PRÁCTICO 1

Soluciones
Álgebra II – Año 2024/1 – FAMAF

Vectores y producto escalar.

(1) Dados $v = (-1, 2, 0)$, $w = (2, -3, -1)$ y $u = (1, -1, 1)$, calcular:
a) $2v + 3w - 5u$,
b) $5(v + w)$,
c) $5v + 5w$ (y verificar que es igual al vector de arriba).

SOLUCIÓN:
a) $2v + 3w - 5u = 2 \cdot (-1, 2, 0) + 3 \cdot (2, -3, -1) - 5 \cdot (1, -1, 1) = (-2, 4, 0) + (6, -9, -3) + (-5, 5, -5) = \boxed{(-1, 0, -8)}$
b) $5(v + w) = 5 \cdot ((-1, 2, 0) + (2, -3, -1)) = 5 \cdot (1, -1, -1) = \boxed{(5, -5, -5)}$
c) $5v + 5w = 5 \cdot (-1, 2, 0) + 5 \cdot (2, -3, -1) = (-5, 10, 0) + (10, -15, -5) = \boxed{(5, -5, -5)}$

□

(2) Calcular los siguientes productos escalares.
a) $\langle(-1, 2, 0), (2, -3, -1)\rangle$,
b) $\langle(4, -1), (-1, 2)\rangle$.

SOLUCIÓN:
a) $\langle(-1, 2, -0), (2, -3, -1)\rangle = (-1)\cdot 2+2\cdot(-3)+0\cdot(-1) = -2+(-6)+0 = \boxed{-8}$
b) $\langle(4, -1), (-1, 2)\rangle = 4 \cdot (-1) + (-1) \cdot 2 = -4 + (-2) = \boxed{-6}$

□

(3) Dados $v = (-1, 2, 0)$, $w = (2, -3, -1)$ y $u = (1, -1, 1)$, verificar que:

$$\langle 2v + 3w, -u\rangle = -2\langle v, u\rangle - 3\langle w, u\rangle$$

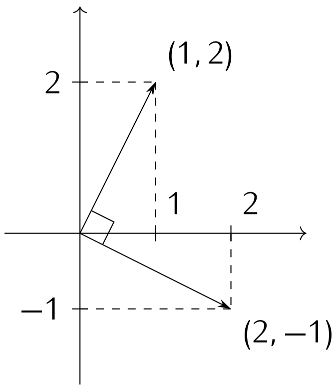
SOLUCIÓN: Calculamos ambos miembros por separado.
Miembro izquierdo: $\langle 2v+3w, -u\rangle = \langle 2\cdot(-1, 2, 0)+3\cdot(2, -3, -1), -(1, -1, 1)\rangle$
$= \langle(-2, 4, 0) + (6, -9, -3), (-1, 1, -1)\rangle = \langle(4, -5, -3), (-1, 1, -1)\rangle$
$= 4 \cdot (-1) + (-5) \cdot 1 + (-3) \cdot (-1) = -4 + (-5) + 3 = \boxed{-6}$
Miembro derecho: $-2\langle v, u\rangle - 3\langle w, u\rangle = -2\langle(-1, 2, 0), (1, -1, 1)\rangle - 3\langle(2, -3, -1), (1, -1, 1)\rangle$
$= -2 \cdot (-1 \cdot 1 + 2 \cdot (-1) + 0 \cdot 1) - 3 \cdot (2 \cdot 1 + (-3) \cdot (-1) + (-1) \cdot 1)$
$= -2 \cdot (-1 + (-2) + 0) - 3 \cdot (2 + 3 + (-1)) = -2 \cdot (-3) - 3 \cdot 4 = 6 - 12 = \boxed{-6}$

□

(4) Probar que
a) $(2,3,-1)$ y $(1,-2,-4)$ son ortogonales.
b) $(2,-1)$ y $(1,2)$ son ortogonales. Dibujar en el plano.

Solución: Calculamos su producto interno para ver si es nulo.
a) $\langle(2,3,-1),(1,-2,-4)\rangle = 2\cdot 1+3\cdot(-2)+(-1)\cdot(-4) = 2+(-6)+4 = \boxed{0}$. Por lo tanto, son vectores ortogonales.

b) $\langle(2,-1),(1,2)\rangle = 2\cdot 1+(-1)\cdot 2 = 2-2 = \boxed{0}$. Por lo tanto, son vectores ortogonales y su gráfica es:



□

(5) Encontrar
a) un vector no nulo ortogonal a $(3,-4)$,
b) un vector no nulo ortogonal a $(2,-1,4)$,
c) un vector no nulo ortogonal a $(2,-1,4)$ y $(0,1,-1)$,

Solución:
a) $(4,3)$ es un vector no nulo ortogonal a $(3,-4)$, pues:

$$\langle(3,-4),(4,3)\rangle = 3\cdot 4+(-4)\cdot 3 = 12-12 = \boxed{0}.$$

b) $(1,2,0)$ es un vector no nulo ortogonal a $(2,-1,4)$, pues:

$$\langle(2,-1,4),(1,2,0)\rangle = 2\cdot 1+(-1)\cdot 2+4\cdot 0 = 2-2+0 = \boxed{0}.$$

c) Primero notar que cualquier vector de la pinta (a,b,b) será ortogonal a $(0,1,-1)$, pues:

$$\langle(0,1,-1),(a,b,b)\rangle = 0\cdot a+1\cdot b+(-1)\cdot b = 0+b-b = \boxed{0}.$$

Si ahora multiplicamos nuestro candidato (a,b,b) con $(2,-1,4)$ tenemos:

$$\langle(2,-1,4),(a,b,b)\rangle = 2\cdot a+(-1)\cdot b+4\cdot b = \boxed{2a+3b}.$$

Luego, si elegimos por ejemplo $a=-3$ y $b=2$ vamos a tener a nuestro candidato ortogonal a ambos vectores. Es decir, $(-3,2,2)$ cumple lo requerido.

□

(6) Encontrar la longitud de los vectores.

a) $(2,3)$, *b)* (t,t^2), *c)* $(\cos\phi, \operatorname{sen}\phi)$.

Solución:

a) $||(2,3)|| = \sqrt{2^2+3^2} = \sqrt{4+9} = \boxed{\sqrt{13}}$

b) $||(t,t^2)|| = \sqrt{t^2+(t^2)^2} = \sqrt{t^2+t^4} = \boxed{|t|\sqrt{1+t^2}}$

c) $||(\cos\phi, \operatorname{sen}\phi)|| = \sqrt{\cos^2\phi + \operatorname{sen}^2\phi} = \sqrt{1} = \boxed{1}$

□

(7) Calcular $\langle v, w\rangle$ y el ángulo entre v y w para los siguientes vectores.

a) $v=(2,2)$, $w=(1,0)$, *b)* $v=(-5,3,1)$, $w=(2,-4,-7)$.

Solución: Para encontrar el ángulo se deben calcular además las normas de los vectores:

a) $\langle v,w\rangle = \langle (2,2),(1,0)\rangle = 2b\cdot 1 + 1\cdot 0 = 2+0 = \boxed{2}$

$||v|| = ||(2,2)|| = \sqrt{2^2+2^2} = \sqrt{4+4} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

$||w|| = ||(1,0)|| = \sqrt{1^2+0^2} = \sqrt{1+0} = \sqrt{1} = 1$

$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{\langle v,w\rangle}{||v||\,||w||}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{2}{2\sqrt{2}\cdot 1}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \boxed{45^\circ}$$

b) $\langle v,w\rangle = \langle(-5,3,1),(2,-4,-7)\rangle = -5\cdot 2+3\cdot(-4)+1\cdot(-7) = -10-12-7 = \boxed{-29}$

$||v|| = ||(-5,3,1)|| = \sqrt{(-5)^2+3^2+1^2} = \sqrt{25+9+1} = \sqrt{35}$

$||w|| = ||(2,-4,-7)|| = \sqrt{2^2+(-4)^2+(-7)^2} = \sqrt{4+16+49} = \sqrt{69}$

$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{\langle v,w\rangle}{||v||\,||w||}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{-29}{\sqrt{35}\sqrt{69}}\right) = \boxed{126^\circ 9' 55.57''}$$

□

(8) Recordar los vectores e_1, e_2 y e_3 dados en la página 12 del apunte. Sea $v=(x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{R}^3$. Verificar que

$$v = x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3 = \langle v,e_1\rangle e_1 + \langle v,e_2\rangle e_2 + \langle v,e_3\rangle e_3.$$

Solución: Podemos empezar desde el miembro de la derecha, pasar por el del medio y llegar al de la izquierda aplicando las definiciones y propiedades conocidas:

$\langle v,e_1\rangle e_1 + \langle v,e_2\rangle e_2 + \langle v,e_3\rangle e_3 =$

$= \langle (x_1,x_2,x_3),(1,0,0)\rangle e_1 + \langle (x_1,x_2,x_3),(0,1,0)\rangle e_2 + \langle (x_1,x_2,x_3),(0,0,1)\rangle e_3$

$= (x_1\cdot 1 + x_2\cdot 0 + x_3\cdot 0)e_1 + (x_1\cdot 0 + x_2\cdot 1 + x_3\cdot 0)e_2 + (x_1\cdot 0 + x_2\cdot 0 + x_3\cdot 1)e_3$

$= (x_1+0+0)e_1 + (0+x_2+0)e_2 + (0+0+x_3)e_3 = \boxed{x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3}$

$x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3 = x_1(1,0,0) + x_2(0,1,0) + x_3(0,0,1) =$

$= (x_1\cdot 1, x_1\cdot 0, x_1\cdot 0) + (x_2\cdot 0, x_2\cdot 1, x_2\cdot 0) + (x_3\cdot 0, x_3\cdot 0, x_3\cdot 1)$

$= (x_1,0,0) + (0,x_2,0) + (0,0,x_3) = (x_1+0+0, 0+x_2+0, 0+0+x_3) = (x_1,x_2,x_3) = \boxed{v}$

□

(9) Probar, usando sólo las propiedades **P1**, **P2**, y **P3** del producto escalar, que dados $v, w, u \in \mathbb{R}^n$ y $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$,

a) se cumple:

$$\langle \lambda_1 v + \lambda_2 w, u\rangle = \lambda_1\langle v, u\rangle + \lambda_2\langle w, u\rangle.$$

b) Si $\langle v, w\rangle = 0$, es decir si v y w son ortogonales, entonces

$$\langle \lambda_1 v + \lambda_2 w, \lambda_1 v + \lambda_2 w\rangle = \lambda_1^2\langle v, v\rangle + \lambda_2^2\langle w, w\rangle.$$

Solución:

a) $\langle \lambda_1 v + \lambda_2 w, u\rangle \overset{\textbf{P2}}{=} \langle u, \lambda_1 v\rangle + \langle u, \lambda_2 w\rangle \overset{\textbf{P3}}{=} \lambda_1\langle u, v\rangle + \lambda_2\langle u, w\rangle \overset{\textbf{P1}}{=} \lambda_1\langle v, u\rangle + \lambda_2\langle w, u\rangle$

b) $\langle \lambda_1 v + \lambda_2 w, \lambda_1 v + \lambda_2 w\rangle \overset{\textbf{P2}}{=} \langle \lambda_1 v + \lambda_2 w, \lambda_1 v\rangle + \langle \lambda_1 v + \lambda_2 w, \lambda_2 w\rangle \overset{\textbf{P2}}{=}$
$\overset{\textbf{P2}}{=} \langle \lambda_1 v, \lambda_1 v\rangle + \langle \lambda_1 v, \lambda_2 w\rangle + \langle \lambda_2 w, \lambda_1 v\rangle + \langle \lambda_2 w, \lambda_2 w\rangle \overset{\textbf{P3}}{=}$
$\overset{\textbf{P3}}{=} \lambda_1^2\langle v, v\rangle + \lambda_1\lambda_2\langle v, w\rangle + \lambda_2\lambda_1\langle w, v\rangle + \lambda_2^2\langle w, w\rangle \overset{\textbf{HIP}}{=} \lambda_1^2\langle v, v\rangle + \lambda_2^2\langle w, w\rangle$

En el último paso se utilizó la hipótesis $\langle v, w\rangle = 0$.

□

(10) Dados $v, w \in \mathbb{R}^n$, probar que si $\langle v, w\rangle = 0$, es decir si v y w son ortogonales, entonces

$$||v + w||^2 = ||v||^2 + ||w||^2.$$

¿Cuál es el nombre con que se conoce este resultado en $\mathbb{R}^2$?

Solución: Vamos a usar la definición de norma y el inciso b) del ejercicio anterior, tomando $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$:

$$||v + w||^2 \overset{def}{=} \langle v + w, v + w\rangle \overset{9.b)}{=} \langle v, v\rangle + \langle w, w\rangle \overset{def}{=} ||v||^2 + ||w||^2.$$

En $\mathbb{R}^2$ esta igualdad es el *Teorema de Pitágoras*.

□

(11) ⓐ Sean $v, w \in \mathbb{R}^2$, probar usando solo la definición explícita del producto escalar en $\mathbb{R}^2$ que

$$|\langle v, w\rangle| \leq ||v||\,||w|| \qquad \text{(Desigualdad de Schwarz).}$$

Solución: Vamos a escribir $v = (v_1, v_2)$ y $w = (w_1, w_2)$. Veamos la pinta del cuadrado del lado izquierdo:

$$\langle v, w\rangle^2 = \langle (v_1, v_2), (w_1, w_2)\rangle^2 = (v_1w_1 + v_2w_2)^2 \tag{1.1}$$

Ahora comenzamos por el cuadrado del lado derecho con el objetivo de llegar a (1.1):

$$||v||^2||w||^2 = (v_1^2 + v_2^2)(w_1^2 + w_2^2) = (v_1w_1)^2 + (v_1w_2)^2 + (v_2w_1)^2 + (v_2w_2)^2.$$

Mirando el primer y último término tenemos que si completamos ese cuadrado obtendríamos (1.1). Sumamos y restamos $2(v_1 w_1)(v_2 w_2)$ y agrupamos:

$$\begin{aligned}||v||^2||w||^2 &= (v_1 w_1)^2 + (v_1 w_2)^2 + (v_2 w_1)^2 + (v_2 w_2)^2 + \\ &\qquad + 2(v_1 w_1)(v_2 w_2) - 2(v_1 w_1)(v_2 w_2) = \\ &= [(v_1 w_1)^2 + 2(v_1 w_1)(v_2 w_2) + (v_2 w_2)^2] + [(v_2 w_1)^2 - 2 v_1 w_1 v_2 w_2 + (v_1 w_2)^2]\end{aligned}$$

El segundo grupo de términos también forma un cuadrado perfecto. Escribimos ambos como cuadrados y acotamos:

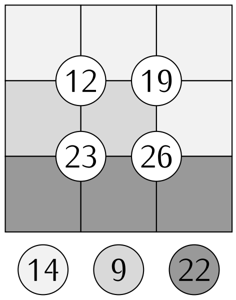
$$||v||^2||w||^2 = \underbrace{(v_1 w_1 + v_2 w_2)^2}_{=\langle v, w\rangle^2} + \underbrace{(v_2 w_1 - v_1 w_2)^2}_{\geq 0} \geq \langle v, w\rangle^2.$$

$\square$

PRÁCTICO 2

Soluciones
Álgebra II – Año 2024/1 – FAMAF

(1) *Juego Suko.* Colocar los números del 1 al 9 en las celdas de la siguiente tabla de modo que el número en cada círculo sea igual a la suma de las cuatro celdas adyacentes, y la suma de las celdas del mismo color sea igual al número en el círculo de igual color.



Solución: queremos ver que valor toma cada celda y, por lo tanto, a cada celda le asignamos una variable:

x_1	x_2	x_3
x_4	x_5	x_6
x_7	x_8	x_9

Tenemos entonces las 9 incógnitas que debemos resolver y la información del Suko original nos dice que se deben cumplir las siguientes ecuaciones:

$$x_1 + x_2 + x_4 + x_5 = 12, \tag{2.1}$$

$$x_2 + x_3 + x_5 + x_6 = 19, \tag{2.2}$$

$$x_4 + x_5 + x_7 + x_8 = 23, \tag{2.3}$$

$$x_5 + x_6 + x_8 + x_9 = 26, \tag{2.4}$$

$$x_4 + x_5 = 9, \tag{2.5}$$

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_6 = 14, \tag{2.6}$$

$$x_7 + x_8 + x_9 = 22 \tag{2.7}$$

Primero vamos a tratar de resolver el sistema de ecuaciones. Podríamos plantear la matriz ampliada del sistema y reducir la matriz, pero en este caso va a resultar más corto trabajar con las ecuaciones directamente. Hay 9 incógnitas y 7 ecuaciones, entonces en general es razonable que queden 7 variables dependientes y 2 variables libres. Con esto en mente trataremos de despejar todo en función de las variables x_1 y x_3 (esto fue elegido arbitrariamente).

Por (2.5), $x_4 + x_5 = 9 \overset{(2.1)}{\Rightarrow} x_1 + x_2 + 9 = 12$, es decir $x_1 + x_2 = 3$ o $\boxed{x_2 = 3 - x_1\ (a)}$.

Por (2.5), $x_4 + x_5 = 9 \overset{(2.3)}{\Rightarrow} 9 + x_7 + x_8 = 23 \Rightarrow x_7 + x_8 = 14 \overset{(2.7)}{\Rightarrow} 14 + x_9 = 22 \Rightarrow \boxed{x_9 = 8\ (b)}$.

Por (a), $x_1 + x_2 = 3 \overset{(2.6)}{\Rightarrow} 3 + x_3 + x_6 = 14$, es decir $x_3 + x_6 = 11$ o $\boxed{x_6 = 11 - x_3\ (c)}$.

Si en la ecuación (2.2) reemplazamos x_2 y x_6, obtenemos

$$19 = x_2 + x_3 + x_5 + x_6 = (3 - x_1) + x_3 + x_5 + (11 - x_3) = 14 - x_1 + x_5,$$

o $\boxed{x_5 = 5 + x_1\ (d)}$.

Con todo lo que hemos averiguado hacemos reemplazos en (2.4):

$$26 = x_5 + x_6 + x_8 + x_9 = (5 + x_1) + (11 - x_3) + x_8 + 8 = 24 + x_1 - x_3 + x_8,$$

luego $\boxed{x_8 = 2 - x_1 + x_3\ (e)}$.

De la fórmula (2.7), de (e) y de (b), obtenemos

$$22 = x_7 + x_8 + x_9 = x_7 + (2 - x_1 + x_3) + 8 = 10 + x_7 - x_1 + x_3,$$

luego $\boxed{x_7 = 12 + x_1 - x_3\ (f)}$.

Utilizando (d) y la fórmula (2.5):

$$9 = x_4 + x_5 = x_4 + (5 + x_1) = 5 + x_1 + x_4,$$

luego $\boxed{x_4 = 4 - x_1\ (g)}$.

Teníamos 7 ecuaciones y 9 incógnitas, entonces. como ya dijimos, era de esperarse que queden 7 variables dependientes y 2 variables libres, en este caso x_1 y x_3. Si no tuviéramos más restricciones la cantidad de soluciones sería infinita, pero debemos considerar que

$$x_i \in \mathbb{N} \quad \wedge \quad 1 \le x_i \le 9 \quad \wedge \quad x_i \neq x_i \text{ si } i \neq j. \tag{*}$$

$(1 \le i, j \le 7)$.

Debido a (*) y (a), x_1 solo puede ser 1 o 2.

Caso $x_1 = 1$. por las ecuaciones (a),...,(f) obtenemos:

$$\begin{aligned} x_1 &= 1, & x_2 &= 2, & x_4 &= 3, \\ x_5 &= 6, & x_9 &= 8, & & \\ x_6 &= 11 - x_3, & x_7 &= 13 - x_3, & x_8 &= x_3 + 1, \end{aligned} \tag{**}$$

y x_3 libre (con las restricciones de (*)). Luego, x_3 tampoco puede tomar los valores $1, 2, 3, 6, 8$ (pues ya los tienen otras variables), así que $x_3 = 4, 5, 7, 9$.

Subcaso $x_1 = 1$, $x_3 = 4$. En este caso, por (**): $x_6 = 7$, $x_7 = 9$, $x_8 = 5$, y estas serían soluciones admisibles.

Subcaso $x_1 = 1$, $x_3 = 5$. En este caso, por (**), $x_6 = 6 = x_5$, lo cual no es admisible (debe ser $x_6 \neq x_5$.)

Subcaso $x_1 = 1$, $x_3 = 7$. En este caso, por (**), $x_8 = 7 + 1 = 8 = x_9$, lo cual no es admisible.

Subcaso $x_1 = 1$, $x_3 = 9$. En este caso, por (**), $x_8 = 10$, lo cual no es admisible ($x_i \leq 9$ para todo i).

Falta ver

Caso $x_1 = 2$. Por la ecuación (g) obtenemos $x_4 = 4 - 2 = 2 = x_1$, lo cual no es admisible.

Es decir, hay una única solución para estas ecuaciones con las restricciones mencionadas:

$$\begin{aligned} x_1 &= 1, & x_2 &= 2, & x_3 &= 4, \\ x_4 &= 3, & x_5 &= 6, & x_6 &= 7 \\ x_7 &= 9, & x_8 &= 5, & x_9 &= 8. \end{aligned}$$

□

(2) Encontrar los coeficientes reales del polinomio $p(x) = ax^2 + bx + c$ de manera tal que $p(1) = 2$, $p(2) = 7$ y $p(3) = 14$.

Solución: planteemos a nivel de los coeficientes del polinomio las condiciones:

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} P(1) = 2 & \Rightarrow & a \cdot 1^2 & + & b \cdot 1 & + & c & = & 2 \\ P(2) = 7 & \Rightarrow & a \cdot 2^2 & + & b \cdot 2 & + & c & = & 7 \\ P(3) = 14 & \Rightarrow & a \cdot 3^2 & + & b \cdot 3 & + & c & = & 14. \end{array} \qquad (*)$$

Nuestro objetivo es averiguar a, b y c, que como vemos, se podrían obtener resolviendo el sistema de ecuaciones lineales planteado en (*). La matriz ampliada de este sistema es

$$[A|Y] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 1 & 7 \\ 9 & 3 & 1 & 14. \end{array}\right]$$

Resolvamos el sistema.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 1 & 7 \\ 9 & 3 & 1 & 4 \end{array}\right] \xrightarrow[F_2-4F_1]{F_3-9F_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & -3 & -1 \\ 0 & -6 & -8 & -4 \end{array}\right] \xrightarrow{F_3-3F_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[F_2+3F_3]{F_1-F_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & -2 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right] \xrightarrow{F_2/(-2)} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right] \xrightarrow{F_1-F_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1. \end{array}\right]$$

Luego $a = 1$, $b = 2$, $c = -1$. Es decir el polinomio que satisface las hipótesis es:

$$x^2 + 2x - 1.$$

□

(3) Determinar cuáles de las siguientes matrices son MERF.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

SOLUCIÓN: recordemos que una matriz MERF debe satisfacer:

a) la primera entrada no nula de una fila es 1 (el 1 principal).

b) Cada columna que contiene un 1 principal tiene todos los otros elementos iguales a 0.

c) todas las filas cuyas entradas son todas iguales a cero están al final de la matriz, y

d) en dos filas consecutivas no nulas el 1 principal de la fila inferior está más a la derecha que el 1 principal de la fila superior.

Las primeras cuatro matrices satisfacen la definición de MERF.

La 5º matriz no satisface *b*), pues el 1 principal es la segunda fila está en la columna 3 y en esa columna hay otro elemento no nulo (en la posición 33 hay un 1).

La 6º matriz tampoco es MERF pues la fila 2 es nula y la fila 3 no lo es. Luego no satisface *c*).

□

(4) Para cada una de las MERF del ejercicio anterior,

a) asumir que es la matriz de un sistema homogéneo, escribir el sistema y dar las soluciones del sistema,

b) asumir que es la matriz ampliada de un sistema no homogéneo, escribir el sistema y dar las soluciones del sistema.

SOLUCIÓN: como ya vimos en el ejercicio anterior las MERF son

$$\text{i)} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad \text{ii)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -3 \end{bmatrix}, \qquad \text{iii)} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad \text{iv)} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

a)

i) El sistema homogéneo correspondiente es

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &= 0 \\ x_3 &= 0, \end{aligned}$$

luego $x_1 = -2x_2$ y las soluciones del sistema son $\{(-2t, t, 0) : t \in \mathbb{R}\}$.

ii) El sistema homogéneo correspondiente es

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_3 &= 0 \\ x_2 - 3x_3 &= 0, \end{aligned}$$

luego $x_1 = -2x_3$, $x_2 = 3x_3$ y las soluciones son $\{(-2t, 3t, t) : t \in \mathbb{R}\}$.

iii) El sistema homogéneo correspondiente es

$$\begin{aligned} x_2 &= 0 \\ x_3 &= 0, \end{aligned}$$

luego las soluciones son $\{(t, 0, 0) : t \in \mathbb{R}\}$.

iv) El sistema homogéneo correspondiente es

$$x_2 = 0,$$

luego las soluciones son $\{(t, 0, s) : t, s \in \mathbb{R}\}$.

b) Las matrices ampliadas son

$$\text{i)} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right], \qquad \text{ii)} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -3 \end{array}\right], \qquad \text{iii)} \left[\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right], \qquad \text{iv)} \left[\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

i) El sistema no homogéneo correspondiente es

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &= 0 \\ 0 &= 1. \end{aligned}$$

Por lo tanto no tiene solución.

ii) El sistema correspondiente es

$$\begin{aligned} x_1 &= 2 \\ x_2 &= -3, \end{aligned}$$

luego la solución es $(2, -3)$.

iii) El sistema correspondiente es

$$\begin{aligned} x_2 &= 0 \\ 0 &= 1. \end{aligned}$$

Por lo tanto no tiene solución.

iv) El sistema correspondiente es

$$x_2 = 0,$$

luego las soluciones son $\{(t, 0) : t \in \mathbb{R}\}$.

□

(5) Para cada uno de los siguientes sistemas de ecuaciones, describir explícita o paramétricamente todas las soluciones e indicar cuál es la MERF asociada al sistema.

a) $\begin{cases} -x - y + 4z = 0 \\ x + 3y + 8z = 0 \\ x + 2y + 5z = 0 \end{cases}$ *b)* $\begin{cases} x - 3y + 5z = 0 \\ 2x - 3y + z = 0 \\ -y + 3z = 0 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x - z + 2t = 0 \\ -x + 2y - z + 2t = 0 \\ -x + y = 0 \end{cases}$ *d)* $\begin{cases} -x - y + 4z = 1 \\ x + 3y + 8z = 3 \\ x + 2y + 5z = 1 \end{cases}$

e) $\begin{cases} x - 3y + 5z = 1 \\ 2x - 3y + z = 3 \\ -y + 3z = 1 \end{cases}$ *f)* $\begin{cases} x - z + 2t = 1 \\ -x + 2y - z + 2t = 3 \\ -x + y = 1 \end{cases}$

Solución:

a) La matriz asociada a este sistema es la matriz A_1 que escribimos más abajo y a la cual luego reducimos a una MERF.

$$A_1 = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 4 \\ 1 & 3 & 8 \\ 1 & 2 & 5 \end{bmatrix} \xrightarrow[F_3+F_1]{F_2+F_1} \begin{bmatrix} -1 & -1 & 4 \\ 0 & 2 & 12 \\ 0 & 1 & 9 \end{bmatrix} \xrightarrow[F_2-2F_3]{F_1+F_3} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 13 \\ 0 & 0 & -6 \\ 0 & 1 & 9 \end{bmatrix}$$
$$\xrightarrow[F_2/(-6)]{F_1/(-1)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -13 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 9 \end{bmatrix} \xrightarrow[F_3-9F_2]{F_1+13F_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{F_2 \leftrightarrow F_3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = R_1.$$

Luego el sistema tiene solución trivial $(0, 0, 0)$ y la MERF es la matriz Id_3.

b)

$$A_2 = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 5 \\ 2 & -3 & 1 \\ 0 & -1 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{F_2-2F_1} \begin{bmatrix} 1 & -3 & 5 \\ 0 & 3 & -9 \\ 0 & -1 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow[F_2+3F_3]{F_1-3F_3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$
$$\xrightarrow{-F_3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 \end{bmatrix} \xrightarrow{F_2 \leftrightarrow F_3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = R_2.$$

Luego la MERF asociada al sistema es R_2 y ahora el nuevo sistema es

$$\begin{cases} x - 4z = 0 \\ y - 3z = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x = 4z \\ y = 3z. \end{cases}$$

Por lo tanto las soluciones del sistema son $\{(4t, 3t, t) : t \in \mathbb{R}\}$.

c) Este es un sistema homogéneo de 3 ecuaciones con 4 incógnitas (x, y, z, t). La matriz del sistema es la A_3 que mostramos en la siguiente fila y luego la reducimos a MERF:

$$A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[F_3+F_1]{F_2+F_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{F_2/2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{F_3-F_2}$$
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = R_3.$$

Luego R_3 es la MERF asociada al sistema. El sistema ahora es

$$\begin{cases} x - z + 2t = 0 \\ y - z + 2t = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x = z - 2t \\ y = z - 2t. \end{cases}$$

Por lo tanto, las soluciones del sistema son $\{(u - 2v, u - 2v, u, v) : u, v \in \mathbb{R}\}$.

d) Este es un sistema no homogéneo de 3 ecuaciones y 3 incógnitas. La matriz ampliada del sistema es $[A_1|Y]$, donde A_1 es la matriz del inciso *a)*. Luego para reducir A_1 a MERF hacemos los mismos pasos que en *a)*:

$$[A_1|Y] = \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & -1 & 4 & 1 \\ 1 & 3 & 8 & 3 \\ 1 & 2 & 5 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[F_3+F_1]{F_2+F_1} \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & -1 & 4 & 1 \\ 0 & 2 & 12 & 4 \\ 0 & 1 & 9 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow[F_2-2F_3]{F_1+F_3} \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 13 & 3 \\ 0 & 0 & -6 & 0 \\ 0 & 1 & 9 & 2 \end{array}\right]$$
$$\xrightarrow[F_2/(-6)]{F_1/(-1)} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -13 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 9 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow[F_3-9F_2]{F_1+13F_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow{F_2 \leftrightarrow F_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right].$$

Luego la MERF asociada al sistema es Id_3 (con en (a), obviamente) y la solución del sistema es $(-3, 2, 0)$.

e) Este es un sistema no homogéneo de 3 ecuaciones y 3 incógnitas. La matriz ampliada del sistema es $[A_2|Y]$ donde A_2 es la matriz del inciso *b)*. Luego para reducir A_2 a MERF hacemos los mismos pasos que en *b)*:

$$[A_2|Y] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 5 & 1 \\ 2 & -3 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 3 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{F_2-2F_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 5 & 1 \\ 0 & 3 & -9 & 1 \\ 0 & -1 & 3 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[F_2+3F_3]{F_1-3F_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -4 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & -1 & 3 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{-F_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -4 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & -3 & -1 \end{array}\right] \xrightarrow{F_2 \leftrightarrow F_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -4 & -2 \\ 0 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{array}\right].$$

Luego la MERF asociada al sistema es R_2 del ejercicio (b) y como en el nuevo sistema tenemos la ecuación $0 = 4$, el sistema no tiene solución.

f) Este es un sistema no homogéneo de 3 ecuaciones con 4 incógnitas. La matriz ampliada del sistema es $[A_3|Y]$ donde A_3 es la matriz del inciso *c)*. Luego para reducir A_3 a MERF hacemos los mismos pasos que en *c)*:

$$[A_3|Y] = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & -1 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[F_3+F_1]{F_2+F_1} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -2 & 4 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow{F_2/2}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow{F_3-F_2} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Luego R_3 (de (c)) es la MERF asociada al sistema. El sistema ahora es

$$\begin{cases} x - z + 2t = 2 \\ y - z + 2t = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = z - 2t + 2 \\ y = z - 2t + 2. \end{cases}$$

Por lo tanto, las soluciones del sistema son $\{(u - 2v + 2, u - 2v + 2, u, v) : u, v \in \mathbb{R}\}$.

$\square$

(6) Para cada uno de los siguientes sistemas, describir implícitamente el conjunto de los vectores (b_1, b_2, b_3) o (b_1, b_2, b_3, b_4) para los cuales cada sistema tiene solución.

a) $\begin{cases} x - 3y + 5z = b_1 \\ 2x - 3y + z = b_2 \\ -y + 3z = b_3 \end{cases}$

c) $\begin{cases} -x - y + 4z = b_1 \\ x + 3y + 8z = b_2 \\ x + 2y + 5z = b_3 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x - z + 2t = b_1 \\ -x + 2y - z + 2t = b_2 \\ -x + y = b_3 \\ y - z + 2t = b_4 \end{cases}$

SOLUCIÓN:

a) La matriz ampliada del sistema es

$$[A_2|Y] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 5 & b_1 \\ 2 & -3 & 1 & b_2 \\ 0 & -1 & 3 & b_3 \end{array}\right].$$

Observar que A_2 es la misma matriz que la de los ejercicios ((5)) b) y e) y, por lo tanto, los pasos para reducir la matriz asociada al sistema serán los mismos.

$$[A_2|Y] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 5 & b_1 \\ 2 & -3 & 1 & b_2 \\ 0 & -1 & 3 & b_3 \end{array}\right] \xrightarrow{F_2-2F_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 5 & b_1 \\ 0 & 3 & -9 & b_2-2b_1 \\ 0 & -1 & 3 & b_3 \end{array}\right] \xrightarrow[F_2+3F_3]{F_1-3F_3}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -4 & b_1-3b_3 \\ 0 & 0 & 0 & -2b_1+b_2+3b_3 \\ 0 & -1 & 3 & b_3 \end{array}\right] \xrightarrow{-F_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -4 & b_1-3b_3 \\ 0 & 0 & 0 & -2b_1+b_2+3b_3 \\ 0 & 1 & -3 & -b_3 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{F_2\leftrightarrow F_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -4 & b_1-3b_3 \\ 0 & 1 & -3 & -b_3 \\ 0 & 0 & 0 & -2b_1+b_2+3b_3 \end{array}\right].$$

Luego el conjunto de b_i's para los cuales el sistema tiene solución es

$$\{(b_1, b_2, b_3) \in \mathbb{R}^3 : -2b_1 + b_2 + 3b_3 = 0\}.$$

b) La matriz ampliada del sistema es

$$[B|Y] = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & 2 & b_1 \\ -1 & 2 & -1 & 2 & b_2 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & b_3 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & b_4 \end{array}\right].$$

Ahora, reducimos B a una MERF:.

$$[B|Y] = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & 2 & b_1 \\ -1 & 2 & -1 & 2 & b_2 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & b_3 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & b_4 \end{array}\right] \xrightarrow[F_3+F_1]{F_2+F_1} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & 2 & b_1 \\ 0 & 2 & -2 & 4 & b_1+b_2 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & b_1+b_3 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & b_4 \end{array}\right] \xrightarrow{F_2/2}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & 2 & b_1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & \frac{1}{2}b_1+\frac{1}{2}b_2 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & b_1+b_3 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & b_4 \end{array}\right] \xrightarrow[F_4-F_2]{F_3-F_2} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & 2 & b_1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & \frac{1}{2}b_1+\frac{1}{2}b_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b_1+b_3-\frac{1}{2}b_1-\frac{1}{2}b_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b_4-\frac{1}{2}b_1-\frac{1}{2}b_2 \end{array}\right]$$

$$= \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & 2 & b_1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & \frac{1}{2}b_1+\frac{1}{2}b_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}b_1-\frac{1}{2}b_2+b_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2}b_1-\frac{1}{2}b_2+b_4 \end{array}\right].$$

Luego el conjunto de b_i's para los cuales el sistema tiene solución es

$$\{(b_1, b_2, b_3, b_4) \in \mathbb{R}^3 : \frac{1}{2}b_1 - \frac{1}{2}b_2 + b_3 = 0 \wedge -\frac{1}{2}b_1 - \frac{1}{2}b_2 + b_4 = 0\}.$$

c) La matriz ampliada del sistema es

$$[A_1|Y] = \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & -1 & 4 & b_1 \\ 1 & 3 & 8 & b_2 \\ 1 & 2 & 5 & b_3 \end{array}\right].$$

Observar que A_1 es la misma matriz que la de los ejercicios ((5)) a) y d) y, por lo tanto, los pasos para reducir la matriz asociada al sistema serán los mismos.

$$A_1 = \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & -1 & 4 & b_1 \\ 1 & 3 & 8 & b_2 \\ 1 & 2 & 5 & b_3 \end{array}\right] \xrightarrow[F_3+F_1]{F_2+F_1} \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & -1 & 4 & b_1 \\ 0 & 2 & 12 & b_1+b_2 \\ 0 & 1 & 9 & b_1+b_3 \end{array}\right] \xrightarrow[F_2-2F_3]{F_1+F_3}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 13 & 2b_1+b_3 \\ 0 & 0 & -6 & -b_1+b_2-2b_3 \\ 0 & 1 & 9 & b_1+b_3 \end{array}\right] \xrightarrow[F_2/(-6)]{F_1/(-1)} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -13 & -2b_1-b_3 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{6}b_1-\frac{1}{6}b_2+\frac{1}{3}b_3 \\ 0 & 1 & 9 & b_1+b_3 \end{array}\right] \xrightarrow[F_3-9F_2]{F_1+13F_2}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{6}b_1-\frac{13}{6}b_2+\frac{10}{3}b_3 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{6}b_1-\frac{1}{6}b_2+\frac{1}{3}b_3 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2}b_1+\frac{3}{2}b_2-2b_3 \end{array}\right] \xrightarrow{F_2\leftrightarrow F_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{6}b_1-\frac{13}{6}b_2+\frac{10}{3}b_3 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2}b_1+\frac{3}{2}b_2-2b_3 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{6}b_1-\frac{1}{6}b_2+\frac{1}{3}b_3 \end{array}\right].$$

Luego el conjunto de b_i's para los cuales el sistema tiene solución es $\mathbb{R}^3$.

□

(7) Sea $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & 2016 \\ 2 & 3 & 4 & \cdots & 2017 \\ 3 & 4 & 5 & \cdots & 2018 \\ \vdots & & & & \vdots \\ 100 & 101 & 102 & \cdots & 2115 \end{bmatrix}$.

a) Encontrar todas las soluciones del sistema $AX = 0$.

b) Encontrar todas las soluciones del sistema $AX = \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$.

SOLUCIÓN:

a) Reducimos la matriz A aplicando operaciones elementales por filas:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & 2016 \\ 2 & 3 & 4 & \cdots & 2017 \\ 3 & 4 & 5 & \cdots & 2018 \\ \vdots & & & & \vdots \\ 100 & 101 & 102 & \cdots & 2115 \end{bmatrix} \xrightarrow[F_{100}-F_1]{\substack{F_2-F_1 \\ F_3-F_1 \\ \vdots}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & 2016 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 2 & 2 & 2 & \cdots & 2 \\ \vdots & & & & \vdots \\ 99 & 99 & 99 & \cdots & 99 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[F_{100}-99F_2]{\substack{F_3-2F_2 \\ F_4-3F_2 \\ \vdots}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & 2016 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{F_2 \leftrightarrow F_1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & 2016 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{F_2-F_1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & \cdots & 2015 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{F_1-F_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -2 & \cdots & -2014 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & \cdots & 2015 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} = R_A$$

Luego R_A es la MERF asociada al sistema. El sistema ahora es

$$\begin{cases} x_1 + (-1)x_3 + (-2)x_4 + \cdots + (-2014)x_{2016} = 0 \\ x_2 + 2x_3 + 3x_4 + \cdots + 2015x_{2016} = 0, \end{cases}$$

que es equivalente al sistema

$$\begin{cases} x_1 = \sum_{j=3}^{2016} (j-2)x_j \\ x_2 = \sum_{j=3}^{2016} (1-j)x_j \end{cases}$$

Por lo tanto, las soluciones del sistema son:

$$\{(\sum_{j=3}^{2016} (j-2)x_j, \sum_{j=3}^{2016} (1-j)x_j, x_3, x_4, \cdots, x_{2016}) : x_3, x_4, \cdots, x_{2016} \in \mathbb{R}\}.$$

b) Podemos repetir la secuencia de operaciones elementales sobre el vector de unos para obtener las soluciones:

$$\begin{bmatrix}1\\1\\1\\\vdots\\1\end{bmatrix}\xrightarrow[F_{100}-F_1]{\substack{F_2-F_1\\F_3-F_1\\\vdots}}\begin{bmatrix}1\\0\\0\\\vdots\\0\end{bmatrix}\xrightarrow[F_{100}-99F_2]{\substack{F_3-2F_2\\F_4-3F_2\\\vdots}}\begin{bmatrix}1\\0\\0\\\vdots\\0\end{bmatrix}\xrightarrow{F_2\leftrightarrow F_1}\begin{bmatrix}0\\1\\0\\\vdots\\0\end{bmatrix}\xrightarrow{F_2-F_1}\begin{bmatrix}0\\1\\0\\\vdots\\0\end{bmatrix}\xrightarrow{F_1-F_2}\begin{bmatrix}-1\\1\\0\\\vdots\\0\end{bmatrix}$$

Análogamente al inciso *a)*, el sistema ahora es:

$$\begin{cases}x_1+(-1)x_3+(-2)x_4+\cdots+(-2014)x_{2016}=-1\\ x_2+2x_3+3x_4+\cdots+2015x_{2016}=1,\end{cases}$$

equivalente a

$$\begin{cases}x_1=-1+\sum_{j=3}^{2016}(j-2)x_j\\ x_2=1+\sum_{j=3}^{2016}(1-j)x_j\end{cases}$$

Por lo tanto, las soluciones del sistema son:

$$\{(-1+\sum_{j=3}^{2016}(j-2)x_j,1+\sum_{j=3}^{2016}(1-j)x_j,x_3,x_4,\cdots,x_{2016}):x_3,x_4,\cdots,x_{2016}\in\mathbb{R}\}.$$

□

(8) Sea $A=\begin{bmatrix}3&-1&2\\2&1&1\\1&-3&0\end{bmatrix}$. Reduciendo A por filas,

a) encontrar todas las soluciones sobre $\mathbb{R}$ y $\mathbb{C}$ del sistema $AX=0$.

b) encontrar todas las soluciones sobre $\mathbb{R}$ y $\mathbb{C}$ del sistema $AX=\begin{bmatrix}1\\i\\0\end{bmatrix}$.

Solución:

a) Reducimos la matriz A aplicando operaciones elementales por filas:

$$A=\begin{bmatrix}3&-1&2\\2&1&1\\1&-3&0\end{bmatrix}\xrightarrow{F_1\leftrightarrow F_3}\begin{bmatrix}1&-3&0\\2&1&1\\3&-1&2\end{bmatrix}\xrightarrow{\substack{F_2-2F_1\\F_3-3F_1}}\begin{bmatrix}1&-3&0\\0&7&1\\0&8&2\end{bmatrix}\xrightarrow{F_3-F_2}\begin{bmatrix}1&-3&0\\0&7&1\\0&1&1\end{bmatrix}\xrightarrow{F_3\leftrightarrow F_2}$$
$$\begin{bmatrix}1&-3&0\\0&1&1\\0&7&1\end{bmatrix}\xrightarrow{\substack{F_1+3F_2\\F_3-7F_2}}\begin{bmatrix}1&0&3\\0&1&1\\0&0&-6\end{bmatrix}\xrightarrow{F_3(-\frac{1}{6})}\begin{bmatrix}1&0&3\\0&1&1\\0&0&1\end{bmatrix}\xrightarrow{\substack{F_1-3F_3\\F_2-F_3}}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}=R_A$$

Luego el sistema tiene solución trivial $(0,0,0)$ y la MERF es la matriz Id_3. Notar que todas las operaciones realizadas valen tanto para $\mathbb{R}$ como para $\mathbb{C}$, por lo que $(0,0,0)$ es la solución para ambos casos.

b) Análogamente a lo realizado en el ejercicio (7) *b)* podemos repetir la secuencia de operaciones elementales sobre el vector $\begin{bmatrix} 1 \\ i \\ 0 \end{bmatrix}$:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ i \\ 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{F_1 \leftrightarrow F_3} \begin{bmatrix} 0 \\ i \\ 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[F_3-3F_1]{F_2-2F_1} \begin{bmatrix} 0 \\ i \\ 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{F_3-F_2} \begin{bmatrix} 0 \\ i \\ 1-i \end{bmatrix} \xrightarrow{F_3 \leftrightarrow F_2} \begin{bmatrix} 0 \\ 1-i \\ i \end{bmatrix} \xrightarrow[F_3-7F_2]{F_1+3F_2}$$

$$\begin{bmatrix} 3-3i \\ 1-i \\ -7+8i \end{bmatrix} \xrightarrow{F_3(-\frac{1}{6})} \begin{bmatrix} 3-3i \\ 1-i \\ \frac{7}{6}-\frac{4}{3}i \end{bmatrix} \xrightarrow[F_2-F_3]{F_1-3F_3} \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}+i \\ -\frac{1}{6}+\frac{1}{3}i \\ \frac{7}{6}-\frac{4}{3}i \end{bmatrix}$$

En este punto, si bien las operaciones propiamente dichas sólo involucraron números reales, tenemos que la solución tiene números complejos, por lo que el sistema no tiene solución en $\mathbb{R}$, pero si tiene solución en $\mathbb{C}$, y es $X = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}+i \\ -\frac{1}{6}+\frac{1}{3}i \\ \frac{7}{6}-\frac{4}{3}i \end{bmatrix}$

□

(9) Suponga que tiene que resolver un sistema de ecuaciones lineales homogéneo y que tras hacer algunas operaciones elementales por fila a la matriz asociada obtiene una matriz con la siguiente forma

$$\begin{pmatrix} a & * & * & * \\ 0 & b & * & * \\ 0 & 0 & c & * \\ 0 & 0 & 0 & d \end{pmatrix}$$

donde $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ y $*$ son algunos números reales. ¿Qué conclusiones puede inferir acerca del conjunto de soluciones a partir de los valores de a, b, c y d?

Solución: lo primero que podemos observar es que si a, b, c y d son todos no nulos entonces podemos aplicar las operaciones elementales por fila de multiplicar cada fila por a^{-1}, b^{-1}, c^{-1} y d^{-1}. Luego de esto nos quedaría una matriz con la siguiente forma

$$\begin{pmatrix} 1 & * & * & * \\ 0 & 1 & * & * \\ 0 & 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Luego podemos usando esos 1's principales podemos eliminar las entradas por encima de ellos obteniendo la matriz identindad

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

En conclusión si a, b, c y d son todos no nulos podemos llegar mediante operaciones elementales por filas a la identidad y por lo tanto la única solución del sistema es la trivial $(0, 0, 0, 0)$, recordar el Teorema 2.4.5.

En cambio, si alguno de los escalares a, b, c y d es nulo, entonces no podemos obtener un 1 principal en su lugar. Más aún, la MERF a la que lleguemos tendrá una fila nula y por lo tanto el sistema tendrá infinitas soluciones, recordar el Teorema 2.4.2.

Por ejemplo, si $d = 0$ esto es claro pues la matriz sería

$$\begin{pmatrix} a & * & * & * \\ 0 & b & * & * \\ 0 & 0 & c & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Si $c = 0$ y $d \neq 0$, entonces la matriz es

$$\begin{pmatrix} a & * & * & * \\ 0 & b & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & d \end{pmatrix}.$$

Luego, podemos multiplicar por d^{-1} la última fila y luego anular la entrada por arriba del 1 que nos quede y así obtener la matriz

$$\begin{pmatrix} a & * & * & * \\ 0 & b & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Un razonamiento similar podríamos hacer con las demás posibilidades.

Moraleja: para saber si un sistema homogéneo tiene una o infinitas soluciones no es necesario reducir la matriz hasta llegar a una MERF basta con llegar a una triangular superior. Pero para calcular de forma paramétrica el conjunto de soluciones si es necesario llegar a una MERF.

□

(10) Suponga que tiene que resolver un sistema de ecuaciones lineales y que tras hacer algunas operaciones elementales por fila a la matriz ampliada obtiene

una matriz con la siguiente forma

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a & * & * & * & * \\ 0 & b & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 & d & * \end{array}\right)$$

donde $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ y $*$ son algunos números reales. ¿Qué conclusiones puede inferir acerca del conjunto de soluciones a partir de los valores de a, b, c y d?

Solución: lo primero que podemos notar es que si c es no nulo el sistema no tiene solución. Pues sería equivalente a un sistema cuya ecuación $0 = c$ es falsa.

Asumamos ahora que $c = 0$. Si a, b y d son no nulos, entonces como antes podemos simplificarlos aplicando la operación elemental multiplicar la respectiva fila por a^{-1}, b^{-1} y d^{-1}. Luego intercambiar la tercer y cuarta fila para obtener la matriz

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & * & * & * & * \\ 0 & 1 & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Razonando como en el ejercicio anterior podemos transforma la matriz en una MERF que va a tener una fila nula. Además, este sistema tiene una solución. En efecto, para fijar ideas supongamos que z_1, z_2 y z_3 son las entradas de la última columna de la matriz ampliada entonces $(z_1, z_2, 0, z_3)$ es una solución. Por el Teorema 2.4.2, en este caso el sistema tiene infinitas soluciones.

Hay otros varios casos para analizar de manera similar.

Moraleja: al igual que antes no es necesario llegar a una MERF para saber si el sistema tendrá o no solución, una o infinitas. Pero para calcular de forma paramétrica el conjunto de soluciones si es necesario llegar a una MERF. □

(11) Suponga que tiene que resolver un sistema de m ecuaciones lineales con n incógnitas. Antes de empezar a hacer cuentas y apelando a la teoría, ¿Qué puede afirmar acerca del conjunto de soluciones en base a m y n? ¿Cómo saber si es vacío o no vacío? ¿Si tiene una o varias soluciones?

Solución: no hay una respuesta concluyente a este ejercicio pero nos sirve para pensar un poco y repasar la teoría. Algunos razonamientos que podemos hacer son los siguientes.

Si el sistema tiene menos incógnitas que ecuaciones hay chances de que no tenga solución. En cierto sentido, cada ecuación es una condición para el conjunto de soluciones y entonces podría ser que estemos poniendo demasiadas condiciones y que sean contradictorias entre ellas y así no habría una solución común a todas (ver la página 29 de la Clase 08 Teórica - Sistemas de ecuaciones 3 (17-09-20) del turno mañana).

Si el sistema tiene más incógnitas que ecuaciones y el sistema tiene solución entonces el sistema tiene infinitas soluciones. Esto es porque hay incógnitas que no van a ser 1 principal y entonces serían variables libres (ver la página 35 de la Clase 08 Teórica - Sistemas de ecuaciones 3 (17-09-20) del turno mañana). □

(12) ⓐ Sean $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ y $b_1, \ldots, b_n \in \mathbb{R}$.

a) Para cada $n \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$, plantear un sistema de ecuaciones lineales que le permita encontrar un polinomio $p(x)$ con coeficientes reales de grado $n - 1$ tal que

$$p(\lambda_1) = b_1, \ldots, p(\lambda_n) = b_n.$$

b) ¿Se le ocurre alguna condición con la cual pueda afirmar que el sistema anterior no tiene solución?

c) ¿Puede dar una forma general del sistema para cualquier n?

SOLUCIÓN:

a) En el ejercicio (2) hicimos el caso $n = 3$ para un caso concreto ($p(1) = 2$, $p(2) = 7$ y $p(3) = 14$). Una forma de resolver el problema, basada en lo anterior, es plantear un sistema de ecuaciones donde los coeficientes del polinomio sean la incógnitas. Sea

$$p_n(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots a_{n-1} x^{n-1},$$

entonces, $p_n(\lambda_i) = b_i$ se traduce en la ecuación

$$a_0 + a_1 \lambda_i + a_2 \lambda_i^2 + \cdots a_{n-1} \lambda_i^{n-1} = b_i.$$

Las matrices ampliadas de los sistemas de ecuaciones para $n = 4$ y $n = 5$, son

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & \lambda_1 & \lambda_1^2 & \lambda_1^3 & b_1 \\ 1 & \lambda_2 & \lambda_2^2 & \lambda_2^3 & b_2 \\ 1 & \lambda_3 & \lambda_3^2 & \lambda_3^3 & b_3 \\ 1 & \lambda_4 & \lambda_4^2 & \lambda_4^3 & b_4 \end{array}\right], \qquad \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & \lambda_1 & \lambda_1^2 & \lambda_1^3 & \lambda_1^4 & b_1 \\ 1 & \lambda_2 & \lambda_2^2 & \lambda_2^3 & \lambda_2^4 & b_2 \\ 1 & \lambda_3 & \lambda_3^2 & \lambda_3^3 & \lambda_3^4 & b_3 \\ 1 & \lambda_4 & \lambda_4^2 & \lambda_4^3 & \lambda_4^4 & b_4 \\ 1 & \lambda_5 & \lambda_5^2 & \lambda_5^3 & \lambda_5^4 & b_5 \end{array}\right],$$

respectivamente. Para $n = 1, 2, 3$ es claro como son los sistemas.

b) Si sobrentendemos que todos los λ_i son distintos entre si, la respuesta es *no*.

Obviamente si $\lambda_i = \lambda_j$ y $b_i \neq b_j$, entonces $p(\lambda_i) = b_i \neq b_j = p(\lambda_j) = p(\lambda_i)$, es decir llegamos a la conclusión que $p(\lambda_i) \neq p(\lambda_i)$, lo cual es absurdo.

(Veremos más adelante, usando determinantes, que si $\lambda_i \neq \lambda_j$ para $i \neq j$, entonces siempre encontraremos un polinomio que satisfaga las condiciones del ejercicio).

c) No es difícil generalizar *a)* para cualquier n: la matriz ampliada del sistema de ecuaciones correspondiente al caso n es

$$[V|Y] = \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & \lambda_1 & \lambda_1^2 & \cdots & \lambda_1^{n-1} & b_1 \\ 1 & \lambda_2 & \lambda_2^2 & \cdots & \lambda_2^{n-1} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & \lambda_n & \lambda_n^2 & \cdots & \lambda_n^{n-1} & b_n \end{array}\right].$$

(La matriz V es llamada *la matriz de Vandermonde*.) □

PRÁCTICO 3

Soluciones
Álgebra II – Año 2024/1 – FAMAF

(1) Sean

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -2 & 0 & -1 \\ 1 & 3 & 5 \end{bmatrix}, \qquad C = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Verificar que $A(BC) = (AB)C$, es decir que vale la asociatividad del producto.

Solución:

$$BC = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -2 & 0 & -1 \\ 1 & 3 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & -1 & 4 \\ -5 & 2 & -3 \\ 22 & -1 & 9 \end{bmatrix}$$

$$A(BC) = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 9 & -1 & 4 \\ -5 & 2 & -3 \\ 22 & -1 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 19 & -5 & 10 \\ 41 & -6 & 19 \\ -3 & -4 & 1 \end{bmatrix} \qquad (*)$$

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -2 & 0 & -1 \\ 1 & 3 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 4 \\ 6 & 4 & 9 \\ 4 & -2 & -1 \end{bmatrix}$$

$$(AB)C = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 4 \\ 6 & 4 & 9 \\ 4 & -2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 19 & -5 & 10 \\ 41 & -6 & 19 \\ -3 & -4 & 1 \end{bmatrix} \qquad (**)$$

Luego (*) = (**) y el resultado queda verificado. □

(2) Determinar cuál de las siguientes matrices es A, cuál es B y cuál es C de modo tal que sea posible realizar el producto ABC y verificar que $A(BC) = (AB)C$.

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Solución: la primera matriz es 2×3, la segunda es 3×1 y la tercera es 1×2. Entonces, podemos multiplicar la 1º por la 2º y queda una matrix 2×1 que es posible multiplicar por la 3º matriz, que es 1×2, y así obtenemos una matriz

2×2. Es decir,

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \qquad C = \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Ahora bien,

$$BC = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -3 \\ 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A(BC) = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -3 \\ 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -4 \\ 4 & -4 \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

$$(AB)C = \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -4 \\ 4 & -4 \end{bmatrix}.$$

□

(3) Calcular A^2 y A^3 para la matriz $A = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 6 & 8 \end{bmatrix}$.

Solución:

$$A^2 = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 6 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 6 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 33 & 44 \\ 66 & 88 \end{bmatrix} = 11 \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 6 & 8 \end{bmatrix} = 11A$$

$$A^3 = A \cdot A^2 = A \cdot 11A = 11A^2 = 11^2 A.$$

Observación. Este es un caso muy particular. En el caso de una matriz escalar $c\,\mathrm{Id}$, tenemos que $(c\,\mathrm{Id})^n = c^n\,\mathrm{Id}$. Aquí tenemos una matriz A tal que $A^n = 11^{n-1}A$.

□

(4) Dar ejemplos de matrices no nulas A y B de orden 2×2 tales que

a) $A^2 = 0$ (dar dos ejemplos).

b) $AB \neq BA$.

c) $A^2 = -\mathrm{Id}_2$.

d) $A^2 = A \neq \mathrm{Id}_2$.

Solución:

a)

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

b)

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

$$AB = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$BA = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

c)

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \Rightarrow \qquad A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

d)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

□

(5) Sea $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ tal que $AB = BA$ para toda $B \in \mathbb{R}^{2\times 2}$. Probar que A es un múltiplo de Id_2.

Solución: Sea

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix},$$

y sean

$$E_{11} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad E_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad E_{21} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad E_{22} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Entonces

$$AE_{11} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 \\ a_{21} & 0 \end{bmatrix},$$

$$E_{11}A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Como $AE_{11} = E_{11}A$, tenemos que $a_{12} = a_{21} = 0$.

Probemos ahora con E_{12}:

$$AE_{12} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & a_{11} \\ 0 & a_{21} \end{bmatrix},$$

$$E_{12}A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{21} & a_{22} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Como $AE_{12} = E_{12}A$, tenemos que $a_{11} = a_{22}$.

Ya no hace falta hacer más ensayos, pues hemos probado que $a_{12} = a_{21} = 0$ y $a_{11} = a_{22}$, es decir A es una matriz escalar y al ser escalar sabemos que conmuta con todas las matrices.

Observación. El resultado es cierto también para matrices $n\times n$ con $n \in \mathbb{N}$. Es decir, si $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ tal que $AB = BA$ para toda $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$, entonces A es un múltiplo de Id_n. La estrategia para probar este resultado es la misma que para el caso 2×2: probar con las matrices E_{ij} que son aquellas que tiene un 1 en la entrada ij y 0 en las demás entradas.

$\square$

(6) Para cada $n \in \mathbb{N}$, con $n \geq 2$, hallar una matriz no nula $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ tal que $A^n = 0$ pero $A^{n-1} \neq 0$.

Solución: las matrices triangulares estrictas, superiores o inferiores, satisfacen la propiedad de que $A^n = 0$ y muchas de ellas satisfacen que $A^{n-1} \neq 0$. Probemos con una matriz triangular superior estricta particular

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e_2 \\ e_3 \\ e_4 \\ \vdots \\ e_n \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} | & | & | & & | \\ 0 & e_1 & e_2 & \cdots & e_{n-1} \\ | & | & | & & | \end{bmatrix}$$

Es decir A es una matriz $n \times n$ con 1 encima de la diagonal y 0 en todas las demás entradas. Más formalmente: $[A]_{i,i+1} = 1$ y $[A]_{i,j} = 0$ si $j \neq i + 1$.

Probaremos por inducción que para $k < n$, $[A^k]_{i,i+k} = 1$ y $[A]_{i,j} = 0$ si $j \neq i + k$. Es decir,

$$A^k = \begin{bmatrix} | & \cdots & | & | & | & & | \\ 0 & \cdots & 0 & e_1 & e_2 & \cdots & e_{n-k} \\ | & \cdots & | & | & | & & | \end{bmatrix},$$

donde e_1 está en la columna $k + 1$.

Si $k = 1$ el resultado vale por definición de A. Supongamos que el resultado es cierto para $k - 1$, luego

$$A^{k-1} = \begin{bmatrix} | & \cdots & | & | & | & & | \\ 0 & \cdots & 0 & e_1 & e_2 & \cdots & e_{n-k+1} \\ | & \cdots & | & | & | & & | \end{bmatrix}, \qquad \text{(HI)}$$

donde e_1 está en la columna k. Por lo tanto,

$$A \cdot A^{k-1} = \begin{bmatrix} e_2 \\ e_3 \\ e_4 \\ \vdots \\ e_n \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} | & \cdots & | & | & | & & | \\ 0 & \cdots & 0 & e_1 & e_2 & \cdots & e_{n-k+1} \\ | & \cdots & | & | & | & & | \end{bmatrix},$$

Como $[A \cdot A^{k-1}]_{ij} = F_i(A) \cdot C_j(A^{k-1})$ (donde $\cdot$ indica el producto escalar), los únicos productos no nulos son $F_1(A) \cdot C_{k+1}(A^{k-1}) = 1$, $F_2(A) \cdot C_{k+2}(A^{k-1}) = 1$, $F_3(A) \cdot C_{k+3}(A^{k-1}) = 1$, etc. Es decir, las entradas de A^k valen 1 en $(1, k+1)$, $(2, k+2)$, $(3, k+3)$, etc. lo cual prueba el resultado.

Probado esto, tenemos $A^{n-1} = [0 \ \cdots \ 0 \ e_1] \neq 0$ y $A^n = A \cdot A^{n-1} = 0$.

□

(7) Dar condiciones necesarias y suficientes sobre matrices A y B de tamaño $n \times n$ para que

a) $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$. *b)* $A^2 - B^2 = (A-B)(A+B)$.

Solución:

a) Como

$$(A+B)^2 = (A+B)(A+B) = AA + AB + BA + BB = A^2 + AB + BA + B^2 \quad \text{y}$$
$$A^2 + 2AB + B^2 = A^2 + AB + AB + B^2,$$

tenemos que

$$\begin{aligned} (A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2 \quad &\Leftrightarrow \quad A^2 + AB + BA + B^2 = A^2 + AB + AB + B^2 \\ &\Leftrightarrow \quad AB + BA = AB + AB \\ &\Leftrightarrow \quad BA = AB. \end{aligned}$$

b) Como

$$A^2 - B^2 = AA - BB \qquad \text{y}$$
$$(A-B)(A+B) = AA + AB - BA - BB,$$

tenemos que

$$\begin{aligned} A^2 - B^2 = (A-B)(A+B) \quad &\Leftrightarrow \quad AA - BB = AA + AB - BA - BB \\ &\Leftrightarrow \quad 0 = AB - BA \\ &\Leftrightarrow \quad BA = AB. \end{aligned}$$

□

(8) Sean

$$v = \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times 1} \quad \text{y} \quad A = \begin{bmatrix} | & | & & | \\ C_1 & C_2 & \cdots & C_n \\ | & | & & | \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{m\times n},$$

es decir, $C_1, \ldots, C_n$ denotan las columnas de A. Probar que $Av = \sum_{j=1}^n v_j C_j$.

Solución: sea

$$C_j = \begin{bmatrix} c_{1j} \\ c_{2j} \\ \vdots \\ c_{mj} \end{bmatrix}, \quad \text{para } 1 \le j \le n.$$

Av es una matriz $m \times 1$ cuya coordenada $i, 1$ es $[Av]_{i1} = F_i(C) \cdot v$ donde $\cdot$ es el producto escalar. Es decir

$$[Av]_{i1} = \sum_{j=1}^n c_{ij} v_j, \qquad (1 \le i \le m).$$

Por lo tanto

$$Av = \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^n c_{1j} v_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^n c_{ij} v_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^n c_{mj} v_j \end{bmatrix} = \sum_{j=1}^n \begin{bmatrix} c_{1j} v_j \\ \vdots \\ c_{ij} v_j \\ \vdots \\ c_{mj} v_j \end{bmatrix} = \sum_{j=1}^n v_j \begin{bmatrix} c_{1j} \\ \vdots \\ c_{ij} \\ \vdots \\ c_{mj} \end{bmatrix} = \sum_{j=1}^n v_j C_j.$$

□

(9) Si A es una matriz cuadrada $n \times n$, se define la *traza* de A como $\operatorname{Tr}(A) = \sum_{i=1}^n a_{ii}$.

a) Calcular la traza de las matrices del ejercicio (10).

b) Probar que si $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ y $c \in \mathbb{R}$ entonces

$$\operatorname{Tr}(A + cB) = \operatorname{Tr}(A) + c\operatorname{Tr}(B) \quad \text{y} \quad \operatorname{Tr}(AB) = \operatorname{Tr}(BA).$$

Solución:

a)

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 0 \end{bmatrix} \qquad \Rightarrow \qquad \operatorname{Tr}(A) = 3 + 1 + 0 = 4,$$

$$B = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 4 \\ 1 & 3 & 8 \\ 1 & 2 & 5 \end{bmatrix} \qquad \Rightarrow \qquad \operatorname{Tr}(B) = \ -1 + 3 + 5 = 7,$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & -3 & 3 & -8 \\ -2 & 1 & 2 & -2 \\ 1 & 2 & 1 & 4 \end{bmatrix} \qquad \Rightarrow \qquad \operatorname{Tr}(C) = 1 + (-3) + 2 + 4 = 4,$$

$$D = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 5 \\ 2 & -3 & 1 \\ 0 & -1 & 3 \end{bmatrix} \qquad \Rightarrow \qquad \operatorname{Tr}(D) = 1 + (-3) + 3 = 1.$$

b) Sea $A = [a_{ij}]$ y $B = [b_{ij}]$, entonces

$$\begin{aligned} \operatorname{Tr}(A + cB) &= \sum_{i=1}^{n} [A + cB]_{ii} \\ &= \sum_{i=1}^{n} (a_{ii} + cb_{ii}) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} + c \sum_{i=1}^{n} b_{ii} \\ &= \operatorname{Tr}(A) + c \operatorname{Tr}(B) \end{aligned}$$

Veamos la segunda afirmación de (b):

$$\begin{aligned} \operatorname{Tr}(AB) &= \sum_{i=1}^{n} [AB]_{ii} = \sum_{i=1}^{n} (\sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{ji}) \\ &= \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} b_{ji} = \sum_{j=1}^{n} (\sum_{i=1}^{n} a_{ij} b_{ji}) \\ &= \sum_{j=1}^{n} (\sum_{i=1}^{n} b_{ji} a_{ij}) = \sum_{j=1}^{n} [BA]_{jj} \\ &= \operatorname{Tr}(BA). \end{aligned}$$

□

(10) Para cada una de las siguientes matrices, usar operaciones elementales por fila para decidir si son invertibles y hallar la matriz inversa cuando sea posible.

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} -1 & -1 & 4 \\ 1 & 3 & 8 \\ 1 & 2 & 5 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & -3 & 3 & -8 \\ -2 & 1 & 2 & -2 \\ 1 & 2 & 1 & 4 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 1 & -3 & 5 \\ 2 & -3 & 1 \\ 0 & -1 & 3 \end{bmatrix}.$$

(para que hagan menos cuentas: las matrices 3×3 aparecieron en el Práctico 2).

Solución:

$$[A|\operatorname{Id}] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 3 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{F_1 \leftrightarrow F_3} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -3 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[F_3 - 3F_1]{F_2 - 2F_1} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -3 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 7 & 1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 8 & 2 & 1 & 0 & -3 \end{array}\right] \xrightarrow{F_3 - F_2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -3 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 7 & 1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{F_3 \leftrightarrow F_2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -3 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 7 & 1 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right] \xrightarrow[F_3 - 7F_2]{F_1 + 3F_2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3 & 3 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -6 & -7 & 8 & 5 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{F_3(-\frac{1}{6})} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3 & 3 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 7/6 & -4/3 & -5/6 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[F_2 - F_3]{F_1 - 3F_3} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1/2 & 1 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 & -1/6 & 1/3 & -1/6 \\ 0 & 0 & 1 & 7/6 & -4/3 & -5/6 \end{array}\right]$$

Luego

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 0 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} -1/2 & 1 & 1/2 \\ -1/6 & 1/3 & -1/6 \\ 7/6 & -4/3 & -5/6 \end{bmatrix}.$$

Siguiendo un procedimiento análogo al anterior se obtiene

$$\begin{bmatrix} -1 & -1 & 4 \\ 1 & 3 & 8 \\ 1 & 2 & 5 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1/6 & -13/6 & 10/3 \\ -1/2 & 3/2 & -2 \\ 1/6 & -1/6 & 1/3 \end{bmatrix}.$$

La tercera matriz tiene una MERF con una fila nula. Por lo tanto no es invertible:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & -3 & 3 & -8 \\ -2 & 1 & 2 & -2 \\ 1 & 2 & 1 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow[F_4-F_1]{\substack{F_2-F_1\\F_3+2F_1}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -4 & 2 & -10 \\ 0 & 3 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow[F_3-3F_1]{\substack{F_1-F_4\\F_2+4F_4}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 4 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[F_3/4]{F_2/2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow[F_2-F_3]{F_1-F_3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{F_2\leftrightarrow F_4} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Finalmente, la última matriz tiene una MERF con una fila nula. Por lo tanto no es invertible:

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & 5 \\ 2 & -3 & 1 \\ 0 & -1 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{F_2-2F_1} \begin{bmatrix} 1 & -3 & 5 \\ 0 & 3 & -9 \\ 0 & -1 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow[F_2+3F_3]{F_1-3F_3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{-F_3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 \end{bmatrix} \xrightarrow{F_2\leftrightarrow F_3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

□

(11) Sea A la primera matriz del ejercicio anterior. Hallar matrices elementales $E_1, E_2, \ldots, E_k$ tales que $E_k E_{k-1} \cdots E_2 E_1 A = \mathrm{Id}_3$.

Solución: en la primera matriz del ejercicio (10) realizamos 10 operaciones elementales de fila para llevar la matriz a la identidad. Si llamamos a la matriz A, entonces

$$\mathrm{Id}_3 = E_{10}E_9E_8E_7E_6E_5E_4E_3E_2E_1A,$$

Donde

$$E_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \ (F_1 \leftrightarrow F_3), \qquad E_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \ (F_2 - 2F_1),$$

$$E_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \ (F_3 - 3F_1), \qquad E_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \ (F_3 - F_2),$$

$$E_5 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \ (F_3 \leftrightarrow F_2), \qquad E_6 = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \ (F_1 + 3F_2),$$

$$E_7 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -7 & 1 \end{bmatrix} \; (F_3 - 7F_2), \qquad E_8 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1/6 \end{bmatrix} \; (-(1/6)F_3),$$
$$E_9 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \; (F_1 - 3F_3), \qquad E_{10} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \; (F_2 - F_3)$$

□

(12) ¿Es cierto que si A y B son matrices invertibles entonces $A + B$ es una matriz invertible? Justificar su respuesta.

Solución: es falso, el ejemplo más sencillo es $\mathrm{Id} + (-\mathrm{Id}) = 0$. Otro ejemplo,
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

□

(13) Una matriz $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ se dice *nilpotente* si $A^k = 0$ para algún $k \in \mathbb{N}$. Probar que si una matriz A es nilpotente, entonces $\mathrm{Id}_n - A$ es invertible.

Solución: supongamos que $A^k = 0$ para algún $k \in \mathbb{N}$, y probemos que:
$$(\mathrm{Id}_n - A)^{-1} = \mathrm{Id}_n + A + A^2 + \cdots + A^{k-1} = \sum_{i=0}^{k-1} A^i.$$

En efecto,
$$\begin{aligned}
&(\mathrm{Id}_n - A)(\mathrm{Id}_n + A + A^2 + \cdots + A^{k-1}) \\
&= \mathrm{Id}_n(\mathrm{Id}_n + A + A^2 + \cdots + A^{k-1}) - A(\mathrm{Id}_n + A + A^2 + \cdots + A^{k-1}) \\
&= (\mathrm{Id}_n + A + A^2 + \cdots + A^{k-1}) - (A + A^2 + A^3 + \cdots + A^k) \\
&= \mathrm{Id}_n - A^k = \mathrm{Id}_n - 0 = \mathrm{Id}_n .
\end{aligned}$$

□

(14) Sean v y w dos soluciones del sistema homogéneo $AX = 0$. Probar que $v + tw$ también es solución para todo $t \in \mathbb{K}$.

Solución: como v, w soluciones de $AX = 0$, tenemos que $Av = 0$ y $Aw = 0$. Luego, por las propiedades que cumple el producto y suma de matrices:
$$A(v + tw) = Av + A(tw) = 0 + t(Aw) = 0 + 0 = 0.$$

Es decir, $v + tw$ es solución de $AX = 0$. □

(15) Sea v una solución del sistema $AX = Y$ y w una solución del sistema homogéneo $AX = 0$. Probar que $v + tw$ también es solución del sistema $AX = Y$ para todo $t \in \mathbb{K}$.

Solución: como v solución de $AX = Y$, tenemos que $Av = Y$. Al ser w solución del sistema $AX = 0$, se cumple $Aw = 0$. Luego, por las propiedades que cumple el producto y suma de matrices:

$$A(v + tw) = Av + A(tw) = Y + t(Aw) = Y + 0 = Y.$$

Es decir, $v + tw$ es solución de $AX = Y$. □

(16) Probar que si el sistema homogéneo $AX = 0$ posee alguna solución no trivial, entonces el sistema $AX = Y$ no tiene solución o tiene al menos dos soluciones distintas.

Solución: si $AX = Y$ no tiene solución, listo, pues es uno de los casos. Si $AX = Y$ tiene solución, sea entonces w alguna solución del sistema, es decir $Aw = Y$. Por hipótesis $AX = 0$ tiene soluciones no triviales, es decir existe $v \neq 0$ tal que $Av = 0$. Por el ejercicio (15): $v + w$ es solución del sistema $AX = Y$, como $v \neq 0$, los vectores w y $v+w$ son distintos y ambos son solución del sistema $AX = Y$.

Observación. En realidad, la existencia de una solución w del sistema $AX = Y$ implica la existencia de infinitas soluciones, pues por ejercicio (15) los vectores $w + tv$ son soluciones de $AX = Y$ para todo $t \in \mathbb{K}$.

□

(17) Supongamos que los sistemas $AX = Y$ y $AX = Z$ tienen solución. Probar que el sistema $AX = Y + tZ$ también tiene solución para todo $t \in \mathbb{K}$.

Solución: sea v solución de $AX = Y$, es decir $Av = Y$ y sea w solución del sistema $AX = Z$, es decir $Aw = Z$. Entonces, dado $t \in \mathbb{K}$

$$A(v + tw) = Av + Atw = Y + tAw = Y + tZ.$$

Es decir $v + tw$ es solución de $AX = Y + tZ$.

□

(18) Sean A una matriz invertible $n \times n$, y B una matriz $n \times m$. Probar que los sistemas $BX = Y$ y $ABX = AY$ tienen las mismas soluciones.

Solución:

$$\begin{aligned} &v \text{ es sol. de } BX = Y \\ &\qquad \Rightarrow\ Bv = Y \\ &\qquad \Rightarrow\ ABv = AY && \text{(mult. por } A \text{ a izq.)} \\ &\qquad \Rightarrow\ v \text{ es sol. de } ABX = AY \end{aligned}$$

Esta "ida" vale para cualquier matriz A, sea invertible o no. Para la vuelta debemos utilizar la existencia de A^{-1}:

$$
\begin{aligned}
&v \text{ es sol. de } ABX = AY \\
&\quad\Rightarrow\ ABv = AY \\
&\quad\Rightarrow\ A^{-1}ABv = A^{-1}AY && (\text{mult. por } A^{-1} \text{ a izq.}) \\
&\quad\Rightarrow\ \mathrm{Id}\, Bv = \mathrm{Id}\, Y && (\ A^{-1}A = \mathrm{Id}) \\
&\quad\Rightarrow\ Bv = Y && (\mathrm{Id} \text{ es neutro del prod.}) \\
&\quad\Rightarrow\ v \text{ es sol. de } BX = Y
\end{aligned}
$$

□

(19) Sean A y B matrices $r \times n$ y $n \times m$ respectivamente. Probar que:

a) Si $m > n$, entonces el sistema $ABX = 0$ tiene soluciones no triviales.

b) Si $r > n$, entonces existe un Y, $r \times 1$, tal que $ABX = Y$ no tiene solución.

Solución:

a) Como $m > n$ el sistema $BX = 0$ tiene más incógnitas que ecuaciones, por lo tanto tiene soluciones no triviales. Sea $v \neq 0$ solución de $BX = 0$, es decir $Bv = 0$. Entonces $ABv = A(Bv) = A0 = 0$, por lo tanto v es solución del sistema $ABX = 0$.

b) Sea P matriz $r \times r$ invertible tal que PA es MERF. Como $r > n$, la matriz PA tiene más filas que columnas y como es MERF la última fila debe ser nula.

Ahora bien, por el ejercicio (18), los sistemas $PABX = PY$ y $ABX = Y$ tiene las mismas soluciones, por lo tanto si existe Y tal que $PABX = PY$ no tiene solución, entonces el sistema $ABX = Y$ tampoco tiene solución.

Demostremos, entonces, que existe Y tal que $PABX = PY$ no tiene solución: como PA tiene la última fila nula, $PABX$ también tiene la última fila nula. Sea e_r la matriz $r \times 1$ con 1 en la coordenada r y 0 en las otras coordenadas. Entonces $e_r = P(P^{-1}e_r)$ tiene la última fila no nula, por lo tanto el sistema $PABX = P(P^{-1}e_r)$ no tiene solución y, por lo dicho anteriormente, el sistema $ABX = P^{-1}e_r$ no tiene solución. □

PRÁCTICO 4

Soluciones
Álgebra II – Año 2024/1 – FAMAF

(1) Calcular el determinante de las siguientes matrices.

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 7 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} -3 & 2 & 4 \\ 1 & -1 & 2 \\ -1 & 4 & 0 \end{bmatrix}, \qquad C = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 5 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 5 \end{bmatrix}.$$

Solución:

$$|A| = 4 \cdot 3 - 7 \cdot 5 = -23,$$

$$\begin{aligned} |B| &= -3 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} \\ &= -3 \cdot (-8) - 1 \cdot (-16) - 1 \cdot 8 \\ &= 24 + 16 - 8 = 32, \end{aligned}$$

$$|C| = 2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 5 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 5 \end{vmatrix} - 0 \cdot |C(2|1)| + 0 \cdot |C(3|1)| - 1 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 5 & 1 & 1 \end{vmatrix} \qquad (*)$$

Debemos ahora calcular el determinante de las matrices 3×3 que aparecen en la expresión de $|C|$.

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 5 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 5 \end{vmatrix} &= 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} - 5 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \\ &= 2 \cdot 3 - 5 \cdot (-11) + 1 \cdot (-4) = 57, \\ \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 5 & 1 & 1 \end{vmatrix} &= 3 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + 5 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} \\ &= 3 \cdot (-4) - 2 \cdot 0 + 5 \cdot 4 = -12 + 20 = 8. \end{aligned}$$

Luego, por (*):

$$|C| = 2 \cdot 57 - 1 \cdot 8 = 106.$$

□

(2) Sean

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 3 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Calcular:

a) $\det(AB)$.
b) $\det(BA)$.
c) $\det(A^{-1})$.
d) $\det(A^4)$.
e) $\det(A+B)$.
f) $\det(A+tB)$, con $t \in \mathbb{R}$.

Solución:

Primero nos conviene calcular los determinantes de A y B, pues algunos cálculos se reducen a saber estos números.

$$\begin{aligned}\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 3 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} &= 1 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - 3 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} \\ &= 1 \cdot (-2) - 3 \cdot 1 + 1 \cdot 6 = 1, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\det(B) = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 3 \end{vmatrix} &= 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \\ &= 1 \cdot 4 - 1 \cdot (-1) - 1 \cdot (-3) = 8. \end{aligned}$$

Resumiendo $\det(A) = 1$ y $\det(B) = 8$. Ahora sí, calculemos los determinantes pedidos.

a) $\det(AB) = \det(A)\det(B) = 1 \cdot 8 = 8$.

b) $\det(BA) = \det(B)\det(A) = 8 \cdot 1 = 8$.

c) $\det(A^{-1}) = 1/\det(A) = 1/1 = 1$.

d) $\det(A^4) = \det(A)^4 = 1^4 = 1$.

f) El ejercicio *e)* es un caso especial de *f)* para $t = 1$. Así que haremos este inciso primero. Para ello, antes que nada, calculemos la matriz $A + tB$:

$$A + tB = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 3 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+t & 3-t & 2+2t \\ 3+t & t & 2+t \\ 1-t & 1-t & 1+3t \end{bmatrix}.$$

Entonces

$$\begin{vmatrix} 1+t & 3-t & 2+2t \\ 3+t & t & 2+t \\ 1-t & 1-t & 1+3t \end{vmatrix} =$$

$$
\begin{aligned}
&= (1+t)\cdot\begin{vmatrix} t & 2+t \\ 1-t & 1+3t \end{vmatrix} - (3+t)\cdot\begin{vmatrix} 3-t & 2+2t \\ 1-t & 1+3t \end{vmatrix} \\
&\qquad\qquad\qquad + (1-t)\cdot\begin{vmatrix} 3-t & 2+2t \\ t & 2+t \end{vmatrix} \\
&= (1+t)\cdot(t(1+3t)-(2+t)(1-t)) - \\
&\quad -(3+t)\cdot((3-t)(1+3t)-(2+2t)(1-t)) + \\
&\quad +(1-t)\cdot((3-t)(2+t)-(2+2t)t) \\
&= (1+t)\cdot(4t^2+2t-2) + \\
&\quad -(3+t)\cdot(-t^2+8t+1) + \\
&\quad +(1-t)\cdot(-3t^2-t+6) \\
&= (4t^3+6t^2-2)+(t^3-5t^2-25t-3)+(3t^3-2t^2-7t+6) \\
&= 8t^3-t^2-32t+1
\end{aligned}
$$

e) $\det(A+B) = \det(a+1\cdot B) \overset{f)}{=} 8\cdot 1^3 - 1^2 - 32\cdot 1 + 1 = -24.$

□

(3) Calcular el determinante de las siguientes matrices haciendo la reducción a matrices triangulares superiores.

$$
A = \begin{bmatrix} a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & 1 & a \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 3 & 3 & 3 \\ 1 & 3 & 5 & 5 & 5 \\ 1 & 3 & 5 & 7 & 7 \\ 1 & 3 & 5 & 7 & 9 \end{bmatrix}.
$$

Solución: Recordemos que si M es una matriz triangular superior, entonces $\det(M)$ es el producto de los elementos de la diagonal principal. Por otro lado, las operaciones elementales por fila necesarias para obtener una matriz triangular superior tienen el siguiente efecto en el cálculo del determinante:

- intercambiar dos filas cambia el signo del determinante, y
- sumar a una fila un múltiplo de otra fila no cambia el determinante.

La operación elemental de multiplicar una fila por una constante no es necesaria para conseguir una matriz triangular superior.

Cálculo de $\det(A)$**.** Un caso particular es cuando $a = 1$, en ese caso la matriz tiene todas las filas iguales y por lo tanto $\det(A) = 0$.

Analicemos el caso $a \neq 1$.

Veamos como reducimos A a triangular superior:

$$A \xrightarrow[\substack{F_3-F_2\\F_4-F_2}]{F_1-aF_2} \begin{bmatrix} 0 & 1-a^2 & 1-a & 1-a \\ 1 & a & 1 & 1 \\ 0 & 1-a & a-1 & 0 \\ 0 & 1-a & 0 & a-1 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{F_1\leftrightarrow F_4} \begin{bmatrix} 0 & 1-a & 0 & a-1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ 0 & 1-a & a-1 & 0 \\ 0 & 1-a^2 & 1-a & 1-a \end{bmatrix} \xrightarrow{F_1\leftrightarrow F_2} \begin{bmatrix} 1 & a & 1 & 1 \\ 0 & 1-a & 0 & a-1 \\ 0 & 1-a & a-1 & 0 \\ 0 & 1-a^2 & 1-a & 1-a \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[F_4-(1+a)F_2]{F_3-F_2} \begin{bmatrix} 1 & a & 1 & 1 \\ 0 & 1-a & 0 & a-1 \\ 0 & 0 & a-1 & 1-a \\ 0 & 0 & 1-a & 2-a-a^2 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{F_4+F_3} \begin{bmatrix} 1 & a & 1 & 1 \\ 0 & 1-a & 0 & a-1 \\ 0 & 0 & a-1 & 1-a \\ 0 & 0 & 0 & 3-2a-a^2 \end{bmatrix}$$

Como hicimos dos permutaciones de filas, el determinante de A es igual al determinante de la última matriz, es decir

$$\det(A) = (1-a)(a-1)(3-2a-a^2) = a^4 - 6a^2 + 8a - 3.$$

Cálculo de $\det(B)$.

$$B \xrightarrow[\substack{F_2-F_1\\F_3-F_1\\F_4-F_1\\F_5-F_1}]{} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 4 & 4 & 4 \\ 0 & 2 & 4 & 6 & 6 \\ 0 & 2 & 4 & 6 & 8 \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{F_3-F_2\\F_4-F_2\\F_5-F_2}]{} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & 6 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[\substack{F_4-F_3\\F_5-F_3}]{} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow[F_5-F_4]{} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

El determinante de B es igual al determinante de la última matriz, es decir:

$$\det(B) = 2^4 = 16.$$

□

(4) Sean A, B y C matrices $n \times n$, tales que $\det A = -1$, $\det B = 2$ y $\det C = 3$. Calcular:

a) $\det(PQR)$, donde P, Q y R son las matrices que se obtienen a partir de A, B y C mediante operaciones elementales por filas de la siguiente manera

$$A \xrightarrow{F_1+2F_2} P, \quad B \xrightarrow{3F_3} Q \quad \text{y} \quad C \xrightarrow{F_1 \leftrightarrow F_4} R.$$

Es decir,

- P se obtiene a partir de A sumando a la fila 1 la fila 2 multiplicada por 2.
- Q se obtiene a partir de B multiplicando la fila 3 por 3.
- R se obtiene a partir de C intercambiando las filas 1 y 4.

b) $\det(A^2BC^tB^{-1})$ y $\det(B^2C^{-1}AB^{-1}C^t)$.

Solución:

a) La matriz P se obtiene de A sumando a la fila 1 la fila 2 multiplicada por 2. Esta operación elemental no cambia el determinante, luego $\det(P) = \det(A) = -1$. La matriz Q se obtiene de B multiplicando la fila 3 por 3, luego $\det(Q) = 3 \cdot \det(B) = 6$. La matriz R se obtiene de C intercambiando las filas 1 y 4, luego $\det(R) = -\det(C) = -3$.

b)

$$\begin{aligned}\det(A^2BC^tB^{-1}) &= \det(A^2)\det(B)\det(C^t)\det(B^{-1})\\ &= \det(A)^2\det(B)\det(C)\det(B)^{-1}\\ &= (-1)^2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 1/2\\ &= 3.\end{aligned}$$

□

(5) Sea

$$A = \begin{bmatrix} x & y & z \\ 3 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Sabiendo que $\det(A) = 5$, calcular el determinante de las siguientes matrices.

$$B = \begin{bmatrix} 2x & 2y & 2z \\ 3/2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \qquad C = \begin{bmatrix} x & y & z \\ 3x+3 & 3y & 3z+2 \\ x+1 & y+1 & z+1 \end{bmatrix}.$$

Solución: $A \xrightarrow[F_2/2]{2F_1} B$, luego $\det(B) = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \det(A) = \det(A) = 5$.

$A \xrightarrow[F_3+F_1]{F_2+3F_1} C$, luego $\det(C) = \det(A) = 5$. □

(6) Determinar todos los valores de $c \in \mathbb{R}$ tales que las siguientes matrices sean invertibles.

$$A = \begin{bmatrix} 4 & c & 3 \\ c & 2 & c \\ 5 & c & 4 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & c & -1 \\ c & 1 & 1 \\ 0 & 1 & c \end{bmatrix}.$$

Solución: recordar que una matriz es invertible si y solo si su determinante es no nulo. Luego, debemos calcular el determinante de A y B y ver para qué valores de c son distintos de cero.

Para el cálculo del determinante desarrollamos por la primera fila.

$$\begin{aligned} \det(A) &= 4 \cdot \begin{vmatrix} 2 & c \\ c & 4 \end{vmatrix} - c \cdot \begin{vmatrix} c & c \\ 5 & 4 \end{vmatrix} + 3 \cdot \begin{vmatrix} c & 2 \\ 5 & c \end{vmatrix} \\ &= 4 \cdot (8 - c^2) - c \cdot (4c - 5c) + 3 \cdot (c^2 - 10) \\ &= 32 - 4c^2 - 4c^2 + 5c^2 + 3c^2 - 30 \\ &= 2. \end{aligned}$$

Como $\det(A) = 2 \neq 0$ independientemente del valor de c, la matriz A es invertible para todo $c \in \mathbb{R}$.

Para el cálculo del determinante de B desarrollamos por la primera fila.

$$\begin{aligned} \det(B) &= 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & c \end{vmatrix} - c \cdot \begin{vmatrix} c & 1 \\ 0 & c \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} c & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \\ &= 1 \cdot (c - 1) - c \cdot c^2 - 1 \cdot c \\ &= -c^3 - 1. \end{aligned}$$

Luego, $\det(B) = 0$ si y solo si $c^3 = -1$, es decir si y solo si $c = -1$. Por lo tanto, la matriz B es invertible si y solo si $c \neq -1$. □

(7) Calcular el determinante de las siguientes matrices, usando operaciones elementales por fila y/o columnas u otras propiedades del determinante. Determinar cuáles de ellas son invertibles.

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 3 & 2 & -6 \\ 0 & 4 & 4 & -5 \\ 5 & -6 & -3 & 2 \\ -3 & 7 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix},$$

$$C = \begin{bmatrix} -2 & 3 & 2 & -6 & 0 \\ 0 & 4 & 4 & -5 & 0 \\ 5 & -6 & -3 & 2 & 0 \\ -3 & 7 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -13 & 6 & \frac{1}{3} \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 11 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \sqrt{2} & 2 & 1 & \pi & 0 \end{bmatrix},$$

$$E = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 4 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 4 \end{bmatrix}.$$

Solución:

Cálculo de $\det(A)$**.** Calculamos el determinante de A desarrollando por la última fila debido a que tiene dos 0.

$$\begin{aligned} \det(A) &= 3 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 2 & -6 \\ 4 & 4 & -5 \\ -6 & -3 & 2 \end{vmatrix} + 7 \cdot \begin{vmatrix} -2 & 2 & -6 \\ 0 & 4 & -5 \\ 5 & -3 & 2 \end{vmatrix} \\ &= 3 \cdot (-49) + 7 \cdot 84 \\ &= 441. \end{aligned}$$

Como $\det(A) \neq 0$, la matriz A es invertible.

Cálculo de $\det(B)$**.** Permutando la fila 2 con la fila 3 obtenemos una matriz diagonal con $2, 3, -1, 4$ en la diagonal, luego $\det(B) = -(2 \cdot 3 \cdot (-1) \cdot 4) = 24$. Por lo tanto, B es invertible.

Cálculo de $\det(C)$**.** En este caso conviene desarrollar por la última columna debido a que tiene cuatro 0. Entonces

$$\det(C) = 1 \cdot \begin{vmatrix} -2 & 3 & 2 & -6 \\ 0 & 4 & 4 & -5 \\ 5 & -6 & -3 & 2 \\ -3 & 7 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

Observar que la matriz de la derecha es la matriz A del ejercicio anterior. Luego $\det(C) = 1 \cdot 441 = 441$. Por lo tanto, C es invertible.

Cálculo de $\det(D)$**.** Desarrollaremos por la última columna y luego de nuevo por la última columna.

$$\begin{aligned} \det(D) = -\frac{1}{3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 11 & 1 & 0 & 0 \\ \sqrt{2} & 2 & 1 & \pi \end{vmatrix} &= -\frac{1}{3} \cdot \pi \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 0 \\ 11 & 1 & 0 \end{vmatrix} \\ = -\frac{1}{3} \cdot \pi \cdot (-2) \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} &= -\frac{1}{3} \cdot \pi \cdot (-2) \cdot (-3) = -2\pi. \end{aligned}$$

En el renglón anterior desarrollamos por la fila 2. Luego, $\det(D) = -2\pi$. Por lo tanto, D es invertible.

Cálculo de $\det(E)$**.** Para facilitar la escritura escribamos la matriz como una matriz de bloques,

$$E = \begin{bmatrix} E_1 & 0 \\ 0 & E_2 \end{bmatrix},$$

donde E_1 es el primer bloque diagonal 3×3 y E_2 es el segundo bloque diagonal de 2×2.

Desarrollemos por la última columna dos veces

$$\begin{aligned} \det(E) &= (-1) \cdot \begin{vmatrix} E_1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + 4 \cdot \begin{vmatrix} E_1 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} \\ &= (-1) \cdot 1\,|E_1| + 4 \cdot 2 \cdot |E_1| \\ &= ((-1) \cdot 1 + 4 \cdot 2)\,|E_1|\,. \end{aligned}$$

Averigüemos ahora el determinate de E_1. Podríamos hacerlo por cálculo directo, pero lo haremos transformando E_1 en triangular superior por medio de operaciones elementales de fila y luego multiplicando los elementos de la diagonal.

$$E_1 \xrightarrow[F_3-2F_1]{F_2-3F_1} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 4 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{F_2 \leftrightarrow F_3} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow{F_3-4F_2} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -6 \end{bmatrix}.$$

Como hay una permutación de filas tenemos que

$$\det(E_1) = -(1 \cdot 1 \cdot (-6)) = 6.$$

Luego $\det(E) = (4 \cdot 2 - 1) \cdot 6 = 42$. Por lo tanto, E es invertible.

Observación. Notemos que en este ejercicio

$$\det(E) = \det(E_1)\det(E_2),$$

y este es un hecho general: si E es una matriz $n \times n$ de bloques diagonales E_1 y E_2, es decir

$$E = \begin{bmatrix} E_1 & 0 \\ 0 & E_2 \end{bmatrix},$$

entonces

$$\det(E) = \det(E_1)\det(E_2).$$

También vale el resultado para un número arbitrario de bloques diagonales. Dejamos al lector interesado la demostración de este hecho. □

(8) Sean A y B matrices $n \times n$. Probar que:
   a) $\det(AB) = \det(BA)$.
   b) Si B es invertible, entonces $\det(BAB^{-1}) = \det(A)$.
   c) $\det(-A) = (-1)^n \det(A)$.

Solución: en todos los incisos usamos la propiedad de que el determinate del producto de matrices es el producto de los determinantes de cada matriz.

a)

$$\det(AB) = \det(A)\det(B) = \det(B)\det(A) = \det(BA).$$

b) Como $BB^{-1} = \mathrm{Id}$, entonces $\det(B^{-1})\det(B) = \det(\mathrm{Id}) = 1$. Luego, $\det(B^{-1}) = 1/\det(B)$. Por lo tanto,

$$\begin{aligned}\det(BAB^{-1}) &= \det(B)\det(A)\det(B^{-1}) = \det(B)\det(B^{-1})\det(A)\\ &= \det(B)\frac{1}{\det(B)}\det(A) = \det(A).\end{aligned}$$

c) Sea Id es la matriz identidad $n \times n$. Observar que $-A = (-\mathrm{Id})A$. Luego, $\det(-A) = \det((-\mathrm{Id})A) = \det(-\mathrm{Id})\det(A)$. Como $-\mathrm{Id}$ es una matriz diagonal con -1 en la diagonal, entonces $\det(-\mathrm{Id}) = (-1)^n$. Por lo tanto, $\det(-A) = (-1)^n \det(A)$.

□

(9) Sean $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ escalares, la matriz de *Vandermonde* asociada es

$$\mathrm{V}_n = \begin{bmatrix} 1 & \lambda_1 & \lambda_1^2 & \cdots & \lambda_1^{n-1} \\ 1 & \lambda_2 & \lambda_2^2 & \cdots & \lambda_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \lambda_n & \lambda_n^2 & \cdots & \lambda_n^{n-1} \end{bmatrix}.$$

Esta es la matriz del sistema de ecuaciones del ejercicio (12) *c)* del Práctico 2.

a) Si $n = 2$, probar que $\det(\mathrm{V}_n) = \lambda_2 - \lambda_1$.

b) Si $n = 3$, probar que $\det(\mathrm{V}_n) = (\lambda_3 - \lambda_2)(\lambda_3 - \lambda_1)(\lambda_2 - \lambda_1)$.

c) Probar que $\det(\mathrm{V}_n) = \prod_{1 \le i < j \le n}(\lambda_j - \lambda_i)$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

d) Dar una condición necesaria y suficiente para que la matriz de Vandermonde sea invertible.

e) Dados $b_1, \ldots, b_n$ y $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ secuencias de números reales, dar una condición suficiente para que exista un polinomio de grado n, digamos p, tal que

$$p(\lambda_1) = b_1, \ldots, p(\lambda_n) = b_n.$$

(ver ejercicio (12) del Práctico 2).

Solución:

a) En este caso la matriz es 2×2 y por lo tanto es fácil calcular el determinante:

$$\det(\mathrm{V}_2) = \begin{vmatrix} 1 & \lambda_1 \\ 1 & \lambda_2 \end{vmatrix} = \lambda_2 - \lambda_1.$$

b) En este caso la matriz es 3×3 y calcularemos el determinante transformado la matriz por operaciones elementales de columnas y filas. El método que haremos servirá para generalizarlo en el caso *c)*.

$$
\begin{aligned}
\det(\mathrm{V}_3) &= \begin{vmatrix} 1 & \lambda_1 & \lambda_1^2 \\ 1 & \lambda_2 & \lambda_2^2 \\ 1 & \lambda_3 & \lambda_3^2 \end{vmatrix} \\
&\overset{C_3-\lambda_1 C_2}{=} \begin{vmatrix} 1 & \lambda_1 & 0 \\ 1 & \lambda_2 & \lambda_2(\lambda_2-\lambda_1) \\ 1 & \lambda_3 & \lambda_3(\lambda_3-\lambda_1) \end{vmatrix} \\
&\overset{C_2-\lambda_1 C_1}{=} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & \lambda_2-\lambda_1 & \lambda_2(\lambda_2-\lambda_1) \\ 1 & \lambda_3-\lambda_1 & \lambda_3(\lambda_3-\lambda_1) \end{vmatrix} \\
&\overset{\substack{F_2/(\lambda_2-\lambda_1)\\ F_3/(\lambda_3-\lambda_1)}}{=} (\lambda_2-\lambda_1)(\lambda_3-\lambda_1) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & \lambda_2 \\ 1 & 1 & \lambda_3 \end{vmatrix} \\
&=(\lambda_2-\lambda_1)(\lambda_3-\lambda_1) \begin{vmatrix} 1 & \lambda_2 \\ 1 & \lambda_3 \end{vmatrix} \\
&= (\lambda_2-\lambda_1)(\lambda_3-\lambda_1)(\lambda_3-\lambda_2).
\end{aligned}
$$

Para el último cálculo desarrollamos por la primera fila.

Observar que $\det(V_3)$ es $(\lambda_2-\lambda_1)(\lambda_3-\lambda_1)$ por una matriz de Vandermonde de dimensión 2×2. Esto se puede generalizar para calcular el determinante de una matriz de Vandermonde de mayor dimensión, como veremos a continuación.

c) Haremos la demostración por inducción. El caso base es $n = 2$ y en ese caso el resultado vale por *a)*. Supongamos ahora que valga el resultado *c)* para $n-1$.

Fijarse que en el caso anterior *b)* hicimos dos operaciones elementales de columna: $C_3 - \lambda_1 C_2$ y $C_2 - \lambda_1 C_1$, en ese orden. En general, haremos $n-1$ operaciones elementales de columnas de la forma $C_i - \lambda_1 C_{i-1}$, desde $i = n$ hasta $i = 2$, en ese orden, con lo cual obtenemos la matriz

$$
\begin{bmatrix}
1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\
1 & \lambda_2-\lambda_1 & \lambda_2(\lambda_2-\lambda_1) & \dots & \lambda_2^{n-2}(\lambda_2-\lambda_1) \\
1 & \lambda_3-\lambda_1 & \lambda_3(\lambda_3-\lambda_1) & \dots & \lambda_3^{n-2}(\lambda_3-\lambda_1) \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
1 & \lambda_n-\lambda_1 & \lambda_n(\lambda_n-\lambda_1) & \dots & \lambda_n^{n-2}(\lambda_n-\lambda_1)
\end{bmatrix} \tag{*}
$$

Ninguna de las operaciones elementales que hicimos cambia el valor del determinante. Si calculamos el determinante de la matriz (*) desarrollando por la primera fila, obtenemos

$$\left|V_n\right| = \begin{vmatrix} \lambda_2-\lambda_1 & \lambda_2(\lambda_2-\lambda_1) & \dots & \lambda_2^{n-2}(\lambda_2-\lambda_1) \\ \lambda_3-\lambda_1 & \lambda_3(\lambda_3-\lambda_1) & \dots & \lambda_3^{n-2}(\lambda_3-\lambda_1) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda_n-\lambda_1 & \lambda_n(\lambda_n-\lambda_1) & \dots & \lambda_n^{n-2}(\lambda_n-\lambda_1) \end{vmatrix}.. \qquad (^{**})$$

Ahora dividimos la fila i de la matriz de la derecha de (**) por $\lambda_i - \lambda_1$ para $i = 2, \dots, n$ y obtenemos

$$\left|V_n\right| = (\lambda_2-\lambda_1)(\lambda_3-\lambda_1)\dots(\lambda_n-\lambda_1) \begin{vmatrix} 1 & \lambda_2 & \lambda_2^2 & \dots & \lambda_2^{n-2} \\ 1 & \lambda_3 & \lambda_3^2 & \dots & \lambda_3^{n-2} \\ 1 & \lambda_4 & \lambda_4^2 & \dots & \lambda_4^{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \lambda_n & \lambda_n^2 & \dots & \lambda_n^{n-2} \end{vmatrix}. \qquad (^{***})$$

La matriz de la derecha de (***) es una matriz de Vandermonde de dimensión $n-1$ con variables $\lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_n$, y por lo tanto su determinante es, por hipótesis inductiva,

$$\prod_{2\le i<j\le n} (\lambda_j - \lambda_i).$$

En consecuencia,

$$\begin{aligned} \left|V_n\right| &= (\lambda_2-\lambda_1)(\lambda_3-\lambda_1)\dots(\lambda_n-\lambda_1) \prod_{2\le i<j\le n} (\lambda_j - \lambda_i) \\ &= \prod_{1\le i<j\le n} (\lambda_j - \lambda_i). \end{aligned}$$

d) Sabemos que una matriz es invertible si y solo si su determinante es no nulo y que el determinante de una matriz de Vandermonde es el producto de los factores $(\lambda_j - \lambda_i)$ con $i < j$. Por lo tanto, la matriz de Vandermonde es invertible si y solo si $\lambda_j - \lambda_i \neq 0$ para $i < j$. Es decir, si y solo si $\lambda_j \neq \lambda_i$ para $i \neq j$.

e) Dados $b_1, \dots, b_n$ y $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ secuencias de números reales, se plantea se plantea si existe una polinomio de grado n, digamos p, tal que

$$p(\lambda_1) = b_1, \dots, p(\lambda_n) = b_n.$$

Los coeficientes de p son las incógnitas del sistema y la matriz de coeficientes es la matriz de Vandermonde. Por lo tanto, el sistema tiene solución única si la matriz de Vandermonde es invertible, es decir si $\lambda_j \neq \lambda_i$ para $i \neq j$. Por lo tanto, una condición suficiente para que exista el polinomio p es: $\lambda_j \neq \lambda_i$ para $i \neq j$.

Hay otras situaciones donde el sistema tiene solución, pero no es única. Por ejemplo, si $\lambda_1 = \lambda_2$ y $b_1 = b_2$, y $\lambda_j \neq \lambda_i$ para $i \neq j$ para $2 \le i, j \le n$, entonces el sistema tiene infinitas soluciones.

□

(10) Decidir si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justificar con una demostración o con un contraejemplo, según corresponda.

a) Sean A y B matrices $n \times n$. Entonces $\det(A+B) = \det(A) + \det(B)$.

b) Existen una matriz 3×2, A, y una matriz 2×3, B, tales que $\det(AB) \neq 0$.

c) Sea A una matriz $n \times n$. Si A^n es no invertible, entonces A es no invertible.

SOLUCIÓN:

a) Como ya fue visto en la teórica esta afirmación es falsa y un ejemplo sencillo es el siguiente:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

En este caso $\det(A) = \det(B) = 0$ y $\det(A+B) = 1$.

b) Esta afirmación es falsa y la a continuación haremos una demostración de este hecho. Observar que con un contraejemplo no basta, pues debemos demostrar que dadas A matriz 3×2 y B matriz 2×3, *cualesquiera*, entonces que $\det(AB) = 0$.

Haremos operaciones elementales por fila en la matriz A para transformarla en una matriz triangular superior. Como en el caso 3×3 hacer operaciones elementales por fila es equivalente a multiplicar a izquierda por matrices elementales 3×3.

Por lo tanto si A' es una matriz triangular superior obtenida de A por operaciones elementales por fila, entonces $A' = EA$ para alguna matriz E invertible 3×3 donde E es producto de matrices elementales. Como $\det(EAB) = \det(E)\det(AB)$, entonces $\det(EAB) \neq 0$ si y solo si $\det(AB) \neq 0$.

Ahora bien, A' una matriz 3×2 triangular superior tiene la forma

$$A' = \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

por lo tanto

$$A'B = \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x & y & z \\ u & v & w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ax+bu & ay+bv & az+bw \\ 0 & cy & cz \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

La matriz resultante tiene la última fila con todos los coeficientes iguales a 0, por lo tanto $\det(A'B) = 0$, lo cual implica que $\det(AB) = 0$, como queríamos demostrar.

c) Esta afirmación es verdadera. Si A^n es no invertible, entonces $\det(A^n) = 0$. Como $\det(A^n) = \det(A)^n$, entonces $\det(A)^n = 0$ y por lo tantos $\det(A) = 0$. En consecuencia, A es no invertible.

$\square$

PRÁCTICO 5

Soluciones
Álgebra II – Año 2024/1 – FAMAF

(1) Para cada una de las siguientes matrices, hallar sus autovalores reales, y para cada autovalor, dar una descripción paramétrica del autoespacio asociado sobre $\mathbb{R}$.

a) $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$,

b) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$,

c) $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$,

d) $\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -5 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$,

e) $\begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 1 & \lambda & 0 \\ 0 & 1 & \lambda \end{bmatrix}$, $\lambda \in \mathbb{R}$

f) $\begin{bmatrix} \cos\theta & \operatorname{sen}\theta \\ -\operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$, $0 \leq \theta < 2\pi$.

Solución: En todos los casos calculamos el polinomio característico, averiguamos sus raíces y luego resolvemos el sistema de ecuaciones que nos da el autoespacio asociado a cada autovalor.

a) Denominamos A a la matriz del enunciado. El polinomio característico de A es

$$\begin{aligned} \chi_A(x) &= \begin{vmatrix} x-2 & -1 \\ 1 & x-4 \end{vmatrix} \\ &= (x-2)(x-4) - (-1)(1) = x^2 - 6x + 9 \\ &= (x-3)^2. \end{aligned}$$

Luego $\lambda = 3$ es el único autovalor. Para calcular el autoespacio asociado a $\lambda = 3$ resolvemos el sistema $(3\operatorname{Id} - A)v = 0$, es decir

$$\begin{bmatrix} 3-2 & -1 \\ 1 & 3-4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} v_1 - v_2 \\ v_1 - v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow v_1 = v_2.$$

Luego, el único autovalor es $\lambda = 3$ y el autoespacio asociado es $\{(t,t) : t \in \mathbb{R}\}$.

b) Denominamos B a la matriz del enunciado. El polinomio característico de B es

$$\begin{aligned}\chi_B(x) &= \begin{vmatrix} x-1 & 0 \\ -1 & x+2 \end{vmatrix} \\ &= (x-1)(x+2) - (-1)(0) = x^2 + x - 2 \\ &= (x+2)(x-1).\end{aligned}$$

Luego $\lambda_1 = -2$ y $\lambda_2 = 1$ son los autovalores.

Para calcular el autoespacio asociado a $\lambda_1 = -2$ resolvemos el sistema $(-2\,\mathrm{Id} - B)v = 0$, es decir

$$\begin{bmatrix} -2-1 & 0 \\ -1 & -2+2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$
$$\Rightarrow \begin{bmatrix} -3v_1 \\ -v_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow v_1 = 0.$$

Luego, el autovalor $\lambda_1 = -2$ tiene autoespacio asociado $\{(0, t) : t \in \mathbb{R}\}$. Para calcular el autoespacio asociado a $\lambda_2 = 1$ resolvemos el sistema $(\mathrm{Id} - B)v = 0$, es decir

$$\begin{bmatrix} 1-1 & 0 \\ -1 & 1+2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$
$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 0 \\ -v_1 + 3v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow v_1 = 3v_2.$$

Luego, el autovalor $\lambda_2 = 1$ tiene autoespacio asociado $\{(3t, t) : t \in \mathbb{R}\}$.

c) Denominamos C a la matriz del enunciado. El polinomio característico de C es

$$\begin{aligned}\chi_C(x) &= \begin{vmatrix} x-2 & 0 & 0 \\ 1 & x-1 & 1 \\ 0 & 0 & x-2 \end{vmatrix} \\ &= (x-2)^2(x-1).\end{aligned}$$

Luego $\lambda_1 = 2$ y $\lambda_2 = 1$ son los autovalores.

Para calcular el autoespacio asociado a $\lambda_1 = 2$ resolvemos el sistema $(2\,\mathrm{Id} - C)v = 0$, es decir

$$\begin{bmatrix} 2-2 & 0 & 0 \\ 1 & 2-1 & 1 \\ 0 & 0 & 2-2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$
$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 0 \\ v_1 + v_2 + v_3 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow v_1 = -v_2 - v_3.$$

Luego, el autovalor $\lambda_1 = 2$ tiene autoespacio asociado $\{(-t, t, s) : t, s \in \mathbb{R}\}$.

Para calcular el autoespacio asociado a $\lambda_2 = 1$ resolvemos el sistema $(\operatorname{Id} - C)v = 0$, es decir

$$\begin{bmatrix} 1-2 & 0 & 0 \\ 1 & 1-1 & 1 \\ 0 & 0 & 1-2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} -v_1 \\ v_1 + v_3 \\ -v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow v_1 = v_3 = 0.$$

Luego, el autovalor $\lambda_2 = 1$ tiene autoespacio asociado $\{(0, t, 0) : t \in \mathbb{R}\}$.

d) Denominamos D a la matriz del enunciado. El polinomio característico de D es

$$\begin{aligned} \chi_D(x) &= \begin{vmatrix} x+1 & 0 & 0 \\ 0 & x-3 & 5 \\ 0 & -1 & x+1 \end{vmatrix} \\ &= (x+1) \begin{vmatrix} x-3 & 5 \\ -1 & x+1 \end{vmatrix} \\ &= (x+1)[(x-3)(x+1) - (-1)(5)] \\ &= (x+1)(x^2 - 2x + 2). \end{aligned}$$

El polinomio $x^2 - 2x + 2$ no tiene raíces reales, luego el único autovalor real de D es -1. Averigüemos el autoespacio correspondiente, resolviendo el sistema $(-\operatorname{Id} - D)v = 0$, es decir el sistema homogéneo

$$\begin{bmatrix} -1+1 & 0 & 0 \\ 0 & -1-3 & -5 \\ 0 & 1 & -1+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & -5 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{F_2 - 4F_3} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Luego $v_2 = 0$ y $v_3 = 0$, es decir $v_2 = v_3 = 0$. Por lo tanto, el autoespacio asociado a -1 es $\{(v_1, 0, 0) : v_1 \in \mathbb{R}\}$.

e) Denominamos E a la matriz del enunciado. En realidad la matriz E depende de λ y debemos analizar la existencia de autovalores y autovectores para diferentes valores de λ. El polinomio característico de E es

$$\begin{aligned} \chi_E(x) &= \begin{vmatrix} x-\lambda & 0 & 0 \\ 1 & x-\lambda & 0 \\ 0 & 1 & x-\lambda \end{vmatrix} \\ &= (x-\lambda)^3. \end{aligned}$$

Luego λ es el único autovalor. Para calcular el autoespacio asociado a λ resolvemos el sistema $(\lambda\,\mathrm{Id} - E)v = 0$, es decir

$$\begin{bmatrix} \lambda-\lambda & 0 & 0 \\ 1 & \lambda-\lambda & 0 \\ 0 & 1 & \lambda-\lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$
$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 0 \\ v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow v_1 = v_2 = 0.$$

Luego, el único autovalor es λ y el autoespacio asociado es $\{(0, 0, t) : t \in \mathbb{R}\}$.

f) Denominamos F a la matriz del enunciado. En realidad la matriz F depende de θ y debemos analizar la existencia de autovalores y autovectores para diferentes valores de θ. El polinomio característico de F es

$$\begin{aligned} \chi_F(x) &= \begin{vmatrix} x-\cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & x-\cos\theta \end{vmatrix} \\ &= (x-\cos\theta)^2 + \operatorname{sen}(\theta)^2 \\ &= x^2 - 2x\cos\theta + \cos^2\theta + \operatorname{sen}(\theta)^2 \\ &= x^2 - 2x\cos\theta + 1. \end{aligned}$$

Las raíces del polinomio $x^2 - 2x\cos\theta + 1$ son

$$\begin{aligned} \lambda_{1,2} &= \frac{2\cos\theta - 2\sqrt{\cos^2\theta - 1}}{2} = \cos\theta \pm \sqrt{\cos^2\theta - 1} \\ &= \cos\theta \pm \sqrt{-\operatorname{sen}^2\theta} \end{aligned} \qquad (*)$$

Debemos dividir en 3 casos, según el valor de θ.

i) Cuando $\theta = 0$ tenemos que $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$. En ese caso, F es la matriz identidad y por lo tanto hay un único autovalor, 1, y el autoespacio correspondiente es todo $\mathbb{R}^3$.

ii) Cuando $\theta = \pi$, tenemos que $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$. En este caso la matriz es

$$F = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Luego, F es $-\mathrm{Id}$, hay un solo autovalor, -1, y el autoespacio correspondiente es todo $\mathbb{R}^2$

iii) Cuando $\theta \neq 0, \pi$ y en este caso tenemos que $-\operatorname{sen}^2\theta < 0$ y por lo tanto, por (*), no hay autovalores reales. □

(2) Calcular los autovalores complejos de las matrices *d)* y *f)* del ejercicio anterior, y para cada autovalor, dar una descripción paramétrica del autoespacio asociado sobre $\mathbb{C}$.

SOLUCIÓN:

En el caso de la matriz *d)* del ejercicio anterior, el polinomio característico es $x^2 - 2x + 2$ como ya fue calculado. Por lo tanto sus raíces son

$$\lambda_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4-8}}{2} = 1 \pm i.$$

Para calcular el autoespacio asociado a $\lambda_1 = 1 + i$ resolvemos el sistema $((1+i)\operatorname{Id} - D)v = 0$, es decir el sistema homogéneo

$$\begin{bmatrix} 1+i-3 & 5 \\ -1 & 1+i+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2+i & 5 \\ -1 & 2+i \end{bmatrix} \xrightarrow{F_2/(-1)} \begin{bmatrix} -2+i & 5 \\ 1 & -2-i \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{F_1+(2-i)F_2} \begin{bmatrix} 0 & 5-(2+i)(2-i) \\ 1 & -2-i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -2-i \end{bmatrix}.$$

Por lo tanto $v_1 + (-2-i)v_2 = 0$, es decir $v_1 = (2+i)v_2$. Luego, el autoespacio asociado a $\lambda_1 = 1 + i$ es $\{((2+i)t, t) : t \in \mathbb{C}\}$.

Para calcular el autoespacio asociado a $\lambda_2 = 1 - i$ resolvemos el sistema $((1-i)\operatorname{Id} - D)v = 0$, es decir el sistema homogéneo

$$\begin{bmatrix} 1-i-3 & 5 \\ -1 & 1-i+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2-i & 5 \\ -1 & 2-i \end{bmatrix} \xrightarrow{F_2/(-1)} \begin{bmatrix} -2-i & 5 \\ 1 & -2+i \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{F_1+(2+i)F_2} \begin{bmatrix} 0 & 5-(2-i)(2+i) \\ 1 & -2+i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -2+i \end{bmatrix}.$$

Por lo tanto $v_1 + (-2+i)v_2 = 0$, es decir $v_1 = (2-i)v_2$. Luego, el autoespacio asociado a $\lambda_2 = 1 - i$ es $\{((2-i)t, t) : t \in \mathbb{C}\}$.

En la resolución del punto *f)* del ejercicio anterior, obtuvimos $\lambda_{1,2} = \cos\theta \pm \sqrt{-\operatorname{sen}^2\theta}$. Luego, los autovalores son $\lambda_1 = \cos\theta + i\operatorname{sen}\theta$ y $\lambda_2 = \cos\theta - i\operatorname{sen}\theta$. Veamos ahora los autoespacios asociados a estos autovalores complejos, es decir cuando $\operatorname{sen}\theta \neq 0$. En el caso $\lambda_1 = \cos\theta + i\operatorname{sen}\theta$ resolvemos el sistema $((\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta)\operatorname{Id} - F)v = 0$, es decir el sistema homogéneo

$$\begin{bmatrix} \cos\theta + i\operatorname{sen}\theta - \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta + i\operatorname{sen}\theta - \cos\theta \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} i\operatorname{sen}\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & i\operatorname{sen}\theta \end{bmatrix} \xrightarrow{F_1\cdot i} \begin{bmatrix} -\operatorname{sen}\theta & -i\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & i\operatorname{sen}\theta \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[F_2/\operatorname{sen}\theta]{F_1/\operatorname{sen}\theta} \begin{bmatrix} -1 & -i \\ 1 & i \end{bmatrix} \xrightarrow{F_2+F_1} \begin{bmatrix} -1 & -i \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Por lo tanto $-v_1 - iv_2 = 0$, es decir $v_1 = -iv_2$. Luego, el autoespacio asociado a $\lambda_1 = \cos\theta + i\operatorname{sen}\theta$ es $\{t(-i, 1) : t \in \mathbb{C}\}$.

En el caso $\lambda_2 = \cos\theta - i\operatorname{sen}\theta$ resolvemos el sistema $((\cos\theta - i\operatorname{sen}\theta)\operatorname{Id} - F)v = 0$, es decir el sistema homogéneo

$$\begin{bmatrix} \cos\theta - i\operatorname{sen}\theta - \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta - i\operatorname{sen}\theta - \cos\theta \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} -i\operatorname{sen}\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & -i\operatorname{sen}\theta \end{bmatrix} \xrightarrow{F_1 \cdot i} \begin{bmatrix} \operatorname{sen}\theta & -i\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & -i\operatorname{sen}\theta \end{bmatrix}$$
$$\xrightarrow[F_2/\operatorname{sen}\theta]{F_1/\operatorname{sen}\theta} \begin{bmatrix} 1 & -i \\ 1 & -i \end{bmatrix} \xrightarrow{F_2 - F_1} \begin{bmatrix} 1 & -i \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Por lo tanto $v_1 - iv_2 = 0$, es decir $v_1 = iv_2$. Luego, el autoespacio asociado a $\lambda_2 = \cos\theta - i\operatorname{sen}\theta$ es $\{t(i,1) : t \in \mathbb{C}\}$.

Conclusión. Haremos un resumen de los resultados acerca de autovalores y autovectores de la matriz del ejercicio (1) *f)*, es decir de la matriz

$$\begin{bmatrix} \cos\theta & \operatorname{sen}\theta \\ -\operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix}.$$

- Si $\theta = 0$, entonces F tiene un único autovalor, 1, y el autoespacio correspondiente es todo $\mathbb{R}^2$.
- Si $\theta = \pi$, entonces F tiene un único autovalor, -1, y el autoespacio correspondiente es todo $\mathbb{R}^2$.
- Si $\theta \neq 0, \pi$, entonces F tiene dos autovalores complejos, $\lambda_1 = \cos\theta + i\operatorname{sen}\theta$ y $\lambda_2 = \cos\theta - i\operatorname{sen}\theta$, cuyos autoespacios son $\{t(-i,1) : t \in \mathbb{C}\}$ y $\{t(i,1) : t \in \mathbb{C}\}$, respectivamente.

□

(3) Probar que hay una única matriz $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ tal que $(1,1)$ es autovector de autovalor 2, y $(-2,1)$ es autovector de autovalor 1.

Solución: Para encontrar la matriz debemos resolver los sistemas

$$\begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

O, equivalentemente,

$$\begin{bmatrix} x + y \\ z + w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix} -2x + y \\ -2z + w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Son sistemas sencillos de resolver:

$$x + y = 2, \quad z + w = 2, \quad -2x + y = -2, \quad -2z + w = 1.$$

Luego, $y = 2 - x$ y por lo tanto $-2x + 2 - x = -2$, es decir $-3x = -4 \Rightarrow x = 4/3$, y en consecuencia $y = 2 - x = 2 - 4/3 = 2/3$.

Por otro lado, $w = 2 - z$ y por lo tanto $-2z + 2 - z = 1$, es decir $-3z = -1 \Rightarrow z = 1/3$, y en consecuencia $w = 2 - z = 2 - 1/3 = 5/3$.

Luego, la matriz buscada es

$$A = \begin{bmatrix} 4/3 & 2/3 \\ 1/3 & 5/3 \end{bmatrix}.$$

□

(4) Sea $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$, y sea $f(x) = ax^2 + bx + c$ un polinomio, con $a, b, c \in \mathbb{K}$. Sea $f(A)$ la matriz $n \times n$ definida por

$$f(A) = aA^2 + bA + c\,\mathrm{Id}_n\,.$$

Probar que todo autovector de A con autovalor λ es autovector de $f(A)$ con autovalor $f(\lambda)$.

Solución: Sea v un autovector de A con autovalor λ, es decir $Av = \lambda v$. Entonces

$$\begin{aligned} f(A)v &= (aA^2 + bA + c\,\mathrm{Id}_n)v \\ &= aA^2v + bAv + c\,\mathrm{Id}_n\, v \\ &= aA(\lambda v) + b(\lambda v) + c\,\mathrm{Id}_n\, v \\ &= a\lambda A(v) + \lambda bv + cv \\ &= a\lambda^2 v + \lambda bv + cv \\ &= (\lambda^2 a + \lambda b + c)v \\ &= f(\lambda)v. \end{aligned}$$

□

(5) Sea $A \in \mathbb{K}^{2\times 2}$.

a) Probar que el polinomio característico de A es $\chi_A(x) = x^2 - \mathrm{Tr}(A)x + \det(A)$.

b) Si A no es invertible, probar que los autovalores de A son 0 y $\mathrm{Tr}(A)$.

Solución:

a) Si $A = [a_{ij}]$, entonces

$$\begin{aligned}\chi_A(x) &= \begin{vmatrix} x - a_{11} & -a_{12} \\ -a_{21} & x - a_{22} \end{vmatrix} \\ &= (x - a_{11})(x - a_{22}) - (-a_{12})(-a_{21}) \\ &= x^2 - (a_{11} + a_{22})x + a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \\ &= x^2 - \operatorname{Tr}(A)x + \det(A).\end{aligned}$$

b) Si A no es invertible, entonces $\det(A) = 0$ y por lo tanto $\chi_A(x) = x^2 - \operatorname{Tr}(A)x$. Luego, los autovalores de A son las raíces de $x^2 - \operatorname{Tr}(A)x = x(x - \operatorname{Tr}(A))$, es decir 0 y $\operatorname{Tr}(A)$. □

(6) Sea $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$. Probar que el polinomio $\tilde{\chi}_A(x) = \det(A - x\operatorname{Id}_n)$ y el polinomio característico de A tienen las mismas raíces.

Solución: observar que $A - x\operatorname{Id}_n$ es igual a $-\operatorname{Id}_n(x\operatorname{Id}_n - A)$ y por lo tanto,

$$\begin{aligned}\tilde{\chi}_A(x) &= \det(A - x\operatorname{Id}_n) \\ &= \det(-\operatorname{Id}_n(x\operatorname{Id}_n - A)) \\ &= \det(-\operatorname{Id}_n)\det(x\operatorname{Id}_n - A) \\ &= (-1)^n\det(x\operatorname{Id}_n - A) \\ &= (-1)^n\chi_A(x).\end{aligned}$$

Luego, $\tilde{\chi}_A(x)$ y $\chi_A(x)$ son polinomios que difieren por un factor $(-1)^n$, es decir tienen las mismas raíces. □

(7) Probar que si $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ es una matriz nilpotente entonces 0 es el único autovalor de A. Usar esto para deducir que la matriz $\operatorname{Id}_n - A$ es invertible (esta es otra demostración del ejercicio (13) del Práctico 3).

Solución: recordemos que A es nilpotente si existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $A^k = 0$. Si A es nilpotente y v autovector con autovalor λ, entonces $Av = \lambda v$ y por lo tanto $A^2v = A(Av) = A(\lambda v) = \lambda Av = \lambda^2 v$. Iterando este argumento, obtenemos que $A^k v = \lambda^k v$. Pero $A^k = 0$, luego $\lambda^k v = 0$ y por lo tanto $lambda^k = 0$ y en consecuencia $\lambda = 0$. Luego, 0 es el único autovalor de A.

Ahora bien, si 0 es el único autovalor de A, entonces $\chi_A(x) = x^n$ y por lo tanto $1 = \chi_A(1) = \det(\operatorname{Id}_n - A)$ como el determinate de $\operatorname{Id}_n - A$ es no nulo, esa matriz es invertible. □

(8) Decidir si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justificar.

a) Existe una matriz invertible A tal que 0 es autovalor de A.

b) Si A es invertible, entonces todo autovector de A es autovector de A^{-1}.

Solución:

a) Falso. Si A es invertible, entonces 0 no es autovalor de A. Dado v tal que $Av = 0v = 0$, entonces $v = A^{-1}Av = A^{-1}(0) = 0$, por lo tanto no puede haber autovectores con autovalor 0, por lo tanto 0 no es autovalor de A.

b) Verdadero. Sea $v \neq 0$ autovector de A con autovalor λ, luego $Av = \lambda v$. Aplicando A^{-1} a ambos lados de la igualdad tenemos $A^{-1}Av = A^{-1}(\lambda v)$, o equivalentemente $v = \lambda A^{-1}v$, luego $A^{-1}v = \frac{1}{\lambda}v$. Es decir, v es autovector de A^{-1} con autovalor $\frac{1}{\lambda}$.

□

(9) Repetir los ejercicios (1) y (2) con las siguientes matrices.

a) $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$,

b) $\begin{bmatrix} -9 & 4 & 4 \\ -8 & 3 & 4 \\ -16 & 8 & 7 \end{bmatrix}$,

c) $\begin{bmatrix} 4 & 4 & -12 \\ 1 & -1 & 1 \\ 5 & 3 & -11 \end{bmatrix}$,

d) $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & -1 \end{bmatrix}$,

e) $\begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & \lambda & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \lambda & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & \lambda \end{bmatrix}$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

Solución:

a) El polinomio característico de la matriz es

$$\begin{aligned} \chi_A(x) &= \begin{vmatrix} x-2 & -3 \\ 1 & x-1 \end{vmatrix} \\ &= (x-2)(x-1) - (-3)(1) = x^2 - 3x + 5. \end{aligned}$$

Luego $\lambda_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{-11}}{2} = \frac{3 \pm i\sqrt{11}}{2}$ son los autovalores. Es decir, son autovalores complejos. Para calcular el autoespacio asociado a $\lambda_1 = \frac{3+i\sqrt{11}}{2}$ resolvemos el sistema $(\frac{3+i\sqrt{11}}{2} \operatorname{Id} - A)v = 0$, es decir el sistema homogéneo

$$\begin{bmatrix} \frac{3+i\sqrt{11}}{2} - 2 & -3 \\ 1 & \frac{3+i\sqrt{11}}{2} - 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-1+i\sqrt{11}}{2} & -3 \\ 1 & \frac{1+i\sqrt{11}}{2} \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{F_1 \cdot (-1-i\sqrt{11}/2)} \begin{bmatrix} 3 & \frac{3}{2}(1+i\sqrt{11}) \\ 1 & \frac{1}{2}(1+i\sqrt{11}) \end{bmatrix} \xrightarrow{F_1 - 3F_2} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & \frac{1}{2}(1+i\sqrt{11}) \end{bmatrix}$$

Por lo tanto $v_1 + \frac{1}{2}(1+i\sqrt{11})v_2 = 0$, es decir $v_1 = -\frac{1}{2}(1+i\sqrt{11})v_2$. Luego, el autoespacio asociado a $\lambda_1 = \frac{3+i\sqrt{11}}{2}$ es $\{(-\frac{1}{2}(1+i\sqrt{11})t, t) : t \in \mathbb{C}\}$.

Para calcular el autoespacio asociado a $\lambda_2 = \frac{3-i\sqrt{11}}{2}$ resolvemos el sistema $(\frac{3-i\sqrt{11}}{2}\operatorname{Id} - A)v = 0$, es decir el sistema homogéneo

$$\begin{bmatrix} \frac{3-i\sqrt{11}}{2} - 2 & -3 \\ 1 & \frac{3-i\sqrt{11}}{2} - 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-1-i\sqrt{11}}{2} & -3 \\ 1 & \frac{1-i\sqrt{11}}{2} \end{bmatrix}$$
$$\xrightarrow{F_1\cdot(-1+i\sqrt{11}/2)} \begin{bmatrix} 3 & \frac{3}{2}(1-i\sqrt{11}) \\ 1 & \frac{1}{2}(1-i\sqrt{11}) \end{bmatrix} \xrightarrow{F_1-3F_2} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & \frac{1}{2}(1-i\sqrt{11}) \end{bmatrix}$$

Por lo tanto $v_1 + \frac{1}{2}(1-i\sqrt{11})v_2 = 0$, es decir $v_1 = -\frac{1}{2}(1-i\sqrt{11})v_2$. Luego, el autoespacio asociado a $\lambda_2 = \frac{3-i\sqrt{11}}{2}$ es $\{(-\frac{1}{2}(1-i\sqrt{11})t, t) : t \in \mathbb{C}\}$.

b) El polinomio característico de la matriz es

$$\begin{aligned}
\chi_A(x) &= \begin{vmatrix} x+9 & -4 & -4 \\ 8 & x-3 & -4 \\ 16 & -8 & x-7 \end{vmatrix} \\
&= (x+9)\begin{vmatrix} x-3 & -4 \\ -8 & x-7 \end{vmatrix} + 4\begin{vmatrix} 8 & -4 \\ 16 & x-7 \end{vmatrix} - 4\begin{vmatrix} 8 & x-3 \\ 16 & -8 \end{vmatrix} \\
&= (x+9)(x^2-10x-11) + 4(8x+8) - 4(-16x-16) \\
&= x^3 - x^2 - 5x - 3.
\end{aligned}$$

Tanteando con enteros bajos nos podemos dar cuenta que -1 es raíz de $x^3 - x^2 - 5x - 3$, luego $\chi_A(x) = (x+1)(x^2-2x-3) = (x+1)(x+1)(x-3)$. Por lo tanto, los autovalores son -1 y 3.

Para calcular el autoespacio asociado a -1 resolvemos el sistema $(-\operatorname{Id} - A)v = 0$, es decir el sistema homogéneo

$$\begin{bmatrix} -1+9 & -4 & -4 \\ 8 & -1-3 & -4 \\ 16 & -8 & -1-7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & -4 & -4 \\ 8 & -4 & -4 \\ 16 & -8 & -8 \end{bmatrix} \xrightarrow{F_2-F_1} \begin{bmatrix} 8 & -4 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 16 & -8 & -8 \end{bmatrix}$$
$$\xrightarrow{F_3-2F_1} \begin{bmatrix} 8 & -4 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{F_1/4} \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Por lo tanto $2v_1 - v_2 - v_3 = 0$, es decir $v_1 = \frac{1}{2}v_2 + \frac{1}{2}v_3$. Luego, el autoespacio asociado a -1 es $\{(\frac{1}{2}t_1 + \frac{1}{2}t_2, t_1, t_2) : t_1, t_2 \in \mathbb{C}\}$.

Para calcular el autoespacio asociado a 3 resolvemos el sistema $(3\operatorname{Id} - A)v = 0$, es decir el sistema homogéneo

$$\begin{bmatrix} 3+9 & -4 & -4 \\ 8 & 3-3 & -4 \\ 16 & -8 & 3-7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 & -4 & -4 \\ 8 & 0 & -4 \\ 16 & -8 & -4 \end{bmatrix} \xrightarrow{F_3-2F_2} \begin{bmatrix} 12 & -4 & -4 \\ 8 & 0 & -4 \\ 0 & -8 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{F_1-(3/2)F_2} \begin{bmatrix} 0 & -4 & 2 \\ 8 & 0 & -4 \\ 0 & -8 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow{F1/2, F_2/4, F_3/4} \begin{bmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{F_3-F_1} \begin{bmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Por lo tanto $-2v_2 + v_3 = 0$ y $2v_1 - v_3 = 0$, es decir $v_2 = \frac{1}{2}v_3$ y $v_1 = \frac{1}{2}v_3$. Luego, el autoespacio asociado a 3 es $\{(\frac{1}{2}t, \frac{1}{2}t, t) : t \in \mathbb{C}\}$.

c) El polinomio característico de la matriz es

$$\begin{aligned}
\chi_A(x) &= \begin{vmatrix} x-4 & -4 & 12 \\ -1 & x+1 & -1 \\ -5 & -3 & x+11 \end{vmatrix} \\
&= (x-4)\begin{vmatrix} x+1 & -1 \\ -3 & x+11 \end{vmatrix} + 4\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ -5 & x+11 \end{vmatrix} - 12\begin{vmatrix} -1 & x+1 \\ -5 & -3 \end{vmatrix} \\
&= (x-4)(x^2+12x+8) + 4(-x-16) + 12(5x+8) \\
&= x^3 + 8x^2 + 16x \\
&= x(x^2 + 8x + 16) \\
&= x(x+4)^2.
\end{aligned}$$

Luego $\lambda_1 = 0$ y $\lambda_2 = -4$ son los autovalores. Para calcular el autoespacio asociado a $\lambda_1 = 0$ resolvemos el sistema $(0\,\mathrm{Id} - A)v = 0$, es decir el sistema homogéneo

$$\begin{bmatrix} -4 & -4 & 12 \\ -1 & 1 & -1 \\ -5 & -3 & 11 \end{bmatrix} \xrightarrow{F_1/(-4)} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -3 \\ -1 & 1 & -1 \\ -5 & -3 & 11 \end{bmatrix} \xrightarrow{F_2+F_1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 0 & 2 & -4 \\ -5 & -3 & 11 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{F_3+5F_1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 0 & 2 & -4 \\ 0 & 2 & -4 \end{bmatrix} \xrightarrow{F_3-F_2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 0 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{F_2/2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{F_1-F_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Por lo tanto $v_1 - v_3 = 0$ y $v_2 - 2v_3 = 0$, es decir $v_1 = v_3$ y $v_2 = 2v_3$. Luego, el autoespacio asociado a $\lambda_1 = 0$ es $\{(t, 2t, t) : t \in \mathbb{C}\}$.

Para calcular el autoespacio asociado a $\lambda_2 = -4$ resolvemos el sistema $(-4\,\mathrm{Id} - A)v = 0$, es decir el sistema homogéneo

$$\begin{bmatrix} -4-4 & -4 & 12 \\ -1 & -4+1 & -1 \\ -5 & -3 & -4+11 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8 & -4 & 12 \\ -1 & -3 & -1 \\ -5 & -3 & 7 \end{bmatrix} \xrightarrow[F_3-5F_2]{F_1-8F2} \begin{bmatrix} 0 & 20 & 20 \\ -1 & -3 & -1 \\ 0 & 12 & 12 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[F_3/12]{F_1/20} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[F_1-F3]{F_2+3F3} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Por lo tanto $-v_1 + 2v_3 = 0$ y $v_2 + v_3 = 0$, es decir $v_1 = 2v_3$ y $v_2 = -v_3$. Luego, el autoespacio asociado a $\lambda_2 = -4$ es $\{(2t, -t, t) : t \in \mathbb{C}\}$.

d) El polinomio característico de la matriz es

$$\begin{aligned} \chi_A(x) &= \begin{vmatrix} x-2 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & x-4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x-1 & -1 \\ 0 & 0 & -3 & x+1 \end{vmatrix} \\ &= (x-2)(x-4)\begin{vmatrix} x-1 & -1 \\ -3 & x+1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x-2 & -1 \\ 1 & x-4 \end{vmatrix} \\ &= ((x-2)(x-4)+1)\begin{vmatrix} x-1 & -1 \\ -3 & x+1 \end{vmatrix} \\ &= ((x-2)(x-4)+1)(x^2-4) \\ &= (x^2-6x+9)(x^2-4) \\ &= (x-3)^2(x+2)(x-2). \end{aligned}$$

Luego $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = -2$ y $\lambda_3 = 2$ son los autovalores. Para calcular el autoespacio asociado a $\lambda_1 = 3$ resolvemos el sistema $(3\,\mathrm{Id} - A)v = 0$, es decir el sistema homogéneo

$$\begin{bmatrix} 3-2 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 3-4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3-1 & -1 \\ 0 & 0 & -3 & 3+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -3 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[F_4+(3/2)F_3]{F_2-F_1} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 5/2 \end{bmatrix} \xrightarrow[F_1+F_3]{F_3/2} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 5/2 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Por lo tanto $v_1 - v_2 = 0$, es decir $v_1 = v_2$. Luego, el autoespacio asociado a $\lambda_1 = 3$ es $\{(t, t, 0, 0) : t \in \mathbb{C}\}$.

Para calcular el autoespacio asociado a $\lambda_2 = -2$ resolvemos el sistema $(-2\operatorname{Id} - A)v = 0$, es decir el sistema homogéneo

$$\begin{bmatrix} -2-2 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -2-4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2-1 & -1 \\ 0 & 0 & -3 & -2+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & -3 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[F_4-F_3]{F_1+4F_1} \begin{bmatrix} 0 & -5 & 0 & 0 \\ 1 & -6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Por lo tanto $v_1 = v_2 = 0$ y $-3v_3 - v_4 = 0$, es decir $v_3 = -\frac{1}{3}v_4$. Luego, el autoespacio asociado a $\lambda_2 = -2$ es $\{(0, 0, -\frac{1}{3}t, t) : t \in \mathbb{C}\}$.

Para calcular el autoespacio asociado a $\lambda_3 = 2$ resolvemos el sistema $(2\operatorname{Id} - A)v = 0$, es decir el sistema homogéneo

$$\begin{bmatrix} 2-2 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 2-4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2-1 & -1 \\ 0 & 0 & -3 & 2+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -3 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{F_4+3F_3} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Por lo tanto $v_1 = v_2 = 0$ y $v_3 - v_4 = 0$, es decir $v_3 = v_4$. Luego, el autoespacio asociado a $\lambda_3 = 2$ es $\{(0, 0, t, t) : t \in \mathbb{C}\}$.

e) El polinomio característico de la matriz es

$$\begin{aligned} \chi_A(x) &= \begin{vmatrix} x-\lambda & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & x-\lambda & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & x-\lambda & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & -1 & x-\lambda \end{vmatrix} \\ &= (x-\lambda)^n. \end{aligned}$$

Esto se debe a que como la matriz es triangular superior su determinante es producto de los elementos de la diagonal. Luego, λ es el único autovalor. Para calcular el autoespacio asociado a λ resolvemos el sistema $(\lambda\operatorname{Id} - A)v = 0$, es decir el sistema homogéneo

$$\begin{bmatrix} \lambda-\lambda & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & \lambda-\lambda & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & \lambda-\lambda & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & -1 & \lambda-\lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\longrightarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Por lo tanto $v_1 = v_2 = \cdots = v_{n-1} = 0$. Luego, el autoespacio asociado a λ es $\{(0, 0, \dots, t) : t \in \mathbb{C}\}$.

$\square$

PRÁCTICO 6

Soluciones

Álgebra II – Año 2024/1 – FAMAF

(1) Decidir si los siguientes subconjuntos de $\mathbb{R}^3$ son subespacios vectoriales.

a) $A = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x_1 + x_2 + x_3 = 1\}$.
b) $B = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x_1 + x_2 + x_3 = 0\}$.
c) $C = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x_1 + x_2 + x_3 \geq 0\}$.
d) $D = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x_3 = 0\}$.
e) $B \cup D$.
f) $B \cap D$.
g) $G = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{Q}\}$.

Solución:

a) No es subespacio vectorial. Por ejemplo $(1, 0, 0)$ y $(0, 1, 0)$ pertenecen a A, pero $(1, 0, 0) + (0, 1, 0) = (1, 1, 0)$ no pertenece a A.

b) Es subespacio vectorial. En efecto, si (x_1, x_2, x_3) y (y_1, y_2, y_3) pertenecen a B y $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, entonces

$$\begin{aligned}
\lambda(x_1, x_2, x_3) + \mu(y_1, y_2, y_3) &= (\lambda x_1 + \mu y_1, \lambda x_2 + \mu y_2, \lambda x_3 + \mu y_3) \\
&= (\lambda x_1 + \mu y_1) + (\lambda x_2 + \mu y_2) + (\lambda x_3 + \mu y_3) \\
&= \lambda(x_1 + x_2 + x_3) + \mu(y_1 + y_2 + y_3) \\
&= \lambda \cdot 0 + \mu \cdot 0 = 0.
\end{aligned}$$

c) No es subespacio vectorial. Por ejemplo $(1, 0, 0) \in C$ pero $(-1)(1, 0, 0) = (-1, 0, 0) \notin C$, pues $-1 + 0 + 0 < 0$.

d) Es subespacio vectorial. En efecto, si $(x_1, x_2, 0)$ y $(y_1, y_2, 0)$ pertenecen a D y $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, entonces

$$\lambda(x_1, x_2, 0) + \mu(y_1, y_2, 0) = (\lambda x_1 + \mu y_1, \lambda x_2 + \mu y_2, 0) \in D.$$

e) No es subespacio vectorial. Por ejemplo $(1, 0, -1) \in B$ y $(0, 1, 0)$ pertenecen a $B \cup D$, pero $(1, 0, -1) + (0, 1, 0) = (1, 1, -1)$ no pertenece a $B \cup D$, pues $(1, 1, -1) \notin B$ y $(1, 1, -1) \notin D$.

f) Es subespacio vectorial

$$\begin{aligned}
B \cap D &= \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x_1 + x_2 + x_3 = 0 \text{ y } x_3 = 0\} \\
&= \{(x_1, x_2, 0) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x_1 + x_2 = 0\}.
\end{aligned}$$

Luego, si $(x_1, x_2, 0)$ y $(y_1, y_2, 0)$ pertenecen a $B \cap D$ y $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, entonces

$$\lambda(x_1, x_2, 0) + \mu(y_1, y_2, 0) = (\lambda x_1 + \mu y_1, \lambda x_2 + \mu y_2, 0) \in B \cap D,$$

pues $\lambda x_1 + \mu y_1 + \lambda x_2 + \mu y_2 = \lambda(x_1 + x_2) + \mu(y_1 + y_2) = \lambda(x_1 + x_2) + \mu(y_1 + y_2) = \lambda 0 + \mu 0 = 0$.

g) No es subespacio vectorial. Por ejemplo $(1, 0, 0)$ pertenece a G, pero $\sqrt{2}(1, 0, 0) = (\sqrt{2}, 0, 0)$ no pertenece a G.

□

(2) Decidir en cada caso si el conjunto dado es un subespacio vectorial de $M_{n\times n}(\mathbb{K})$.
a) El conjunto de matrices invertibles.
b) El conjunto de matrices A tales que $AB = BA$, donde B es una matriz fija.
c) El conjunto de matrices triangulares superiores.

Solución:

a) No es subespacio vectorial. Por ejemplo, Id_n y $-\mathrm{Id}_n$ son matrices invertibles, pero $\mathrm{Id}_n + (-\mathrm{Id}_n) = 0$ no es invertible.

b) Es subespacio vectorial. En efecto, si A y A' pertenecen al conjunto y $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, entonces

$$\begin{aligned}
(\lambda A + \mu A')B &= \lambda AB + \mu A'B \\
&= \lambda BA + \mu BA' && \text{(por hipótesis)} \\
&= (\lambda A + \mu A')B.
\end{aligned}$$

Luego $\lambda A + \mu A'$ pertenece al conjunto.

c) Es subespacio vectorial. En efecto, si A y A' son matrices triangulares superiores y $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, entonces

$$\begin{aligned}
\lambda A + \mu A' &= \lambda \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} + \mu \begin{bmatrix} a'_{11} & a'_{12} & \cdots & a'_{1n} \\ 0 & a'_{22} & \cdots & a'_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a'_{nn} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \cdots & \lambda a_{1n} \\ 0 & \lambda a_{22} & \cdots & \lambda a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda a_{nn} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mu a'_{11} & \mu a'_{12} & \cdots & \mu a'_{1n} \\ 0 & \mu a'_{22} & \cdots & \mu a'_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \mu a'_{nn} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \lambda a_{11} + \mu a'_{11} & \lambda a_{12} + \mu a'_{12} & \cdots & \lambda a_{1n} + \mu a'_{1n} \\ 0 & \lambda a_{22} + \mu a'_{22} & \cdots & \lambda a_{2n} + \mu a'_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda a_{nn} + \mu a'_{nn} \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Luego $\lambda A + \mu A'$ es una matriz triangular superior.

□

(3) Sea L una recta en $\mathbb{R}^2$. Dar una condición necesaria y suficiente para que L sea un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^2$.

Solución: Una recta en $\mathbb{R}^2$ es un subespacio vectorial si y sólo si pasa por el origen.

La ecuación general de la recta en el plano es $ax + by = c$ con $a, b, c \in \mathbb{R}$ y a, b no ambos nulos.

($\Rightarrow$) Si L es un subespacio vectorial, entonces $(0, 0) \in L$, es decir la recta pasa por el origen. Además, como $0 = a \cdot 0 + b \cdot 0 = c$, la ecuación de la recta es $ax + by = 0$.

($\Leftarrow$) Si la recta pasa por el origen, entonces $0 = a \cdot 0 + b \cdot 0 = c$, es decir la ecuación de la recta es $ax + by = 0$. Luego, si (x_1, y_1) y (x_2, y_2) pertenecen a la recta y $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, entonces

$$\begin{aligned} a(\lambda x_1 + \mu x_2) + b(\lambda y_1 + \mu y_2) &= \lambda(ax_1 + by_1) + \mu(ax_2 + by_2) \\ &= \lambda \cdot 0 + \mu \cdot 0 = 0. \end{aligned}$$

Luego $\lambda(x_1, y_1) + \mu(x_2, y_2)$ pertenece a la recta y por lo tanto la recta es un subespacio vectorial.

□

(4) Sean V un $\mathbb{K}$-espacio vectorial, $v \in V$ no nulo y $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ tales que $\lambda v = \mu v$. Probar que $\lambda = \mu$.

Solución: Si $\lambda v = \mu v$, entonces $(\lambda - \mu)v = 0$. Supongamos que $\lambda - \mu \neq 0$, entonces

$$\begin{aligned} v &= 1 \cdot v && \text{(axioma P1 de esp. vectoriales)} \\ &= (\lambda - \mu)^{-1}(\lambda - \mu)v \\ &= (\lambda - \mu)^{-1}0 && \text{(por hipótesis)} \\ &= 0. && \text{(demostrado en la teórica: } 0 \cdot v = 0) \end{aligned}$$

Concluimos que $v = 0$, lo cual contradice la hipótesis. El absurdo vino de suponer que $\lambda - \mu \neq 0$, luego $\lambda = \mu$.

□

(5) Sean W_1, W_2 subespacios de un espacio vectorial V. Probar que $W_1 \cup W_2$ es un subespacio de V si y sólo si $W_1 \subseteq W_2$ o $W_2 \subseteq W_1$.

Solución:

($\Rightarrow$) Si $W_1 \subseteq W_2$ o $W_2 \subseteq W_1$ no hay nada que demostrar. Supongamos entonces que $W_1 \nsubseteq W_2$ y $W_2 \nsubseteq W_1$. Entonces existen $w_1 \in W_1$ tal que $w_1 \notin W_2$ y $w_2 \in W_2$ tal que $w_2 \notin W_1$. Como $w_1 \in W_1$ y $w_2 \in W_2$, entonces $w_1 + w_2 \in W_1 \cup W_2$. Como $W_1 \cup W_2$ es un subespacio de V, entonces $w_1 + w_2 \in W_1 \cup W_2$ y por lo tanto $w_1 + w_2 \in W_1$ o $w_1 + w_2 \in W_2$. Supongamos que $w_1 + w_2 \in W_1$, entonces $w_2 = w_1 + w_2 - w_1 \in W_1$, lo cual es absurdo.Análogamente, si

$w_1 + w_2 \in W_2$, entonces $w_1 \in W_2$, lo cual es absurdo. El absurdo vino de suponer que $W_1 \not\subseteq W_2$ y $W_2 \not\subseteq W_1$, luego $W_1 \subseteq W_2$ o $W_2 \subseteq W_1$.

($\Leftarrow$) Supongamos que $W_1 \subseteq W_2$. Entonces $W_1 \cup W_2 = W_2$ y por lo tanto $W_1 \cup W_2$ es un subespacio de V. Análogamente se demuestra que si $W_2 \subseteq W_1$, entonces $W_1 \cup W_2$ es un subespacio de V.

□

(6) Sean $u = (1, 1)$, $v = (1, 0)$, $w = (0, 1)$ y $z = (3, 4)$ vectores de $\mathbb{R}^2$.
   a) Escribir z como combinación lineal de u, v y w, con coeficientes todos no nulos.
   b) Escribir z como combinación lineal de u y v.
   c) Escribir z como combinación lineal de u y w.
   d) Escribir z como combinación lineal de v y w.

SOLUCIÓN: En general tenemos que resolver la ecuación $z = \lambda u + \mu v + \nu w$, bajo ciertas condiciones sobre λ, μ, ν. En cada caso, las condiciones son distintas. Si escribimos en coordenadas la ecuación es

$$\begin{aligned}(3, 4) &= \lambda(1, 1) + \mu(1, 0) + \nu(0, 1)\\ &= (\lambda + \mu, \lambda + \nu). \end{aligned} \tag{*}$$

El sistema es sencillo de resolver, pues la segunda coordenada nos dice que $\lambda + \nu = 4$, es decir $\nu = 4 - \lambda$. Reemplazando en la primera coordenada obtenemos $\lambda + \mu = 3$, es decir $\mu = 3 - \lambda$. Por lo tanto, λ es libre y

$$z = \lambda u + \mu v + \nu w = \lambda(1, 1) + (3 - \lambda)(1, 0) + (4 - \lambda)(0, 1).$$

a) Si $\lambda = 1$, entonces $\mu = 2$ y $\nu = 3$ y por lo tanto

$$z = 1 \cdot u + 2 \cdot v + 3 \cdot w.$$

b) Si $\lambda = 4$, entonces $\mu = -1$ y $\nu = 0$ y por lo tanto

$$z = 4 \cdot u - 1 \cdot v.$$

c) Si $\lambda = 3$, entonces $\mu = 0$ y $\nu = 1$ y por lo tanto

$$z = 3 \cdot u + 1 \cdot w.$$

d) Si $\lambda = 2$, entonces $\mu = 1$ y $\nu = 2$ y por lo tanto

$$z = 2 \cdot v + 2 \cdot w.$$

□

(7) Sean $p(x) = (x - 1)(x + 2)$, $q(x) = x^2 - 1$ y $r(x) = x(x^2 - 1)$ en $\mathbb{R}[x]$.
   a) Describir en forma implícita todos los polinomios de grado menor o igual que 3 que son combinación lineal de p, q y r.
   b) Elegir a tal que el polinomio x se pueda escribir como combinación lineal de p, q y $2x^2 + a$.

Solución:

a) Escribamos la versión expandida de p, q y r:

$$\begin{aligned} p(x) &= x^2 + x - 2, \\ q(x) &= x^2 - 1, \\ r(x) &= x^3 - x. \end{aligned}$$

Ahora, planteemos la ecuación

$$\begin{aligned} ax^3 + bx^2 + cx + d &= \lambda p + \mu q + \nu r \\ &= \lambda(x^2 + x - 2) + \mu(x^2 - 1) + \nu(x^3 - x) \qquad (*) \\ &= \nu x^3 + (\lambda + \mu)x^2 + (\lambda - \nu)x + (-2\lambda - \mu). \end{aligned}$$

Debemos encontrar todos los $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$ tales que existe $\lambda, \mu, \nu \in \mathbb{R}$ que satisfacen la ecuación anterior. Es decir, debemos encontrar todos los $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$ tales que existe $\lambda, \mu, \nu \in \mathbb{R}$ que satisfacen el sistema

$$\begin{aligned} a &= \nu \\ b &= \lambda + \mu \\ c &= -\lambda - \nu \\ d &= -2\lambda - \mu. \end{aligned}$$

Si consideramos a, b, c, d como constantes y λ, μ, ν como incógnitas, entonces el sistema, presentado como matriz aumentada es:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 1 & a \\ 1 & 1 & 0 & b \\ 1 & 0 & -1 & c \\ -2 & -1 & 0 & d \end{array}\right] \xrightarrow[F_4+2F_2]{F_3-F_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 1 & a \\ 1 & 1 & 0 & b \\ 0 & -1 & -1 & -b+c \\ 0 & 1 & 0 & 2b+d \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[F_3+F_4]{F_2-F_4} \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 1 & a \\ 1 & 0 & 0 & -b-d \\ 0 & 0 & -1 & b+c+d \\ 0 & 1 & 0 & 2b+d \end{array}\right] \xrightarrow{F_3+F_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 1 & a \\ 1 & 0 & 0 & -b-d \\ 0 & 0 & 0 & a+b+c+d \\ 0 & 1 & 0 & 2b+d \end{array}\right].$$

Luego la ecuación (*) solo puede ser satisfecha si y sólo si $a+b+c+d=0$ por lo tanto, el subespacio de polinomios que obtenemos es

$$\{ax^3 + bx^2 + cx + d : \ a + b + c + d = 0, \ a, b, c, d \in \mathbb{R}\}.$$

También lo podríamos describir de la siguiente manera:

$$\{(-b - c - d)x^3 + bx^2 + cx + d : \ b, c, d \in \mathbb{R}\}.$$

b) Debemos encontrar a tal que existan $\lambda, \mu, \nu \in \mathbb{R}$ que satisfacen la ecuación

$$\begin{aligned} x &= \lambda p + \mu q + (2x^2 + a)\nu \\ &= \lambda(x^2 + x - 2) + \mu(x^2 - 1) + \nu(2x^2 + a) \\ &= (\lambda + \mu + 2\nu)x^2 + \lambda x + (-2\lambda - \mu - a\nu). \end{aligned}$$

Claramente $\lambda + \mu + 2\nu = 0$, $\lambda = 1$ y $-2\lambda - \mu - a\nu = 0$, en consecuencia

$$\begin{aligned} 0 &= 1 + \mu + 2\nu \\ 0 &= -2 - \mu - a\nu, \end{aligned}$$

o, lo que es lo mismo,

$$\begin{aligned} \mu + 2\nu &= -1 \\ -\mu - a\nu &= 2. \end{aligned}$$

Planteamos la matriz aumentada correspondiente a este sistema y la escalonamos:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & -1 \\ -1 & -a & 2 \end{array}\right] \xrightarrow{F_2+F_1} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 2-a & 1 \end{array}\right].$$

Observamos entonces que si $a = 2$ el sistema no tiene solución pues quedaría $\mu \cdot 0 + \nu \cdot 0 = 1$. Cuando $a \neq 2$, dividimos por $2 - a$ y obtenemos $\nu = \frac{1}{2-a}$ y $\mu = -1 - 2\nu = -1 - \frac{2}{2-a} = \frac{a}{2-a}$. Por lo tanto, si $a \neq 2$, el polinomio x se puede escribir como combinación lineal de p, q y $2x^2 + a$.

□

(8) Dar un conjunto de generadores para los siguientes subespacios vectoriales.
  a) Los conjuntos de soluciones de los sistemas homogéneos del ejercicio (5) del Práctico 2.
  b) Los conjuntos descriptos en el ejercicio (6) del Práctico 2.

Solución:

a) Los sistemas homogéneos del ejercicio (5) del Práctico 2 son los tres primeros.

El primer sistema era

$$\begin{cases} -x - y + 4z = 0 \\ x + 3y + 8z = 0 \\ x + 2y + 5z = 0. \end{cases}$$

Este sistema tenía como única solución $x = y = z = 0$, luego el conjunto de soluciones es $\{(0, 0, 0)\}$ y por lo tanto el subespacio generado por las soluciones es $\{0\}$.

El segundo era
$$\begin{cases} x-3y+5z=0 \\ 2x-3y+z=0 \\ -y+3z=0 \end{cases}$$
Este sistema tiene como soluciones al conjunto $\{(4t,3t,t) : t \in \mathbb{R}\} = \{t(4,3,1) : t \in \mathbb{R}\}$, y por lo tanto podemos tomar como generador del subespacio al vector $(4,3,1)$.

El tercero:
$$\begin{cases} x-z+2t=0 \\ -x+2y-z+2t=0 \\ -x+y=0. \end{cases}$$
Las soluciones de este sistema eran los vectores del subespacio
$$\{(u-2v,u-2v,u,v) : u,v \in \mathbb{R}\} = \{u(1,1,1,0)+v(-2,-2,0,1) : u,v \in \mathbb{R}\}$$
y por lo tanto podemos tomar como generadores a los vectores $(1,1,1,0)$ y $(-2,-2,0,1)$.

b) el primer conjunto era $\{(b_1,b_2,b_3) \in \mathbb{R}^3 : -2b_1+b_2+3b_3=0\}$. Podemos despejar una de las variables respecto a las otras, por ejemplo $b_2 = 2b_1 - 3b_3$, y en ese caso el conjunto se puede escribir como
$$\{(b_1,-2b_1-3b_3,b_3) : b_1,b_3 \in \mathbb{R}\} = \{b_1(1,-2,0)+b_3(0,-3,1) : b_1,b_3 \in \mathbb{R}\}.$$
Por lo tanto, podemos tomar como generadores a los vectores $(1,-2,0)$ y $(0,-3,1)$.

El segundo conjunto era
$$\{(b_1,b_2,b_3,b_4) \in \mathbb{R}^3 : \frac{1}{2}b_1 - \frac{1}{2}b_2 + b_3 = 0 \wedge -\frac{1}{2}b_1 - \frac{1}{2}b_2 + b_4 = 0\}.$$
Plantemos el sistema correspondiente:
$$\begin{cases} \frac{1}{2}b_1 - \frac{1}{2}b_2 + b_3 = 0 \\ -\frac{1}{2}b_1 - \frac{1}{2}b_2 + b_4 = 0. \end{cases}$$
Resolvamos el sistema:
$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[2\cdot F_2]{2\cdot F_1} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{F_2+F_1} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$
$$\xrightarrow{F_2/(-2)} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{F_1+F_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}.$$
Luego, el conjunto de soluciones es
$$\{(b_1,b_2,b_3,b_4) \in \mathbb{R}^4 : b_1 = -b_3 + b_4 \wedge b_2 = b_3 + b_4\}.$$

Es decir, el conjunto de soluciones es

$$\{(-b_3 + b_4, b_3 + b_4, b_3, b_4) \in \mathbb{R}^4 : b_3, b_4 \in \mathbb{R}\}.$$

Escrito de otra forma, el conjunto de soluciones es

$$\{b_3(-1, 1, 1, 0) + b_4(1, 1, 0, 1) \in \mathbb{R}^4 : b_3, b_4 \in \mathbb{R}\}.$$

Por lo tanto, podemos tomar como generadores a los vectores $(-1, 1, 1, 0)$ y $(1, 1, 0, 1)$.

El tercer conjunto era $\mathbb{R}^3$ y por lo tanto podemos tomar los generadores canónicos $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ y $(0, 0, 1)$.

$\square$

(9) En cada caso, caracterizar con ecuaciones al subespacio vectorial dado por generadores.

a) $\langle(1, 0, 3), (0, 1, -2)\rangle \subseteq \mathbb{R}^3$.

b) $\langle(1, 2, 0, 1), (0, -1, -1, 0), (2, 3, -1, 4)\rangle \subseteq \mathbb{R}^4$.

SOLUCIÓN:

a) El subespacio es el conjunto de combinaciones lineales de $(1, 0, 3)$ y $(0, 1, -2)$, es decir

$$\begin{aligned}\{\lambda(1, 0, 3) + \mu(0, 1, -2) : \lambda, \mu \in \mathbb{R}\} &= \{(\lambda, \mu, 3\lambda - 2\mu) : \lambda, \mu \in \mathbb{R}\} \\ &= \{(x, y, z) : x = \lambda, y = \mu, z = 3\lambda - 2,\ \mu\lambda, \mu \in \mathbb{R}\}.\end{aligned}$$

Planteamos el sistema correspondiente:

$$\begin{cases} \lambda = x \\ \mu = y \\ 3\lambda - 2\mu = z. \end{cases}$$

Resolvamos el sistema:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & x \\ 0 & 1 & y \\ 3 & -2 & z \end{array}\right] \xrightarrow{F_3 - 3F_1} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & x \\ 0 & 1 & y \\ 0 & -2 & z - 3x \end{array}\right] \xrightarrow{F_3 + 2F_2} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & x \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & z - 3x + 2y \end{array}\right].$$

Luego, el subespacio se caracteriza implícitamente de la siguiente manera:

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z - 3x + 2y = 0\}.$$

b) El subespacio es el conjunto de combinaciones lineales de $(1, 2, 0, 1)$, $(0, -1, -1, 0)$ y $(2, 3, -1, 4)$, es decir

$$\begin{aligned}
&\{\lambda(1, 2, 0, 1) + \mu(0, -1, -1, 0) + \nu(2, 3, -1, 4) : \lambda, \mu, \nu \in \mathbb{R}\} = \\
&= \{(\lambda + 2\nu, 2\lambda - \mu + 3\nu, -\mu - \nu, \lambda + 4\nu) : \lambda, \mu, \nu \in \mathbb{R}\} \\
&= \{(x, y, z, t) : x = \lambda + 2\nu, \\
&\qquad\qquad y = 2\lambda - \mu + 3\nu, z = -\mu - \nu, t = \lambda + 4\nu, \ \mu, \lambda, \nu \in \mathbb{R}\}.
\end{aligned}$$

Planteamos el sistema correspondiente:

$$\begin{cases} \lambda + 2\nu = x \\ 2\lambda - \mu + 3\nu = y \\ -\mu - \nu = z \\ \lambda + 4\nu = t \end{cases}$$

Resolvamos el sistema:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & x \\ 2 & -1 & 3 & y \\ 0 & -1 & -1 & z \\ 1 & 0 & 4 & t \end{array}\right] \xrightarrow{F_2 - 2F_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & x \\ 0 & -1 & -1 & y - 2x \\ 0 & -1 & -1 & z \\ 0 & 0 & 2 & t - x \end{array}\right] \xrightarrow{F_3 - F_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & x \\ 0 & -1 & -1 & y - 2x \\ 0 & 0 & 0 & 2x - y + z \\ 0 & 0 & 2 & t - x \end{array}\right].$$

En realidad, no es necesario resolver el sistema completamente: la última matriz nos dice que el sistema tiene solución si y sólo si $2x - y + z = 0$. Luego, el subespacio se caracteriza implícitamente de la siguiente manera:

$$\{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : 2x - y + z = 0\}.$$

□

(10) En cada caso, determinar si el subconjunto indicado es linealmente independiente.

a) $\{(1, 0, -1), (1, 2, 1), (0, -3, 2)\} \subseteq \mathbb{R}^3$.

b) $\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & -3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \right\} \subseteq M_{2\times 3}(\mathbb{R})$.

Solución: para determinar si un conjunto de vectores es LI debemos plantear la ecuación $\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n = 0$ y resolverla. Si la única solución es $\lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0$, entonces el conjunto es LI. En caso contrario, el conjunto es LD.

a) Debemos resolver la ecuación

$$\lambda_1(1, 0, -1) + \lambda_2(1, 2, 1) + \lambda_3(0, -3, 2) = (0, 0, 0),$$

o sea

$$(\lambda_1 + \lambda_2, \ 2\lambda_2 - 3\lambda_3, \ -\lambda_1 + \lambda_2 + 2\lambda_3) = (0, 0, 0).$$

Es decir, debemos resolver el sistema

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ 2\lambda_2 - 3\lambda_3 = 0 \\ -\lambda_1 + \lambda_2 + 2\lambda_3 = 0. \end{cases}$$

Resolvamos el sistema:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -3 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{F_3+F_1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -3 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{F_3-F_2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{F_2/2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \xrightarrow{F_1-F_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \xrightarrow{F_3/5} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[F_2+\frac{3}{2}F_3]{F_1-\frac{3}{2}F_3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Luego como la única solución es la trivial los vectores son LI.

b) Debemos resolver la ecuación

$$\lambda_1 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & -3 \end{bmatrix} + \lambda_2 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{bmatrix} + \lambda_3 \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

o sea

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 & 2\lambda_3 & 2\lambda_1 + \lambda_2 + 3\lambda_3 \\ -2\lambda_2 + 3\lambda_3 & -\lambda_1 + \lambda_2 + 2\lambda_3 & -3\lambda_1 + \lambda_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Por la igualdad de fila 1, columna 2, claramente, $\lambda_3 = 0$. Luego, por la igualdad de fila 2, columna 3, $\lambda_1 = 0$. Finalmente, por la igualdad de fila 1, columna 1, $\lambda_2 = 0$. Es decir, la única solución es la trivial y por lo tanto los vectores son LI.

□

(11) Dar un ejemplo de un conjunto de 3 vectores en $\mathbb{R}^3$ que sean LD, y tales que dos cualesquiera de ellos sean LI.

Solución: tomemos $v_1 = (1,0,0)$, $v_2 = (0,1,0)$ y el tercer vector la suma de ambos, es decir, $v_3 = (1,1,0)$. Por lo tanto, esos tres vectores son LD ($v_1 + v_2 - v_3 = 0$). Ahora bien, si quitamos cualquiera de los vectores, los dos restantes son LI. Por ejemplo, si quitamos v_1, entonces v_2 y v_3 son LI, pues si $\lambda v_2 + \mu v_3 = 0$, entonces $(\mu, \lambda+\mu, 0) = (0,0,0)$ y por lo tanto $\mu = 0$, luego $\lambda = 0$.

□

(12) Probar que si α, β y γ son vectores LI en el $\mathbb{R}$-espacio vectorial V, entonces $\alpha+\beta$, $\alpha+\gamma$ y $\beta+\gamma$ también son LI.

Solución: debemos plantear la ecuación

$$\lambda_1(\alpha+\beta)+\lambda_2(\alpha+\gamma)+\lambda_3(\beta+\gamma)=0,$$

y ver que la única solución es $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=0$. La ecuación anterior es equivalente a

$$(\lambda_1+\lambda_2)\alpha+(\lambda_1+\lambda_3)\beta+(\lambda_2+\lambda_3)\gamma=0.$$

Como α, β y γ son LI por hipótesis, entonces $\lambda_1+\lambda_2=\lambda_1+\lambda_3=\lambda_2+\lambda_3=0$. Resolvamos el sistema:

$$\begin{bmatrix}1&1&0\\1&0&1\\0&1&1\end{bmatrix}\xrightarrow{F_2-F_1}\begin{bmatrix}1&1&0\\0&-1&1\\0&1&1\end{bmatrix}\xrightarrow{F_3+F_2}\begin{bmatrix}1&1&0\\0&-1&1\\0&0&2\end{bmatrix}.$$

Por lo tanto, por la tercera fila, $\lambda_3=0$, por la segunda fila se deduce que $\lambda_2=0$ y por la primera fila se deduce que $\lambda_1=0$. Es decir, la única solución es la trivial y por lo tanto los vectores son LI.

□

(13) Extender, de ser posible, los siguientes conjuntos a una base de los respectivos espacios vectoriales.

a) Los conjuntos del ejercicio (10).

b) $\{(1,2,0,0),(1,0,1,0)\}\subseteq\mathbb{R}^4$.

c) $\{(1,2,1,1),(1,0,1,1),(3,2,3,4)\}\subseteq\mathbb{R}^4$.

Solución:

a) Los conjuntos del ejercicio (10) son LI. Luego el primer subconjunto es base, pues tiene 3 elementos de $\mathbb{R}^3$.

El segundo subconjunto no es base pues tiene 3 vectores y $M_{2\times3}(\mathbb{R})$ tiene dimensión 6.

Extendamos entonces

$$\left\{\begin{bmatrix}1&0&2\\0&-1&-3\end{bmatrix},\ \begin{bmatrix}1&0&1\\-2&1&0\end{bmatrix},\ \begin{bmatrix}1&2&3\\3&2&1\end{bmatrix}\right\}$$

a una base de $M_{2\times3}(\mathbb{R})$.

Convendrá mirar a las matrices como vectores de $\mathbb{R}^6$ para poder operar con estos vectores. La forma más obvia de hacerlo es construir un vector de 6 coordenadas a partir de cada matriz con la primera fila y a continuación la segunda. Haciendo esto obtenemos los vectores

$$(1,0,2,0,-1,-3),\ (1,0,1,-2,1,0),\ (1,2,3,3,2,1).$$

Una forna de extender la base es primero construir una matriz con los vectores fila y hallar la MRF. Los vectores que obtenemos en la MRF generan el mismo subespacio que los vectores originales y los podemos completar a una base de $\mathbb{R}^6$ con vectores canónicos. Hagamos el procedimiento:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & -1 & -3 \\ 1 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[F_3-F_1]{F_2-F_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 3 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[F_3/2]{F_2/(-1)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & \frac{3}{2} & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow[F_3-\frac{1}{2}F_2]{F_1-2F_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -4 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{5}{2} & \frac{7}{2} \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{F_2 \leftrightarrow F_3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -4 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{5}{2} & \frac{7}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -2 & -3 \end{bmatrix}.$$

Luego el conjunto LI

$$\{(1,0,2,0,-1,-3), (1,0,1,-2,1,0), (1,2,3,3,2,1)\}$$

se puede completar a una base con los vectores canónicos

$$(0,0,0,1,0,0), \ (0,0,0,0,1,0), \ (0,0,0,0,0,1).$$

Volviendo a $M_{2\times 3}(\mathbb{R})$, los vectores canónicos son las matrices

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

que completan a una base.

b) Lo haremos de forma análoga alo que hicimos en *a)*. Debemos hallar la MRF de la matriz formada por los vectores dados como filas:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{F_2-F_1} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{F_2/(-2)} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{F_1-2F_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}.$$

Luego, los vectores que completan a una base son $(0,0,1,0)$ y $(0,0,0,1)$. Por supuesto, también podemos completar con otros pares de vectores, pero estos son los más simples.

c) Este inciso lo haremos de otra forma: primero encontraremos la forma implícita del subespacio y luego agregaremos vectores con un criterio que explicaremos más adelante. Para encontrar la forma implícita del subespacio planteamos la ecuación:

$$\lambda_1(1,2,1,1) + \lambda_2(1,0,1,1) + \lambda_3(3,2,3,4) = (b_1, b_2, b_3, b_4).$$

Es decir, debemos resolver el sistema

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + 3\lambda_3 = b_1 \\ 2\lambda_1 + 2\lambda_3 = b_2 \\ \lambda_1 + \lambda_2 + 3\lambda_3 = b_3 \\ \lambda_1 + \lambda_2 + 4\lambda_3 = b_4 \end{cases}$$

Planteamos la matriz ampliada y hacemos Gauss:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & b_1 \\ 2 & 0 & 2 & b_2 \\ 1 & 1 & 3 & b_3 \\ 1 & 1 & 4 & b_4 \end{array}\right] \underset{\substack{F_3-F_1 \\ F_4-F_1}}{\xrightarrow{F_2-2F_1}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & b_1 \\ 0 & -2 & -4 & b_2-2b_1 \\ 0 & 0 & 0 & b_3-b_1 \\ 0 & 0 & 1 & b_4-b_1 \end{array}\right]$$

Luego el subespacio generado por los vectores del enunciado tiene por forma implícita

$$\{(b_1, b_2, b_3, b_4) \in \mathbb{R}^4 : b_3 = b_1\}.$$

Cualquier vector que no cumpla esta condición no pertenece al subespacio y por lo tanto completa a una base. Por ejemplo, $(0, 0, 1, 0)$ completa a una base.

□

(14) Dar subespacios vectoriales W_0, W_1, W_2 y W_3 de $\mathbb{R}^3$ tales que $W_0 \subset W_1 \subset W_2 \subset W_3$ y $\dim W_0 = 0$, $\dim W_1 = 1$, $\dim W_2 = 2$ y $\dim W_3 = 3$.

Solución: El único subespacio vectorial de dimensión 0 es $\{0\}$. Por lo tanto, $W_0 = \{0\}$. Sea $W_1 = \langle(1, 0, 0)\rangle$ y $W_2 = \langle(1, 0, 0), (0, 1, 0)\rangle$. El único subespacio de $\mathbb{R}^3$ de dimensión 3 es $\mathbb{R}^3$. Por lo tanto, $W_3 = \mathbb{R}^3$.

□

(15) Sea V un espacio vectorial de dimensión n y $\mathcal{B} = \{v_1, ..., v_n\}$ una base de V.

a) Probar que cualquier subconjunto no vacío de $\mathcal{B}$ es LI.

b) Para cada $k \in \mathbb{N}_0$, con $0 \leq k \leq n$, dar un subespacio vectorial de V de dimensión k.

Solución:

a) Sea $W = \{v_{i_1}, ..., v_{i_k}\}$ un subconjunto no vacío de $\mathcal{B}$. Supongamos que W es LD. Entonces existen $\lambda_1, ..., \lambda_k \in \mathbb{K}$, no todos nulos, tales que

$$\lambda_1 v_{i_1} + \cdots + \lambda_k v_{i_k} = 0.$$

Luego existe una combinación lineal no trivial de los elementos de la base que da como resultado el vector nulo. Más explicitamente si $\mu_i = 0$ para $i \neq i_1, \ldots, i_k$ y $\mu_{i_j} = \lambda_j$ para $j = 1, \ldots, k$, entonces

$$\mu_1 v_1 + \cdots + \mu_n v_n = 0,$$

y no todos los μ_i son nulos. Esto contradice que $\mathcal{B}$ sea una base. Por lo tanto, W es LI.

b) Sea $W_k = \langle v_1, ..., v_k \rangle$. Entonces W_k es un subespacio de V de dimensión k. En efecto, como $\mathcal{B}$ es una base de V, entonces W_k es un subespacio de V. Por otra parte, por *a)*, los $v_1, ..., v_k$ son LI. Por lo tanto, $\dim W_k = k$.

$\square$

(16) Dar una base y calcular la dimensión de $\mathbb{C}^n$ como $\mathbb{C}$-espacio vectorial y como $\mathbb{R}$-espacio vectorial.

SOLUCIÓN: una base de $\mathbb{C}^n$ como $\mathbb{C}$-espacio vectorial es $\{e_1, \ldots, e_n\}$, donde e_i es el vector cuyas coordenadas son todas nulas excepto la i-ésima que es 1. Por lo tanto, $\dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C}^n = n$.

Una base de $\mathbb{C}^n$ como $\mathbb{R}$-espacio vectorial es $\{e_1, \ldots, e_n, ie_1, \ldots, ie_n\}$, donde e_i es el vector cuyas coordenadas son todas nulas excepto la i-ésima que es 1. Por lo tanto, $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{C}^n = 2n$.

$\square$

(17) Exhibir una base y calcular la dimensión de los siguientes subespacios.

a) Los subespacios del ejercicio (8).
b) $W = \{(x, y, z, w, u) \in \mathbb{R}^5 \ : \ y = x - z, \ w = x + z, \ u = 2x - 3z\}$.
c) $W = \langle (1, 0, -1, 1), (1, 2, 1, 1), (0, 1, 1, 0), (0, -2, -2, 0) \rangle \subseteq \mathbb{R}^4$.
d) Matrices triangulares superiores 2×2 y 3×3.
e) Matrices triangulares superiores $n \times n$ para cualquier $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$.

SOLUCIÓN:

a) En el ejercicio (8) ya dimos conjuntos de generadores para cada subespacio y es sencillo comprobar que cada uno de estos subconjuntos son LI y por lo tanto son base. Solo resta calcular la dimensión. Listemos los subespacios y sus respectivas bases, lo cual nos dirá la dimensión de cada uno.

- $W_1 = \{(0, 0, 0)\}$ es un subespacio de $\mathbb{R}^3$ y $\dim W_1 = 0$. Luego su base es $\emptyset$.
- $W_2 = \langle (4, 3, 1) \rangle$ es un subespacio de $\mathbb{R}^3$ y $\dim W_2 = 1$.
- $W_3 = \langle (1, 1, 1, 0), (-2, -2-, 0 - 1) \rangle$ es un subespacio de $\mathbb{R}^4$ y $\dim W_3 = 2$.
- $W_4 = \langle (1, -2, 0), (0, -3, 1) \rangle$ es un subespacio de $\mathbb{R}^3$ y $\dim W_4 = 2$.
- $W_5 = \langle (-1, 1, 1, 0), (1, 1, 0, 1) \rangle$ es un subespacio de $\mathbb{R}^4$ y $\dim W_5 = 2$.
- $W_6 = \langle (1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1) \rangle$ es un subespacio de $\mathbb{R}^3$ y $\dim W_6 = 3$.

b) Observar que

$$
\begin{aligned}
W &= \{(x, y, z, w, u) \in \mathbb{R}^5 \ : \ y = x - z, \ w = x + z, \ u = 2x - 3z\} \\
&= \{(x, x - z, z, x + z, 2x - 3z) \in \mathbb{R}^5 \ : \ x, z \in \mathbb{R}\} \\
&= \{(x, x, 0, x, 2x) + (0, -z, z, z, -3z) \in \mathbb{R}^5 \ : \ x, z \in \mathbb{R}\} \\
&= \{x(1, 1, 0, 1, 2) + z(0, -1, 1, 1, -3) \in \mathbb{R}^5 \ : \ x, z \in \mathbb{R}\} \\
&= \langle (1, 1, 0, 1, 2), (0, -1, 1, 1, -3) \rangle.
\end{aligned}
$$

Por lo tanto, $\{(1,1,0,1,2),(0,-1,1,1,-3)\}$ es una base y la dimensión del subespacio es 2.

c) Para ver la dimensión planteamos la matriz donde los vectores fila son los vectores del enunciado y hacemos Gauss para obtener una MRF:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[F_4-F_1]{F_3+F_1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{F_3-F_2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$
$$\xrightarrow{F_2/2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[F_1-F_2]{} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Luego una base del subespacio es $\{(1,0,-\frac{1}{2},1),(0,1,\frac{1}{2},-1)\}$ y por lo tanto la dimensión es 2.

d) Una base de las matrices triangulares superiores 2×2 es

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\},$$

y por lo tanto su dimensión es 3.

Una base de las matrices triangulares superiores 3×3 es

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right\},$$

y por lo tanto su dimensión es 6.

e) Este inciso es una generalización del anterior. Denotemos E_{ij} a la matriz cuyas entradas son todas nulas excepto la i-ésima fila y la j-ésima columna, que es 1. Es decir, E_{ij} es la matriz que tiene un 1 en la posición (i,j) y ceros en el resto de las posiciones. Entonces, una base de las matrices triangulares superiores $n\times n$ es

$$\mathcal{B} = \{E_{11}, E_{12}, \ldots, E_{1n}, E_{22}, E_{23}, \ldots, E_{2n}, \ldots, E_{n-1,n}, E_{nn}\},$$

escrito de forma más compacta y precisa,

$$\mathcal{B} = \left\{E_{ij} \in M_{n\times n}(\mathbb{R}) \;:\; 1 \le i \le j \le n\right\}.$$

Calculemos ahora la dimensión de este subespacio. Para eso debemos ver cuántos elementos tiene $\mathcal{B}$. Observar que la diagonal tiene n elementos de la base, todos los de la forma E_{ii}, $1 \le i \le n$. Justo encima de la diagonal hay $n-1$ elementos de la base, todos los de la forma $E_{i,i+1}$, $1 \le i \le n-1$. Encima de esta última diagonal "menor" hay $n-2$ elementos de la base, todos los de la forma $E_{i,i+2}$, $1 \le i \le n-2$. Y así sucesivamente hasta llegar a la última diagonal menor, donde hay un solo elemento de la base, $E_{n,n}$. Por lo tanto, la cantidad de elementos de la base es

$$n + (n-1) + (n-2) + \cdots + 1 = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Luego la dimensión del subespacio formado por las matrices triangulares superiores es $\dfrac{n(n+1)}{2}$.

□

(18) Sean W_1 y W_2 los siguientes subespacios de $\mathbb{R}^3$:

$$W_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;:\; x + y - 2z = 0\},$$
$$W_2 = \langle (1,-1,1), (2,1,-2), (3,0,-1) \rangle.$$

a) Determinar $W_1 \cap W_2$, y describirlo por generadores y con ecuaciones.
b) Determinar $W_1 + W_2$, y describirlo por generadores y con ecuaciones.

Solución:

a) La forma más sencilla de hacer este ejercicio es encontrar la descripción de manera implícita de W_2 y agregando estas ecuaciones a las de W_1 encontramos la forma implícita de $W_1 \cap W_2$. A partir de esta forma implícita se encuentran los generadores.

Los vectores de W_2 son los (b_1, b_2, b_3) tales que

$$\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} = \lambda_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} + \lambda_2 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} + \lambda_3 \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 + 2\lambda_2 + 3\lambda_3 \\ -\lambda_1 + \lambda_2 \\ \lambda_1 - 2\lambda_2 - \lambda_3 \end{bmatrix}.$$

Plantemos la matriz ampliado del sistema y hallamos una MRF:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & b_1 \\ -1 & 1 & 0 & b_2 \\ 1 & -2 & -1 & b_3 \end{array}\right] \xrightarrow[F_2+F_1]{F_3-F_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & b_1 \\ 0 & 3 & 3 & b_1 + b_2 \\ 0 & -4 & -4 & -b_1 + b_3 \end{array}\right]$$
$$\xrightarrow{F_2/3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & b_1 \\ 0 & 1 & 1 & \frac{1}{3}(b_1 + b_2) \\ 0 & -4 & -4 & -b_1 + b_3 \end{array}\right] \xrightarrow{F_3+4F_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & b_1 \\ 0 & 1 & 1 & \frac{1}{3}(b_1 + b_2) \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3}b_1 + \frac{4}{3}b_2 + b_3 \end{array}\right].$$

Luego

$$W_2 = \left\{ (b_1, b_2, b_3) \in \mathbb{R}^3 \;:\; \frac{1}{3}b_1 + \frac{4}{3}b_2 + b_3 = 0 \right\},$$

o equivalentemente,

$$W_2 = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;: x + 4y + 3z = 0 \right\}.$$

Por lo tanto,

$$W_1 \cap W_2 = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;:\; x + y - 2z = 0 \text{ y } x + 4y + 3z = 0 \right\}.$$

Para encontrar una base de $W_1 \cap W_2$ debemos resolver el sistema

$$\begin{cases} x + y - 2z = 0 \\ x + 4y + 3z = 0. \end{cases}$$

Planteamos la matriz correspondiente al sistema y hacemos Gauss:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & 4 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{F_2 - F_1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & 5 \end{bmatrix} \xrightarrow{F_2/3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & \frac{5}{3} \end{bmatrix} \xrightarrow{F_1 - F_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{11}{3} \\ 0 & 1 & \frac{5}{3} \end{bmatrix}.$$

Es decir que la solución del sistema es

$$\begin{cases} x = -\frac{11}{3} z \\ y = \frac{5}{3} z. \end{cases}$$

Por lo tanto, una base de $W_1 \cap W_2$ es $\{(-11, 5, 3)\}$ y la dimensión es 1.

b) Para encontrar vectores que generan $W_1 + W_2$ unimos el conjunto de vectores que generan W_1 con el conjunto de vectores que generan W_2. Ahora bien,

$$\begin{aligned} W_1 &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \;:\; x + y - 2z = 0\} \\ &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \;:\; x = -y + 2z\} \\ &= \{(-y + 2z, y, z) \in \mathbb{R}^3 \;:\; y, z \in \mathbb{R}\} \\ &= \{y(-1, 1, 0) + z(2, 0, 1) \in \mathbb{R}^3 \;:\; y, z \in \mathbb{R}\}. \end{aligned}$$

Luego $\{(-1, 1, 0), (2, 0, 1)\}$ es un conjunto de generadores de W_1. Por otra parte, $\{(1, -1, 1), (2, 1, -2), (3, 0, -1)\}$ es un conjunto de generadores de W_2. Por lo tanto, $\{(-1, 1, 0), (2, 0, 1), (1, -1, 1), (2, 1, -2), (3, 0, -1)\}$ es un conjunto de generadores de $W_1 + W_2$.

Para encontrar una base de $W_1 + W_2$ plantemos la matriz cuyas filas son los vectores del conjunto de generadores y encontramos una MRF:

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 3 & 0 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow[F_5+3F_1]{\substack{F_2+2F_1 \\ F_3+F_1 \\ F_4+2F_1}} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & 3 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[F_5-F_4]{\substack{F_5-F_3 \\ F_4-F_3 \\ F_2/2}} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -\frac{5}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \xrightarrow[F_5-\frac{1}{2}F_3]{\substack{F_1-F_2 \\ F_4+\frac{5}{2}F_3}} \begin{bmatrix} -1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Luego $\{(-1, 0, -\frac{1}{2}), (0, 1, \frac{1}{2}), (0, 0, 1)\}$ es una base de $W_1 + W_2$ y por lo tanto la dimensión es 3, es decir el subespacio es $\mathbb{R}^3$.

□

(19) Decidir si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justificar.

a) Si W_1 y W_2 son subespacios vectoriales de $\mathbb{K}^8$ de dimensión 5, entonces $W_1 \cap W_2 = 0$.

b) Si W es un subespacio de $\mathbb{K}^{2\times 2}$ de dimensión 2, entonces existe una matriz triangular superior no nula que pertence a W.

c) Sean $v_1, v_2, w \in \mathbb{K}^n$ y $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ tales que $Av_1 = Av_2 = 0 \neq Aw$. Si $\{v_1, v_2\}$ es LI, entonces $\{v_1, v_2, w\}$ también es LI.

d) $\{1, \operatorname{sen}(x), \cos(x)\}$ es un subconjunto LI del espacio de funciones de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$.

e) $\{1, \operatorname{sen}^2(x), \cos^2(x)\}$ es un subconjunto LI del espacio de funciones $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$.

f) $\{e^{\lambda_1 x}, e^{\lambda_2 x}, e^{\lambda_3 x}\}$ es un subconjunto LI del espacio de funciones de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$, si λ_1, λ_2 y λ_3 son todos distintos.

SOLUCIÓN:

a) Falso. Por ejemplo, si $W_1 = \langle e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\rangle$ y $W_2 = \langle e_4, e_5, e_6, e_7, e_8\rangle$, entonces $W_1 \cap W_2 = \langle e_4, e_5\rangle$. En este ejemplo $\dim W_1 = \dim W_2 = 5$ y $\dim W_1 \cap W_2 = 2$.

b) Verdadero. Sean

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{bmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{bmatrix}$$

matrices que son base del subespacio de dimensión 2. Si $c = 0$, entonces A es triangular superior. Si $c' = 0$, entonces B es triangular superior. Si $c \neq 0$ y $c' \neq 0$, entonces $\frac{1}{c}A - \frac{1}{c'}B$ es cero en fila 2 y columna 1 y por lo tanto es triangular superior y no nula (pues A y B son LI). Es decir en cualquier caso encontramos una matriz no nula y triangular superior.

c) Verdadero. Seaan $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{K}$ tales que $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 w = 0$. Ahora bien,

$$0 = A(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 w) = \lambda_1 Av_1 + \lambda_2 Av_2 + \lambda_3 Aw = \lambda_3 Aw.$$

Como $Aw \neq 0$, entonces $\lambda_3 = 0$. Por lo tanto, $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 = 0$. Como $\{v_1, v_2\}$ es LI, entonces $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$. Es decir, $\{v_1, v_2, w\}$ es LI.

d) Verdadero. Supongamos que

$$a + b\operatorname{sen}(x) + c\cos(x) = 0.$$

Evaluando en $x = 0$ obtenemos $a + c = 0$. Evaluando en $x = \pi$ obtenemos $a - c = 0$. Sumando ambas ecuaciones obtenemos $a = 0$. Luego $c = 0$ y por lo tanto $b = 0$. Es decir, $\{1, \operatorname{sen}(x), \cos(x)\}$ es LI.

e) Falso. Por ejemplo, $\cos^2(x) = 1 - \operatorname{sen}^2(x)$, luego $\cos^2(x)$ es combinación lineal de 1 y $\operatorname{sen}^2(x)$.

f) Verdadero. Supongamos que

$$ae^{\lambda_1 x} + be^{\lambda_2 x} + ce^{\lambda_3 x} = 0. \tag{6.1}$$

Si derivamos la ecuación (6.1) obtenemos

$$a\lambda_1 e^{\lambda_1 x} + b\lambda_2 e^{\lambda_2 x} + c\lambda_3 e^{\lambda_3 x} = 0. \tag{6.2}$$

Derivemos nuevamente:

$$a\lambda_1^2 e^{\lambda_1 x} + b\lambda_2^2 e^{\lambda_2 x} + c\lambda_3^2 e^{\lambda_3 x} = 0. \tag{6.3}$$

Especializando (6.1), (6.2) y (6.3) en $x = 0$ obtenemos

$$\begin{aligned} a + b + c &= 0, \\ a\lambda_1 + b\lambda_2 + c\lambda_3 &= 0, \\ a\lambda_1^2 + b\lambda_2^2 + c\lambda_3^2 &= 0. \end{aligned}$$

Es decir, el sistema

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \lambda_3^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Observar que la matriz de la izquierda es similar a la matriz de Vandermonde y es fácil probar que tiene el mismo determinante, es decir $(\lambda_3 - \lambda_2)(\lambda_3 - \lambda_1)(\lambda_2 - \lambda_1)$ (ver práctico 4, ejercicio (9)). Como los λ_i son distintos, entonces el determinante es distinto de cero y por lo tanto la única solución del sistema es $a = b = c = 0$. Es decir, $\{e^{\lambda_1 x}, e^{\lambda_2 x}, e^{\lambda_3 x}\}$ es LI.

□

PRÁCTICO 7

Soluciones
Álgebra II – Año 2024/1 – FAMAF

Completar.