

Álgebra/Álgebra II

Clase 14- Dimensión. Subespacios

FAMAF / UNC

14 de mayo de 2024

Recordemos este importante resultado de la clase anterior:

Sea V un espacio vectorial y $T \subset V$, finito tal que $\langle T \rangle = V$. Sea $S \subset V$.

Entonces

$$\langle T \rangle = V, \quad S \text{ es LI} \Rightarrow |S| \leq |T|. \quad (\text{P1})$$

El contrarrecíproco también nos resultará de utilidad

$$\langle T \rangle = V, \quad |S| > |T| \Rightarrow S \text{ es LD.} \quad (\text{P2})$$

Dimensiones de subespacios

- Si A matriz $m \times n$, entonces $W = \{x : Ax = 0\}$ es un subespacio.
- ¿Cuál es la dimensión de W ? ¿Qué relación tiene con R , una MRF equivalente a A ?
- Veremos que si r es la cantidad de filas no nulas de R , entonces $\dim(W) = n - r$.

Ejemplo

Encontrar una base del subespacio

$$W = \left\{ (x, y, z, w) \in \mathbb{R} : \begin{array}{rcl} x - y - 3z + w & = & 0 \\ y + 5z + 3w & = & 0 \end{array} \right\}.$$

Solución

W está definido implícitamente y usando el método de Gauss podemos describirlo paramétricamente, pues:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 5 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{F_1 + F_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 5 & 3 \end{bmatrix}.$$

Por lo tanto, el sistema de ecuaciones que define W es equivalente a

$$\begin{aligned}x + 2z + 4w &= 0 \\ y + 5z + 3w &= 0,\end{aligned}$$

es decir

$$\begin{aligned}x &= -2z - 4w \\ y &= -5z - 3w,\end{aligned}$$

y entonces

$$\begin{aligned}W &= \{(-2z - 4w, -5z - 3w, z, w) : z, w \in \mathbb{R}\} \\ &= \{(-2, -5, 1, 0)z + (-4, -3, 0, 1)w : z, w \in \mathbb{R}\} \\ &= \langle (-2, -5, 1, 0), (-4, -3, 0, 1) \rangle.\end{aligned}$$

Concluimos entonces que $(-2, -5, 1, 0), (-4, -3, 0, 1)$ es una base de W y, por lo tanto, su dimensión es 2. □

Proposición

Sea A matriz $m \times n$ y sea $W = \{x : Ax = 0\}$.

Sea R una MRF equivalentes por filas a A y sea r la cantidad de filas no nulas de R .

Entonces $\dim(W) = n - r$.

Demostración

Es posible hacer esta demostración con las herramientas actuales. Sin embargo, haremos una demostración mucho más conceptual de este hecho cuando veamos transformaciones lineales. □

Definición

Sea $A = [a_{ij}] \in M_{m \times n}(\mathbb{K})$.

- El *vector fila* i es el vector $(a_{i1}, \dots, a_{in}) \in \mathbb{K}^n$.
- El *espacio fila* de A es el subespacio de \mathbb{K}^n generado por los m vectores fila de A .
- El *vector columna* j es el vector $(a_{1j}, \dots, a_{mj}) \in \mathbb{K}^m$.
- El *espacio columna* de A es el subespacio de \mathbb{K}^m generado por los n vectores columna de A .

Ejemplo

Sea

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

El vector fila 1 es $(1, 2, 0, 3, 0)$, el vector columna 4 es $(3, 4, 0)$, etc.

Sea W el espacio fila de A . entonces

$$W = \langle (1, 2, 0, 3, 0), (0, 0, 1, 4, 0), (0, 0, 0, 0, 1) \rangle$$

Sea U el espacio columna de A . Entonces:

$$U = \langle (1, 0, 0), (2, 0, 0), (0, 1, 0), (3, 4, 0), (0, 0, 1) \rangle = \mathbb{R}^3.$$

Teorema

Sean A matriz $m \times n$ con coeficientes en \mathbb{K} , P matriz $m \times m$ invertible y $B = PA$. Entonces el espacio fila de A es igual al espacio fila de B .

Demostración

Sea W_1 espacio fila de A y W_2 espacio fila de B .

Sea $A = [a_{ij}]$, $P = [p_{ij}]$ y $B = [b_{ij}]$. Como $B = PA$, tenemos que la fila i de B es

$$\begin{aligned}(b_{i1}, \dots, b_{in}) &= (F_i(P) \cdot C_1(A), \dots, F_i(P) \cdot C_n(A)) \\&= \left(\sum_{j=1}^m p_{ij} a_{j1}, \dots, \sum_{j=1}^m p_{ij} a_{jn} \right) \\&= \sum_{j=1}^m p_{ij} (a_{j1}, \dots, a_{jn}).\end{aligned}\tag{*}$$

- por (*) cada vector fila de B se puede obtener como combinación lineal de los vectores fila de A .
- Por lo tanto el espacio fila de B está incluido en el espacio fila de A : $W_2 \subset W_1$.
- P invertible $\Rightarrow \exists P^{-1}$.
- $P^{-1}B = P^{-1}PA = A$.
- Un razonamiento análogo al (*) de la página anterior \Rightarrow espacio fila de A está incluido en el espacio fila de B : $W_1 \subset W_2$.

$$W_2 \subset W_1 \quad \wedge \quad W_1 \subset W_2 \quad \Rightarrow \quad W_1 = W_2. \quad \square$$

Corolario

Sean A matriz $m \times n$ y R una MRF equivalente por filas a A . Entonces,

1. el espacio fila de A es igual al espacio fila de R ,
2. las filas no nulas de R forman una base del espacio fila de A .

Demostración

(1) R la MRF equivalente por filas a $A \Rightarrow R = PA$ con P invertible $\xRightarrow{\text{Teor. ant.}}$ espacio fila de $A =$ espacio fila de B .

(2) R es MRF \Rightarrow cada fila no nula comienza con un 1 y en esa coordenada todas las demás filas tienen un 0 \Rightarrow las filas no nulas de R son LI \Rightarrow las filas no nulas de R son base.



Corolario

Sean A matriz $n \times n$. Entonces, A es invertible si y sólo si las filas de A son una base de \mathbb{K}^n .

Demostración

Si A es invertible entonces la MERF de A es la identidad, por lo tanto el espacio fila de A genera \mathbb{K}^n .

Por otro lado, si el espacio fila de A genera \mathbb{K}^n , el espacio fila de la MERF es \mathbb{K}^n y por lo tanto la MERF de A es la identidad y en consecuencia A es invertible.

Hemos probado que A es invertible si y sólo si las n filas de A generan \mathbb{K}^n .

Como $\dim \mathbb{K}^n = n$, todo conjunto de n generadores es una base. □

Bases de subespacios

El corolario de la p. 11 nos permite encontrar fácilmente la dimensión de un subespacio de \mathbb{K}^n generado explícitamente por m vectores.

- Sea $v_1, \dots, v_m \in \mathbb{K}^n$ y $W = \langle v_1, \dots, v_m \rangle$,
- Consideramos la matriz

$$A = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_m \end{bmatrix}$$

- Calculamos R , una MRF equivalente por filas a A .
- W = espacio fila de R .
- Si R tiene r filas no nulas, las r filas no nulas son una base de W .
- Por consiguiente, $\dim W = r$.

Ejemplo

Encontrar una base de $W = \langle (1, 0, 1), (1, -1, 0), (5, -3, 2) \rangle$.

Solución

Formemos la matriz cuyas filas son los vectores que generan W , es decir

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 5 & -3 & 2 \end{bmatrix}.$$

Entonces

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 5 & -3 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow[F_3 - 5F_1]{F_2 - F_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & -3 & -3 \end{bmatrix} \xrightarrow{-F_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & -3 \end{bmatrix} \xrightarrow{F_3 - 3F_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Por lo tanto, $\dim W = 2$ y $(1, 0, 1), (0, 1, 1)$ es una base de W . □

Subconjuntos LI de un sistema de generadores

- Dada un conjunto de generadores de un subespacio W de \mathbb{K}^n “sabemos” encontrar una base de W .
- Esa base de W , en general, utiliza otros vectores (no necesariamente los generadores).
- Veremos a continuación que dado $S = \{v_1, \dots, v_m\}$ y $W = \langle S \rangle$, podemos encontrar fácilmente un subconjunto de S base de W .

Teorema

Sea v_1, \dots, v_r vectores en \mathbb{K}^n y $W = \langle v_1, \dots, v_r \rangle$.

Sea A la matriz formada por las filas v_1, \dots, v_r y R una MRF equivalente por filas a A que se obtiene **sin** el uso de permutaciones de filas.

Si i_1, i_2, \dots, i_s filas no nulas de $R \Rightarrow v_{i_1}, v_{i_2}, \dots, v_{i_s}$ base de W .

Demostración

Se hará por inducción sobre r .

Si $r = 1$ es trivial ver que vale la afirmación.

Supongamos que tenemos el resultado probado para $r - 1$ (hipótesis inductiva).

Sea $W' = \langle v_1, \dots, v_{r-1} \rangle$ y sea A' la matriz formada por las $r - 1$ filas v_1, \dots, v_{r-1} . Sea R' la MRF equivalente por filas a A' que se obtiene sin usar permutaciones de filas. Por hipótesis inductiva, si i_1, i_2, \dots, i_s son las filas no nulas de R' , entonces $v_{i_1}, v_{i_2}, \dots, v_{i_s}$ es una base de W' .

Sea

$$R_0 = \begin{bmatrix} R' \\ v_r \end{bmatrix}.$$

Si $v_r \in W'$, entonces $v_{i_1}, v_{i_2}, \dots, v_{i_s}$ es una base de W y

$$R = \begin{bmatrix} R' \\ 0 \end{bmatrix}$$

es la MRF de A .

Si $v_r \notin W'$, entonces $v_{i_1}, v_{i_2}, \dots, v_{i_s}, v_r$ es una base de W y la MRF de A tiene la última fila no nula. □

Finalmente, terminaremos la clase con un teorema que resume algunas equivalencias respecto a matrices invertibles.

Teorema

Sea A matriz $n \times n$ con coeficientes en \mathbb{K} . Entonces son equivalentes

- 1. A es invertible.*
- 2. A es equivalente por filas a Id_n .*
- 3. A es producto de matrices elementales.*
- 4. El sistema $AX = Y$ tiene una única solución para toda matriz Y de orden $n \times 1$.*
- 5. El sistema homogéneo $AX = 0$ tiene una única solución trivial.*
- 6. $\det A \neq 0$.*
- 7. Las filas de A son LI.*
- 8. Las columnas de A son LI.*