Práctico 9

Coordenadas y matrices de transformaciones lineales

Objetivos.

- Aprender a calcular coordenadas y la matriz de cambio de base.
- Aprender a calcular la matriz de una transformación lineal.
- Saber decidir si una transformación lineal es diagonalizable.
- Aprender a construir transformaciones lineales que satisfagan las propiedades solicitadas.

Ejercicios.

(1) Sean $\mathcal{C}_n$, $n = 2, 3$, las bases canónicas de $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$ respectivamente. Sean $\mathcal{B}_2 = \{(1,0),(1,1)\}$ y $\mathcal{B}_3 = \{(1,0,0),(1,1,0),(1,1,1)\}$ bases de $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$, respectivamente.
  (a) Escribir la matriz de cambio de base $P_{\mathcal{C}_n,\mathcal{B}_n}$ de $\mathcal{C}_n$ a $\mathcal{B}_n$, $n = 2, 3$.
  (b) Escribir la matriz de cambio de base $P_{\mathcal{B}_n,\mathcal{C}_n}$ de $\mathcal{B}_n$ a $\mathcal{C}_n$, $n = 2, 3$.
  (c) ¿Qué relación hay entre $P_{\mathcal{C}_n,\mathcal{B}_n}$ y $P_{\mathcal{B}_n,\mathcal{C}_n}$?
  (d) Determinar los vectores de $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$ que tienen coordenadas $(1, 4)$ y $(1, 1, 1)$ en las bases $\mathcal{B}_2$ y $\mathcal{B}_3$, respectivamente.
  (e) Determinar las coordenadas de $(2, 3)$ y $(1, 2, 3)$ en las bases $\mathcal{B}_2$ y $\mathcal{B}_3$, respectivamente.

(2) Sean $\mathcal{C}_n, \mathcal{B}_n$ como en el ejercicio anterior y consideremos las transformaciones lineales
  - $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $T(x, y) = (x - y, x + y, 2x + 3y)$.
  - $S : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $S(x, y, z) = (x - y + z, 2x - y + 2z)$.

  (a) Dar las matrices de las transformaciones respecto de las bases $\mathcal{B}_n$ y $\mathcal{C}_n$.
  (b) Dar las matrices de las transformaciones respecto de las bases $\mathcal{C}_n$ y $\mathcal{B}_n$.
  (c) Dar las matrices de las transformaciones respecto de las bases $\mathcal{B}_n$ y $\mathcal{B}_n$.
  (d) Calcular $[TS]_{\mathcal{B}_3}$ y verificar que es igual al producto $[T]_{\mathcal{C}_2\mathcal{B}_3}[S]_{\mathcal{B}_3\mathcal{C}_2}$.

(3) Para cada una de las siguientes transformaciones lineales, hallar sus autovalores, y para cada uno de ellos, dar una base de autovectores del espacio propio asociado. Luego, decir si la transformación considerada es o no diagonalizable.
  (a) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $T(x, y) = (y, 0)$.
  (b) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $T(x, y, z) = (x + 2z, -x - y + z, x + 2y + z)$.
  (c) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $T(x, y, z) = (4x + y + 5z, 4x - y + 3z, -12x + y - 11z)$.
  (d) $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$, $T(x, y, z, w) = (2x - y, x + 4y, z + 3w, z - w)$.

(4) Definir en cada caso una transformación lineal $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ que satisfaga las condiciones requeridas. ¿Es posible definir más de una transformación lineal?
  (a) $(1, 0, 0) \in \mathrm{Nu}(T)$
  (b) $(1, 0, 0) \in \mathrm{Im}(T)$
  (c) $(1, 1, 0) \in \mathrm{Im}(T)$ y $(0, 1, 1), (1, 2, 1) \in \mathrm{Nu}(T)$
  (d) $(1, 1, 0) \in \mathrm{Im}(T) \cap \mathrm{Nu}(T)$ y $(0, 1, 1)$ es autovector con autovalor 2.
  (e) Los vectores de la base $\mathcal{B}_3$ son autovectores con autovalores 1, 2 y 3 respectivamente.
  (f) La imagen de T es el subespacio generado por $(1, 0, -1)$ y $(1, 2, 2)$
  (g) El núcleo de T está generado por los vectores $(1, 1, 0)$, $(1, 0, 0)$ y $(2, 1, 0)$.

(5) Sea V un espacio vectorial con base $\mathcal{B} = \{v_1, ..., v_n\}$ y $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ una matriz. Sea $\mathcal{B}' = \{v'_1, ..., v'_n\}$ donde

$$v'_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} v_i \quad \text{para todo } 1 \leq j \leq n.$$

Probar que $\mathcal{B}'$ es una base de V si y sólo si A es inversible. En tal caso determinar la matriz de cambio de base de la base $\mathcal{B}'$ a la base $\mathcal{B}$ y viceversa.