

# Álgebra/Álgebra II

## Clase 5 -Sistemas de ecuaciones lineales 3

FAMAF / UNC

26 de marzo de 2024

En esta clase veremos:

- Qué operaciones hacer para transformar un sistema cualquiera en otro donde las ecuaciones se resuelven fácilmente.
- Cómo saber si el sistema tiene o no tiene solución y en el caso de tener solución, si tiene una o infinitas.

Todo se hará sistemáticamente pasando de sistemas de ecuaciones a matrices y reduciendo, vía el algoritmo de Gauss-Jordan, la matriz del sistema a una matriz MERF.

## Definición

Una matriz  $A$  de  $m \times n$  se llama *reducida por filas* o *MRF* si

- (a) la primera entrada no nula de una fila de  $A$  es 1. Este 1 es llamado *1 principal*.
- (b) Cada columna de  $A$  que contiene un 1 principal tiene todos los otros elementos iguales a 0.

## Ejemplo

Las siguientes matrices son MRF:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix};$$

## Ejemplo

Las siguientes matrices, no son MRF:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ no cumple (a),} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ no cumple (b).}$$

## Definición

Una matriz  $A$  de  $m \times n$  es *escalón reducida por fila* o *MERF* si, es MRF y

- c) todas las filas cuyas entradas son todas iguales a cero están al final de la matriz, y
- d) en dos filas consecutivas no nulas el 1 principal de la fila inferior está más a la derecha que el 1 principal de la fila superior.

## Ejemplo

Las siguientes matrices son MERF:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

## Ejemplo

Las siguientes matrices son MRF, pero no MERF:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \text{ no cumple (c),} \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ no cumple (d).}$$

Las siguientes matrices, no son MRF:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ no cumple (a),} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ no cumple (b).}$$

En general una matriz escalón reducida por fila (MERF) tiene la siguiente forma

$$\begin{bmatrix} 0 & \dots & 1 & * & 0 & * & * & 0 & * & * \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 1 & * & * & 0 & * & * \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & \dots & 1 & * & * \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & \dots & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

## Ejemplo

Sea  $\text{Id}_n$  la matriz  $n \times n$  definida

$$[\text{Id}_n]_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j, \\ 0 & \text{si } i \neq j, \end{cases} \quad \text{o bien} \quad \text{Id}_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

Llamaremos a  $\text{Id}_n$  la *matriz identidad*  $n \times n$ . Observar que  $\text{Id}_n$  es una matriz escalón reducida por fila.



## Observación

Es muy fácil obtener la solución de un sistema  $AX = Y$  donde  $A$  es una MERF.

## Ejemplo

La solución del sistema  $AX = Y$  con

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad Y = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

es  $(x_1, x_2, x_3) = (-1, 0, 1)$ .

En efecto, si escribimos explícitamente el sistema la solución queda determinada automáticamente:

$$\begin{cases} x_1 = -1 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = 1 \end{cases}$$

## Ejemplo

El conjunto de soluciones del sistema  $AX = Y$  con

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad Y = \begin{bmatrix} 1 \\ -\frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

es

$$\left\{ \left( -2x_3 + 1, \frac{1}{3}x_3 - \frac{1}{3}, x_3 \right) \mid x_3 \in \mathbb{R} \right\}.$$

En efecto, si escribimos explícitamente el sistema:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_3 = 1 \\ x_2 - \frac{1}{3}x_3 = -\frac{1}{3} \end{cases} \quad \implies \quad \begin{cases} x_1 = -2x_3 + 1 \\ x_2 = \frac{1}{3}x_3 - \frac{1}{3} \end{cases}$$

## Teorema

*Toda matriz  $m \times n$  sobre  $\mathbb{K}$  es equivalente por fila a una matriz escalón reducida por fila.*

### Idea de la demostración

- P1. Nos ubicamos en la primera fila.
- P2. Si la fila es 0 y no es la última, pasar a la fila siguiente y de nuevo P2.
- P3. Si la fila no es 0,
  - P3.1 si el primera entrada no nula está en la columna  $k$  y su valor es  $c$ , dividir la fila por  $c$  (ahora la primera entrada no nula vale 1),
  - P3.2 con operaciones elementales del tipo  $F_r + tF_s$  hacer 0 todas las entradas en la columna  $k$  (menos la de la columna actual).
- P4. Si la fila no es la última, pasar a la fila siguiente e ir a P2.
- P5. Intercambiando las filas, ponemos los 1 principal de forma escalonada y las filas nulas al final.



## Observación

La demostración del teorema anterior nos da un algoritmo para encontrar MERF.

# Método de Gauss

Sea  $AX = Y$  el sistema de ecuaciones lineales. El *método de Gauss* consiste en llevar a cabo los siguientes pasos:

- Escribir  $[A|Y]$  la matriz extendida del sistema
- Reducimos la matriz  $[A|Y] \rightsquigarrow [R|Z]$  de tal forma que  $R$  sea MERF (para ello utilizamos el algoritmo  $P1 \cdots P5$ ).
- El sistema  $RX = Z$  tiene soluciones fáciles de encontrar.

Claramente la parte más importante del método de Gauss es utilizar el algoritmo  $P1 \cdots P5$ , que llamaremos el *algoritmo de Gauss-Jordan* o *eliminación de Gauss-Jordan*.

# Algoritmo de Gauss-Jordan

Sea  $A$  una matriz  $m \times n$ . Repitamos el algoritmo:

- P1. Nos ubicamos en la primera fila.
- P2. Si la fila es 0 y no es la última, pasar a la fila siguiente y de nuevo P2.
- P3. Si la fila no es 0,
  - P3.1 si el primera entrada no nula está en la columna  $k$  y su valor es  $c$ , dividir la fila por  $c$  (ahora la primera entrada no nula vale 1),
  - P3.2 con operaciones elementales del tipo  $F_r + tF_s$  hacer 0 todas las entradas en la columna  $k$  (menos la de la columna actual).
- P4. Si la fila no es la última, pasar a la fila siguiente e ir a P2.
- P5. Intercambiando las filas, ponemos los 1 principal de forma escalonada y las filas nulas al final.

La matriz que se obtiene es una MERF.

## Ejemplo

Aplicaremos el algoritmo de Gauss-Jordan a la siguiente matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & -3 & 3 & 2 \\ 2 & -3 & 5 & 3 \end{bmatrix}$$

Como la primera fila es no nulo, pasamos a P3:

$$A \xrightarrow{F_2 - F_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & 5 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{F_3 - 2F_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Por P4 pasamos a trabajar con la fila 2 y pasamos a P2. Como la fila no es nula hacemos P3.1

$$\xrightarrow{-\frac{F_3}{3}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & -3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Ahora P3.2:

$$\xrightarrow{F_3+3F_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Esta última matriz es una MERF. En este caso, no hizo falta usar P5, es decir permutar filas.



## Ejemplo del método de Gauss

A continuación explicaremos en 3 pasos el método de Gauss para resolver el sistema de ecuaciones

$$AX = Y.$$

Ejemplificaremos los pasos con el sistema

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & -3 & 3 \\ 2 & -3 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \quad (E)$$

## Primer paso: Matriz ampliada

- Armar la matriz ampliada:

$$A' = [A|Y],$$

es decir, le agregamos a  $A$  una columna igual a  $Y$ .

En nuestro caso, la matriz ampliada del sistema ( $E$ ) es

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & -3 & 3 & 2 \\ 2 & -3 & 5 & 3 \end{array} \right]$$

Observar que esta matriz es igual a la del ejemplo anterior.

## Segundo paso: reducir la matriz ampliada (Gauss-Jordan)

- Usar operaciones elementales por filas para transformar la matriz ampliada  $A'$  en una matriz  $B'$  de la forma

$$B' = [B|Z]$$

donde  $B$  es una MERF y  $Z$  es una columna.

En el ejemplo:

$$\begin{aligned} A' = \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & -3 & 3 & 2 \\ 2 & -3 & 5 & 3 \end{array} \right] &\xrightarrow{F_2 - F_1} \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & 5 & 3 \end{array} \right] &\xrightarrow{F_3 - 2F_1} \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 1 & 1 \end{array} \right] \\ &\xrightarrow{-\frac{1}{3}F_2} \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & -3 & 1 & 1 \end{array} \right] &\xrightarrow{F_3 - 3F_2} \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] = B' \end{aligned}$$

## Tercer paso: despejar y describir el conjunto de soluciones

- Escribir explícitamente el sistema  $BX = Z$ .
- Despejar en cada ecuación la incógnita correspondiente al 1 principal.
- Describir el conjunto de soluciones. Hay tres opciones: tener sólo una solución; infinitas, parametrizadas por las incógnitas que no corresponden a 1's principales; no tener solución.

En el ejemplo:

$$BX = Z \rightsquigarrow \begin{cases} x_1 + 2x_3 = 1 \\ x_2 - \frac{1}{3}x_3 = -\frac{1}{3}x_3 \end{cases} \rightsquigarrow \begin{cases} x_1 = -2x_3 + 1 \\ x_2 = \frac{1}{3}x_3 - \frac{1}{3}x_3 \end{cases}$$

## Tercer paso (continuación)

Entonces el conjunto de soluciones del sistema  $AX = Y$  es

$$\left\{ \left( -2x_3 + 1, \frac{1}{3}x_3 - \frac{1}{3}, x_3 \right) \mid x_3 \in \mathbb{R} \right\}.$$

Por ej., si  $x_3 = 1$ , entonces  $(-1, 0, 1)$  es una solución del sistema.

## Ejemplo

Resolver el sistema de ecuaciones:

$$(E) \begin{cases} x_2 - x_3 + x_4 = 1 \\ 2x_3 + x_4 = 3 \\ x_1 + x_2 - x_4 = 1 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = 2 \end{cases}$$

### Solución

El conjunto de soluciones es

$$\text{Sol}(E) = \left\{ \left[ \frac{5}{2}x_4 - \frac{3}{2}, -\frac{3}{2}x_4 + \frac{5}{2}, -\frac{1}{2}x_4 + \frac{3}{2}, x_4 \right] \mid x_4 \in \mathbb{R} \right\}$$

Reducimos la matriz ampliada siguiendo al pie de la letra el algoritmo:

$$A' = \left[ \begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 0 & 2 \end{array} \right] \xrightarrow[\substack{F_3 - F_1 \\ F_4 - 2F_1}]{\substack{F_3 - F_1 \\ F_4 - 2F_1}} \left[ \begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & -2 & 0 \end{array} \right]$$

$$\xrightarrow{\frac{1}{2}F_2} \left[ \begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1/2 & 3/2 \\ 1 & 0 & 1 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & -2 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow[\substack{F_3 - F_2 \\ F_4 - F_2}]{F_1 + F_2} \left[ \begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 0 & 3/2 & 5/2 \\ 0 & 0 & 1 & 1/2 & 3/2 \\ 1 & 0 & 0 & -5/2 & -3/2 \\ 1 & 0 & 0 & -5/2 & -3/2 \end{array} \right]$$

$$\xrightarrow{F_4 - F_3} \left[ \begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 0 & 3/2 & 5/2 \\ 0 & 0 & 1 & 1/2 & 3/2 \\ 1 & 0 & 0 & -5/2 & -3/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] = B'$$

Si reescribimos las ecuaciones a partir de  $B'$ , obtenemos

$$(E') \begin{cases} x_2 + \frac{3}{2}x_4 = \frac{5}{2} \\ x_3 + \frac{1}{2}x_4 = \frac{3}{2} \\ x_1 - \frac{5}{2}x_4 = -\frac{3}{2} \end{cases}$$

Si despejamos respecto a  $x_4$ , obtenemos

$$x_1 = \frac{5}{2}x_4 - \frac{3}{2}, \quad x_2 = -\frac{3}{2}x_4 + \frac{5}{2}, \quad x_3 = -\frac{1}{2}x_4 + \frac{3}{2},$$

que es la solución del sistema.



# Soluciones de los sistemas de ecuaciones lineales

¿Cómo saber si el sistema tiene o no tiene solución? ¿Una o infinitas?

Si  $BX = Z$ , depende de la forma de la MERF  $B$  y de  $Z$ .

Asumamos que  $B \in \mathbb{R}^{m \times n}$  y  $Z \in \mathbb{R}^{m \times 1}$  donde

$$B = \begin{array}{ccccccccc} & & k_1 & & k_2 & & & & k_r & \\ & & \downarrow & & \downarrow & & & & \downarrow & \\ \left[ \begin{array}{cccccccccc} 0 & \dots & 1 & * & 0 & * & * & 0 & * & * \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 1 & * & * & 0 & * & * \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & \dots & 1 & * & * \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & \dots & 0 & \dots & 0 \end{array} \right] & y & Z = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_r \\ z_{r+1} \\ \vdots \\ z_m \end{bmatrix}\end{array}$$

Si  $k_1, \dots, k_r$  son las columnas que contienen 1 principales, el sistema  $BX = Z$  tiene la siguiente forma

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x_{k_1} + \sum_{j \neq k_1, \dots, k_r} b_{1j} x_j & = & z_1 \\ x_{k_2} + \sum_{j \neq k_1, \dots, k_r} b_{2j} x_j & = & z_2 \\ \vdots & & \vdots \\ x_{k_r} + \sum_{j \neq k_1, \dots, k_r} b_{rj} x_j & = & z_r \\ & 0 & = z_{r+1} \\ & \vdots & \\ & 0 & = z_m \end{array} \right. \quad (1)$$

## Teorema

El sistema  $BX = Z$  tiene solución si y sólo si  $z_{r+1} = z_{r+2} = \dots z_m = 0$ .

## Teorema

Sea  $AX = Y$  un sistema de  $m$  ecuaciones lineales y  $n$  incógnitas con coeficientes en  $\mathbb{K}$  y sea  $[B|Z]$  la matriz escalón reducida por fila equivalente por fila a  $[A|Y]$  cuyo sistema asociado es (1).

Entonces, el sistema tiene solución si y solo si  $z_{r+1} = \dots = z_m = 0$  y en ese caso las soluciones son:

$$\begin{aligned} x_{k_1} &= z_1 - \sum_{j \neq k_1, \dots, k_r} b_{1j} x_j \\ x_{k_2} &= z_2 - \sum_{j \neq k_1, \dots, k_r} b_{2j} x_j \\ &\vdots \\ x_{k_r} &= z_r - \sum_{j \neq k_1, \dots, k_r} b_{rj} x_j \end{aligned} \quad (2)$$

donde las  $x_j$  con  $j \neq k_1, \dots, k_r$  son variables libres y pueden tomar cualquier valor en  $\mathbb{K}$ .

## Demostración

( $\Rightarrow$ )  
El sistema  $BX = Z$  tiene solución  $\Rightarrow z_{r+1} = z_{r+2} = \cdots z_m = 0$ .

Si el sistema tiene solución entonces  $z_{r+1} = z_{r+2} = \cdots z_m = 0$ , pues si alguno de estos  $z$ 's fuera no nulo tendríamos un absurdo.

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x_{k_1} + \sum_{j \neq k_1, \dots, k_r} b_{1j} x_j & = & z_1 \\ x_{k_2} + \sum_{j \neq k_1, \dots, k_r} b_{2j} x_j & = & z_2 \\ \vdots & & \vdots \\ x_{k_r} + \sum_{j \neq k_1, \dots, k_r} b_{rj} x_j & = & z_r \\ & & \vdots \\ & 0 & = z_i \neq 0 \\ & & \vdots \end{array} \right.$$

( $\Leftarrow$ )

Si  $z_{r+1} = z_{r+2} = \cdots z_m = 0 \Rightarrow$  el sistema  $BX = Z$  tiene solución.

Si  $z_{r+1} = z_{r+2} = \cdots z_m = 0$ , obtenemos

$$\begin{cases} x_{k_1} &= -\sum_{j \neq k_1, \dots, k_r} b_{1j} x_j + z_1 \\ x_{k_2} &= -\sum_{j \neq k_1, \dots, k_r} b_{2j} x_j + z_2 \\ \vdots & \quad \quad \quad \vdots \\ x_{k_r} &= -\sum_{j \neq k_1, \dots, k_r} b_{rj} x_j + z_r \end{cases}.$$

Entonces, con cualquier asignación de valores a los  $x_j$  donde  $j \neq k_1, \dots, k_r$  se obtiene una solución del sistema.  $\square$

## Observación

En la demostración de  $\Leftarrow$ ) encontramos una solución haciendo cero todas las incógnitas que no se corresponden con 1 principales.

Pero le podríamos haber dado cualquier otro valor y así encontrar otras soluciones, siempre y cuando hubiera incógnitas que no se corresponden con 1 principales.

## Teorema

Supongamos que el sistema tiene solución y la cantidad de 1 principales es igual a la cantidad de incógnitas. Entonces el sistema  $BX = Z$  tiene una única solución, la cual es  $X = Z$ .

## Demostración

En este caso, el sistema  $BX = Z$  tiene la siguiente forma

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x_1 & = & z_1 \\ x_2 & = & z_2 \\ \vdots & & \vdots \\ x_n & = & z_n \\ 0 & = & z_{n+1} \\ & \vdots & \vdots \\ 0 & = & z_m \end{array} \right.$$

y la solución queda determinada explícitamente.  $\square$

## Teorema

Supongamos que el sistema tiene solución y hay más incógnitas que 1 principales. Entonces el sistema  $BX = Z$  tiene infinitas soluciones de la forma

$$\begin{aligned}x_{k_1} &= z_1 - \sum_{j \neq k_1, \dots, k_r} b_{1j} x_j \\x_{k_2} &= z_2 - \sum_{j \neq k_1, \dots, k_r} b_{2j} x_j \\&\vdots \\x_{k_r} &= z_r - \sum_{j \neq k_1, \dots, k_r} b_{rj} x_j\end{aligned}$$

y los  $x_j$  con  $j \neq k_1, \dots, k_r$  pueden tomar cualquier valor real.

## Demostración

Como existe al menos un  $j \neq k_1, \dots, k_r$ , variando los  $x_j$  donde  $j \neq k_1, \dots, k_r$  obtenemos infinitas soluciones.  $\square$