Práctico 3
Álgebra II – Año 2024/1
FAMAF

Álgebra de matrices

Objetivos.

- Familiarizarse con las matrices y sus operaciones de suma y multiplicación, Ejercicios (1) – (8).
- Familiarizarse con la notación de subíndices para las entradas de matrices, Ejercicios (8) y (9).
- Aprender la noción de matriz inversa y cómo cálcularla, Ejercicios (10) – (13).
- Usar matrices para la resolución de sistemas de ecuaciones, Ejercicios (14) – (19).

Ejercicios. Los ejercicios con el símbolo ⓐ tienen una ayuda al final del archivo para que recurran a ella después de pensar un poco.

(1) Sean
$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -2 & 0 & -1 \\ 1 & 3 & 5 \end{bmatrix}, \qquad C = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$
Verificar que $A(BC) = (AB)C$, es decir que vale la asociatividad del producto.

(2) Determinar cuál de las siguientes matrices es A, cuál es B y cuál es C de modo tal que sea posible realizar el producto ABC y verificar que $A(BC) = (AB)C$.
$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

(3) Calcular A^2 y A^3 para la matriz $A = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 6 & 8 \end{bmatrix}$.

(4) ⓐ Dar ejemplos de matrices no nulas A y B de orden 2×2 tales que

a) $A^2 = 0$ (dar dos ejemplos).

b) $AB \neq BA$.

c) $A^2 = -\mathrm{I}_2$.

d) $A^2 = A \neq \mathrm{I}_2$.

(5) ⓐ Sea $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ tal que $AB = BA$ para toda $B \in \mathbb{R}^{2\times 2}$. Probar que A es un múltiplo de I_2.

(6) Para cada $n \in \mathbb{N}$, con $n \geq 2$, hallar una matriz no nula $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ tal que $A^n = 0$ pero $A^{n-1} \neq 0$.

(7) ⓐ Dar condiciones necesarias y suficientes sobre matrices A y B de tamaño $n \times n$ para que

a) $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$. *b)* $A^2 - B^2 = (A-B)(A+B)$.

(8) ⓐ Sean

$$v = \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times 1} \quad \text{y} \quad A = \begin{bmatrix} | & | & & | \\ C_1 & C_2 & \cdots & C_n \\ | & | & & | \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{m\times n},$$

es decir, $C_1, \ldots, C_n$ denotan las columnas de A. Probar que $Av = \sum_{j=1}^{n} v_j C_j$.

(9) Si A es una matriz cuadrada $n \times n$, se define la ***traza*** de A como $\operatorname{Tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$.

a) Calcular la traza de las matrices del ejercicio (10).

b) ⓐ Probar que si $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ y $c \in \mathbb{R}$ entonces

$$\operatorname{Tr}(A + cB) = \operatorname{Tr}(A) + c\operatorname{Tr}(B) \quad \text{y} \quad \operatorname{Tr}(AB) = \operatorname{Tr}(BA).$$

(10) Para cada una de las siguientes matrices, usar operaciones elementales por fila para decidir si son invertibles y hallar la matriz inversa cuando sea posible.

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} -1 & -1 & 4 \\ 1 & 3 & 8 \\ 1 & 2 & 5 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & -3 & 3 & -8 \\ -2 & 1 & 2 & -2 \\ 1 & 2 & 1 & 4 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & -3 & 5 \\ 2 & -3 & 1 \\ 0 & -1 & 3 \end{bmatrix}.$$

(para que hagan menos cuentas: las matrices 3×3 aparecieron en el Práctico 2).

(11) Sea A la primera matriz del ejercicio anterior. Hallar matrices elementales $E_1, E_2, \ldots, E_k$ tales que $E_k E_{k-1} \cdots E_2 E_1 A = \mathrm{I}_3$.

(12) ¿ Es cierto que si A y B son matrices invertibles entonces $A+B$ es una matriz invertible? Justificar su respuesta.

(13) ⓐ Una matriz $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ se dice *nilpotente* si $A^k = 0$ para algún $k \in \mathbb{N}$. Probar que si una matriz A es nilpotente, entonces $\mathrm{I}_n - A$ es invertible.

(14) Sean v y w dos soluciones del sistema homogéneo $AX = 0$. Probar que $v + tw$ también es solución para todo $t \in \mathbb{K}$.

(15) Sea v una solución del sistema $AX = Y$ y w una solución del sistema homogéneo $AX = 0$. Probar que $v + tw$ también es solución del sistema $AX = Y$ para todo $t \in \mathbb{K}$.

(16) Probar que si el sistema homogéneo $AX = 0$ posee alguna solución no trivial, entonces el sistema $AX = Y$ no tiene solución o tiene al menos dos soluciones distintas.

(17) Supongamos que los sistemas $AX = Y$ y $AX = Z$ tienen solución. Probar que el sistema $AX = Y + tZ$ también tiene solución para todo $t \in \mathbb{K}$.

(18) Sean A una matriz invertible $n \times n$, y B una matriz $n \times m$. Probar que los sistemas $BX = Y$ y $ABX = AY$ tienen las mismas soluciones.

(19) ⓐ Sean A y B matrices $r \times n$ y $n \times m$ respectivamente. Probar que:

a) Si $m > n$, entonces el sistema $ABX = 0$ tiene soluciones no triviales.

b) Si $r > n$, entonces existe un Y, $r \times 1$, tal que $ABX = Y$ no tiene solución.

Ejercicios de repaso. Si ya hizo los ejercicios anteriores continue con la siguiente guía. Los ejercicios que siguen son similares y le pueden servir para practicar antes de los exámenes.

(20) ⓐ Probar que si $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ y $B, C \in \mathbb{R}^{n\times p}$ entonces $A(B + C) = AB + AC$.

(21) Probar que si $A, B \in \mathbb{R}^{m\times n}$ y $C \in \mathbb{R}^{n\times p}$ entonces $(A + B)C = AC + BC$.

(22) Sea $v = [v_1 \cdots v_m] \in \mathbb{R}^{1\times m}$ y $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$. Probar que $vA = \sum_{i=1}^{m} v_i F_i$, donde $F_1, \ldots, F_m$ denotan las filas de A.

(23) Sea $D = (d_{ij}) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ una matriz diagonal y $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{m\times n}$. Probar que $AD = (d_{jj}a_{ij}) \in \mathbb{R}^{m\times n}$.

(24) Probar las siguientes afirmaciones:

a) Si $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ son matrices diagonales, entonces $AB = BA$.

b) Si $A = c\,\mathrm{I}_n$ para algún $c \in \mathbb{R}$, entonces $AB = BA$ para toda $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$.

(25) Probar que si $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ es una matriz diagonal tal que $\mathrm{Tr}(A^2) = 0$, entonces $A = 0$.

(26) Sea A matriz 2×2 tal que $\mathrm{Tr}(A) = 0$ y $\mathrm{Tr}(A^2) = 0$.

a) Probar que $A^2 = 0$.

b) >Es cierta la recíproca?

(27) Probar que si A y B son matrices $n \times n$ *que conmutan entre sí*, entonces para todo $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ se cumple que:

$$(A + B)^k = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} A^j\, B^{k-j}.$$

(28) Sea $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$. La *matriz traspuesta* de A es la matriz $A^t \in \mathbb{R}^{n\times m}$ tal que $(A^t)_{ij} = A_{ji}$, $1 \le i \le n$, $1 \le j \le m$.

a) Dar las matrices traspuestas de las matrices A, B y C de los ejercicios (1) y (2).

b) Probar que si $A, B \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $C \in \mathbb{R}^{n\times p}$ y $c \in \mathbb{R}$ entonces

$$(A + cB)^t = A^t + cB^t, \qquad (BC)^t = C^t B^t.$$

c) Probar que si $D \in \mathbb{R}^{n\times n}$ es invertible, entonces D^t también lo es y $(D^t)^{-1} = (D^{-1})^t$.

(29) Una matriz A se dice *simétrica* si $A^t = A$. Una matriz B se dice *antisimétrica* si $B^t = -B$. Probar que toda matriz se puede expresar como la suma de una matriz simétrica y una antisimétrica.

(30) Decidir si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justificar.

a) Si A y B son matrices cuadradas tales $AB = BA$ pero ninguna es múltiplo de la otra, entonces A o B es diagonal.

b) Existen una matriz 3×2, A, y una matriz 2×3, B, tales que AB es una matriz invertible.

c) Existen una matriz 2×3, A, y una matriz 3×2, B, tales que AB es una matriz invertible.

Ayudas. (4) Probar con algunos 0 y 1 en las entradas.

(5) Elegir matrices B apropiadas con muchos ceros y **un** 1.

(7) El objetivo del ejercicio es completar los puntos suspensivos en la siguiente frase:

"$(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$ si y sólo si A y B satisfacen ..... "

Desarrollen el cuadrado de la suma $A + B$ usando que el producto de matrices es distributivo

y vean que les "sobra" para obtener la fórmula del binomio. Misma idea para el item (b).

(8) Usar la notación de subíndices para las entradas de matrices.

b) Usar la notación de subíndices para las entradas de matrices.

(13) Pensar en la fórmula de $\sum_{i=0}^{n} a^i$ vista en Álgebra I/Matemática Discreta I.

(19) Recordar el Ejercicio 11 del Práctico 2.

(20) Usar la notación de subíndices para las entradas de matrices.