Práctico 7

Transformaciones lineales

Objetivos.

- Familiarizarse con las transformaciones lineales.
- Aprender a decidir si un función es una transformación lineal, monomorfismos, epimorfismo o isomorfismo.
- Aprender a calcular la matriz de una transformacicon respecto a las bases canónicas.
- Aprender a calcular el núcleo y la imagen de una transformación.
- Familiarizarse con el teorema sobre la dimensión del núcleo y la imagen.

Ejercicios. Los ejercicios con el símbolo ⓐ tienen una ayuda al final del archivo para que recurran a ella después de pensar un poco.

(1) Decidir si las siguientes funciones son transformaciones lineales entre los respectivos espacios vectoriales sobre $\mathbb{K}$.

(a) La traza $\operatorname{Tr} : \mathbb{K}^{n\times n} \longrightarrow \mathbb{K}$ (recordar Ejercicios 9b del Práctico 3)

(b) $T : \mathbb{K}[x] \longrightarrow \mathbb{K}[x]$, $T(p(x)) = q(x)\,p(x)$ donde $q(x)$ es un polinomio fijo.

(c) $T : \mathbb{K}^2 \longrightarrow \mathbb{K}$, $T(x, y) = xy$

(d) $T : \mathbb{K}^2 \longrightarrow \mathbb{K}^3$, $T(x, y) = (x, y, 1)$

(e) El determinante $\det : \mathbb{K}^{n\times n} \longrightarrow \mathbb{K}$.

(2) Sea $T : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$, $T(z) = \overline{z}$.

(a) Considerar a $\mathbb{C}$ como un $\mathbb{C}$-espacio vectorial y decidir si T es una transformación lineal.

(b) Considerar a $\mathbb{C}$ como un $\mathbb{R}$-espacio vectorial y decidir si T es una transformación lineal.

(3) Sea $T : \mathbb{K}^3 \longrightarrow \mathbb{K}^3$ una transformación lineal tal que $T(e_1) = (1, 2, 3)$, $T(e_2) = (-1, 0, 5)$ y $T(e_3) = (-2, 3, 1)$.

(a) Calcular $T(2, 3, 8)$ y $T(0, 1, -1)$.

(b) Calcular $T(x, y, z)$ para todo $(x, y, z) \in \mathbb{K}^3$. Es decir, dar una fórmula para T como la del Ejercicio (4).

(c) Encontrar una matriz $A \in \mathbb{K}^{3\times 3}$ tal que $T(x, y, z) = A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$. En esta parte del ejercicio escribiremos/pensaremos a los vectores de $\mathbb{K}^3$ como columnas.

Observación. En el Ejercicio (3b) lo que hicimos fue deducir cuánto vale la transformación lineal en todos los vectores de $\mathbb{K}^3$ a partir de saber cuánto vale la transformación lineal en la base canónica. ¡A partir del valor de T en una base vectores podemos saber el valor de T en todo el espacio! Esto vale para cualquier transformación lineal entre espacios vectoriales y cualquier base porque las transformaciones lineales respetan combinaciones lineales y todo vector de un espacio vectorial es combinación lineal de los vectores de una base. Esto es parte del enunciado del Teorema 4.1.1 que lo veremos más en detalle en el próximo práctico.

Observación. La matriz del Ejercicio (3c) es la matriz de la transformación lineal T con respecto a la base canónica. En el próximo práctico aprenderemos a calcular la matriz de una transformación lineal con respecto a distintas bases.

(4) Sea $T : \mathbb{K}^3 \longrightarrow \mathbb{K}^3$ definida por $T(x, y, z) = (x + 2y + 3z, y - z, x + 5y)$.

(a) Decir cuáles de los siguientes vectores están en el núcleo: $(1, 1, 1)$, $(-5, 1, 1)$.

(b) Decir cuáles de los siguientes vectores están en la imagen: $(0, 1, 0)$, $(0, 1, 7)$.

(c) Describir mediante ecuaciones (implícitamente) el núcleo y dar un conjunto de generadores de la imagen.

(d) ⓐ Encontrar una matriz $A \in \mathbb{K}^{3\times 3}$ tal que $T(x, y, z) = A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$. Como en el Ejercicio (3c) pensamos a los vectores como columnas.

(5) Sea $T : \mathbb{K}^4 \to \mathbb{K}^5$ dada por $T(v) = Av$ donde A es la siguiente matriz

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(a) Dar una base del núcleo y de la imagen de T.

(b) Dar la dimensión del núcleo y de la imagen de T.

(c) Describir mediante ecuaciones (implícitamente) el núcleo y la imagen de T.

(d) Decir cuáles de los siguientes vectores están en el núcleo: $(1, 2, 3, 4)$, $(1, -1, -1, 2)$, $(1, 0, 2, 1)$.

(e) Decir cuáles de los siguientes vectores están en la imagen: $(2, 3, -1, 0, 1)$, $(1, 1, 0, 3, 1)$, $(1, 0, 2, 1, 0)$.

(6) Sea $T : \mathbb{K}^{2\times 2} \longrightarrow \mathbb{K}_4[x]$ la transformación lineal definida por

$$T \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = (a - c + 2d)x^3 + (b + 2c - d)x^2 + (-a + 2b + 5c - 4d)x + (2a - b - 4c + 5d)$$

(a) Decir cuáles de los siguientes matrices están en el núcleo:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(b) Decir cuáles de los siguientes polinómios están en la imagen:

$$p(x) = x^3 + x^2 + x + 1, \quad q(x) = x^3, \quad r(x) = (x - 1)(x - 1)$$

(7) Sea $T : \mathbb{K}^3 \longrightarrow \mathbb{K}$ definida por $T(x, y, z) = x + 2y + 3z$.

(a) Probar que T es un epimorfismo.

(b) Dar la dimensión del núcleo de T.

(c) Encontrar una matriz A tal que $T(x,y,z) = A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$. ¿De qué tamaño debe ser A?

Como en el Ejercicio (4d) pensamos a los vectores como columnas.

(8) Determinar cuáles transformaciones lineales de los ejercicios anteriores son monomorfismos, epimorfismos y/o isomorfismos.

(9) Encontrar en cada caso, cuando sea posible, una matriz $A \in \mathbb{K}^{3\times 3}$ tal que la transformación lineal $T : \mathbb{K}^3 \longrightarrow \mathbb{K}^3$, $T(v) = Av$, satisfaga las condiciones exigidas (como en el Ejercicio (4d) pensamos a los vectores como columnas). Cuando no sea posible, explicar por qué no es posible.

(a) $\dim \operatorname{Im}(T) = 2$ y $\dim \operatorname{Nu}(T) = 2$.

(b) T inyectiva y $T(e_1) = (1,0,0)$, $T(e_2) = (2,1,5)$ y $T(e_3) = (3,-1,0)$.

(c) T sobreyectiva y $T(e_1) = (1,0,0)$, $T(e_2) = (2,1,5)$ y $T(e_3) = (3,-1,0)$.

(d) a $T(e_1) = (1,0,0)$, $T(e_2) = (2,1,5)$ y $T(e_3) = (3,-1,0)$.

(e) $e_1 \in \operatorname{Im}(T)$ y $(-5,1,1) \in \operatorname{Nu}(T)$.

(f) $\dim \operatorname{Im}(T) = 2$.

(10) Decidir si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justificar.

(a) Si $T : \mathbb{R}^{13} \to \mathbb{R}^9$ es una transformación lineal, entonces $\dim \operatorname{Nu}(T) \geq 4$.

(b) Sea $T : \mathbb{K}^6 \longrightarrow \mathbb{K}^2$ un epimorfismo y W un subespacio de $\mathbb{K}^6$ con $\dim W = 3$. Entonces existe $0 \neq w \in W$ tal que $T(w) = 0$.

(c) Existe una transformación lineal $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4$ tal que los vectores $(1,0,-1,2)$, $(0,1,2,-1,)$ y $(0,0,2,2)$ pertenecen a la imagen de T.

(11) a Sea V un espacio vectorial no nulo y $T : V \longrightarrow \mathbb{K}$ probar que $T = 0$ ó T es sobreyectiva.

(12) Sea V un espacio vectorial de dimensión finita y $T : V \longrightarrow V$ una transformación lineal. Probar las siguientes afirmaciones.

(a) $\operatorname{Nu}(T) \subseteq \operatorname{Nu}(T^2)$

(b) $\operatorname{Nu}(T) \neq \operatorname{Im}(T)$ si $\dim(V)$ es impar.

Ejercicios de repaso. Si ya hizo los ejercicios anteriores continue con la siguiente guía. Los ejercicios que siguen son similares y le pueden servir para practicar antes de los exámenes.

(13) Sea $T : \mathbb{K}^3 \longrightarrow \mathbb{K}[x]$ una transformación lineal tal que $T(e_1) = x^2 + 2x + 3$, $T(e_2) = -x^2 + 5$ y $T(e_3) = -2x^2 + 3x + 1$. Calcular $T(2,3,8)$ y $T(0,1,-1)$. Más generalmente, calcular $T(a,b,c)$ para todo $(a,b,c) \in \mathbb{K}^3$.

(14) Repetir los ejercicios (4c) y (4d) con las siguientes transformaciones lineales.

(a) $T : \mathbb{K}^3 \longrightarrow \mathbb{K}^3$, $T(x, y, z) = (x + 2y + 3z, y - z, 0)$.

(b) $T : \mathbb{K}^2 \longrightarrow \mathbb{K}^3$, $T(x, y) = (x - y, x + y, 2x + 3y)$.

(15) Decidir si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justificar.

(a) Existe una transformación lineal $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ tal que $T(1, 0, -1) = (1, -1)$ y $T(-1, 0, 1) = (1, 0)$.

(b) Existe una transformación lineal $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ tal que $T(1, 0, -1) = (1, -1)$ y $T(-1, 0, 1) = (-1, 1)$.

(c) Si $T : \mathbb{R}^9 \to \mathbb{R}^7$ es una transformación lineal, entonces $\dim \mathrm{Nu}(T) \geq 2$.

(d) Sea $T : V \to W$ una transformación lineal tal que $T(v_i) = w_i$, para $i = 1, \ldots, n$. Si $\{w_1, \ldots, w_n\}$ genera W, entonces $\{v_1, \ldots, v_n\}$ genera V.

(e) Existe una transformación lineal $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^5$ tal que los vectores $(1, 0, -1, 0, 0)$, $(1, 1, -1, 0, 0)$ y $(1, 0, -1, 2, 1)$ pertenecen a la imagen de T.

(f) Existe una transformación lineal sobreyectiva $T : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^4$ tal que los vectores $(1, 0, 1, -1, 0)$ y $(0, 0, 0, -1, 2)$ pertenecen al núcleo de T.

Ayudas. (4d) Recordar en el Ejercicio 8 de la Práctica 3 como podemos interpretar el producto de una matriz por un vector columna. Mirar también el Ejemplo 4.1.2 y la Observación 4.1.2 del apunte.

(11) Usar como inspiración el ejercicio (7) que es un caso particular de esta situación.

(9d) Usar el ejercicio (4).

(12b) Asumir lo contrario y usar el Teorema de la dimensión del núcleo y la imagen.