

# Álgebra/Álgebra II

## Clase 10 - Autovalores y autovectores

FAMAF / UNC

23 de abril de 2024

En esta clase definiremos

- autovalor
- autovector
- polinomio característico

Y explicaremos como calcularlos.

El tema de esta clase está contenido de la sección 2.9 del apunte de clase “Álgebra II / Álgebra - Notas del teórico”.

## Definición

Sea  $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ . Se dice que  $\lambda \in \mathbb{K}$  es un *autovalor* de  $A$  y si existe  $v \in \mathbb{K}^n$  no nulo tal que

$$Av = \lambda v.$$

En ese caso decimos que  $v$  es un *autovector* asociado a  $\lambda$

## Ejemplo

1 es un autovalor de  $\text{Id}_n$  y todo  $v \in \mathbb{K}^n$  es un autovector asociado a 1 pues

$$\text{Id}_n v = v$$

## Observación

El autovalor puede ser 0 pero el autovector *nunca* puede ser 0

## Ejemplo

0 es un autovalor de  $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$  y  $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$  es un autovector asociado a 0 pues

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = 0 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

## Observación

La existencia de autovalores dependen del cuerpo donde estamos trabajando.

Por ejemplo sea  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Entonces,  $A$  no tiene autovalores reales.

Veremos que si permitimos autovalores complejos entonces  $A$  sí tiene autovalores.

## Definición

Dado  $i \in \{1, \dots, n\}$ , se denota  $e_i$  al vector de  $\mathbb{K}^n$  cuyas coordenadas son todas ceros excepto la coordenada  $i$  que es un 1.

$$e_i = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

El conjunto  $\{e_1, \dots, e_n\}$  se llama *base canónica* de  $\mathbb{K}^n$ .

## Ejemplo

En  $\mathbb{K}^3$  la base canónica es  $e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ ,  $e_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ ,  $e_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ .

## Ejemplo: Matriz diagonal

Sea  $D \in \mathbb{K}^{n \times n}$  una matriz diagonal con entradas  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ .

Entonces  $e_i$  es un autovector con autovalor  $\lambda_i \ \forall i \in \{1, \dots, n\}$

## Demostración

Recordar que la multiplicación  $De_i$  se corresponde con multiplicar cada fila de  $e_i$  por el elemento correspondiente de la diagonal.

Como las filas (en este caso entradas) de  $e_i$  son todas nulas excepto un 1 en la entrada  $i$  queda queda

$$De_i = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ \lambda_i \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = \lambda_i e_i$$



## Observación

Puede haber varios autovectores con el mismo autovalor.

Vimos esto en el ejemplo con  $I_d$  y en el caso de la diagonal si tiene entradas iguales sucede lo mismo.

Más aún el conjunto de todos los autovectores con un mismo autovalor es *invariante por la suma y la multiplicación por escalares*.

En particular los múltiplos de un autovector son autovectores con el mismo autovalor.



## Definición

Sea  $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$  y  $\lambda \in \mathbb{K}$  un autovalor de  $A$ . El *autoespacio* asociado a  $\lambda$  es

$$V_\lambda = \{v \in \mathbb{K}^n \mid Av = \lambda v\}.$$

Es decir,  $V_\lambda$  es el conjunto formado por todos los autovectores asociados a  $\lambda$  y el vector nulo.

## Teorema

*Si  $v$  y  $w$  pertenecen al autoespacio de  $A$  asociado a  $\lambda$ , entonces  $v + tw$  también pertenece a  $V_\lambda$ .*

## Demostración

$$A(v + tw) = Av + tAw = \lambda v + t\lambda w = \lambda(v + tw).$$



## Proposición

*Un autovector no puede tener dos autovalores distintos.*

*Por lo tanto autovectores con autovalores distintos son distintos.*

## Demostración

Supongamos que  $Av = \lambda v$  y  $Av = \mu v$ . Entonces  $\lambda v = \mu v$  y por lo tanto

$$(\lambda - \mu)v = \begin{bmatrix} (\lambda - \mu)v_1 \\ \vdots \\ (\lambda - \mu)v_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

Como  $v \neq 0$  por ser autovector, alguna de sus coordenadas es no nula. Entonces  $\lambda - \mu$  tiene que ser 0 o dicho de otro modo  $\lambda = \mu$ . □

## Problema

Hallar los autovalores de  $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$  y para cada autovalor, describir explícitamente o paramétricamente el autoespacio asociado

- En otras palabras nos preguntamos que  $\lambda \in \mathbb{K}$  y que  $v \in \mathbb{K}^n$  satisfacen

$$Av = \lambda v \iff Av - \lambda v = 0 \iff (A - \lambda \text{Id})v = 0.$$

- La última igualdad es un sistema de ecuaciones lineales. Queremos ver entonces si existe un  $v \in \mathbb{K}^n$  no nulo que sea solución del sistema homogéneo

$$(A - \lambda \text{Id})X = 0. \quad (*)$$

- Un sistema  $BX = 0$  tiene solución no trivial sii  $\det(B) = 0$ . Por lo tanto  $(*)$  tiene solución no trivial si y sólo si

$$\det(A - \lambda \text{Id}) = 0.$$

## Conclusión

$\lambda \in \mathbb{K}$  es un autovalor de  $A$  y  $v \in \mathbb{K}^n$  es un autovector asociado a  $\lambda$  si y sólo si

- $\det(A - \lambda \text{Id}) = 0$
- $v$  es solución del sistema homogéneo  $(A - \lambda \text{Id})X = 0$

Esta es casi la respuesta a nuestro problema. Para dar una respuesta más operativa introducimos el siguiente polinomio.

## Definición

Sea  $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ . El *polinomio característico* de  $A$  es

$$\chi_A(x) = \det(A - x \text{Id})$$

## Ejemplo

El polinomio característico de  $\text{Id}_n$  es

$$\chi_{\text{Id}_n}(x) = (1 - x)^n$$

## Demostración

$\text{Id} - x \text{Id} = (1 - x) \text{Id}$  es una matriz diagonal con  $(1 - x)$  en todas las entradas de la diagonal. Entonces el determinante es el producto de la diagonal.



En general, si  $A = [a_{ij}]$  matriz  $n \times n$ , tenemos que

$$\chi_A(x) = \det(A - x Id) = \det \begin{bmatrix} a_{11} - x & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - x & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} - x \end{bmatrix}$$

y el polinomio característico de  $A$  es un polinomio de grado  $n$ , más precisamente

$$\chi_A(x) = (-1)^n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0.$$

Esto se puede demostrar por inducción.

## Ejemplo

El polinomio característico de  $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$  es  $\chi_A(x) = x^2$ .

## Demostración

$A - x \text{Id} = \begin{bmatrix} -x & 1 \\ 0 & -x \end{bmatrix}$  es triangular superior. Entonces el determinante es el producto de la diagonal. □

## Ejemplo

Si  $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ , entonces  $\chi_A(x) = (a - x)(d - x) - bc$ .

## Demostración

$A - x \text{Id} = \begin{bmatrix} a - x & b \\ c & d - x \end{bmatrix}$  y usamos la fórmula del determinante de una  $2 \times 2$ . □

## Proposición

Sea  $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ . Entonces  $\lambda \in \mathbb{K}$  es autovalor si y sólo si  $\lambda$  es raíz del polinomio característico.

## Demostración

$\lambda$  es autovalor  $\Leftrightarrow$  existe  $v \neq 0$  tal que  $Av = \lambda v$

$$\Leftrightarrow 0 = Av - \lambda v = Av - \lambda \text{Id } v = (A - \lambda \text{Id})v$$

$$\Leftrightarrow (A - \lambda \text{Id})X = 0 \text{ tiene solución no trivial}$$

$$\Leftrightarrow \chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda \text{Id}) = 0$$

$$\Leftrightarrow \lambda \text{ es raíz del polinomio característico.}$$





## Método para encontrar autovalores y autovectores de $A$

1. Calcular  $\chi_A(x) = \det(A - x \text{Id})$ ,
2. Encontrar las raíces  $\lambda_1, \dots, \lambda_k$  de  $\chi_A(x)$ .  
(no siempre se puede. No hay una fórmula o método general para encontrar las raíces de polinomios de grado 5 o superior).
3. Para cada  $i$  con  $1 \leq i \leq k$  resolver el sistema de ecuaciones lineales:

$$(A - \lambda_i \text{Id})X = 0.$$

Las soluciones no triviales de este sistema son los autovectores con autovalor  $\lambda_i$ .

## Ejemplo

Encontrar autovalores y autovectores de la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

## Solución

1.  $\chi_A(x) = \det \begin{bmatrix} 3-x & -2 \\ 1 & -x \end{bmatrix} = x^2 - 3x + 2 = (x-1)(x-2).$
2. Los autovalores de  $A$  son las raíces de  $\chi_A(x)$ : 1 y 2.
3. Debemos resolver los sistemas de ecuaciones:

$$(A - \text{Id})X = 0, \quad (A - 2 \text{Id})X = 0.$$

Es decir, debemos resolver los sistemas

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 & -2 \\ 1 & & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{S1})$$

$$\begin{bmatrix} 3 & -2 & -2 \\ 1 & & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{S2})$$

$$(\text{S1}) \quad \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{F_1 - 2F_2} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow x_1 - x_2 = 0 \Rightarrow (t, t) \text{ es solución.}$$

$$(\text{S2}) \quad \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow{F_2 - F_1} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow x_1 - 2x_2 = 0 \Rightarrow (2t, t) \text{ es solución.}$$

## Respuesta final

- Los autovalores de  $A$  son 1 y 2.
- El auto espacio correspondiente al autovalor 1 es

$$V_1 = \{t(1, 1) : t \in \mathbb{R}\}.$$

- El auto espacio correspondiente al autovalor 2 es

$$V_2 = \{t(2, 1) : t \in \mathbb{R}\}.$$



### Ejemplo

Sea  $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$ . Encontrar los autovalores *reales* de  $A$ .

### Solución

$$A - x \text{Id} = \begin{bmatrix} -x & -1 \\ 1 & -x \end{bmatrix}, \text{ luego}$$

$$\chi_A(x) = x^2 + 1.$$

El polinomio no tiene raíces reales, por lo tanto no existen autovalores reales (obviamente no hay autovectores).



Sin embargo si nos dicen

*encontrar autovalores y autovectores complejos de la matriz  $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ ,*

la respuesta va a ser diferente.

Lo que ocurre es que

$$\chi_A(x) = x^2 + 1 = (x + i)(x - i),$$

y este polinomio *sí* tiene raíces (complejas):  $i$  y  $-i$ .

En este caso, entonces,  $i$  y  $-i$  son los autovalores y es fácil ver que

$$V_i = \{\omega(i, 1) : \omega \in \mathbb{C}\}, \quad V_{-i} = \{\omega(-i, 1) : \omega \in \mathbb{C}\}.$$

Nunca está de más comprobar los resultados:

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ i \end{bmatrix} = i \begin{bmatrix} i \\ 1 \end{bmatrix}.$$

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -i \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -i \end{bmatrix} = (-i) \begin{bmatrix} -i \\ 1 \end{bmatrix}.$$