Práctico 3
Álgebra II – Año 2024/1
FAMAF

ÁLGEBRA DE MATRICES

Ejercicios resueltos.

(1) Sean

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -2 & 0 & -1 \\ 1 & 3 & 5 \end{bmatrix}, \qquad C = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Verificar que $A(BC) = (AB)C$, es decir que vale la asociatividad del producto.

SOLUCIÓN:

$$BC = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -2 & 0 & -1 \\ 1 & 3 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & -1 & 4 \\ -5 & 2 & -3 \\ 22 & -1 & 9 \end{bmatrix}$$

$$A(BC) = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 9 & -1 & 4 \\ -5 & 2 & -3 \\ 22 & -1 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 19 & -5 & 10 \\ 41 & -6 & 19 \\ -3 & -4 & 1 \end{bmatrix} \qquad (*)$$

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -2 & 0 & -1 \\ 1 & 3 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 4 \\ 6 & 4 & 9 \\ 4 & -2 & -1 \end{bmatrix}$$

$$(AB)C = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 4 \\ 6 & 4 & 9 \\ 4 & -2 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 19 & -5 & 10 \\ 41 & -6 & 19 \\ -3 & -4 & 1 \end{bmatrix} \qquad (**)$$

Luego (*) = (**) y el resultado queda verificado. □

(2) Determinar cuál de las siguientes matrices es A, cuál es B y cuál es C de modo tal que sea posible realizar el producto ABC y verificar que $A(BC) = (AB)C$.

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

SOLUCIÓN: la primera matriz es 2×3, la segunda es 3×1 y la tercera es 1×2. Entonces, podemos multiplicar la 1º por la 2º y queda una matrix 2×1 que es posible multiplicar por la 3º matriz, que es 1×2, y así obtenemos una matriz 2×2. Es decir,

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \qquad C = \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Ahora bien,

$$BC = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -3 \\ 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A(BC) = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -3 \\ 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -4 \\ 4 & -4 \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

$$(AB)C = \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -4 \\ 4 & -4 \end{bmatrix}.$$

□

(3) Calcular A^2 y A^3 para la matriz $A = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 6 & 8 \end{bmatrix}$.

Solución:

$$A^2 = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 6 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 6 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 33 & 44 \\ 66 & 88 \end{bmatrix} = 11 \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 6 & 8 \end{bmatrix} = 11A$$

$$A^3 = A \cdot A^2 = A \cdot 11A = 11A^2 = 11^2 A.$$

Observación. Este es un caso muy particular. En el caso de una matriz escalar $c\,\mathrm{Id}$, tenemos que $(c\,\mathrm{Id})^n = c^n\,\mathrm{Id}$. Aquí tenemos una matriz A tal que $A^n = 11^{n-1}A$.

□

(4) Dar ejemplos de matrices no nulas A y B de orden 2×2 tales que

a) $A^2 = 0$ (dar dos ejemplos).

b) $AB \neq BA$.

c) $A^2 = -\mathrm{I}_2$.

d) $A^2 = A \neq \mathrm{I}_2$.

Solución:

(a)

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

(b)

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

$$AB = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$BA = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(c)

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \Rightarrow \qquad A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

(d)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

□

(5) Sea $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ tal que $AB = BA$ para toda $B \in \mathbb{R}^{2\times 2}$. Probar que A es un múltiplo de I_2.

Solución: Sea

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix},$$

y sean

$$E_{11} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad E_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad E_{21} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad E_{22} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Entonces

$$AE_{11} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 \\ a_{21} & 0 \end{bmatrix}, \quad E_{11}A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

Como $AE_{11} = E_{11}A$, tenemos que $a_{12} = a_{21} = 0$.

Probemos ahora con E_{12}:

$$AE_{12} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & a_{11} \\ 0 & a_{21} \end{bmatrix}, \quad E_{12}A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{21} & a_{22} \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

Como $AE_{12} = E_{12}A$, tenemos que $a_{11} = a_{22}$.

Ya no hace falta hacer más ensayos, pues hemos probado que $a_{12} = a_{21} = 0$ y $a_{11} = a_{22}$, es decir A es una matriz escalar y al ser escalar sabemos que conmuta con todas las matrices.

Observación. El resultado es cierto también para matrices $n \times n$ con $n \in \mathbb{N}$. Es decir, si $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ tal que $AB = BA$ para toda $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$, entonces A es un múltiplo de I_n. La estrategia para probar este resultado es la misma que para el caso 2×2: probar con las matrices E_{ij} que son aquellas que tiene un 1 en la entrada ij y 0 en las demás entradas.

□

(6) Para cada $n \in \mathbb{N}$, con $n \geq 2$, hallar una matriz no nula $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ tal que $A^n = 0$ pero $A^{n-1} \neq 0$.

Solución: Las matrices triangulares estrictas, superiores o inferiores, satisfacen la propiedad de que $A^n = 0$ y muchas de ellas satisfacen que $A^{n-1} \neq 0$. Probemos con una matriz triangular superior estricta particular

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e_2 \\ e_3 \\ e_4 \\ \vdots \\ e_n \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} | & | & | & & | \\ 0 & e_1 & e_2 & \cdots & e_{n-1} \\ | & | & | & & | \end{bmatrix}$$

Es decir A es una matriz $n \times n$ con 1 encima de la diagonal y 0 en todas las demás entradas. Más formalmente: $[A]_{i,i+1} = 1$ y $[A]_{i,j} = 0$ si $j \neq i + 1$.

Probaremos por inducción que para $k < n$, $[A^k]_{i,i+k} = 1$ y $[A]_{i,j} = 0$ si $j \neq i + k$. Es decir,

$$A^k = \begin{bmatrix} | & \cdots & | & | & | & & | \\ 0 & \cdots & 0 & e_1 & e_2 & \cdots & e_{n-k} \\ | & \cdots & | & | & | & & | \end{bmatrix},$$

donde e_1 está en la columna $k+1$.

Si $k=1$ el resultado vale por definición de A. Supongamos que el resultado es cierto para $k-1$, luego

$$A^{k-1} = \begin{bmatrix} | & \cdots & | & | & | & & | \\ 0 & \cdots & 0 & e_1 & e_2 & \cdots & e_{n-k+1} \\ | & \cdots & | & | & | & & | \end{bmatrix}, \tag{HI}$$

donde e_1 está en la columna k. Por lo tanto,

$$A \cdot A^{k-1} = \begin{bmatrix} e_2 \\ e_3 \\ e_4 \\ \vdots \\ e_n \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} | & \cdots & | & | & | & & | \\ 0 & \cdots & 0 & e_1 & e_2 & \cdots & e_{n-k+1} \\ | & \cdots & | & | & | & & | \end{bmatrix},$$

Como $[A \cdot A^{k-1}]_{ij} = F_i(A) \cdot C_j(A^{k-1})$ (donde $\cdot$ indica el producto escalar), los únicos productos no nulos son $F_1(A) \cdot C_{k+1}(A^{k-1}) = 1$, $F_2(A) \cdot C_{k+2}(A^{k-1}) = 1$, $F_3(A) \cdot C_{k+3}(A^{k-1}) = 1$, etc. Es decir, las entradas de A^k valen 1 en $(1, k+1)$, $(2, k+2)$, $(3, k+3)$, etc. lo cual prueba el resultado.

Probado esto, tenemos $A^{n-1} = [0 \ \cdots \ 0 \ e_1] \neq 0$ y $A^n = A \cdot A^{n-1} = 0$.

$\square$

(7) Dar condiciones necesarias y suficientes sobre matrices A y B de tamaño $n \times n$ para que

a) $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$. *b)* $A^2 - B^2 = (A-B)(A+B)$.

Solución:

(a) Como

$(A+B)^2 = (A+B)(A+B) = AA + AB + BA + BB = A^2 + AB + BA + B^2$ y
$A^2 + 2AB + B^2 = A^2 + AB + AB + B^2$,

tenemos que

$$\begin{aligned} (A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2 \quad &\Leftrightarrow \quad A^2 + AB + BA + B^2 = A^2 + AB + AB + B^2 \\ &\Leftrightarrow \quad AB + BA = AB + AB \\ &\Leftrightarrow \quad BA = AB. \end{aligned}$$

(b) Como

$A^2 - B^2 = AA - BB$ y
$(A-B)(A+B) = AA + AB - BA - BB$,

tenemos que

$$\begin{aligned} A^2 - B^2 = (A-B)(A+B) \quad &\Leftrightarrow \quad AA - BB = AA + AB - BA - BB \\ &\Leftrightarrow \quad 0 = AB - BA \\ &\Leftrightarrow \quad BA = AB. \end{aligned}$$

$\square$

(8) Sean

$$v = \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times 1} \quad \text{y} \quad A = \begin{bmatrix} | & | & & | \\ C_1 & C_2 & \cdots & C_n \\ | & | & & | \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{m\times n},$$

es decir, $C_1, \ldots, C_n$ denotan las columnas de A. Probar que $Av = \sum_{j=1}^{n} v_j C_j$.

Solución: Sea

$$C_j = \begin{bmatrix} c_{1j} \\ c_{2j} \\ \vdots \\ c_{mj} \end{bmatrix}, \quad \text{para } 1 \le j \le n.$$

Av es una matriz $m \times 1$ cuya coordenada $i, 1$ es $[Av]_{i1} = F_i(C) \cdot v$ donde $\cdot$ es el producto escalar. Es decir

$$[Av]_{i1} = \sum_{j=1}^{n} c_{ij} v_j, \qquad (1 \le i \le m).$$

Por lo tanto

$$Av = \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^{n} c_{1j} v_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^{n} c_{ij} v_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^{n} c_{mj} v_j \end{bmatrix} = \sum_{j=1}^{n} \begin{bmatrix} c_{1j} v_j \\ \vdots \\ c_{ij} v_j \\ \vdots \\ c_{mj} v_j \end{bmatrix} = \sum_{j=1}^{n} v_j \begin{bmatrix} c_{1j} \\ \vdots \\ c_{ij} \\ \vdots \\ c_{mj} \end{bmatrix} = \sum_{j=1}^{n} v_j C_j.$$

□

(9) Si A es una matriz cuadrada $n \times n$, se define la ***traza*** de A como $\operatorname{Tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$.

a) Calcular la traza de las matrices del ejercicio (10).

b) Probar que si $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ y $c \in \mathbb{R}$ entonces

$$\operatorname{Tr}(A + cB) = \operatorname{Tr}(A) + c\operatorname{Tr}(B) \quad \text{y} \quad \operatorname{Tr}(AB) = \operatorname{Tr}(BA).$$

Solución: (a)

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 0 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \operatorname{Tr}(A) = 3 + 1 + 0 = 4,$$

$$B = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 4 \\ 1 & 3 & 8 \\ 1 & 2 & 5 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \operatorname{Tr}(B) = -1 + 3 + 5 = 7,$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & -3 & 3 & -8 \\ -2 & 1 & 2 & -2 \\ 1 & 2 & 1 & 4 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \operatorname{Tr}(C) = 1 + (-3) + 2 + 4 = 4,$$

$$D = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 5 \\ 2 & -3 & 1 \\ 0 & -1 & 3 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \operatorname{Tr}(D) = 1 + (-3) + 3 = 1.$$

(b) Sea $A = [a_{ij}]$ y $B = [b_{ij}]$, entonces

$$\begin{aligned}\operatorname{Tr}(A + cB) &= \sum_{i=1}^{n}[A + cB]_{ii} \\ &= \sum_{i=1}^{n}(a_{ii} + cb_{ii}) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} + c\sum_{i=1}^{n} b_{ii} \\ &= \operatorname{Tr}(A) + c\operatorname{Tr}(B)\end{aligned}$$

Veamos la segunda afirmación de (b):

$$\begin{aligned}\operatorname{Tr}(AB) &= \sum_{i=1}^{n}[AB]_{ii} = \sum_{i=1}^{n}(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{ji}) \\ &= \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}b_{ji} = \sum_{j=1}^{n}(\sum_{i=1}^{n} a_{ij}b_{ji}) \\ &= \sum_{j=1}^{n}(\sum_{i=1}^{n} b_{ji}a_{ij}) = \sum_{j=1}^{n}[BA]_{jj} \\ &= \operatorname{Tr}(BA).\end{aligned}$$

$\square$

(10) Para cada una de las siguientes matrices, usar operaciones elementales por fila para decidir si son invertibles y hallar la matriz inversa cuando sea posible.

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} -1 & -1 & 4 \\ 1 & 3 & 8 \\ 1 & 2 & 5 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & -3 & 3 & -8 \\ -2 & 1 & 2 & -2 \\ 1 & 2 & 1 & 4 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 1 & -3 & 5 \\ 2 & -3 & 1 \\ 0 & -1 & 3 \end{bmatrix}.$$

(para que hagan menos cuentas: las matrices 3×3 aparecieron en el Práctico 2).

Solución:

$$[A|\,\mathrm{Id}] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 3 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{F_1 \leftrightarrow F_3} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -3 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[F_3-3F_1]{F_2-2F_1} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -3 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 7 & 1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 8 & 2 & 1 & 0 & -3 \end{array}\right] \xrightarrow{F_3-F_2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -3 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 7 & 1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{F_3 \leftrightarrow F_2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -3 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 7 & 1 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right] \xrightarrow[F_3-7F_2]{F_1+3F_2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3 & 3 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -6 & -7 & 8 & 5 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{F_3(-\frac{1}{6})} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3 & 3 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 7/6 & -4/3 & -5/6 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[F_2-F_3]{F_1-3F_3} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1/2 & 1 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 & -1/6 & 1/3 & -1/6 \\ 0 & 0 & 1 & 7/6 & -4/3 & -5/6 \end{array}\right]$$

Luego

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 0 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} -1/2 & 1 & 1/2 \\ -1/6 & 1/3 & -1/6 \\ 7/6 & -4/3 & -5/6 \end{bmatrix}.$$

Siguiendo un procedimiento análogo al anterior se obtiene

$$\begin{bmatrix} -1 & -1 & 4 \\ 1 & 3 & 8 \\ 1 & 2 & 5 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1/6 & -13/6 & 10/3 \\ -1/2 & 3/2 & -2 \\ 1/6 & -1/6 & 1/3 \end{bmatrix}.$$

La tercera matriz tiene una MERF con una fila nula. Por lo tanto no es invertible:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & -3 & 3 & -8 \\ -2 & 1 & 2 & -2 \\ 1 & 2 & 1 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{F_2-F_1 \\ F_3+2F_1 \\ F_4-F_1}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -4 & 2 & -10 \\ 0 & 3 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{F_1-F_4 \\ F_2+4F_4 \\ F_3-3F_1}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 4 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{\substack{F_2/2 \\ F_3/4}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{F_1-F_3 \\ F_2-F_3}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{F_2 \leftrightarrow F_4} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Finalmente, la última matriz tiene una MERF con una fila nula. Por lo tanto no es invertible:

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & 5 \\ 2 & -3 & 1 \\ 0 & -1 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{F_2-2F_1} \begin{bmatrix} 1 & -3 & 5 \\ 0 & 3 & -9 \\ 0 & -1 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow[F_2+3F_3]{F_1-3F_3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{-F_3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 \end{bmatrix} \xrightarrow{F_2 \leftrightarrow F_3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

□

(11) Sea A la primera matriz del ejercicio anterior. Hallar matrices elementales $E_1, E_2, \ldots, E_k$ tales que $E_k E_{k-1} \cdots E_2 E_1 A = \mathrm{I}_3$.

Solución: En la primera matriz del ejercicio ((10)) realizamos 10 operaciones elementales de fila para llevar la matriz a la identidad. Si llamamos a la matriz A, entonces

$$\mathrm{Id}_3 = E_{10}E_9E_8E_7E_6E_5E_4E_3E_2E_1A,$$

Donde

$$E_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \ (F_1 \leftrightarrow F_3), \qquad E_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \ (F_2 - 2F_1),$$

$$E_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \ (F_3 - 3F_1), \qquad E_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \ (F_3 - F_2),$$

$$E_5 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \ (F_3 \leftrightarrow F_2), \qquad E_6 = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \ (F_1 + 3F_2),$$

$$E_7 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -7 & 1 \end{bmatrix} \ (F_3 - 7F_2), \qquad E_8 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1/6 \end{bmatrix} \ (-(1/6)F_3),$$

$$E_9 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \ (F_1 - 3F_3), \qquad E_{10} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \ (F_2 - F_3).$$

□

(12) ¿Es cierto que si A y B son matrices invertibles entonces $A+B$ es una matriz invertible? Justificar su respuesta.

Solución: Es falso, el ejemplo más sencillo es $\mathrm{Id} + (-\mathrm{Id}) = 0$. Otro ejemplo,

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

□

(13) Una matriz $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ se dice *nilpotente* si $A^k = 0$ para algún $k \in \mathbb{N}$. Probar que si una matriz A es nilpotente, entonces $\mathrm{I}_n - A$ es invertible.

Solución: Supongamos que $A^k = 0$ para algún $k \in \mathbb{N}$, y probemos que:

$$(\mathrm{I}_n - A)^{-1} = \mathrm{I}_n + A + A^2 + \cdots + A^{k-1} = \sum_{i=0}^{k-1} A^i.$$

En efecto,

$$\begin{aligned} &(\mathrm{I}_n - A)(\mathrm{I}_n + A + A^2 + \cdots + A^{k-1}) \\ &= \mathrm{I}_n(\mathrm{I}_n + A + A^2 + \cdots + A^{k-1}) - A(\mathrm{I}_n + A + A^2 + \cdots + A^{k-1}) \\ &= (\mathrm{I}_n + A + A^2 + \cdots + A^{k-1}) - (A + A^2 + A^3 + \cdots + A^k) \\ &= \mathrm{I}_n - A^k = \mathrm{I}_n - 0 = \mathrm{I}_n\,. \end{aligned}$$

□

(14) Sean v y w dos soluciones del sistema homogéneo $AX = 0$. Probar que $v + tw$ también es solución para todo $t \in \mathbb{K}$.

SOLUCIÓN: Como v, w soluciones de $AX = 0$, tenemos que $Av = 0$ y $Aw = 0$. Luego, por las propiedades que cumple el producto y suma de matrices:

$$A(v + tw) = Av + A(tw) = 0 + t(Aw) = 0 + 0 = 0.$$

Es decir, $v + tw$ es solución de $AX = 0$. □

(15) Sea v una solución del sistema $AX = Y$ y w una solución del sistema homogéneo $AX = 0$. Probar que $v + tw$ también es solución del sistema $AX = Y$ para todo $t \in \mathbb{K}$.

SOLUCIÓN: Como v solución de $AX = Y$, tenemos que $Av = Y$. Al ser w solución del sistema $AX = 0$, se cumple $Aw = 0$. Luego, por las propiedades que cumple el producto y suma de matrices:

$$A(v + tw) = Av + A(tw) = Y + t(Aw) = Y + 0 = Y.$$

Es decir, $v + tw$ es solución de $AX = Y$. □

(16) Probar que si el sistema homogéneo $AX = 0$ posee alguna solución no trivial, entonces el sistema $AX = Y$ no tiene solución o tiene al menos dos soluciones distintas.

SOLUCIÓN: Si $AX = Y$ no tiene solución, listo, pues es uno de los casos. Si $AX = Y$ tiene solución, sea entonces w alguna solución del sistema, es decir $Aw = Y$. Por hipótesis $AX = 0$ tiene soluciones no triviales, es decir existe $v \neq 0$ tal que $Av = 0$. Por el ejercicio ((15)): $v + w$ es solución del sistema $AX = Y$, como $v \neq 0$, los vectores w y $v + w$ son distintos y ambos son solución del sistema $AX = Y$.

Observación. En realidad, la existencia de una solución w del sistema $AX = Y$ implica la existencia de infinitas soluciones, pues por ejercicio ((15)) los vectores $w + tv$ son soluciones de $AX = Y$ para todo $t \in \mathbb{K}$.

□

(17) Supongamos que los sistemas $AX = Y$ y $AX = Z$ tienen solución. Probar que el sistema $AX = Y + tZ$ también tiene solución para todo $t \in \mathbb{K}$.

SOLUCIÓN: Sea v solución de $AX = Y$, es decir $Av = Y$ y sea w solución del sistema $AX = Z$, es decir $Aw = Z$. Entonces, dado $t \in \mathbb{K}$

$$A(v + tw) = Av + Atw = Y + tAw = Y + tZ.$$

Es decir $v + tw$ es solución de $AX = Y + tZ$.

□

(18) Sean A una matriz invertible $n \times n$, y B una matriz $n \times m$. Probar que los sistemas $BX = Y$ y $ABX = AY$ tienen las mismas soluciones.

Solución:

$$
\begin{aligned}
v \text{ es vsol. de } BX = Y &\Rightarrow Bv = Y \\
&\Rightarrow ABv = AY && \text{(mult. por } A \text{ a izq.)} \\
&\Rightarrow v \text{ es sol. de } ABX = AY
\end{aligned}
$$

Esta "ida" vale para cualquier matriz A, sea invertible o no. Para la vuelta debemos utilizar la existencia de A^{-1}:

$$
\begin{aligned}
v \text{ es sol. de } ABX = AY &\Rightarrow ABv = AY \\
&\Rightarrow A^{-1}ABv = A^{-1}AY && \text{(mult. por } A^{-1} \text{ a izq.)} \\
&\Rightarrow \mathrm{Id}\, Bv = \mathrm{Id}\, Y && (\ A^{-1}A = \mathrm{Id}) \\
&\Rightarrow Bv = Y && \text{(Id es neutro del prod.)} \\
&\Rightarrow v \text{ es sol. de } BX = Y
\end{aligned}
$$

□

(19) Sean A y B matrices $r \times n$ y $n \times m$ respectivamente. Probar que:

a) Si $m > n$, entonces el sistema $ABX = 0$ tiene soluciones no triviales.

b) Si $r > n$, entonces existe un Y, $r \times 1$, tal que $ABX = Y$ no tiene solución.

Solución:

(a) Como $m > n$ el sistema $BX = 0$ tiene más incógnitas que ecuaciones, por lo tanto tiene soluciones no triviales. Sea $v \neq 0$ solución de $BX = 0$, es decir $Bv = 0$. Entonces $ABv = A(Bv) = A0 = 0$, por lo tanto v es solución del sistema $ABX = 0$.

(b) Sea P matriz $r \times r$ inversible tal que PA es MERF. Como $r > n$, la matriz PA tiene más filas que columnas y como es MERF la última fila debe ser nula.

Ahora bien, por el ejercicio ((18)), los sistemas $PABX = PY$ y $ABX = Y$ tiene las mismas soluciones, por lo tanto si existe Y tal que $PABX = PY$ no tiene solución, entonces el sistema $ABX = Y$ tampoco tiene solución.

Demostremos, entonces, que existe Y tal que $PABX = PY$ no tiene solución: como PA tiene la última fila nula, $PABX$ también tiene la última fila nula. Sea e_r la matriz $r \times 1$ con 1 en la coordenada r y 0 en las otras coordenadas. Entonces $e_r = P(P^{-1}e_r)$ tiene la última fila no nula, por lo tanto el sistema $PABX = P(P^{-1}e_r)$ no tiene solución y, por lo dicho anteriormente, el sistema $ABX = P^{-1}e_r$ no tiene solución.

□