

# Álgebra/Álgebra II

## Clase 08 - Álgebra de matrices 3

FAMAF / UNC

11 de abril de 2024

# Resumen

En esta clase veremos:

- toda matriz elemental es invertible.
- Toda matriz invertible es producto de matrices elementales.
- Estudiaremos la forma de calcular la inversa de una matriz (cuando existe) con operaciones elementales.
- Finalmente, probaremos que los sistemas de ecuaciones cuya matriz es invertible tienen una única solución.

El tema de esta clase está contenido de la sección la sección 2.7 del apunte de clase “Álgebra II / Álgebra - Notas del teórico”.

## Teorema

*Una matriz elemental es invertible.*

## Demostración

Sea  $E$  la matriz elemental que se obtiene a partir de  $\text{Id}_n$  por la operación elemental  $e$ . Sea  $e'$  la operación elemental inversa y  $E' = e'(\text{Id}_n)$ .

Entonces

$$\begin{aligned} EE' &= e(e'(\text{Id}_n)) = \text{Id}_n, \\ E'E &= e'(e(\text{Id}_n)) = \text{Id}_n. \end{aligned}$$

Luego  $E' = E^{-1}$ .



Es fácil encontrar explícitamente la matriz inversa de una matriz elemental, por ejemplo, en el caso  $2 \times 2$  tenemos:

1. Si  $c \neq 0$ ,

$$\begin{bmatrix} c & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1/c & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad y \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & c \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/c \end{bmatrix},$$

2. si  $c \in \mathbb{K}$ , ,

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ c & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -c & 1 \end{bmatrix} \quad y \quad \begin{bmatrix} 1 & c \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -c \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

3. Finalmente,

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

## Lema

Sea  $R \in \mathbb{K}^{n \times n}$ . Entonces

$$R \text{ es MERF} \wedge R \text{ es invertible} \Rightarrow R = \text{Id}_n.$$

## Demostración

Supongamos que la  $r_{11} = 0$ . Como  $R$  es MERF  $\Rightarrow C_1 = 0$ .

Sea  $t \neq 0$  en  $\mathbb{K}$ . Como  $C_1 = 0$ ,

$$R \begin{bmatrix} t \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & * & \cdots & * \\ 0 & * & \cdots & * \\ \vdots & & & \\ 0 & * & \cdots & * \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

Luego, como  $R$  tiene inversa:

$$\begin{bmatrix} t \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = \text{Id} \begin{bmatrix} t \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = R^{-1}R \begin{bmatrix} t \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = R^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

Esto nos dice que  $t = 0$ , lo cual es absurdo pues habíamos partido de  $t \neq 0$ . Por lo tanto

$$R = \begin{bmatrix} 1 & * & \cdots & * \\ 0 & * & \cdots & * \\ \vdots & & & \\ 0 & * & \cdots & * \end{bmatrix}.$$

Por inducción podemos probar que  $R = \text{Id}_n$ .



## Teorema

Sea  $A$  matriz  $n \times n$  con coeficientes en  $\mathbb{K}$ . Las siguientes afirmaciones son equivalentes

- i)  $A$  es invertible,
- ii)  $A$  es equivalente por filas a  $\text{Id}_n$ ,
- iii)  $A$  es producto de matrices elementales.

## Demostración

i)  $\Rightarrow$  ii) Sea  $R$  una MERF que se obtiene de  $A$ .

- Existen  $E_1, \dots, E_k$  matrices elementales tal que  $E_1, \dots, E_k A = R$ .
- Como  $E_1, \dots, E_k, A$  invertibles  $\Rightarrow E_1, \dots, E_k A = R$  invertible.
- $R$  es MERF e invertible  $\Rightarrow R = \text{Id}_n$ .
- $A$  es equivalente por filas a  $R = \text{Id}_n$ .

ii)  $\Rightarrow$  iii)

- $A$  es equivalente por filas a  $\text{Id}_n \Rightarrow$  existen  $E_1, \dots, E_k$  matrices elementales tal que  $E_1 \cdots E_k A = \text{Id}_n$ .
- Sean  $F_1, \dots, F_k$  las inversas de  $E_1, \dots, E_k$ , respectivamente  $\Rightarrow$

$$(E_1 \cdots E_k)^{-1} = E_k^{-1} \cdots E_1^{-1} = F_k \cdots F_1,$$

luego

$$F_k \cdots F_1 E_1 \cdots E_k A = \text{Id}_n A = A.$$

- Como  $E_1 \cdots E_k A = \text{Id}_n \Rightarrow F_k \cdots F_1 = F_k \cdots F_1 \text{Id}_n = A$ . Es decir

$$A = F_k \cdots F_1.$$

iii)  $\Rightarrow$  i) Sea  $A = E_1 E_2 \cdots E_k$  donde  $E_i$  es una matriz elemental ( $i = 1, \dots, k$ ). Como cada  $E_i$  es invertible, el producto de ellos es invertible, por lo tanto  $A$  es invertible.





## Corolario

Sean  $A$  y  $B$  matrices  $m \times n$ . Entonces,  $B$  es equivalente por filas a  $A$  si y sólo si existe matriz invertible  $P$  de orden  $m \times m$  tal que  $B = PA$ .

## Demostración

$(\Rightarrow)$

- $B$  es equivalente por filas a  $A \Rightarrow \exists E_1, \dots, E_k$  elementales tal que  $B = E_1 \dots E_k A$ .
- Sea  $P = E_1 \dots E_k$ , luego  $B = PA$ .
- Cada  $E_i$  es invertible  $\Rightarrow P = E_1 \dots E_k$  es invertible.

$(\Leftarrow)$

- Sea  $P$  matriz invertible tal que  $B = PA$ .
- Como  $P$  es invertible  $\Rightarrow P = E_1 \dots E_k$ , producto de matrices elementales.
- Por lo tanto,  $B = PA = E_1 \dots E_k A$  es equivalente por filas a  $A$ . □

## Corolario

Sea  $A$  matriz  $n \times n$ . Sean  $e_1, \dots, e_k$  operaciones elementales por filas tal que

$$e_1(e_2(\cdots(e_k(A))\cdots)) = \text{Id}_n. \quad (*)$$

Entonces,  $A$  invertible y

$$e_1(e_2(\cdots(e_k(\text{Id}_n))\cdots)) = A^{-1}. \quad (**)$$

## Demostración

- $(*) \Rightarrow A$  es equivalente por filas a  $\text{Id}_n \Rightarrow A$  es invertible.
- Sean las matrices elementales  $E_i = e_i(\text{Id}_n)$  para  $i = 1, \dots, k$ , entonces  $E_1 E_2 \dots E_k A = \text{Id}_n$ , por lo tanto,

$$E_1 E_2 \dots E_k A A^{-1} = \text{Id}_n A^{-1} \quad \Leftrightarrow$$

$$E_1 E_2 \dots E_k \text{Id}_n = A^{-1} \quad \Leftrightarrow$$

$$e_1(e_2(\cdots(e_k(\text{Id}_n))\cdots)) = A^{-1}.$$



Este último corolario nos provee un método sencillo para calcular la inversa de una matriz cuadrada  $A$  invertible.

1. Aplicando operaciones elementales  $e_1, \dots, e_k$  encontramos  $R = \text{Id}_n$  la MERF de  $A$ .
2. Aplicando las operaciones elementales  $e_1, \dots, e_k$  a  $\text{Id}_n$ , obtenemos  $A^{-1}$  la inversa de  $A$ .

Para facilitar el cálculo es conveniente comenzar con  $A$  e  $\text{Id}_n$  e ir aplicando paralelamente las operaciones elementales por fila.

En las próxima filmas veremos un ejemplo.

## Ejemplo

Calculemos la inversa (si tiene) de

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

## Solución

Trataremos de reducir por filas a  $A$  y todas las operaciones elementales las haremos en paralelo partiendo de la matriz identidad:

$$\begin{aligned} [A | \text{Id}] &= \left[ \begin{array}{cc|cc} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{F_1 \leftrightarrow F_2} \left[ \begin{array}{cc|cc} 1 & 3 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \end{array} \right] \\ &\xrightarrow{F_2 - 2F_1} \left[ \begin{array}{cc|cc} 1 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & -7 & 1 & -2 \end{array} \right] \xrightarrow{F_2 / (-7)} \left[ \begin{array}{cc|cc} 1 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1/7 & 2/7 \end{array} \right] \\ &\xrightarrow{F_1 - 3F_2} \left[ \begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 3/7 & 1/7 \\ 0 & 1 & -1/7 & 2/7 \end{array} \right]. \end{aligned}$$

Luego,  $A$  es invertible y su inversa es

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 3/7 & 1/7 \\ -1/7 & 2/7 \end{bmatrix}.$$



- El lector desconfiado podrá comprobar, haciendo el producto de matrices, que  $AA^{-1} = A^{-1}A = \text{Id}_2$ .

## Teorema

Sea  $A$  matriz  $n \times n$  con coeficientes en  $\mathbb{K}$ . Entonces, las siguientes afirmaciones son equivalentes.

- i)  $A$  es invertible.
- ii) El sistema  $AX = Y$  tiene una única solución para toda matriz  $Y$  de orden  $n \times 1$ .
- iii) El sistema homogéneo  $AX = 0$  tiene una única solución ( $X = 0$ ).

## Demostración

i)  $\Rightarrow$  ii) Sea  $X_0$  solución del sistema  $AX = Y$ , luego

$$AX_0 = Y \quad \Rightarrow \quad A^{-1}AX_0 = A^{-1}Y \quad \Rightarrow \quad X_0 = A^{-1}Y.$$

Es decir,  $X_0$  es único (siempre igual a  $A^{-1}Y$ ).

ii)  $\Rightarrow$  iii) Es trivial, tomando  $Y = 0$ .

iii)  $\Rightarrow$  i) La hipótesis es  $AX = 0 \Rightarrow X = 0$ .

- Sea  $R$  la MERF equivalente a  $A$ .
- Si  $R$  tiene una fila nula hay variables que no corresponden a 1's principales, luego esas variables son libres. Por lo tanto, el sistema  $AX = 0$  tiene más de una solución, contradiciendo la hipótesis.
- Por lo tanto,  $R$  no tiene filas nulas.
- Como  $R$  es una matriz cuadrada y es MERF, tenemos que  $R = \text{Id}_n$ .
- Luego  $A$  es equivalente por filas a  $\text{Id}_n \Rightarrow A$  es invertible.



## Corolario

Sea  $A$  una matriz  $n \times n$  con coeficientes en  $\mathbb{K}$ .

1. Si existe  $B$  matriz  $n \times n$  tal que  $BA = \text{Id}_n$ , entonces  $AB = \text{Id}_n$ . ( $A$  tiene inversa a izquierda  $\Rightarrow$  es invertible).
2. Si existe  $C$  matriz  $n \times n$  tal que  $AC = \text{Id}_n$ , entonces  $CA = \text{Id}_n$ . ( $A$  tiene inversa a derecha  $\Rightarrow$  es invertible).

## Demostración

1. Sea  $B$  tal que  $BA = \text{Id}_n$ . El sistema  $AX = 0$  tiene una única solución, pues

$$AX_0 = 0 \quad \Rightarrow \quad BAX_0 = B0 = 0 \quad \Rightarrow \quad \text{Id}_n X_0 = 0 \quad \Rightarrow \quad X_0 = 0.$$

Luego,  $A$  es invertible (y su inversa es  $B$ ).

2. Sea  $C$  tal que  $AC = \text{Id}_n$ . Luego  $A$  es la inversa a izquierda de  $C$ . Por lo que demostramos más arriba,  $C$  es invertible y su inversa es  $A$ , es decir  $AC = \text{Id}_n$  y  $CA = \text{Id}_n$ , luego  $C$  es invertible. □



El siguiente teorema reúne algunos resultados ya demostrados.

## Teorema

Sea  $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ . Las siguientes afirmaciones son equivalentes

1.  $A$  es invertible,
2.  $A$  es equivalente por fila a  $\text{Id}_n$ ,
3. el sistema  $AX = 0$  tiene solución única (la trivial),
4. el sistema  $AX = Y$  tiene solución única para todo  $Y \in \mathbb{K}^n$  (la solución es  $A^{-1}Y$ ),
5.  $A$  es el producto de matrices elementales,
6. existe  $B$  matriz  $n \times n$  tal que  $BA = \text{Id}$ ,
7. existe  $C$  matriz  $n \times n$  tal que  $AC = \text{Id}$ ,
8.  $\det(A) \neq 0$  (esto lo veremos en próximas clases).

## Matrices invertibles $2 \times 2$

Dados  $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ , determinaremos cuando la matriz  $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$  es invertible y en ese caso, cual es su inversa.

### Solución

Para poder aplicar el método de Gauss-Jordan debemos analizar dos casos:  $a \neq 0$  y  $a = 0$ .

**Caso 1.**  $a \neq 0$ .

Como  $a \neq 0$ , entonces

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \xrightarrow{F_1/a} \begin{bmatrix} 1 & \frac{b}{a} \\ c & d \end{bmatrix} \xrightarrow{F_2 - cF_1} \begin{bmatrix} 1 & \frac{b}{a} \\ 0 & d - c\frac{b}{a} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{b}{a} \\ 0 & \frac{ad - bc}{a} \end{bmatrix}$$

**Caso 1.1**  $a \neq 0$  y  $ad - bc = 0$ .

Si  $ad - bc = 0$ , entonces la matriz se encuentra reducida por filas y la última fila es 0, luego en ese caso no es invertible.

**Caso 1.2**  $a \neq 0$  y  $ad - bc \neq 0$ .

Entonces

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{b}{a} \\ 0 & \frac{ad - bc}{a} \end{bmatrix} \xrightarrow{a/(ad-bc) F_2} \begin{bmatrix} 1 & \frac{b}{a} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{F_1 - b/a F_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Luego, en este caso  $a \neq 0$ ,  $ad - bc \neq 0$  hemos reducido por filas la matriz  $A$  a la identidad y por lo tanto  $A$  es invertible.

Además, podemos encontrar  $A^{-1}$  aplicando a  $\text{Id}_2$  las mismas operaciones elementales que reducían  $A$  a la identidad:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} &\xrightarrow{F_1/a} \begin{bmatrix} \frac{1}{a} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{F_2 - cF_1} \begin{bmatrix} \frac{1}{a} & 0 \\ -\frac{c}{a} & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{a/(ad-bc) F_2} \begin{bmatrix} \frac{1}{a} & 0 \\ -\frac{c}{ad-bc} & \frac{a}{ad-bc} \end{bmatrix} \xrightarrow{F_1 - b/a F_2} \\ &\rightarrow \begin{bmatrix} \frac{1}{a} + \frac{bc}{a(ad-bc)} & -\frac{b}{ad-bc} \\ -\frac{c}{ad-bc} & \frac{a}{ad-bc} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{d}{ad-bc} & -\frac{b}{ad-bc} \\ -\frac{c}{ad-bc} & \frac{a}{ad-bc} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Concluyendo, en el caso  $a \neq 0$ ,  $ad - bc \neq 0$ ,  $A$  es invertible y

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}. \quad (1)$$

## Caso 2. $a = 0$ .

Si  $c = 0$  o  $b = 0$ , entonces la matriz no es invertible, pues en ambos casos nos quedan matrices que no pueden ser reducidas por fila a la identidad.

Luego la matriz puede ser invertible si  $bc \neq 0$  y en este caso la reducción por filas es:

$$\begin{bmatrix} 0 & b \\ c & d \end{bmatrix} \xrightarrow{F_1 \leftrightarrow F_2} \begin{bmatrix} c & d \\ 0 & b \end{bmatrix} \xrightarrow{F_1/c} \begin{bmatrix} 1 & \frac{d}{c} \\ 0 & b \end{bmatrix} \xrightarrow{F_2/b} \begin{bmatrix} 1 & \frac{d}{c} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{F_1 - d/c F_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Luego  $A$  es invertible y aplicando estas mismas operaciones elementales a la identidad obtenemos la inversa:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{F_1 \leftrightarrow F_2} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{F_1/c} \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{c} \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{F_2/b} \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{c} \\ \frac{1}{b} & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{F_1 - d/cF_2} \begin{bmatrix} -\frac{d}{bc} & \frac{1}{c} \\ \frac{1}{b} & 0 \end{bmatrix}.$$

Es decir, en el caso que  $a = 0$ , entonces  $A$  invertible si  $bc \neq 0$  y su inversa es

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{d}{bc} & \frac{1}{c} \\ \frac{1}{b} & 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{-bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & 0 \end{bmatrix}. \quad (2)$$

Es decir, la expresión de la inversa es igual a (1) (considerando que  $a = 0$ ).

Reuniendo los dos casos: de (1) y (2) se deduce:

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \text{ es invertible} \Leftrightarrow ad - bc \neq 0,$$

y en ese caso, su inversa viene dada por

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

### Observación

Definiremos  $\det(A) := ad - bc$ . Luego,

- $A$  invertible si y solo si  $\det(A) \neq 0$ .
- Veremos en las próximas clases que el uso de determinantes permitirá establecer la generalización de este resultado para matrices  $n \times n$  con  $n \geq 1$ .

Terminaremos la clase con un cálculo de matriz inversa.

## Ejemplo

Calcular la inversa (si tiene) de la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}.$$

## Solución

$$\begin{aligned} & \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{F_2 - 3F_1} \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & -2 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{F_2 \leftrightarrow F_3} \\ & \longrightarrow \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & -2 & -3 & 1 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{F_1 + F_2} \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & -2 & -3 & 1 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{F_3 - 5F_2} \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 &\longrightarrow \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 8 & -3 & 1 & -5 \end{array} \right] \xrightarrow{F_3/8} \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{3}{8} & \frac{1}{8} & -\frac{5}{8} \end{array} \right] \xrightarrow{F_2+2F_3} \\
 &\longrightarrow \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{3}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{3}{8} & \frac{1}{8} & -\frac{5}{8} \end{array} \right].
 \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -\frac{3}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{3}{8} & \frac{1}{8} & -\frac{5}{8} \end{bmatrix}$$

