

Práctico 8

COORDENADAS, MATRICES DE TRANSFORMACIONES LINEALES
Y DIAGONALIZACIÓN

Objetivos.

- Aprender a calcular coordenadas y la matriz de cambio de base.
- Aprender a calcular la matriz de una transformación lineal.
- Saber decidir si una transformación lineal es diagonalizable.
- Aprender a construir transformaciones lineales que satisfagan las propiedades solicitadas.

Ejercicios. Los ejercicios con el símbolo (a) tienen una ayuda al final del archivo para que recurran a ella después de pensar un poco.

- (1) Dar las coordenadas de la matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \in \mathbb{K}^{2 \times 2}$ en la base ordenada

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right\}.$$

Más generalmente, dar las coordenadas de cualquier matriz $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ en la base \mathcal{B} .

- (2) Dar las coordenadas del polinomio $p(x) = -1 + 10x + 2x^2 \in \mathbb{K}_3[x]$ en la base ordenada

$$\mathcal{B} = \{1, 1+x, 1+x+x^2\}.$$

- (3) (a) Dar una base ordenada del subespacio $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{K}^3 \mid x - y + 2z = 0\}$.
- (b) Dar las coordenadas de $w = (1, -1, -1)$ en la base que haya dado en el ítem anterior.
- (c) Dado $(x, y, z) \in W$, dar las coordenadas de (x, y, z) en la base que haya calculado en el ítem (a).
- (4) Sea \mathcal{C} la base canónica de \mathbb{R}^2 y $\mathcal{B} = \{(1, 0), (1, 1)\}$ otra base ordenada de \mathbb{R}^2 .
- (a) Encontrar la matriz de cambio de base $P_{\mathcal{C}, \mathcal{B}}$ de \mathcal{C} a \mathcal{B} .
- (b) Encontrar la matriz de cambio de base $P_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}$ de \mathcal{B} a \mathcal{C} .
- (c) ¿Qué relación hay entre $P_{\mathcal{C}, \mathcal{B}}$ y $P_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}$?
- (d) Encontrar $(x, y), (z, w) \in \mathbb{R}^2$ tal que $[(x, y)]_{\mathcal{B}} = (1, 4)$ y $[(z, w)]_{\mathcal{B}} = (1, -1)$.
- (e) Determinar las coordenadas de $(2, 3)$, y más generalmente de cualquier (x, y) , en la base \mathcal{B} .

- (5) Sea $P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{K}^{3 \times 3}$.

- (a) Calcular la inversa de P .
- (b) (a) Dar una base ordenada \mathcal{B} de \mathbb{K}^3 tal que P es la matriz de cambio de base de la base canónica \mathcal{C} de \mathbb{K}^3 a la base \mathcal{B} .
- (c) Encontrar $(x, y, z) \in \mathbb{K}^3$ tal que su vector de coordenadas con respecto a \mathcal{B} es

$$[(x, y, z)]_{\mathcal{B}} = (2, -1, -1).$$

- (6) Sea $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ la transformación lineal definida por

$$T(x, y, z) = (x - y, x - z).$$

Sean \mathcal{C} la base canónica de \mathbb{R}^3 y $\mathcal{B}' = \{(1, 1), (1, -1)\}$ una base ordenada de \mathbb{R}^2 .

- (a) Calcular la matriz $[T]_{\mathcal{C}\mathcal{B}'}$, es decir la matriz de T respecto de las bases \mathcal{C} y \mathcal{B}' .
- (b) Sea $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Dar las coordenadas de $T(x, y, z)$ respecto de la base \mathcal{B}' .
- (c) Sea $S : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ una transformación lineal tal que su matriz respecto a las bases \mathcal{B}' y \mathcal{C} es

$$[S]_{\mathcal{B}'\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Calcular la matriz de la composición $T \circ S : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ con respecto a la base \mathcal{B}' .

- (d) Calcular la matriz de $T \circ S$ respecto a la base \mathcal{B} del Ejercicio (4) usando las matrices de cambio de base calculadas en ese ejercicio.
- (7) Sea A la primer matriz del Ejercicio 1 del Práctico 5 y $T_A : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ la transformación lineal dada por $T_A(v) = Av$. Hallar los autovalores de T_A , y para cada uno de ellos, dar una base de autovectores del correspondiente autoespacio. Decidir si T_A es o no diagonalizable. En caso de serlo dar una matriz invertible P tal que $P^{-1}AP$ es diagonal. Repetir esto para cada una de las matrices de dicho ejercicio.
- (8) Repetir el ejercicio anterior para cada matriz del Ejercicio 1 del Práctico 5 pero ahora considerando a la transformación como una transformación lineal entre los \mathbb{C} -espacios vectoriales \mathbb{C}^n .
- (9) Sea V un \mathbb{K} -espacio vectorial, y $T : V \longrightarrow V$ una transformación lineal tal que $v \in V$ es un autovector de autovalor λ . Probar las siguientes afirmaciones.
- (a) Si $\lambda = 0$, entonces $v \in \text{Nu}(T)$.
 - (b) Si $\lambda \neq 0$, entonces $v \in \text{Im}(T)$.
 - (c) Si $T^2 = 0$, entonces $T - \text{Id}$ es un isomorfismo.
- (10) Sea V un \mathbb{K} -espacio vectorial de dimensión 3, y $T : V \longrightarrow V$ una transformación lineal. Supongamos que existe $v \in V$ tal que $T^3(v) = 0$ pero $T^2(v) \neq 0$.
- (a) **(a)** Probar que $\mathcal{B} = \{v, T(v), T^2(v)\}$ es una base de V .
 - (b) Calcular la matriz de T respecto de la base \mathcal{B} .
 - (c) Calcular los autovalores de T y sus correspondientes autoespacios. Decidir si T es diagonalizable.
- (11) Definir en cada caso una transformación lineal $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ que satisfaga las condiciones requeridas. ¿Es posible definir más de una transformación lineal?
- (a) $(1, 0, 0) \in \text{Nu}(T)$
 - (b) $(1, 0, 0) \in \text{Im}(T)$
 - (c) $\{(1, 0, 0), (1, 2, 1)\} \subseteq \text{Nu}(T)$ y $(1, 0, 0) \in \text{Im}(T)$
- (12) Decidir si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justificar.
- (a) Existe una transformación lineal $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $\{(1, 0, 1), (0, 1, 0)\}$ es una base de $\text{Nu}(T)$ y $\{(1, 0, -1), (0, 1, 0)\}$ es una base de la $\text{Im}(T)$.
 - (b) Existe una transformación lineal $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $\{(1, 0, 1)\}$ es una base de $\text{Nu}(T)$ y $\{(1, 0, -1), (0, 1, 0)\}$ es una base de la $\text{Im}(T)$.

- (c) Existe una transformación lineal $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $\langle (1, 2, 3), (2, 1, -1) \rangle$ es el autoespacio asociado a 0 y $\langle (3, 1, 1), (1, 1, 3) \rangle$ es el autoespacio asociado a 5.
- (d) Existe una transformación lineal $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $\langle (1, 2, 3) \rangle$ es el autoespacio asociado a 0 y $\langle (3, 1, 1) \rangle$ es el autoespacio asociado a 5.

Ejercicios de repaso. Si ya hizo los ejercicios anteriores continúe con la siguiente guía. Los ejercicios que siguen son similares y le pueden servir para practicar antes de los exámenes.

- (13) Repetir el ejercicio (4) con la base canónica de \mathbb{R}^3 y la base ordenada

$$\mathcal{B} = \{(1, 0, 0), (1, 1, 0), (1, 1, 1)\}.$$

Considerar las 3-uplas $(1, 2, 3)$ y $(0, 1, 2)$ para el ítem (d), y $(2, 3, 1)$ para el ítem (e).

- (14) (a) Sea V un \mathbb{K} -espacio vectorial con base $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$ y $A = (a_{ij}) \in \mathbb{K}^{n \times n}$ una matriz. Sea $\mathcal{B}' = \{v'_1, \dots, v'_n\}$ donde

$$v'_j = \sum_{i=1}^n a_{ij} v_i \text{ para todo } 1 \leq j \leq n.$$

Probar que \mathcal{B}' es una base de V si y sólo si A es invertible. En tal caso determinar la matriz de cambio de base de la base \mathcal{B}' a la base \mathcal{B} , y viceversa.

- (15) Repetir los últimos ítems del Ejercicio (6) con la transformación lineal $S \circ T$ y la base \mathcal{B} del Ejercicio (13).
- (16) Para cada una de las siguientes transformaciones lineales, hallar sus autovalores, y para cada uno de ellos, dar una base de autovectores del espacio propio asociado. Decidir si la transformación considerada es o no diagonalizable.
- (a) $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $T(x, y) = (y, 0)$.
- (b) $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $T(x, y, z) = (x + 2z, -x - y + z, x + 2y + z)$.
- (c) $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $T(x, y, z) = (4x + y + 5z, 4x - y + 3z, -12x + y - 11z)$.
- (d) $T : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$, $T(x, y, z, w) = (2x - y, x + 4y, z + 3w, z - w)$.

- (17) Repetir el Ejercicio (10) pero para cualquier $n \in \mathbb{N}$ en vez de 3.

Ayudas. (5b) Usar que $P_{\mathcal{C}, \mathcal{B}} = P_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}^{-1}$ y recordar como se define $P_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}$.

(10a) Es suficiente probar que $\mathcal{B} = \{v, T(v), T^2(v)\}$ es LI. Sean a, b, c escalares tales que $av + bT(v) + cT^2(v) = 0$. Si aplicamos T^2 en ambos lados deducimos que $aT^2(v) = 0$ dado que $T^3(v) = 0$. Entonces $a = 0$ porque (completar argumento). Con un razonamiento similar deducir que $a = b = c = 0$.

(14) Es suficiente probar que \mathcal{B}' es LI si y sólo si A es invertible. Usar una estrategia similar a la demostración del Teorema 3.3.1 para probar esta equivalencia.