ÁLGEBRA II / ÁLGEBRA - PRÁCTICOS

Año 2024
FAMAF - UNC

1

VECTORES EN $\mathbb{R}^2$ Y $\mathbb{R}^3$ (PRÁCTICO)

OBJETIVOS

- Aprender las operaciones básicas de $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$ (suma de vectores, multiplicación por escalares, producto escalar, calcular normas y ángulos).
- Familiarizarse con los conceptos de ortogonalidad y paralelismo.
- Aprender a describir rectas y planos de forma impícita y paramétrica.

VECTORES Y PRODUCTO ESCALAR

(1) Dados $v = (-1, 2-0)$, $w = (2, -3, -1)$ y $u = (1, -1, 1)$, calcular:
  a) $2v + 3w - 5u$,
  b) $5(v + w)$,
  c) $5v + 5w$ (y verificar que es igual al vector de arriba).

(2) Calcular los siguientes productos escalares.
  a) $\langle(-1, 2-0), (2, -3, -1)\rangle$,
  b) $\langle(4, -1), (-1, 2)\rangle$.

(3) Dados $v = (-1, 2-0)$, $w = (2, -3, -1)$ y $u = (1, -1, 1)$, verificar que:

$$\langle 2v + 3w, -u\rangle = -2\langle v, u\rangle - 3\langle w, u\rangle$$

(4) Probar que
  a) $(2, 3, -1)$ y $(1, -2, -4)$ son ortogonales.
  b) $(2, -1)$ y $(1, 2)$ son ortogonales. Dibujar en el plano.

(5) Encontrar
  a) un vector no nulo ortogonal a $(3, -4)$,
  b) un vector no nulo ortogonal a $(2, -1, 4)$,
  c) un vector no nulo ortogonal a $(2, -1, 4)$ y $(0, 1, -1)$,

(6) Encontrar la longitud de los vectores.

$$(a)\ (2,3), \qquad (b)\ (t,t^2), \qquad (c)\ (\cos\phi, \operatorname{sen}\phi).$$

(7) Calcular $\langle v, w\rangle$ y el ángulo entre v y w para los siguientes vectores.

$$(a)\ v=(2,2), w=(1,0), \qquad (b)\ v=(-5,3,1), w=(2,-4,-7).$$

(8) Sea $v=(x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{R}^3$ y recordar los vectores $e_!$, e_2 y e_3 dados en la página 12 del apunte. Verificar que

$$v = x_1e_1+x_2e_2+x_3e_3 = \langle v,e_1\rangle e_1+\langle v,e_2\rangle e_2+\langle v,e_3\rangle e_3.$$

(9) Probar, usando sólo las propiedades **P1**, **P2**, y **P3** del producto escalar, que dados $v,w,u\in\mathbb{R}^n$ y $\lambda_1,\lambda_2\in\mathbb{R}$,

a) se cumple:

$$\langle \lambda_1v+\lambda_2w,u\rangle = \lambda_1\langle v,u\rangle+\lambda_2\langle w,u\rangle.$$

b) Si $\langle v,w\rangle=0$, es decir si v y w son ortogonales, entonces

$$\langle \lambda_1v+\lambda_2w,\lambda_1v+\lambda_2w\rangle = \lambda_1^2\langle v,v\rangle+\lambda_2^2\langle w,w\rangle.$$

(10) Dados $v,w,\in\mathbb{R}^n$, probar que si $\langle v,w\rangle=0$, es decir si v y w son ortogonales, entonces

$$||v+w||^2 = ||v||^2+||w||^2.$$

¿Cuál es el nombre con que se conoce este resultado en $\mathbb{R}^2$?

(11) Sean $v,w\in\mathbb{R}^2$, probar usando solo la definición explícita del producto escalar en $\mathbb{R}^2$ que

$$|\langle v,w\rangle| \leqslant ||v||\,||w|| \qquad \text{(Desigualdad de Schwarz).}$$

[Ayuda: elevar al cuadrado y aplicar la definición.]

RECTAS Y PLANOS

(12) En cada uno de los siguientes casos determinar si los vectores $\overrightarrow{vw}$ y $\overrightarrow{xy}$ son equivalentes y/o paralelos.

a) $v = (1, -1)$, $w = (4, 3)$, $x = (-1, 5)$, $y = (5, 2)$.

b) $v = (1, -1, 5)$, $w = (-2, 3, -4)$, $x = (3, 1, 1)$, $y = (-3, 9, -17)$.

(13) Sea R_1 la recta que pasa por $p_1 = (2, 0)$ y es ortogonal a $(1, 3)$.

a) Dar la descripción paramétrica e implícita de R_1.

b) Graficar en el plano a R_1.

c) Dar un punto p por el que pase R_1 distinto a p_1.

d) Verificar si $p + p_i$ y $-p$ pertenece a R_1

(14) Repetir el ejercicio anterior con las siguientes rectas.

a) R_2: recta que pasa por $p_2 = (0, 0)$ y es ortogonal a $(1, 3)$.

b) R_3: recta que pasa por $p_3 = (1, 0)$ y es paralela a R_1.

(15) Calcular, numérica y graficamente, las intersecciones $R_1 \cap R_2$ y $R_1 \cap R_3$.

(16) Sea $v_0 = (2, -1, 1)$.

a) Describir paramétricamente el conjunto $P_1 = \{w \in \mathbb{R}^3 : \langle v_0, w\rangle = 0\}$.

b) Describir paramétricamente el conjunto $P_2 = \{w \in \mathbb{R}^3 : \langle v_0, w\rangle = 1\}$.

c) ¿Qué relación hay entre P_1 y P_2?

(17) Escribir la ecuación paramétrica y la ecuación normal de los siguientes planos.

a) π_1: el plano que pasa por $(0, 0, 0)$, $(1, 1, 0)$, $(1, -2, 0)$.

b) π_2: el plano que pasa por $(1, 2, -2)$ y es perpendicular a la recta que pasa por $(2, 1, -1)$, $(3, -2, 1)$.

c) $\pi_3 = \{w \in \mathbb{R}^3 : w = s(1, 2, 0) + t(2, 0, 1) + (1, 0, 0);\ s, t \in \mathbb{R}\}$.

(18) ¿Cuáles de las siguientes rectas cortan al plano π_3 del ejercicio c))? Describir la intersección en cada caso.

(a) $\{w : w = (3,2,1) + t(1,1,1)\}$, (b) $\{w : w = (1,-1,1) + t(1,2,-1)\}$,
(c) $\{w : w = (-1,0,-1) + t(1,2,-1)\}$, (d) $\{w : w = (1,-2,1) + t(2,-1,1)\}$.

(19) Sea $L = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : ax + by = c\}$ una recta en $\mathbb{R}^2$. Sean p y q dos puntos por los que pasa L.

a) ¿Para qué valores de c puede asegurar que $(0,0) \in L$?

b) ¿Para qué valores de c puede asegurar que $\lambda q \in L$?, donde $\lambda \in \mathbb{R}$.

c) ¿Para qué valores de c puede asegurar que $p + q \in L$?

(20) Sea L una recta en $\mathbb{R}^2$. Probar que L pasa por $(0,0)$ si y sólo si pasa por $p + \lambda q$ para todo par de puntos distintos p y q de L y para todo $\lambda \in \mathbb{R}$.

EJERCICIOS DE REPASO

Si ya hizo los ejercicios anteriores continue a la siguiente guía. Los ejercicios que siguen son similares a los anteriores y le pueden servir para practicar antes de los exámenes.

(21) Probar, usando sólo las propiedades **P1**, **P2**, y **P3** del producto escalar, que dados $v, w, u \in \mathbb{R}^n$ y $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$,

a) $||\lambda_1 v|| = |\lambda_1|\, ||v||$.

b)
$$\langle \lambda_1 v + \lambda_2 w, \lambda_1 v + \lambda_2 w\rangle = \lambda_1^2 ||v||^2 + 2\langle v, w\rangle + \lambda_2^2 ||w||^2.$$

(22) ¿Qué parejas de vectores son perpendiculares entre sí?

(a) $(1,-1,1)$ y $(2,1,5)$, (b) $(1,-1,1)$ y $(2,3,1)$,
(c) $(-5,2,7)$ y $(3,-1,2)$ (d) $(\pi,2,1)$ y $(2,-\pi,0)$.

(23) Dados $v, w, \in \mathbb{R}^n$, probar que

$$||v + w||^2 + ||v - w||^2 = 2||v||^2 + 2||w||^2. \qquad (*)$$

Hay un resultado clásico de la geometría elemental que dice *"la suma de los cuadrados de las longitudes de los cuatro lados de un paralelogramo es igual a la suma de los cuadrados de las longitudes de las dos diagonales de éste"* (Ley del paralelogramo). Relacione geométricamente el resultado (*) aplicado a $\mathbb{R}^2$ con la Ley del paralelogramo.

2 ESPACIOS Y SUBESPACIOS VECTORIALES (PRÁCTICO)

Objetivos

- Familiarizarse con los conceptos de espacio y subespacio vectorial.
- Familiarizarse con los conceptos de conjunto de generadores e independencia lineal, base y dimensión de un espacio vectorial.
- Aprender a caracterizar los subespacios de $\mathbb{K}^n$ por generadores y de manera implícita.
- Dado un subespacio W de $\mathbb{K}^n$, aprender a extraer una base de cualquier conjunto de generadores de W, y a completar cualquier subconjunto linealmente independiente de W a una base.

Ejercicios

Los ejercicios con el símbolo ⓐ tienen una ayuda al final del archivo para que recurran a ella después de pensar un poco.

(1) Decidir si los siguientes subconjuntos de $\mathbb{R}^3$ son subespacios vectoriales.

   a) $A = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x_1 + x_2 + x_3 = 1\}$.
   b) $B = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x_1 + x_2 + x_3 = 0\}$.
   c) $C = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x_1 + x_2 + x_3 \geqslant 0\}$.
   d) $D = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x_3 = 0\}$.
   e) $B \cup D$.
   f) $B \cap D$.
   g) $G = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{Q}\}$.

Observación En los items *a)*, *b)* y *c)* del ejercicio (1) podemos apreciar como un simple cambio en la condición que define al subconjunto hace que dicho subconjunto sea o no un subespacio vectorial. Este es un fenómeno que pasa en general. De hecho podríamos haber definido subconjuntos similares para todo $\mathbb{R}^n$. Lo mismo sucede en los ejercicios (21) y (22). En **Ayudas**, al final del práctico, están las respuestas a los ejercicios (1), (2) y (21).

(2) Decidir en cada caso si el conjunto dado es un subespacio vectorial de $M_{n\times n}(\mathbb{K})$.

a) El conjunto de matrices invertibles.

b) El conjunto de matrices A tales que $AB = BA$, donde B es una matriz fija.

c) El conjunto de matrices triangulares superiores.

(3) @ Sea L una recta en $\mathbb{R}^2$. Dar una condición necesaria y suficiente para que L sea un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^2$.

(4) Sean V un $\mathbb{K}$-espacio vectorial, $v \in V$ no nulo y $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ tales que $\lambda v = \mu v$. Probar que $\lambda = \mu$.

(5) Sean W_1, W_2 subespacios de un espacio vectorial V. Probar que $W_1 \cup W_2$ es un subespacio de V si y sólo si $W_1 \subseteq W_2$ o $W_2 \subseteq W_1$.

(6) Sean $u = (1,1)$, $v = (1,0)$, $w = (0,1)$ y $z = (3,4)$ vectores de $\mathbb{R}^2$.

a) Escribir z como combinación lineal de u, v y w, con coeficientes todos no nulos.

b) Escribir z como combinación lineal de u y v.

c) Escribir z como combinación lineal de u y w.

d) Escribir z como combinación lineal de v y w.

Observación. En este ejercicio vemos como un vector se puede escribir de muchas maneras como combinación lineal de vectores dados. Esto pasa porque $\{u, v, w\}$ es LD.

(7) Sean $p(x) = (1-x)(x+2)$, $q(x) = x^2 - 1$ y $r(x) = x(x^2-1)$ en $\mathbb{R}[x]$.

a) Describir todos los polinomios de grado menor o igual que 3 que son combinación lineal de p, q y r.

b) Elegir a tal que el polinomio x se pueda escribir como combinación lineal de p, q y $2x^2 + a$.

(8) Dar un conjunto de generadores para los siguientes subespacios vectoriales.

a) Los conjuntos de soluciones de los sistemas homogéneos del ejercicio 5 - Práctico 2.

b) Los conjuntos descriptos en el ejercicio 6 - Práctico 2.

(9) En cada caso, caracterizar con ecuaciones al subespacio vectorial dado por generadores.

a) $\langle(1,0,3),(0,1,-2)\rangle \subseteq \mathbb{R}^3$.

b) $\langle(1,2,0,1),(0,-1,-1,0),(2,3,-1,4)\rangle \subseteq \mathbb{R}^4$.

(10) En cada caso, determinar si el subconjunto indicado es linealmente independiente.

a) $\{(1,0,-1),(1,2,1),(0,-3,2)\} \subseteq \mathbb{R}^3$.

b) $\left\{\begin{bmatrix}1 & 0 & 2\\ 0 & -1 & -3\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\ -2 & 1 & 0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 3 & 2 & 1\end{bmatrix}\right\} \subseteq M_{2\times 3}(\mathbb{R})$.

(11) Dar un ejemplo de un conjunto de 3 vectores en $\mathbb{R}^3$ que sean LD, y tales que dos cualesquiera de ellos sean LI.

(12) Probar que si α, β y γ son vectores LI en el $\mathbb{R}$-espacio vectorial V, entonces $\alpha+\beta$, $\alpha+\gamma$ y $\beta+\gamma$ también son LI.

(13) Extender, de ser posible, los siguientes conjuntos a una base de los respectivos espacios vectoriales.

a) Los conjuntos del ejercicio (10).

b) $\{(1,2,0,0),(1,0,1,0)\} \subseteq \mathbb{R}^4$.

c) $\{(1,2,1,1),(1,0,1,1),(3,2,3,3)\} \subseteq \mathbb{R}^4$.

(14) Dar subespacios vectoriales W_0, W_1, W_2 y W_3 de $\mathbb{R}^3$ tales que $W_0 \subset W_1 \subset W_2 \subset W_3$ y $\dim W_0 = 0$, $\dim W_1 = 1$, $\dim W_2 = 2$ y $\dim W_3 = 3$.

(15) Sea V un espacio vectorial de dimensión n y $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ una base de V.

a) Probar que cualquier subconjunto no vacío de $\mathcal{B}$ es LI.

b) Para cada $k \in \mathbb{N}_0$, con $0 \leqslant k \leqslant n$, dar un subespacio vectorial de V de dimensión k.

(16) Dar una base y calcular la dimensión de $\mathbb{C}^n$ como $\mathbb{C}$-espacio vectorial y como $\mathbb{R}$-espacio vectorial.

(17) Exhibir una base y calcular la dimensión de los siguientes subespacios.

a) Los subespacios del ejercicio (8).

b) $W = \{(x, y, z, w, u) \in \mathbb{R}^5 \;:\; y = x - z,\ w = x + z,\ u = 2x - 3z\}$.

c) $W = \langle(1, 0, -1, 1), (1, 2, 1, 1), (0, 1, 1, 0), (0, -2, -2, 0)\rangle \subseteq \mathbb{R}^4$.

d) Matrices triangulares superiores 2×2 y 3×3.

e) Matrices triangulares superiores $n \times n$ para cualquier $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$.

(18) Sean W_1 y W_2 los siguientes subespacios de $\mathbb{R}^3$:

$$W_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \;:\; x + y - 2z = 0\},$$
$$W_2 = \langle(1, -1, 1), (2, 1, -2), (3, 0, -1)\rangle.$$

a) Determinar $W_1 \cap W_2$, y describirlo por generadores y con ecuaciones.

b) Determinar $W_1 + W_2$, y describirlo por generadores y con ecuaciones.

(19) Decidir si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justificar.

a) Si W_1 y W_2 son subespacios vectoriales de $\mathbb{K}^8$ de dimensión 5, entonces $W_1 \cap W_2 = 0$.

b) Si W es un subespacio de $\mathbb{K}^{2\times 2}$ de dimensión 2, entonces existe una matriz triangular superior no nula que pertence a W.

c) Sean $v_1, v_2, w \in \mathbb{K}^n$ y $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ tales que $Av_1 = Av_2 = 0 \neq Aw$. Si $\{v_1, v_2\}$ es LI, entonces $\{v_1, v_2, w\}$ también es LI.

d) @ $\{1, \operatorname{sen}(x), \cos(x)\}$ es un subconjunto LI del espacio de funciones de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$.

e) @ $\{1, \operatorname{sen}^2(x), \cos^2(x)\}$ es un subconjunto LI del espacio de funciones $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$.

f) @ $\{e^{\lambda_1 x}, e^{\lambda_2 x}, e^{\lambda_3 x}\}$ es un subconjunto LI del espacio de funciones de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$, si λ_1, λ_2 y λ_3 son todos distintos.

Ejercicios de repaso Si ya hizo los ejercicios anteriores continue con la siguiente guía. Los ejercicios que siguen son similares y le pueden servir para practicar antes de los exámenes.

(20) Decidir en cada caso si el conjunto dado es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^n$.

a) $\{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \;:\; \exists j > 1,\ x_1 = x_j\}$.

b) $\{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \;:\; x_1 x_n = 0\}$.

(21) Sea $F[0,1]$ el espacio de funciones de $[0,1]$ en $\mathbb{R}$. Decidir en cada caso si el conjunto dado es un subespacio vectorial de $F[0,1]$.

a) $\{f \in F[0,1] \ : \ f(1) = 1\}$.

b) $\{f \in F[0,1] \ : \ f(1) = 0\}$.

(22) Decidir si los siguientes subconjuntos de $\mathbb{R}[x]$ son subespacios vectoriales.

a) $\mathbb{R}_n[x] := \{a_0 + \cdots + a_{n-1}x^{n-1} \ : \ a_i \in \mathbb{R}\}$, es decir, el conjunto formado por todos los polinomios de grado estrictamente menor que $n \in \mathbb{N}$.

b) $B = \{p(x) \in \mathbb{R}_n[x] \ : \ a_0 + \cdots + a_{n-1} = 1\}$.

c) $C = \{p(x) \in \mathbb{R}_n[x] \ : \ a_0 + \cdots + a_{n-1} = 0\}$.

d) $D = \{p(x) \in \mathbb{R}_n[x] \ : \ a_{n-1} \leqslant a_{n-2}\}$.

e) $E = \{p(x) \in \mathbb{R}_n[x] \ : \ a_{n-1} = 0\}$.

f) $C \cup E$.

g) $C \cap E$.

h) $F = \{p(x) \in \mathbb{R}_n[x] \ : \ a_0, \ldots, a_{n-1} \in \mathbb{Q}\}$.

(23) Hallar $a, b, c \in \mathbb{R}$ tales que $(-1,2,1) = a(1,1,1) + b(1,-1,0) + c(2,1,-1)$.

(24) *a)* Hallar escalares $a, b \in \mathbb{R}$ tales que $1 + 2i = a(1+i) + b(1-i)$.

b) Hallar escalares $w, z \in \mathbb{C}$ tales que $1 + 2i = z(1+i) + w(1-i)$.

(25) Repetir el ejercicio (10) con los subespacios:

a) $\langle (1,1,0,0), (0,1,1,0), (0,0,1,1) \rangle \subseteq \mathbb{R}^4$.

b) $\left\langle 1 + x + x^2,\ x - x^2 + x^3,\ 1 - x,\ 1 - x^2,\ x - x^2,\ 1 + x^4 \right\rangle \subseteq \mathbb{R}[x]$.

(26) En este ejercicio no es necesario hacer ninguna cuenta. Es lógica y comprender bien la definición de LI y LD. Probar las siguientes afirmaciones.

a) Todo conjunto que contiene un subconjunto LD es también LD.

b) Todo conjunto que contiene al vector 0 es LD.

c) Un conjunto es LI si y sólo si todos sus subconjuntos *finitos* son LI.

(27) Sean $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ todos distintos. Probar que el conjunto $\{e^{\lambda_1 x}, \ldots, e^{\lambda_n x}\}$ es LI.

(28) Exhibir una base y calcular la dimensión de los siguientes subespacios.

a) $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ z = x + y\}$.

b) $W = \langle(-1, 1, 1, -1, 1), (0, 0, 1, 0, 0), (2, -1, 0, 2, -1), (1, 0, 1, 1, 0)\rangle \subseteq \mathbb{R}^5$.

(29) Exhibir una base y calcular la dimensión de los siguientes subespacios.

a) $W = \{p(x) = a + bx + cx^2 + dx^3 \in \mathbb{R}_4[x] \ : \ a + d = b + c\}$.

b) $W = \{p(x) \in \mathbb{R}_4[x] \ : \ p'(0) = 0\}$.

c) $W = \{A \in \mathbb{R}^{n\times n} \ : \ A = A^t\}$.

(30) Sea $S = \{v_1, v_2, v_3, v_4\} \subset \mathbb{R}^4$, donde

$$v_1 = (-1, 0, 1, 2), \quad v_2 = (3, 4, -2, 5), \quad v_3 = (0, 4, 1, 11), \quad v_4 = (1, 4, 0, 9).$$

a) Describir implícitamente al subespacio $W = \langle\, S \,\rangle$.

b) Si $W_1 = \langle\, v_1, v_2, v_3 + v_4 \,\rangle$ y $W_2 = \langle\, v_3, v_4 \,\rangle$, describir $W_1 \cap W_2$ implícitamente.

(31) Sean $A_1 = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 3 & 7 \\ 2 & 1 & -3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ y $A_2 = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & -3 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -3 & 1 & -2 \end{bmatrix}$.

a) Sean W_1 y W_2 los espacios solución de los sistemas homogéneos asociados a A_1 y A_2, respectivamente. Describir implícitamente $W_1 \cap W_2$.

b) Sean V_1 y V_2 los subespacios de $\mathbb{R}^5$ generado por las filas de A_1 y A_2, respectivamente. Dar un conjunto de generadores de $V_1 + V_2$.

(32) Sean W_1 y W_2 los siguientes subespacios de $\mathbb{R}^6$:

$$W_1 = \{(u, v, w, x, y, z) \ : \ u + v + w = 0,\ x + y + z = 0\},$$
$$W_2 = \langle(1, -1, 1, -1, 1, -1), (1, 2, 3, 4, 5, 6), (1, 0, -1, -1, 0, 1), (2, 1, 0, 0, 0, 0)\rangle\,.$$

a) Determinar $W_1 \cap W_2$, y describirlo por generadores y con ecuaciones.

b) Determinar $W_1 + W_2$, y describirlo por generadores y con ecuaciones.

c) Decir cuáles de los siguientes vectores están en $W_1 \cap W_2$ y cuáles en $W_1 + W_2$:

$$(1, 1, -2, -2, 1, 1),\ (0, 0, 0, 1, 0, -1),\ (1, 1, 1, 0, 0, 0),\ (3, 0, 0, 1, 1, 3),\ (-1, 2, 5, 6, 5, 4).$$