Álgebra/Álgebra II
Clase 18 - Matriz de una transformación lineal. Diagonalización

FAMAF / UNC

11 de junio de 2024

Observación

Con sólo conocer cuanto vale la transformación en una base conocemos cuanto vale en todo el espacio.

En efecto, a la matriz de la transformación la armamos calculando la transformación en los vectores de una base. Y la proposición anterior nos dice que para calcular la transformación en un vector cualquier debemos multiplicar por esa matriz.

También vale lo siguiente.

Teorema

Sean V un espacio vectorial de dimensión finita sobre el cuerpo $\mathbb{K}$ y $\{v_1, \ldots, v_n\}$ una base ordenada de V. Sean W un espacio vectorial sobre el mismo cuerpo y $\{w_1, \ldots, w_n\}$, vectores cualesquiera de W. Entonces existe una única transformación lineal T de V en W tal que

$$T(v_j) = w_j, \quad j = 1, \ldots, n.$$

Corolario (de la Proposición 5.6.3 de las Notas)

Sea V un espacio vectorial de dimensión finita sobre el cuerpo $\mathbb{K}$, sean $\mathcal{B}$, $\mathcal{B}'$ bases ordenadas de V. Entonces

$$[v]_{\mathcal{B}} = [\mathrm{Id}]_{\mathcal{B}'\mathcal{B}}\,[v]_{\mathcal{B}'}, \quad \forall v \in V.$$

Demostración

Por la Proposición 5.6.3 de las Notas tenemos que

$$[\mathrm{Id}]_{\mathcal{B}'\mathcal{B}}[v]_{\mathcal{B}'} = [\mathrm{Id}(v)]_{\mathcal{B}} = [v]_{\mathcal{B}}.$$

Definición

Sea V un espacio vectorial de dimensión finita sobre el cuerpo $\mathbb{K}$ y sean $\mathcal{B}$ y $\mathcal{B}'$ bases ordenadas de V. La matriz $P = [\mathrm{Id}]_{\mathcal{B}'\mathcal{B}}$ es llamada la *matriz de cambio de base* de la base $\mathcal{B}'$ a la base $\mathcal{B}$.

Teorema (Teorema 5.6.7. de las Notas)

Sean V, W y Z espacios vectoriales de dimensión finita con bases $\mathcal{B}$, $\mathcal{B}'$ y $\mathcal{B}''$, respectivamente.

Sean $T : V \longrightarrow W$ y $U : W \longrightarrow Z$ transformaciones lineales.

Entonces la matriz de la transfomación lineal

$$UT : V \longrightarrow Z,$$

es decir la composición de T con U, satisface

$$[UT]_{\mathcal{B}\mathcal{B}''} = [U]_{\mathcal{B}'\mathcal{B}''}[T]_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}$$

(multiplicación de matrices)

Corolario (Corolario 5.6.8. de las Notas)

Sea V un espacio vectorial de dimensión finita sobre el cuerpo $\mathbb{K}$ y sean $\mathcal{B}$ y $\mathcal{B}'$ bases ordenadas de V. La matriz de cambio de base $P = [\mathrm{Id}]_{\mathcal{B}'\mathcal{B}}$ es invertible y su inversa es $P^{-1} = [\mathrm{Id}]_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}$

Demostración

$$[\mathrm{Id}]_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}P = [\mathrm{Id}]_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}[\mathrm{Id}]_{\mathcal{B}'\mathcal{B}} = [\mathrm{Id}]_{\mathcal{B}'} = \mathrm{Id}\,.$$

Luego $= [\mathrm{Id}]_{\mathcal{B}\mathcal{B}'} = P^{-1}$.

$\square$

Notación

Si $T : V \longrightarrow V$ es Una transformación lineal que va de un espacio en si mismo, diremos que T es un *operador lineal en* V.

Si $\mathcal{B}$ es una base de V, $[T]_{\mathcal{B}}$ denota la matriz de T en la base $\mathcal{B}$ y $\mathcal{B}$, o sea si la base de salida y llegada es la misma, entonces usamos un sólo subíndice.

Corolario (Corolario 5.6.9. de las Notas)

Sea V un espacio vectorial de dimensión finita con base $\mathcal{B}$ y $U, T : V \longrightarrow V$ dos transformaciones lineales. Entonces

(1) $[UT]_{\mathcal{B}} = [U]_{\mathcal{B}}[T]_{\mathcal{B}}$

(2) T es un isomorfismo si y sólo si $[T]_{\mathcal{B}}$ es una matriz invertible. En tal caso

$$[T^{-1}]_{\mathcal{B}} = [T]_{\mathcal{B}}^{-1}$$

Los espacios vectoriales no tienen una base "natural" es decir una que es más importante que otras. Cuando trabajamos con bases estamos haciendo una elección y hay infinitas elecciones posible.

El siguiente teorema nos dice como se relacionan las matrices de una transformación lineal respecto a distintas bases.

Teorema

Sea V un espacio vectorial de dimensión finita sobre el cuerpo $\mathbb{K}$ y sean

$$\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_n\}, \qquad \mathcal{B}' = \{w_1, \ldots, w_n\}$$

bases ordenadas de V. Sea T es un operador lineal sobre V. Entonces, si P es la matriz de cambio de base de $\mathcal{B}'$ a $\mathcal{B}$, se cumple que

$$[T]_{\mathcal{B}'} = P^{-1}[T]_{\mathcal{B}}P.$$

Es decir

$$[T]_{\mathcal{B}'} = [\mathrm{Id}]_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}[T]_{\mathcal{B}}[\mathrm{Id}]_{\mathcal{B}'\mathcal{B}}.$$

Demostración

Tenemos que $T = \mathrm{Id}\, T$ y $T = T\, \mathrm{Id}$, luego

$$\begin{aligned}
[T]_{\mathcal{B}'\mathcal{B}'} &= [\mathrm{Id}\, T]_{\mathcal{B}'\mathcal{B}'} \\
&= [\mathrm{Id}]_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}[T]_{\mathcal{B}'\mathcal{B}} && \text{(teorema 4.5.3)} \\
&= [\mathrm{Id}]_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}[T\, \mathrm{Id}]_{\mathcal{B}'\mathcal{B}} \\
&= [\mathrm{Id}]_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}[T]_{\mathcal{B}\mathcal{B}}[\mathrm{Id}]_{\mathcal{B}'\mathcal{B}} && \text{(teorema 4.5.3).}
\end{aligned}$$

Por lo tanto $[T]_{\mathcal{B}'} = [\mathrm{Id}]_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}[T]_{\mathcal{B}}[\mathrm{Id}]_{\mathcal{B}'\mathcal{B}} = P^{-1}[T]_{\mathcal{B}\mathcal{B}}P$.

□

Las fórmulas

$$
\begin{aligned}
[T]_{\mathcal{B}'} &= [\mathrm{Id}]_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}[T]_{\mathcal{B}}[\mathrm{Id}]_{\mathcal{B}'\mathcal{B}} && (*)\\
[\mathrm{Id}]_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}[\mathrm{Id}]_{\mathcal{B}'\mathcal{B}} &= \mathrm{Id} && (**)\\
[v]_{\mathcal{B}} &= [\mathrm{Id}]_{\mathcal{B}'\mathcal{B}}[v]_{\mathcal{B}'} && (***)
\end{aligned}
$$

son importantes por si mismas y debemos recordarlas.

Como ya dijimos, la matriz $P = [\mathrm{Id}]_{\mathcal{B}'\mathcal{B}}$ es llamada la matriz de cambio de base de la base $\mathcal{B}'$ a la base $\mathcal{B}$.

La matriz de cambio de base nos permite calcular los cambios de coordenadas de los vectores y los cambio de base de las transformaciones lineales.

Observación

Sea $T : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$ operador lineal, $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$ base ordenada y $\mathcal{C}$ la base canónica, entonces

$$[T]_{\mathcal{BC}} = \begin{bmatrix} Tv_1 & Tv_2 & \cdots & Tv_n \end{bmatrix}.$$

Observación

Pudimos probar el teorema de cambio de base usando adecuadamente el teorema de cambio de bases, es decir la fórmula

$$[UT]_{\mathcal{B}\mathcal{B}''} = [U]_{\mathcal{B}'\mathcal{B}''}[T]_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}$$

Con igual argumento podemos deducir otras igualdades que son útiles para armar todas las matrices a partir de matrices asociadas a bases canónicas, que, como dijimos en la observación anterior, es fácil calcularlas.

Observación

Sea $T : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ una transformación lineal.

Sean $\mathcal{B}$ y $\mathcal{B}'$ bases de $\mathbb{R}^n$.

Entonces

$$[T]_{\mathcal{B}'\mathcal{B}} = [\mathrm{Id}]_{\mathcal{C}\mathcal{B}}\,[T]_{\mathcal{C}\mathcal{C}}\,[\mathrm{Id}]_{\mathcal{B}'\mathcal{C}} = [\mathrm{Id}]_{\mathcal{B}\mathcal{C}}^{-1}\,[T]_{\mathcal{C}\mathcal{C}}\,[\mathrm{Id}]_{\mathcal{B}'\mathcal{C}}$$

En palabras: para ir de $\mathcal{B}'$ a $\mathcal{B}$ con T, primero vamos de $\mathcal{B}'$ a $\mathcal{C}$, despues de $\mathcal{C}$ a $\mathcal{C}$ con T y finalmente vamos de $\mathcal{C}$ a $\mathcal{B}$.

Las matrices $[\mathrm{Id}]_{\mathcal{B}\mathcal{C}}$ y $[\mathrm{Id}]_{\mathcal{B}'\mathcal{C}}$ son fáciles de calcular, ubicamos los vectores de $\mathcal{B}$ y $\mathcal{B}'$ como columnas. Similarmente, la matriz de T en la base canónica también es fácil de calcular.

Observación

Sean $\mathcal{B}$ y $\mathcal{B}'$ dos bases de $\mathbb{R}^n$.
Entonces la matriz de cambio de base de $\mathcal{B}'$ a $\mathcal{B}$ es

$$[\mathrm{Id}]_{\mathcal{B}'\mathcal{B}} = [\mathrm{Id}]_{\mathcal{C}\mathcal{B}}\,[\mathrm{Id}]_{\mathcal{B}'\mathcal{C}} = [\mathrm{Id}]_{\mathcal{B}\mathcal{C}}^{-1}\,[\mathrm{Id}]_{\mathcal{B}'\mathcal{C}}$$

En palabras, "para ir de $\mathcal{B}'$ a $\mathcal{B}$, primero vamos de $\mathcal{B}'$ a $\mathcal{C}$ y despues vamos de $\mathcal{C}$ a $\mathcal{B}$".

Las matrices $[\mathrm{Id}]_{\mathcal{B}\mathcal{C}}$ y $[\mathrm{Id}]_{\mathcal{B}'\mathcal{C}}$ son fáciles de calcular, ponemos los vectores de $\mathcal{B}$ y $\mathcal{B}'$ como columnas.

Autovalores y autovectores de una transformación lineal. Diagonalización.

- Ahora veremos los autovalores y autovectores desde una perspectiva de las transformaciones lineales.
- Muchos conceptos y demostraciones se repiten o son similares al caso de la matrices.
- Sea V espacio vectorial de dimensión finita. Un operador lineal en V es *diagonalizable* si existe una base ordenada $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$ de V y $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ tal que

$$T(v_i) = \lambda_i v_i, \qquad 1 \leq i \leq n.$$

- En general, los operadores diagonalizables permiten hacer cálculos sobre ellos en forma sencilla, por ejemplo el núcleo del operador anterior es $\mathrm{Nu}(T) = \langle v_i : \lambda_i = 0 \rangle$ y su imagen es $\mathrm{Im}(T) = \langle v_i : \lambda_i \neq 0 \rangle$.

- Otra propiedad importante de los operadores diagonalizables es que la matriz de la transformación lineal en una base adecuada es diagonal (de allí viene el nombre de diagonalizable).

$$[T]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}.$$

Definición (Definición 5.7.1 de las Notas)

Sea $T : V \longrightarrow V$ una transformación lineal. Un *autovalor de* T es un escalar $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que existe un vector no nulo $v \in V$ con

$$T(v) = \lambda v$$

En tal caso, se dice que v *es un autovector (asociado a* λ*)*.

El *autoespacio asociado a* λ es

$$V_\lambda = \{v \in V \mid T(v) = \lambda v\} = \{\text{autovectores asociados a } \lambda\} \cup \{0\}$$

Lema

Sea $T : V \longrightarrow V$ una transformación lineal y $\mathcal{B}$ una base de V. Las siguientes afirmaciones son equivalentes

- $\lambda \in \mathbb{R}$ y $v \in V$ son autovalor y autovector de T
- $v \in \mathrm{Nu}(T - \lambda\,\mathrm{Id})$
- $\lambda \in \mathbb{R}$ y $[v]_{\mathcal{B}}$ son autovalor y autovector de $[T]_{\mathcal{B}}$

Demostración

$$T(v) = \lambda v \Leftrightarrow T(v) - \lambda v = (T - \lambda\,\mathrm{Id})v = 0$$

$$T(v) = \lambda v \Leftrightarrow \lambda[v]_{\mathcal{B}} = [\lambda v]_{\mathcal{B}} = [T(v)]_{\mathcal{B}} = [T]_{\mathcal{B}}\,[v]_{\mathcal{B}}$$

□

Consecuencia

- Para calcular los autovalores y autovectores de una transformación T, elegimos una base $\mathcal{B}$ y calculamos los autovalores y autovectores de $[T]_{\mathcal{B}}$.
- Por el lema anterior, no importa que base elijamos, la matriz de una transformación lineal tiene los autovalores de la transformación lineal.

  También podemos probarlo directamente utilizando $[T]_{\mathcal{B}'} = [\mathrm{Id}]_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}[T]_{\mathcal{B}}[\mathrm{Id}]_{\mathcal{B}'\mathcal{B}}$.

Teorema

Sea $T : V \longrightarrow V$ una tranfomación lineal. Entonces V_λ es un subespacio vectorial.

La demostración es como en el caso de matrices.

Notar que podemos definir V_λ para cualquier $\lambda \in \mathbb{R}$. Así, λ es autovalor si y sólo si $V_\lambda \neq 0$

Teorema (Teorema 5.7.3 de las Notas)

Sea $T : V \longrightarrow V$ una transformación lineal.

Sean v_1, ..., v_m autovectores de T con autovalores λ_1, ..., λ_m, respectivamente.

Si todos los autovalores son distintos, entonces los vectores v_1, ..., v_m son LI

Demostración

La demostración es por inducción.

Caso base. Si $m = 1$, entonces vale porque los autovectores son no nulos por definición y en tal caso el conjunto $\{v_1\}$ es LI.

Paso inductivo. Para $m + 1$ procedemos como sigue.

Sean $c_1, \dots, c_{m+1}$ escalares tales que

$$c_1 v_1 + \cdots + c_m v_m + c_{m+1} v_{m+1} = 0 \qquad (*)$$

$$\begin{aligned} T(*) &\rightsquigarrow c_1 \lambda_1 v_1 + \cdots + c_m \lambda_m v_m + c_{m+1} \lambda_{m+1} v_{m+1} = 0 \\ \lambda_{m+1} \cdot (*) &\rightsquigarrow c_1 \lambda_{m+1} v_1 + \cdots + c_m \lambda_{m+1} v_m + c_{m+1} \lambda_{m+1} v_{m+1} = 0 \end{aligned}$$

Restando miembro a miembro obtenemos

$$c_1(\lambda_1 - \lambda_{m+1}) v_1 + \cdots + c_m(\lambda_m - \lambda_{m+1}) v_m = 0$$

Por (HI), $c_i(\lambda_i - \lambda_{m+1}) = 0$ para todo $1 \leq i \leq m$.

Dado que los autovalores son distintos, $c_i = 0$ para todo $1 \leq i \leq m$. Por lo tanto $c_{m+1} = 0$ y los vectores son LI. $\square$

Definición

Sea V un espacio vectorial de dimensión finita y $T : V \longrightarrow V$ una transformación lineal. Se dice que T es *diagonalizable* si V tiene una base formada por autovectores.

Lema

Sea $T : V \longrightarrow V$ una transformación lineal diagonalizable. Sea $\mathcal{B} = \{v_1, ..., v_n\}$ una base de autovectores de T con autovalores asociados λ_1, ..., λ_n. Entonces

$$[T]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & & & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \cdots & & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & & & \vdots \\ & \vdots & & & & \\ & & & & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & & 0 & \lambda_n \end{bmatrix}$$

En efecto, las columnas de $[T]_{\mathcal{B}}$ son los vectores de coordenada

$$[T(v_i)]_{\mathcal{B}} = [\lambda_i v_i]_{\mathcal{B}} = \lambda_i [v_i]_{\mathcal{B}}$$

y $[v_i]_{\mathcal{B}}$ tiene todas entradas 0 excepto un 1 en el lugar i.

Se preguntarán cómo saber si una transformación lineal es diagonalizable.

La primera respuesta es: calcular todos los autovalores y autovectores.

A continuación veremos algunos criterios a tener en cuenta.

Corolario

Si V es un espacio vectorial de dimensión n y $T : V \longrightarrow V$ es una transformación lineal con n autovalores distintos entonces T es diagonalizable.

Demostración

En efecto, cada autovalor tiene al menos un autovector.

Elijamos un autovector v_1, ..., v_n para cada autovalor.

Por el Teorema de la página 19 estos vectores son LI.

Dado que son tantos como la dimensión de V forman una base.

$\square$

Corolario

Si V es un espacio vectorial de dimensión n y $T : V \longrightarrow V$ es una transformación lineal con autovalores λ_1, ..., λ_n, todos distintos entre sí. Sean v_1, ..., v_n autovectores asociados a λ_1, ..., λ_n, respectivamente. Entonces $\{v_1, ..., v_n\}$ es una base de V.

Demostración

Poe el teorema anterior v_1, ..., v_n son LI. Como $n = \dim(V)$, entonces $\{v_1, ..., v_n\}$ es una base de V.

$\square$

Proposición

Sea $T : V \to V$ *con* $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$ *una base de autovectores con autovalores* $\lambda_1, \dots, \lambda_n$.

Entonces $\mathrm{Nu}(T) = \langle v_i : \lambda_i = 0 \rangle$ *e* $\mathrm{Im}(T) = \langle v_i : \lambda_i \neq 0 \rangle$.

Demostración

Reordenemos: tal que $\lambda_i = 0$ para $1 \leq i \leq k$ y $\lambda_i \neq 0$ para $k < i \leq n$.

$$v \in V \quad \Rightarrow \quad v = x_1 v_1 + \cdots + x_k v_k + x_{k+1} v_{k+1} + \cdots + x_n v_n,$$

y entonces

$$T(v) = \lambda_{k+1} x_{k+1} v_{k+1} + \cdots + \lambda_n x_n v_n. \tag{1}$$

Luego

$$\begin{aligned} T(v) = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad x_{k+1} = \cdots = x_n = 0 \quad \Leftrightarrow \quad v = x_1 v_1 + \cdots + x_k v_k \\ &\Leftrightarrow \quad v \in \langle v_i : \lambda_i = 0 \rangle. \end{aligned}$$

También es claro por la ecuación (1) que

$$\begin{aligned}\operatorname{Im}(T) &= \{\lambda_{k+1}x_{k+1}v_{k+1} + \cdots + \lambda_n x_n v_n : x_i \in \mathbb{K}\} \\ &= \{\mu_{k+1}v_{k+1} + \cdots + \mu_n v_n : \mu_i \in \mathbb{K}\} \\ &= \langle v_i : \lambda_i \neq 0\rangle.\end{aligned}$$

$\square$

Definición

Sea V un espacio vectorial de dimensión finita y $T : V \longrightarrow V$ una transformación lineal. El *polinomio característico de* T es el polinomio característico de la matriz $[T]_{\mathcal{B}}$ donde $\mathcal{B}$ es una base de V. Es decir,

$$\chi_T(x) = \det([T]_{\mathcal{B}} - x\,\mathrm{Id})$$

Observación

Notar que no importa que base usemos para calcular el polinomio característico dado que $[T]_{\mathcal{B}'} = P^{-1}[T]_{\mathcal{B}}P$.

$$\begin{aligned}\det([T]'_{\mathcal{B}} - x\,\mathrm{Id}) &= \det(P^{-1}[T]_{\mathcal{B}}P - xP^{-1}P) \\ &= P^{-1}\det([T]_{\mathcal{B}} - x\,\mathrm{Id})P = \det([T]_{\mathcal{B}} - x\,\mathrm{Id}).\end{aligned}$$

Proposición

Sea $T : V \longrightarrow V$ una transformación lineal. Entonces λ es autovalor de T si y sólo si λ es raíz del polinomio característico.

Corolario

Sea $T : V \longrightarrow V$ una transformación lineal. Supongamos que

$$\chi_T(x) = (-1)^n (x - \lambda_1)^{d_1} \cdots (x - \lambda_m)^{d_m}$$

Entonces

(1) $1 \leq \dim V_{\lambda_i} \leq d_i$ para todo i.

(2) T es diagonalizable si y sólo si $\dim V_{\lambda_i} = d_i$ para todo i.

El punto de partida de esta sección es la siguiente simple observación.

Observación

Sea $T : V \longrightarrow W$ una tranfomación lineal. Si conocemos cuanto vale $T(v_i)$ para todos los vectores de una base $\mathcal{B} = \{v_1, ..., v_n\}$ de V, entonces podemos calcular $T(v)$ para todo $v \in V$.

Pues al ser $\mathcal{B}$ una base, si $v \in V$ entonces $v = x_1 v_1 + \cdots + x_n v_n$ y por lo tanto

$$T(v) = x_1 T(v_1) + \cdots + x_n T(v_n)$$