Álgebra/Álgebra II
Clase 5 -Sistemas de ecuaciones lineales 3

FAMAF / UNC

26 de marzo de 2024

En esta clase veremos:

- Qué operaciones hacer para transformar un sistema cualquiera en otro donde las ecuaciones se resuelven fácilmente.
- Cómo saber si el sistema tiene o no tiene solución y en el caso de tener solución, si tiene una o infinitas.

Todo se hará sistemáticamente pasando de sistemas de ecuaciones a matrices y reduciendo, vía el algoritmo de Gauss-Jordan, la matriz del sistema a una matriz MERF.

Definición

Una matriz A de $m \times n$ se llama *reducida por filas* o *MRF* si

(a) la primera entrada no nula de una fila de A es 1. Este 1 es llamado *1 principal*.

(b) Cada columna de A que contiene un 1 principal tiene todos los otros elementos iguales a 0.

Ejemplo

Las siguientes matrices son MRF:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix};$$

Ejemplo

Las siguientes matrices, no son MRF:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ no cumple (a)}, \qquad \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ no cumple (b)}.$$

Definición

Una matriz A de $m \times n$ es *escalón reducida por fila* o *MERF* si, es MRF y

c) todas las filas cuyas entradas son todas iguales a cero están al final de la matriz, y

d) en dos filas consecutivas no nulas el 1 principal de la fila inferior está más a la derecha que el 1 principal de la fila superior.

Ejemplo

Las siguientes matrices son MERF:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Ejemplo

Las siguientes matrices son MRF, pero no MERF:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \text{ no cumple (c)}, \qquad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ no cumple (d)}.$$

Las siguientes matrices, no son MRF:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ no cumple (a)}, \qquad \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ no cumple (b)}.$$

En general una matriz escalón reducida por fila (MERF) tiene la siguiente forma

$$\begin{bmatrix} 0 & \cdots & 1 & * & 0 & * & * & 0 & * & * \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 & * & * & 0 & * & * \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & \cdots & 1 & * & * \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & \cdots & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

Ejemplo

Sea Id_n la matriz $n \times n$ definida

$$[\mathrm{Id}_n]_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j, \\ 0 & \text{si } i \neq j, \end{cases} \qquad \text{o bien} \qquad \mathrm{Id}_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

Llamaremos a Id_n la *matriz identidad* $n \times n$. Observar que Id_n es una matriz escalón reducida por fila.

Observación

Es muy fácil obtener la solución de un sistema $AX = Y$ donde A es una MERF.

Ejemplo

La solución del sistema $AX = Y$ con

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad Y = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

es $(x_1, x_2, x_3) = (-1, 0, 1)$.

En efecto, si escribimos explícitamente el sistema la solución queda determinada automáticamente:

$$\left\{ \begin{array}{lcl} x_1 & = & -1 \\ x_2 & = & 0 \\ x_3 & = & 1 \end{array} \right.$$

Ejemplo

El conjunto de soluciones del sistema $AX = Y$ con

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad Y = \begin{bmatrix} 1 \\ -\frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

es

$$\left\{ \left(-2x_3 + 1,\, \frac{1}{3}x_3 - \frac{1}{3},\, x_3\right) \mid x_3 \in \mathbb{R} \right\}.$$

En efecto, si escribimos explicitamente el sistema:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x_1 + 2x_3 & = & 1 \\ x_2 - \frac{1}{3}x_3 & = & -\frac{1}{3} \end{array} \right. \qquad \Longrightarrow \qquad \begin{array}{rcl} x_1 & = & -2x_3 + 1 \\ x_2 & = & \frac{1}{3}x_3 - \frac{1}{3} \end{array}$$

Teorema

Toda matriz $m \times n$ sobre $\mathbb{K}$ es equivalente por fila a una matriz escalón reducida por fila.

Idea de la demostración

P1. Nos ubicamos en la primera fila.

P2. Si la fila es 0 y no es la última, pasar a la fila siguiente y de nuevo P2.

P3. Si la fila no es 0,

- P3.1 si el primera entrada no nula está en la columna k y su valor es c, dividir la fila por c (ahora la primera entrada no nula vale 1),
- P3.2 con operaciones elementales del tipo $F_r + tF_s$ hacer 0 todas las entradas en la columna k (menos la de la columna actual).

P4. Si la fila no es la última, pasar a la fila siguiente e ir a P2.

P5. Intercambiando las filas, ponemos los 1 principal de forma escalonada y las filas nulas al final.

Observación

La demostración del teorema anterior nos da un algoritmo para encontrar MERF.

Método de Gauss

Sea $AX = Y$ el sistema de ecuaciones lineales. El *método de Gauss* consiste en llevar a cabo los siguientes pasos:

- Escribir $[A|Y]$ la matriz extendida del sistema
- Reducimos la matriz $[A|Y] \rightsquigarrow [R|Z]$ de tal forma que R sea MERF (para ello utilizamos el algoritmo P1$\cdots$P5).
- El sistema $RX = Z$ tiene soluciones fáciles de encontrar.

Claramente la parte más importante del método de Gauss es utilizar el algoritmo P1$\cdots$P5, que llamaremos el *algoritmo de Gauss-Jordan* o *eliminación de Gauss-Jordan*.

Algoritmo de Gauss-Jordan

Sea A una matriz $m \times n$. Repitamos el algoritmo:

P1. Nos ubicamos en la primera fila.

P2. Si la fila es 0 y no es la última, pasar a la fila siguiente y de nuevo P2.

P3. Si la fila no es 0,

- P3.1 si el primera entrada no nula está en la columna k y su valor es c, dividir la fila por c (ahora la primera entrada no nula vale 1),
- P3.2 con operaciones elementales del tipo $F_r + tF_s$ hacer 0 todas las entradas en la columna k (menos la de la columna actual).

P4. Si la fila no es la última, pasar a la fila siguiente e ir a P2.

P5. Intercambiando las filas, ponemos los 1 principal de forma escalonada y las filas nulas al final.

La matriz que se obtiene es una MERF.

Ejemplo

Aplicaremos el algoritmo de Gauss-Jordan a la siguiente matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & -3 & 3 & 2 \\ 2 & -3 & 5 & 3 \end{bmatrix}$$

Como la primera fila es no nulo, pasamos a P3:

$$A \xrightarrow{F_2 - F_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & 5 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{F_3 - 2F_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Por P4 pasamos a trabajar con la fila 2 y pasamos a P2. Como la fila no es nula hacemos P3.1

$$\xrightarrow{-\frac{F_3}{3}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & -3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Ahora P3.2:

$$\xrightarrow{F_3+3F_2} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Esta última matriz es una MERF. En este caso, no hizo falta usar P5, es decir permutar filas.

Ejemplo del método de Gauss

A continuación explicaremos en 3 pasos el método de Gauss para resolver el sistema de ecuaciones

$$AX = Y.$$

Ejemplificaremos los pasos con el sistema

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & -3 & 3 \\ 2 & -3 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \tag{E}$$

Primer paso: Matriz ampliada

- Armar la matriz ampliada:

$$A' = [A|Y],$$

es decir, le agregamos a A una columna igual a Y.

En nuestro caso, la matriz ampliada del sistema (E) es

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & -3 & 3 & 2 \\ 2 & -3 & 5 & 3 \end{array}\right]$$

Observar que esta matriz es igual a la del ejemplo anterior.

Segundo paso: reducir la matriz ampliada (Gauss-Jordan)

- Usar operaciones elementales por filas para transformar la matriz ampliada A' en una matriz B' de la forma

$$B' = [B|Z]$$

donde B es una MERF y Z es una columna.

En el ejemplo:

$$A' = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & -3 & 3 & 2 \\ 2 & -3 & 5 & 3 \end{array}\right] \xrightarrow{F_2 - F_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & 5 & 3 \end{array}\right] \xrightarrow{F_3 - 2F_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{-\frac{1}{3}F_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & -3 & 1 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{F_3 - 3F_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] = B'$$

Tercer paso: despejar y describir el conjunto de soluciones

- Escribir explicitamente el sistema $BX = Z$.
- Despejar en cada ecuación la incognita correspondiente al 1 principal.
- Describir el conjunto de soluciones. Hay tres opciones: tener sólo una solución; infinitas, parametrizadas por las incognitas que no corresponden a 1's principales; no tener solución.

En el ejemplo:

$$BX = Z \rightsquigarrow \begin{cases} x_1 + 2x_3 = 1 \\ x_2 - \frac{1}{3}x_3 = -\frac{1}{3} \end{cases} \rightsquigarrow \begin{array}{l} x_1 = -2x_3 + 1 \\ x_2 = \frac{1}{3}x_3 - \frac{1}{3} \end{array}$$

Tercer paso (continuación)

Entonces el conjunto de soluciones del sistema $AX = Y$ es

$$\left\{(-2x_3 + 1,\ \frac{1}{3}x_3 - \frac{1}{3},\ x_3) \mid x_3 \in \mathbb{R}\right\}.$$

Por ej., si $x_3 = 1$, entonces $(-1, 0, 1)$ es una solución del sistema.

Ejemplo

Resolver el sistema de ecuaciones:

$$(E)\begin{cases} x_2 - x_3 + x_4 = 1 \\ 2x_3 + x_4 = 3 \\ x_1 + x_2 - x_4 = 1 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = 2 \end{cases}$$

Solución

El conjunto de soluciones es

$$\mathrm{Sol}(E) = \left\{ \left(\frac{5}{2}x_4 - \frac{3}{2}, -\frac{3}{2}x_4 + \frac{5}{2}, -\frac{1}{2}x_4 + \frac{3}{2}, x_4 \right) \mid x_4 \in \mathbb{R} \right\}$$

Reducimos la matriz ampliada siguiendo al pie de la letra el algoritmo:

$$A' = \left[\begin{array}{cccr|c} 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 0 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow[F_4-2F_1]{F_3-F_1} \left[\begin{array}{cccr|c} 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{\frac{1}{2}F_2} \left[\begin{array}{cccr|r} 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1/2 & 3/2 \\ 1 & 0 & 1 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[\substack{F_3-F_2 \\ F_4-F_2}]{F_1+F_2} \left[\begin{array}{cccr|r} 0 & 1 & 0 & 3/2 & 5/2 \\ 0 & 0 & 1 & 1/2 & 3/2 \\ 1 & 0 & 0 & -5/2 & -3/2 \\ 1 & 0 & 0 & -5/2 & -3/2 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{F_4-F_3} \left[\begin{array}{cccr|r} 0 & 1 & 0 & 3/2 & 5/2 \\ 0 & 0 & 1 & 1/2 & 3/2 \\ 1 & 0 & 0 & -5/2 & -3/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] = B'$$

Si reescribimos las ecuaciones a partir de B', obtenemos

$$(E')\begin{cases} x_2 + \frac{3}{2}x_4 = \frac{5}{2} \\ x_3 + \frac{1}{2}x_4 = \frac{3}{2} \\ x_1 - \frac{5}{2}x_4 = -\frac{3}{2} \end{cases}$$

Si despejamos respecto a x_4, obtenemos

$$x_1 = \frac{5}{2}x_4 - \frac{3}{2}, \qquad x_2 = -\frac{3}{2}x_4 + \frac{5}{2}, \qquad x_3 = -\frac{1}{2}x_4 + \frac{3}{2},$$

que es la solución del sistema.

Soluciones de los sistemas de ecuaciones lineales

¿Cómo saber si el sistema tiene o no tiene solución? ¿Una o infinitas?
Si $BX = Z$. depende de la forma de la MERF B y de Z.

Asumamos que $B \in \mathbb{R}^{m \times n}$ y $Z \in \mathbb{R}^{m \times 1}$ donde

$$
B = \begin{array}{c}
\begin{array}{cccccccccc} & & k_1 & & k_2 & & & k_r & & \\ & & \downarrow & & \downarrow & & & \downarrow & & \end{array} \\
\begin{bmatrix}
0 & \cdots & 1 & * & 0 & * & * & 0 & * & * \\
0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 & * & * & 0 & * & * \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & & \vdots & & \vdots \\
0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & \cdots & 1 & * & * \\
0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & & \vdots & & \vdots \\
0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & \cdots & 0 & \cdots & 0
\end{bmatrix}
\end{array}
\quad \text{y} \quad
Z = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_r \\ z_{r+1} \\ \vdots \\ z_m \end{bmatrix}
$$

Si $k_1, \ldots, k_r$ son las columnas que contienen 1 principales, el sistema $BX = Z$ tiene la siguiente forma

$$\left\{\begin{array}{ccccc} x_{k_1} & + & \sum_{j \neq k_1, \ldots, k_r} b_{1j}\, x_j & = & z_1 \\ x_{k_2} & + & \sum_{j \neq k_1, \ldots, k_r} b_{2j}\, x_j & = & z_2 \\ \vdots & & & \vdots & \\ x_{k_r} & + & \sum_{j \neq k_1, \ldots, k_r} b_{rj}\, x_j & = & z_r \\ & & 0 & = & z_{r+1} \\ & & \vdots & & \vdots \\ & & 0 & = & z_m \end{array}\right. \tag{1}$$

Teorema

Sea $AX = Y$ un sistema de m ecuaciones lineales y n incógnitas con coeficientes en $\mathbb{K}$ y sea $[B|Z]$ la matriz escalón reducida por fila equivalente por fila a $[A|Y]$ cuyo sistema asociado es (1).
Entonces, el sistema tiene solución si y solo si $z_{r+1} = \cdots = z_m = 0$ y en ese caso las soluciones son:

$$\begin{array}{ll} x_{k_1} & = z_1 - \sum_{j \neq k_1,\ldots,k_r} b_{1j}\, x_j \\ x_{k_2} & = z_2 - \sum_{j \neq k_1,\ldots,k_r} b_{2j}\, x_j \\ \vdots & \qquad\qquad \vdots \\ x_{k_r} & = z_r - \sum_{j \neq k_1,\ldots,k_r} b_{rj}\, x_j \end{array}, \tag{2}$$

donde las x_j con $j \neq k_1, \ldots, k_r$ son variables libres y pueden tomar cualquier valor en $\mathbb{K}$.

Demostración

$(\Rightarrow)$

El sistema $BX = Z$ tiene solución $\Rightarrow$ $z_{r+1} = z_{r+2} = \cdots z_m = 0$.

Si el sistema tiene solución entonces $z_{r+1} = z_{r+2} = \cdots z_m = 0$, pues si alguno de estos z's fuera no nulo tendriamos un absurdo.

$$\left\{\begin{array}{ccccc} x_{k_1} & + & \sum_{j\neq k_1,\ldots,k_r} b_{1j}\, x_j & = & z_1 \\ x_{k_2} & + & \sum_{j\neq k_1,\ldots,k_r} b_{2j}\, x_j & = & z_2 \\ \vdots & & & \vdots & \\ x_{k_r} & + & \sum_{j\neq k_1,\ldots,k_r} b_{rj}\, x_j & = & z_r \\ & & \vdots & & \vdots \\ & & 0 & = & z_i \neq 0 \\ & & \vdots & & \vdots \end{array}\right.$$

$(\Leftarrow)$

Si $z_{r+1} = z_{r+2} = \cdots z_m = 0 \;\Rightarrow\;$ *el sistema* $BX = Z$ *tiene solución.*

Si $z_{r+1} = z_{r+2} = \cdots z_m = 0$, obtenemos

$$\begin{cases} x_{k_1} & = -\sum_{j \neq k_1, \dots, k_r} b_{1j}\, x_j + z_1 \\ x_{k_2} & = -\sum_{j \neq k_1, \dots, k_r} b_{2j}\, x_j + z_2 \\ \vdots & \qquad\qquad \vdots \\ x_{k_r} & = -\sum_{j \neq k_1, \dots, k_r} b_{rj}\, x_j + z_r \end{cases}.$$

Entonces, con cualquier asignación de valores a los x_j donde $j \neq k_1, \dots, k_r$ se obtiene una solución del sistema. $\square$

Teorema

Supongamos que el sistema tiene solución y la cantidad de 1 principales es igual a la cantidad de incognitas. Entonces el sistema $BX = Z$ tiene una única solución, la cual es $X = Z$.

Demostración

En este caso, el sistema $BX = Z$ tiene la siguiente forma

$$\begin{cases} x_1 & = & z_1 \\ x_2 & = & z_2 \\ \vdots & & \vdots \\ x_n & = & z_n \\ 0 & = & z_{n+1} \\ & \vdots & \vdots \\ 0 & = & z_m \end{cases}$$

y la solución queda determinada explícitamente. □

Teorema

Supongamos que el sistema tiene solución y hay más incognitas que 1 principales. Entonces el sistema $BX = Z$ tiene infinitas soluciones de la forma

$$\begin{aligned} x_{k_1} &= z_1 - \textstyle\sum_{j \neq k_1,\ldots,k_r} b_{1j}\, x_j \\ x_{k_2} &= z_2 - \textstyle\sum_{j \neq k_1,\ldots,k_r} b_{2j}\, x_j \\ &\vdots \\ x_{k_r} &= z_r - \textstyle\sum_{j \neq k_1,\ldots,k_r} b_{rj}\, x_j \end{aligned}$$

y los x_j con $j \neq k_1, \ldots, k_r$ pueden tomar cualquier valor real.

Demostración

Como existe al menos un $j \neq k_1, \ldots, k_r$, variando los x_j donde $j \neq k_1, \ldots, k_r$ obtenemos infinitas soluciones. $\square$