Álgebra/Álgebra II
Clase 11 - Espacios vectoriales. Subespacios vectoriales.

FAMAF / UNC

30 de abril de 2024

Resumen

En esta clase

- definiremos espacios vectoriales,
- daremos ejemplos de espacios vectoriales
- definiremos subespacios vectoriales y veremos algunos ejemplos.

El tema de esta clase está contenido de la sección 4.1 y comienzo de la 4.2 del apunte de clase "Álgebra II / Álgebra - Notas del teórico".

La materia en general gira alrededor del problema de

- resolver sistemas homogéneos de ecuaciones lineales y
- caracterizar el conjunto de soluciones como subconjunto de $\mathbb{R}^n$.

Anteriormente introdujimos dos operaciones en $\mathbb{R}^n$:

- los vectores de $\mathbb{R}^n$ se pueden sumar y multiplicar por escalares,

y vimos que los conjuntos de soluciones son invariantes por estas operaciones. Dicho de otro modo

- Las soluciones de un sistema homogéneo de ecuaciones lineales se pueden sumar y multiplicar por escalares.

Estas son álgunas de las preguntas que responderemos en esta parte de la materia

Preguntas

1. ¿Podremos generar todas las soluciones de un sistema homogéneo sumando y multiplicando por escalares algunas pocas soluciones?
2. ¿Cuál es la mínima cantidad de soluciones que generan todas las soluciones?
3. ¿Cómo podemos representar cada solución usando el conjunto generador?

Por otro lado, hay otras estructuras matemáticas que tienen suma y producto por escalar

- Matrices
- Polinomios
- Funciones

Las operaciones satisfacen las mismas propiedades que las operaciones en $\mathbb{R}^n$

- asociatividad
- conmutatividad
- distributividad
- neutro y opuesto

Entonces estudiaremos todas estas estructuras en abstracto, sin distinguir si son vectores, matrices, polinomios, funciones o lo que fuere.

Lo importante son las operaciones y las propiedades que satisfacen.

Definición

Un *espacio vectorial (sobre $\mathbb{K}$)* o un $\mathbb{K}$-*espacio vectorial* es un conjunto V que tiene dos operaciones que satisfacen ciertos axiomas. Llamaremos a los elementos de V *vectores*.

Operaciones

- Suma de vectores: Dados $v, w \in V$ podemos formar el vector $v + w \in V$ $(+ : V \times V \to V)$.
- Producto por escalares: Dado $v \in V$ y $\lambda \in \mathbb{K}$ podemos formar el vector $\lambda \cdot v \in V$ $(\cdot : \mathbb{K} \times V \to V)$.

Axiomas

- $+$ es conmutativa, asociativa, existe neutro y opuesto
- $\cdot$ es asociativa, distributiva y tiene neutro.

Explícitamente, sean $u, v, w \in V$ y $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$, los axiomas son

S1. $v + w = w + v$ (+ *conmutativa*)

S2. $(v + w) + u = v + (w + u)$ (+ *asociativa*).

S3. $\exists!$ vector 0, tal que $0 + v = v$ (*neutro de la* $+$).

S4. $\exists!\ -v$ tal que $v + (-v) = 0$ (*opuesto*)

P1. $1 \cdot v = v$ para todo $v \in V$ (*neutro de* $\cdot$)

P2. $\lambda \cdot (\mu \cdot v) = (\lambda\mu) \cdot v$ ($\cdot$ *asociativo*).

D1. $\lambda \cdot (v + w) = \lambda \cdot v + \lambda \cdot w$ (*propiedad distributiva 1*)

D2. $(\lambda + \mu) \cdot v = \lambda \cdot v + \mu \cdot v$ (*propiedad distributiva 2*)

Convenciones

- $\lambda v = \lambda \cdot v$
- $-v$ se llama el *opuesto* de v
- Gracias a la asociatividad de $+$ y $\cdot$ podemos obviar los paréntesis
- $w - v = w + (-v)$, en palabras "w menos v" significa "w más el opuesto de v"
  También denotamos $-v + w = (-v) + w$.

Ejemplo

Podemos comprobar que $\mathbb{R}$ es un $\mathbb{R}$-espacio vectorial con la suma y la multiplicación usuales viendo que los axiomas de espacios vectoriales son un subconjunto de los axiomas de los números reales.

Ejemplo

Respecto a los número complejos:

- $\mathbb{C}$ es un $\mathbb{C}$-espacio vectorial.
- $\mathbb{C}$ es un $\mathbb{R}$-espacio vectorial.
- $\mathbb{R}$ *no* es un $\mathbb{C}$-espacio vectorial con la suma y multiplicación usuales. $(i \cdot 1 = i \notin \mathbb{R})$.

Ejemplo

$\mathbb{R}^n$ es un $\mathbb{R}$-espacio vectorial con

$$\begin{aligned} (x_1, \dots, x_n) + (y_1, \dots, y_n) &= (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n) & \qquad (x_i, y_i \in \mathbb{R}) \\ \lambda \cdot (x_1, \dots, x_n) &= (\lambda x_1, \dots, \lambda x_n) & \qquad (\lambda \in \mathbb{R}). \end{aligned}$$

El hecho de que $\mathbb{R}^n$ es un $\mathbb{R}$-espacio vectorial con estas operaciones fue probado en clases anteriores.

Ejemplo

El conjunto de matrices $\mathbb{K}^{m\times n}$ es un espacio vectorial con las operaciones que definimos previamente.

Si $A, B \in \mathbb{K}^{m\times n}$ y $\lambda \in \mathbb{K}$ entonces

- $A + B$ es la matriz con entradas $[A + B]_{ij} = [A]_{ij} + [B]_{ij}$
- $\lambda \cdot A$ es la matriz con entradas $[\lambda A]_{ij} = \lambda[A]_{ij}$

Ya hemos visto que estas operaciones satisfacen los axiomas de la definición. En particular

- El elemento neutro 0 es la matriz con todas las coordenadas iguales a cero,
- El opuesto de A es la matriz $(-1) \cdot A$

Ejemplo

El conjunto de vectores filas $\mathbb{K}^{1\times n}$ (o columnas $\mathbb{K}^{n\times 1}$) es un espacio vectorial con las operaciones que hemos definido anteriormente en esta clase.

- La suma coordenada a coordenada
- La multiplicación coordenada a coordenada

Es un caso particular de las matrices.

Ejemplo

El conjunto de polinomios sobre $\mathbb{K}$

$$\mathbb{K}[x] = \{a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0 \mid n \in \mathbb{N},\ a_n, \ldots, a_0 \in \mathbb{R}\}$$

con la suma y multiplicación que ya conocen:

- Suma coeficiente a coeficiente

$$\begin{aligned}(a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0) + (b_n x^n + \cdots + b_1 x + b_0) &= \\ &= (a_n + b_n) x^n + \cdots + (a_1 + b_1) x + (a_0 + b_0)\end{aligned}$$

- Multiplicación coeficiente a coeficiente

$$\lambda \cdot (a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0) = (\lambda a_n) x^n + \cdots + (\lambda a_1) x + (\lambda a_0)$$

- El neutro es el polinomio 0.
- El opuesto del polinomio $a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$ es el polinomio

$$(-a_n)x^n + \cdots + (-a_1)x + (-a_0) = -a_n x^n - \cdots - a_1 x - a_0.$$

Observación

- Si x^i no aparece en la expresión de un polinomio quiere decir que respectivo coeficiente a_i es cero. Por ejemplo:

$$x^2 + 1 = x^2 + 0x + 1$$

- Para sumar polinomios no es necesario que tengan el mismos grado. Por ejemplo:

$$(x^2 + 1) + (x^5 + 2x^2 + 5x + 2) = x^5 + 3x^2 + 5x + 3$$

Ejemplo

Sea X un conjunto. El *espacio vectorial de funciones de* X *a* $\mathbb{R}$ es el conjunto

$$\mathbb{R}^X = \{\text{las funciones } f : X \longrightarrow \mathbb{R}\}$$

con la suma y producto por escalar "punto a punto".

Es decir, si $f, g \in \mathbb{R}^X$ y $\lambda \in \mathbb{R}$,

- $f + g : X \longrightarrow \mathbb{R}$ es la función definida por

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x)$$

- $\lambda \cdot f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ es la función definida por

$$(\lambda \cdot f)(x) = \lambda f(x)$$

Si $f, g : X \longrightarrow \mathbb{R}$ y $\lambda \in \mathbb{R}$ entonces

- el opuesto de f es $-f : X \longrightarrow \mathbb{R}$, la función definida por

$$(-f)(x) = -f(x)$$

- El elemento neutro es la función constante igual a cero, es decir $f(x) = 0$ para todo $x \in X$. la cual denotamos 0

Observación

Si $X = \mathbb{R}$ entonces la suma y el producto por escalar es la misma definición que se usa en Análisis Matemático I.

En este caso se suele denotar $F(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$

Ejemplo

El conjunto de los números reales positivos $\mathbb{R}_{>0} = (0, \infty)$ es un espacio vectorial con las siguientes operaciones:

- $x \oplus y = x \cdot y$ ($\oplus$ es la multiplicación)
- $\lambda \odot x = x^{\lambda}$ ($\odot$ es la potenciación)
- El "neutro" es el 1: $1 \oplus x = 1 \cdot x = x$
- El "opuesto" es el inverso: $x^{-1} \oplus x = x^{-1} \cdot x = 1$

Observación

- Definición

$$x^{\lambda} := e^{\lambda \ln(x)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda \ln(x))^n}{n!}.$$

- Probemos **D2**:

$$(\lambda + \mu) \odot x = x^{\lambda+\mu} = x^{\lambda} x^{\mu} = x^{\lambda} \oplus x^{\mu} = \lambda \odot x \oplus \mu \odot x. \quad \square$$

Proposición

Sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$. Entonces

1. $\lambda \cdot 0 = 0$ para todo $\lambda \in \mathbb{K}$
2. $0 \cdot v = 0$ para todo $v \in V$
3. Si $\lambda \cdot v = 0$ entonces $\lambda = 0$ ó $v = 0$
4. $(-1) \cdot v = -v$, en palabras, -1 por v es igual al opuesto de v

Observación

La demostración es similar a las propiedades análogas de los números reales o los números enteros dado que lo único que usamos son los axiomas.

Demostración 1.

- $\lambda \cdot 0 = 0$ para todo $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} &\lambda \cdot 0 = \lambda \cdot (0 + 0) && \text{(axioma elemento neutro)} \\ &\lambda \cdot 0 = \lambda \cdot 0 + \lambda \cdot 0 && \text{(axioma distributividad)} \\ &\Rightarrow 0 = \lambda \cdot 0 && \text{(sumando el opuesto de } \lambda \cdot 0\text{)} \end{aligned}$$

Demostración 2.

- $0 \cdot v = 0$ para todo $v \in V$

es similar a la anterior.

Demostración 3.

- Si $\lambda \cdot v = 0$ entonces $\lambda = 0$ ó $v = 0$

Si $\lambda = 0$ no hay nada que demostrar.

Supongamos que $\lambda \neq 0$. Sea $\lambda^{-1} \in \mathbb{R}$ su inverso multiplicativo.

Por 1. $\lambda^{-1} \cdot 0 = 0$, luego

$$\begin{aligned} \lambda^{-1} \cdot 0 &= \lambda^{-1} \cdot (\lambda \cdot v) && \text{(por hipótesis)} \\ 0 &= (\lambda^{-1}\lambda) \cdot v && \text{(asociatividad)} \\ 0 &= 1 \cdot v \\ 0 &= v && \text{(axioma neutro)} \end{aligned}$$

Demostración 4.

- $(-1)\cdot v = -v$, en palabras, -1 por v es igual al opuesto de v

vskip .2cm Usaremos el hecho de que el opuesto es único, luego si $(-1)\cdot v + v = 0$ entonces $(-1)v = -v$.

$$
\begin{aligned}
(-1)\cdot v + v &= (-1)v + 1\cdot v \\
&= ((-1)+1)v \\
&= 0\cdot v \\
&= 0.
\end{aligned}
$$

$\square$

Subespacios vectoriales

Definición

Sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$. diremos que $W \subset V$ es *subespacio de* V si $W \neq \emptyset$ y

(a) si para cualesquiera $w_1, w_2 \in W$, se cumple que $w_1 + w_2 \in W$ y

(b) si $\lambda \in \mathbb{K}$ y $w \in W$, entonces $\lambda w \in W$.

Observación

Si W subespacio de V.

- $0 \in W$.
- Si $w \in W$, entonces $-w \in W$.

Demostración $0 \in W$.

Como $W \neq \emptyset$, existe $w \in W$. Por la condición (b), $0 \cdot w \in W$. Ahora bien, hemos visto que $0 \cdot w = 0$, por lo tanto $0 \in W$.

Demostración $-w \in W$.

Por la condición (b), $(-1) \cdot w \in W$. Ahora bien, hemos visto que $(-1) \cdot w = -w$, por lo tanto $-w \in W$.

Observación

Sea $W \subset V$, $W \neq \emptyset$. Entonces

$$W \text{ subespacio de } V \quad \Leftrightarrow \quad u + \lambda w \in W, \ \forall\, u, w \in W, \lambda \in \mathbb{K}.$$

Demostración

$(\Rightarrow)$

- Por (b) de la definición, $\lambda w \in W$.
- Como $u \in W$ y $\lambda w \in W$, por (a) de la definición $u + \lambda w \in W$.

$(\Leftarrow)$

(a) Sean $w_1, w_2 \in W$, luego $w_1 + 1 \cdot w_2 = w_1 + w_2 \in W$.

(b) Sea $\lambda \in \mathbb{K}$ y $w \in W$, entonces $0 + \lambda w = \lambda w \in W$.

$\square$

Teorema

Sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$ y W subespacio de V. Entonces W con las operaciones suma y producto por escalares de V es un espacio vectorial.

Demostración

Para que W sea espacio vectorial sus operaciones deben satisfacer los axiomas de la definición de espacio vectorial.

$0 \in W$ y si $w \in W \Rightarrow -w \in W$.

Teniendo en cuenta estos dos hechos, y que las operaciones en V satisfacen los axiomas de la definición (y por lo tanto en W también), queda demostrado que W, con las operaciones heredadas de V, es espacio vectorial. $\square$

Ejemplos

1. Sea V un $\mathbb{K}$-espacio vectorial, entonces $\{0\}$ (que se denota 0) y V son subespacios vectoriales de V. Suelen ser llamados los *subespacios triviales* de V.

2. Sea V un $\mathbb{K}$-espacio vectorial y sea $v \in V$, entonces

$$W = \{\mu v : \mu \in \mathbb{K}\}$$

es un subespacio vectorial.

En efecto, si $\mu_1 v, \mu_2 v \in W$, con $\mu_1, \mu_2 \in \mathbb{K}$, entonces

$$\mu_1 v + \lambda\mu_2 v = (\mu_1 + \lambda\mu_2)v \in W,$$

para todo $\lambda \in \mathbb{K}$.

El subespacio W suele ser denotado $\mathbb{K}v$.

Ejemplos

3. Sea $A \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$. Si $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n$, entonces Ax denota

$$Ax := A \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}.$$

Sea

$$W = \{x \in \mathbb{K}^n : Ax = 0\}.$$

Es decir, W es el subconjunto de las soluciones del sistema $Ax = 0$.

Entonces, W es un subespacio de $\mathbb{K}^n$:sean $x, y \in W$ y $\lambda \in \mathbb{K}$, es decir $Ax = 0$, $Ay = 0$ y $\lambda \in \mathbb{K}$, entonces

$$A(x + \lambda y) = Ax + A(\lambda y) = Ax + \lambda Ay = 0 + \lambda \cdot 0 = 0.$$

Es decir

El conjunto de soluciones de un sistema de ecuaciones homogéneo es un subespacio vectorial de $\mathbb{K}^m$,

En particular,

- Las rectas en el plano que pasan por el origen son subespacios de $\mathbb{R}^2$.
- Los planos en el espacio que pasan por el origen son subespacios de $\mathbb{R}^3$.