

PRÁCTICO 1

Soluciones

Álgebra II – Año 2024/1 – FAMAF

Vectores y producto escalar.

(1) Dados $v = (-1, 2, 0)$, $w = (2, -3, -1)$ y $u = (1, -1, 1)$, calcular:

a) $2v + 3w - 5u$,

b) $5(v + w)$,

c) $5v + 5w$ (y verificar que es igual al vector de arriba).

SOLUCIÓN:

$$\begin{aligned} a) \quad 2v + 3w - 5u &= 2 \cdot (-1, 2, 0) + 3 \cdot (2, -3, -1) - 5 \cdot (1, -1, 1) \\ &= (-2, 4, 0) + (6, -9, -3) + (-5, 5, -5) = \boxed{(-1, 0, -8)} \end{aligned}$$

$$b) \quad 5(v + w) = 5 \cdot ((-1, 2, 0) + (2, -3, -1)) = 5 \cdot (1, -1, -1) = \boxed{(5, -5, -5)}$$

$$c) \quad 5v + 5w = 5 \cdot (-1, 2, 0) + 5 \cdot (2, -3, -1) = (-5, 10, 0) + (10, -15, -5) = \boxed{(5, -5, -5)}$$

□

(2) Calcular los siguientes productos escalares.

a) $\langle (-1, 2, 0), (2, -3, -1) \rangle$,

b) $\langle (4, -1), (-1, 2) \rangle$.

SOLUCIÓN:

$$a) \quad \langle (-1, 2, 0), (2, -3, -1) \rangle = (-1) \cdot 2 + 2 \cdot (-3) + 0 \cdot (-1) = -2 + (-6) + 0 = \boxed{-8}$$

$$b) \quad \langle (4, -1), (-1, 2) \rangle = 4 \cdot (-1) + (-1) \cdot 2 = -4 + (-2) = \boxed{-6}$$

□

(3) Dados $v = (-1, 2, 0)$, $w = (2, -3, -1)$ y $u = (1, -1, 1)$, verificar que:

$$\langle 2v + 3w, -u \rangle = -2\langle v, u \rangle - 3\langle w, u \rangle$$

SOLUCIÓN: Calculamos ambos miembros por separado.

$$\begin{aligned} \text{Miembro izquierdo: } \langle 2v + 3w, -u \rangle &= \langle 2 \cdot (-1, 2, 0) + 3 \cdot (2, -3, -1), -(1, -1, 1) \rangle \\ &= \langle (-2, 4, 0) + (6, -9, -3), (-1, 1, -1) \rangle = \langle (4, -5, -3), (-1, 1, -1) \rangle \\ &= 4 \cdot (-1) + (-5) \cdot 1 + (-3) \cdot (-1) = -4 + (-5) + 3 = \boxed{-6} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Miembro derecho: } -2\langle v, u \rangle - 3\langle w, u \rangle &= -2\langle (-1, 2, 0), (1, -1, 1) \rangle - 3\langle (2, -3, -1), (1, -1, 1) \rangle \\ &= -2 \cdot (-1 \cdot 1 + 2 \cdot (-1) + 0 \cdot 1) - 3 \cdot (2 \cdot 1 + (-3) \cdot (-1) + (-1) \cdot 1) \\ &= -2 \cdot (-1 + (-2) + 0) - 3 \cdot (2 + 3 + (-1)) = -2 \cdot (-3) - 3 \cdot 4 = 6 - 12 = \boxed{-6} \end{aligned}$$

□

(4) Probar que

a) $(2, 3, -1)$ y $(1, -2, -4)$ son ortogonales.b) $(2, -1)$ y $(1, 2)$ son ortogonales. Dibujar en el plano.

SOLUCIÓN: Calculamos su producto interno para ver si es nulo.

$$a) \langle (2, 3, -1), (1, -2, -4) \rangle = 2 \cdot 1 + 3 \cdot (-2) + (-1) \cdot (-4) = 2 + (-6) + 4 = \boxed{0}$$

$$b) \langle (2, -1), (1, 2) \rangle = 2 \cdot 1 + (-1) \cdot 2 = 2 - 2 = \boxed{0}$$



FIGURE 1. Ejercicio 4.b

□

(5) Encontrar

a) un vector no nulo ortogonal a $(3, -4)$,b) un vector no nulo ortogonal a $(2, -1, 4)$,c) un vector no nulo ortogonal a $(2, -1, 4)$ y $(0, 1, -1)$,

SOLUCIÓN:

a) $(4, 3)$ es un vector no nulo ortogonal a $(3, -4)$, pues:

$$\langle (3, -4), (4, 3) \rangle = 3 \cdot 4 + (-4) \cdot 3 = 12 - 12 = \boxed{0}$$

b) $(1, 2, 0)$ es un vector no nulo ortogonal a $(2, -1, 4)$, pues:

$$\langle (2, -1, 4), (1, 2, 0) \rangle = 2 \cdot 1 + (-1) \cdot 2 + 4 \cdot 0 = 2 - 2 + 0 = \boxed{0}$$

c) Primero notar que cualquier vector de la pinta (a, b, b) será ortogonal a $(0, 1, -1)$, pues:

$$\langle (0, 1, -1), (a, b, b) \rangle = 0 \cdot a + 1 \cdot b + (-1) \cdot b = 0 + b - b = \boxed{0}$$

Si ahora multiplicamos nuestro candidato (a, b, b) con $(2, -1, 4)$ tenemos:

$$\langle (2, -1, 4), (a, b, b) \rangle = 2 \cdot a + (-1) \cdot b + 4 \cdot b = \boxed{2a + 3b}$$

Luego, si elegimos por ejemplo $a = -3$ y $b = 2$ vamos a tener a nuestro candidato ortogonal a ambos vectores. Es decir, $(-3, 2, 2)$ cumple lo requerido.

□

(6) Encontrar la longitud de los vectores.

(a) $(2, 3)$,

(b) (t, t^2) ,

(c) $(\cos \phi, \sin \phi)$.

SOLUCIÓN:

a) $\|(2, 3)\| = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{4 + 9} = \sqrt{13}$

b) $\|(t, t^2)\| = \sqrt{t^2 + (t^2)^2} = \sqrt{t^2 + t^4} = |t|\sqrt{1 + t^2}$

c) $\|(\cos \phi, \sin \phi)\| = \sqrt{\cos^2 \phi + \sin^2 \phi} = \sqrt{1} = 1$

□

(7) Calcular $\langle v, w \rangle$ y el ángulo entre v y w para los siguientes vectores.

(a) $v = (2, 2)$, $w = (1, 0)$,

(b) $v = (-5, 3, 1)$, $w = (2, -4, -7)$.

SOLUCIÓN: Para encontrar el ángulo se deben calcular además las normas de los vectores:

a) $\langle v, w \rangle = \langle (2, 2), (1, 0) \rangle = 2 \cdot 1 + 1 \cdot 0 = 2 + 0 = 2$

$\|v\| = \|(2, 2)\| = \sqrt{2^2 + 2^2} = \sqrt{4 + 4} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

$\|w\| = \|(1, 0)\| = \sqrt{1^2 + 0^2} = \sqrt{1 + 0} = \sqrt{1} = 1$

$\theta = \cos^{-1} \left(\frac{\langle v, w \rangle}{\|v\| \|w\|} \right) = \cos^{-1} \left(\frac{2}{2\sqrt{2} \cdot 1} \right) = \cos^{-1} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right) = 45^\circ$

b) $\langle v, w \rangle = \langle (-5, 3, 1), (2, -4, -7) \rangle = -5 \cdot 2 + 3 \cdot (-4) + 1 \cdot (-7) = -10 - 12 - 7 = -29$

$\|v\| = \|(-5, 3, 1)\| = \sqrt{(-5)^2 + 3^2 + 1^2} = \sqrt{25 + 9 + 1} = \sqrt{35}$

$\|w\| = \|(2, -4, -7)\| = \sqrt{2^2 + (-4)^2 + (-7)^2} = \sqrt{4 + 16 + 49} = \sqrt{69}$

$\theta = \cos^{-1} \left(\frac{\langle v, w \rangle}{\|v\| \|w\|} \right) = \cos^{-1} \left(\frac{-29}{\sqrt{35}\sqrt{69}} \right) = 126^\circ 9' 55.57''$

□

(8) Recordar los vectores e_1 , e_2 y e_3 dados en la página 12 del apunte. Sea $v = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$. Verificar que

$$v = x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3 = \langle v, e_1 \rangle e_1 + \langle v, e_2 \rangle e_2 + \langle v, e_3 \rangle e_3.$$

SOLUCIÓN: Podemos empezar desde el miembro de la derecha, pasar por el del medio y llegar al de la izquierda aplicando las definiciones y propiedades conocidas:

$$\begin{aligned} & \langle v, e_1 \rangle e_1 + \langle v, e_2 \rangle e_2 + \langle v, e_3 \rangle e_3 = \\ & = \langle (x_1, x_2, x_3), (1, 0, 0) \rangle e_1 + \langle (x_1, x_2, x_3), (0, 1, 0) \rangle e_2 + \langle (x_1, x_2, x_3), (0, 0, 1) \rangle e_3 \\ & = (x_1 \cdot 1 + x_2 \cdot 0 + x_3 \cdot 0) e_1 + (x_1 \cdot 0 + x_2 \cdot 1 + x_3 \cdot 0) e_2 + (x_1 \cdot 0 + x_2 \cdot 0 + x_3 \cdot 1) e_3 \\ & = (x_1 + 0 + 0) e_1 + (0 + x_2 + 0) e_2 + (0 + 0 + x_3) e_3 = x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3 \\ & x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3 = x_1(1, 0, 0) + x_2(0, 1, 0) + x_3(0, 0, 1) = \\ & = (x_1 \cdot 1, x_1 \cdot 0, x_1 \cdot 0) + (x_2 \cdot 0, x_2 \cdot 1, x_2 \cdot 0) + (x_3 \cdot 0, x_3 \cdot 0, x_3 \cdot 1) \\ & = (x_1, 0, 0) + (0, x_2, 0) + (0, 0, x_3) = (x_1 + 0 + 0, 0 + x_2 + 0, 0 + 0 + x_3) = \\ & (x_1, x_2, x_3) = v \end{aligned}$$

□

- (9) Probar, usando sólo las propiedades **P1**, **P2**, y **P3** del producto escalar, que dados $v, w, u \in \mathbb{R}^n$ y $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$,

a) se cumple:

$$\langle \lambda_1 v + \lambda_2 w, u \rangle = \lambda_1 \langle v, u \rangle + \lambda_2 \langle w, u \rangle.$$

b) Si $\langle v, w \rangle = 0$, es decir si v y w son ortogonales, entonces

$$\langle \lambda_1 v + \lambda_2 w, \lambda_1 v + \lambda_2 w \rangle = \lambda_1^2 \langle v, v \rangle + \lambda_2^2 \langle w, w \rangle.$$

SOLUCIÓN:

$$a) \langle \lambda_1 v + \lambda_2 w, u \rangle \stackrel{P2}{=} \langle u, \lambda_1 v \rangle + \langle u, \lambda_2 w \rangle \stackrel{P3}{=} \lambda_1 \langle u, v \rangle + \lambda_2 \langle u, w \rangle \stackrel{P1}{=} \lambda_1 \langle v, u \rangle + \lambda_2 \langle w, u \rangle$$

$$b) \langle \lambda_1 v + \lambda_2 w, \lambda_1 v + \lambda_2 w \rangle \stackrel{P2}{=} \langle \lambda_1 v + \lambda_2 w, \lambda_1 v \rangle + \langle \lambda_1 v + \lambda_2 w, \lambda_2 w \rangle \stackrel{P2}{=} \\ \stackrel{P2}{=} \langle \lambda_1 v, \lambda_1 v \rangle + \langle \lambda_1 v, \lambda_2 w \rangle + \langle \lambda_2 w, \lambda_1 v \rangle + \langle \lambda_2 w, \lambda_2 w \rangle \stackrel{P3}{=} \\ \stackrel{P3}{=} \lambda_1^2 \langle v, v \rangle + \lambda_1 \lambda_2 \langle v, w \rangle + \lambda_2 \lambda_1 \langle w, v \rangle + \lambda_2^2 \langle w, w \rangle \stackrel{HIP}{=} \lambda_1^2 \langle v, v \rangle + \lambda_2^2 \langle w, w \rangle$$

En el último paso se utilizó la hipótesis $\langle v, w \rangle = 0$.

□

- (10) Dados $v, w \in \mathbb{R}^n$, probar que si $\langle v, w \rangle = 0$, es decir si v y w son ortogonales, entonces

$$\|v + w\|^2 = \|v\|^2 + \|w\|^2.$$

¿Cuál es el nombre con que se conoce este resultado en \mathbb{R}^2 ?

SOLUCIÓN: Vamos a usar la definición de norma y el inciso b) del ejercicio anterior, tomando $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$:

$$\|v + w\|^2 \stackrel{def}{=} \langle v + w, v + w \rangle \stackrel{9.b)}{=} \langle v, v \rangle + \langle w, w \rangle \stackrel{def}{=} \|v\|^2 + \|w\|^2.$$

En \mathbb{R}^2 esta igualdad es el *Teorema de Pitágoras*.

□

- (11) @ Sean $v, w \in \mathbb{R}^2$, probar usando solo la definición explícita del producto escalar en \mathbb{R}^2 que

$$|\langle v, w \rangle| \leq \|v\| \|w\| \quad (\text{Desigualdad de Schwarz}).$$

SOLUCIÓN: Vamos a escribir $v = (v_1, v_2)$ y $w = (w_1, w_2)$. Veamos la pinta del cuadrado del lado izquierdo:

$$\langle v, w \rangle^2 = \langle (v_1, v_2), (w_1, w_2) \rangle^2 = (v_1 w_1 + v_2 w_2)^2 \quad (0.1)$$

Ahora comenzamos por el cuadrado del lado derecho con el objetivo de llegar a (0.1):

$$\|v\|^2 \|w\|^2 = (v_1^2 + v_2^2)(w_1^2 + w_2^2) = (v_1 w_1)^2 + (v_1 w_2)^2 + (v_2 w_1)^2 + (v_2 w_2)^2.$$

Mirando el primer y último término tenemos que si completamos ese cuadrado obtendríamos (0.1). Sumamos y restamos $2(v_1 w_1)(v_2 w_2)$ y agrupamos:

$$\begin{aligned} \|v\|^2 \|w\|^2 &= (v_1 w_1)^2 + (v_1 w_2)^2 + (v_2 w_1)^2 + (v_2 w_2)^2 + \\ &\quad + 2(v_1 w_1)(v_2 w_2) - 2(v_1 w_1)(v_2 w_2) = \\ &= [(v_1 w_1)^2 + 2(v_1 w_1)(v_2 w_2) + (v_2 w_1)^2] + [(v_2 w_1)^2 - 2v_1 w_1 v_2 w_2 + (v_1 w_2)^2] \end{aligned}$$

El segundo grupo de términos también forma un cuadrado perfecto. Escribimos ambos como cuadrados y acotamos:

$$\|v\|^2 \|w\|^2 = \underbrace{(v_1 w_1 + v_2 w_2)^2}_{=\langle v, w \rangle^2} + \underbrace{(v_2 w_1 - v_1 w_2)^2}_{\geq 0} \geq \langle v, w \rangle^2.$$

□

Rectas y planos.

(12) En cada uno de los siguientes casos determinar si los vectores \vec{vw} y \vec{xy} son equivalentes y/o paralelos.

a) $v = (1, -1)$, $w = (4, 3)$, $x = (-1, 5)$, $y = (5, 2)$.

b) $v = (1, -1, 5)$, $w = (-2, 3, -4)$, $x = (3, 1, 1)$, $y = (-3, 9, -17)$.

SOLUCIÓN: Calculamos las diferencias correspondientes y las analizamos:

a) $w - v = (4, 3) - (1, -1) = (4 - 1, 3 - (-1)) = (3, 4)$

$y - x = (5, 2) - (-1, 5) = (5 - (-1), 2 - 5) = (6, -3)$

No son equivalentes ni paralelos.

b) $w - v = (-2, 3, -4) - (1, -1, 5) = (-2 - 1, 3 - (-1), -4 - 5) = (-3, 4, -9)$

$y - x = (-3, 9, -17) - (3, 1, 1) = (-3 - 3, 9 - 1, -17 - 1) = (-6, 8, -18)$.

No son equivalente pero si paralelos. Tomando $\lambda = 2$ se tiene que $y - x = \lambda(w - v)$.

□

(13) Sea R_1 la recta que pasa por $p_1 = (2, 0)$ y es ortogonal a $(1, 3)$.

a) Dar la descripción paramétrica e implícita de R_1 .

b) Graficar en el plano a R_1 .

c) Dar un punto p por el que pase R_1 distinto a p_1 .

d) Verificar si $p + p_1$ y $-p$ pertenecen a R_1

SOLUCIÓN:

a) Para la descripción paramétrica necesitamos un vector paralelo a R_1 , es decir, ortogonal a $(1, 3)$. Un vector así puede ser el $(3, -1)$, con el que tenemos:

Descripción paramétrica: $R_1 = \{(2, 0) + t(3, -1) \mid t \in \mathbb{R}\}$

Para la descripción implícita simplemente reemplazamos todos los datos dados en la ecuación $ax + by = \langle (x_0, y_0), (a, b) \rangle$ y tenemos:

Descripción implícita: $R_1 = \{(x, y) \mid x + 3y = 2\}$

b) ver figura 2

c) Para dar un punto sobre la recta conviene usar la descripción paramétrica. En este caso debe ser distinto a p_1 , con lo que cualquier valor de $t \neq 0$ va a servir. Si tomamos por ejemplo $t = -1$ vamos a tener $p = (-1, 1)$.

d) Para verificar si un punto pertenece, conviene usar la descripción implícita. Calculamos cada punto y reemplazamos en la ecuación:

$$\begin{array}{l|l} p + p_1 = (-1, 1) + (2, 0) = (1, 1) & -p = (1, -1) \\ (1) + 3 \cdot (1) = 4 \neq 2 & (1) + 3 \cdot (-1) = -2 \neq 2 \\ \therefore p + p_1 \notin R_1 & \therefore -p \notin R_1 \end{array}$$

□

(14) Repetir el ejercicio anterior con las siguientes rectas.

a) R_2 : recta que pasa por $p_2 = (0, 0)$ y es ortogonal a $(1, 3)$.

b) R_3 : recta que pasa por $p_3 = (1, 0)$ y es paralela a R_1 .

SOLUCIÓN: Los procedimientos son análogos a los del ejercicio 13. Las gráficas están en la figura 2

a) Descripción paramétrica: $R_2 = \{t(3, -1) \mid t \in \mathbb{R}\}$

Descripción implícita: $R_2 = \{(x, y) \mid x + 3y = 0\}$

Tomando $t = -1$ tenemos $p = (-3, 1)$.

$$\begin{array}{l|l} p + p_2 = (-3, 1) + (0, 0) = (-3, 1) & -p = (3, -1) \\ (-3) + 3 \cdot (1) = -3 + 3 = 0 & (3) + 3 \cdot (-1) = 3 - 3 = 0 \\ \therefore p + p_2 \in R_2 & \therefore -p \in R_2 \end{array}$$

b) Descripción paramétrica: $R_3 = \{(1, 0) + t(3, -1) \mid t \in \mathbb{R}\}$

Descripción implícita: $R_3 = \{(x, y) \mid x + 3y = 1\}$

Tomando $t = -1$ tenemos $p = (-2, 1)$.

$$\begin{array}{l|l} p + p_3 = (-2, 1) + (1, 0) = (-1, 1) & -p = (2, -1) \\ (-1) + 3 \cdot (1) = 2 \neq 1 & (2) + 3 \cdot (-1) = -1 \neq 1 \\ \therefore p + p_3 \notin R_3 & \therefore -p \notin R_3 \end{array}$$

□

(15) Calcular, numérica y graficamente, las intersecciones $R_1 \cap R_2$ y $R_1 \cap R_3$.

SOLUCIÓN: Para el cálculo numérico, notar que las ecuaciones de las tres rectas son de la forma $x + 3y = c$ donde c vale 2, 0 y 1 para R_1 , R_2 y R_3 respectivamente. Así tendremos por ejemplo que para calcular la intersección $R_1 \cap R_2$ tendremos que resolver el sistema:



FIGURE 2

$$\begin{cases} x + 3y = 2 \\ x + 3y = 0 \end{cases}$$

Este sistema no tiene solución, pues para cualquier valores de x e y que elijamos, no puede suceder que al hacer la cuenta $x + 3y$ obtengamos simultáneamente el resultado 2 y el resultado 0. El caso $R_1 \cap R_3$ es análogo.

Para la determinación gráfica, se pueden observar los gráficos de la figura 2 y notar que ambas parejas son paralelas, y por lo tanto no tienen intersección.

En conclusión, tenemos $R_1 \cap R_2 = R_1 \cap R_3 = \emptyset$

□

(16) Sea $v_0 = (2, -1, 1)$.

- Describir paramétricamente el conjunto $P_1 = \{w \in \mathbb{R}^3 : \langle v_0, w \rangle = 0\}$.
- Describir paramétricamente el conjunto $P_2 = \{w \in \mathbb{R}^3 : \langle v_0, w \rangle = 1\}$.
- ¿Qué relación hay entre P_1 y P_2 ?

SOLUCIÓN:

- Debemos despejar la ecuación implícita y reemplazarla en el vector:

$$(x, y, z) \in P_1 \iff \langle (2, -1, 1), (x, y, z) \rangle = 0$$

$$(x, y, z) \in P_1 \iff 2x - y + z = 0$$

$$(x, y, z) \in P_1 \iff 2x + z = y$$

$$(x, y, z) \in P_1 \iff (x, y, z) = (x, 2x + z, z) = x(1, 2, 0) + z(0, 1, 1)$$

$$\therefore P_1 = \{s(1, 2, 0) + t(0, 1, 1) \mid s, t, \in \mathbb{R}\}$$

- Análogo al ítem anterior:

$$(x, y, z) \in P_2 \iff \langle (2, -1, 1), (x, y, z) \rangle = 1$$

$$(x, y, z) \in P_2 \iff 2x - y + z = 1$$

$$(x, y, z) \in P_2 \iff 2x + z - 1 = y$$

$$(x, y, z) \in P_2 \iff (x, y, z) = (x, 2x + z - 1, z) = (0, -1, 0) + x(1, 2, 0) + z(0, 1, 1)$$

$$\therefore P_2 = \{(0, -1, 0) + s(1, 2, 0) + t(0, 1, 1) \mid s, t, \in \mathbb{R}\}$$

- Los planos P_1 y P_2 son paralelos.

□

(17) Escribir la ecuación paramétrica y la ecuación normal de los siguientes planos.

- a) π_1 : el plano que pasa por $(0, 0, 0)$, $(1, 1, 0)$, $(1, -2, 0)$.
 b) π_2 : el plano que pasa por $(1, 2, -2)$ y es perpendicular a la recta que pasa por $(2, 1, -1)$, $(3, -2, 1)$.
 c) $\pi_3 = \{w \in \mathbb{R}^3 : w = s(1, 2, 0) + t(2, 0, 1) + (1, 0, 0); s, t \in \mathbb{R}\}$.

SOLUCIÓN:

- a) Llamemos $p_0 = (0, 0, 0)$, $p_1 = (1, 1, 0)$ y $p_2 = (1, -2, 0)$ a los puntos involucrados. Como p_0 es el origen y p_2 no es un múltiplo de p_1 , tenemos que los puntos no son colineales. Luego para la descripción paramétrica basta con elegir uno de ellos y dos parejas distintas cualquiera. Así, por ejemplo podríamos escribir:

$$\pi_1 = \{p_0 + s \overrightarrow{p_0 p_1} + t \overrightarrow{p_0 p_2} \mid s, t \in \mathbb{R}\} = \boxed{\{s(1, 1, 0) + t(1, -2, 0) \mid s, t \in \mathbb{R}\}}$$

Notar que cualquier otra elección para el primer punto y las dos parejas da lugar a parametrizaciones diferentes, pero equivalentes, de π_1 .

Para la ecuación normal vamos a necesitar un vector que sea ortogonal a ambas direcciones, $\overrightarrow{p_0 p_1}$ y $\overrightarrow{p_0 p_2}$. A simple vista puede verse que un vector que cumple eso es $e_3 = (0, 0, 1)$. Luego reemplazamos eso en la ecuación normal $\langle v, e_3 \rangle = \langle p_0, e_3 \rangle$. Notar que podríamos haber elegido cualquier punto en π_1 en lugar de p_0 , y todos deberían dar el mismo resultado. La ecuación normal sería entonces:

$$\pi_1 = \boxed{\{w \in \mathbb{R}^3 \mid \langle w, e_3 \rangle = 0\}}$$

- b) Llamemos $p_0 = (1, 2, -2)$, $p_1 = (2, 1, -1)$ y $p_2 = (3, -2, 1)$. En este caso conviene empezar con la ecuación normal pues contamos con una dirección perpendicular al plano: $\overrightarrow{p_1 p_2} = p_2 - p_1 = (1, -3, 2)$. Reemplazamos en la ecuación normal y tenemos:

$$\pi_2 = \{w \in \mathbb{R}^3 \mid \langle w, \overrightarrow{p_1 p_2} \rangle = \langle p_0, \overrightarrow{p_1 p_2} \rangle\} = \boxed{\{w \in \mathbb{R}^3 \mid \langle w, \overrightarrow{p_1 p_2} \rangle = -9\}}$$

Para encontrar la forma paramétrica se siguen los mismos pasos que en el ejercicio 16.a) y 16.b):

$$(x, y, z) \in \pi_2 \iff \langle (1, -3, 2), (x, y, z) \rangle = -9$$

$$(x, y, z) \in \pi_2 \iff x - 3y + 2z = -9$$

$$(x, y, z) \in \pi_2 \iff x = -9 + 3y - 2z$$

$$(x, y, z) \in \pi_2 \iff (x, y, z) = (-9 + 3y - 2z, y, z) = (-9, 0, 0) + y(3, 1, 0) + z(-2, 1, 0)$$

$$\therefore \pi_2 = \boxed{\{(-9, 0, 0) + s(3, 1, 0) + t(-2, 1, 0) \mid s, t \in \mathbb{R}\}}$$

- c) El plano ya viene dado en forma paramétrica, por lo que sólo resta expresarlo en forma normal. Para ello es necesario encontrar un vector (x, y, z) que sea perpendicular a $(1, 2, 0)$ y a $(2, 0, 1)$. Como en este caso no es obvio, podemos plantear ambos productos escalares y despejar:

$$\begin{cases} x + 2y = 0 \\ 2x + z = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} x = -2y \\ z = -2x = -2(-2y) = 4y \end{cases} \implies \begin{cases} x = -2y \\ z = 4y \end{cases}$$

Es decir que el vector buscado es de la pinta $(-2y, y, 4y) = y(-2, 1, 4)$ o, lo que es lo mismo, cualquier múltiplo de $(-2, 1, 4)$ será perpendicular al plano. La forma normal es entonces:

$$\pi_3 = \{w \in \mathbb{R}^3 \mid \langle w, (-2, 1, 4) \rangle = \langle (1, 0, 0), (-2, 1, 4) \rangle\} = \boxed{\{w \in \mathbb{R}^3 \mid \langle w, (-2, 1, 4) \rangle = -2\}}$$

□

(18) ¿Cuáles de las siguientes rectas cortan al plano π_3 del ejercicio c)? Describir la intersección en cada caso.

- (a) $\{w : w = (3, 2, 1) + t(1, 1, 1)\}$, (b) $\{w : w = (1, -1, 1) + t(1, 2, -1)\}$,
 (c) $\{w : w = (-1, 0, -1) + t(1, 2, -1)\}$, (d) $\{w : w = (1, -2, 1) + t(2, -1, 1)\}$.

SOLUCIÓN: La manera más directa de chequear si una recta interseca a un plano es con la forma normal del plano. Si la dirección de la recta es perpendicular a la dirección normal del plano, la recta es paralela al plano. Luego, o bien toda la recta está contenida en el plano, o bien la recta y el plano tienen intersección vacía.

Si una recta no es paralela a un plano, lo corta en un único punto. La manera más fácil de hallar ese punto es reemplazar la parametrización de la recta en la ecuación normal y despejar t . Luego, reemplazando t en la parametrización de la recta se encuentra el punto.

a) Como $\langle (1, 1, 1), (-2, 1, 4) \rangle = 3 \neq 0$, la recta corta al plano π_3 . Encuentro el punto de intersección:

$$\begin{aligned} -2(3+t) + (2+t) + 4(1+t) &= -2 \\ -6 - 2t + 2 + t + 4 + 4t &= -2 \\ 3t &= -2 \implies \boxed{t = -\frac{2}{3}} \end{aligned}$$

$$\text{El punto de intersección es } (3, 2, 1) - \frac{2}{3}(1, 1, 1) = \boxed{\left(\frac{7}{3}, \frac{4}{3}, \frac{1}{3}\right)}$$

b) Como $\langle (1, 2, -1), (-2, 1, 4) \rangle = -4 \neq 0$, la recta corta al plano π_3 . Encuentro el punto de intersección:

$$\begin{aligned} -2(1+t) + (-1+2t) + 4(1-t) &= -2 \\ -2 - 2t - 1 + 2t + 4 - 4t &= -2 \\ 3 &= 4t \implies \boxed{t = \frac{3}{4}} \end{aligned}$$

$$\text{El punto de intersección es } (1, -1, 1) + \frac{3}{4}(1, 2, -1) = \boxed{\left(\frac{7}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)}$$

c) Como $\langle (1, 2, -1), (-2, 1, 4) \rangle = -4 \neq 0$, la recta corta al plano π_3 . Encuentro el punto de intersección:

$$\begin{aligned}
 -2(-1+t) + (2t) + 4(-1-t) &= -2 \\
 2 - 2t + 2t - 4 - 4t &= -2 \\
 -4t &= 0 \implies \boxed{t = 0}
 \end{aligned}$$

El punto de intersección es $(-1, 0, -1) + 0 \cdot (1, 2, -1) = \boxed{(-1, 0, -1)}$

d) Como $\langle (2, -1, 1), (-2, 1, 4) \rangle = -1 \neq 0$, la recta corta al plano π_3 . Encuentro el punto de intersección:

$$\begin{aligned}
 -2(1+2t) + (-2-t) + 4(1+t) &= -2 \\
 -2 - 4t - 2 - t + 4 + 4t &= -2 \\
 -t &= -2 \implies \boxed{t = 2}
 \end{aligned}$$

El punto de intersección es $(1, -2, 1) + 2(2, -1, 1) = \boxed{(5, -4, 3)}$

□

(19) Sea $L = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : ax + by = c\}$ una recta en \mathbb{R}^2 . Sean p y q dos puntos por los que pasa L .

- a) ¿Para qué valores de c puede asegurar que $(0, 0) \in L$?
- b) ¿Para qué valores de c puede asegurar que $\lambda q \in L$? donde $\lambda \in \mathbb{R}$.
- c) ¿Para qué valores de c puede asegurar que $p + q \in L$?

SOLUCIÓN:

a) Si $(0, 0) \in L$, entonces esos valores de x e y deben verificar la ecuación normal de la recta. Es decir, debe suceder $c = ax + by = a \cdot 0 + b \cdot 0 = 0$. Con lo cual debe ser $c = 0$ y por lo tanto es el único valor de c con esta propiedad.

b) Llamemos $q = (x_q, y_q)$. Como $q \in L$, sabemos que se cumple

$$ax_q + by_q = c \tag{0.2}$$

Ahora supongamos que además $\lambda q = (\lambda x_q, \lambda y_q) \in L$. Vamos a tener entonces:

$$\begin{aligned}
 a(\lambda x_q) + b(\lambda y_q) &= c \\
 \lambda ax_q + \lambda by_q &= c \\
 \lambda(ax_q + by_q) &= c \text{ (Reemplazamos la ecuación 0.2)} \\
 \lambda c &= c \\
 (\lambda - 1)c &= 0
 \end{aligned}$$

Luego tenemos dos casos: Si $\lambda = 1$, entonces c puede tomar cualquier valor. Si $\lambda \neq 1$ entonces sólo puede ser $c = 0$. En particular, si $c = 0$, λ puede tener cualquier valor.

c) Llamemos $p = (x_p, y_p)$. Como $p \in L$ vamos a tener el análogo a la ecuación 0.2 para p :

$$ax_p + by_p = c \tag{0.3}$$

Ahora suponemos que además $p + q = (x_p + x_q, y_p + y_q) \in L$ y tenemos:

$$\begin{aligned} a(x_p + x_q) + b(y_p + y_q) &= c \\ ax_p + ax_q + by_p + by_q &= c \\ (ax_p + by_p) + (ax_q + by_q) &= c \\ c + c &= c \quad (\text{Reemplazamos las ecuaciones 0.2 y 0.3}) \\ 2c &= c \\ c &= 0 \end{aligned}$$

Por lo tanto debe ser $c = 0$ y es el único valor con esta propiedad.

□

(20) Sea L una recta en \mathbb{R}^2 . Probar que L pasa por $(0, 0)$ si y sólo si pasa por $p + \lambda q$ para todo par de puntos p y q de L y para todo $\lambda \in \mathbb{R}$.

SOLUCIÓN:

\Rightarrow Supongo que $(0, 0) \in L$, entonces por el ejercicio 19.a) tengo que $c = 0$. Si $c = 0$, por ejercicio 19.b) tengo que como $q \in L$ entonces $\lambda q \in L$. Luego, por ejercicio 19.c) tengo que como $p \in L$ y $\lambda q \in L$ entonces su suma también: $p + \lambda q \in L$.

\Leftarrow Considero un $p \in L$ cualquiera, y tomo $\lambda = -1$ y $q = p$. Tengo entonces por hipótesis que $p + \lambda q \in L$, pero $p + \lambda q = p + (-1)p = p - p = (0, 0)$ y por lo tanto $(0, 0) \in L$.

□