Álgebra/Álgebra II
Clase 16 - Isomorfismos

FAMAF / UNC

30 de mayo de 2024

Los dos teoremas (los de pp. 3 y 11) que vamos a ver aquí son muy fuertes, en el sentido que dan mucha información por si solos y que además serán de utilidad para estudiar transformaciones inyectivas, suryectivas y biyectivas.

Las demostraciones son elegantes, en el sentido que sólo requieren que razonemos pegando algunas ideas y resultados pero sin trabajar en cuentas largas y tediosas.

Las demostraciones no son difíciles, pero requieren concentración y maduración de ideas y conceptos; hacer ejercicios ayuda a asimilarlos.

El siguiente resultado relaciona las dimensiones del núcleo y la imagen.

Teorema

Sea $T : V \longrightarrow W$ *una transformación lineal. Si* V *es de dimensión finita entonces*

$$\dim V = \dim \mathrm{Nu}(T) + \dim \mathrm{Im}(T)$$

Observar que este resultado relaciona en forma general dos subespacios que "viven" en espacios diferentes.

- $\mathrm{Nu}(T) \in V$,
- $\mathrm{Im}(T) \in W$.
- Si $n = \dim V$,

tenemos que $n = \dim \mathrm{Nu}(T) + \dim \mathrm{Im}(T)$ *cualquiera* sea T.

Demostración

Sea $\{v_1, ..., v_k\}$ una base del $\mathrm{Nu}(T)$ $\quad (\Rightarrow \dim \mathrm{Nu}\, T = k)$.

Sea $\{v_1, ..., v_k, w_1, ..., w_m\}$ una base de V obtenida completando la base de $\mathrm{Nu}(T)$ $\quad (\Rightarrow \dim V = k + m)$.

Si probamos que $\{T(w_1), ..., T(w_m)\}$ es una base de $\mathrm{Im}(T)$ el teorema queda demostrado.

Pues, de ser así, deducimos que

$$\begin{aligned} \dim V &= k + m \\ &= \dim \mathrm{Nu}(T) \quad + \quad |\{T(w_1), ..., T(w_m)\}| \\ &= \dim \mathrm{Nu}(T) \quad + \quad \dim \mathrm{Im}(T) \end{aligned}$$

Esto lo probaremos en las siguientes pantallas.

Queremos ver que $\{T(w_1), ..., T(w_m)\}$ genera $\mathrm{Im}(T)$ y es LI.

$\{T(w_1), ..., T(w_m)\}$ genera $\mathrm{Im}(T)$:

Sea $w \in \mathrm{Im}(T) \Rightarrow w = T(v)$, para algún $v \in V$.

Como $v = \mu_1 v_1 + \cdots + \mu_k v_k + \lambda_1 w_1 + \cdots + \lambda_m w_m$

$\Rightarrow$

$$\begin{aligned} w = T(v) &= T(\mu_1 v_1 + \cdots + \mu_k v_k + \lambda_1 w_1 + \cdots + \lambda_m w_m) \\ &= \mu_1 \underbrace{T(v_1)}_{0} + \cdots + \mu_k \underbrace{T(v_k)}_{0} + \lambda_1 T(w_1) + \cdots + \lambda_m T(w_m) \\ &= \lambda_1 T(w_1) + \cdots + \lambda_m T(w_m) \end{aligned}$$

Luego $w \in \langle T(w_1), ..., T(w_m) \rangle$.

$\{T(w_1), ..., T(w_m)\}$ es LI:

Sea $\lambda_1, ..., \lambda_m$ tales que

$$\lambda_1 T(w_1) + \cdots + \lambda_m T(w_m) = 0 \qquad (*)$$

debemos ver que $\lambda_1 = \cdots = \lambda_m = 0$.
Ahora bien

$$T(\lambda_1 w_1 + \cdots + \lambda_m w_m) = \lambda_1 T(w_1) + \cdots + \lambda_m T(w_m) \overset{(*)}{=} 0.$$

Es decir $\lambda_1 w_1 + \cdots + \lambda_m w_m \in \mathrm{Nu}(T) = \langle v_1, \ldots, v_k \rangle$.

$\Rightarrow$

$$\lambda_1 w_1 + \cdots + \lambda_m w_m = \mu_1 v_1 + \cdots + \mu_k v_k.$$

Luego

$$0 = -\mu_1 v_1 - \cdots - \mu_k v_k + \lambda_1 w_1 + \cdots + \lambda_m w_m$$

Dado que $\{v_1, ..., v_k, w_1, ..., w_m\}$ es LI, la igualdad

$$-\mu_1 v_1 - \cdots - \mu_k v_k + \lambda_1 w_1 + \cdots + \lambda_m w_m = 0$$

implica que

$$\mu_1 = \cdots = \mu_k = \lambda_1 = \cdots = \lambda_m = 0$$

Luego

$$\lambda_1 T(w_1) + \cdots + \lambda_m T(w_m) = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = \cdots = \lambda_m = 0,$$

y por lo tanto $T(w_1), \ldots, \lambda_m T(w_m)$ es LI.

$\square$

El siguiente lema es importante por si mismo y además será necesario más adelante.

Lema

Sea $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ y R la MERF equivalente a A. Entonces

$$\begin{array}{c} \dim\{\text{soluciones del sistema homogéneo } AX = 0\} \\ \| \\ |\text{variables libres de } RX = 0|. \end{array}$$

A continuación damos una idea de la demostración.

Idea de la demostración

Sea r el número de filas no nulas de R y $k_1, \ldots, k_r$ las columnas donde aparecen los 1's principales.

Entonces, $k_1 < k_2 < \cdots < k_r$ y el sistema de ecuaciones asociado a R es:

$$\begin{array}{ccccc} x_{k_1} & + & \sum_{j \neq k_1, \ldots, k_r} b_{1j}\, x_j & = & 0 \\ x_{k_2} & + & \sum_{j \neq k_1, \ldots, k_r} b_{2j}\, x_j & = & 0 \\ \vdots & & & \vdots & \\ x_{k_r} & + & \sum_{j \neq k_1, \ldots, k_r} b_{rj}\, x_j & = & 0 \end{array}$$

Sean $x_{j_1}, x_{j_1}, \ldots, x_{j_{n-r}}$ las $n - r$ variables libres
(es decir los x_j con $j \neq k_1, \ldots, k_r$)

Luego,

$$\begin{array}{rcl} x_{k_1} & = & -\sum_{i=1}^{n-r} b_{1j_i}\, x_{j_i} \\ x_{k_2} & = & -\sum_{i=1}^{n-r} b_{2j_i}\, x_{j_i} \\ \vdots & & \vdots \\ x_{k_r} & = & -\sum_{i=1}^{n-r} b_{rj_i}\, x_{j_i} \end{array}$$

Es decir, el subespacio formado por las soluciones de $AX = 0$, consta de n-uplas $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, donde

- $x_k = x_{j_i}$, para algún $i = 1, \ldots, n-r$, o
- $x_k =$ c.l. de los x_{j_i}.

Por lo tanto,

$$W = \{\sum_{i=1}^{n-r} x_{j_i} w_i : x_{j_1}, \ldots, x_{j_{n-r}} \in \mathbb{K}\}$$

para algunos $w_1, \ldots, w_{n-r}$ que son LI.

Luego $\dim(W) = n - r$. $\square$

Definición

Sea $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$.

- El *rango fila* de A es la dimensión del subespacio de $\mathbb{R}^n$ generado por las filas de A.
- El *rango columna* de A es la dimensión del subespacio de $\mathbb{R}^m$ generado por las columnas de A.

Teorema

Si A es una matriz $m \times n$ con coeficientes en $\mathbb{K}$, entonces

$$\textit{rango fila}\,(A) = \textit{rango columna}\,(A).$$

Notar que si $n \neq m$, estamos comparando subespacios de distintos espacios vectoriales.

Demostración

Sea T la transformación lineal

$$\begin{array}{rccc} T: & \mathbb{K}^{n\times 1} & \to & \mathbb{K}^{m\times 1} \\ & X & \mapsto & AX. \end{array}$$

Sea R la MERF equivalente por filas a A. Sea k la cantidad de filas de R no nulas y, entonces, $n-k$ es la cantidad de variables libres de R.

Por el Corolario 4.4.3 de las Notas (visto en la clase 14) las filas no nulas de R forman una base del espacio de de fila, luego

$$\textit{rango fila de } A = k. \qquad (*)$$

Observar que

$$\mathrm{Nu}(T) = \{X \in \mathbb{K}^{n\times 1} : AX = 0\}.$$

Luego, por el lema anterior, $\dim \mathrm{Nu}(T) = n - k$.
Como por el teorema de la dimensión $\dim \mathbb{K}^n = n$, tenemos que

$$\dim \mathrm{Nu}(T) + \dim \mathrm{Im}(T) = n,$$

Se deduce que

$$\dim \mathrm{Im}(T) = k. \qquad (**)$$

El espacio columna de A es igual a la imagen de T.

Esto es por la forma en que multiplicamos matrices:

$$A = \begin{bmatrix} | & | & & | \\ C_1 & C_2 & \cdots & C_n \\ | & | & & | \end{bmatrix} \quad \Rightarrow$$

$$T(x_1, \ldots, x_n) = \begin{bmatrix} | & | & & | \\ C_1 & C_2 & \cdots & C_n \\ | & | & & | \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = x_1 C_1 + \ldots + x_n C_n.$$

Luego $\operatorname{Im}(T) = \langle C_1, \ldots, C_n \rangle$.

Por lo tanto, $\dim \operatorname{Im}(T) =$ rango columna de $A \overset{(**)}{=} k$. $\square$

Isomorfismos

Ahora estudiaremoas transformaciones lineales inyectivas, sobreyectivas y biyectivas.

Este tipo de transformaciones nos dan información acerca de dimensiones, generadores y conjuntos LI.

Sea $T : V \to W$ lineal. Veremos:

- T es inyectiva $\Leftrightarrow$ $\operatorname{Nu} T = 0$ $\Leftrightarrow$ $\dim \operatorname{Nu} T = 0$.
- T inyectiva $\Leftrightarrow$ T de LI es LI.
- T sobreyectiva $\Leftrightarrow$ T de generadores de V es generadores de W.
- T biyectiva $\Leftrightarrow$ T de base es base.

Definición (5.3.1 de las Notas)

Sean V, W espacios vectoriales sobre un cuerpo $\mathbb{K}$ y sea $T : V \to W$ una transformación lineal.

- T es *epimorfismo* si T es suryectiva.
  Es decir si $\mathrm{Im}(T) = W$.
- T es *monomorfismo* si T es inyectiva (o $1-1$).
  Es decir, $T(v_1) = T(v_2) \Rightarrow v_1 = v_2$.
- T es un *isomorfismo* si es monomorfismo y epimorfismo (es decir si es inyectiva y suryectiva).

Observación

- T es epimorfismo si y sólo si

$$T \text{ es lineal y } \forall\, w \in W,\ \exists v \in V \text{ tal que } T(v) = w.$$

  Esto se deduce inmediatamente de la definiciones de función suryectiva y de $\operatorname{Im}(T)$.

- T es monomorfismo si y sólo si

$$T \text{ es lineal y } \forall\, v_1, v_2 \in V :\ v_1 \neq v_2 \Rightarrow T(v_1) \neq T(v_2).$$

  Esto se obtiene aplicando el contrarrecíproco a la definición de función inyectiva.

Proposición

Sea $T : V \to W$ una transformación lineal. Entonces T es monomorfismo si y sólo si $\mathrm{Nu}(T) = 0$.

Demostración

$(\Rightarrow)$ Debemos ver que $T(v) = 0 \Rightarrow v = 0$.

$$T(v) = 0 \;\wedge\; T(0) = 0 \quad \stackrel{T \text{ mono}}{\Longrightarrow} \quad v = 0.$$

$(\Leftarrow)$ Sean $v_1, v_2 \in V$ tal que $T(v_1) = T(v_2)$. Entonces

$$0 = T(v_1) - T(v_2) \stackrel{T \text{ lineal}}{=} T(v_1 - v_2) \quad \Rightarrow \quad v_1 - v_2 \in \mathrm{Nu}(T) = \{0\}.$$

Luego, $v_1 - v_2 = 0$, es decir $v_1 = v_2$.

$\square$

Observación

Sea $T : V \to W$ transformación lineal,

(1) T es epimorfismo $\Leftrightarrow \operatorname{Im}(T) = W \Leftrightarrow \dim \operatorname{Im}(T) = \dim W$.

(2) T es monomorfismo $\Leftrightarrow \operatorname{Nu}(T) = 0 \Leftrightarrow \dim \operatorname{Nu}(T) = 0$.

Proposición

Sea $T : V \to W$ transformación lineal. Entonces,

(1) T es monomorfismo si y sólo si T de un conjunto LI es LI.

(2) T es epimorfismo si y sólo si T de un conjunto de generadores de V es un conjunto de generadores de W.

En las próximas pantallas veremos la demostración.

(1) $(\Rightarrow)$ Sea $\{v_1, \ldots, v_n\}$ LI en V y $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ tales que

$$\lambda_1 T(v_1) + \cdots + \lambda_n T(v_n) = 0.$$

Debemos probar que $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n = 0$.

$$\begin{aligned}
0 &= \lambda_1 T(v_1) + \cdots + \lambda_n T(v_n) && \text{(hipótesis)}\\
&= T(\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n) && \text{(linealidad de } T\text{)}\\
&\Rightarrow \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n = 0 && (T \text{ mono})\\
&\Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n = 0 && (\{v_1, \ldots, v_n\} \text{ LI})
\end{aligned}$$

Por lo tanto, $T(v_1), \ldots, T(v_n)$ son LI.

(1) $(\Leftarrow)$ Si Nu $T = 0 \quad \Rightarrow \quad T$ es mono (proposición p. 21)

Veamos, entonces, que Nu $T = 0$, es decir: $T(v) = 0 \Rightarrow v = 0$.

Probemos el contrarecíproco: $v \neq 0 \Rightarrow T(v) \neq 0$

$$\begin{aligned} v \neq 0 &\Rightarrow v \text{ es LI} \\ &\Rightarrow T(v) \text{ es LI} && \text{(hipótesis)} \\ &\Rightarrow T(v) \neq 0 && . \end{aligned}$$

Luego

$$\begin{aligned} (v \neq 0 \Rightarrow T(v) \neq 0) &\Rightarrow (T(v) = 0 \Rightarrow v = 0) \\ &\Rightarrow \mathrm{Nu}(T) = 0 \\ &\Rightarrow \ T \text{ es mono.} \end{aligned}$$

(2) ($\Rightarrow$) Sea $V = \langle v_1, \dots, v_n \rangle$ y $w \in W$.

Debemos ver que $w \in \langle T(v_1), \dots, T(v_n) \rangle$

Como T es epimorfismo, existe $v \in V$ tal que $T(v) = w$.

$$
\begin{aligned}
v &= \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n && (v_1, \dots, v_n \text{ genera } V) \\
&\Downarrow \\
T(v) &= T(\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n) && (\text{aplicamos } T) \\
&= \lambda_1 T(v_1) + \cdots + \lambda_n T(v_n) && (T \text{ lineal}) \\
&\Downarrow \\
w &= \lambda_1 T(v_1) + \cdots + \lambda_n T(v_n) && (w = T(v)) \\
&\Downarrow \\
w &\in \langle T(v_1), \dots, T(v_n) \rangle.
\end{aligned}
$$

(2) ($\Leftarrow$) Debemos ver que: $w \in W \Rightarrow$ existe $v \in V$ tal que $w = T(v)$.

Sea $\{v_1, \ldots, v_n\}$ una base de V.

Por hipótesis $T(v_1), \ldots, T(v_n)$ generan W.

Es decir dado cualquier $w \in W$, existen $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ tales que

$$w = \lambda_1 T(v_1) + \cdots + \lambda_n T(v_n),$$

y por lo tanto

$$\begin{aligned} w &= \lambda_1 T(v_1) + \cdots + \lambda_n T(v_n) \\ &= T(\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n) && (T \text{ lineal}) \\ &= T(v), \end{aligned}$$

con

$$v = \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n.$$

$\square$

Corolario

Sea $T : V \to W$ transformación lineal. Entonces T es un isomorfismo si y solo si T de una base de V es una base de W.

Demostración

($\Rightarrow$) Sea $\mathcal{B}$ base de V. Como T es isomorfismo, T es mono y epi, luego por proposición de p. 22, $T(\mathcal{B})$ es LI y genera W, es decir, es base de W.
($\Leftarrow$) Sea $\mathcal{B}$ base de V y $T : V \to W$ transformación lineal tal que $T(\mathcal{B})$ es base. Por lo tanto, manda un conjunto LI a un conjunto LI y un conjunto de generadores de V a un conjunto de generadores de W. Por proposición de p. 22, T es mono y epi, por lo tanto T es un isomorfismo. $\square$

Corolario

Sean V y W dos $\mathbb{K}$-espacios vectoriales de dimensión finita tal que V es isomorfo a W. Entonces $\dim(V) = \dim(W)$.

Recordar que si una función es biyectiva entonces se puede definir la función inversa.

Teorema

Sea $T : V \longrightarrow W$ *un isomorfismo. Entonces la función inversa*

$$T^{-1} : W \longrightarrow V$$

es también un isomorfismo.
Es decir, T^{-1} *es una transformación lineal biyectiva.*

Demostración

Sean $w_1, w_2 \in W$, $\lambda \in \mathbb{K}$, probemos que

$$T^{-1}(w_1 + \lambda w_2) = T^{-1}(w_1) + \lambda T^{-1}(w_2).$$

Sean $v_i = T^{-1}(w_i) \Rightarrow T(v_i) = w_i$.

$$\begin{aligned}
T^{-1}(w_1 + \lambda w_2) &= T^{-1}(T(v_1) + \lambda T(v_2)) && (w_i = T(v_i)) \\
&= T^{-1}(T(v_1 + \lambda v_2)) && (T \text{ lineal}) \\
&= (T^{-1} \circ T)(v_1 + \lambda v_2) && (\text{def de } \circ) \\
&= v_1 + \lambda v_2 && (T^{-1} \circ T = \mathrm{Id}) \\
&= T^{-1}(w_1) + \lambda T^{-1}(w_2). && (\ v_i = T^{-1}(w_i)) \quad \square
\end{aligned}$$

Teorema

Sea $T : V \longrightarrow W$ *una transformación lineal con* $\dim V = \dim W$*.*
Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes

(1) T *es un isomorfismo.*

(2) T *es monomorfismo.*

(3) T *es epimorfismo.*

(4) $\{v_1, ..., v_n\}$ *base de* $V \;\Rightarrow\; \{T(v_1), ..., T(v_n)\}$ *base de* W*.*

Vamos a probar

- $(1) \Rightarrow (2) \Rightarrow (3) \Rightarrow (1)$,
- $(1) \Rightarrow (4) \;\wedge\; (4) \Rightarrow (1)$

Del primer ítem obtenemos $(1) \Leftrightarrow (2) \Leftrightarrow (3)$.
Del segundo ítem obtenemos $(1) \Leftrightarrow (4)$.

Luego $(1) \Leftrightarrow (2) \Leftrightarrow (3) \Leftrightarrow (4)$.

Demostración

(1) $\Rightarrow$ (2). Obvio, de la definición de iso.

(2) $\Rightarrow$ (3). Usaremos el teorema de la dimensión del núcleo y la imagen:

$$\begin{aligned} T \text{ mono } &\Rightarrow \dim \operatorname{Nu} T = 0 && \text{(proposición de p. 21)} \\ &\Rightarrow \dim \operatorname{Im} T = \dim V = \dim W && \text{(teorema de la dimensión)} \\ &\Rightarrow \operatorname{Im} T = W \\ &\Rightarrow T \text{ epi} \end{aligned}$$

(3) $\Rightarrow$ (1).
$$\begin{aligned} T \text{ epi } &\Rightarrow \dim \operatorname{Im} T = \dim V = \dim W \\ &\Rightarrow \dim \operatorname{Nu} T = 0 && \text{(teorema de la dim.)} \\ &\Rightarrow \operatorname{Nu} T = 0 \\ &\Rightarrow T \text{ mono} && \text{(proposición de p. 21)} \end{aligned}$$

T epi y T mono $\Rightarrow$ T iso.

(1) $\Rightarrow$ (4). Sea $\{v_1, \dots, v_n\}$ una base de V.

Entonces $\{v_1, \dots, v_n\}$ es LI y genera V.

$$\text{Proposición de p. 22} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} \{T(v_1), \dots, T(v_n)\} \text{ es LI} \\ \{T(v_1), \dots, T(v_n)\} \text{ genera } W. \end{array}$$

Por lo tanto $\{T(v_1), \dots, T(v_n)\}$ es una base de W.

(4) $\Rightarrow$ (1). Como T de una base es una base, entonces

- T de un conjunto LI es un conjunto LI,
- T de un conjunto de generadores de V es un conjunto de generadores de W.

Por lo tanto, por proposición de p. 22, T es monomorfismo y epimorfismo.

Luego T es un isomorfismo. $\square$

Definición

Dos espacios vectoriales V y W se dicen *isomorfos*, en símbolos $V \cong W$, si existe un isomorfismo $T : V \longrightarrow W$

Corolario (del teorema de p. 30)

Sean V y W espacios de vectoriales dimensión finita. Entonces

$$\dim V = \dim W \quad \Rightarrow \quad V \cong W.$$

Idea de la demostración

Si $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ una base de V y $\mathcal{B}' = \{w_1, \ldots, w_n\}$ una base de W

$$T : \mathcal{B} \to \mathcal{B}' \quad \text{definida por } T(v_i) = w_i,$$

se puede extender a un isomorfismo $T : V \to W$. $\square$

Ejemplo

Recordemos:

$$\mathbb{K}_n[x] = \{a_0 + a_1 x + \cdots + a_{n-1} x^{n-1} : a_0, a_1, \ldots, a_{n-1} \in \mathbb{K}\}.$$

Entonces,

$$\mathbb{K}_n[x] \cong \mathbb{K}^n.$$

Demostración

Es consecuencia inmediata del corolario anterior, pues ambos tienen dimensión n.

Explícitamente, $1, x, \ldots, x^{n-1}$ es base de $\mathbb{K}_n[x]$ y sea $e_1, \ldots, e_n$ la base canónica de $\mathbb{K}^n$, entonces un isomorfismo de $\mathbb{K}_n[x]$ a $\mathbb{K}^n$ viene dado por la única transformación lineal $T : \mathbb{K}_n[x] \to \mathbb{K}^n$ tal que

$$T(x^i) = e_{i+1}, \qquad i = 0, \ldots, n-1.$$

$\square$

Resultados MI 1 (a tener en cuenta)

Sea $T : V \longrightarrow W$ una transformación lineal con V, W de dimensión finita.

- $\{v_1, ..., v_k\}$ genera $V \;\Rightarrow\; \{T(v_1), ..., T(v_k)\}$ genera $\mathrm{Im}(T)$.
- $\dim V = \dim \mathrm{Nu}(T) + \dim \mathrm{Im}(T)$.
- T mono $\Leftrightarrow \mathrm{Nu}(T) = 0$.
- T mono $\Leftrightarrow$ T de LI es LI.
- T epi $\Leftrightarrow$ T(generadores de V) $=$ generadores de W.
- T iso $\Leftrightarrow$ T(base de V) $=$ base de W.

Resultados MI 2 (a tener en cuenta)

Si $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, sea A la matriz $m \times n$ asociada a A y R una MRF de A.

- $\circ$ $\mathrm{Nu}(T) = \{x : Ax = 0\}$, $\mathrm{Im}(T) = \{b : Ax = b$, algún $x\}$.
- $\circ$ rango fila de $A =$ rango columna de A.
- $\circ$ $|$filas no nulas de $R| \;=\;$ rg-fil $A \;=\;$ rg-col $A \;=\; \dim \mathrm{Im}(A)$.
- $\circ$ $\dim \mathrm{Nu}(A) \;=\; |$variables libres de $RX = 0| \;=\; n-$rg-fil A.