Álgebra/Álgebra II
Clase 2 - Producto escalar y ortogonalidad en $\mathbb{R}^n$

FAMAF / UNC

14 de marzo de 2024

En este clase introduciremos las nociones de “norma”, “distancia” y “ángulo” en $\mathbb{R}^n$ usando el producto escalar.

Además veremos la noción de perpendicularidad u ortogonalidad y explicaremos el proceso de ortogonalización de Gram-Schmidt.

Estas diapositivas están basadas en la Secciones 1.2, 1.3 y 1.7 de las *Notas de Álgebra II* disponibles en Classroom. Allí se pueden encontrar más detalles y el sustento teórico de todas nuestras afirmaciones.

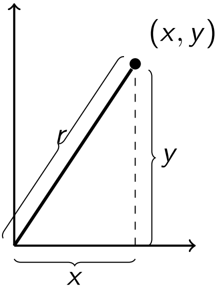
La norma de un vector

Definición

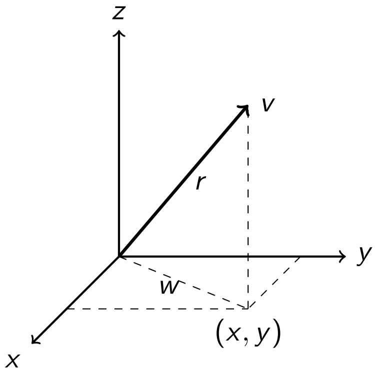
Si $v \in \mathbb{R}^n$, la *norma de v* o *longitud de v* es

$$||v|| = \sqrt{\langle v, v \rangle}.$$

Si $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, entonces $||(x, y)|| = \sqrt{x^2 + y^2}$ (teorema de Pitágoras).



Si $n = 3$, por la aplicación reiterada del teorema de Pitágoras obtenemos que la longitud de $v = (x, y, z)$ es $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.



En general, si $v = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \Rightarrow ||v|| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}$.

Proposición

Sea $v \in \mathbb{R}^n$ *y* $\lambda \in \mathbb{R}$, *entonces*

$$||\lambda v|| = |\lambda|||v||.$$

Demostración

$||\lambda v||^2 = \langle \lambda v, \lambda v \rangle$, por **P3**,

$$\langle \lambda v, \lambda v \rangle = \lambda \langle v, \lambda v \rangle = \lambda^2 \langle v, v \rangle.$$

Es decir $||\lambda v||^2 = \lambda^2 ||v||^2$, por lo tanto, $||\lambda v|| = |\lambda|||v||$. $\square$

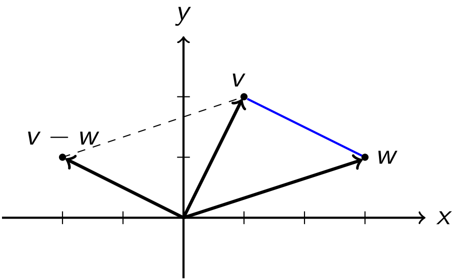
Distancia en $\mathbb{R}^n$

Definición

Sea $v, w \in \mathbb{R}^n$, entonce las *distancia* entre v y w es $||v - w||$.

Observación

La norma del vector $v - w$ es la longitud del segmento que une w con v.



Interpretación geométrica del producto escalar

Sean $v_1 = (x_1, y_1)$ y $v_2 = (x_2, y_2)$ en $\mathbb{R}^2$; veremos a continuación que

$$\langle v_1, v_2 \rangle = ||v_1||\,||v_2||\cos(\theta), \tag{1}$$

donde θ es el ángulo comprendido entre v_1 y v_2.

Sea α_1 el ángulo comprendido entre v_1 y el eje horizontal y α_2 el ángulo comprendido entre v_2 y el eje horizontal. Entonces,

$$v_1 = ||v_1||(\cos(\alpha_1), \operatorname{sen}(\alpha_1)), \quad v_2 = ||v_2||(\cos(\alpha_2), \operatorname{sen}(\alpha_2)),$$

por lo tanto

$$\langle v_1, v_2 \rangle = ||v_1||\,||v_2||(\cos(\alpha_1)\cos(\alpha_2) + \operatorname{sen}(\alpha_1)\operatorname{sen}(\alpha_2)).$$

Por otro lado, por la propiedad de la suma de los cosenos tenemos que

$$\cos(\alpha_1)\cos(\alpha_2) + \operatorname{sen}(\alpha_1)\operatorname{sen}(\alpha_2) = \cos(\alpha_1 - \alpha_2).$$

Es decir,

$$\langle v_1, v_2\rangle = ||v_1||\,||v_2||\cos(\alpha_1 - \alpha_2),$$

y precisamente, $\theta = \alpha_1 - \alpha_2$ es el ángulo comprendido entre v_1 y v_2.

Esto se puede generalizar a $\mathbb{R}^n$: el ángulo comprendido entre v_1 y v_2 es

$$\theta = \operatorname{arcos}\left(\frac{\langle v_1, v_2\rangle}{||v_1||\,||v_2||}\right).$$

Vectores perpendiculares

El producto escalar $\langle v, w \rangle$ puede ser igual a 0 para determinados vectores, incluso ambos distintos de 0.

Por ejemplo, si $v = (1, 2, 3)$ y $w = (2, 1, -\frac{4}{3})$, entonces

$$\langle v, w \rangle = 2 + 2 - 4 = 0.$$

Definición

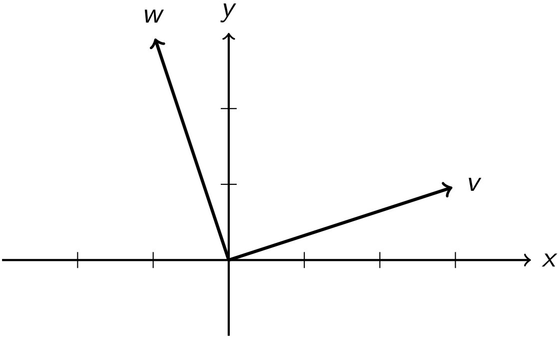
Decimos que dos vectores v y w en $\mathbb{R}^n$ son *perpendiculares* u *ortogonales* si $\langle v, w \rangle = 0$. Cuando v y w son ortogonales denotamos $v \perp w$.

Ejemplo

En $\mathbb{R}^2$ consideremos los vectores

$$v = (3,1), \quad w = (-1,3),$$

representados en la siguiente figura:



Luego, vemos que $\langle v, w \rangle = 0$, y por lo tanto v es perpendicular a w, lo cual concuerda con nuestra intuición.

Es claro que esta definición algebraica de perpendicularidad está de acuerdo con la interpretación geométrica del producto escalar:

$$v \text{ y } w \text{ perpendiculares (geométricamente)}$$

$$\Downarrow$$

$$\text{el ángulo comprendido entre } v \text{ y } w \text{ es } \theta = 90^\circ$$

$$\Downarrow$$

$$\cos(\theta) = 0$$

$$\Downarrow$$

$$\langle v, w \rangle = ||v||\,||w||\cos(\theta) = 0.$$

Rectas en $\mathbb{R}^2$

Definición

Una *recta* está formada por el conjunto de puntos (x, y) en $\mathbb{R}^2$ que satisfacen la ecuación

$$ax + by = c, \tag{2}$$

con $a, b, c \in \mathbb{R}$ y tal que a, b no pueden ser simultáneamente 0. También suele decirse que la ecuación (2) es la *ecuación implícita de la recta*.

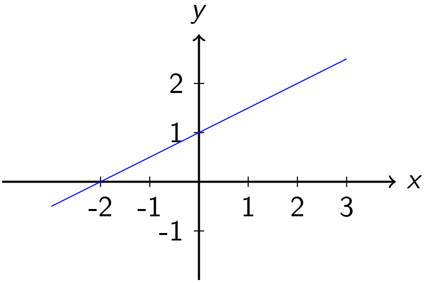
Más formalmente, la recta es el conjunto

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : ax + by = c\}.$$

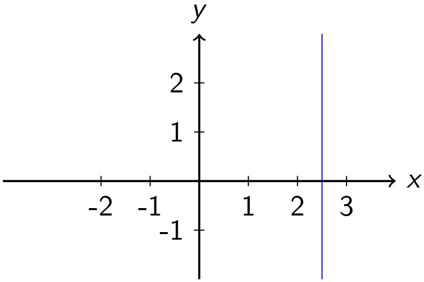
Observación

- Si $b \neq 0$, entonces la recta es $\quad y = -\dfrac{a}{b}x + \dfrac{c}{b}$,
- si $b = 0$, entonces $a \neq 0$ y la recta es $\quad x = \dfrac{c}{a}$.

Rectas en $\mathbb{R}^2$: ejemplos



La recta $-\frac{1}{2}x + y = 1$.



La recta $x = 2.5$.

Si consideramos el vector (a, b) en $\mathbb{R}^2$, $c \in \mathbb{R}$ y L la recta definida por los puntos (x, y) tal que $ax + by = c$, entonces

$$\begin{aligned} L &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : ax + by = c\} \\ &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \langle (x, y), (a, b) \rangle = c\}. \end{aligned}$$

Ahora bien, consideremos (x_0, y_0) un punto de la recta, entonces, obviamente tenemos que $\langle (x_0, y_0), (a, b) \rangle = c$.

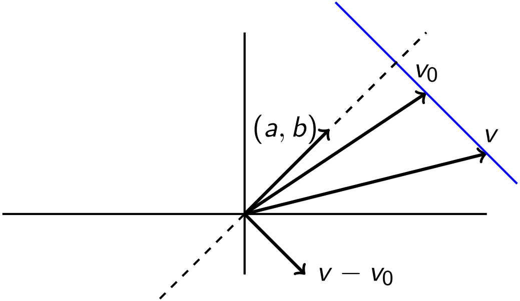
Por lo tanto

$$L = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \langle (x, y), (a, b) \rangle = \langle (x_0, y_0), (a, b) \rangle\}.$$

Por la propiedad **P2** del producto escalar, llegamos a la conclusión que

$$L = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \langle (x, y) - (x_0, y_0)\, ,\, (a, b) \rangle = 0\}.$$

Sea $v_0 = (x_0, y_0)$ y $v = (x, y)$, representemos gráficamente la situación:



La recta L es, entonces, *la recta perpendicular a* (a, b) *y que pasa por* v_0.

Conclusión

La ecuación implícita de la recta L perpendicular a (a, b) y que pasa por (x_0, y_0) es

$$ax + by = \langle (x_0, y_0), (a, b) \rangle.$$

Ejemplo

Encontrar la ecuación implícita de la recta que pasa por $(2, -1)$ y es perpendicular a $(-2, 3)$.

Solución

Por lo visto anteriormente la recta esta formada por los puntos (x, y) tales que

$$-2x + 3y = c$$

y debemos determinar el valor de c. Como $(2, -1)$ pertenece a la recta

$$c = -2 \cdot 2 + 3 \cdot (-1) = -7.$$

Luego, la ecuación implícita de la recta es

$$-2x + 3y = -7.$$

$\square$