Álgebra/Álgebra II
Clase 14- Dimensión. Subespacios

FAMAF / UNC

14 de mayo de 2024

Recordemos este importante resultado de la clase anterior:

Sea V un espacio vectorial y $T \subset V$, finito tal que $\langle T \rangle = V$. Sea $S \subset V$.

Entonces

$$\langle T \rangle = V, \quad S \text{ es LI } \Rightarrow |S| \leq |T|. \tag{P1}$$

El contrarrecíproco también nos resultará de utilidad

$$\langle T \rangle = V, \quad |S| > |T| \Rightarrow S \text{ es LD}. \tag{P2}$$

Dimensiones de subespacios

- Si A matriz $m \times n$, en donces $W = \{x : Ax = 0\}$ es un subespacio.

- ¿Cuál es la dimensión de W? ¿Qué relación tiene con R, la MRF equivalente a A?

- Veremos que si r es la cantidad de filas no nulas de R, entonces $\dim(W) = n - r$.

Ejemplo

Encontrar una base del subespacio

$$W = \left\{ (x, y, z, w) \in \mathbb{R} : \quad \begin{array}{rcl} x - y - 3z + \; w & = & 0 \\ y + 5z + 3w & = & 0 \end{array} \right\}.$$

Solución

W está definido implícitamente y usando el método de Gauss podemos describirlo paramétricamente, pues:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 5 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{F_1+F_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 5 & 3 \end{bmatrix}.$$

Por lo tanto, el sistema de ecuaciones que define W es equivalente a

$$\begin{aligned} x + 2z + 4w &= 0 \\ y + 5z + 3w &= 0, \end{aligned}$$

es decir

$$\begin{aligned} x &= -2z - 4w \\ y &= -5z - 3w, \end{aligned}$$

y entonces

$$\begin{aligned} W &= \{(-2z - 4w, -5z - 3w, z, w) : z, w \in \mathbb{R}\} \\ &= \{(-2, -5, 1, 0)z + (-4, -3, 0, 1)w : z, w \in \mathbb{R}\} \\ &= \langle (-2, -5, 1, 0), (-4, -3, 0, 1) \rangle. \end{aligned}$$

Concluimos entonces que $(-2, -5, 1, 0), (-4, -3, 0, 1)$ es una base de W y, por lo tanto, su dimensión es 2. $\square$

Proposición

Sea A matriz $m \times n$ y sea $W = \{x : Ax = 0\}$.

Sea R una MRF equivalentes por filas a A y sea r la cantidad de filas no nulas de R.

Entonces $\dim(W) = n - r$.

Demostración

Es posible hacer este demostración con las herramientas actuales. Sin embargo, haremos una demostración mucho más conceptual de este hecho cuando veamos transformaciones lineales. $\square$

Definición

Sea $A = [a_{ij}] \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$.

- El *vector fila* i es el vector $(a_{i1}, \dots, a_{in}) \in \mathbb{K}^n$.
- El *espacio fila* de A es el subespacio de $\mathbb{K}^n$ generado por los m vectores fila de A.
- El vector columna j es el vector $(a_{1j}, \dots, a_{mj}) \in \mathbb{K}^m$.
- El *espacio columna* de A es el subespacio de $\mathbb{K}^m$ generado por los n vectores columna de A

Ejemplo

Sea

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

El vector fila 1 es $(1, 2, 0, 3, 0)$, el vector columna 4 es $(3, 4, 0)$, etc.

Sea W el espacio fila de A. entonces

$$W = \langle (1, 2, 0, 3, 0), (0, 0, 1, 4, 0), (0, 0, 0, 0, 1) \rangle$$

Sea U el espacio columna de A. Entonces:

$$U = \langle (1, 0, 0), (2, 0, 0), (0, 1, 0), (3, 4, 0), (0, 0, 1) \rangle = \mathbb{R}^3.$$

Teorema

Sean A matriz $m \times n$ con coeficientes en $\mathbb{K}$, P matriz $m \times m$ invertible y $B = PA$. Entonces el el espacio fila de A es igual al espacio fila de B.

Demostración

Sea W_1 espacio fila de A y W_2 espacio fila de B.

Sea $A = [a_{ij}]$, $P = [p_{ij}]$ y $B = [b_{ij}]$. Como $B = PA$, tenemos que la fila i de B es

$$\begin{aligned}(b_{i1}, \ldots, b_{in}) &= (F_i(P).C_1(A), \ldots, F_i(P).C_n(A)) \\ &= (\sum_{j=1}^{m} p_{ij} a_{j1}, \ldots, \sum_{j=1}^{m} p_{ij} a_{jn}) \\ &= \sum_{j=1}^{m} p_{ij}(a_{j1}, \ldots, a_{jn}). \qquad (*)\end{aligned}$$

- por (*) cada vector fila de B se puede obtener como combinación lineal de los vectores fila de A.
- Por lo tanto el espacio fila de B está incluido en el espacio fila de A: $W_2 \subset W_1$.
- P invertible $\Rightarrow \exists P^{-1}$.
- $P^{-1}B = P^{-1}PA = A$.
- Un razonamiento análogo al (*) de la página anterior $\Rightarrow$ espacio fila de A está incluido en el espacio fila de B: $W_1 \subset W_2$.

$$W_2 \subset W_1 \quad \wedge \quad W_1 \subset W_2 \qquad \Rightarrow \qquad W_1 = W_2. \quad \square$$

Corolario

Sean A matriz $m \times n$ y R la MRF equivalente por filas a A. Entonces,

1. *el espacio fila de A es igual al espacio fila de R,*
2. *las filas no nulas de R forman una base del espacio fila de A.*

Demostración

(1) R la MRF equivalente por filas a $A \Rightarrow R = PA$ con P invertible $\overset{Teor.ant.}{\Rightarrow}$ espacio fila de A = espacio fila de B.

(2) R es MRF $\Rightarrow$ cada fila no nula comienza con un 1 y en esa coordenada todas las demás filas tienen un 0 $\Rightarrow$ las filas no nulas de R son LI $\Rightarrow$ las filas no nulas de R son base.

$\square$

Corolario

Sean A matriz $n \times n$. Entonces, A es invertible si y sólo si las filas de A son una base de $\mathbb{K}^n$.

Demostración

Si A es invertible entonces la MERF de A es la identidad, por lo tanto el espacio fila de A genera $\mathbb{K}^n$.

Por otro lado, si el espacio fila de A genera $\mathbb{K}^n$, el espacio fila de la MERF es $\mathbb{K}^n$ y por lo tanto la MERF de A es la identidad y en consecuencia A es invertible.

Hemos probado que A es invertible si y sólo si las n filas de A generan $\mathbb{K}^n$.

Como $\dim \mathbb{K}^n = n$, todo conjunto de n generadores es una base. $\square$

Bases de subespacios

El corolario de la p. 12 nos permite encontrar fácilmente la dimensión de un subespacio de $\mathbb{K}^n$ generado explícitamente por m vectores.

- Sea $v_1, \ldots, v_m \in \mathbb{K}^n$ y $W = \langle v_1, \ldots, v_m \rangle$,
- Consideramos la matriz

$$A = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_m \end{bmatrix}$$

- Calculamos R, una MRF equivalente por filas a A.
- $W =$ espacio fila de R.
- Si R tiene r filas no nulas, las r filas no nulas son una base de W.
- Por consiguiente, $\dim W = r$.

Ejemplo

Encontrar una base de $W = \langle (1,0,1), (1,-1,0), (5,-3,2) \rangle$.

Solución

Formemos la matriz cuyas filas son los vectores que generan W, es decir

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 5 & -3 & 2 \end{bmatrix}.$$

Entonces

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 5 & -3 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow[F_3-5F_1]{F_2-F_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & -3 & -3 \end{bmatrix} \xrightarrow{-F_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & -3 \end{bmatrix} \xrightarrow{F_3-3F_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Por lo tanto, $\dim W = 2$ y $(1,0,1), (0,1,1)$ es una base de W. $\square$

Subconjuntos LI de un sistema de generadores

- Dada un conjunto de generadores de un subespacio W de $\mathbb{K}^n$ "sabemos" encontrar una base de W.

- Esa base de W, en general, utiliza otros vectores (no necesariamente los generadores).

- Veremos a continuación que dado $S = \{v_1, \ldots, v_m\}$ y $W = \langle S \rangle$, podemos encontrar fácilmente un subconjunto de S base de W.

Teorema

Sea $v_1, \ldots, v_r$ *vectores en* $\mathbb{K}^n$ *y* $W = \langle v_1, \ldots, v_r \rangle$*.*

Sea A *la matriz formada por las filas* $v_1, \ldots, v_r$ *y* R *una MRF equivalente por filas a* A *que se obtiene* ***sin*** *el uso de permutaciones de filas.*

Si $i_1, i_2, \ldots, i_s$ *filas no nulas de* $R \Rightarrow v_{i_1}, v_{i_2}, \ldots, v_{i_s}$ *base de* W*.*

Demostración

Se hará por inducción sobre r.

Si $r = 1$ es trivial ver que vale la afirmación.

Supongamos que tenemos el resultado probado para $r - 1$ (hipótesis inductiva).

Sea $W' = \langle v_1, \dots, v_{r-1} \rangle$ y sea A' la matriz formada por las $r-1$ filas $v_1, \dots, v_{r-1}$. Sea R' la MRF equivalente por filas a A' que se obtiene sin usar permutaciones de filas. Por hipótesis inductiva, si $i_1, i_2, \dots, i_s$ son las filas no nulas de R', entonces $v_{i_1}, v_{i_2}, \dots, v_{i_s}$ es una base de W'.
Sea

$$R_0 = \begin{bmatrix} R' \\ v_r \end{bmatrix}.$$

Si $v_r \in W'$, entonces $v_{i_1}, v_{i_2}, \dots, v_{i_s}$ es una base de W y

$$R = \begin{bmatrix} R' \\ 0 \end{bmatrix}$$

es la MRF de A.
Si $v_r \notin W'$, entonces $v_{i_1}, v_{i_2}, \dots, v_{i_s}, v_r$ es una base de W y la MRF de A tiene la última fila no nula. $\square$

Finalmente, terminaremos la clase con un teorema que resume algunas equivalencias respecto a matrices invertibles.

Teorema

Sea A matriz $n \times n$ con coeficientes en $\mathbb{K}$. Entonces son equivalentes

1. *A es invertible.*
2. *A es equivalente por filas a Id_n.*
3. *A es producto de matrices elementales.*
4. *El sistema $AX = Y$ tiene una única solución para toda matriz Y de orden $n \times 1$.*
5. *El sistema homogéneo $AX = 0$ tiene una única solución trivial.*
6. $\det A \neq 0$.
7. *Las filas de A son LI.*
8. *Las columnas de A son LI.*