Álgebra/Álgebra II
Clase 3 -Sistemas de ecuaciones lineales 1

FAMAF / UNC

19 de marzo de 2020

Objetivo

En las próximas clases aprenderemos a resolver sistemas de ecuaciones lineales sobre $\mathbb{R}$ usando el *método de Gauss.*

Con este fin, veremos en esta clase

- La definición de sistemas de ecuaciones lineales.
- Resolveremos algunos sistemas de ecuaciones concretos usando el método de *eliminación de variables.*
- Justificaremos el método de eliminación de variables.

El método de Gauss no es más que una forma de utilizar el método de eliminación de variables de manera sistemática y algorítmica.

El método de Gauss será visto en las próximas clases.

El problema general

El problema a resolver será el siguiente: buscamos números $x_1, \ldots, x_n$ en el cuerpo $\mathbb{K}$ ($= \mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$) que satisfagan las siguientes condiciones

$$\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & y_1 \\ \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \cdots & + & a_{mn}x_n & = & y_m \end{array} \qquad (*)$$

donde $y_1, \ldots, y_m$ y a_{ij} ($1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$) son números en $\mathbb{K}$.

Se dice que las ecuaciones (*) forman un *sistema de ecuaciones lineales* de m ecuaciones y n incógnitas.

- El sistema es *homogeneo* si $y_i = 0$ para todo i.
- El sistema es *no homogeneo* si $y_i \neq 0$ para algún i.

Los siguientes son sistemas de 2 ecuaciones lineales con 2 incógnitas:

$$(1) \qquad \begin{aligned} 2x_1 + 8x_2 &= 0 \\ 2x_1 + x_2 &= 1 \end{aligned}$$

$$(2) \qquad \begin{aligned} 2x_1 + x_2 &= 0 \\ 2x_1 - x_2 &= 1 \end{aligned}$$

$$(3) \qquad \begin{aligned} 2x + y &= 1 \\ 4x + 2y &= 2 \end{aligned}$$

Problema 1

Encontrar las soluciones (x, y, z) del sistema de ecuaciones:

$$\begin{array}{ccccccc} x & & & & 2z & = 1 \\ x & - & 3y & + & 3z & = 2 \\ 2x & - & y & + & 5z & = 3 \end{array}$$

Es decir, queremos encontrar los números reales x, y y z que satisfagan las ecuaciones anteriores.

Solución

Veremos que la única solución es $(x, y, z) = (-1, 0, 1)$.

Supongamos que (x, y, z) es una solución de nuestro sistema
Entonces también vale que:

$$\begin{array}{rrrrrrrcr} & x & - & 3y & + & 3z & = & 2 \\ (-1)\cdot & (x & & & + & 2z) & = & (-1)\cdot 1 \\ \hline & & - & 3y & + & z & = & 1 \end{array}$$

Por lo tanto (x, y, z) también es solución del sistema

$$\begin{array}{rrrrrl} x & & & + & 2z & = 1 \\ & - & 3y & + & z & = 1 \\ 2x & - & y & + & 5z & = 3 \end{array}$$

Dado que (x, y, z) es solución del sistema

$$\begin{array}{ccccccc} x & & & + & 2z & = 1 \\ & - & 3y & + & z & = 1 \\ 2x & - & y & + & 5z & = 3 \end{array}$$

Entonces también vale que:

$$\begin{array}{cccccccc} & 2x & - & y & + & 5z & = & 3 \\ (-2)\cdot & (x & & & + & 2z) & = & (-2)\cdot 1 \\ \hline & & - & y & + & z & = & 1 \end{array}$$

Por lo tanto (x, y, z) también es solución del sistema

$$\begin{array}{ccccccc} x & & & + & 2z & = 1 \\ & - & 3y & + & z & = 1 \\ & - & y & + & z & = 1 \end{array} \qquad \text{equivalentemente} \qquad \begin{array}{ccccccc} x & & & + & 2z & = 1 \\ & - & y & + & z & = 1 \\ & - & 3y & + & z & = 1 \end{array}$$

Dado que (x, y, z) es solución del sistema

$$\begin{array}{rcrcrl} x & & & + & 2z & = 1 \\ & - & y & + & z & = 1 \\ & - & 3y & + & z & = 1 \end{array}$$

Entonces también vale que:

$$\begin{array}{rrrcr} & -3y & +z & = & 1 \\ (-3)\cdot & (-y & +z) & = & (-3)\cdot 1 \\ \hline & & -2z & = & -2 \end{array}$$

Por lo tanto (x, y, z) también es solución del sistema

$$\begin{array}{rrrl} x & & +2z & = 1 \\ & -y & +z & = 1 \\ & & -2z & = -2 \end{array} \qquad \text{equivalentemente} \qquad \begin{array}{rrrl} x & & +2z & = 1 \\ & -y & +z & = 1 \\ & & z & = 1 \end{array}$$

Dado (x, y, z) es solución del sistema

$$\begin{array}{rrrl} x & & +2z & = 1 \\ & -y & +z & = 1 \\ & & z & = 1 \end{array}$$

Entonces también vale que:

$$\begin{array}{rrrcc} & x & +2z & = & 1 \\ (-2)\cdot & (& z) & = & (-2)\cdot 1 \\ \hline & & x & = & -1 \end{array} \qquad \text{y} \qquad \begin{array}{rrrcc} & -y & +z & = & 1 \\ (-1)\cdot & (& z) & = & (-1)\cdot 1 \\ \hline & & -y & = & 0 \end{array}$$

Por lo tanto (x, y, z) también es solución del sistema

$$\begin{array}{rrrl} x & & & = -1 \\ & -y & & = 0 \\ & & z & = 1 \end{array} \qquad \text{equivalentemente} \qquad \begin{array}{rl} x & = -1 \\ y & = 0 \\ z & = 1 \end{array}$$

En resumen, supusimos que (x, y, z) es una solución del sistema

$$\begin{array}{cccc} x & & +2z & = 1 \\ x & -3y & +3z & = 2 \\ 2x & -y & +3z & = 1 \end{array}$$

y probamos que

$$x = -1 \quad y = 0, \quad z = 1.$$

$\square$

Comprobemos. Si reemplazamos en el sistema x, y y z por estos valores

$$\begin{array}{cccc} (-1) & & +2\cdot(1) & = 1 \\ (-1) & -3\cdot 0 & +3\cdot(1) & = 2 \\ 2\cdot(-1) & -0 & +3\cdot(1) & = 1 \end{array}$$

vemos que verifican las igualdades del sistema.

Podría suceder que el sistema no tenga solución como en el siguiente caso.

Problema 2

Encontrar las soluciones (x, y, z) del sistema de ecuaciones:

$$\begin{array}{cccc} x & & +2z & = 1 \\ x & -3y & +3z & = 2 \\ 2x & -3y & +5z & = 4 \end{array}$$

Solución

Veremos que el sistema no tiene solución.

Supongamos que (x, y, z) es una solución de nuestro sistema

$$\begin{array}{cccl} x & & +2z & = 1 \\ x & -3y & +3z & = 2 \\ 2x & -3y & +5z & = 4 \end{array}$$

Entonces también vale que:

$$\begin{array}{cccccc} & x & -3y & +3z & = & 2 \\ (-1)\cdot & (x & & +2z) & = & (-1)\cdot 1 \\ \hline & & -3y & +z & = & 1 \end{array}$$

Por lo tanto (x, y, z) también es solución del sistema

$$\begin{array}{cccl} x & & +2z & = 1 \\ & -3y & +z & = 1 \\ 2x & -3y & +5z & = 4 \end{array}$$

Dado que (x, y, z) es solución del sistema

$$\begin{array}{rrrl} x & & +2z & = 1 \\ & -3y & +z & = 1 \\ 2x & -3y & +5z & = 4 \end{array}$$

Entonces también vale que:

$$\begin{array}{rrrrcc} & 2x & -3y & +5z & = & 4 \\ (-2)\cdot & (x & & +2z) & = & (-2)\cdot 1 \\ \hline & & -3y & +z & = & 2 \end{array}$$

Por lo tanto (x, y, z) también es solución del sistema

$$\begin{array}{rrrl} x & & +2z & = 1 \\ & -3y & +z & = 1 \\ & -3y & +z & = 2 \end{array}$$

Dado que (x, y, z) es solución del sistema

$$\begin{array}{rrrl} x & & +2z & = 1 \\ & -3y & +z & = 1 \\ & -3y & +z & = 2 \end{array}$$

Entonces también vale que:

$$\begin{array}{rrrrcc} & & -3y & +z & = & 2 \\ (-1)\cdot & (& -3y & +z) & = & (-1)\cdot 1 \\ \hline & & & 0 & = & 1 \end{array}$$

Esta igualdad es un absurdo, el cual provino de suponer que nuestro sistema tenía solución. $\square$

Un sistema también puede tener infinitas soluciones.

Problema 3

Encontrar las soluciones (x, y, z) del sistema de ecuaciones:

$$\begin{array}{cccc} x & & +2z & = 1 \\ x & -3y & +3z & = 2 \\ 2x & -3y & +5z & = 3 \end{array}$$

Solución

Veremos que el conjunto de soluciones del sistema es

$$\left\{ (-2z+1, \frac{z-1}{3}, z) : z \in \mathbb{R} \right\}.$$

Es decir, todas las soluciones son de la forma

$$x = -2z + 1 \text{ e } y = \frac{z-1}{3} \text{ donde } z \in \mathbb{R}.$$

Supongamos que (x, y, z) es una solución de nuestro sistema

$$\begin{array}{rrrl} x & & +2z & = 1 \\ x & -3y & +3z & = 2 \\ 2x & -3y & +5z & = 3 \end{array}$$

Entonces también vale que:

$$\begin{array}{rrrrcc} & x & -3y & +3z & = & 2 \\ (-1)\cdot & (x & & +2z) & = & (-1)\cdot 1 \\ \hline & & -3y & +z & = & 1 \end{array}$$

Por lo tanto (x, y, z) también es solución del sistema

$$\begin{array}{rrrl} x & & +2z & = 1 \\ & -3y & +z & = 1 \\ 2x & -3y & +5z & = 3 \end{array}$$

Dado que (x, y, z) es solución del sistema

$$\begin{array}{rrrl} x & & +2z & = 1 \\ & -3y & +z & = 1 \\ 2x & -3y & +5z & = 3 \end{array}$$

Entonces también vale que:

$$\begin{array}{rrrrcc} & 2x & -3y & +5z & = & 3 \\ (-2)\cdot & (x & & +2z) & = & (-2)\cdot 1 \\ \hline & & -3y & +z & = & 1 \end{array}$$

Por lo tanto (x, y, z) también es solución del sistema

$$\begin{array}{rrrl} x & & +2z & = 1 \\ & -3y & +z & = 1 \\ & -3y & +z & = 1 \end{array} \qquad \text{equivalentemente} \qquad \begin{array}{rrrl} x & & +2z & = 1 \\ & -3y & +z & = 1 \end{array}$$

Dado que (x, y, z) es solución del sistema

$$\begin{array}{cccc} x & & +2z & = 1 \\ & -3y & +z & = 1 \end{array}$$

podemos despejar x e y en función de z. Esto es,

$$x = -2z + 1$$
$$y = \frac{z-1}{3}$$

y no tenemos ninguna condición sobre z.

En resumen, supusimos que (x, y, z) es una solución del sistema

$$\begin{array}{cccc} x & & +2z & = 1 \\ x & -3y & +3z & = 2 \\ 2x & -3y & +5z & = 3 \end{array}$$

y probamos que

$$x = -2z + 1 \text{ e } y = \frac{z-1}{3}.$$

$\square$

Comprobemos. Si reemplazamos x, y y z por estos valores

$$\begin{array}{cccc} (-2z+1) & & +2z & = 1 \\ (-2z+1) & -3 \cdot (\frac{z-1}{3}) & +3z & = 2 \\ 2 \cdot (-2z+1) & -3 \cdot (\frac{z-1}{3}) & +5z & = 3 \end{array}$$

vemos que verifican las igualdades del sistema.

Justificación del método de eliminación de incógnitas

Proposición

Sean $c_1, \ldots, c_m$ *en* $\mathbb{K}$. *Si* $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}^n$ *es solución del sistema de ecuaciones*

$$\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & y_1 \\ \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \cdots & + & a_{mn}x_n & = & y_m. \end{array}$$

entonces $(x_1, \ldots, x_n)$ *también es solución de la ecuación*

$$\sum_{i=1}^{m} c_i(a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n) = \sum_i c_i y_i.$$

(se usa en p. 24)

Demostración

Por hipótesis

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n = y_i, \quad \text{para } 1 \leq i \leq m.$$

Luego,

$$\sum_{i=1}^{m} c_i(a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n) = \sum_{i} c_i y_i.$$

□

Observación

La ecuación anterior se puede reescribir:

$$\left(\sum_{i=1}^{m} c_i a_{i1}\right) x_1 + \cdots + \left(\sum_{i=1}^{m} c_i a_{in}\right) x_n = \sum_{i=1}^{m} c_i y_i.$$

Es decir es una nueva ecuación lineal con n incógnitas.

La idea de hacer combinaciones lineales de ecuaciones es fundamental en el proceso de eliminación de incógnitas.

Definición

Decimos que dos sistemas de ecuaciones lineales son *equivalentes* si cada ecuación de un sistema es combinación lineal del otro.

Teorema

Dos sistemas de ecuaciones lineales equivalentes tienen las mismas soluciones.

Demostración

Sea

$$\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & y_1 \\ \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \cdots & + & a_{mn}x_n & = & y_m \end{array} \qquad (*)$$

equivalente a

$$\begin{array}{ccccccccc} b_{11}x_1 & + & b_{12}x_2 & + & \cdots & + & b_{1n}x_n & = & z_1 \\ \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & . \\ b_{k1}x_1 & + & b_{k2}x_2 & + & \cdots & + & b_{kn}x_n & = & z_k, \end{array} \qquad (**)$$

Esto quiere decir que

1. las ecuaciones de (**) se obtienen a partir de combinaciones lineales de las ecuaciones del sistema (*), y
2. las ecuaciones de (*) se obtienen a partir de combinaciones lineales de las ecuaciones del sistema (**).

Luego, por proposición de la diapositiva 20:

1. si $(x_1, \ldots, x_n)$ es solución de (*), también será solución de cada una de las ecuaciones de (**) y por lo tanto solución del sistema (**), y
2. si $(x_1, \ldots, x_n)$ es solución de (**), también será solución de cada una de las ecuaciones de (*) y por lo tanto solución del sistema (*).

$\square$

Observación

Las combinaciones lineales que hemos utilizado en los tres sistemas que hemos trabajado son

- sumar a una ecuación una constante por otra,
- multiplicar una ecuación por una constante no nula, y
- permutar ecuaciones.

Veremos que estas operaciones son "reversibles", es decir, así como haciendo estas operaciones en la ecuaciones llegamos de

$$\begin{array}{rrrl} x & & +2z & = 1 \\ x & -3y & +3z & = 2 \\ 2x & -y & +5z & = 3 \end{array} \qquad \text{a} \qquad \begin{array}{r} x = -1 \\ y = 0 \\ z = 1. \end{array}$$

Haciendo las “operaciones inversas” (que son del mismo tipo) podemos llegar de

$$\begin{array}{c} x=-1 \\ y=0 \\ z=1. \end{array} \qquad \text{a} \qquad \begin{array}{cccc} x & & +2z & =1 \\ x & -3y & +3z & =2. \\ 2x & -y & +5z & =3 \end{array}$$

Luego, ambos sistemas son equivalentes y, por lo tanto, tiene las mismas soluciones.

Conclusiones

- Un sistema de ecuaciones puede tener una, ninguna o infinitas soluciones.
- Hemos cambiado nuestro sistema inicial haciendo combinaciones lineales de las ecuaciones.
- El nuevo sistema es más sencillo en el sentido que:
  - Cada ecuación tiene menos incógnitas.
  - Las soluciones quedan descriptas explícitamente.
- Las soluciones del nuevo sistema son las soluciones de nuestro sistema original.