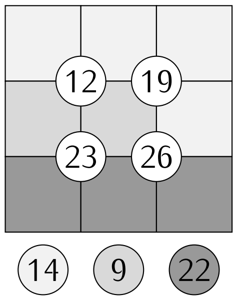
**Práctico 2**
**Álgebra II – Año 2024/1**
**FAMAF**

## Sistemas de ecuaciones

**Objetivos.**

- Aprender a plantear y resolver sistemas de ecuaciones lineales.

(1) *Juego Suko.* Colocar los números del 1 al 9 en las celdas de la siguiente tabla de modo que el número en cada círculo sea igual a la suma de las cuatro celdas adyacentes, y la suma de las celdas del mismo color sea igual al número en el círculo de igual color.




(2) Encontrar los coeficientes reales del polinomio $p(x) = ax^2 + bx + c$ de manera tal que $p(1) = 2$, $p(2) = 7$ y $p(3) = 14$.

(3) Determinar cuáles de las siguientes matrices son MERF.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -3 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

(4) Para cada una de las MERF del ejercicio anterior,

*a)* asumir que es la matriz de un sistema homogéneo, escribir el sistema y dar las soluciones del sistema.

*b)* asumir que es la matriz ampliada de un sistema no homogéneo, escribir el sistema y dar las soluciones del sistema.

(5) Para cada uno de los siguientes sistemas de ecuaciones, describir explícita o paramétricamente todas las soluciones e indicar cuál es la MERF asociada al sistema.

$$a) \begin{cases} -x - y + 4z = 0 \\ x + 3y + 8z = 0 \\ x + 2y + 5z = 0 \end{cases} \qquad b) \begin{cases} x - 3y + 5z = 0 \\ 2x - 3y + z = 0 \\ -y + 3z = 0 \end{cases} \qquad c) \begin{cases} x - z + 2t = 0 \\ -x + 2y - z + 2t = 0 \\ -x + y = 0 \end{cases}$$

(d) $\begin{cases} -x-y+4z=1 \\ x+3y+8z=3 \\ x+2y+5z=1 \end{cases}$ (e) $\begin{cases} x-3y+5z=1 \\ 2x-3y+z=3 \\ -y+3z=1 \end{cases}$ (f) $\begin{cases} x-z+2t=1 \\ -x+2y-z+2t=3 \\ -x+y=1 \end{cases}$

(6) Para cada uno de los siguientes sistemas, describir implícitamente el conjunto de los vectores $(b_1, b_2, b_3)$ o $(b_1, b_2, b_3, b_4)$ para los cuales cada sistema tiene solución.

*a)* $\begin{cases} x-3y+5z=b_1 \\ 2x-3y+z=b_2 \\ -y+3z=b_3 \end{cases}$

*b)* $\begin{cases} x-z+2t=b_1 \\ -x+2y-z+2t=b_2 \\ -x+y=b_3 \\ y-z+2t=b_4 \end{cases}$

*c)* $\begin{cases} -x-y+4z=b_1 \\ x+3y+8z=b_2 \\ x+2y+5z=b_3 \end{cases}$

(7) Sea $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & 2016 \\ 2 & 3 & 4 & \cdots & 2017 \\ 3 & 4 & 5 & \cdots & 2018 \\ \vdots & & & & \vdots \\ 100 & 101 & 102 & \cdots & 2115 \end{bmatrix}$.

*a)* Encontrar todas las soluciones del sistema $AX = 0$.

*b)* Encontrar todas las soluciones del sistema $AX = \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$.

(8) Sea $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 0 \end{bmatrix}$. Reduciendo $A$ por filas,

*a)* encontrar todas las soluciones sobre $\mathbb{R}$ y $\mathbb{C}$ del sistema $AX = 0$.

*b)* encontrar todas las soluciones sobre $\mathbb{R}$ y $\mathbb{C}$ del sistema $AX = \begin{bmatrix} 1 \\ i \\ 0 \end{bmatrix}$.

(9) Suponga que tiene que resolver un sistema de ecuaciones lineales homogéneo y que tras hacer algunas operaciones elementales por fila a la matriz asociada obtiene una matriz con la siguiente forma

$$\begin{pmatrix} a & * & * & * \\ 0 & b & * & * \\ 0 & 0 & c & * \\ 0 & 0 & 0 & d \end{pmatrix}$$

donde $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ y $*$ son algunos números reales. ¿Qué conclusiones puede inferir acerca del conjunto de soluciones a partir de los valores de $a$, $b$, $c$ y $d$?

(10) Suponga que tiene que resolver un sistema de ecuaciones lineales y que tras hacer algunas operaciones elementales por fila a la matriz ampliada obtiene

una matriz con la siguiente forma

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a & * & * & * & * \\ 0 & b & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 & d & * \end{array}\right)$$

donde $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ y $*$ son algunos números reales. ¿Qué conclusiones puede inferir acerca del conjunto de soluciones a partir de los valores de $a$, $b$, $c$ y $d$?

(11) Suponga que tiene que resolver un sistema de $m$ ecuaciones lineales con $n$ incógnitas. Antes de empezar a hacer cuentas y apelando a la teoría, ¿Qué puede afirmar acerca del conjunto de soluciones en base a $m$ y $n$? ¿Cómo saber si es vacío o no vacío? ¿Si tiene una o varias soluciones?

(12) ⓐ Sean $\lambda_1, ..., \lambda_n \in \mathbb{R}$ y $b_1, ..., b_n \in \mathbb{R}$.

*a)* Para cada $n \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$, plantear un sistema de ecuaciones lineales que le permita encontrar un polinomio $p(x)$ con coeficientes reales de grado $n - 1$ tal que

$$p(\lambda_1) = b_1, \dots, p(\lambda_n) = b_n.$$

*b)* ¿Se le ocurre alguna condición con la cual pueda afirmar que el sistema anterior no tiene solución?

*c)* ¿Puede dar una forma general del sistema para cualquier $n$?