Práctico 1
Álgebra II – Año 2024/1
FAMAF

Vectores en $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$

Objetivos.

- Aprender las operaciones b ásicas de $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$ (suma de vectores, multiplicación por escalares, producto escalar, calcular normas y ángulos).
- Familiarizarse con los conceptos de ortogonalidad y paralelismo.
- Aprender a describir rectas y planos de forma impícita y paramétrica.

Ejercicios

Los ejercicios con el símbolo @ tiene una ayuda al final del archivo para que recurran a ella después de pensar un poco.

Vectores y producto escalar.

(1) Dados $v = (-1, 2, 0)$, $w = (2, -3, -1)$ y $u = (1, -1, 1)$, calcular:
   a) $2v + 3w - 5u$,
   b) $5(v + w)$,
   c) $5v + 5w$ (y verificar que es igual al vector de arriba).

(2) Calcular los siguientes productos escalares.
   a) $\langle(-1, 2, 0), (2, -3, -1)\rangle$,
   b) $\langle(4, -1), (-1, 2)\rangle$.

(3) Dados $v = (-1, 2, 0)$, $w = (2, -3, -1)$ y $u = (1, -1, 1)$, verificar que:

$$\langle 2v + 3w, -u\rangle = -2\langle v, u\rangle - 3\langle w, u\rangle$$

(4) Probar que
   a) $(2, 3, -1)$ y $(1, -2, -4)$ son ortogonales.
   b) $(2, -1)$ y $(1, 2)$ son ortogonales. Dibujar en el plano.

(5) Encontrar

a) un vector no nulo ortogonal a $(3, -4)$,
b) un vector no nulo ortogonal a $(2, -1, 4)$,
c) un vector no nulo ortogonal a $(2, -1, 4)$ y $(0, 1, -1)$.

(6) Encontrar la longitud de los vectores.

(a) $(2, 3)$, (b) (t, t^2), (c) $(\cos\phi, \operatorname{sen}\phi)$.

(7) Calcular $\langle v, w\rangle$ y el ángulo entre v y w para los siguientes vectores.

(a) $v = (2, 2), w = (1, 0)$, (b) $v = (-5, 3, 1), w = (2, -4, -7)$.

(8) Recordar los vectores e_1, e_2 y e_3 dados en la p ágina 12 del apunte. Sea $v = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$. Verificar que

$$v = x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3 = \langle v, e_1\rangle e_1 + \langle v, e_2\rangle e_2 + \langle v, e_3\rangle e_3.$$

(9) Probar, usando sólo las propiedades **P1**, **P2**, y **P3** del producto escalar, que dados $v, w, u \in \mathbb{R}^n$ y $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$,
a) se cumple:

$$\langle \lambda_1 v + \lambda_2 w, u\rangle = \lambda_1\langle v, u\rangle + \lambda_2\langle w, u\rangle.$$

b) Si $\langle v, w\rangle = 0$, es decir si v y w son ortogonales, entonces

$$\langle \lambda_1 v + \lambda_2 w, \lambda_1 v + \lambda_2 w\rangle = \lambda_1^2\langle v, v\rangle + \lambda_2^2\langle w, w\rangle.$$

(10) Dados $v, w \in \mathbb{R}^n$, probar que si $\langle v, w\rangle = 0$, es decir si v y w son ortogonales, entonces

$$||v + w||^2 = ||v||^2 + ||w||^2.$$

¿Cu ál es el nombre con que se conoce este resultado en $\mathbb{R}^2$?

(11) ⓐ Sean $v, w \in \mathbb{R}^2$, probar usando solo la definición explícita del producto escalar en $\mathbb{R}^2$ que

$$|\langle v, w\rangle| \leq ||v||\,||w|| \qquad \text{(Desigualdad de Schwarz).}$$

Rectas y planos.

(12) En cada uno de los siguientes casos determinar si los vectores $\overrightarrow{vw}$ y $\overrightarrow{xy}$ son equivalentes y/o paralelos.
a) $v = (1, -1)$, $w = (4, 3)$, $x = (-1, 5)$, $y = (5, 2)$.
b) $v = (1, -1, 5)$, $w = (-2, 3, -4)$, $x = (3, 1, 1)$, $y = (-3, 9, -17)$.

(13) Sea R_1 la recta que pasa por $p_1 = (2, 0)$ y es ortogonal a $(1, 3)$.
a) Dar la descripción paramétrica e implícita de R_1.
b) Graficar en el plano a R_1.
c) Dar un punto p por el que pase R_1 distinto a p_1.
d) Verificar si $p + p_1$ y $-p$ pertenecen a R_1

(14) Repetir el ejercicio anterior con las siguientes rectas.

a) R_2: recta que pasa por $p_2 = (0,0)$ y es ortogonal a $(1,3)$.

b) R_3: recta que pasa por $p_3 = (1,0)$ y es paralela a R_1.

(15) Calcular, numérica y graficamente, las intersecciones $R_1 \cap R_2$ y $R_1 \cap R_3$.

(16) Sea $v_0 = (2,-1,1)$.

a) Describir paramétricamente el conjunto $P_1 = \{w \in \mathbb{R}^3 : \langle v_0, w\rangle = 0\}$.

b) Describir paramétricamente el conjunto $P_2 = \{w \in \mathbb{R}^3 : \langle v_0, w\rangle = 1\}$.

c) ¿Qué relación hay entre P_1 y P_2?

(17) Escribir la ecuación paramétrica y la ecuación normal de los siguientes planos.

a) π_1: el plano que pasa por $(0,0,0)$, $(1,1,0)$, $(1,-2,0)$.

b) π_2: el plano que pasa por $(1,2,-2)$ y es perpendicular a la recta que pasa por $(2,1,-1)$, $(3,-2,1)$.

c) $\pi_3 = \{w \in \mathbb{R}^3 : w = s(1,2,0) + t(2,0,1) + (1,0,0);\ s, t \in \mathbb{R}\}$.

(18) ¿Cu áles de las siguientes rectas cortan al plano π_3 del ejercicio *c)*? Describir la intersección en cada caso.

(a) $\{w : w = (3,2,1) + t(1,1,1)\}$, ($b$) $\{w : w = (1,-1,1) + t(1,2,-1)\}$,

(c) $\{w : w = (-1,0,-1) + t(1,2,-1)\}$, ($d$) $\{w : w = (1,-2,1) + t(2,-1,1)\}$.

(19) Sea $L = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : ax + by = c\}$ una recta en $\mathbb{R}^2$. Sean p y q dos puntos por los que pasa L.

a) ¿Para qué valores de c puede asegurar que $(0,0) \in L$?

b) ¿Para qué valores de c puede asegurar que $\lambda q \in L$? donde $\lambda \in \mathbb{R}$.

c) ¿Para qué valores de c puede asegurar que $p + q \in L$?

(20) Sea L una recta en $\mathbb{R}^2$. Probar que L pasa por $(0,0)$ si y sólo si pasa por $p+\lambda q$ para todo par de puntos p y q de L y para todo $\lambda \in \mathbb{R}$.

Ayudas

(11) Elevar al cuadrado y aplicar la definición.

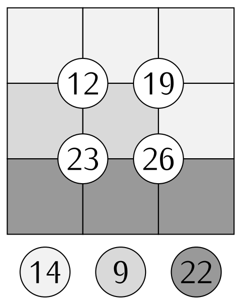
Práctico 2
Álgebra II – Año 2024/1
FAMAF

Sistemas de ecuaciones

Objetivos.

- Aprender a plantear y resolver sistemas de ecuaciones lineales.

(1) *Juego Suko.* Colocar los números del 1 al 9 en las celdas de la siguiente tabla de modo que el número en cada círculo sea igual a la suma de las cuatro celdas adyacentes, y la suma de las celdas del mismo color sea igual al número en el círculo de igual color.



(2) Encontrar los coeficientes reales del polinomio $p(x) = ax^2 + bx + c$ de manera tal que $p(1) = 2$, $p(2) = 7$ y $p(3) = 14$.

(3) Determinar cuáles de las siguientes matrices son MERF.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -3 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

(4) Para cada una de las MERF del ejercicio anterior,
   a) asumir que es la matriz de un sistema homogéneo, escribir el sistema y dar las soluciones del sistema.
   b) asumir que es la matriz ampliada de un sistema no homogéneo, escribir el sistema y dar las soluciones del sistema.

(5) Para cada uno de los siguientes sistemas de ecuaciones, describir explícita o paramétricamente todas las soluciones e indicar cuál es la MERF asociada al sistema.

a) $\begin{cases} -x - y + 4z = 0 \\ x + 3y + 8z = 0 \\ x + 2y + 5z = 0 \end{cases}$ (d) $\begin{cases} -x - y + 4z = 1 \\ x + 3y + 8z = 3 \\ x + 2y + 5z = 1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x - 3y + 5z = 0 \\ 2x - 3y + z = 0 \\ -y + 3z = 0 \end{cases}$ (e) $\begin{cases} x - 3y + 5z = 1 \\ 2x - 3y + z = 3 \\ -y + 3z = 1 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x - z + 2t = 0 \\ -x + 2y - z + 2t = 0 \\ -x + y = 0 \end{cases}$ (f) $\begin{cases} x - z + 2t = 1 \\ -x + 2y - z + 2t = 3 \\ -x + y = 1 \end{cases}$

(6) Para cada uno de los siguientes sistemas, describir implícitamente el conjunto de los vectores (b_1, b_2, b_3) o (b_1, b_2, b_3, b_4) para los cuales cada sistema tiene solución.

a) $\begin{cases} x - 3y + 5z = b_1 \\ 2x - 3y + z = b_2 \\ -y + 3z = b_3 \end{cases}$ *c)* $\begin{cases} -x - y + 4z = b_1 \\ x + 3y + 8z = b_2 \\ x + 2y + 5z = b_3 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x - z + 2t = b_1 \\ -x + 2y - z + 2t = b_2 \\ -x + y = b_3 \\ y - z + 2t = b_4 \end{cases}$

(7) Sea $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & 2016 \\ 2 & 3 & 4 & \cdots & 2017 \\ 3 & 4 & 5 & \cdots & 2018 \\ \vdots & & & & \vdots \\ 100 & 101 & 102 & \cdots & 2115 \end{bmatrix}$.

a) Encontrar todas las soluciones del sistema $AX = 0$.

b) Encontrar todas las soluciones del sistema $AX = \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$.

(8) Sea $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 0 \end{bmatrix}$. Reduciendo A por filas,

a) encontrar todas las soluciones sobre $\mathbb{R}$ y $\mathbb{C}$ del sistema $AX = 0$.

b) encontrar todas las soluciones sobre $\mathbb{R}$ y $\mathbb{C}$ del sistema $AX = \begin{bmatrix} 1 \\ i \\ 0 \end{bmatrix}$.

(9) Suponga que tiene que resolver un sistema de ecuaciones lineales homogéneo y que tras hacer algunas operaciones elementales por fila a la matriz asociada obtiene una matriz con la siguiente forma

$$\begin{pmatrix} a & * & * & * \\ 0 & b & * & * \\ 0 & 0 & c & * \\ 0 & 0 & 0 & d \end{pmatrix}$$

donde $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ y $*$ son algunos números reales. ¿Qué conclusiones puede inferir acerca del conjunto de soluciones a partir de los valores de a, b, c y d?

(10) Suponga que tiene que resolver un sistema de ecuaciones lineales y que tras hacer algunas operaciones elementales por fila a la matriz ampliada obtiene una matriz con la siguiente forma

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a & * & * & * & * \\ 0 & b & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 & d & * \end{array}\right)$$

donde $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ y $*$ son algunos números reales. ¿Qué conclusiones puede inferir acerca del conjunto de soluciones a partir de los valores de a, b, c y d?

(11) Suponga que tiene que resolver un sistema de m ecuaciones lineales con n incógnitas. Antes de empezar a hacer cuentas y apelando a la teoría, ¿Qué puede afirmar acerca del conjunto de soluciones en base a m y n? ¿Cómo saber si es vacío o no vacío? ¿Si tiene una o varias soluciones?

(12) ⓐ Sean $\lambda_1, ..., \lambda_n \in \mathbb{R}$ y $b_1, ..., b_n \in \mathbb{R}$.

a) Para cada $n \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$, plantear un sistema de ecuaciones lineales que le permita encontrar un polinomio $p(x)$ con coeficientes reales de grado $n - 1$ tal que
$$p(\lambda_1) = b_1, \dots, p(\lambda_n) = b_n.$$

b) ¿Se le ocurre alguna condición con la cual pueda afirmar que el sistema anterior no tiene solución?

c) ¿Puede dar una forma general del sistema para cualquier n?

Práctico 3
Álgebra II – Año 2024/1
FAMAF

Álgebra de matrices

Objetivos.

- Familiarizarse con las matrices y sus operaciones de suma y multiplicación, Ejercicios (1) – (8).
- Familiarizarse con la notación de subíndices para las entradas de matrices, Ejercicios (8) y (9).
- Aprender la noción de matriz inversa y cómo cálcularla, Ejercicios (10) – (13).
- Usar matrices para la resolución de sistemas de ecuaciones, Ejercicios (14) – (19).

Ejercicios. Los ejercicios con el símbolo ⓐ tienen una ayuda al final del archivo para que recurran a ella después de pensar un poco.

(1) Sean

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -2 & 0 & -1 \\ 1 & 3 & 5 \end{bmatrix}, \qquad C = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Verificar que $A(BC) = (AB)C$, es decir que vale la asociatividad del producto.

(2) Determinar cuál de las siguientes matrices es A, cuál es B y cuál es C de modo tal que sea posible realizar el producto ABC y verificar que $A(BC) = (AB)C$.

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

(3) Calcular A^2 y A^3 para la matriz $A = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 6 & 8 \end{bmatrix}$.

(4) ⓐ Dar ejemplos de matrices no nulas A y B de orden 2×2 tales que

a) $A^2 = 0$ (dar dos ejemplos).

b) $AB \neq BA$.

c) $A^2 = -\mathrm{I}_2$.

d) $A^2 = A \neq \mathrm{I}_2$.

(5) ⓐ Sea $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ tal que $AB = BA$ para toda $B \in \mathbb{R}^{2\times 2}$. Probar que A es un múltiplo de I_2.

(6) Para cada $n \in \mathbb{N}$, con $n \geq 2$, hallar una matriz no nula $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ tal que $A^n = 0$ pero $A^{n-1} \neq 0$.

(7) ⓐ Dar condiciones necesarias y suficientes sobre matrices A y B de tamaño $n \times n$ para que

a) $(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$.

b) $A^2 - B^2 = (A - B)(A + B)$.

(8) ⓐ Sean

$$v = \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times 1} \quad \text{y} \quad A = \begin{bmatrix} | & | & & | \\ C_1 & C_2 & \cdots & C_n \\ | & | & & | \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{m\times n},$$

es decir, $C_1, \ldots, C_n$ denotan las columnas de A. Probar que $Av = \sum_{j=1}^{n} v_j C_j$.

(9) Si A es una matriz cuadrada $n \times n$, se define la ***traza*** de A como $\mathrm{Tr}(A) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_{ii}$.

a) Calcular la traza de las matrices del ejercicio (10).

b) ⓐ Probar que si $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ y $c \in \mathbb{R}$ entonces

$$\mathrm{Tr}(A + cB) = \mathrm{Tr}(A) + c\,\mathrm{Tr}(B) \quad \text{y} \quad \mathrm{Tr}(AB) = \mathrm{Tr}(BA).$$

(10) Para cada una de las siguientes matrices, usar operaciones elementales por fila para decidir si son invertibles y hallar la matriz inversa cuando sea posible.

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} -1 & -1 & 4 \\ 1 & 3 & 8 \\ 1 & 2 & 5 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & -3 & 3 & -8 \\ -2 & 1 & 2 & -2 \\ 1 & 2 & 1 & 4 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & -3 & 5 \\ 2 & -3 & 1 \\ 0 & -1 & 3 \end{bmatrix}.$$

(para que hagan menos cuentas: las matrices 3×3 aparecieron en el Práctico 2).

(11) Sea A la primera matriz del ejercicio anterior. Hallar matrices elementales $E_1, E_2, \ldots, E_k$ tales que $E_k E_{k-1} \cdots E_2 E_1 A = \mathrm{I}_3$.

(12) ¿ Es cierto que si A y B son matrices invertibles entonces $A + B$ es una matriz invertible? Justificar su respuesta.

(13) ⓐ Una matriz $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ se dice *nilpotente* si $A^k = 0$ para algún $k \in \mathbb{N}$. Probar que si una matriz A es nilpotente, entonces $\mathrm{I}_n - A$ es invertible.

(14) Sean v y w dos soluciones del sistema homogéneo $AX = 0$. Probar que $v + tw$ también es solución para todo $t \in \mathbb{K}$.

(15) Sea v una solución del sistema $AX = Y$ y w una solución del sistema homogéneo $AX = 0$. Probar que $v + tw$ también es solución del sistema $AX = Y$ para todo $t \in \mathbb{K}$.

(16) Probar que si el sistema homogéneo $AX = 0$ posee alguna solución no trivial, entonces el sistema $AX = Y$ no tiene solución o tiene al menos dos soluciones distintas.

(17) Supongamos que los sistemas $AX = Y$ y $AX = Z$ tienen solución. Probar que el sistema $AX = Y + tZ$ también tiene solución para todo $t \in \mathbb{K}$.

(18) Sean A una matriz invertible $n \times n$, y B una matriz $n \times m$. Probar que los sistemas $BX = Y$ y $ABX = AY$ tienen las mismas soluciones.

(19) ⓐ Sean A y B matrices $r \times n$ y $n \times m$ respectivamente. Probar que:

a) Si $m > n$, entonces el sistema $ABX = 0$ tiene soluciones no triviales.

b) Si $r > n$, entonces existe un Y, $r \times 1$, tal que $ABX = Y$ no tiene solución.

Ejercicios de repaso. Si ya hizo los ejercicios anteriores continue con la siguiente guía. Los ejercicios que siguen son similares y le pueden servir para practicar antes de los exámenes.

(20) ⓐ Probar que si $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ y $B, C \in \mathbb{R}^{n\times p}$ entonces $A(B + C) = AB + AC$.

(21) Probar que si $A, B \in \mathbb{R}^{m\times n}$ y $C \in \mathbb{R}^{n\times p}$ entonces $(A + B)C = AC + BC$.

(22) Sea $v = [v_1 \cdots v_m] \in \mathbb{R}^{1\times m}$ y $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$. Probar que $vA = \sum_{i=1}^{m} v_i F_i$, donde $F_1, \ldots, F_m$ denotan las filas de A.

(23) Sea $D = (d_{ij}) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ una matriz diagonal y $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{m\times n}$. Probar que $AD = (d_{jj}a_{ij}) \in \mathbb{R}^{m\times n}$.

(24) Probar las siguientes afirmaciones:

a) Si $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ son matrices diagonales, entonces $AB = BA$.

b) Si $A = c\,\mathrm{I}_n$ para algún $c \in \mathbb{R}$, entonces $AB = BA$ para toda $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$.

(25) Probar que si $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ es una matriz diagonal tal que $\mathrm{Tr}(A^2) = 0$, entonces $A = 0$.

(26) Sea A matriz 2×2 tal que $\mathrm{Tr}(A) = 0$ y $\mathrm{Tr}(A^2) = 0$.

a) Probar que $A^2 = 0$.

b) >Es cierta la recíproca?

(27) Probar que si A y B son matrices $n \times n$ *que conmutan entre sí*, entonces para todo $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ se cumple que:

$$(A+B)^k = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} A^j B^{k-j}.$$

(28) Sea $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$. La *matriz traspuesta* de A es la matriz $A^t \in \mathbb{R}^{n\times m}$ tal que $(A^t)_{ij} = A_{ji}$, $1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq m$.

a) Dar las matrices traspuestas de las matrices A, B y C de los ejercicios (1) y (2).

b) Probar que si $A, B \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $C \in \mathbb{R}^{n\times p}$ y $c \in \mathbb{R}$ entonces

$$(A+cB)^t = A^t + cB^t, \qquad (BC)^t = C^t B^t.$$

c) Probar que si $D \in \mathbb{R}^{n\times n}$ es invertible, entonces D^t también lo es y $(D^t)^{-1} = (D^{-1})^t$.

(29) Una matriz A se dice *simétrica* si $A^t = A$. Una matriz B se dice *antisimétrica* si $B^t = -B$. Probar que toda matriz se puede expresar como la suma de una matriz simétrica y una antisimétrica.

(30) Decidir si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justificar.

a) Si A y B son matrices cuadradas tales $AB = BA$ pero ninguna es múltiplo de la otra, entonces A o B es diagonal.

b) Existen una matriz 3×2, A, y una matriz 2×3, B, tales que AB es una matriz invertible.

c) Existen una matriz 2×3, A, y una matriz 3×2, B, tales que AB es una matriz invertible.

Ayudas.

(4) Probar con algunos 0 y 1 en las entradas.

(5) Elegir matrices B apropiadas con muchos ceros y **un** 1.

(7) El objetivo del ejercicio es completar los puntos suspensivos en la siguiente frase:

"$(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$ si y sólo si A y B satisfacen ..... "

Desarrollen el cuadrado de la suma $A+B$ usando que el producto de matrices es distributivo y vean que les “sobra” para obtener la fórmula del binomio. Misma idea para el item (b).

(8) Usar la notación de subíndices para las entradas de matrices.

(9) *b)* Usar la notación de subíndices para las entradas de matrices.

(13) Pensar en la fórmula de $\sum_{i=0}^{n} a^i$ vista en Álgebra I/Matemática Discreta I.

(19) Recordar el Ejercicio 11 del Práctico 2.

(20) Usar la notación de subíndices para las entradas de matrices.