

Práctico 5

AUTOVALORES Y AUTOVECTORES

Objetivos.

- Familiarizarse con las nociones de autovalor y autovector de una matriz cuadrada.
- Aprender a calcular el polinomio característico, los autovalores, y los autoespacios de una matriz cuadrada.

Ejercicios. Los ejercicios con el símbolo (a) tienen una ayuda al final del archivo para que recurran a ella después de pensar un poco.

- (1) Para cada una de las siguientes matrices, hallar sus autovalores reales, y para cada autovalor, dar una descripción paramétrica del autoespacio asociado sobre \mathbb{R} .

$$(a) \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}, \quad (b) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}, \quad (c) \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad (d) \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 1 & \lambda & 0 \\ 0 & 1 & \lambda \end{bmatrix}, \quad \lambda \in \mathbb{R},$$

$$(e) \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad (f) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & \sin \theta \\ 0 & -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}, \quad 0 \leq \theta < 2\pi.$$

- (2) Calcular los autovalores complejos de las matrices (e) y (f) del ejercicio anterior, y para cada autovalor, dar una descripción paramétrica del autoespacio asociado sobre \mathbb{C} .

Observación. Es oportuno destacar algunos fenómenos que podemos observar en los ejercicios (1)-(2).

- (i) Una matriz con coeficientes reales puede no tener autovalores reales pero sí complejos (matriz (e)) o tener ambos (matriz (f)).
 - (ii) Para describir paramétricamente los autoespacios podemos necesitar distintas cantidades de parámetros para los distintos autovalores (la matriz (c)). Esta cantidad mínima de parámetros es lo que llamaremos *dimensión*.
 - (iii) La cantidad de autovalores distintos es menor o igual al tamaño de la matriz. Incluso puede tener un sólo autovalor (matriz (d) y más generalmente la matriz (e) del Ejercicio (9)) o tener tantos como el tamaño (matriz (b) y (f)).
- (3) Probar que hay una única matriz $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ tal que $(1, 1)$ es autovector de autovalor 2, y $(-2, 1)$ es autovector de autovalor 1.
- (4) Sea $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$, y sea $f(x) = ax^2 + bx + c$ un polinomio, con $a, b, c \in \mathbb{K}$. Sea $f(A)$ la matriz $n \times n$ definida por

$$f(A) = aA^2 + bA + c\text{Id}_n.$$

Probar que todo autovector de A con autovalor λ es autovector de $f(A)$ con autovalor $f(\lambda)$.

(5) Sea $A \in \mathbb{K}^{2 \times 2}$.

- (a) Probar que el polinomio característico de A es $\chi_A(x) = x^2 - \text{Tr}(A)x + \det(A)$.
- (b) Si A no es invertible, probar que los autovalores de A son 0 y $\text{Tr}(A)$.

(6) Sea $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$. Probar que el polinomio $\tilde{\chi}_A(x) = \det(x \text{Id}_n - A)$ y el polinomio característico de A tienen las mismas raíces.

Observación. Algunos libros definen el polinomio característico de la matriz A como $\tilde{\chi}_A(x) = \det(x \text{Id}_n - A)$. Como vemos en el ejercicio anterior, ambas definiciones sirven para encontrar autovalores de A . El polinomio $\tilde{\chi}_A(x)$ tiene la particularidad de ser mónico, o sea que el coeficiente del término x^n es 1.

(7) Probar que si $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ es una matriz nilpotente entonces 0 es el único autovalor de A . Usar esto para deducir que la matriz $\text{Id}_n - A$ es invertible (esta es otra demostración del Ejercicio (13) del Práctico 3).

(8) Decidir si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justificar.

- (a) Existe una matriz invertible A tal que 0 es autovalor de A .
- (b) Si A es invertible, entonces todo autovector de A es autovector de A^{-1} .

Ejercicios de repaso. Si ya hizo los ejercicios anteriores continúe con la siguiente guía. Los ejercicios que siguen son similares y le pueden servir para practicar antes de los exámenes.

(9) Repetir los Ejercicios 1 y 2 con las siguientes matrices.

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad & \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, & \text{(b)} \quad & \begin{bmatrix} -9 & 4 & 4 \\ -8 & 3 & 4 \\ -16 & 8 & 7 \end{bmatrix}, & \text{(c)} \quad & \begin{bmatrix} 4 & 4 & -12 \\ 1 & -1 & 1 \\ 5 & 3 & -11 \end{bmatrix}, \\ \text{(d)} \quad & \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & -1 \end{bmatrix}, & \text{(e)} \quad & \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & \lambda & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \lambda & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & \lambda \end{bmatrix}, \lambda \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

(10) Sea $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$, y sea $f(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$, $n \geq 1$, $a_i \in \mathbb{K}$, $a_n \neq 0$, un polinomio. Sea $f(A)$ la matriz $n \times n$ definida por

$$f(A) = a_0 \text{Id}_n + a_1 A + \dots + a_n A^n.$$

Probar que todo autovector de A con autovalor λ es autovector de $f(A)$ con autovalor $f(\lambda)$.

(11) **En este ejercicio consideraremos el polinomio** $\tilde{\chi}_A(x) = \det(x \text{Id}_n - A)$.

(a) Calcular el polinomio $\tilde{\chi}_A(x)$ de las siguientes matrices.

$$A_2 := \begin{bmatrix} 0 & -a_0 \\ 1 & -a_1 \end{bmatrix}, \quad A_3 := \begin{bmatrix} 0 & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & -a_2 \end{bmatrix}.$$

donde a_0, a_1, a_2 son escalares.

(b) ⑨ Sean a_0, \dots, a_{n-1} escalares. Calcular el polinomio $\tilde{\chi}_A(x)$ de

$$A_n := \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & -a_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & & \vdots & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & -a_{n-1} \end{bmatrix}.$$

(c) Deducir que dado un polinomio mónico $p(x)$ siempre existe una matriz A tal que $\tilde{\chi}_A(x) = p(x)$.

(12) ⑨ **En este ejercicio consideraremos el polinomio** $\tilde{\chi}_A(x) = \det(x \text{Id}_n - A)$. Sea $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$, y $\tilde{\chi}_A(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_0$. Probar que

(a) $a_0 = (-1)^n \det(A)$.

(b) $a_{n-1} = -\text{Tr}(A)$.

(13) ⑨ **En este ejercicio consideraremos el polinomio** $\tilde{\chi}_A(x) = \det(x \text{Id}_n - A)$. Sea $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$. Probar que si $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{C}$ son los autovalores de A (posiblemente repetidos), entonces se cumple que:

(a) $\det(A) = \lambda_1 \cdots \lambda_n$.

(b) $\text{Tr}(A) = \lambda_1 + \dots + \lambda_n$.

Aclaración. Los Ejercicios (12) (b) y (13) (b) no son fáciles de probar y no son evaluables. Pero ya que enunciamos los items (a) es interesante saber que valen los items (b).

Ayudas. (11b) Desarrollar el determinante por la primera fila y hacer inducción.

(12) (a) Evaluar el polinomio $\tilde{\chi}_A(x)$ en un valor apropiado para obtener el término independiente a_0 .

(12) (b) Desarrollar el determinante de $x \text{Id} - A$ por la primera columna y hacer inducción en el tamaño de la matriz. Es decir, primero

$$\tilde{\chi}_A(x) = \det(x \text{Id} - A) =$$

$$(x - a_{11}) \det((x \text{Id} - A)(1|1)) + a_{21} \det((x \text{Id} - A)(2|1)) + \dots + (-1)^n a_{n1} \det((x \text{Id} - A)(n|1)).$$

De estos sumandos, el único sumando donde hay x^{n-1} es $(x - a_{11}) \det((x \text{Id} - A)(1|1))$. Además, $\det((x \text{Id} - A)(1|1))$ es el polinomio característico de la submatriz $A(1|1)$. Podemos aplicar la hipótesis inductiva a esta matriz y deducir que el coeficiente de x^{n-1} en el producto de polinomios $(x - a_{11}) \det((x \text{Id} - A)(1|1))$ es $-\text{Tr}(A)$.

(13) Sobre \mathbb{C} podemos descomponer el polinomio $\tilde{\chi}_A(x)$ de la siguiente manera

$$\tilde{\chi}_A(x) = (x - \lambda_1)(x - \lambda_2) \cdots (x - \lambda_n). \quad (\diamond)$$

Con esta igualdad podemos calcular los términos a_0 y a_{n-1} de $\tilde{\chi}_A(x)$ de dos maneras. La primera es la obtenida en el Ejercicio (12). La segunda es usando la multiplicación del lado derecho de (\diamond) . Para el término a_0 hay que evaluar en un valor apropiado. Para el término a_{n-1} hay que notar que para obtener x^{n-1} debemos elegir una x de todos los factores salvo en uno y un término del estilo $-\lambda_i$. Igualando lo que obtengamos probamos el ejercicio.