Álgebra/Álgebra II
Clase 2 - Producto escalar y ortogonalidad en $\mathbb{R}^n$

FAMAF / UNC

14 de marzo de 2024

En este clase introduciremos la noción de “producto escalar” y posteriormente “norma”, “distancia” y “ángulo” en $\mathbb{R}^n$ usando el producto escalar.

Además veremos la noción de perpendicularidad u ortogonalidad.

Estas diapositivas están basadas en la Secciones 1.2 y 1.3 de las *Notas de Álgebra II* disponibles en Classroom. Allí se pueden encontrar más detalles y el sustento teórico de todas nuestras afirmaciones.

Producto escalar

En 2-espacios, dados dos vectores $v = (x_1, x_2)$ y $w = (y_l, y_2)$, definimos su *producto escalar* como

$$\langle v, w \rangle := x_1 y_1 + x_2 y_2.$$

Para el caso de 3-espacios, sean $v = (x_1, x_2, x_3)$ y $w = (y_l, y_2, y_3)$, entonces el *producto escalar de v y w* es

$$\langle v, w \rangle := x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3.$$

Finalmente, en los n-espacios, generalizamos la definición de la manera obvia: sean $v = (x_1, \ldots, x_n)$ y $w = (y_l, \ldots, y_n)$, definimos el *producto escalar de v y w* por

$$\langle v, w \rangle := x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_n y_n.$$

Es importante notar que este “producto” es un número real.

Por ejemplo, si

$$v = (1, 3, -2) \quad \text{y} \quad w = (-1, 4, -3),$$

entonces

$$\langle v, w\rangle = 1 \cdot (-1) + 3 \cdot 4 + (-2) \cdot (-3) = -1 + 12 + 6 = 17.$$

En algunos libros de texto se denota al producto escalar como $v \cdot w$.

Por el momento, no le damos una interpretación geométrica al producto escalar y veremos esto cuando veamos la norma de un vector.

Propiedades básicas del producto escalar

Las siguientes propiedades son básicas y muy importantes.

Sean v, w, u tres vectores, entonces

P1. $\langle v, w\rangle = \langle w, v\rangle$.

P2. $\langle v, w+u\rangle = \langle v, w\rangle + \langle v, u\rangle$ y
$\langle v+w, u\rangle = \langle v, u\rangle + \langle w, u\rangle$.

P3. Si λ es un número, entonces

$$\langle \lambda v, w\rangle = \lambda\langle v, w\rangle \quad \text{y} \quad \langle v, \lambda w\rangle = \lambda\langle v, w\rangle.$$

P4. Si $v = 0$, entonces $\langle v, v\rangle = 0$, de lo contrario

$$\langle v, v\rangle > 0$$

Demostración de **P1**

Sean $v = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ y $w = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$. Tenemos que

$$\langle v, w \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_n y_n,$$
$$\langle w, v \rangle = y_1 x_1 + y_2 x_2 + \cdots + y_n x_n.$$

Como en $\mathbb{R}$ vale que para cualquier para de números x, y, se cumple que $xy = yx$, obviamente ambas expresiones son iguales.

Esto prueba la propiedad **P1**.

Demostración de **P2**

Sea $u = (z_1, \ldots, z_n)$. Entonces

$$w + u = (y_1 + z_1, \ldots, y_n + z_n)$$

y

$$\begin{aligned}
\langle v, w + u \rangle &= \langle (x_1, \ldots, x_n), (y_1 + z_1, \ldots, y_n + z_n) \rangle \\
&= x_1(y_1 + z_1) + \cdots x_n(y_n + z_n) \\
&= x_1 y_1 + x_1 z_1 + \cdots x_n y_n + x_n z_n
\end{aligned}$$

Reordenando los términos obtenemos

$$\langle v, w + u \rangle = x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n + x_1 z_1 + \cdots + x_n z_n,$$

que no es otra cosa que $\langle v, w \rangle + \langle v, u \rangle$.

Demostración de **P3**

Dejamos la demostración de la propiedad **P3** como ejercicio.

Demostración de **P4**

Observemos que

$$\langle v, v\rangle = x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2. \tag{1}$$

Como $x_i^2 \geq 0$ para todo i, entonces $\langle v, v\rangle \geq 0$.

Además, es claro que si v tiene todas las coordenadas iguales a 0, entonces $\langle v, v\rangle = 0$.

En el caso que $v \neq 0$, entonces, existe algún i tal que $x_i \neq 0$, por lo tanto $x_i^2 > 0$ y por la ecuación (1), tenemos que $\langle v, v\rangle > 0$.

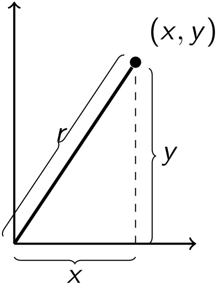
La norma de un vector

Definición

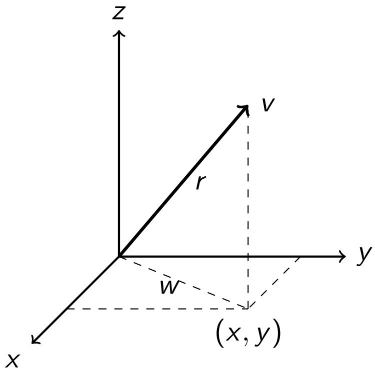
Si $v \in \mathbb{R}^n$, la *norma de v* o *longitud de v* es

$$||v|| = \sqrt{\langle v, v\rangle}.$$

Si $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, entonces $||(x, y)|| = \sqrt{x^2 + y^2}$ (teorema de Pitágoras).



Si $n = 3$, por la aplicación reiterada del teorema de Pitágoras obtenemos que la longitud de $v = (x, y, z)$ es $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.



En general, si $v = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \Rightarrow ||v|| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}$.

Proposición

Sea $v \in \mathbb{R}^n$ *y* $\lambda \in \mathbb{R}$, *entonces*

$$||\lambda v|| = |\lambda|||v||.$$

Demostración

$||\lambda v||^2 = \langle \lambda v, \lambda v \rangle$, por **P3**,

$$\langle \lambda v, \lambda v \rangle = \lambda \langle v, \lambda v \rangle = \lambda^2 \langle v, v \rangle.$$

Es decir $||\lambda v||^2 = \lambda^2 ||v||^2$, por lo tanto, $||\lambda v|| = |\lambda|||v||$. □

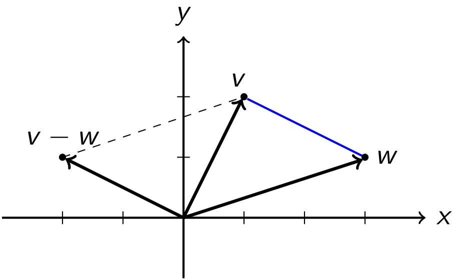
Distancia en $\mathbb{R}^n$

Definición

Sea $v, w \in \mathbb{R}^n$, entonce las *distancia* entre v y w es $||v - w||$.

Observación

La norma del vector $v - w$ es la longitud del segmento que une w con v.



Interpretación geométrica del producto escalar

Sean $v_1 = (x_1, y_1)$ y $v_2 = (x_2, y_2)$ en $\mathbb{R}^2$; veremos a continuación que

$$\langle v_1, v_2 \rangle = ||v_1||\,||v_2|| \cos(\theta), \tag{2}$$

donde θ es el ángulo comprendido entre v_1 y v_2.

Sea α_1 el ángulo comprendido entre v_1 y el eje horizontal y α_2 el ángulo comprendido entre v_2 y el eje horizontal. Entonces,

$$v_1 = ||v_1||(\cos(\alpha_1), \operatorname{sen}(\alpha_1)), \quad v_2 = ||v_2||(\cos(\alpha_2), \operatorname{sen}(\alpha_2)),$$

por lo tanto

$$\langle v_1, v_2 \rangle = ||v_1||\,||v_2||(\cos(\alpha_1)\cos(\alpha_2) + \operatorname{sen}(\alpha_1)\operatorname{sen}(\alpha_2)).$$

Por otro lado, por la propiedad de la suma de los cosenos tenemos que

$$\cos(\alpha_1)\cos(\alpha_2) + \operatorname{sen}(\alpha_1)\operatorname{sen}(\alpha_2) = \cos(\alpha_1 - \alpha_2).$$

Es decir,

$$\langle v_1, v_2 \rangle = ||v_1||\,||v_2||\cos(\alpha_1 - \alpha_2),$$

y precisamente, $\theta = \alpha_1 - \alpha_2$ es el ángulo comprendido entre v_1 y v_2.

Esto se puede generalizar a $\mathbb{R}^n$: el ángulo comprendido entre v_1 y v_2 es

$$\theta = \operatorname{arcos}\left(\frac{\langle v_1, v_2 \rangle}{||v_1||\,||v_2||}\right).$$

Vectores perpendiculares

El producto escalar $\langle v, w \rangle$ puede ser igual a 0 para determinados vectores, incluso ambos distintos de 0.

Por ejemplo, si $v = (1, 2, 3)$ y $w = (2, 1, -\frac{4}{3})$, entonces

$$\langle v, w \rangle = 2 + 2 - 4 = 0.$$

Definición

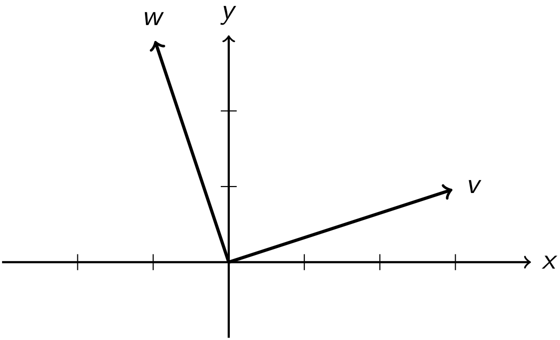
Decimos que dos vectores v y w en $\mathbb{R}^n$ son *perpendiculares* u *ortogonales* si $\langle v, w \rangle = 0$. Cuando v y w son ortogonales denotamos $v \perp w$.

Ejemplo

En $\mathbb{R}^2$ consideremos los vectores

$$v = (3, 1), \quad w = (-1, 3),$$

representados en la siguiente figura:



Luego, vemos que $\langle v, w \rangle = 0$, y por lo tanto v es perpendicular a w, lo cual concuerda con nuestra intuición.

Es claro que esta definición algebraica de perpendicularidad está de acuerdo con la interpretación geométrica del producto escalar:

$$v \text{ y } w \text{ perpendiculares (geométricamente)}$$

$$\Downarrow$$

$$\text{el ángulo comprendido entre } v \text{ y } w \text{ es } \theta = 90^\circ$$

$$\Downarrow$$

$$\cos(\theta) = 0$$

$$\Downarrow$$

$$\langle v, w \rangle = ||v||\,|w||\cos(\theta) = 0.$$