Práctico 1
Álgebra II – Año 2024/1
FAMAF

VECTORES EN $\mathbb{R}^2$ Y $\mathbb{R}^3$

Objetivos.

- Aprender las operaciones básicas de $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$ (suma de vectores, multiplicación por escalares, producto escalar, calcular normas y ángulos).
- Familiarizarse con los conceptos de ortogonalidad y paralelismo.
- Aprender a describir rectas y planos de forma impícita y paramétrica.

Ejercicios

Los ejercicios con el símbolo ⓐ tiene una ayuda al final del archivo para que recurran a ella después de pensar un poco.

Vectores y producto escalar.

(1) Dados $v = (-1, 2, 0)$, $w = (2, -3, -1)$ y $u = (1, -1, 1)$, calcular:
  a) $2v + 3w - 5u$,
  b) $5(v + w)$,
  c) $5v + 5w$ (y verificar que es igual al vector de arriba).

(2) Calcular los siguientes productos escalares.
  a) $\langle(-1, 2, 0),(2, -3, -1)\rangle$,
  b) $\langle(4, -1),(-1, 2)\rangle$.

(3) Dados $v = (-1, 2, 0)$, $w = (2, -3, -1)$ y $u = (1, -1, 1)$, verificar que:

$$\langle 2v + 3w, -u\rangle = -2\langle v, u\rangle - 3\langle w, u\rangle$$

(4) Probar que
  a) $(2, 3, -1)$ y $(1, -2, -4)$ son ortogonales.
  b) $(2, -1)$ y $(1, 2)$ son ortogonales. Dibujar en el plano.

(5) Encontrar
  a) un vector no nulo ortogonal a $(3, -4)$,
  b) un vector no nulo ortogonal a $(2, -1, 4)$,
  c) un vector no nulo ortogonal a $(2, -1, 4)$ y $(0, 1, -1)$.

(6) Encontrar la longitud de los vectores.

(a) $(2,3)$, (b) (t,t^2), (c) $(\cos\phi, \operatorname{sen}\phi)$.

(7) Calcular $\langle v, w\rangle$ y el ángulo entre v y w para los siguientes vectores.

(a) $v=(2,2), w=(1,0)$, (b) $v=(-5,3,1), w=(2,-4,-7)$.

(8) Recordar los vectores e_1, e_2 y e_3 dados en la página 12 del apunte. Sea $v=(x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{R}^3$. Verificar que

$$v = x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3 = \langle v, e_1\rangle e_1 + \langle v, e_2\rangle e_2 + \langle v, e_3\rangle e_3.$$

(9) Probar, usando sólo las propiedades **P1**, **P2**, y **P3** del producto escalar, que dados $v, w, u \in \mathbb{R}^n$ y $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$,

a) se cumple:

$$\langle \lambda_1 v + \lambda_2 w, u\rangle = \lambda_1\langle v, u\rangle + \lambda_2\langle w, u\rangle.$$

b) Si $\langle v, w\rangle = 0$, es decir si v y w son ortogonales, entonces

$$\langle \lambda_1 v + \lambda_2 w, \lambda_1 v + \lambda_2 w\rangle = \lambda_1^2\langle v, v\rangle + \lambda_2^2\langle w, w\rangle.$$

(10) Dados $v, w \in \mathbb{R}^n$, probar que si $\langle v, w\rangle = 0$, es decir si v y w son ortogonales, entonces

$$||v+w||^2 = ||v||^2 + ||w||^2.$$

¿Cuál es el nombre con que se conoce este resultado en $\mathbb{R}^2$?

(11) ⓐ Sean $v, w \in \mathbb{R}^2$, probar usando solo la definición explícita del producto escalar en $\mathbb{R}^2$ que

$$|\langle v, w\rangle| \le ||v||\,||w|| \qquad \text{(Desigualdad de Schwarz)}.$$

Rectas y planos.

(12) En cada uno de los siguientes casos determinar si los vectores $\overrightarrow{vw}$ y $\overrightarrow{xy}$ son equivalentes y/o paralelos.

a) $v=(1,-1)$, $w=(4,3)$, $x=(-1,5)$, $y=(5,2)$.

b) $v=(1,-1,5)$, $w=(-2,3,-4)$, $x=(3,1,1)$, $y=(-3,9,-17)$.

(13) Sea R_1 la recta que pasa por $p_1=(2,0)$ y es ortogonal a $(1,3)$.

a) Dar la descripción paramétrica e implícita de R_1.

b) Graficar en el plano a R_1.

c) Dar un punto p por el que pase R_1 distinto a p_1.

d) Verificar si $p+p_1$ y $-p$ pertenecen a R_1

(14) Repetir el ejercicio anterior con las siguientes rectas.

a) R_2: recta que pasa por $p_2=(0,0)$ y es ortogonal a $(1,3)$.

b) R_3: recta que pasa por $p_3 = (1, 0)$ y es paralela a R_1.

(15) Calcular, numérica y graficamente, las intersecciones $R_1 \cap R_2$ y $R_1 \cap R_3$.

(16) Sea $v_0 = (2, -1, 1)$.
a) Describir paramétricamente el conjunto $P_1 = \{w \in \mathbb{R}^3 : \langle v_0, w\rangle = 0\}$.
b) Describir paramétricamente el conjunto $P_2 = \{w \in \mathbb{R}^3 : \langle v_0, w\rangle = 1\}$.
c) ¿Qué relación hay entre P_1 y P_2?

(17) Escribir la ecuación paramétrica y la ecuación normal de los siguientes planos.
a) π_1: el plano que pasa por $(0, 0, 0)$, $(1, 1, 0)$, $(1, -2, 0)$.
b) π_2: el plano que pasa por $(1, 2, -2)$ y es perpendicular a la recta que pasa por $(2, 1, -1)$, $(3, -2, 1)$.
c) $\pi_3 = \{w \in \mathbb{R}^3 : w = s(1, 2, 0) + t(2, 0, 1) + (1, 0, 0);\ s, t \in \mathbb{R}\}$.

(18) ¿Cuáles de las siguientes rectas cortan al plano π_3 del ejercicio (*c)*)? Describir la intersección en cada caso.

(a) $\{w : w = (3, 2, 1) + t(1, 1, 1)\}$, (b) $\{w : w = (1, -1, 1) + t(1, 2, -1)\}$,
(c) $\{w : w = (-1, 0, -1) + t(1, 2, -1)\}$, (d) $\{w : w = (1, -2, 1) + t(2, -1, 1)\}$.

(19) Sea $L = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : ax + by = c\}$ una recta en $\mathbb{R}^2$. Sean p y q dos puntos por los que pasa L.
a) ¿Para qué valores de c puede asegurar que $(0, 0) \in L$?
b) ¿Para qué valores de c puede asegurar que $\lambda q \in L$? donde $\lambda \in \mathbb{R}$.
c) ¿Para qué valores de c puede asegurar que $p + q \in L$?

(20) Sea L una recta en $\mathbb{R}^2$. Probar que L pasa por $(0, 0)$ si y sólo si pasa por $p+\lambda q$ para todo par de puntos p y q de L y para todo $\lambda \in \mathbb{R}$.

Ayudas

((11)) Elevar al cuadrado y aplicar la definición.