

Álgebra/Álgebra II

Clase 4 -Sistemas de ecuaciones lineales 2

FAMAF / UNC

21 de marzo de 2024

En la clase 3 motivamos la idea general del método de Gauss a través de ejemplos y vimos el concepto de sistemas de ecuaciones lineales equivalentes.

En esta clase presentaremos las nociones de:

- Matriz.
- Matriz ampliada.
- Operaciones elementales por fila.

Relacionaremos todos estos conceptos con los sistemas de ecuaciones lineales.

- Matriz: representará un sistema de ecuaciones homogéneo.
- Matriz ampliada: representara un sistema de ecuaciones lineales no homogéneo.
- Operaciones elementales por fila: representarán ciertas operaciones entre las diferentes ecuaciones del sistema.

Definición

Una *matriz* $m \times n$ es un arreglo de números reales de m filas y n columnas.

$\mathbb{R}^{m \times n}$ y $M_{m \times n}(\mathbb{R})$ denotan el conjunto de matrices $m \times n$.

Ejemplos

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & \pi \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \sqrt{2} & \frac{1}{2} & 9 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 10 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Convenciones

La notación $A = [a_{ij}] \in \mathbb{R}^{m \times n}$ quiere decir que A es una matriz $m \times n$ de la siguiente forma

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

La *fila* i de una matriz es la fila (una n -upla) ubicada en la posición i desde arriba:

$$F_i \longrightarrow \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

La *columna* i de una matriz es la columna (una m -upla) ubicada en la posición i desde la izquierda:

$$\begin{array}{c} C_i \\ \downarrow \\ \left[\begin{array}{cccccc} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2i} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mi} & \cdots & a_{mn} \end{array} \right] \end{array}$$

Convenciones

- Sea $A = [a_{ij}] \in \mathbb{R}^{m \times n}$ una matriz. Escribiremos $[A]_{ij}$ para denotar la entrada a_{ij} de A .
- Dos matrices del mismo tamaño $A = [a_{ij}] \in \mathbb{R}^{m \times n}$ y $B = [b_{ij}] \in \mathbb{R}^{m \times n}$ son iguales si cada una de sus entradas lo son:

$$A = B \iff a_{ij} = b_{ij}, \quad 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n$$

Sistemas de ecuaciones

Usaremos matrices para representar los sistemas de ecuaciones.

Definición

Si $A = [a_{ij}] \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $X = [x_i] \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ e $Y = [y_i] \in \mathbb{R}^{m \times 1}$ entonces

$$AX = Y$$

representa al sistema de ecuaciones

$$\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & y_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & y_2 \\ \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \cdots & + & a_{mn}x_n & = & y_m. \end{array} \quad (E)$$

(se usa en la pantalla 20)

También lo podemos denotar

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix}$$

Ejemplo

El sistema de ecuaciones

$$\begin{array}{rrcr} x_1 & & +2x_3 & = 1 \\ x_1 & -3x_2 & +3x_3 & = 2 \\ 2x_1 & -3x_2 & +5x_3 & = 3 \\ x_1 & & +3x_3 & = -1 \end{array}$$

es representado de la forma $AX = Y$:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & -3 & 3 \\ 2 & -3 & 5 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}$$

- Si una incógnita no aparece en una ecuación, el correspondiente coeficiente de la matriz es 0.
- La cantidad de incógnitas es igual a la cantidad de columnas de la matriz A .

Operaciones elementales por fila: motivación

Las *operaciones elementales por fila* son:

- transformaciones con las cuales podemos modificar una matriz de manera tal que los correspondientes sistemas de ecuaciones tengan las mismas soluciones.
- la versión “matricial” de las combinaciones lineales de ecuaciones que hicimos en la clase anterior para encontrar las soluciones de los sistemas.

Observación

Hay tres tipos de operaciones las cuales definiremos a continuación.

En una matriz A de $m \times n$, cada fila puede ser considerada un vector en \mathbb{R}^n .

Si la fila i de A es

$$[a_{i1} \quad a_{i2} \quad \cdots \quad a_{in}],$$

y la denotamos $F_i(A)$ o simplemente F_i si A . Si $c \in \mathbb{K}$, entonces

- $cF_i = [ca_{i1} \quad ca_{i2} \quad \cdots \quad ca_{in}]$.
- $F_r + F_s = [a_{r1} + a_{s1} \quad a_{r2} + a_{s2} \quad \cdots \quad a_{rn} + a_{sn}]$.
- $F_i = [0 \quad 0 \quad \cdots \quad 0]$, la fila nula.

Operaciones elementales por fila: definición

Definición

Sea $A = [a_{ij}]$ una matriz $m \times n$, diremos que e es una *operación elemental por fila* si aplicada a la matriz A se obtiene $e(A)$ de la siguiente manera:

- E1. multiplicando la fila r por una constante $c \neq 0$, o
- E2. cambiando la fila F_r por $F_r + tF_s$ con $r \neq s$, para algún $t \in \mathbb{K}$, o
- E3. permutando la fila r por la fila s .

E1, E2 y E3 son tres tipos de operaciones elementales,

E1: multiplicar la fila i por un número real $c \neq 0$.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \textcolor{red}{a_{i1}} & \textcolor{red}{a_{i2}} & \cdots & \textcolor{red}{a_{in}} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \xrightarrow{c F_i} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \textcolor{red}{c a_{i1}} & \textcolor{red}{c a_{i2}} & \cdots & \textcolor{red}{c a_{in}} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Ejemplo

Multiplicar la primer fila por -2 :

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} -2 & -4 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$$

E2: sumar a la fila r un múltiplo de la fila s .

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{sn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{r1} & a_{r2} & \cdots & a_{rn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \xrightarrow{F_r + tF_s} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{sn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{r1} + ta_{s1} & a_{r2} + ta_{s2} & \cdots & a_{rn} + ta_{sn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Ejemplo

Sumar a la segunda fila la primer fila multiplicada por 3:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} \xrightarrow{F_2 + 3F_1} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 + 3 \cdot 1 & 4 + 3 \cdot 2 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 6 & 10 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$$

E3: intercambiar las fila r y s .

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{r1} & a_{r2} & \cdots & a_{rn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{sn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \xrightarrow{F_r \leftrightarrow F_s} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{sn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{r1} & a_{r2} & \cdots & a_{rn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Ejemplo

Intercambiar la segunda y tercer fila:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} \xrightarrow{F_3 \leftrightarrow F_2} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 6 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

Convenciones

- Si A es una matriz, $e(A)$ denotará la matriz que obtenemos después de modificar a A por cierta operación elemental e .

Ejemplo

Si e es la operación intercambiar la segunda y tercer fila y $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$,

entonces $e(A) = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 6 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$.

- Como hicimos en los ejemplos, cuando le apliquemos una operación elemental a una matriz especificaremos arriba de una flecha que operación aplicamos:

$$A \xrightarrow{e} e(A)$$

Esta notación es obligatoria para la corrección de exámenes.

Teorema

A cada operación elemental por fila e le corresponde otra operación elemental e' (del mismo tipo que e) tal que $e'(e(A)) = A$ y $e(e'(A)) = A$. En otras palabras, la operación inversa de una operación elemental es otra operación elemental del mismo tipo.

Demostración

- E1. Para $c \neq 0$, la operación inversa de cF_r es $\frac{1}{c}F_r$.
- E2. La operación inversa de $F_r + cF_s$ es $F_r - cF_s$ ($r \neq s$).
- E3. La operación inversa de permutar la fila r por la fila s es la misma operación.



Observación

- Las operaciones elementales son operaciones lineales entre filas, es decir del tipo $sF + tF'$ donde $s, t \in \mathbb{R}$ y F, F' son filas.
- De una sucesión de operaciones elementales obtenemos una matriz donde cada fila es combinación lineal de las filas de la matriz original.

Definición

Consideremos un sistema como en (E) y sea A la matriz correspondiente al sistema. La *matriz ampliada* del sistema es

$$A' = \left[\begin{array}{ccc|c} a_{11} & \cdots & a_{1n} & y_1 \\ a_{21} & \cdots & a_{2n} & y_2 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} & y_m \end{array} \right] \quad (1)$$

que también podemos denotar

$$A' = [A|Y].$$

Observación

Hay una correspondencia biunívoca entre

sistemas de ecuaciones lineales \longleftrightarrow matrices ampliadas.

Ejemplo

Dado el sistema

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & -3 & 3 \\ 2 & -3 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix},$$

la matriz ampliada es

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & -3 & 3 & 2 \\ 2 & -3 & 5 & 3 \end{array} \right].$$

Operaciones elementales \longrightarrow operaciones entre ecuaciones

Sea $AX = Y$ un sistema de ecuaciones lineales y $[A|Y]$ su matriz ampliada.

- La matriz ampliada, es una matriz con una columna más. La raya vertical es para distinguir los coeficientes de las variables de las constantes a las que se igualan las ecuaciones.
- Es decir, si el sistema es $AX = Y$ donde A es matriz $m \times n$, entonces la matriz ampliada es $[A|Y]$ es una matriz $m \times (n + 1)$, es decir de m -filas y $n + 1$ -columnas.
- Podemos aplicar la operaciones elementales por fila a una matriz ampliada, y eso es lo que haremos en las próximas pantallas.

Operaciones elementales por fila en matrices ampliadas

La relación biunívoca entre sistemas de ecuaciones lineales y matrices ampliadas, resulta en:

$$\begin{array}{l} \text{Multiplicar fila } r \text{ por } c \neq 0 \\ \updownarrow \\ \text{multiplicar ecuación } r\text{-ésima por } c \neq 0. \end{array} \quad (\text{E1})$$

$$\begin{array}{l} \text{Cambiar fila } F_r \text{ por } F_r + tF_s \text{ con } r \neq s, \text{ para algún } t \in \mathbb{K} \\ \updownarrow \\ \text{sumar a la ecuación } r\text{-ésima } t \text{ veces la ecuación } s\text{-ésima.} \end{array} \quad (\text{E2})$$

$$\begin{array}{l} \text{Permutar fila } r \text{ por fila } s \\ \updownarrow \\ \text{permutar la ecuación } r\text{-ésima por la ecuación } s\text{-ésima.} \end{array} \quad (\text{E3})$$

Teorema

Sea $[A|Y]$ la matriz ampliada de un sistema de ecuaciones lineales y sea $[B|Z]$ una matriz que se obtiene a partir de $[A|Y]$ por medio de operaciones elementales. Entonces, los sistemas $[A|Y]$ y $[B|Z]$ tienen las mismas soluciones.

Demostración

- $[A|Y] \rightsquigarrow [B|Z] \Rightarrow \text{filas}[B|Z] = \text{c. l. filas}[A|Y]$.
- Luego, $\text{Soluciones}[A|Y] \Rightarrow \text{Soluciones}[B|Z]$.

Como toda operación elemental tiene inversa \Rightarrow

- $[B|Z] \rightsquigarrow [A|Y] \Rightarrow \text{filas}[A|Y] = \text{c. l. filas}[B|Z]$.
- Luego, $\text{Soluciones}[B|Z] \Rightarrow \text{Soluciones}[A|Y]$.

Por lo tanto $\text{Soluciones}[A|Y] = \text{Soluciones}[B|Z]$.



Ejemplo

Resolvamos el siguiente sistema:

$$2x_1 - 6x_2 + x_3 = 2$$

$$x_1 - 4x_2 = 1$$

$$2x_1 - 4x_2 - x_3 = 0,$$

para $x_i \in \mathbb{R}$ ($1 \leq i \leq 4$).

La matriz ampliada correspondiente a este sistema de ecuaciones es

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -6 & 1 & 2 \\ 1 & -4 & 0 & 1 \\ 2 & -4 & -1 & 0 \end{array} \right].$$

Encontraremos una matriz que nos dará un sistema de ecuaciones equivalente, pero con soluciones mucho más evidentes:

$$\begin{aligned}
 & \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -6 & 1 & 2 \\ 1 & -4 & 0 & 1 \\ 2 & -4 & -1 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{F_1 \leftrightarrow F_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -4 & 0 & 1 \\ 2 & -6 & 1 & 2 \\ 2 & -4 & -1 & 0 \end{array} \right] \\
 & \xrightarrow[\begin{array}{l} F_2 - 2F_1 \\ F_3 - 2F_1 \end{array}]{F_2/2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -4 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & -1 & -2 \end{array} \right] \xrightarrow{F_2/2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -4 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1/2 & 0 \\ 0 & 4 & -1 & -2 \end{array} \right] \\
 & \xrightarrow[\begin{array}{l} F_1 + 4F_2 \\ F_3 - 4F_2 \end{array}]{F_3/(-3)} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & -2 \end{array} \right] \xrightarrow{F_3/(-3)} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2/3 \end{array} \right] \\
 & \xrightarrow[\begin{array}{l} F_1 - 2F_3 \\ F_2 - (1/2)F_3 \end{array}]{F_1 - 2F_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -1/3 \\ 0 & 1 & 0 & -1/3 \\ 0 & 0 & 1 & 2/3 \end{array} \right].
 \end{aligned}$$

Volvamos a las ecuaciones: el nuevo sistema de ecuaciones, equivalente al original, es

$$x_1 = -\frac{1}{3}$$

$$x_2 = -\frac{1}{3}$$

$$x_3 = \frac{2}{3},$$

Por lo tanto, el sistema tiene una sola solución:

$$\left(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right).$$

Sistemas homogéneos

Si el sistema de ecuaciones lineales es homogéneo, es decir del tipo $AX = 0$, entonces la matriz ampliada es

$$[A|0].$$

Haciendo operaciones elementales sucesivas llegamos a otra matriz

$$[B|0].$$

Luego, en este caso (sistema homogéneo) la convención es no escribir la matriz ampliada para resolver el sistema, sino trabajar directamente sobre la matriz A .