

# Álgebra/Álgebra II

## Clase 14- Dimensión. Subespacios

FAMAF / UNC

4 de mayo de 2024

# Resumen

Dado  $V$  espacio vectorial de dimensión finita, veremos

- la definición de dimensión,
- todo subconjunto LI puede ser completado a una base,
- de todo subconjunto de generadores se puede extraer una base.

Veremos también la forma de encontrar bases de subespacios de  $\mathbb{K}^n$ . Se hará usando operaciones elementales de fila.

El tema de esta clase está contenido de la sección 3.3 y 3.4 del apunte de clase “Álgebra II / Álgebra - Notas del teórico”.

Recordemos este importante resultado de la clase anterior:

Sea  $V$  un espacio vectorial y  $T \subset V$ , finito tal que  $\langle T \rangle = V$ . Sea  $S \subset V$ .

Entonces

$$\langle T \rangle = V, \quad S \text{ es LI} \Rightarrow |S| \leq |T|. \quad (\text{P1})$$

El contrarrecíproco también nos resultará de utilidad

$$\langle T \rangle = V, \quad |S| > |T| \Rightarrow S \text{ es LD.} \quad (\text{P2})$$

## Corolario

*Si  $V$  es un espacio vectorial de dimensión finita, entonces dos bases cualesquiera de  $V$  tienen el mismo número de elementos.*

## Demostración

$V$  es de dimensión finita  $\Rightarrow \exists \mathcal{B}$  base con  $|\mathcal{B}| < \infty$ .

Sea  $\mathcal{B}'$  otra base de  $V$ .

Como  $\mathcal{B}$  es base  $\Rightarrow \langle \mathcal{B} \rangle = V$  y  $\mathcal{B}'$  es LI  $\stackrel{(P1)}{\Rightarrow} |\mathcal{B}'| \leq |\mathcal{B}|$ .

Como  $\mathcal{B}'$  es base  $\Rightarrow \langle \mathcal{B}' \rangle = V$  y  $\mathcal{B}$  es LI  $\stackrel{(P1)}{\Rightarrow} |\mathcal{B}| \leq |\mathcal{B}'|$ .

En consecuencia  $|\mathcal{B}| = |\mathcal{B}'|$ .



Hemos demostrado: si  $V$  es un espacio vectorial de dimensión finita y  $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$  dos bases de  $V$ , entonces  $|\mathcal{B}| = |\mathcal{B}'|$ .

Esto nos permite hacer la siguiente definición.

### Definición

Sea  $V$  espacio vectorial de dimensión finita.

Diremos que  $n$  es *la dimensión de  $V$*  y denotaremos  $\dim V = n$ , si existe una base de  $V$  de  $n$  vectores.

Si  $V = \{0\}$ , entonces definimos  $\dim V = 0$ .

## Ejemplos

Sean  $m, n \in \mathbb{N}$ .

1.  $\dim \mathbb{K}^n = n$ , pues la base canónica tiene  $n$  elementos.
2.  $\dim M_{m \times n}(\mathbb{K}) = mn$ , pues la base canónica de  $M_{m \times n}(\mathbb{K})$  tiene  $mn$  elementos.
3.  $\dim \mathbb{K}_n[x] = n$ , pues  $1, x, x^2, \dots, x^{n-1}$  es una base.

## Corolario

Sea  $V$  un espacio vectorial de dimensión finita y sea  $n = \dim V$ . Entonces

1.  $S \subset V$  y  $|S| > n \Rightarrow S$  es LD.
2.  $S \subset V$  y  $|S| < n \Rightarrow \langle S \rangle \subsetneq V$ .

## Demostración

Sea  $\mathcal{B}$  base de  $V$ .

1. Como  $\mathcal{B}$  es base  $\Rightarrow \langle \mathcal{B} \rangle = V$  y  $|S| > |\mathcal{B}| \stackrel{(P_2)}{\Rightarrow} S$  es LD.
2. Supongamos que  $\langle S \rangle = V$ .

Como  $\mathcal{B}$  es base  $\Rightarrow \mathcal{B}$  es LI.

$\langle S \rangle = V$  y  $\mathcal{B}$  es LI  $\stackrel{(P_1)}{\Rightarrow} n = |\mathcal{B}| \leq |S|$ . Absurdo.



## Lema

Sea  $V$  espacio vectorial.

- Sea  $S \subset V$  y  $S$  es LI.
- Sea  $w$  tal que  $w \notin \langle S \rangle$ .

Entonces  $S \cup \{w\}$  es LI.

## Demostración

Sean  $v_1, \dots, v_n$  vectores distintos de  $S$  y  $\lambda_i, \lambda \in \mathbb{K}$  tales que

$$\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n + \lambda w = 0. \quad (1)$$

Debemos probar que  $\lambda_i = 0$ ,  $1 \leq i \leq n$ , y  $\lambda = 0$ .



Supongamos que  $\lambda \neq 0$ , entonces podemos dividir la ecuación por  $\lambda$  y haciendo pasaje de término obtenemos

$$w = \left(-\frac{\lambda_1}{\lambda}\right) v_1 + \cdots \left(-\frac{\lambda_n}{\lambda}\right) v_n.$$

Luego  $w$  estaría en el subespacio generado por  $S$ , lo cual contradice la hipótesis.

Por lo tanto  $\lambda = 0$  y, en consecuencia

$$\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n = 0.$$

Como  $S$  es un conjunto linealmente independiente, todo  $\lambda_i = 0$ .



## Teorema

*Sea  $V$  espacio vectorial de dimensión finita  $n$  y  $S_0$  un subconjunto LI de  $V$ . Entonces  $S_0$  es finito y existen  $w_1, \dots, w_m$  vectores en  $V$  tal que  $S_0 \cup \{w_1, \dots, w_m\}$  es una base de  $V$ .*

## Corolario

*Sea  $W$  un subespacio de un espacio vectorial con de dimensión finita  $n$  y  $S_0$  un subconjunto LI de  $W$ . Entonces,  $S_0$  se puede completar a una base de  $W$ .*

## Corolario

*Sea  $V$  espacio vectorial de dimensión finita y  $V \neq \{0\}$ , entonces  $\dim V > 0$ .*

## Corolario

*Si  $W$  es un subespacio propio de un espacio vectorial de dimensión finita  $V$ , entonces  $W$  es de dimensión finita y  $\dim W < \dim V$ .*

## Demostración

Si  $W = \{0\}$ , entonces  $\dim W = 0$ , como  $W \subsetneq V$ , tenemos que  $V$  es no nulo y por lo tanto  $\dim W = 0 < \dim V$ .

Si  $W \neq \{0\}$ , sea  $\mathcal{B}'$  base de  $W$ .

Si  $\langle \mathcal{B}' \rangle = V$ , entonces  $W = V$ , absurdo. Luego  $\langle \mathcal{B}' \rangle \neq V \Rightarrow$  existen  $w_1, \dots, w_r$  que completan a una base de  $V \Rightarrow$   
 $\dim(W) = \dim(V) - r < \dim(V)$ .



Hemos visto que si  $V$  es un espacio de dimensión finita, entonces todo conjunto LI se puede extender a una base. También vale:

### Teorema

*Sea  $V \neq 0$  espacio vectorial y  $S$  un conjunto finito de generadores de  $V$ , entonces existe un subconjunto  $B$  de  $S$  que es una base.*

El siguiente resultado relaciona dimensión con suma e intersección de subespacios.

### Teorema

*Si  $W_1$ , y  $W_2$  son subespacios de dimensión finita de un espacio vectorial, entonces  $W_1 + W_2$  es de dimensión finita y*

$$\dim(W_1 + W_2) = \dim W_1 + \dim W_2 - \dim(W_1 \cap W_2).$$

# Dimensiones de subespacios

- Si  $A$  matriz  $m \times n$ , entonces  $W = \{x : Ax = 0\}$  es un subespacio.
- ¿Cuál es la dimensión de  $W$ ? ¿Qué relación tiene con  $R$ , la MRF equivalente a  $A$ ?
- Veremos que si  $r$  es la cantidad de filas no nulas de  $R$ , entonces  $\dim(W) = n - r$ .

## Ejemplo

Encontrar una base del subespacio

$$W = \left\{ (x, y, z, w) \in \mathbb{R} : \begin{array}{rcl} x - y - 3z + w & = & 0 \\ y + 5z + 3w & = & 0 \end{array} \right\}.$$

## Solución

$W$  está definido implícitamente y usando el método de Gauss podemos describirlo paramétricamente, pues:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 5 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{F_1 + F_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 5 & 3 \end{bmatrix}.$$

Por lo tanto, el sistema de ecuaciones que define  $W$  es equivalente a

$$\begin{aligned}x + 2z + 4w &= 0 \\ y + 5z + 3w &= 0,\end{aligned}$$

es decir

$$\begin{aligned}x &= -2z - 4w \\ y &= -5z - 3w,\end{aligned}$$

y entonces

$$\begin{aligned}W &= \{(-2z - 4w, -5z - 3w, z, w) : z, w \in \mathbb{R}\} \\ &= \{(-2, -5, 1, 0)z + (-4, -3, 0, 1)w : z, w \in \mathbb{R}\} \\ &= \langle (-2, -5, 1, 0), (-4, -3, 0, 1) \rangle.\end{aligned}$$

Concluimos entonces que  $(-2, -5, 1, 0), (-4, -3, 0, 1)$  es una base de  $W$  y, por lo tanto, su dimensión es 2. □

## Proposición

Sea  $A$  matriz  $m \times n$  y sea  $W = \{x : Ax = 0\}$ .

Sea  $R$  una MRF equivalentes por filas a  $A$  y sea  $r$  la cantidad de filas no nulas de  $R$ .

Entonces  $\dim(W) = n - r$ .

## Demostración

Es posible hacer esta demostración con las herramientas actuales. Sin embargo, haremos una demostración mucho más conceptual de este hecho cuando veamos transformaciones lineales. □



## Definición

Sea  $A = [a_{ij}] \in M_{m \times n}(\mathbb{K})$ .

- El *vector fila*  $i$  es el vector  $(a_{i1}, \dots, a_{in}) \in \mathbb{K}^n$ .
- El *espacio fila* de  $A$  es el subespacio de  $\mathbb{K}^n$  generado por los  $m$  vectores fila de  $A$ .
- El *vector columna*  $j$  es el vector  $(a_{1j}, \dots, a_{mj}) \in \mathbb{K}^m$ .
- El *espacio columna* de  $A$  es el subespacio de  $\mathbb{K}^m$  generado por los  $n$  vectores columna de  $A$ .

## Ejemplo

Sea

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

El vector fila 1 es  $(1, 2, 0, 3, 0)$ , el vector columna 4 es  $(3, 4, 0)$ , etc.

Sea  $W$  el espacio fila de  $A$ . entonces

$$W = \langle (1, 2, 0, 3, 0), (0, 0, 1, 4, 0), (0, 0, 0, 0, 1) \rangle$$

Sea  $U$  el espacio columna de  $A$ . Entonces:

$$U = \langle (1, 0, 0), (2, 0, 0), (0, 1, 0), (3, 4, 0), (0, 0, 1) \rangle = \mathbb{R}^3.$$

## Teorema

Sean  $A$  matriz  $m \times n$  con coeficientes en  $\mathbb{K}$ ,  $P$  matriz  $m \times m$  invertible y  $B = PA$ . Entonces el espacio fila de  $A$  es igual al espacio fila de  $B$ .

## Demostración

Sea  $W_1$  espacio fila de  $A$  y  $W_2$  espacio fila de  $B$ .

Sea  $A = [a_{ij}]$ ,  $P = [p_{ij}]$  y  $B = [b_{ij}]$ . Como  $B = PA$ , tenemos que la fila  $i$  de  $B$  es

$$\begin{aligned}(b_{i1}, \dots, b_{in}) &= (F_i(P) \cdot C_1(A), \dots, F_i(P) \cdot C_n(A)) \\ &= \left( \sum_{j=1}^m p_{ij} a_{j1}, \dots, \sum_{j=1}^m p_{ij} a_{jn} \right) \\ &= \sum_{j=1}^m p_{ij} (a_{j1}, \dots, a_{jn}).\end{aligned}\tag{*}$$

- por (\*) cada vector fila de  $B$  se puede obtener como combinación lineal de los vectores fila de  $A$ .
- Por lo tanto el espacio fila de  $B$  está incluido en el espacio fila de  $A$ :  $W_2 \subset W_1$ .
- $P$  invertible  $\Rightarrow \exists P^{-1}$ .
- $P^{-1}B = P^{-1}PA = A$ .
- Un razonamiento análogo al (\*) de la página anterior  $\Rightarrow$  espacio fila de  $A$  está incluido en el espacio fila de  $B$ :  $W_1 \subset W_2$ .

$$W_2 \subset W_1 \quad \wedge \quad W_1 \subset W_2 \quad \Rightarrow \quad W_1 = W_2. \quad \square$$

## Corolario

Sean  $A$  matriz  $m \times n$  y  $R$  la MRF equivalente por filas a  $A$ . Entonces,

1. el espacio fila de  $A$  es igual al espacio fila de  $R$ ,
2. las filas no nulas de  $R$  forman una base del espacio fila de  $A$ .

## Demostración

(1)  $R$  la MRF equivalente por filas a  $A \Rightarrow R = PA$  con  $P$  invertible  $\xRightarrow{\text{Teor. ant.}}$  espacio fila de  $A =$  espacio fila de  $B$ .

(2)  $R$  es MRF  $\Rightarrow$  cada fila no nula comienza con un 1 y en esa coordenada todas las demás filas tienen un 0  $\Rightarrow$  las filas no nulas de  $R$  son LI  $\Rightarrow$  las filas no nulas de  $R$  son base.



## Corolario

*Sean  $A$  matriz  $n \times n$ . Entonces,  $A$  es invertible si y sólo si las filas de  $A$  son una base de  $\mathbb{K}^n$ .*

## Demostración

Si  $A$  es invertible entonces la MERF de  $A$  es la identidad, por lo tanto el espacio fila de  $A$  genera  $\mathbb{K}^n$ .

Por otro lado, si el espacio fila de  $A$  genera  $\mathbb{K}^n$ , el espacio fila de la MERF es  $\mathbb{K}^n$  y por lo tanto la MERF de  $A$  es la identidad y en consecuencia  $A$  es invertible.

Hemos probado que  $A$  es invertible si y sólo si las  $n$  filas de  $A$  generan  $\mathbb{K}^n$ .

Como  $\dim \mathbb{K}^n = n$ , todo conjunto de  $n$  generadores es una base. □

# Bases de subespacios

El corolario de la p. 21 nos permite encontrar fácilmente la dimensión de un subespacio de  $\mathbb{K}^n$  generado explícitamente por  $m$  vectores.

- Sea  $v_1, \dots, v_m \in \mathbb{K}^n$  y  $W = \langle v_1, \dots, v_m \rangle$ ,
- Consideramos la matriz

$$A = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_m \end{bmatrix}$$

- Calculamos  $R$ , una MRF equivalente por filas a  $A$ .
- $W$  = espacio fila de  $R$ .
- Si  $R$  tiene  $r$  filas no nulas, las  $r$  filas no nulas son una base de  $W$ .
- Por consiguiente,  $\dim W = r$ .

## Ejemplo

Encontrar una base de  $W = \langle (1, 0, 1), (1, -1, 0), (5, -3, 2) \rangle$ .

## Solución

Formemos la matriz cuyas filas son los vectores que generan  $W$ , es decir

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 5 & -3 & 2 \end{bmatrix}.$$

Entonces

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 5 & -3 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow[F_3 - 5F_1]{F_2 - F_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & -3 & -3 \end{bmatrix} \xrightarrow{-F_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & -3 \end{bmatrix} \xrightarrow{F_3 - 3F_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Por lo tanto,  $\dim W = 2$  y  $(1, 0, 1), (0, 1, 1)$  es una base de  $W$ . □



# Subconjuntos LI de un sistema de generadores

- Dada un conjunto de generadores de un subespacio  $W$  de  $\mathbb{K}^n$  “sabemos” encontrar una base de  $W$ .
- Esa base de  $W$ , en general, utiliza otros vectores (no necesariamente los generadores).
- Veremos a continuación que dado  $S = \{v_1, \dots, v_m\}$  y  $W = \langle S \rangle$ , podemos encontrar fácilmente un subconjunto de  $S$  base de  $W$ .

## Teorema

Sea  $v_1, \dots, v_r$  vectores en  $\mathbb{K}^n$  y  $W = \langle v_1, \dots, v_r \rangle$ .

Sea  $A$  la matriz formada por las filas  $v_1, \dots, v_r$  y  $R$  una MRF equivalente por filas a  $A$  que se obtiene **sin** el uso de permutaciones de filas.

Si  $i_1, i_2, \dots, i_s$  filas no nulas de  $R \Rightarrow v_{i_1}, v_{i_2}, \dots, v_{i_s}$  base de  $W$ .

## Demostración

Se hará por inducción sobre  $r$ .

Si  $r = 1$  es trivial ver que vale la afirmación.

Supongamos que tenemos el resultado probado para  $r - 1$  (hipótesis inductiva).

Sea  $W' = \langle v_1, \dots, v_{r-1} \rangle$  y sea  $A'$  la matriz formada por las  $r - 1$  filas  $v_1, \dots, v_{r-1}$ . Sea  $R'$  la MRF equivalente por filas a  $A'$  que se obtiene sin usar permutaciones de filas. Por hipótesis inductiva, si  $i_1, i_2, \dots, i_s$  son las filas no nulas de  $R'$ , entonces  $v_{i_1}, v_{i_2}, \dots, v_{i_s}$  es una base de  $W'$ .

Sea

$$R_0 = \begin{bmatrix} R' \\ v_r \end{bmatrix}.$$

Si  $v_r \in W'$ , entonces  $v_{i_1}, v_{i_2}, \dots, v_{i_s}$  es una base de  $W$  y

$$R = \begin{bmatrix} R' \\ 0 \end{bmatrix}$$

es la MRF de  $A$ .

Si  $v_r \notin W'$ , entonces  $v_{i_1}, v_{i_2}, \dots, v_{i_s}, v_r$  es una base de  $W$  y la MRF de  $A$  tiene la última fila no nula. □

Finalmente, terminaremos la clase con un teorema que resume algunas equivalencias respecto a matrices invertibles.

### Teorema

*Sea  $A$  matriz  $n \times n$  con coeficientes en  $\mathbb{K}$ . Entonces son equivalentes*

- 1.  $A$  es invertible.*
- 2.  $A$  es equivalente por filas a  $\text{Id}_n$ .*
- 3.  $A$  es producto de matrices elementales.*
- 4. El sistema  $AX = Y$  tiene una única solución para toda matriz  $Y$  de orden  $n \times 1$ .*
- 5. El sistema homogéneo  $AX = 0$  tiene una única solución trivial.*
- 6.  $\det A \neq 0$ .*
- 7. Las filas de  $A$  son LI.*
- 8. Las columnas de  $A$  son LI.*