Álgebra/Álgebra II
Clase 15 - Transformaciones lineales. Núcleo e imagen

FAMAF / UNC

9 de mayo de 2024

Una transformación lineal es una función entre dos espacios vectoriales que preserva la suma y multiplicación por escalares.

$$T : V \to W, \quad \text{tal que} \quad T(v + \lambda v_0) = T(v) + \lambda T(v_0)$$

Ya conocemos algunas transformaciones lineales, aunque no las llamemos así. Por ejemplo:

- La derivada: $f + cg \mapsto f' + cg'$.
- La integral: $\int_a^b (f + cg)\, dx = \int_a^b f\, dx + c \int_a^b g\, dx$.
- La multiplicación por matrices: $A(v + \lambda v_0) = Av + \lambda A v_0$.

La propiedad de preservar las operaciones de espacios vectoriales es de utilidad para facilitar cálculos.

En esta parte de la materia estudiaremos las transformaciones lineales y veremos que información nos dan de los espacios vectoriales.

Definición

Una *transformación lineal* entre dos espacios vectoriales V y W es una función $T : V \longrightarrow W$ tal que

(1) Preserva la suma:

$$T(v+v') = T(v) + T(v') \quad \forall\, v, v' \in V$$

(2) Preserva el producto por escalares

$$T(\lambda v) = \lambda T(v) \quad \forall\, v \in V,\ \lambda \in \mathbb{R}$$

Observación

$T : V \longrightarrow W$ es transformación lineal $\Leftrightarrow$

$$T(v+\lambda v') = T(v) + \lambda T(v') \quad \forall\, v, v' \in V, \lambda \in \mathbb{K}.$$

Como ya fue dicho, ya conocemos algunas transformaciones lineales. Por ejemplo:

- La derivada:

$$(f + cg)' = f' + cg'$$

- La integral:

$$\int_a^b (f + cg)\, dx = \int_a^b f\, dx + c \int_a^b g\, dx.$$

- La multiplicación por matrices:

$$A(v + \lambda v') = Av + \lambda Av'$$

Ejemplos de transformaciones lineales

Ejemplo

Sea $T : \mathbb{K}^3 \to \mathbb{K}^2$ definida por

$$T(x_1, x_2, x_3) = (2x_1 - x_3, -x_1 + 3x_2 + x_3).$$

Entonces, T es una transformación lineal.

La demostración es rutinaria y parte de un resultado más general.

Observar que si

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -1 & 3 & 1 \end{bmatrix},$$

entonces

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -1 & 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x_1 - x_3 \\ -x_1 + 3x_2 + x_3 \end{bmatrix}.$$

Observación

Sea $T : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$. En general si $T(x_1, \dots, x_n)$ en cada coordenada tiene una combinación lineal de los $x_1, \dots, x_n$, entonces T es una transformación lineal. Mas precisamente, si T está definida por

$$\begin{aligned} T(x_1, \dots, x_n) &= (a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n, \ \dots \ , a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n) \\ &= (\sum_{j=1}^{n} a_{1j}x_j, \dots, \sum_{j=1}^{n} a_{mj}x_j), \end{aligned}$$

con $a_{ij} \in \mathbb{K}$, entonces T es lineal.

Demostración

Ejercicio. Lo vemos en p. 22. $\square$

(contra)Ejemplos

Ejemplo

No todas las funciones son transformaciones lineales. La función $f(x) = x^2$ de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ no es lineal. Probamos esto dando un ejemplo concreto donde no se verifique algunas de las propiedades. Por ejemplo:

$$(1+1)^2 = 4 \neq 2 = 1^2 + 1^2.$$

Observación

Sea $T : V \longrightarrow W$ una transformación lineal. Entonces $T(0) = 0$.

Demostración

$$
\begin{aligned}
T(0) &= T(0+0) \\
T(0) &= T(0) + T(0) && \text{(linealidad de } T\text{)} \\
-T(0) + T(0) &= -T(0) + T(0) + T(0) \\
0 &= 0 + T(0) = T(0).
\end{aligned}
$$

□

Entre otras cosas esta propiedad, es útil como “test” para verificar si una función *no* es transformación lineal.

Ejemplo

Sea V un espacio vectorial y $v_0 \in V$ un vector no nulo. Entonces la función $f : V \longrightarrow V$ dada por

$$f(v) = v + v_0 \quad \forall v \in V$$

no es lineal dado que

$$f(0) = 0 + v_0 = v_0 \neq 0.$$

Observación

Las transformaciones lineales preservan combinaciones lineales, es decir si $T : V \longrightarrow W$ es una transformación lineal, $v_1, ..., v_k \in V$ y $\lambda_1, ..., \lambda_k \in \mathbb{R}$, entonces

$$T(\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_k v_k) = \lambda_1 T(v_1) + \cdots + \lambda_k T(v_k)$$

Esquema de la demostración

La demostración sigue por inducción y aplicando la definición de t. lineal.

- **Caso base.** $T(\lambda_1 v_1) = \lambda_1 T(v_1)$. Lo cual es cierto porque es una de las condiciones de la definición de transformación lineal.
- **Paso inductivo.**

$$\begin{aligned} T(\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_k v_k) &= T(\lambda_1 v_1) + T(v_2 + \cdots + \lambda_k v_k) && \text{(T es t.l.)} \\ &= \lambda_1 T(v_1) + \cdots + \lambda_k T(v_k) && \text{(C.B. e HI)} \end{aligned}$$

$\square$

Definición

Sea $T : V \longrightarrow W$ una transformación lineal.

- La *imagen de* T es el subconjunto de W

$$\mathrm{Im}(T) = \{T(v) \mid v \in V\} = \{w \in W \mid T(v) = w\}$$

- El *núcleo de* T es el subconjunto de V

$$\mathrm{Nu}(T) = \{v \in V \mid T(v) = 0\}$$

Observación

- $\text{Im}(T)$ se define como la imagen de cualquier función.
- $\text{Nu}(T)$ serían las raíces de la transformación.
- $\text{Nu}(T)$ es definido de forma implícita al igual que la segunda expresión de $\text{Im}(T)$.
- La primera expresión de $\text{Im}(T)$ es de forma explícita o paramétrica, donde el parámetro es un vector.

Notación

Si $T : V \to W$ transformación lineal denotamos

$$T(V) := \{T(v) : v \in V\} = \text{Im}(T).$$

El núcleo y la imagen son importante entre otras cosas por lo siguiente.

Teorema

Sea $T : V \longrightarrow W$ una transformación lineal. Entonces

- $\mathrm{Im}(T)$ es un subespacio vectorial de W.
- $\mathrm{Nu}(T)$ es un subespacio vectorial de V.

A continuación haremos la demostración.

Demostración: $\mathrm{Nu}(T)$ es subespacio

- $\mathrm{Nu}(T) \neq \emptyset$ pues $T(0) = 0$ y por lo tanto $0 \in \mathrm{Nu}(T)$.
- Si $v, w \in V$ tales que $T(v) = 0$ y $T(w) = 0$, entonces,
  - $T(v + w) = T(v) + T(w) = 0 \Rightarrow v + w \in \mathrm{Nu}(T)$.
  - Si $\lambda \in \mathbb{K}$, entonces $T(\lambda v) = \lambda T(v) = \lambda.0 = 0 \Rightarrow \lambda v \in \mathrm{Nu}(T)$.

Demostración: $\operatorname{Im}(T)$ es subespacio

- $\operatorname{Im}(T) \neq \emptyset$, pues $0 = T(0) \in \operatorname{Im}(T)$.
- Si $T(v_1), T(v_2) \in \operatorname{Im}(T)$ y $\lambda \in \mathbb{K}$, entonces
  - $T(v_1) + T(v_2) = T(v_1 + v_2) \in \operatorname{Im}(T)$.
  - $\lambda T(v_1) = T(\lambda v_1) \in \operatorname{Im}(T)$.

Lema

Sea $T : V \longrightarrow W$ una transformación lineal con V de dimensión finita. Sea $\{v_1, ..., v_k\}$ una base de V. Entonces $\{T(v_1), ..., T(v_k)\}$ genera a $\mathrm{Im}(T)$ y por lo tanto $\mathrm{Im}(T)$ es de dimensión finita.

Demostración

Por hipotesis: $V = \langle v_1, ..., v_k \rangle = \{\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_k v_k \mid \lambda_1, ..., \lambda_k \in \mathbb{K}\}$.

$$\text{Luego,} \quad \begin{aligned} \mathrm{Im}(T) &= \{T(v) \mid v \in V\} \\ &= \{T(\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_k v_k) \mid \lambda_1, ..., \lambda_k \in \mathbb{K}\} \\ &= \{\lambda_1 T(v_1) + \cdots + \lambda_k T(v_k) \mid \lambda_1, ..., \lambda_k \in \mathbb{K}\} \\ &= \langle T(v_1), ..., T(v_k) \rangle. \end{aligned}$$

Entonces $\mathrm{Im}(T)$ es generado por $S = \{T(v_1), ..., T(v_k)\}$. Por Teorema 3.3.9, existe un subconjunto $\mathcal{B}$ de S que es base de $\mathrm{Im}(T)$. En particular, $\mathrm{Im}(T)$ es de dimensión finita. $\square$

Sea $T : V \longrightarrow W$ una transformación lineal y supongamos que V es de dimensión finita.

Como $\mathrm{Nu}(T)$ es un subespacio de un espacio dimensión $< \infty \Rightarrow \dim(\mathrm{Nu}\ T) < \infty$.

Por el lema anterior $\dim(\mathrm{Im}\ T) < \infty$.

Definición

Sea $T : V \longrightarrow W$ una transformación lineal y supongamos que V es de dimensión finita. Entonces

- El *rango de* T es la dimensión de $\mathrm{Im}(T)$.
- La *nulidad de* T es la dimensión de $\mathrm{Nu}(T)$.

Todas las transformaciones lineales entre $\mathbb{R}^n$ y $\mathbb{R}^m$ son de la forma "multiplicar por una matriz".
Más aún, toda transformación lineal entre espacios vectoriales de dimensión finita se puede expresar de esta forma.
Así que analicemos un poco más en detalle este tipo de transformaciones.

Observación

Sea $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ y consideramos la función

$$\begin{array}{rccc} T: & \mathbb{R}^n & \to & \mathbb{R}^m \\ & v & \mapsto & Av. \end{array}$$

Entonces T es una transformación lineal.

Demostración

Debemos ver que T respeta suma y producto por escalares.

Sean $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^n$ y $\lambda \in \mathbb{R}$ entonces

$$T(v_1 + \lambda v_2) = A(v_1 + \lambda v_2) = Av_1 + \lambda A v_2 = T(v_1) + \lambda T(v_2).$$

$\square$

Definición

Sea $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ y sea T la transformación lineal

$$\begin{array}{rccc} T: & \mathbb{R}^n & \to & \mathbb{R}^m \\ & v & \mapsto & Av. \end{array}$$

Diremos que T es *la transformación lineal asociada a* A o *la transformación lineal inducida por* A.

Muchas veces denotaremos a esta transformación lineal con el mismo símbolo que la matriz, es decir, en este caso con A.

Ejemplo

Consideremos la matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}$.

Entonces si $v = (x, y, z)$,

$$A(v) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x + y + z \\ 2x + 2y + 2z \end{bmatrix}$$

En particular, $(1, -1, 0) \in \mathrm{Nu}(A)$ pues

$A(1, -1, 0) = (1 + (-1) + 0, 2 \cdot 1 + 2 \cdot (-1) + 2 \cdot 0) = (0, 0)$

y

$$A(1, 0, 0) = (1, 2) \in \mathrm{Im}(A)$$
$$A(0, 1, \pi) = (1 + \pi, 2 + 2\pi) \in \mathrm{Im}(A)$$

Observación

Sea $T : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ definida por

$$T(x_1, \ldots, x_n) = (a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n, \ \ldots \ , a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n)$$

con $a_{ij} \in \mathbb{K}$, entonces

$$T(x) = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

Es decir, T es la transformación lineal inducida por la matriz $A = [a_{ij}]$.

Esto demuestra la observación de la p. 6.

Proposición

Sea $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ y $T : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ la transformación lineal asociada. Entonces

- El núcleo de T es el conjunto de soluciones del sistema homogéneo $AX = 0$
- La imagen de T es el conjunto de los $b \in \mathbb{R}^m$ para los cuales el sistema $AX = b$ tiene solución

Demostración

Se demuestra fácilmente escribiendo las definiciones de los respectivos subconjuntos.

$$v \in \mathrm{Nu}(T) \Leftrightarrow Av = 0 \Leftrightarrow v \text{ es solución de } AX = 0.$$

$$b \in \mathrm{Im}(T) \Leftrightarrow \exists v \in \mathbb{R}^n \text{ tal que } Av = b \Leftrightarrow AX = b \text{ tienen solución.}$$

□

Ejemplo

Sea $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$, definida

$$T(x, y, z) = (x + y,\, x + 2y + z,\, 3y + 3z,\, 2x + 4y + 2z).$$

(1) Describir $\mathrm{Nu}(T)$ en forma paramétrica y dar una base.

(2) Describir $\mathrm{Im}(T)$ en forma paramétrica y dar una base.

Solución

La matriz asociada a esta transformación lineal es

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 3 \\ 2 & 4 & 2 \end{bmatrix}$$

Debemos encontrar la descripción paramétrica de

$$\mathrm{Nu}(T) = \{v = (x, y, z) : A.v = 0\}$$
$$\mathrm{Im}(T) = \{y = (y_1, y_2, y_3, y_4) : \text{ tal que } \exists v \in \mathbb{R}^3, A.v = y\}$$

En ambos casos, la solución depende de resolver el sistema de ecuaciones cuya matriz asociada es A:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & y_1 \\ 1 & 2 & 1 & y_2 \\ 0 & 3 & 3 & y_3 \\ 2 & 4 & 2 & y_4 \end{array}\right] \xrightarrow[F_4 - 2F_1]{F_2 - F_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & y_1 \\ 0 & 1 & 1 & -y_1 + y_2 \\ 0 & 3 & 3 & y_3 \\ 0 & 2 & 2 & -2y_1 + y_4 \end{array}\right]$$
$$\xrightarrow[\substack{F_3 - 3F_2 \\ F_4 - 2F_2}]{F_1 - F_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 2y_1 - y_2 \\ 0 & 1 & 1 & -y_1 + y_2 \\ 0 & 0 & 0 & 3y_1 - 3y_2 + y_3 \\ 0 & 0 & 0 & -2y_2 + y_4 \end{array}\right],$$

$$T(x,y,z) = (y_1, y_2, y_3, y_4) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{aligned} x - z &= 2y_1 - y_2 \\ y + z &= -y_1 + y_2 \\ 0 &= 3y_1 - 3y_2 + y_3 \\ 0 &= -2y_2 + y_4 \end{aligned}$$

Si hacemos $y_1 = y_2 = y_3 = y_4 = 0$, entonces las soluciones del sistema describen el núcleo de T, es decir

$$\begin{aligned} \mathrm{Nu}(T) &= \{(x,y,z) : x - z = 0, y + z = 0\} = \{(s,-s,s) : s \in \mathbb{R}\} \\ &= \{s(1,-1,1) : s \in \mathbb{R}\} \end{aligned}$$

que es la forma paramétrica.

Una base del núcleo de T es $\{(1,-1,1)\}$.

$$T(x,y,z) = (y_1, y_2, y_3, y_4) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{aligned} x - z &= 2y_1 - y_2 \\ y + z &= -y_1 + y_2 \\ 0 &= 3y_1 - 3y_2 + y_3 \\ 0 &= -2y_2 + y_4 \end{aligned}$$

Luego,

$$\mathrm{Im}(T) = \{(y_1, y_2, y_3, y_4) : \text{ tal que } 0 = 3y_1 - 3y_2 + y_3 \text{ y } 0 = -2y_2 + y_4\}$$

Resolviendo este sistema, obtenemos

$$\begin{aligned} \mathrm{Im}(T) &= \{(-\frac{1}{3}s + \frac{1}{2}t, \frac{1}{2}t, s, t) : s, t \in \mathbb{R}\} \\ &= \{s(-\frac{1}{3}, 0, 1, 0) + t(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0, 1) : s, t \in \mathbb{R}\} \end{aligned}$$

.

Luego $\{(-\frac{1}{3}, 0, 1, 0), (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0, 1)\}$ es una base de $\mathrm{Im}(T)$. $\square$