Álgebra/Álgebra II
Clase 15 - Espacios vectoriales

FAMAF / UNC

22 de octubre de 2020

Resumen

En esta clase

- definiremos espacios vectoriales,
- daremos ejemplos de espacios vectoriales
- definiremos subespacios vectoriales y veremos algunos ejemplos.

El tema de esta clase está contenido de la sección 3.1 y comienzo de la 3.2 del apunte de clase "Álgebra II / Álgebra - Notas del teórico".

La materia en general gira alrededor del problema de

- resolver sistemas homogéneos de ecuaciones lineales y
- caracterizar el conjunto de soluciones como subconjunto de $\mathbb{R}^n$.

Anteriormente introdujimos dos operaciones en $\mathbb{R}^n$:

- los vectores de $\mathbb{R}^n$ se pueden sumar y multiplicar por escalares,

y vimos que los conjuntos de soluciones son invariantes por estas operaciones. Dicho de otro modo

- Las soluciones de un sistema homogéneo de ecuaciones lineales se pueden sumar y multiplicar por escalares.

Estas son álgunas de las preguntas que responderemos en esta parte de la materia

Preguntas

1. ¿Podremos generar todas las soluciones de un sistema homogéneo sumando y multiplicando por escalares algunas pocas soluciones?
2. ¿Cuál es la mínima cantidad de soluciones que generan todas las soluciones?
3. ¿Cómo podemos representar cada solución usando el conjunto generador?

Por otro lado, hay otras estructuras matemáticas que tienen suma y producto por escalar

- Matrices
- Polinomios
- Funciones

Las operaciones satisfacen las mismas propiedades que las operaciones en $\mathbb{R}^n$

- asociatividad
- conmutatividad
- distributividad
- neutro y opuesto

Entonces estudiaremos todas estas estructuras en abstracto, sin distinguir si son vectores, matrices, polinomios, funciones o lo que fuere.

Lo importante son las operaciones y las propiedades que satisfacen.

Definición

Un *espacio vectorial (sobre $\mathbb{K}$)* o un $\mathbb{K}$-*espacio vectorial* es un conjunto V que tiene dos operaciones que satisfacen ciertos axiomas. Llamaremos a los elementos de V *vectores*.

Operaciones

- Suma de vectores: Dados $v, w \in V$ podemos formar el vector $v + w \in V$ $(+ : V \times V \to V)$.
- Producto por escalares: Dado $v \in V$ y $\lambda \in \mathbb{K}$ podemos formar el vector $\lambda \cdot v \in V$ $(\cdot : \mathbb{K} \times V \to V)$.

Axiomas

- $+$ es conmutativa, asociativa, existe neutro y opuesto
- $\cdot$ es asociativa, distributiva y tiene neutro.

Explícitamente, sean $u, v, w \in V$ y $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$, los axiomas son

S1. $v + w = w + v$ (+ *conmutativa*)

S2. $(v + w) + u = v + (w + u)$ (+ *asociativa*).

S3. $\exists!$ vector 0, tal que $0 + v = v$ (*neutro de la* $+$).

S4. $\exists!\ -v$ tal que $v + (-v) = 0$ (*opuesto*)

P1. $1 \cdot v = v$ para todo $v \in V$ (*neutro de* $\cdot$)

P2. $\lambda \cdot (\mu \cdot v) = (\lambda\mu) \cdot v$ ($\cdot$ *asociativo*).

D1. $\lambda \cdot (v + w) = \lambda \cdot v + \lambda \cdot w$ (*propiedad distributiva 1*)

D2. $(\lambda + \mu) \cdot v = \lambda \cdot v + \mu \cdot v$ (*propiedad distributiva 2*)

Convenciones

- $\lambda v = \lambda \cdot v$
- $-v$ se llama el *opuesto* de v
- Gracias a la asociatividad de $+$ y $\cdot$ podemos obviar los paréntesis
- $w - v = w + (-v)$, en palabras "w menos v" significa "w más el opuesto de v"
  También denotamos $-v + w = (-v) + w$.

Ejemplo

Podemos comprobar que $\mathbb{R}$ es un $\mathbb{R}$-espacio vectorial con la suma y la multiplicación usuales viendo que los axiomas de espacios vectoriales son un subconjunto de los axiomas de los números reales.

Ejemplo

Respecto a los número complejos:

- $\mathbb{C}$ es un $\mathbb{C}$-espacio vectorial.
- $\mathbb{C}$ es un $\mathbb{R}$-espacio vectorial.
- $\mathbb{R}$ *no* es un $\mathbb{C}$-espacio vectorial con la suma y multiplicación usuales. ($i \cdot 1 = i \notin \mathbb{R}$).

Ejemplo

$\mathbb{R}^n$ es un $\mathbb{R}$-espacio vectorial con

$$\begin{aligned} (x_1, \dots, x_n) + (y_1, \dots, y_n) &= (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n) \qquad && (x_i, y_i \in \mathbb{R}) \\ \lambda \cdot (x_1, \dots, x_n) &= (\lambda x_1, \dots, \lambda x_n) && (\lambda \in \mathbb{R}). \end{aligned}$$

El hecho de que $\mathbb{R}^n$ es un $\mathbb{R}$-espacio vectorial con estas operaciones fue probado en clases anteriores.

Ejemplo

El conjunto de matrices $\mathbb{K}^{m\times n}$ es un espacio vectorial con las operaciones que definimos previamente.

Si $A, B \in \mathbb{K}^{m\times n}$ y $\lambda \in \mathbb{K}$ entonces

- $A + B$ es la matriz con entradas $[A+B]_{ij} = [A]_{ij} + [B]_{ij}$
- $\lambda \cdot A$ es la matriz con entradas $[\lambda A]_{ij} = \lambda [A]_{ij}$

Ya hemos visto que estas operaciones satisfacen los axiomas de la definición. En particular

- El elemento neutro 0 es la matriz con todas las coordenadas iguales a cero,
- El opuesto de A es la matriz $(-1) \cdot A$

Ejemplo

El conjunto de vectores filas $\mathbb{K}^{1\times n}$ (o columnas $\mathbb{K}^{n\times 1}$) es un espacio vectorial con las operaciones que hemos definido anteriormente en esta clase.

- La suma coordenada a coordenada
- La multiplicación coordenada a coordenada

Es un caso particular de las matrices.

Ejemplo

El conjunto de polinomios sobre $\mathbb{K}$

$$\mathbb{K}[x] = \{a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0 \mid n \in \mathbb{N},\, a_n, ..., a_0 \in \mathbb{R}\}$$

con la suma y multiplicación que ya conocen:

- Suma coeficiente a coeficiente

$$(a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0) + (b_n x^n + \cdots + b_1 x + b_0) = \\ = (a_n + b_n) x^n + \cdots + (a_1 + b_1) x + (a_0 + b_0)$$

- Multiplicación coeficiente a coeficiente

$$\lambda \cdot (a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0) = (\lambda a_n) x^n + \cdots + (\lambda a_1) x + (\lambda a_0)$$

- El neutro es el polinomio 0.
- El opuesto del polinomio $a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$ es el polinomio

$$(-a_n)x^n + \cdots + (-a_1)x + (-a_0) = -a_n x^n - \cdots - a_1 x - a_0.$$

Observación

- Si x^i no aparece en la expresión de un polinomio quiere decir que respectivo coeficiente a_i es cero. Por ejemplo:

$$x^2 + 1 = x^2 + 0x + 1$$

- Para sumar polinomios no es necesario que tengan el mismos grado. Por ejemplo:

$$(x^2 + 1) + (x^5 + 2x^2 + 5x + 2) = x^5 + 3x^2 + 5x + 3$$

Ejemplo

Sea X un conjunto. El *espacio vectorial de funciones de X a $\mathbb{R}$* es el conjunto

$$\mathbb{R}^X = \{\text{las funciones } f : X \longrightarrow \mathbb{R}\}$$

con la suma y producto por escalar "punto a punto".

Es decir, si $f, g \in \mathbb{R}^X$ y $\lambda \in \mathbb{R}$,

- $f + g : X \longrightarrow \mathbb{R}$ es la función definida por

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x)$$

- $\lambda \cdot f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ es la función definida por

$$(\lambda \cdot f)(x) = \lambda f(x)$$

Si $f, g : X \longrightarrow \mathbb{R}$ y $\lambda \in \mathbb{R}$ entonces

- el opuesto de f es $-f : X \longrightarrow \mathbb{R}$, la función definida por

$$(-f)(x) = -f(x)$$

- El elemento neutro es la función constante igual a cero, es decir $f(x) = 0$ para todo $x \in X$. la cual denotamos 0

Observación

Si $X = \mathbb{R}$ entonces la suma y el producto por escalar es la misma definición que se usa en Análisis Matemático I.

En este caso se suele denotar $F(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$

Ejemplo

El conjunto de los números reales positivos $\mathbb{R}_{>0} = (0, \infty)$ es un espacio vectorial con las siguientes operaciones:

- $x \oplus y = x \cdot y$ ($\oplus$ es la multiplicación)
- $\lambda \odot x = x^{\lambda}$ ($\odot$ es la potenciación)
- El "neutro" es el 1: $1 \oplus x = 1 \cdot x = x$
- El "opuesto" es el inverso: $x^{-1} \oplus x = x^{-1} \cdot x = 1$

Observación

- Definición

$$x^{\lambda} := e^{\lambda \ln(x)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda \ln(x))^n}{n!}.$$

- Probemos **D2**:

$$(\lambda + \mu) \odot x = x^{\lambda+\mu} = x^{\lambda} x^{\mu} = x^{\lambda} \oplus x^{\mu} = \lambda \odot x \oplus \mu \odot x. \quad \square$$

Proposición

Sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$. Entonces

1. $\lambda \cdot 0 = 0$ para todo $\lambda \in \mathbb{K}$
2. $0 \cdot v = 0$ para todo $v \in V$
3. Si $\lambda \cdot v = 0$ entonces $\lambda = 0$ ó $v = 0$
4. $(-1) \cdot v = -v$, en palabras, -1 por v es igual al opuesto de v

Observación

La demostración es similar a las propiedades análogas de los números reales o los números enteros dado que lo único que usamos son los axiomas.

Demostración 1.

- $\lambda \cdot 0 = 0$ para todo $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \lambda \cdot 0 &= \lambda \cdot (0+0) && \text{(axioma elemento neutro)} \\ \lambda \cdot 0 &= \lambda \cdot 0 + \lambda \cdot 0 && \text{(axioma distributividad)} \\ \Rightarrow 0 &= \lambda \cdot 0 && \text{(sumando el opuesto de } \lambda \cdot 0\text{)} \end{aligned}$$

Demostración 2.

- $0 \cdot v = 0$ para todo $v \in V$

es similar a la anterior.

Demostración 3.

- Si $\lambda \cdot v = 0$ entonces $\lambda = 0$ ó $v = 0$

Si $\lambda = 0$ no hay nada que demostrar.

Supongamos que $\lambda \neq 0$. Sea $\lambda^{-1} \in \mathbb{R}$ su inverso multiplicativo.

$$\begin{aligned} \lambda^{-1} \cdot 0 &= \lambda^{-1} \cdot (\lambda \cdot v) && \text{(por hipótesis)} \\ 0 &= (\lambda^{-1}\lambda) \cdot v && \text{(asociatividad)} \\ 0 &= 1 \cdot v \\ 0 &= v && \text{(axioma neutro)} \end{aligned}$$

Demostración 4.

- $(-1) \cdot v = -v$, en palabras, -1 por v es igual al opuesto de v

$$
\begin{aligned}
0 &= 0 \cdot v && \text{(por 2.)} \\
0 &= (1 + (-1))v && \\
0 &= 1 \cdot v + (-1) \cdot v && \text{(distributividad)} \\
0 &= v + (-1) \cdot v && \text{(elemento neutro } \cdot\text{)} \\
-v + 0 &= -v + v + (-1) \cdot v && \text{(sumo } -v \text{ a ambos miembros)} \\
-v &= 0 + (-1) \cdot v && \text{(elemento neutro } + \text{ y opuesto)} \\
-v &= (-1) \cdot v && \text{(elemento neutro } +\text{)}
\end{aligned}
$$

$\square$

Subespacios vectoriales

Definición

Sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$. diremos que $W \subset V$ es *subespacio de* V si $W \neq \emptyset$ y

(a) si para cualesquiera $w_1, w_2 \in W$, se cumple que $w_1 + w_2 \in W$ y

(b) si $\lambda \in \mathbb{K}$ y $w \in W$, entonces $\lambda w \in W$.

Observación

Si W subespacio de V.

- $0 \in W$.
- Si $w \in W$, entonces $-w \in W$.

Demostración $0 \in W$.

Como $W \neq \emptyset$, existe $w \in W$. Por la condición (b), $0 \cdot w \in W$. Ahora bien, hemos visto que $0 \cdot w = 0$, por lo tanto $0 \in W$.

Demostración $-w \in W$.

Por la condición (b), $(-1) \cdot w \in W$. Ahora bien, hemos visto que $(-1) \cdot w = -w$, por lo tanto $-w \in W$.

Observación

Sea $W \subset V$, $W \neq \emptyset$. Entonces

$$W \text{ subespacio de } V \quad \Leftrightarrow \quad u + \lambda w \in W, \ \forall\, u, w \in W, \lambda \in \mathbb{K}.$$

Demostración

$(\Rightarrow)$

- Por (b) de la definición, $\lambda w \in W$.
- Como $u \in W$ y $\lambda w \in W$, por (a) de la definición $u + \lambda w \in W$.

$(\Leftarrow)$

(a) Sean $w_1, w_2 \in W$, luego $w_1 + 1 \cdot w_2 = w_1 + w_2 \in W$.

(b) Sea $\lambda \in \mathbb{K}$ y $w \in W$, entonces $0 + \lambda w = \lambda w \in W$.

$\square$

Teorema

Sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$ y W subespacio de V. Entonces W con las operaciones suma y producto por escalares de V es un espacio vectorial.

Demostración

Para que W sea espacio vectorial sus operaciones deben satisfacer los axiomas de la definición de espacio vectorial.

$0 \in W$ y si $w \in W \Rightarrow -w \in W$.

Teniendo en cuenta estos dos hechos, y que las operaciones en V satisfacen los axiomas de la definición (y por lo tanto en W también), queda demostrado que W, con las operaciones heredadas de V, es espacio vectorial. $\square$

Ejemplos

1. Sea V un $\mathbb{K}$-espacio vectorial, entonces $\{0\}$ (que se denota 0) y V son subespacios vectoriales de V. Suelen ser llamados los *subespacios triviales* de V.

2. Sea V un $\mathbb{K}$-espacio vectorial y sea $v \in V$, entonces

$$W = \{\mu v : \mu \in \mathbb{K}\}$$

es un subespacio vectorial.

En efecto, si $\mu_1 v, \mu_2 v \in W$, con $\mu_1, \mu_2 \in \mathbb{K}$, entonces

$$\mu_1 v + \lambda \mu_2 v = (\mu_1 + \lambda \mu_2) v \in W,$$

para todo $\lambda \in \mathbb{K}$.

El subespacio W suele ser denotado $\mathbb{K}v$.

Ejemplos

3. Sea $A \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$. Si $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n$, entonces Ax denota

$$Ax := A \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}.$$

Sea

$$W = \{x \in \mathbb{K}^n : Ax = 0\}.$$

Es decir, W es el subconjunto de las soluciones del sistema $Ax = 0$.

Entonces, W es un subespacio de $\mathbb{K}^n$:sean $x, y \in W$ y $\lambda \in \mathbb{K}$, es decir $Ax = 0$, $Ay = 0$ y $\lambda \in \mathbb{K}$, entonces

$$A(x + \lambda y) = Ax + A(\lambda y) = Ax + \lambda Ay = 0 + \lambda \cdot 0 = 0.$$

Es decir

El conjunto de soluciones de un sistema de ecuaciones homogéneo es un subespacio vectorial de $\mathbb{K}^m$*,*

En particular,

- Las rectas en el plano que pasan por el origen son subespacios de $\mathbb{R}^2$.
- Los planos en el espacio que pasan por el origen son subespacios de $\mathbb{R}^3$.

Resumen

En esta clase veremos que

- más ejemplos de subespacios,
- combinaciones lineales de vectores,
- vectores generadores de subespacios, y
- haremos algunos ejemplos.

El tema de esta clase está contenido de la sección 3.2 del apunte de clase "Álgebra II / Álgebra - Notas del teórico".

Ejemplos de subespacio vectoriales

4. Sean $V = \mathbb{K}^n$ y $1 \leq j \leq n$. Definimos

$$W = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) : x_i \in \mathbb{K}\ (1 \leq i \leq n), x_j = 0\}.$$

Es decir W es el subconjunto de V de todas las n-tuplas con la coordenada j igual a 0. Por ejemplo si $j = 1$

$$W = \{(0, x_2, \ldots, x_n) : x_i \in \mathbb{K}\ (2 \leq i \leq n)\}.$$

Veamos que este último es un subespacio.
Si $(0, x_2, \ldots, x_n), (0, y_2, \ldots, y_n) \in W$ y $\lambda \in \mathbb{K}$, entonces

$$(0, x_2, \ldots, x_n) + \lambda(0, y_2, \ldots, y_n) = (0, x_2 + \lambda y_2, \ldots, x_n + \lambda y_n) \in W.$$

La demostración para $j > 1$ es completamente análoga.

5. Sea $\mathrm{Sim}_n(\mathbb{K}) = \{A \in M_n(\mathbb{K}) : A^{\mathrm{t}} = A\}$.

Es claro que: $A \in \mathrm{Sim}_n(\mathbb{K}) \Leftrightarrow [A]_{ij} = [A]_{ji}\ \forall i, j$.

Proposición

$A \in \mathrm{Sim}_n(\mathbb{K})$ *es subespacio de* $M_n(\mathbb{K})$

Demostración

Sean $A = [a_{ij}]$, $B = [b_{ij}]$ tales que $A = A^{\mathrm{t}}$ y $B = B^{\mathrm{t}}$ y sea $\lambda \in \mathbb{K}$, entonces debemos verificar que: $A + \lambda B \in \mathrm{Sim}_n(\mathbb{K})$.

$$\begin{aligned}
[(A+\lambda B)^{\mathrm{t}}]_{ij} &= [(A+\lambda B)]_{ji} && \text{(definición de transpuesta)}\\
&= [A]_{ji} + \lambda [B]_{ji} && \text{(def. de suma y prod. por escalar)}\\
&= [A]_{ij} + \lambda [B]_{ij} && (A \text{ y } B \text{ simétricas})\\
&= [A+\lambda B]_{ij} && \text{(def. de suma y prod. por escalar)}
\end{aligned}$$

Luego $A + \lambda B \in \mathrm{Sim}_n(\mathbb{K})$. □

6. El conjunto $\mathbb{R}[x] = \{P(x) : P(x) \text{ es polinomio en } \mathbb{R}\}$, es subespacio de $\mathrm{F}(\mathbb{R})$, pues $\mathbb{R}[x] \subset \mathrm{F}(\mathbb{R})$ y las operaciones de suma y producto por un escalar son cerradas en $\mathbb{R}[x]$.

7. Sea $\mathrm{C}(\mathbb{R})$ las funciones continuas de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$. Entonces, $\mathrm{C}(\mathbb{R})$ es subespacio de $\mathrm{F}(\mathbb{R})$.

   Demostración

   Sean f, g funciones continuas, es decir $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$ y $\lim_{x\to a} g(x) = g(a)$, $\forall a \in \mathbb{R}$. Sea $\lambda \in \mathbb{R}$. Por las propiedades de los límites

$$\lim_{x\to a}(f+\lambda g)(x) = \lim_{x\to a} f + \lambda \lim_{x\to a} g(x) = f(a) + \lambda g(a) = (f+\lambda g)(a)$$

$\square$

De forma análoga, el conjunto $\mathbb{R}[x]$ es subespacio de $\mathrm{C}(\mathbb{R})$.

Combinaciones lineales

Definición

Sea V espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$ y $v_1, \ldots, v_n$ vectores en V. Dado $v \in V$, diremos que v *es combinación lineal de los* $v_1, \ldots, v_n$ si existen escalares $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ en $\mathbb{K}$, tal que

$$v = \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n.$$

Ejemplo

Sean $v_1 = (1, 0)$, $v_2 = (0, 1)$ en $\mathbb{C}^2$ ¿es $v = (i, 2)$ combinación lineal de v_1, v_2? La respuesta es sí, pues

$$v = iv_1 + 2v_2.$$

Observar además que es la única combinación lineal posible, pues si

$$v = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2,$$

entonces

$$(i, 2) = (\lambda_1, 0) + (0, \lambda_2) = (\lambda_1, \lambda_2),$$

luego $\lambda_1 = i$ y $\lambda_2 = 2$.

Ejemplo

Puede ocurrir que un vector sea combinación lineal de otros vectores de varias formas diferentes. Por ejemplo, si $v = (i, 2)$ y $v_1 = (1, 0)$, $v_2 = (0, 1)$, $v_3 = (1, 1)$, tenemos que

$$\begin{aligned} v &= iv_1 + 2v_2 + 0v_3, \qquad && \text{y también} \\ v &= (i-1)v_1 + v_2 + v_3. \end{aligned}$$

Ejemplo

Sean $(0, 1, 0)$, $(0, 1, 1)$ en $\mathbb{C}^3$ ¿es $(1, 1, 0)$ combinación lineal de $(0, 1, 0)$, $(0, 1, 1)$? La respuesta es no, pues si

$$(1, 1, 0) = \lambda_1(0, 1, 0) + \lambda_2(0, 1, 1) = (0, \lambda_1, 0) + (0, \lambda_2, \lambda_2) = (0, \lambda_1 + \lambda_2, \lambda_2),$$

luego, la primera coordenada nos dice que $1 = 0$, lo cual es absurdo.

Observación (muy importante)

¿Es $v = (b_1, \dots, b_m) \in \mathbb{K}^m$ c. l. de vectores $v_1, \dots, v_n \in \mathbb{K}^m$?

Sea $v_i = (a_{1i}, \dots, a_{mi})$ $(1 \le i \le n)$, entonces $v = \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n \Rightarrow$

$$
\begin{aligned}
(b_1, \dots, b_m) &= \lambda_1(a_{11}, \dots, a_{m1}) + \cdots + \lambda_n(a_{1n}, \dots, a_{mn}) \\
&= (\lambda_1 a_{11} + \cdots + \lambda_n a_{1n}, \ \dots, \ \lambda_1 a_{m1} + \cdots + \lambda_n a_{mn}).
\end{aligned}
$$

Luego,

v es combinación lineal de los vectores $v_1, \dots, v_n \in \mathbb{K}^m$

si y sólo si tiene solución el siguiente sistema de ecuaciones:

$$
\begin{array}{ccccccccc}
a_{11}\lambda_1 & + & a_{12}\lambda_2 & + & \cdots & + & a_{1n}\lambda_n & = & b_1 \\
\vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \\
a_{m1}\lambda_1 & + & a_{m2}\lambda_2 & + & \cdots & + & a_{mn}\lambda_n & = & b_m.
\end{array}
$$

Ejemplo

Demostrar que $(5, 12, 5)$ es combinación lineal de los vectores $(1, -5, 2), (0, 1, -1), (1, 2, -1)$.

Solución

Planteamos la ecuación:

$$\begin{aligned}(5, 12, 5) &= \lambda_1(1, -5, 2) + \lambda_2(0, 1, -1) + \lambda_3(1, 2, -1)\\ &= (\lambda_1, -5\lambda_1, 2\lambda_1) + (0, \lambda_2, -\lambda_2) + (\lambda_3, 2\lambda_3, -\lambda_3)\\ &= (\lambda_1 + \lambda_3, -5\lambda_1 + \lambda_2 + 2\lambda_3, 2\lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3).\end{aligned}$$

Por consiguiente, esta ecuación se resuelve con el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned}\lambda_1 + \lambda_3 &= 5\\ -5\lambda_1 + \lambda_2 + 2\lambda_3 &= 12\\ 2\lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3 &= 5.\end{aligned}$$

Ahora bien, usando el método de Gauss

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 1 & 5 \\ -5 & 1 & 2 & 12 \\ 2 & -1 & -1 & 5 \end{array}\right] \xrightarrow[F_3-2F_1]{F_2+5F_1} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 7 & 37 \\ 0 & -1 & -3 & -5 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{F_3+F_1} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 7 & 37 \\ 0 & 0 & 4 & 32 \end{array}\right] \xrightarrow{F_3/4} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 7 & 37 \\ 0 & 0 & 1 & 8 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[F_2-7F_3]{F_1-F_3} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & -19 \\ 0 & 0 & 1 & 8 \end{array}\right].$$

Luego $\lambda_1 = -3$, $\lambda_2 = -19$ y $\lambda_3 = 8$, es decir

$$(5, 12, 5) = -3(1, -5, 2) - 19(0, 1, -1) + 8(1, 2, -1). \quad \square$$

Proposición

Sea W subespacio de V y $w_1, \ldots, w_k \in W$, entonces cualquier combinación lineal de los $w_1, \ldots, w_k$ pertenece a W.

Demostración

Debemos probar que, para cualesquiera $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{K}$, se cumple que $\lambda_1 w_1 + \cdots + \lambda_k w_k \in W$.

Ahora bien, como W es subespacio, $\lambda_i w_i \in W$ para $1 \leq i \leq k$.

Por un argumento inductivo, como W es subespacio, no es difícil probar que la suma de k términos en W es un elemento de W, por lo tanto $\lambda_1 w_1 + \cdots + \lambda_k w_k \in W$.

$\square$

Teorema

Sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$ y sean $v_1, \ldots, v_k \in V$. Entonces

$$W = \{\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_k v_k : \lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{K}\}$$

es un subespacio vectorial. Es decir, el conjunto de las combinaciones lineales de $v_1, \ldots, v_k$ es un subespacio vectorial.

Demostración

Sean $\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_k v_k$, $\mu_1 v_1 + \cdots + \mu_k v_k$ dos combinaciones lineales de $v_1, \ldots, v_k$ y $\lambda \in \mathbb{K}$, entonces

$$\begin{aligned}
(\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_k v_k) + \lambda(\mu_1 v_1 + \cdots + \mu_k v_k) \\
&= \lambda_1 v_1 + \lambda\mu_1 v_1 + \cdots + \lambda_k v_k + \lambda\mu_k v_k \\
&= (\lambda_1 + \lambda\mu_1)v_1 + \cdots + (\lambda_k + \lambda\mu_k)v_k,
\end{aligned}$$

que es una combinación lineal de $v_1, \ldots, v_k$ y por lo tanto pertenece a W. $\square$

Definición

Sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$ y sean $v_1, \ldots, v_k \in V$. Al subespacio vectorial $W = \{\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_k v_k : \lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{K}\}$ de las combinaciones lineales de $v_1, \ldots, v_k$ se lo denomina *subespacio generado por* $v_1, \ldots, v_k$ y se lo denota

$$W = \langle v_1, \ldots, v_k \rangle = \operatorname{gen}\{v_1, \ldots, v_k\} = \operatorname{span}\{v_1, \ldots, v_k\}.$$

Además, en este caso, diremos que el conjunto $S = \{v_1, \ldots, v_k\}$ *genera* al subespacio W o que los vectores $v_1, \ldots, v_k$ *generan* W.

Observación

Un caso especial, que será de suma importancia, es el caso en que consideramos todo V.

Estudiaremos en las clases que siguen conjuntos de generadores de V llamados *bases*, que tienen la propiedad de que todo vector de V se escribe de una única forma como c.l. de los generadores.

Resumen

En esta clase veremos

- como determinar un subespacio vectorial de $\mathbb{K}^n$ en forma implícita a partir de vectores que lo generan.

Además, veremos que

- la intersección de subespacios vectoriales es subespacio vectorial,
- la suma de subespacios vectoriales es subespacio vectorial,
- propiedades de las suma e intersección de subespacios, y
- dependencia lineal.

El tema de esta clase está contenido de la sección 3.3 del apunte de clase "Álgebra II / Álgebra - Notas del teórico".

Determinación "implícita" de un subespacio de $\mathbb{K}^n$

Nos interesa tener una manera de decidir rápidamente si un vector esta en el subespacio generado o no.

Una forma sencilla de verificar si un vector pertenece a un subespacio $W \subseteq \mathbb{K}^n$ es obtener la descripción del subespacio por un sistema de ecuaciones lineales homogéneas, es decir

$$W = \{v \in \mathbb{K}^n : Av = 0\},$$

o equivalentemente

$$v \in W \quad \Leftrightarrow \quad Av = 0.$$

Entonces comprobar si un vector v pertenece o no a W se reduce a calcular Av.

(Ejercicios 7 y 9 del Práctico 6)

Ejemplificaremos con los siguientes vectores en $\mathbb{R}^4$:

$$v_1 = (3,1,2,-1), \quad v_2 = (6,2,4,-2),$$
$$v_3 = (3,0,1,1), \quad v_4 = (15,3,8,-1)$$

Problema

Caracterizar mediante ecuaciones el subespacio $\langle v_1, v_2, v_3, v_4 \rangle$.

En otras palabras, queremos describir implícitamente el conjunto de los $b = (b_1, b_2, b_3, b_4) \in \mathbb{R}^4$ tales que $b \in \langle v_1, v_2, v_3, v_4 \rangle$.

O sea, los $b = (b_1, b_2, b_3, b_4) \in \mathbb{R}^4$ tales que

$$b = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 + \lambda_4 v_4 \tag{*}$$

con $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4 \in \mathbb{R}$.

Planteemos la fórmula (*) en coordenadas, pero es conveniente hacerlo con vectores columna :

$$\lambda_1 \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} + \lambda_2 \begin{bmatrix} 6 \\ 2 \\ 4 \\ -2 \end{bmatrix} + \lambda_3 \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \lambda_4 \begin{bmatrix} 15 \\ 3 \\ 8 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{bmatrix}$$

Luego

$$\begin{bmatrix} 3\lambda_1 + 6\lambda_2 + 3\lambda_3 + 15\lambda_4 \\ \lambda_1 + 2\lambda_2 + 3\lambda_4 \\ 2\lambda_1 + 4\lambda_2 + \lambda_3 + 8\lambda_4 \\ -x - 2\lambda_2 + \lambda_3 - \lambda_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{bmatrix}$$

En forma de producto de matrices podemos reescribirla asi:

$$\begin{bmatrix} 3 & 6 & 3 & 15 \\ 1 & 2 & 0 & 3 \\ 2 & 4 & 1 & 8 \\ -1 & -2 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ \lambda_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{bmatrix}$$

En forma de sistema de ecuaciones esto es:

$$\begin{cases} 3\lambda_1 + 6\lambda_2 + 3\lambda_3 + 15\lambda_4 = b_1 \\ \lambda_1 + 2\lambda_2 + 3\lambda_4 = b_2 \\ 2\lambda_1 + 4\lambda_2 + \lambda_3 + 8\lambda_4 = b_3 \\ -x - 2\lambda_2 + \lambda_3 - \lambda_4 = b_4 \end{cases} \qquad (**)$$

Conclusión

$b \in \langle v_1, v_2, v_3, v_4 \rangle$ si y sólo si el sistema anterior tiene solución.

El sistema (**) tiene solución si el siguiente sistema la tiene (es cambio de notación solamente)

$$\begin{cases} 3x + 6y + 3z + 15w = b_1 \\ x + 2y + 3w = b_2 \\ 2x + 4y + z + 8w = b_3 \\ -x - 2y + z - w = b_4 \end{cases}$$

Este es exactamente el Ejercicio 2 de la Tarea 2. Entonces la respuesta a nuestro problema es

Respuesta

$$\langle v_1, v_2, v_3, v_4 \rangle = \{(b_1, b_2, b_3, b_4) \in \mathbb{R}^4 \mid b_1 + 3b_2 - 3b_3 = 0, b_1 - 6b_2 - 3b_4 = 0\}.$$

Notemos que podemos repetir todo el razonamiento anterior para cualesquiera vectores $v_1, \ldots, v_k$ en cualquier $\mathbb{R}^n$ y cualquier $b \in \mathbb{R}^n$.

Sólo hay que tener presente que multiplicar una matriz por un vector columna es lo mismo que hacer una combinación lineal de las columnas de la matriz:

Es decir, si

$$A = \begin{bmatrix} | & | & & | \\ v_1 & v_2 & \cdots & v_k \\ | & | & & | \end{bmatrix},$$

entonces

$$A \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_k \end{bmatrix} = \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_k v_k$$

Conclusión

Sean $v_1, \ldots, v_k \in \mathbb{K}^n$ y $A \in \mathbb{K}^{n \times k}$ la matriz cuyas columnas son los vectores $v_1, \ldots, v_k$, es decir

$$A = \begin{bmatrix} | & | & & | \\ v_1 & v_2 & \cdots & v_k \\ | & | & & | \end{bmatrix}.$$

Entonces

- El subespacio vectorial $\langle v_1, \ldots, v_k \rangle$ es igual al conjunto de los $b \in \mathbb{K}^n$ para los cuales el sistema $AX = b$ tiene solución.
- Las ecuaciones vienen dadas por las filas nulas de la MERF equivalente a A. En particular, si no tiene filas nulas entonces $\langle v_1, \ldots, v_k \rangle = \mathbb{K}^n$ porque el sistema $AX = b$ siempre tiene solución.

Intersección y suma de subespacios vectoriales

Teorema

Sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$. Entonces la intersección de subespacios vectoriales es un subespacio vectorial.

Demostración

Veamos el caso de la intersección de dos subespacios.

Debemos probar que si $W_1,\ W_2$ subespacios $\Rightarrow W_1 \cap W_2$ es subespacio.

Observemos: $\quad w \in W_1 \cap W_2 \quad \Leftrightarrow \quad w \in W_1 \ \wedge \ w \in W_2.$

$$
\begin{aligned}
\text{Sea } \lambda \in \mathbb{K}.\ u, v \in W_1 \cap W_2 \quad &\Rightarrow \quad u, v \in W_1 \ \wedge \ u, v \in W_2 \\
&\Rightarrow \quad u + \lambda v \in W_1 \ \wedge \ u + \lambda v \in W_2 \\
&\Rightarrow \quad u + \lambda v \in W_1 \cap W_2.
\end{aligned}
$$

Luego $W_1 \cap W_2$ es subespacio. □

Ejemplo

Sean

$$W_1 = \{(x, y, z) : -3x + y + 2z = 0\}$$

y

$$W_2 = \{(x, y, z) : x - y + 2z = 0\}.$$

Encontrar generadores de $W_1 \cap W_2$.

Solución

Es claro que

$$W_1 \cap W_2 = \{(x, y, z) : -3x + y + 2z = 0 \ \wedge \ x - y + 2z = 0\}.$$

Por lo tanto debemos resolver el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} -3x + y + 2z = 0 \\ x - y + 2z = 0 \end{cases}$$

Reduzcamos la matriz del sistema a una MRF:

$$\begin{bmatrix} -3 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{F_1+3F_2} \begin{bmatrix} 0 & -2 & 8 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{F_1/(-2)} \begin{bmatrix} 0 & 1 & -4 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{F_2+F_1} \begin{bmatrix} 0 & 1 & -4 \\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

Por lo tanto, $x_2 - 4x_3 = 0$ y $x_1 - 2x_3 = 0$, es decir $x_2 = 4x_3$ y $x_1 = 2x_3$.

Luego,

$$W_1 \cap W_2 = \{(2t, 4t, t) : \mathrm{t} \in \mathbb{R}\} = \{t(2, 4, 1) : \mathrm{t} \in \mathbb{R}\}.$$

La respuesta es entonces: $(2, 4, 1)$ es generador $W_1 \cap W_2$.

$\square$

Teorema

Sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$ y sean $v_1, \ldots, v_k \in V$. Entonces, la intersección de todos los subespacios vectoriales que contienen a $v_1, \ldots, v_k$ es igual a $\langle v_1, \ldots, v_k \rangle$.

Demostración

Denotemos

- $U = \bigcap$ de todos los subespacios vectoriales $\supseteq \{v_1, \ldots, v_k\}$.

Probaremos que $U = \langle v_1, \ldots, v_k \rangle$ con la doble inclusión, es decir probando que

$$U \subseteq \langle v_1, \ldots, v_k \rangle \quad \text{y} \quad \langle v_1, \ldots, v_k \rangle \subseteq U.$$

$(U \subseteq \langle v_1, ..., v_k \rangle)$

Primero, $U \subseteq \langle v_1, ..., v_k \rangle$ vale puesto que $\langle v_1, ..., v_k \rangle$ es un subespacio que contiene a $\{v_1, ..., v_k\}$.

$(\langle v_1, \dots, v_k \rangle \subseteq U)$

U es intersección de subespacios $\Rightarrow$ (teor. p. 51) U es un subespacio.

Luego, $\{v_1, ..., v_k\} \subset U \Rightarrow \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_k v_k \in U, \quad \forall \lambda_1, ..., \lambda_k \in \mathbb{K}$.

Por lo tanto $\langle v_1, ..., v_k \rangle \subseteq U$. $\square$

Observación

Si V es un $\mathbb{K}$-espacio vectorial, S y T subespacios de V.

Entonces $S \cup T$ *no es necesariamente un subespacio* de V.

En efecto, consideremos en $\mathbb{R}^2$ los subespacios

$$S = \mathbb{R}(1,0) \quad \text{y } T = \mathbb{R}(0,1).$$

- $(1,0) \in S$ y $(0,1) \in T \Rightarrow (1,0),(0,1) \in S \cup T$.
- Ahora bien $(1,0)+(0,1) = (1,1) \notin S \cup T$, puesto que $(1,1) \notin S$ y $(1,1) \notin T$.

Definición

Sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$ y sean $S_1, \ldots, S_k$ subconjuntos de V. definimos

$$S_1 + \cdots + S_k := \{s_1 + \cdots + s_k : s_i \in S_i, 1 \leq i \leq k\},$$

el conjunto *suma de los* $S_1, \ldots, S_k$.

Teorema

Sea V *un espacio vectorial sobre* $\mathbb{K}$ *y sean* $W_1, \ldots, W_k$ *subespacios de* V. *Entonces* $W = W_1 + \cdots + W_k$ *es un subespacio de* V.

Demostración

Ejercicio (ver apunte). $\square$

Proposición

Sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$ y sean $v_1, \dots, v_r$ elementos de de V. Entonces

$$\langle v_1, \dots, v_r \rangle = \langle v_1 \rangle + \cdots + \langle v_r \rangle.$$

Demostración

Probemos el resultado viendo que los dos conjuntos se incluyen mutuamente.
($\subseteq$) Sea $w \in \langle v_1, \dots, v_r \rangle$, luego $w = \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_r v_r$. Como $\lambda_i v_i \in \langle v_i \rangle$, $1 \leq i \leq r$, tenemos que $w \in \langle v_1 \rangle + \cdots + \langle v_r \rangle$. En consecuencia, $\langle v_1, \dots, v_r \rangle \subseteq \langle v_1 \rangle + \cdots + \langle v_r \rangle$.
($\supseteq$) Si $w \in \langle v_1 \rangle + \cdots + \langle v_r \rangle$, entonces $w = w_1 + \cdots + w_r$ con $w_i \in \langle v_i \rangle$ para todo i. Por lo tanto, $w_i = \lambda_i v_i$ para algún $\lambda_i \in \mathbb{K}$ y $w = \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_r v_r \in \langle v_1, \dots, v_r \rangle$. En consecuencia, $\langle v_1 \rangle + \cdots + \langle v_r \rangle \subseteq \langle v_1, \dots, v_r \rangle$.

Dependencia lineal

Definición

Sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$. Un subconjunto S de V se dice *linealmente dependiente* o simplemente, *LD* o *dependiente*, si existen vectores distintos $v_1, \ldots, v_n \in S$ y escalares $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ de $\mathbb{K}$, no todos nulos, tales que

$$\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n = 0.$$

Observación

Si el conjunto $S = \{v_1, \ldots, v_n\}$, podemos reinterpretar la definición: $v_1, \ldots, v_n$ son *linealmente dependientes* o *LD* si existen escalares $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ de $\mathbb{K}$, algún $\lambda_i \neq 0$, tales que

$$\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n = 0.$$

- En la clase pasada vimos el concepto de que las combinaciones lineales de un conjunto de vectores generan un subespacio vectorial.
- Dado un subespacio vectorial: ¿Cuál es el número mínimo de vectores que generan el subespacio?
- En general, dado un espacio vectorial ¿Cuál es el número mínimo de vectores que generan el espacio y que propiedades tienen esos generadores?

Estas preguntas serán respondidas en la clase siguiente, pero ahora veremos algunas herramientas que nos permitan prepararnos para estos resultados.

Proposición

Sea V un espacio vectorial y $v_1, ..., v_n \in V$. Entonces $v_1, ..., v_n$ son LD si y solo si alguno de ellos es combinación lineal de los otros.

Demostración

($\Rightarrow$) Supongamos que son LD. Entonces $\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n = 0$ donde algún escalar es no nulo. Digamos que tal escalar es λ_i. Podemos entonces despejar v_i, es decir escribirlo como combinación lineal de los otros:

$$v_i = -\frac{\lambda_1}{\lambda_i} v_1 - \cdots - \frac{\lambda_{i-1}}{\lambda_{i-1}} v_{i-1} - \frac{\lambda_{i+1}}{\lambda_{i+1}} v_{i+1} - \cdots - \frac{\lambda_n}{\lambda_i} v_n$$

($\Leftarrow$) Supongamos que v_i es combinación lineal de los otros, es decir

$$\begin{aligned} v_i &= \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n \lambda_n v_n \\ \Rightarrow 0 &= \lambda_1 v_1 + \cdots - v_i + \cdots + \lambda_n \lambda_i v_n \end{aligned}$$

como $-1 \neq 0$ esta multiplicando a v_i, la última igualdad dice que los vectores son LD. $\square$

Resumen

En esta clase veremos que todo espacio vectorial tiene una base, que es un conjunto de generadores mínimo. En el caso que este conjunto sea finito, todo otro conjunto de generadores mínimo tendrá el mismo número de elementos, y este número será llamado *dimensión*.

Los temas de la clase se ordenan de la siguiente forma:

- Definición de independencia lineal.
- Definición de base (un conjunto linealmente independiente que genera el espacio).
- Ejemplos de bases de espacios vectoriales.
- Propiedades de las bases y dimensión.

El tema de esta clase está contenido de la sección 3.3 y 3.4 del apunte de clase "Álgebra II / Álgebra - Notas del teórico".

Independencia lineal

Definición

Sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$. Un subconjunto S de V se dice *linealmente independiente* (o simplemente, *LI* o *independiente*) si no es linealmente dependiente.

Observación

Si el conjunto S tiene solo un número finito de vectores $v_1, \ldots, v_n$, se dice, a veces, que los $v_1, \ldots, v_n$ son *independientes* o *LI*, en vez de decir que S es independiente.

Observación

Sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$ y $v_1, \ldots, v_n \in V$.

$v_1, \ldots, v_n$ son LD $\Leftrightarrow$ $\exists \lambda_i$'s $\in \mathbb{K}$, alguno no nulo, t.q. $\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n = 0$.

Observación

Por definición, un conjunto $v_1, \ldots, v_n$ es LI si se cumple:

(a) $\forall \lambda_i \in \mathbb{K}$ tal que $\lambda_j \neq 0$ para algún $j \Rightarrow \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n \neq 0$,
o bien

(b) si $\lambda_i \in \mathbb{K}$ tal que $\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n = 0 \Rightarrow 0 = \lambda_1 = \cdots = \lambda_n$

El enunciado (a) se deduce negando la definición de linealmente dependiente.

El enunciado (b) es el contrarrecíproco de (a).

Ejemplo

En $\mathbb{R}^3$ los vectores $(1,-1,1)$ y $(-1,1,1)$ son LI, pues si $\lambda_1(1,-1,1)+\lambda_2(-1,1,1)=0$, entonces $0=(\lambda_1,-\lambda_1,\lambda_1)+(-\lambda_2,\lambda_2,\lambda_2)=(\lambda_1-\lambda_2,-\lambda_1+\lambda_2,\lambda_1+\lambda_2)$, y esto es cierto si

$$\begin{array}{rcl} \lambda_1-\lambda_2 & = & 0 \\ -\lambda_1+\lambda_2 & = & 0 \\ \lambda_1+\lambda_2 & = & 0 \end{array}.$$

Luego $\lambda_1=\lambda_2$ y $\lambda_1=-\lambda_2$, por lo tanto $\lambda_1=\lambda_2=0$. Es decir, hemos visto que

$$\lambda_1(1,-1,1)+\lambda_2(-1,1,1)=0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_1=\lambda_2=0,$$

y, por lo tanto, $(1,-1,1)$ y $(-1,1,1)$ son LI. $\square$

Ejemplo

Sea $\mathbb{K}$ cuerpo. En $\mathbb{K}^3$ los vectores

$$\begin{aligned} v_1 &= (\ \ 3,\ 0, -3) \\ v_2 &= (-1,\ 1,\ \ 2) \\ v_3 &= (\ \ 4,\ 2, -2) \\ v_4 &= (\ \ 2,\ 1,\ \ 1) \end{aligned}$$

son linealmente dependientes, pues

$$2v_1 + 2v_2 - v_3 + 0.v_4 = 0.$$

Por otro lado, los vectores

$$\begin{aligned} e_1 &= (1, 0, 0) \\ e_2 &= (0, 1, 0) \\ e_3 &= (0, 0, 1) \end{aligned}$$

son linealmente independientes. □

Las siguientes afirmaciones son consecuencias casi inmediatas de la definición.

1. Todo conjunto que contiene un conjunto linealmente dependiente es linealmente dependiente.
   Dem. En el conjunto "más chico" hay una c. l. no trivial que lo anula, luego, en el "más grande" también. □
2. Todo subconjunto de un conjunto linealmente independiente es linealmente independiente.
   Dem. Si el subconjnuto tiene una c. l. no trivial que lo anula, el conjunto también. □
3. Todo conjunto que contiene el vector 0 es linealmente dependiente.
   Dem. En efecto, $1.0 = 0$. □

Observación

En general, en $\mathbb{K}^m$, si queremos determinar si $v_1, \ldots, v_n$ es LI, planteamos la ecuación

$$\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n = (0, \ldots, 0).$$

Viendo esta ecuación coordenada a coordenada, es equivalente a un sistema de m ecuaciones lineales con n incógnitas (que son $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$).

Si la única solución es la trivial entonces $v_1, \ldots, v_n$ es LI.

Si hay alguna solución no trivial, entonces $v_1, \ldots, v_n$ es LD.

Definición

Sea V un espacio vectorial. Una *base* de V es un conjunto $\mathcal{B} \subseteq V$ tal que

1. $\mathcal{B}$ genera a V, y
2. $\mathcal{B}$ es LI.

El espacio V es de *dimensión finita* si tiene una base finita, es decir con un número finito de elementos.

Ejemplo: base canónica de $\mathbb{K}^n$

Sea el espacio vectorial $\mathbb{K}^n$ y sean

$$\begin{aligned} e_1 &= (1,0,0,\ldots,0) \\ e_2 &= (0,1,0,\ldots,0) \\ &\qquad \cdots\cdots \\ e_n &= (0,0,0,\ldots,1) \end{aligned}$$

(e_i es el vector con todas sus coordenadas iguales a cero, excepto la coordenada i que vale 1). Entonces veamos que $e_1,\ldots,e_n$ es una base de $\mathbb{K}^n$.

1. Si $(x_1,\ldots,x_n) \in \mathbb{K}^n$, entonces

$$(x_1,\ldots,x_n) = x_1 e_1 + \cdots + x_n e_n.$$

Por lo tanto, $e_1,\ldots,e_n$ genera a $\mathbb{K}^n$.

2. Si

$$x_1 e_1 + \cdots + x_n e_n = 0,$$

entonces

$$\begin{aligned}(0, \ldots, 0) &= x_1(1, 0, \ldots, 0) + x_2(0, 1, \ldots, 0) + \cdots + x_n(0, 0, \ldots, 1)\\ &= (x_1, 0, \ldots, 0) + (0, x_2, \ldots, 0) + \cdots + (0, 0, \ldots, x_n)\\ &= (x_1, x_2, \ldots, x_n).\end{aligned}$$

Luego, $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$.
Por lo tanto $e_1, \ldots, e_n$ es LI.

Para $1 \leq i \leq n$, al vector e_i se lo denomina el *i-ésimo vector canónico* y a la base $\mathcal{B}_n = \{e_1, \ldots, e_n\}$ se la denomina la *base canónica* de $\mathbb{K}^n$. $\square$

Ejemplo: vectores columna de una matriz invertible

Sea P una matriz $n \times n$ invertible con elementos en el cuerpo $\mathbb{K}$. Sean $C_1, \ldots, C_n$ son los vectores columna de P.
Entonces, $\mathcal{B} = \{C_1, \ldots, C_n\}$, es una base de $\mathbb{K}^n$.

Demostración

Si $X = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}^n$, lo podemos ver como vector columna y

$$PX = x_1 C_1 + \cdots + x_n C_n.$$

$PX = 0$ tiene solo solución $X = 0 \Rightarrow \mathcal{B} = \{C_1, \ldots, C_n\}$ es LI.

¿Por qué generan $\mathbb{K}^n$? Sea $Y \in \mathbb{K}^n$, si $X = P^{-1}Y$, entonces $Y = PX$, esto es

$$Y = x_1 C_1 + \cdots + x_n C_n.$$

Así, $\{C_1, \ldots, C_n\}$ es una base de $\mathbb{K}^n$. $\square$

Ejemplo: polinomios de grado $\leq n-1$

Sea $\mathbb{K}_n[x]$ el conjunto de polinomios de grado menor que n con coeficientes en $\mathbb{K}$:

$$\mathbb{K}_n[x] = \left\{a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_{n-1}x^{n-1} : a_0, \ldots, a_{n-1} \in \mathbb{K}\right\}.$$

Entonces $1, x, x^2, \ldots, x^{n-1}$ es una base de $\mathbb{K}_n[x]$.

Es claro que los $1, x, x^2, \ldots, x^{n-1}$ generan $\mathbb{K}_n[x]$.

Por otro lado, si $\lambda_0 + \lambda_1x + \lambda_2x^2 + \cdots + \lambda_{n-1}x^{n-1} = 0$, tenemos que $\lambda_0 = \lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_{n-1} = 0$.

Ejemplo: polinomios (base infinita)

Sea $\mathbb{K}[x]$ el conjunto de polinomios con coeficientes en $\mathbb{K}$:

$$\mathbb{K}[x] = \left\{a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n : n \in \mathbb{N}, a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{K}\right\}.$$

Entonces $\mathcal{B} = \{1, x, x^2, \ldots, x^i, \ldots\} = \{x^i : i \in \mathbb{N}_0\}$ es una base de $\mathbb{K}[x]$.

Es claro que los x^i generan $\mathbb{K}[x]$.

Por otro lado, supongamos $\mathcal{B}$ se LD, luego existe un subconjunto *finito* S de $\mathcal{B}$ con el cual puedo hacer una c.l. no trivial que de 0.

Sea n tal que $S \subset \{1, x, x^2, \ldots, x^n\}$. Entonces existen λ_i no todos nulos tal que $\lambda_0 + \lambda_1 x + \lambda_2 x^2 + \cdots + \lambda_{n-1} x^n = 0$. Absurdo.

Por lo tanto $\mathcal{B}$ es base.

Ejemplo: base canónica de $M_{m\times n}(\mathbb{K})$

Sean $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$ y $E_{ij} \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$ definida por

$$[E_{ij}]_{kl} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = k \text{ y } j = l, \\ 0 & \text{otro caso.} \end{cases}$$

Es decir E_{ij} es la matriz cuyas entradas son todas iguales a 0, excepto la entrada ij que vale 1. En el caso 2×2 tenemos la matrices

$$E_{11} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad E_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad E_{21} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad E_{22} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Volviendo al caso general,

$$\mathcal{B} = \{E_{ij} : 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n\}$$

(son mn vectores) es una base de $M_{m\times n}(\mathbb{K})$ y se la denomina la *base canónica* de $M_{m\times n}(\mathbb{K})$.

La demostración es análoga al caso $\mathbb{K}^n$.

Si S es un conjunto finito denotemos $|S|$ al *cardinal* de S es decir, la cantidad de elementos de S.

Preguntas

- Dado V espacio vectorial ¿existe una base de V?
  Respuesta: sí. La respuesta la da la teoría de conjuntos (Lema de Zorn).
- Sea V espacio vectorial y $\mathcal{B}$, $\mathcal{B}'$ bases finitas de V ¿Es $|\mathcal{B}| = |\mathcal{B}'|$?
  Respuesta: sí. Es lo que veremos más adelante.

¿Todo espacio vectorial tiene una base "explícita"?

- Vimos en los ejemplos de las páginas anteriores bases de distintos espacios vectoriales.
- Vimos que hay bases finitas y bases infinitas, pero todas la bases que consideramos eran explícitas.
- Por el Lema de Zorn existe una base $\mathcal{B}$ de $F(\mathbb{R}) = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\}$.
- ¿Se puede dar en forma relativamente explícita una base de $F(\mathbb{R})$?
- Respuesta: NO.

Teorema

Sea V un espacio vectorial generado por un conjunto finito de vectores $w_1, \ldots, w_m$. Entonces

$$S \subset V \text{ es } LI \ \Rightarrow |S| \leq m.$$

Demostración

Para demostrar este teorema es suficiente probar el contrarrecíproco del enunciado, es decir:

$$\text{si } |S| > m \Rightarrow S \text{ es LD},$$

Sea $S = \{v_1, \ldots, v_n\}$ con $n > m$.

Como $w_1, \ldots, w_m$ generan V, existen escalares a_{ij} en $\mathbb{K}$ tales que

$$v_j = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} w_i, \qquad (1 \leq j \leq n).$$

Probaremos ahora que existen $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{K}$ no todos nulos, tal que $x_1 v_1 + \cdots + x_n v_n = 0$ (S es LD).

Ahora bien, para cualesquiera $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{K}$ tenemos

$$\begin{aligned} x_1 v_1 + \cdots + x_n v_n &= \sum_{j=1}^{n} x_j v_j \\ &= \sum_{j=1}^{n} x_j \sum_{i=1}^{m} a_{ij} w_i \\ &= \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} (x_j a_{ij}) w_i \\ &= \sum_{i=1}^{m} (\sum_{j=1}^{n} x_j a_{ij}) w_i. \end{aligned}$$

Es decir, para cualesquiera $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{K}$ tenemos

$$x_1 v_1 + \cdots + x_n v_n = \sum_{i=1}^{m} \underbrace{(\sum_{j=1}^{n} x_j a_{ij})}_{c_i} w_i. \qquad (*)$$

Si cada coeficiente c_i es nulo $\Rightarrow x_1 v_1 + \cdots + x_n v_n = 0$.

Vamos a ver ahora que $\exists\ x_1, \dots, x_n$ no todos nulos tal $c_i = 0, \forall i$.

Esto se debe a que el sistema de ecuaciones

$$\sum_{j=1}^{n} x_j a_{ij} = 0, \qquad (1 \leq i \leq m)$$

tiene m ecuaciones y n incógnitas con $n > m \Rightarrow$ existen soluciones no triviales (quedan variable libres).

Es decir, existen escalares $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{K}$ no todos nulos, tal que

$$c_i = \sum_{j=1}^{n} x_j a_{ij} = 0, \quad (1 \leq i \leq m)$$

y, por $(*)$, tenemos que

$$x_1 v_1 + \cdots + x_n v_n = 0.$$

Esto quiere decir que los $v_1, \ldots, v_n$ son LD. $\square$

Resumen

Dado V espacio vectorial de dimensión finita, veremos

- la definición de dimensión,
- todo subconjunto LI puede se completado a una base,
- de todo subconjunto de generadores se puede extraer una base.

Veremos también la forma de encontrar bases de subespacios de $\mathbb{K}^n$. Se hará usando operaciones elementales de fila.

El tema de esta clase está contenido de la sección 3.3 y 3.4 del apunte de clase "Álgebra II / Álgebra - Notas del teórico".

Recordemos este importante resultado de la clase anterior:

Sea V un espacio vectorial y $T \subset V$, finito tal que $\langle T \rangle = V$. Sea $S \subset V$.

Entonces

$$\langle T \rangle = V, \quad S \text{ es LI } \Rightarrow |S| \leq |T|. \tag{P1}$$

El contrarrecíproco también nos resultará de utilidad

$$\langle T \rangle = V, \quad |S| > |T| \Rightarrow S \text{ es LD.} \tag{P2}$$

Corolario

Si V es un espacio vectorial de dimensión finita, entonces dos bases cualesquiera de V tienen el mismo número de elementos.

Demostración

V es de dimensión finita $\Rightarrow \exists\, \mathcal{B}$ base con $|\mathcal{B}| < \infty$.

Sea $\mathcal{B}'$ otra base de V.

Como $\mathcal{B}$ es base $\Rightarrow \langle \mathcal{B} \rangle = V$ y $\mathcal{B}'$ es LI $\overset{(P1)}{\Rightarrow} |\mathcal{B}'| \leq |\mathcal{B}|$.

Como $\mathcal{B}'$ es base $\Rightarrow \langle \mathcal{B}' \rangle = V$ y $\mathcal{B}$ es LI $\overset{(P1)}{\Rightarrow} |\mathcal{B}| \leq |\mathcal{B}'|$.

En consecuencia $|\mathcal{B}| = |\mathcal{B}'|$. $\square$

Hemos demostrado: si V es un espacio vectorial de dimensión finita y $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ dos bases de V, entonces $|\mathcal{B}| = |\mathcal{B}'|$.

Esto nos permite hacer la siguiente definición.

Definición

Sea V espacio vectorial de dimensión finita.

Diremos que n es *la dimensión de* V y denotaremos $\dim V = n$, si existe una base de V de n vectores.

Si $V = \{0\}$, entonces definimos $\dim V = 0$.

Ejemplos

Sean $m, n \in \mathbb{N}$.

1. $\dim \mathbb{K}^n = n$, pues la base canónica tiene n elementos.
2. $\dim M_{m\times n}(\mathbb{K}) = mn$, pues la base canónica de $M_{m\times n}(\mathbb{K})$ tiene mn elementos.
3. $\dim \mathbb{K}_n[x] = n$, pues $1, x, x^2, \ldots, x^{n-1}$ es una base.

Corolario

Sea V un espacio vectorial de dimensión finita y sea $n = \dim V$. Entonces

1. *$S \subset V$ y $|S| > n \Rightarrow S$ es LD.*
2. *$S \subset V$ y $|S| < n \Rightarrow \langle S \rangle \subsetneqq V$.*

Demostración

Sea $\mathcal{B}$ base de V.

1. Como $\mathcal{B}$ es base $\Rightarrow \langle \mathcal{B} \rangle = V$ y $|S| > |\mathcal{B}| \overset{(P2)}{\Rightarrow} S$ es LD.

2. Supongamos que $\langle S \rangle = V$.

   Como $\mathcal{B}$ es base $\Rightarrow \mathcal{B}$ es LI.

   $\langle S \rangle = V$ y $\mathcal{B}$ es LI $\overset{(P1)}{\Rightarrow} n = |\mathcal{B}| \leq |S|$. Absurdo.

$\square$

Lema

Sea V espacio vectorial.

- *Sea $S \subset V$ y S es LI.*
- *Sea w tal que $w \notin \langle S \rangle$.*

Entonces $S \cup \{w\}$ es LI.

Demostración

Sean $v_1, \dots, v_n$ vectores distintos de S y $\lambda_i, \lambda \in \mathbb{K}$ tales que

$$\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n + \lambda w = 0. \tag{1}$$

Debemos probar que $\lambda_i = 0$, $1 \leq i \leq n$, y $\lambda = 0$.

Supongamos que $\lambda \neq 0$, entonces podemos dividir la ecuación por λ y haciendo pasaje de término obtenemos

$$w = \left(-\frac{\lambda_1}{\lambda}\right) v_1 + \cdots \left(-\frac{\lambda_n}{\lambda}\right) v_n.$$

Luego w estaría en el subespacio generado por S, lo cual contradice la hipótesis.

Por lo tanto $\lambda = 0$ y, en consecuencia

$$\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n = 0.$$

Como S es un conjunto linealmente independiente, todo $\lambda_i = 0$.

$\square$

Teorema

Sea V espacio vectorial de dimensión finita n y S_0 un subconjunto LI de V. Entonces S_0 es finito y existen $w_1, \ldots, w_m$ vectores en V tal que $S_0 \cup \{w_1, \ldots, w_m\}$ es una base de V.

Corolario

Sea W un subespacio de un espacio vectorial con de dimensión finita n y S_0 un subconjunto LI de W. Entonces, S_0 se puede completar a una base de W.

Corolario

Sea V espacio vectorial de dimensión finita y $V \neq \{0\}$, entonces $\dim V > 0$.

Corolario

Si W es un subespacio propio de un espacio vectorial de dimensión finita V, entonces W es de dimensión finita y $\dim W < \dim V$.

Demostración

Si $W = \{0\}$, entonces $\dim W = 0$, como $W \subsetneq V$, tenemos que V es no nulo y por lo tanto $\dim W = 0 < \dim V$.

Si $W \neq \{0\}$, sea $\mathcal{B}'$ base de W.
Si $\langle \mathcal{B}' \rangle = V$, entonces $W = V$, absurdo. Luego $\langle \mathcal{B}' \rangle \neq V \Rightarrow$ existen $w_1, \ldots, w_r$ que completan a una base de $V \Rightarrow$
$\dim(W) = \dim(V) - r < \dim(V)$.

$\square$

Hemos visto que si V es un espacio de dimensión finita, entonces todo conjunto LI se puede extender a una base. También vale:

Teorema

Sea $V \neq 0$ *espacio vectorial y* S *un conjunto finito de generadores de* V*, entonces existe un subconjunto* $\mathcal{B}$ *de* S *que es una base.*

El siguiente resultado relaciona dimensión con suma e intersección de subespacios.

Teorema

Si W_1*, y* W_2 *son subespacios de dimensión finita de un espacio vectorial, entonces* $W_1 + W_2$ *es de dimensión finita y*

$$\dim(W_1 + W_2) = \dim W_1 + \dim W_2 - \dim(W_1 \cap W_2).$$

Dimensiones de subespacios

- Si A matriz $m \times n$, en donces $W = \{x : Ax = 0\}$ es un subespacio.
- ¿Cuál es la dimensión de W? ¿Qué relación tiene con R, la MRF equivalente a A?
- Veremos que si r es la cantidad de filas no nulas de R, entonces $\dim(W) = n - r$.

Ejemplo

Encontrar una base del subespacio

$$W = \left\{ (x, y, z, w) \in \mathbb{R} : \quad \begin{array}{rcl} x - y - 3z + w & = & 0 \\ y + 5z + 3w & = & 0 \end{array} \right\}.$$

Solución

W está definido implícitamente y usando el método de Gauss podemos describirlo paramétricamente, pues:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 5 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{F_1+F_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 5 & 3 \end{bmatrix}.$$

Por lo tanto, el sistema de ecuaciones que define W es equivalente a

$$\begin{aligned} x + 2z + 4w &= 0 \\ y + 5z + 3w &= 0, \end{aligned}$$

es decir

$$\begin{aligned} x &= -2z - 4w \\ y &= -5z - 3w, \end{aligned}$$

y entonces

$$\begin{aligned} W &= \{(-2z - 4w, -5z - 3w, z, w) : z, w \in \mathbb{R}\} \\ &= \{(-2, -5, 1, 0)z + (-4, -3, 0, 1)w : z, w \in \mathbb{R}\} \\ &= \langle (-2, -5, 1, 0), (-4, -3, 0, 1) \rangle. \end{aligned}$$

Concluimos entonces que $(-2, -5, 1, 0), (-4, -3, 0, 1)$ es una base de W y, por lo tanto, su dimensión es 2. $\square$

Proposición

Sea A matriz $m \times n$ y sea $W = \{x : Ax = 0\}$.

Sea R una MRF equivalentes por filas a A y sea r la cantidad de filas no nulas de R.

Entonces $\dim(W) = n - r$.

Demostración

Es posible hacer este demostración con las herramientas actuales. Sin embargo, haremos una demostración mucho más conceptual de este hecho cuando veamos transformaciones lineales. □

Definición

Sea $A = [a_{ij}] \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$.

- El *vector fila i* es el vector $(a_{i1}, \ldots, a_{in}) \in \mathbb{K}^n$.
- El *espacio fila* de A es el subespacio de $\mathbb{K}^n$ generado por los m vectores fila de A.
- El vector columna j es el vector $(a_{1j}, \ldots, a_{mj}) \in \mathbb{K}^m$.
- El *espacio columna* de A es el subespacio de $\mathbb{K}^m$ generado por los n vectores columna de A

Ejemplo

Sea

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

El vector fila 1 es $(1, 2, 0, 3, 0)$, el vector columna 4 es $(3, 4, 0)$, etc.

Sea W el espacio fila de A. entonces

$$W = \langle (1, 2, 0, 3, 0), (0, 0, 1, 4, 0), (0, 0, 0, 0, 1) \rangle$$

Sea U el espacio columna de A. Entonces:

$$U = \langle (1, 0, 0), (2, 0, 0), (0, 1, 0), (3, 4, 0), (0, 0, 1) \rangle = \mathbb{R}^3.$$

Teorema

Sean A matriz $m \times n$ con coeficientes en $\mathbb{K}$, P matriz $m \times m$ invertible y $B = PA$. Entonces el el espacio fila de A es igual al espacio fila de B.

Demostración

Sea W_1 espacio fila de A y W_2 espacio fila de B.

Sea $A = [a_{ij}]$, $P = [p_{ij}]$ y $B = [b_{ij}]$. Como $B = PA$, tenemos que la fila i de B es

$$\begin{aligned}
(b_{i1}, \ldots, b_{in}) &= (F_i(P).C_1(A), \ldots, F_i(P).C_n(A)) \\
&= (\sum_{j=1}^{m} p_{ij} a_{j1}, \ldots, \sum_{j=1}^{m} p_{ij} a_{jn}) \\
&= \sum_{j=1}^{m} p_{ij}(a_{j1}, \ldots, a_{jn}). \qquad (*)
\end{aligned}$$

- por (*) cada vector fila de B se puede obtener como combinación lineal de los vectores fila de A.
- Por lo tanto el espacio fila de B está incluido en el espacio fila de A: $W_2 \subset W_1$.
- P invertible $\Rightarrow \exists P^{-1}$.
- $P^{-1}B = P^{-1}PA = A$.
- Un razonamiento análogo al (*) de la página anterior $\Rightarrow$ espacio fila de A está incluido en el espacio fila de B: $W_1 \subset W_2$.

$$W_2 \subset W_1 \quad \wedge \quad W_1 \subset W_2 \qquad \Rightarrow \qquad W_1 = W_2. \quad \square$$

Corolario

Sean A matriz $m \times n$ y R la MRF equivalente por filas a A. Entonces,

1. *el espacio fila de A es igual al espacio fila de R,*
2. *las filas no nulas de R forman una base del espacio fila de A.*

Demostración

(1) R la MRF equivalente por filas a $A \Rightarrow R = PA$ con P invertible $\overset{Teor.ant.}{\Rightarrow}$ espacio fila de A = espacio fila de B.

(2) R es MRF $\Rightarrow$ cada fila no nula comienza con un 1 y en esa coordenada todas las demás filas tienen un 0 $\Rightarrow$ las filas no nulas de R son LI $\Rightarrow$ las filas no nulas de R son base.

$\square$

Corolario

Sean A matriz $n \times n$. Entonces, A es invertible si y sólo si las filas de A son una base de $\mathbb{K}^n$.

Demostración

Si A es invertible entonces la MERF de A es la identidad, por lo tanto el espacio fila de A genera $\mathbb{K}^n$.

Por otro lado, si el espacio fila de A genera $\mathbb{K}^n$, el espacio fila de la MERF es $\mathbb{K}^n$ y por lo tanto la MERF de A es la identidad y en consecuencia A es invertible.

Hemos probado que A es invertible si y sólo si las n filas de A generan $\mathbb{K}^n$.

Como $\dim \mathbb{K}^n = n$, todo conjunto de n generadores es una base. $\square$

Bases de subespacios

El corolario de la p. 101 nos permite encontrar fácilmente la dimensión de un subespacio de $\mathbb{K}^n$ generado explícitamente por m vectores.

- Sea $v_1, \dots, v_m \in \mathbb{K}^n$ y $W = \langle v_1, \dots, v_m \rangle$,
- Consideramos la matriz
$$A = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_m \end{bmatrix}$$
- Calculamos R, una MRF equivalente por filas a A.
- $W =$ espacio fila de R.
- Si R tiene r filas no nulas, las r filas no nulas son una base de W.
- Por consiguiente, $\dim W = r$.

Ejemplo

Encontrar una base de $W = \langle (1,0,1),(1,-1,0),(5,-3,2) \rangle$.

Solución

Formemos la matriz cuyas filas son los vectores que generan W, es decir

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 5 & -3 & 2 \end{bmatrix}.$$

Entonces

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 5 & -3 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow[F_3-5F_1]{F_2-F_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & -3 & -3 \end{bmatrix} \xrightarrow{-F_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & -3 \end{bmatrix} \xrightarrow{F_3-3F_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Por lo tanto, $\dim W = 2$ y $(1,0,1),(0,1,1)$ es una base de W. $\square$

Subconjuntos LI de un sistema de generadores

- Dada un conjunto de generadores de un subespacio W de $\mathbb{K}^n$ "sabemos" encontrar una base de W.
- Esa base de W, en general, utiliza otros vectores (no necesariamente los generadores).
- Veremos a continuación que dado $S = \{v_1, \ldots, v_m\}$ y $W = \langle S \rangle$, podemos encontrar fácilmente un subconjunto de S base de W.

Teorema

Sea $v_1, \ldots, v_r$ *vectores en* $\mathbb{K}^n$ *y* $W = \langle v_1, \ldots, v_r \rangle$.

Sea A *la matriz formada por las filas* $v_1, \ldots, v_r$ *y* R *una MRF equivalente por filas a* A *que se obtiene* ***sin*** *el uso de permutaciones de filas.*

Si $i_1, i_2, \ldots, i_s$ *filas no nulas de* $R \Rightarrow v_{i_1}, v_{i_2}, \ldots, v_{i_s}$ *base de* W.

Demostración

Se hará por inducción sobre r.

Si $r = 1$ es trivial ver que vale la afirmación.

Supongamos que tenemos el resultado probado para $r - 1$ (hipótesis inductiva).

Sea $W' = \langle v_1, \ldots, v_{r-1} \rangle$ y sea A' la matriz formada por las $r-1$ filas $v_1, \ldots, v_{r-1}$. Sea R' la MRF equivalente por filas a A' que se obtiene sin usar permutaciones de filas. Por hipótesis inductiva, si $i_1, i_2, \ldots, i_s$ son las filas no nulas de R', entonces $v_{i_1}, v_{i_2}, \ldots, v_{i_s}$ es una base de W'.
Sea

$$R_0 = \begin{bmatrix} R' \\ v_r \end{bmatrix}.$$

Si $v_r \in W'$, entonces $v_{i_1}, v_{i_2}, \ldots, v_{i_s}$ es una base de W y

$$R = \begin{bmatrix} R' \\ 0 \end{bmatrix}$$

es la MRF de A.
Si $v_r \notin W'$, entonces $v_{i_1}, v_{i_2}, \ldots, v_{i_s}, v_r$ es una base de W y la MRF de A tiene la última fila no nula. $\square$

Finalmente, terminaremos la clase con un teorema que resume algunas equivalencias respecto a matrices invertibles.

Teorema

Sea A matriz $n \times n$ con coeficientes en $\mathbb{K}$. Entonces son equivalentes

1. *A es invertible.*
2. *A es equivalente por filas a Id_n.*
3. *A es producto de matrices elementales.*
4. *El sistema $AX = Y$ tiene una única solución para toda matriz Y de orden $n \times 1$.*
5. *El sistema homogéneo $AX = 0$ tiene una única solución trivial.*
6. $\det A \neq 0$.
7. *Las filas de A son LI.*
8. *Las columnas de A son LI.*