Los ejercicios que siguen son similares y le pueden servir para practicar antes de los exámenes.

(20) Decidir en cada caso si el conjunto dado es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^n$.
a) $\{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \ : \ \exists\, j > 1,\ x_1 = x_j\}$.
b) $\{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \ : \ x_1 x_n = 0\}$.

(21) Sea $F[0, 1]$ el espacio de funciones de $[0, 1]$ en $\mathbb{R}$. Decidir en cada caso si el conjunto dado es un subespacio vectorial de $F[0, 1]$.
a) $\{f \in F[0, 1] \ : \ f(1) = 1\}$.
b) $\{f \in F[0, 1] \ : \ f(1) = 0\}$.

(22) Decidir si los siguientes subconjuntos de $\mathbb{R}[x]$ son subespacios vectoriales.
a) $\mathbb{R}_n[x] := \{a_0 + \cdots + a_{n-1}x^{n-1} \ : \ a_i \in \mathbb{R}\}$, es decir, el conjunto formado por todos los polinomios de grado estrictamente menor que $n \in \mathbb{N}$.
b) $B = \{p(x) \in \mathbb{R}_n[x] \ : \ a_0 + \cdots + a_{n-1} = 1\}$.
c) $C = \{p(x) \in \mathbb{R}_n[x] \ : \ a_0 + \cdots + a_{n-1} = 0\}$.
d) $D = \{p(x) \in \mathbb{R}_n[x] \ : \ a_{n-1} \leq a_{n-2}\}$.
e) $E = \{p(x) \in \mathbb{R}_n[x] \ : \ a_{n-1} = 0\}$.
f) $C \cup E$.
g) $C \cap E$.
h) $F = \{p(x) \in \mathbb{R}_n[x] \ : \ a_0, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{Q}\}$.

(23) Hallar $a, b, c \in \mathbb{R}$ tales que $(-1, 2, 1) = a(1, 1, 1) + b(1, -1, 0) + c(2, 1, -1)$.

(24) *a)* Hallar escalares $a, b \in \mathbb{R}$ tales que $1 + 2i = a(1 + i) + b(1 - i)$.
b) Hallar escalares $w, z \in \mathbb{C}$ tales que $1 + 2i = z(1 + i) + w(1 - i)$.

(25) Repetir el ejercicio (10) con los subespacios:
a) $\langle (1, 1, 0, 0), (0, 1, 1, 0), (0, 0, 1, 1) \rangle \subseteq \mathbb{R}^4$.
b) $\left\langle 1 + x + x^2,\ x - x^2 + x^3,\ 1 - x,\ 1 - x^2,\ x - x^2,\ 1 + x^4 \right\rangle \subseteq \mathbb{R}[x]$.

(26) En este ejercicio no es necesario hacer ninguna cuenta. Es lógica y comprender bien la definición de LI y LD. Probar las siguientes afirmaciones.
a) Todo conjunto que contiene un subconjunto LD es también LD.
b) Todo conjunto que contiene al vector 0 es LD.
c) Un conjunto es LI si y sólo si todos sus subconjuntos *finitos* son LI.

(27) Sean $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ todos distintos. Probar que el conjunto $\{e^{\lambda_1 x}, \dots, e^{\lambda_n x}\}$ es LI.

(28) Exhibir una base y calcular la dimensión de los siguientes subespacios.

a) $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ z = x + y\}$.
b) $W = \langle(-1, 1, 1, -1, 1), (0, 0, 1, 0, 0), (2, -1, 0, 2, -1), (1, 0, 1, 1, 0)\rangle \subseteq \mathbb{R}^5$.

(29) Exhibir una base y calcular la dimensión de los siguientes subespacios.
a) $W = \{p(x) = a + bx + cx^2 + dx^3 \in \mathbb{R}_4[x] \ : \ a + d = b + c\}$.
b) $W = \{p(x) \in \mathbb{R}_4[x] \ : \ p'(0) = 0\}$.
c) $W = \{A \in \mathbb{R}^{n\times n} \ : \ A = A^t\}$.

(30) Sea $S = \{v_1, v_2, v_3, v_4\} \subset \mathbb{R}^4$, donde

$$v_1 = (-1, 0, 1, 2), \quad v_2 = (3, 4, -2, 5), \quad v_3 = (0, 4, 1, 11), \quad v_4 = (1, 4, 0, 9).$$

a) Describir implícitamente al subespacio $W = \langle\, S \,\rangle$.
b) Si $W_1 = \langle\, v_1, v_2, v_3 + v_4 \,\rangle$ y $W_2 = \langle\, v_3, v_4 \,\rangle$, describir $W_1 \cap W_2$ implícitamente.

(31) Sean $A_1 = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 3 & 7 \\ 2 & 1 & -3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ y $A_2 = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & -3 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -3 & 1 & -2 \end{bmatrix}$.
a) Sean W_1 y W_2 los espacios solución de los sistemas homogéneos asociados a A_1 y A_2, respectivamente. Describir implícitamente $W_1 \cap W_2$.
b) Sean V_1 y V_2 los subespacios de $\mathbb{R}^5$ generado por las filas de A_1 y A_2, respectivamente. Dar un conjunto de generadores de $V_1 + V_2$.

(32) Sean W_1 y W_2 los siguientes subespacios de $\mathbb{R}^6$:

$$W_1 = \{(u, v, w, x, y, z) \ : \ u + v + w = 0,\ x + y + z = 0\},$$
$$W_2 = \langle(1, -1, 1, -1, 1, -1), (1, 2, 3, 4, 5, 6), (1, 0, -1, -1, 0, 1), (2, 1, 0, 0, 0, 0)\rangle\,.$$

a) Determinar $W_1 \cap W_2$, y describirlo por generadores y con ecuaciones.
b) Determinar $W_1 + W_2$, y describirlo por generadores y con ecuaciones.
c) Decir cuáles de los siguientes vectores están en $W_1 \cap W_2$ y cuáles en $W_1 + W_2$:

$$(1, 1, -2, -2, 1, 1),\ (0, 0, 0, 1, 0, -1),\ (1, 1, 1, 0, 0, 0),\ (3, 0, 0, 1, 1, 3),\ (-1, 2, 5, 6, 5, 4).$$

d) Para los vectores v del punto anterior que estén en W_1+W_2, hallar $w_1 \in W_1$ y $w_2 \in W_2$ tales que $v = w_1 + w_2$.

Ayudas

Ejercicio (1): *a)* No. *b)* Si. *c)* No. *d)* Si. *e)* No. *f)* Si. *g)* No.

Ejercicio (2) *a)* No; recordar el ejercicio (12) del Práctico 3. *b)* Si. *c)* Si.

Ejercicio (3) Recordar el ejercicio (20) del Práctico 1.

Ejercicio (19) *d)* Verdadero. Plantear una combinación lineal de las funciones que de igual a cero y evaluar en diferentes valores de x para obtener alguna condición sobre los escalares.

Ejercicio (19) *e)* Falso. Utilizar una igualdad trigonométrica.

Ejercicio (19) *f)* Verdadero. Plantear una combinación lineal de las funciones que de igual a cero. Derivar dos veces la igualdad obteniendo así dos nuevas combinaciones lineales que den cero. Evaluar en cero las tres combinaciones lineales y utilizar la matriz de Vandermonde.

Ejercicio (21): *a)* No. *b)* Si.

PRÁCTICO 7

Transformaciones lineales
Álgebra II – Año 2024/1 – FAMAF

Objetivos.

- Familiarizarse con las transformaciones lineales.
- Aprender a decidir si un función es una transformación lineal, monomorfismos, epimorfismo o isomorfismo.
- Aprender a calcular la matriz de una transformacićon respecto a las bases canónicas.
- Aprender a calcular el núcleo y la imagen de una transformación.
- Familiarizarse con el teorema sobre la dimensión del núcleo y la imagen.

Ejercicios. Los ejercicios con el símbolo ⓐ tienen una ayuda al final del archivo para que recurran a ella después de pensar un poco.

(1) Decidir si las siguientes funciones son transformaciones lineales entre los respectivos espacios vectoriales sobre $\mathbb{K}$.

a) La traza $\operatorname{Tr} : \mathbb{K}^{n\times n} \longrightarrow \mathbb{K}$ (recordar ejercicio (9) *b)* del Práctico 3)

b) $T : \mathbb{K}[x] \longrightarrow \mathbb{K}[x]$, $T(p(x)) = q(x)\,p(x)$ donde $q(x)$ es un polinomio fijo.

c) $T : \mathbb{K}^2 \longrightarrow \mathbb{K}$, $T(x, y) = xy$

d) $T : \mathbb{K}^2 \longrightarrow \mathbb{K}^3$, $T(x, y) = (x, y, 1)$

e) El determinante $\det : \mathbb{K}^{n\times n} \longrightarrow \mathbb{K}$.

(2) Sea $T : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$, $T(z) = \bar{z}$.

a) Considerar a $\mathbb{C}$ como un $\mathbb{C}$-espacio vectorial y decidir si T es una transformación lineal.

b) Considerar a $\mathbb{C}$ como un $\mathbb{R}$-espacio vectorial y decidir si T es una transformación lineal.

(3) Sea $T : \mathbb{K}^3 \longrightarrow \mathbb{K}^3$ una transformación lineal tal que $T(e_1) = (1, 2, 3)$, $T(e_2) = (-1, 0, 5)$ y $T(e_3) = (-2, 3, 1)$.

a) Calcular $T(2, 3, 8)$ y $T(0, 1, -1)$.

b) Calcular $T(x, y, z)$ para todo $(x, y, z) \in \mathbb{K}^3$. Es decir, dar una fórmula para T como la del ejercicio (4).

c) Encontrar una matriz $A \in \mathbb{K}^{3\times 3}$ tal que $T(x, y, z) = A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$. En esta parte del ejercicio escribiremos/pensaremos a los vectores de $\mathbb{K}^3$ como columnas.

Observación. En el ejercicio (3) *b)* lo que hicimos fue deducir cuánto vale la transformación lineal en todos los vectores de $\mathbb{K}^3$ a partir de saber cuánto vale la transformación lineal en la base canónica. ¡A partir del valor de T en una base vectores podemos saber el valor de T en todo el espacio! Esto vale para cualquier transformación lineal entre espacios vectoriales y cualquier base porque las transformaciones lineales respetan combinaciones lineales y todo vector de un espacio vectorial es combinación lineal de los vectores de una base. Esto es parte del enunciado del Teorema 4.1.1 que lo veremos más en detalle en el próximo práctico.

Observación. La matriz del ejercicio (3) *c)* es la matriz de la transformación lineal T con respecto a la base canónica. En el próximo práctico aprenderemos a calcular la matriz de una transformación lineal con respecto a distintas bases.

(4) Sea $T : \mathbb{K}^3 \longrightarrow \mathbb{K}^3$ definida por $T(x, y, z) = (x + 2y + 3z, y - z, x + 5y)$.

a) Decir cuáles de los siguientes vectores están en el núcleo: $(1, 1, 1)$, $(-5, 1, 1)$.

b) Decir cuáles de los siguientes vectores están en la imagen: $(0, 1, 0)$, $(0, 1, 7)$.

c) Describir mediante ecuaciones (implícitamente) el núcleo y dar un conjunto de generadores de la imagen.

d) ⓐ Encontrar una matriz $A \in \mathbb{K}^{3\times 3}$ tal que $T(x, y, z) = A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$. Como en el ejercicio (3) *c)* pensamos a los vectores como columnas.

(5) Sea $T : \mathbb{K}^4 \to \mathbb{K}^5$ dada por $T(v) = Av$ donde A es la siguiente matriz

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

a) Dar una base del núcleo y de la imagen de T.

b) Dar la dimensión del núcleo y de la imagen de T.

c) Describir mediante ecuaciones (implícitamente) el núcleo y la imagen de T.

d) Decir cuáles de los siguientes vectores están en el núcleo: $(1, 2, 3, 4)$, $(1, -1, -1, 2)$, $(1, 0, 2, 1)$.

e) Decir cuáles de los siguientes vectores están en la imagen: $(2,3,-1,0,1)$, $(1,1,0,3,1)$, $(1,0,2,1,0)$.

(6) Sea $T:\mathbb{K}^{2\times 2}\longrightarrow \mathbb{K}_4[x]$ la transformación lineal definida por

$$T\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = (a-c+2d)x^3+(b+2c-d)x^2+ \\ +(-a+2b+5c-4d)x+(2a-b-4c+5d)$$

a) Decir cuáles de los siguientes matrices están en el núcleo:

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},\quad C=\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

b) Decir cuáles de los siguientes polinomios están en la imagen:

$$p(x)=x^3+x^2+x+1,\quad q(x)=x^3,\quad r(x)=(x-1)(x-1)$$

(7) Sea $T:\mathbb{K}^3\longrightarrow\mathbb{K}$ definida por $T(x,y,z)=x+2y+3z$.

a) Probar que T es un epimorfismo.

b) Dar la dimensión del núcleo de T.

c) Encontrar una matriz A tal que $T(x,y,z)=A\begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix}$. ¿De qué tamaño debe ser A? Como en el ejercicio (4) *d)* pensamos a los vectores como columnas.

(8) Determinar cuáles transformaciones lineales de los ejercicios anteriores son monomorfismos, epimorfismos y/o isomorfismos.

(9) Encontrar en cada caso, cuando sea posible, una matriz $A\in\mathbb{K}^{3\times 3}$ tal que la transformación lineal $T:\mathbb{K}^3\longrightarrow\mathbb{K}^3$, $T(v)=Av$, satisfaga las condiciones exigidas (como en el ejercicio (3) *c)* pensamos a los vectores como columnas). Cuando no sea posible, explicar por qué no es posible.

a) $\dim \operatorname{Im}(T)=2$ y $\dim \operatorname{Nu}(T)=2$.

b) T inyectiva y $T(e_1)=(1,0,0)$, $T(e_2)=(2,1,5)$ y $T(e_3)=(3,-1,0)$.

c) T sobreyectiva y $T(e_1)=(1,0,0)$, $T(e_2)=(2,1,5)$ y $T(e_3)=(3,-1,0)$.

d) @ $T(e_1)=(1,0,0)$, $T(e_2)=(2,1,5)$ y $T(e_3)=(3,-1,0)$.

e) $e_1\in\operatorname{Im}(T)$ y $(-5,1,1)\in\operatorname{Nu}(T)$.

f) $\dim\operatorname{Im}(T)=2$.

(10) Decidir si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justificar.

a) Si $T:\mathbb{R}^{13}\to\mathbb{R}^9$ es una transformación lineal, entonces $\dim\operatorname{Nu}(T)\geq 4$.

b) Sea $T:\mathbb{K}^6\longrightarrow\mathbb{K}^2$ un epimorfismo y W un subespacio de $\mathbb{K}^6$ con $\dim W=3$. Entonces existe $0\neq w\in W$ tal que $T(w)=0$.

c) Existe una transformación lineal $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4$ tal que los vectores $(1, 0, -1, 2)$, $(0, 1, 2, -1,)$ y $(0, 0, 2, 2)$ pertenecen a la imagen de T.

(11) ⓐ Sea V un espacio vectorial no nulo y $T : V \longrightarrow \mathbb{K}$ probar que $T = 0$ ó T es sobreyectiva.

(12) Sea V un espacio vectorial de dimensión finita y $T : V \longrightarrow V$ una transformación lineal. Probar las siguientes afirmaciones.

a) $\mathrm{Nu}(T) \subseteq \mathrm{Nu}(T^2)$

b) $\mathrm{Nu}(T) \neq \mathrm{Im}(T)$ si $\dim(V)$ es impar.

Ejercicios de repaso. Si ya hizo los ejercicios anteriores continue con la siguiente guía. Los ejercicios que siguen son similares y le pueden servir para practicar antes de los exámenes.

(13) Sea $T : \mathbb{K}^3 \longrightarrow \mathbb{K}[x]$ una transformación lineal tal que $T(e_1) = x^2 + 2x + 3$, $T(e_2) = -x^2 + 5$ y $T(e_3) = -2x^2 + 3x + 1$. Calcular $T(2, 3, 8)$ y $T(0, 1, -1)$. Más generalmente, calcular $T(a, b, c)$ para todo $(a, b, c) \in \mathbb{K}^3$.

(14) Repetir los ejercicios (4) *c)* y (4) *d)* con las siguientes transformaciones lineales.

a) $T : \mathbb{K}^3 \longrightarrow \mathbb{K}^3$, $T(x, y, z) = (x + 2y + 3z, y - z, 0)$.

b) $T : \mathbb{K}^2 \longrightarrow \mathbb{K}^3$, $T(x, y) = (x - y, x + y, 2x + 3y)$.

(15) Decidir si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justificar.

a) Existe una transformación lineal $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ tal que $T(1, 0, -1) = (1, -1)$ y $T(-1, 0, 1) = (1, 0)$.

b) Existe una transformación lineal $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ tal que $T(1, 0, -1) = (1, -1)$ y $T(-1, 0, 1) = (-1, 1)$.

c) Si $T : \mathbb{R}^9 \to \mathbb{R}^7$ es una transformación lineal, entonces $\dim \mathrm{Nu}(T) \geq 2$.

d) Sea $T : V \to W$ una transformación lineal tal que $T(v_i) = w_i$, para $i = 1, \dots, n$. Si $\{w_1, \dots, w_n\}$ genera W, entonces $\{v_1, \dots, v_n\}$ genera V.

e) Existe una transformación lineal $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^5$ tal que los vectores $(1, 0, -1, 0, 0)$, $(1, 1, -1, 0, 0)$ y $(1, 0, -1, 2, 1)$ pertenecen a la imagen de T.

f) Existe una transformación lineal sobreyectiva $T : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^4$ tal que los vectores $(1, 0, 1, -1, 0)$ y $(0, 0, 0, -1, 2)$ pertenecen al núcleo de T.

Ayudas.

Ejercicio (4) *d)*: recordar en el ejercicio (8) de la Práctica 3 como podemos interpretar el producto de una matriz por un vector columna.

Ejercicio (11): usar como inspiración el ejercicio (7) que es un caso particular de esta situación.

Ejercicio (9) *d)* Usar el ejercicio (4).

Ejercicio (11): asumir lo contrario y usar el Teorema de la dimensión del núcleo y la imagen.