Álgebra y Álgebra II - Segundo Cuatrimestre 2018
Práctico 5 - Transformaciones Lineales

(1) ¿Cuáles de las siguientes funciones de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^m$ son transformaciones lineales?
  (a) $T(x, y) = (1 + x, y)$
  (b) $T(x, y) = (y, x, x - 2y)$
  (c) $T(x, y) = xy$
  (d) $T(x, y, z) = 3x - 2y + 7z$

(2) ¿Cuáles de las siguientes funciones de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^m$ son transformaciones lineales?
  (a) $T(x_1, \dots, x_n) = (x_1, -x_1, x_2, -x_2, \dots, x_n, -x_n)$
  (b) $T(x_1, \dots, x_n) = (x_1, 2x_2, \dots, nx_n)$
  (c) $T(x_1, \dots, x_n) = (x_1, x_1 + x_2, \dots, x_1 + x_2 + \cdots + x_n)$
  (d) $T(x_1, \dots, x_n) = (x_1, x_1.x_2, \dots, x_1.x_2.\dots.x_n)$.

(3) Para cada una de las siguientes funciones de $\mathbb{C}$ en $\mathbb{C}$ decidir si son $\mathbb{R}$-lineales o $\mathbb{C}$-lineales.
  (a) $T(z) = iz$,
  (b) $R(z) = \overline{z}$,
  (c) $S(z) = \mathrm{Re}(z) + \mathrm{Im}(z)$.

(4) En cada caso, si es posible, dar una transformación lineal T de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^m$ que satisfaga las condiciones exigidas. Si existe, estudiar la unicidad y si no existe explicar porqué no es posible definirla.
  (a) $T(0, 1) = (1, 2, 0, 0)$, $T(1, 0) = (1, 1, 0, 0)$.
  (b) $T(1, 1, 1) = (0, 1, 3)$, $T(1, 2, 1) = (1, 1, 3)$, $T(2, 1, 1) = (3, 1, 0)$.
  (c) $T(1, 1, 1) = (3, 2)$, $T(1, 0, 1) = (1, 1)$, $T(0, 1, 0) = (1, 0)$.
  (d) $T(0, 1, 1) = (1, 2, 0, 0)$, $T(1, 0, 0) = (1, 1, 0, 0))$.

(5) Sea $A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ y sea $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^5$ dada por $T(x) = Ax$.
  (a) Decir cuáles de los siguientes vectores están en el núcleo: $(1, 2, 3, 4)$, $(1, -1, -1, 2)$, $(1, 0, 2, 1)$.
  (b) decir cuáles de los siguientes vectores están en la imagen: $(2, 3, -1, 0, 1)$, $(1, 1, 0, 3, 1)$, $(1, 0, 2, 1, 0)$.
  (c) Dar una base del núcleo.
  (d) Dar una base de la imagen.

(e) Describir la imagen implícitamente.

(6) Para cada una de las siguientes matrices A_i sea T la transformación lineal dada por $T(x) = A_i x$:

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}, A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 & -1 \end{bmatrix}.$$

(a) Dar una base del núcleo,
(b) dar una base de la imagen, y
(c) describir la imagen implícitamente.

(7) Para cada una de las siguientes transformaciones lineales calcular el núcleo y la imagen; describir ambos subespacios implícita y explícitamente.
(a) $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $T(x, y) = (x - y, x + y, 2x + 3y)$.
(b) $S : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $S(x, y, z) = (x - y + z, 2x - y + 2z)$.

(8) En cada caso definir, cuando sea posible, una transformación lineal T de $\mathbb{R}^3$ en $\mathbb{R}^3$ que satisfaga las condiciones exigidas. Cuando no sea posible explicar porqué no es posible.
(a) $\dim \operatorname{Im} T = 1$.
(b) $\dim \operatorname{Im} T = 2$ y $\dim \operatorname{Nu} T = 2$.
(c) $(1, 1, 0) \in \operatorname{Im} T$ y $(0, 1, 1) \in \operatorname{Nu} T$.
(d) $(1, 1, 0) \in \operatorname{Im} T$, $(0, 1, 1), (1, 2, 1) \in \operatorname{Nu} T$.
(e) $\operatorname{Im} T \subseteq \operatorname{Nu} T$.
(f) $\operatorname{Nu} T \subseteq \operatorname{Im} T$.

(9) Para cada una de las siguientes transformaciones lineales calcular el núcleo y la imagen; describir ambos subespacios implícita y explícitamente.
(a) $D : P_4 \longrightarrow P_4$, $D(p(x)) = p'(x)$.
(b) $T : M_{2\times 2}(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathbb{K}$, $T(A) = \operatorname{tr}(A)$.
(c) $L : P_3 \longrightarrow M_{2\times 2}(\mathbb{R})$, $L(ax^2 + bx + c) = \begin{bmatrix} a & b + c \\ b + c & a \end{bmatrix}$.
(d) $Q : P_3 \longrightarrow P_4$, $Q(p(x)) = (x + 1)p(x)$.

(10) Sea $V = P_n$. Decidir cuáles de las siguientes transformaciones lineales de V en V son isomorfismos.

(a) $T(p(x)) = p(x - 1)$, (b) $S(p(x)) = xp'(x)$, (c) $Q(p(x)) = p(x) + p'(x)$.

(11) Escribir las matrices de las transformaciones lineales de los Ejercicios 7 y 9 respecto de las bases canónicas de los espacios involucrados.

(12) Sean $\mathcal{C}_n$, $n = 2, 3$, las bases canónica de $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$ respectivamente. Sean $\mathcal{B}_2 = \{(1,0),(1,1)\}$ y $\mathcal{B}_3 = \{(1,0,0),(1,1,0),(1,1,1)\}$ bases de $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$, respectivamente.
   (a) Escribir la matriz de cambio de base $P_{\mathcal{C}_n,\mathcal{B}_n}$ de $\mathcal{C}_n$ a $\mathcal{B}_n$, $n = 2, 3$.
   (b) Escribir la matriz de cambio de base $P_{\mathcal{B}_n,\mathcal{C}_n}$ de $\mathcal{B}_n$ a $\mathcal{C}_n$, $n = 2, 3$.
   (c) ¿Qué relación hay entre $P_{\mathcal{C}_n,\mathcal{B}_n}$ y $P_{\mathcal{B}_n,\mathcal{C}_n}$?

(13) Sean $\mathcal{C}_n, \mathcal{B}_n$ como en el ejercicio anterior.
   (a) Dar las matrices de las transformaciones del Ejercicio 7 respecto de las bases $\mathcal{B}_n$ y $\mathcal{C}_n$.
   (b) Dar las matrices de las transformaciones del Ejercicio 7 respecto de las bases $\mathcal{C}_n$ y $\mathcal{B}_n$.
   (c) Dar las matrices de las transformaciones del Ejercicio 7 respecto de las bases $\mathcal{B}_n$ y $\mathcal{B}_n$.
   Ayuda: Utilizar los Ejercicios 11 y 12.

(14) Sea $T : V \to W$ una transformación lineal mostrar que:
   (a) Si $T \equiv 0$ entonces para cualesquiera bases $\mathcal{B}_V$ y $\mathcal{B}_W$ de V y W respectivamente, la matriz de T respecto de ellas es la matriz nula.
   (b) Si $\operatorname{Nu} T$ es no trivial entonces existe una base $\mathcal{B}_V$ de V tal que para cualquier base $\mathcal{B}_W$ de W la matriz de T respecto de ellas tiene al menos una columna nula. Más aún, se puede elegir $\mathcal{B}_V$ de tal manera que tenga $\dim \operatorname{Nu} T$ columnas nulas.
   (c) Existen bases $\mathcal{B}_V$ y $\mathcal{B}_W$ de V y W respectivamente tal que la matriz de T respecto de ellas es $\begin{bmatrix} Id_m & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ donde $m = \dim \operatorname{Im}(T)$.

(15) Decidir si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas:
   (a) Si $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ es una transformación lineal entonces $\dim \operatorname{Nu} T = 1$.
   (b) Existen dos transformaciones lineales $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ y $S : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ tales que $TS = \operatorname{Id}$.
   (c) Existe una transformación lineal $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que
   $$T(1,1,0) = (1,0,0), \qquad T(-1,1,0) = (1,1,1), \qquad T(1,0,0) = (1,1,0).$$
   (d) Sea $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ y A la matriz de T con respecto a una base β. Si A es escalón reducida por filas con r filas no nulas entonces la dimensión de la imagen de T es r.
   (e) Si $T : V \to W$ es un isomorfismo entonces TS es un isomorfismo para toda transformación lineal $S : W \to W$.

EJERCICIOS ADICIONALES

(1) Sea T la reflexión en $\mathbb{R}^2$ con respecto a la recta $y = x$. Sea $\mathcal{B}$ la base ordenada $\{(1,1),(1,-1)\}$.

(a) Dar la matriz de T respecto de $\mathcal{B}$.

(b) Dar la matriz de T respecto de $\mathcal{C}_2$ (ver Ej. 13).

(2) Sea T la proyección de $\mathbb{C}^2$ dada por $T(x_1, x_2) = (x_1, 0)$. Sea $\mathcal{B}$ la base canónica de $\mathbb{C}^2$ y sea $\mathcal{B}'$ la base ordenada $\{(1, i), (-i, 2)\}$.

(a) Dar la matriz de T respecto del par $\mathcal{B}$, $\mathcal{B}'$.

(b) Dar la matriz de T respecto de $\mathcal{B}'$.

(3) Sea $g \in \mathcal{C}^1[0, 1]$ fija. Sea $T : \mathcal{C}^1[0, 1] \longrightarrow \mathcal{C}[0, 1]$ definida por $T(f) = (fg)'$.

(a) Probar que T es lineal.

(b) Calcular el núcleo de T.

(c) Describir el núcleo en los casos $g(x) = e^x$ y $g(x) = x$ y calcular su dimensión.

(4) Sean $T : V \longrightarrow W$ y $S : W \longrightarrow Z$ transformaciones lineales. Probar que:

(a) Si T y S son suryectivas, entonces ST es suryectiva.

(b) Si T y S son inyectivas, entonces ST es inyectiva.

(c) Si S no es suryectiva, entonces ST no es suryectiva.

(d) Si T no es inyectiva, entonces ST no es inyectiva.

(e) Puede ser S suryectiva y ST no.

(f) Puede ser que T inyectiva y ST no.

(5) Sea $T : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{R}^{2\times 2}$ definida por $T(a + ib) = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$.

(a) Probar que T es $\mathbb{R}$-lineal.

(b) Probar que T es inyectiva. Notar que eso implica que el espacio vectorial real de los números complejos es isomorfo al subespacio de matrices 2×2 de la forma $\left(\begin{smallmatrix} a & -b \\ b & a \end{smallmatrix}\right)$.

(c) Probar además que $T(z_1 z_2) = T(z_1)T(z_2)$ para todo par de complejos z_1, z_2.

(6) Sea V el espacio de matrices reales $n \times n$ y sea A una matriz fija. Sean L_A y T_A las transformaciones lineales de V en V definidas por:

$$L_A(B) = AB; \qquad T_A(B) = AB - BA.$$

(a) Demostar que $L_A = 0$ si y solo si $A = 0$.

(b) ¿Es cierto que $T_A = 0$ si y solo $A = 0$?

(c) Determinar $\{A : I \in \operatorname{Im} L_A\}$ y $\{A : I \in \operatorname{Im} T_A\}$.

(7) Sean V y W espacios vectoriales sobre un cuerpo $\mathbb{K}$ y sea U un isomorfismo de V en W. Probar que $L : \operatorname{Hom}(V, V) \longrightarrow \operatorname{Hom}(W, W)$, definida por $L(T) = UTU^{-1}$ es un isomorfismo.

(8) Sea T la transformación lineal de P_3 en P_3 definida por $T(p(x)) = p(x-2)$.

  (a) Calcular T^t.

  (b) Escribir la matriz de T en la base canónica.

  (c) Escribir la matriz de T^t en la base dual de la base canónica de P_3.