

Álgebra/Álgebra II

Clase 3 -Sistemas de ecuaciones lineales 1

FAMAF / UNC

19 de marzo de 2020

Objetivo

En las próximas clases aprenderemos a resolver sistemas de ecuaciones lineales sobre \mathbb{R} usando el *método de Gauss*.

Con este fin, veremos en esta clase

- La definición de sistemas de ecuaciones lineales.
- Resolveremos algunos sistemas de ecuaciones concretos usando el método de *eliminación de variables*.
- Justificaremos el método de eliminación de variables.

El método de Gauss no es más que una forma de utilizar el método de eliminación de variables de manera sistemática y algorítmica.

El método de Gauss será visto en las próximas clases.

El problema general

El problema a resolver será el siguiente: buscamos números x_1, \dots, x_n en el cuerpo \mathbb{K} ($= \mathbb{R}$ o \mathbb{C}) que satisfagan las siguientes condiciones

$$\begin{array}{ccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & y_1 \\ \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \cdots & + & a_{mn}x_n & = & y_m \end{array} \quad (*)$$

donde y_1, \dots, y_m y a_{ij} ($1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$) son números en \mathbb{K} .

Se dice que las ecuaciones (*) forman un *sistema de ecuaciones lineales* de m ecuaciones y n incógnitas.

- El sistema es *homogeneo* si $y_i = 0$ para todo i .
- El sistema es *no homogeneo* si $y_i \neq 0$ para algún i .

Los siguientes son sistemas de 2 ecuaciones lineales con 2 incógnitas:

$$(1) \quad \begin{array}{rcl} 2x_1 + 8x_2 & = & 0 \\ 2x_1 + x_2 & = & 1 \end{array}$$

$$(2) \quad \begin{array}{rcl} 2x_1 + x_2 & = & 0 \\ 2x_1 - x_2 & = & 1 \end{array}$$

$$(3) \quad \begin{array}{rcl} 2x + y & = & 1 \\ 4x + 2y & = & 2 \end{array}$$

Problema 1

Encontrar las soluciones (x, y, z) del sistema de ecuaciones:

$$\begin{array}{rclclcl} x & & & & 2z & = & 1 \\ x & - & 3y & + & 3z & = & 2 \\ 2x & - & y & + & 5z & = & 3 \end{array}$$

Es decir, queremos encontrar los números reales x , y y z que satisfagan las ecuaciones anteriores.

Solución

Veremos que la única solución es $(x, y, z) = (-1, 0, 1)$.

Supongamos que (x, y, z) es una solución de nuestro sistema
Entonces también vale que:

$$\begin{array}{rclcl} x & - & 3y & + & 3z & = & 2 \\ (-1) \cdot (x & & & + & 2z) & = & (-1) \cdot 1 \\ \hline & & - & 3y & + & z & = & 1 \end{array}$$

Por lo tanto (x, y, z) también es solución del sistema

$$\begin{array}{rclcl} x & & & + & 2z & = & 1 \\ & - & 3y & + & z & = & 1 \\ 2x & - & y & + & 5z & = & 3 \end{array}$$

Dado que (x, y, z) es solución del sistema

$$\begin{array}{rclcl} x & & + & 2z & = 1 \\ & - & 3y & + & z & = 1 \\ 2x & - & y & + & 5z & = 3 \end{array}$$

Entonces también vale que:

$$\begin{array}{rclcrcl} 2x & - & y & + & 5z & = & 3 \\ (-2) \cdot (x & & & + & 2z) & = & (-2) \cdot 1 \\ \hline & & -y & + & z & = & 1 \end{array}$$

Por lo tanto (x, y, z) también es solución del sistema

$$\begin{array}{rcl} x & + & 2z = 1 \\ - & 3y & + z = 1 \\ - & y & + z = 1 \end{array} \quad \text{equivalentemente} \quad \begin{array}{rcl} x & + & 2z = 1 \\ - & y & + z = 1 \\ - & 3y & + z = 1 \end{array}$$

Dado que (x, y, z) es solución del sistema

$$\begin{array}{rclcl} x & & + & 2z & = 1 \\ & - & y & + & z = 1 \\ & - & 3y & + & z = 1 \end{array}$$

Entonces también vale que:

$$\begin{array}{rclcl} & -3y & +z & = & 1 \\ (-3) \cdot & (-y & +z) & = & (-3) \cdot 1 \\ \hline & -2z & = & -2 \end{array}$$

Por lo tanto (x, y, z) también es solución del sistema

$$\begin{array}{rclcl} x & +2z & = 1 & & x & +2z & = 1 \\ -y & +z & = 1 & \text{equivalentemente} & -y & +z & = 1 \\ & -2z & = -2 & & & z & = 1 \end{array}$$

Dado (x, y, z) es solución del sistema

$$\begin{array}{rcl} x & +2z & = 1 \\ -y & +z & = 1 \\ & z & = 1 \end{array}$$

Entonces también vale que:

$$\begin{array}{rcl} x & +2z & = 1 \\ (-2) \cdot (& z) & = (-2) \cdot 1 \\ \hline x & & = -1 \end{array} \quad y \quad \begin{array}{rcl} -y & +z & = 1 \\ (-1) \cdot (& z) & = (-1) \cdot 1 \\ \hline -y & & = 0 \end{array}$$

Por lo tanto (x, y, z) también es solución del sistema

$$\begin{array}{rcl} x & & = -1 \\ -y & & = 0 \\ & z & = 1 \end{array} \quad \text{equivalentemente} \quad \begin{array}{rcl} x & = & -1 \\ y & = & 0 \\ z & = & 1 \end{array}$$

En resumen, supusimos que (x, y, z) es una solución del sistema

$$\begin{array}{rcl} x & +2z & = 1 \\ x & -3y & +3z = 2 \\ 2x & -y & +3z = 1 \end{array}$$

y probamos que

$$x = -1 \quad y = 0, \quad z = 1.$$



Comprobemos. Si reemplazamos en el sistema x , y y z por estos valores

$$\begin{array}{rcl} (-1) & +2 \cdot (1) & = 1 \\ (-1) & -3 \cdot 0 & +3 \cdot (1) = 2 \\ 2 \cdot (-1) & -0 & +3 \cdot (1) = 1 \end{array}$$

vemos que verifican las igualdades del sistema.

Podría suceder que el sistema no tenga solución como en el siguiente caso.

Problema 2

Encontrar las soluciones (x, y, z) del sistema de ecuaciones:

$$\begin{array}{rcl} x & & +2z = 1 \\ x & -3y & +3z = 2 \\ 2x & -3y & +5z = 4 \end{array}$$

Solución

Veremos que el sistema no tiene solución.

Supongamos que (x, y, z) es una solución de nuestro sistema

$$\begin{array}{rcl} x & +2z & = 1 \\ x & -3y & +3z = 2 \\ 2x & -3y & +5z = 4 \end{array}$$

Entonces también vale que:

$$\begin{array}{rcl} & x & -3y & +3z & = & 2 \\ (-1) \cdot & (x & & +2z) & = & (-1) \cdot 1 \\ \hline & & -3y & +z & = & 1 \end{array}$$

Por lo tanto (x, y, z) también es solución del sistema

$$\begin{array}{rcl} x & +2z & = 1 \\ & -3y & +z = 1 \\ 2x & -3y & +5z = 4 \end{array}$$

Dado que (x, y, z) es solución del sistema

$$\begin{array}{rclcrcl} x & & +2z & = & 1 \\ & -3y & +z & = & 1 \\ 2x & -3y & +5z & = & 4 \end{array}$$

Entonces también vale que:

$$\begin{array}{rclcrcl} 2x & -3y & +5z & = & 4 \\ (-2) \cdot (x & & +2z) & = & (-2) \cdot 1 \\ \hline & -3y & +z & = & 2 \end{array}$$

Por lo tanto (x, y, z) también es solución del sistema

$$\begin{array}{rclcrcl} x & & +2z & = & 1 \\ & -3y & +z & = & 1 \\ & -3y & +z & = & 2 \end{array}$$

Dado que (x, y, z) es solución del sistema

$$\begin{array}{rcl} x & +2z & = 1 \\ -3y & +z & = 1 \\ -3y & +z & = 2 \end{array}$$

Entonces también vale que:

$$\begin{array}{rcl} & -3y & +z = 2 \\ (-1) \cdot (& -3y & +z) = (-1) \cdot 1 \\ \hline & 0 & = 1 \end{array}$$

Esta igualdad es un absurdo, el cual provino de suponer que nuestro sistema tenía solución.



Un sistema también puede tener infinitas soluciones.

Problema 3

Encontrar las soluciones (x, y, z) del sistema de ecuaciones:

$$\begin{array}{rcrcrcrcrl} x & & & +2z & = & 1 \\ x & -3y & +3z & = & 2 \\ 2x & -3y & +5z & = & 3 \end{array}$$

Solución

Veremos que el conjunto de soluciones del sistema es

$$\left\{ \left(-2z + 1, \frac{z-1}{3}, z \right) : z \in \mathbb{R} \right\}.$$

Es decir, todas las soluciones son de la forma

$$x = -2z + 1 \text{ e } y = \frac{z-1}{3} \text{ donde } z \in \mathbb{R}.$$

Supongamos que (x, y, z) es una solución de nuestro sistema

$$\begin{array}{rcl} x & +2z & = 1 \\ x & -3y & +3z = 2 \\ 2x & -3y & +5z = 3 \end{array}$$

Entonces también vale que:

$$\begin{array}{rcl} x & -3y & +3z = 2 \\ (-1) \cdot (x & +2z) & = (-1) \cdot 1 \\ \hline & -3y & +z = 1 \end{array}$$

Por lo tanto (x, y, z) también es solución del sistema

$$\begin{array}{rcl} x & +2z & = 1 \\ & -3y & +z = 1 \\ 2x & -3y & +5z = 3 \end{array}$$

Dado que (x, y, z) es solución del sistema

$$\begin{array}{rcl} x & +2z & = 1 \\ & -3y + z & = 1 \\ 2x & -3y + 5z & = 3 \end{array}$$

Entonces también vale que:

$$\begin{array}{rcl} 2x & -3y & +5z = 3 \\ (-2) \cdot (x & & +2z) = (-2) \cdot 1 \\ \hline & -3y & +z = 1 \end{array}$$

Por lo tanto (x, y, z) también es solución del sistema

$$\begin{array}{rcl} x & +2z & = 1 \\ -3y & +z & = 1 \\ -3y & +z & = 1 \end{array} \quad \text{equivalentemente} \quad \begin{array}{rcl} x & +2z & = 1 \\ -3y & +z & = 1 \end{array}$$

Dado que (x, y, z) es solución del sistema

$$\begin{array}{rcl} x & +2z & = 1 \\ -3y & +z & = 1 \end{array}$$

podemos despejar x e y en función de z . Esto es,

$$x = -2z + 1$$

$$y = \frac{z - 1}{3}$$

y no tenemos ninguna condición sobre z .

En resumen, supusimos que (x, y, z) es una solución del sistema

$$\begin{array}{rcl} x & +2z & = 1 \\ x & -3y & +3z = 2 \\ 2x & -3y & +5z = 3 \end{array}$$

y probamos que

$$x = -2z + 1 \text{ e } y = \frac{z-1}{3}.$$



Comprobemos. Si reemplazamos x , y y z por estos valores

$$\begin{array}{rcl} (-2z + 1) & +2z & = 1 \\ (-2z + 1) & -3 \cdot \left(\frac{z-1}{3}\right) & +3z = 2 \\ 2 \cdot (-2z + 1) & -3 \cdot \left(\frac{z-1}{3}\right) & +5z = 3 \end{array}$$

vemos que verifican las igualdades del sistema.

Justificación del método de eliminación de incógnitas

Proposición

Sean c_1, \dots, c_m en \mathbb{K} . Si $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n$ es solución del sistema de ecuaciones

$$\begin{array}{ccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & y_1 \\ \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \cdots & + & a_{mn}x_n & = & y_m. \end{array}$$

entonces (x_1, \dots, x_n) también es solución de la ecuación

$$\sum_{i=1}^m c_i (a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n) = \sum_i c_i y_i.$$

(se usa en p. 24)

Demostración

Por hipótesis

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n = y_i, \quad \text{para } 1 \leq i \leq m.$$

Luego,

$$\sum_{i=1}^m c_i (a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n) = \sum_i c_i y_i.$$



Observación

La ecuación anterior se puede reescribir:

$$\left(\sum_{i=1}^m c_i a_{i1} \right) x_1 + \cdots + \left(\sum_{i=1}^m c_i a_{in} \right) x_n = \sum_{i=1}^m c_i y_i.$$

Es decir es una nueva ecuación lineal con n incógnitas.

La idea de hacer combinaciones lineales de ecuaciones es fundamental en el proceso de eliminación de incógnitas.

Definición

Decimos que dos sistemas de ecuaciones lineales son *equivalentes* si cada ecuación de un sistema es combinación lineal del otro.

Teorema

Dos sistemas de ecuaciones lineales equivalentes tienen las mismas soluciones.

Demostración

Sea

$$\begin{array}{ccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & y_1 \\ \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \cdots & + & a_{mn}x_n & = & y_m \end{array} \quad (*)$$

equivalente a

$$\begin{array}{ccccccc} b_{11}x_1 & + & b_{12}x_2 & + & \cdots & + & b_{1n}x_n & = & z_1 \\ \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \\ b_{k1}x_1 & + & b_{k2}x_2 & + & \cdots & + & b_{kn}x_n & = & z_k, \end{array} \quad (**)$$

Esto quiere decir que

1. las ecuaciones de $(**)$ se obtienen a partir de combinaciones lineales de las ecuaciones del sistema $(*)$, y
2. las ecuaciones de $(*)$ se obtienen a partir de combinaciones lineales de las ecuaciones del sistema $(**)$.

Luego, por proposición de la diapositiva 20:

1. si (x_1, \dots, x_n) es solución de $(*)$, también será solución de cada una de las ecuaciones de $(**)$ y por lo tanto solución del sistema $(**)$, y
2. si (x_1, \dots, x_n) es solución de $(**)$, también será solución de cada una de las ecuaciones de $(*)$ y por lo tanto solución del sistema $(*)$.



Observación

Las combinaciones lineales que hemos utilizado en los tres sistemas que hemos trabajado son

- sumar a una ecuación una constante por otra,
- multiplicar una ecuación por una constante no nula, y
- permutar ecuaciones.

Veremos que estas operaciones son “reversibles”, es decir, así como haciendo estas operaciones en la ecuaciones llegamos de

$$\begin{array}{rclcl} x & & +2z & = & 1 & & x = -1 \\ x & -3y & +3z & = & 2 & \text{a} & y = 0 \\ 2x & -y & +5z & = & 3 & & z = 1. \end{array}$$

Haciendo las “operaciones inversas” (que son del mismo tipo) podemos llegar de

$$\begin{array}{lcl} x = -1 & & x \quad \quad +2z = 1 \\ y = 0 & \text{a} & x \quad -3y \quad +3z = 2. \\ z = 1. & & 2x \quad -y \quad +5z = 3 \end{array}$$

Luego, ambos sistemas son equivalentes y, por lo tanto, tiene las mismas soluciones.

Conclusiones

- Un sistema de ecuaciones puede tener una, ninguna o infinitas soluciones.
- Hemos cambiado nuestro sistema inicial haciendo combinaciones lineales de las ecuaciones.
- El nuevo sistema es más sencillo en el sentido que:
 - Cada ecuación tiene menos incógnitas.
 - Las soluciones quedan descritas explícitamente.
- Las soluciones del nuevo sistema son las soluciones de nuestro sistema original.