Álgebra/Álgebra II
Clase 13 - Independencia lineal, bases

FAMAF / UNC

7 de mayo de 2024

Resumen

En esta clase veremos que todo espacio vectorial tiene una base, que es un conjunto de generadores mínimo. En el caso que este conjunto sea finito, todo otro conjunto de generadores mínimo tendrá el mismo número de elementos, y este número será llamado *dimensión*.

Los temas de la clase se ordenan de la siguiente forma:

Resumen

En esta clase veremos que todo espacio vectorial tiene una base, que es un conjunto de generadores mínimo. En el caso que este conjunto sea finito, todo otro conjunto de generadores mínimo tendrá el mismo número de elementos, y este número será llamado *dimensión*.

Los temas de la clase se ordenan de la siguiente forma:

- Definición de independencia lineal.

Resumen

En esta clase veremos que todo espacio vectorial tiene una base, que es un conjunto de generadores mínimo. En el caso que este conjunto sea finito, todo otro conjunto de generadores mínimo tendrá el mismo número de elementos, y este número será llamado *dimensión*.

Los temas de la clase se ordenan de la siguiente forma:

- Definición de independencia lineal.
- Definición de base (un conjunto linealmente independiente que genera el espacio).

Resumen

En esta clase veremos que todo espacio vectorial tiene una base, que es un conjunto de generadores mínimo. En el caso que este conjunto sea finito, todo otro conjunto de generadores mínimo tendrá el mismo número de elementos, y este número será llamado *dimensión*.

Los temas de la clase se ordenan de la siguiente forma:

- Definición de independencia lineal.
- Definición de base (un conjunto linealmente independiente que genera el espacio).
- Ejemplos de bases de espacios vectoriales.

Resumen

En esta clase veremos que todo espacio vectorial tiene una base, que es un conjunto de generadores mínimo. En el caso que este conjunto sea finito, todo otro conjunto de generadores mínimo tendrá el mismo número de elementos, y este número será llamado *dimensión*.

Los temas de la clase se ordenan de la siguiente forma:

- Definición de independencia lineal.
- Definición de base (un conjunto linealmente independiente que genera el espacio).
- Ejemplos de bases de espacios vectoriales.

El tema de esta clase está contenido en la sección 4.3 del apunte de clase "Álgebra II / Álgebra - Notas del teórico".

Dependencia lineal

Definición

Sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$. Un subconjunto S de V se dice *linealmente dependiente* o simplemente, *LD* o *dependiente*, si existen vectores distintos $v_1, \ldots, v_n \in S$ y escalares $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ de $\mathbb{K}$, no todos nulos, tales que

$$\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n = 0.$$

Dependencia lineal

Definición

Sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$. Un subconjunto S de V se dice *linealmente dependiente* o simplemente, *LD* o *dependiente*, si existen vectores distintos $v_1, \ldots, v_n \in S$ y escalares $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ de $\mathbb{K}$, no todos nulos, tales que

$$\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n = 0.$$

Observación

Si el conjunto $S = \{v_1, \ldots, v_n\}$, podemos reinterpretar la definición: $v_1, \ldots, v_n$ son *linealmente dependientes* o *LD* si existen escalares $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ de $\mathbb{K}$, algún $\lambda_i \neq 0$, tales que

$$\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n = 0.$$

- En la clase pasada vimos el concepto de que las combinaciones lineales de un conjunto de vectores generan un subespacio vectorial.

- En la clase pasada vimos el concepto de que las combinaciones lineales de un conjunto de vectores generan un subespacio vectorial.
- Dado un subespacio vectorial: ¿Cuál es el número mínimo de vectores que generan el subespacio?
- En general, dado un espacio vectorial ¿Cuál es el número mínimo de vectores que generan el espacio y que propiedades tienen esos generadores?

- En la clase pasada vimos el concepto de que las combinaciones lineales de un conjunto de vectores generan un subespacio vectorial.
- Dado un subespacio vectorial: ¿Cuál es el número mínimo de vectores que generan el subespacio?
- En general, dado un espacio vectorial ¿Cuál es el número mínimo de vectores que generan el espacio y que propiedades tienen esos generadores?

- En la clase pasada vimos el concepto de que las combinaciones lineales de un conjunto de vectores generan un subespacio vectorial.
- Dado un subespacio vectorial: ¿Cuál es el número mínimo de vectores que generan el subespacio?
- En general, dado un espacio vectorial ¿Cuál es el número mínimo de vectores que generan el espacio y que propiedades tienen esos generadores?

Estas preguntas serán respondidas en la clase siguiente, pero ahora veremos algunas herramientas que nos permitan prepararnos para estos resultados.

Proposición

Sea V un espacio vectorial y $v_1, \ldots, v_n \in V$. Entonces $v_1, \ldots, v_n$ son LD si y solo si alguno de ellos es combinación lineal de los otros.

Proposición

Sea V un espacio vectorial y $v_1, \ldots, v_n \in V$. Entonces $v_1, \ldots, v_n$ son LD si y solo si alguno de ellos es combinación lineal de los otros.

Demostración

Proposición

Sea V un espacio vectorial y $v_1, ..., v_n \in V$. Entonces $v_1, ..., v_n$ son LD si y solo si alguno de ellos es combinación lineal de los otros.

Demostración

$(\Rightarrow)$

Proposición

Sea V un espacio vectorial y $v_1, ..., v_n \in V$. Entonces $v_1, ..., v_n$ son LD si y solo si alguno de ellos es combinación lineal de los otros.

Demostración

($\Rightarrow$) Supongamos que son LD. Entonces $\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n = 0$ donde algún escalar es no nulo. Digamos que tal escalar es λ_i. Podemos entonces despejar v_i, es decir escribirlo como combinación lineal de los otros:

$$v_i = -\frac{\lambda_1}{\lambda_i} v_1 - \cdots - \frac{\lambda_{i-1}}{\lambda_{i-1}} v_{i-1} - \frac{\lambda_{i+1}}{\lambda_{i+1}} v_{i+1} - \cdots - \frac{\lambda_n}{\lambda_i} v_n$$

Proposición

Sea V un espacio vectorial y $v_1, \ldots, v_n \in V$. Entonces $v_1, \ldots, v_n$ son LD si y solo si alguno de ellos es combinación lineal de los otros.

Demostración

($\Rightarrow$) Supongamos que son LD. Entonces $\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n = 0$ donde algún escalar es no nulo. Digamos que tal escalar es λ_i. Podemos entonces despejar v_i, es decir escribirlo como combinación lineal de los otros:

$$v_i = -\frac{\lambda_1}{\lambda_i} v_1 - \cdots - \frac{\lambda_{i-1}}{\lambda_{i-1}} v_{i-1} - \frac{\lambda_{i+1}}{\lambda_{i+1}} v_{i+1} - \cdots - \frac{\lambda_n}{\lambda_i} v_n$$

($\Leftarrow$)

Proposición

Sea V un espacio vectorial y $v_1, ..., v_n \in V$. Entonces $v_1, ..., v_n$ son LD si y solo si alguno de ellos es combinación lineal de los otros.

Demostración

$(\Rightarrow)$ Supongamos que son LD. Entonces $\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n = 0$ donde algún escalar es no nulo. Digamos que tal escalar es λ_i. Podemos entonces despejar v_i, es decir escribirlo como combinación lineal de los otros:

$$v_i = -\frac{\lambda_1}{\lambda_i} v_1 - \cdots - \frac{\lambda_{i-1}}{\lambda_{i-1}} v_{i-1} - \frac{\lambda_{i+1}}{\lambda_{i+1}} v_{i+1} - \cdots - \frac{\lambda_n}{\lambda_i} v_n$$

$(\Leftarrow)$ Supongamos que v_i es combinación lineal de los otros, es decir

$$\begin{aligned} v_i &= \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n \lambda_n v_n \\ \Rightarrow 0 &= \lambda_1 v_1 + \cdots - v_i + \cdots + \lambda_n \lambda_i v_n \end{aligned}$$

como $-1 \neq 0$ esta multiplicando a v_i, la última igualdad dice que los vectores son LD.

Independencia lineal

Definición

Sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$. Un subconjunto S de V se dice *linealmente independiente* (o simplemente, *LI* o *independiente*) si no es linealmente dependiente.

Observación

Si el conjunto S tiene solo un número finito de vectores $v_1, \ldots, v_n$, se dice, a veces, que los $v_1, \ldots, v_n$ son *independientes* o *LI*, en vez de decir que S es independiente.

Observación

Sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$ y $v_1, \ldots, v_n \in V$.

$v_1, \ldots, v_n$ son LD $\Leftrightarrow$ $\exists \lambda_i$'s $\in \mathbb{K}$, alguno no nulo, t.q. $\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n = 0$.

Observación

Por definición, un conjunto $v_1, \ldots, v_n$ es LI si se cumple:

(a) $\forall\, \lambda_i \in \mathbb{K}$ tal que $\lambda_j \neq 0$ para algún $j \;\Rightarrow\; \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n \neq 0$, o bien

(b) si $\lambda_i \in \mathbb{K}$ tal que $\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n = 0 \;\Rightarrow\; 0 = \lambda_1 = \cdots = \lambda_n$

El enunciado (a) se deduce negando la definición de linealmente dependiente.

El enunciado (b) es el contrarrecíproco de (a).

Ejemplo

En $\mathbb{R}^3$ los vectores $(1,-1,1)$ y $(-1,1,1)$ son LI, pues si $\lambda_1(1,-1,1)+\lambda_2(-1,1,1)=0$, entonces $0=(\lambda_1,-\lambda_1,\lambda_1)+(-\lambda_2,\lambda_2,\lambda_2)=(\lambda_1-\lambda_2,-\lambda_1+\lambda_2,\lambda_1+\lambda_2)$, y esto es cierto si

$$\begin{array}{rcl} \lambda_1-\lambda_2 &=& 0 \\ -\lambda_1+\lambda_2 &=& 0 \\ \lambda_1+\lambda_2 &=& 0 \end{array}.$$

Luego $\lambda_1=\lambda_2$ y $\lambda_1=-\lambda_2$, por lo tanto $\lambda_1=\lambda_2=0$. Es decir, hemos visto que

$$\lambda_1(1,-1,1)+\lambda_2(-1,1,1)=0 \quad\Rightarrow\quad \lambda_1=\lambda_2=0,$$

y, por lo tanto, $(1,-1,1)$ y $(-1,1,1)$ son LI. $\square$

Ejemplo

Sea $\mathbb{K}$ cuerpo. En $\mathbb{K}^3$ los vectores

$$\begin{aligned} v_1 &= (\ \ 3,\ 0, -3) \\ v_2 &= (-1,\ 1,\ \ 2) \\ v_3 &= (\ \ 4,\ 2, -2) \\ v_4 &= (\ \ 2,\ 1,\ \ 1) \end{aligned}$$

son linealmente dependientes, pues

$$2v_1 + 2v_2 - v_3 + 0.v_4 = 0.$$

Por otro lado, los vectores

$$\begin{aligned} e_1 &= (1, 0, 0) \\ e_2 &= (0, 1, 0) \\ e_3 &= (0, 0, 1) \end{aligned}$$

son linealmente independientes. $\square$

Las siguientes afirmaciones son consecuencias casi inmediatas de la definición.

1. Todo conjunto que contiene un conjunto linealmente dependiente es linealmente dependiente.
   Dem. En el conjunto "más chico" hay una c. l. no trivial que lo anula, luego, en el "más grande" también. $\square$
2. Todo subconjunto de un conjunto linealmente independiente es linealmente independiente.
   Dem. Si el subconjnuto tiene una c. l. no trivial que lo anula, el conjunto también. $\square$
3. Todo conjunto que contiene el vector 0 es linealmente dependiente.
   Dem. En efecto, $1.0 = 0$. $\square$

Observación

En general, en $\mathbb{K}^m$, si queremos determinar si $v_1, \ldots, v_n$ es LI, planteamos la ecuación

$$\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n = (0, \ldots, 0).$$

Viendo esta ecuación coordenada a coordenada, es equivalente a un sistema de m ecuaciones lineales con n incógnitas (que son $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$).

Si la única solución es la trivial entonces $v_1, \ldots, v_n$ es LI.

Si hay alguna solución no trivial, entonces $v_1, \ldots, v_n$ es LD.

Definición

Sea V un espacio vectorial. Una *base* de V es un conjunto $\mathcal{B} \subseteq V$ tal que

1. $\mathcal{B}$ genera a V, y
2. $\mathcal{B}$ es LI.

El espacio V es de *dimensión finita* si tiene una base finita, es decir con un número finito de elementos.

Ejemplo: base canónica de $\mathbb{K}^n$

Sea el espacio vectorial $\mathbb{K}^n$ y sean

$$\begin{aligned} e_1 &= (1, 0, 0, \ldots, 0) \\ e_2 &= (0, 1, 0, \ldots, 0) \\ &\ldots\ldots \\ e_n &= (0, 0, 0, \ldots, 1) \end{aligned}$$

(e_i es el vector con todas sus coordenadas iguales a cero, excepto la coordenada i que vale 1). Entonces veamos que $e_1, \ldots, e_n$ es una base de $\mathbb{K}^n$.

1. Si $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}^n$, entonces

$$(x_1, \ldots, x_n) = x_1 e_1 + \cdots + x_n e_n.$$

Por lo tanto, $e_1, \ldots, e_n$ genera a $\mathbb{K}^n$.

2. Si

$$x_1 e_1 + \cdots + x_n e_n = 0,$$

entonces

$$\begin{aligned}(0, \ldots, 0) &= x_1(1, 0, \ldots, 0) + x_2(0, 1, \ldots, 0) + \cdots + x_n(0, 0, \ldots, 1) \\ &= (x_1, 0, \ldots, 0) + (0, x_2, \ldots, 0) + \cdots + (0, 0, \ldots, x_n) \\ &= (x_1, x_2, \ldots, x_n).\end{aligned}$$

Luego, $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$.
Por lo tanto $e_1, \ldots, e_n$ es LI.

Para $1 \leq i \leq n$, al vector e_i se lo denomina el *i-ésimo vector canónico* y a la base $\mathcal{B}_n = \{e_1, \ldots, e_n\}$ se la denomina la *base canónica* de $\mathbb{K}^n$. □

Ejemplo: vectores columna de una matriz invertible

Sea P una matriz $n \times n$ invertible con elementos en el cuerpo $\mathbb{K}$. Sean $C_1, \ldots, C_n$ son los vectores columna de P.
Entonces, $\mathcal{B} = \{C_1, \ldots, C_n\}$, es una base de $\mathbb{K}^n$.

Demostración

Si $X = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}^n$, lo podemos ver como vector columna y

$$PX = x_1 C_1 + \cdots + x_n C_n.$$

$PX = 0$ tiene solo solución $X = 0 \Rightarrow \mathcal{B} = \{C_1, \ldots, C_n\}$ es LI.

¿Por qué generan $\mathbb{K}^n$? Sea $Y \in \mathbb{K}^n$, si $X = P^{-1}Y$, entonces $Y = PX$, esto es

$$Y = x_1 C_1 + \cdots + x_n C_n.$$

Así, $\{C_1, \ldots, C_n\}$ es una base de $\mathbb{K}^n$. $\square$

Ejemplo: polinomios de grado $\leq n-1$

Sea $\mathbb{K}_n[x]$ el conjunto de polinomios de grado menor que n con coeficientes en $\mathbb{K}$:

$$\mathbb{K}_n[x] = \left\{a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_{n-1} x^{n-1} : a_0, \ldots, a_{n-1} \in \mathbb{K}\right\}.$$

Entonces $1, x, x^2, \ldots, x^{n-1}$ es una base de $\mathbb{K}_n[x]$.

Es claro que los $1, x, x^2, \ldots, x^{n-1}$ generan $\mathbb{K}_n[x]$.

Por otro lado, si $\lambda_0 + \lambda_1 x + \lambda_2 x^2 + \cdots + \lambda_{n-1} x^{n-1} = 0$, tenemos que $\lambda_0 = \lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_{n-1} = 0$.

Ejemplo: polinomios (base infinita)

Sea $\mathbb{K}[x]$ el conjunto de polinomios con coeficientes en $\mathbb{K}$:

$$\mathbb{K}[x] = \left\{ a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n : n \in \mathbb{N}, a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{K} \right\}.$$

Entonces $\mathcal{B} = \{1, x, x^2, \ldots, x^i, \ldots\} = \{x^i : i \in \mathbb{N}_0\}$ es una base de $\mathbb{K}[x]$.

Es claro que los x^i generan $\mathbb{K}[x]$.

Por otro lado, supongamos $\mathcal{B}$ se LD, luego existe un subconjunto *finito* S de $\mathcal{B}$ con el cual puedo hacer una c.l. no trivial que de 0.

Sea n tal que $S \subset \{1, x, x^2, \ldots, x^n\}$. Entonces existen λ_i no todos nulos tal que $\lambda_0 + \lambda_1 x + \lambda_2 x^2 + \cdots + \lambda_{n-1} x^n = 0$. Absurdo.

Por lo tanto $\mathcal{B}$ es base.

Ejemplo: base canónica de $M_{m\times n}(\mathbb{K})$

Sean $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$ y $E_{ij} \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$ definida por

$$[E_{ij}]_{kl} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = k \text{ y } j = l, \\ 0 & \text{otro caso.} \end{cases}$$

Es decir E_{ij} es la matriz cuyas entradas son todas iguales a 0, excepto la entrada ij que vale 1. En el caso 2×2 tenemos la matrices

$$E_{11} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad E_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad E_{21} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad E_{22} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Volviendo al caso general,

$$\mathcal{B} = \{E_{ij} : 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n\}$$

(son mn vectores) es una base de $M_{m\times n}(\mathbb{K})$ y se la denomina la *base canónica* de $M_{m\times n}(\mathbb{K})$.

La demostración es análoga al caso $\mathbb{K}^n$.

Si S es un conjunto finito denotemos $|S|$ al *cardinal* de S es decir, la cantidad de elementos de S.

Preguntas

- Dado V espacio vectorial ¿existe una base de V?
  Respuesta: sí. La respuesta la da la teoría de conjuntos (Lema de Zorn).

- Sea V espacio vectorial y $\mathcal{B}$, $\mathcal{B}'$ bases finitas de V ¿Es $|\mathcal{B}| = |\mathcal{B}'|$?
  Respuesta: sí. Es lo que veremos más adelante.

¿Todo espacio vectorial tiene una base "explícita"?

- Vimos en los ejemplos de las páginas anteriores bases de distintos espacios vectoriales.
- Vimos que hay bases finitas y bases infinitas, pero todas la bases que consideramos eran explícitas.
- Por el Lema de Zorn existe una base $\mathcal{B}$ de $F(\mathbb{R}) = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\}$.
- ¿Se puede dar en forma relativamente explícita una base de $F(\mathbb{R})$?
- Respuesta: NO.

Teorema

Sea V un espacio vectorial generado por un conjunto finito de vectores $w_1, \dots, w_m$. Entonces

$$S \subset V \text{ es } LI \Rightarrow |S| \leq m.$$

Demostración

Para demostrar este teorema es suficiente probar el contrarrecíproco del enunciado, es decir:

$$\text{si } |S| > m \Rightarrow S \text{ es LD},$$

Sea $S = \{v_1, \dots, v_n\}$ con $n > m$.

Como $w_1, \dots, w_m$ generan V, existen escalares a_{ij} en $\mathbb{K}$ tales que

$$v_j = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} w_i, \qquad (1 \leq j \leq n).$$

Probaremos ahora que existen $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{K}$ no todos nulos, tal que $x_1 v_1 + \cdots + x_n v_n = 0$ (S es LD).

Ahora bien, para cualesquiera $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{K}$ tenemos

$$\begin{aligned} x_1 v_1 + \cdots + x_n v_n &= \sum_{j=1}^{n} x_j v_j \\ &= \sum_{j=1}^{n} x_j \sum_{i=1}^{m} a_{ij} w_i \\ &= \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} (x_j a_{ij}) w_i \\ &= \sum_{i=1}^{m} (\sum_{j=1}^{n} x_j a_{ij}) w_i. \end{aligned}$$

Es decir, para cualesquiera $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{K}$ tenemos

$$x_1 v_1 + \cdots + x_n v_n = \sum_{i=1}^{m} \underbrace{(\sum_{j=1}^{n} x_j a_{ij})}_{c_i} w_i. \qquad (*)$$

Si cada coeficiente c_i es nulo $\Rightarrow x_1 v_1 + \cdots + x_n v_n = 0$.

Vamos a ver ahora que $\exists\ x_1, \ldots, x_n$ no todos nulos tal $c_i = 0, \forall i$.

Esto se debe a que el sistema de ecuaciones

$$\sum_{j=1}^{n} x_j a_{ij} = 0, \qquad (1 \leq i \leq m)$$

tiene m ecuaciones y n incógnitas con $n > m \Rightarrow$ existen soluciones no triviales (quedan variable libres).

Es decir, existen escalares $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{K}$ no todos nulos, tal que

$$c_i = \sum_{j=1}^{n} x_j a_{ij} = 0, \quad (1 \leq i \leq m)$$

y, por $(*)$, tenemos que

$$x_1 v_1 + \cdots + x_n v_n = 0.$$

Esto quiere decir que los $v_1, \ldots, v_n$ son LD. $\square$

Corolario

Si V es un espacio vectorial de dimensión finita, entonces dos bases cualesquiera de V tienen el mismo número de elementos.

Corolario

Si V es un espacio vectorial de dimensión finita, entonces dos bases cualesquiera de V tienen el mismo número de elementos.

Demostración

Corolario

Si V es un espacio vectorial de dimensión finita, entonces dos bases cualesquiera de V tienen el mismo número de elementos.

Demostración

V es de dimensión finita $\Rightarrow \exists\, \mathcal{B}$ base con $|\mathcal{B}| < \infty$.

Sea $\mathcal{B}'$ otra base de V.

Corolario

Si V es un espacio vectorial de dimensión finita, entonces dos bases cualesquiera de V tienen el mismo número de elementos.

Demostración

V es de dimensión finita $\Rightarrow \exists\, \mathcal{B}$ base con $|\mathcal{B}| < \infty$.

Sea $\mathcal{B}'$ otra base de V.

Como $\mathcal{B}$ es base $\Rightarrow \langle \mathcal{B} \rangle = V$ y $\mathcal{B}'$ es LI $\overset{(??)}{\Rightarrow} |\mathcal{B}'| \leq |\mathcal{B}|$.

Corolario

Si V es un espacio vectorial de dimensión finita, entonces dos bases cualesquiera de V tienen el mismo número de elementos.

Demostración

V es de dimensión finita $\Rightarrow \exists\, \mathcal{B}$ base con $|\mathcal{B}| < \infty$.

Sea $\mathcal{B}'$ otra base de V.

Como $\mathcal{B}$ es base $\Rightarrow \langle \mathcal{B} \rangle = V$ y $\mathcal{B}'$ es LI $\overset{(??)}{\Rightarrow} |\mathcal{B}'| \leq |\mathcal{B}|$.

Como $\mathcal{B}'$ es base $\Rightarrow \langle \mathcal{B}' \rangle = V$ y $\mathcal{B}$ es LI $\overset{(??)}{\Rightarrow} |\mathcal{B}| \leq |\mathcal{B}'|$.

Corolario

Si V es un espacio vectorial de dimensión finita, entonces dos bases cualesquiera de V tienen el mismo número de elementos.

Demostración

V es de dimensión finita $\Rightarrow \exists\, \mathcal{B}$ base con $|\mathcal{B}| < \infty$.

Sea $\mathcal{B}'$ otra base de V.

Como $\mathcal{B}$ es base $\Rightarrow \langle \mathcal{B} \rangle = V$ y $\mathcal{B}'$ es LI $\overset{(??)}{\Rightarrow} |\mathcal{B}'| \leq |\mathcal{B}|$.

Como $\mathcal{B}'$ es base $\Rightarrow \langle \mathcal{B}' \rangle = V$ y $\mathcal{B}$ es LI $\overset{(??)}{\Rightarrow} |\mathcal{B}| \leq |\mathcal{B}'|$.

En consecuencia $|\mathcal{B}| = |\mathcal{B}'|$. $\square$

Hemos demostrado: si V es un espacio vectorial de dimensión finita y $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ dos bases de V, entonces $|\mathcal{B}| = |\mathcal{B}'|$.

Esto nos permite hacer la siguiente definición.

Hemos demostrado: si V es un espacio vectorial de dimensión finita y $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ dos bases de V, entonces $|\mathcal{B}| = |\mathcal{B}'|$.

Esto nos permite hacer la siguiente definición.

Definición

Sea V espacio vectorial de dimensión finita.

Diremos que n es *la dimensión de V* y denotaremos $\dim V = n$, si existe una base de V de n vectores.

Hemos demostrado: si V es un espacio vectorial de dimensión finita y $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ dos bases de V, entonces $|\mathcal{B}| = |\mathcal{B}'|$.

Esto nos permite hacer la siguiente definición.

Definición

Sea V espacio vectorial de dimensión finita.

Diremos que n es *la dimensión de V* y denotaremos $\dim V = n$, si existe una base de V de n vectores.

Si $V = \{0\}$, entonces definimos $\dim V = 0$.

Ejemplos

Sean $m, n \in \mathbb{N}$.

Ejemplos

Sean $m, n \in \mathbb{N}$.

1. $\dim \mathbb{K}^n = n$, pues la base canónica tiene n elementos.

Ejemplos

Sean $m, n \in \mathbb{N}$.

1. $\dim \mathbb{K}^n = n$, pues la base canónica tiene n elementos.
2. $\dim M_{m\times n}(\mathbb{K}) = mn$, pues la base canónica de $M_{m\times n}(\mathbb{K})$ tiene mn elementos.

Ejemplos

Sean $m, n \in \mathbb{N}$.

1. $\dim \mathbb{K}^n = n$, pues la base canónica tiene n elementos.
2. $\dim M_{m\times n}(\mathbb{K}) = mn$, pues la base canónica de $M_{m\times n}(\mathbb{K})$ tiene mn elementos.
3. $\dim \mathbb{K}_n[x] = n$, pues $1, x, x^2, \dots, x^{n-1}$ es una base.

Corolario

Sea V un espacio vectorial de dimensión finita y sea $n = \dim V$. Entonces

1. $S \subset V$ *y* $|S| > n \Rightarrow S$ *es LD.*
2. $S \subset V$ *y* $|S| < n \Rightarrow \langle S \rangle \subsetneqq V$.

Corolario

Sea V un espacio vectorial de dimensión finita y sea $n = \dim V$. Entonces

1. $S \subset V$ *y* $|S| > n \Rightarrow S$ *es LD.*
2. $S \subset V$ *y* $|S| < n \Rightarrow \langle S \rangle \subsetneqq V$.

Demostración

Corolario

Sea V un espacio vectorial de dimensión finita y sea $n = \dim V$. Entonces

1. $S \subset V$ *y* $|S| > n \Rightarrow S$ *es LD.*
2. $S \subset V$ *y* $|S| < n \Rightarrow \langle S \rangle \subsetneqq V$.

Demostración

Sea $\mathcal{B}$ base de V.

1. Como $\mathcal{B}$ es base $\Rightarrow \langle \mathcal{B} \rangle = V$ y $|S| > |\mathcal{B}| \overset{(??)}{\Rightarrow} S$ es LD.

Corolario

Sea V un espacio vectorial de dimensión finita y sea $n = \dim V$. Entonces

1. $S \subset V$ *y* $|S| > n \Rightarrow S$ *es LD.*
2. $S \subset V$ *y* $|S| < n \Rightarrow \langle S \rangle \subsetneq V$.

Demostración

Sea $\mathcal{B}$ base de V.

1. Como $\mathcal{B}$ es base $\Rightarrow \langle \mathcal{B} \rangle = V$ y $|S| > |\mathcal{B}| \overset{(??)}{\Rightarrow} S$ es LD.

2. Supongamos que $\langle S \rangle = V$.

   Como $\mathcal{B}$ es base $\Rightarrow \mathcal{B}$ es LI.

   $\langle S \rangle = V$ y $\mathcal{B}$ es LI $\overset{(??)}{\Rightarrow} n = |\mathcal{B}| \leq |S|$. Absurdo.

$\square$

Lema

Sea V espacio vectorial.

- *Sea $S \subset V$ y S es LI.*
- *Sea w tal que $w \notin \langle S \rangle$.*

Entonces $S \cup \{w\}$ es LI.

Lema

Sea V espacio vectorial.

- *Sea $S \subset V$ y S es LI.*
- *Sea w tal que $w \notin \langle S \rangle$.*

Entonces $S \cup \{w\}$ es LI.

Demostración

Lema

Sea V espacio vectorial.

- *Sea $S \subset V$ y S es LI.*
- *Sea w tal que $w \notin \langle S \rangle$.*

Entonces $S \cup \{w\}$ es LI.

Demostración

Sean $v_1, \ldots, v_n$ vectores distintos de S y $\lambda_i, \lambda \in \mathbb{K}$ tales que

$$\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n + \lambda w = 0. \tag{1}$$

Debemos probar que $\lambda_i = 0$, $1 \leq i \leq n$, y $\lambda = 0$.

Supongamos que $\lambda \neq 0$, entonces podemos dividir la ecuación por λ y haciendo pasaje de término obtenemos

$$w = \left(-\frac{\lambda_1}{\lambda}\right) v_1 + \cdots \left(-\frac{\lambda_n}{\lambda}\right) v_n.$$

Supongamos que $\lambda \neq 0$, entonces podemos dividir la ecuación por λ y haciendo pasaje de término obtenemos

$$w = \left(-\frac{\lambda_1}{\lambda}\right) v_1 + \cdots \left(-\frac{\lambda_n}{\lambda}\right) v_n.$$

Luego w estaría en el subespacio generado por S, lo cual contradice la hipótesis.

Por lo tanto $\lambda = 0$ y, en consecuencia

$$\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n = 0.$$

Como S es un conjunto linealmente independiente, todo $\lambda_i = 0$. $\square$

Teorema

Sea V espacio vectorial de dimensión finita n y S_0 un subconjunto LI de V. Entonces S_0 es finito y existen $w_1, \ldots, w_m$ vectores en V tal que $S_0 \cup \{w_1, \ldots, w_m\}$ es una base de V.

Teorema

Sea V espacio vectorial de dimensión finita n y S_0 un subconjunto LI de V. Entonces S_0 es finito y existen $w_1, \ldots, w_m$ vectores en V tal que $S_0 \cup \{w_1, \ldots, w_m\}$ es una base de V.

Corolario

Sea W un subespacio de un espacio vectorial con de dimensión finita n y S_0 un subconjunto LI de W. Entonces, S_0 se puede completar a una base de W.

Teorema

Sea V espacio vectorial de dimensión finita n y S_0 un subconjunto LI de V. Entonces S_0 es finito y existen $w_1, \ldots, w_m$ vectores en V tal que $S_0 \cup \{w_1, \ldots, w_m\}$ es una base de V.

Corolario

Sea W un subespacio de un espacio vectorial con de dimensión finita n y S_0 un subconjunto LI de W. Entonces, S_0 se puede completar a una base de W.

Corolario

Sea V espacio vectorial de dimensión finita y $V \neq \{0\}$, entonces $\dim V > 0$.

Corolario

Si W es un subespacio propio de un espacio vectorial de dimensión finita V, entonces W es de dimensión finita y $\dim W < \dim V$.

Corolario

Si W es un subespacio propio de un espacio vectorial de dimensión finita V, entonces W es de dimensión finita y $\dim W < \dim V$.

Demostración

Corolario

Si W es un subespacio propio de un espacio vectorial de dimensión finita V, entonces W es de dimensión finita y $\dim W < \dim V$.

Demostración

Si $W = \{0\}$, entonces $\dim W = 0$, como $W \subsetneq V$, tenemos que V es no nulo y por lo tanto $\dim W = 0 < \dim V$.

Si $W \neq \{0\}$, sea $\mathcal{B}'$ base de W.
Si $\langle \mathcal{B}' \rangle = V$, entonces $W = V$, absurdo. Luego $\langle \mathcal{B}' \rangle \neq V \Rightarrow$ existen $w_1, \ldots, w_r$ que completan a una base de $V \Rightarrow$
$\dim(W) = \dim(V) - r < \dim(V)$.

□

Hemos visto que si V es un espacio de dimensión finita, entonces todo conjunto LI se puede extender a una base. También vale:

Hemos visto que si V es un espacio de dimensión finita, entonces todo conjunto LI se puede extender a una base. También vale:

Teorema

Sea $V \neq 0$ espacio vectorial y S un conjunto finito de generadores de V, entonces existe un subconjunto $\mathcal{B}$ de S que es una base.

Hemos visto que si V es un espacio de dimensión finita, entonces todo conjunto LI se puede extender a una base. También vale:

Teorema

Sea $V \neq 0$ espacio vectorial y S un conjunto finito de generadores de V, entonces existe un subconjunto $\mathcal{B}$ de S que es una base.

El siguiente resultado relaciona dimensión con suma e intersección de subespacios.

Hemos visto que si V es un espacio de dimensión finita, entonces todo conjunto LI se puede extender a una base. También vale:

Teorema

Sea $V \neq 0$ espacio vectorial y S un conjunto finito de generadores de V, entonces existe un subconjunto $\mathcal{B}$ de S que es una base.

El siguiente resultado relaciona dimensión con suma e intersección de subespacios.

Teorema

Si W_1, y W_2 son subespacios de dimensión finita de un espacio vectorial, entonces $W_1 + W_2$ es de dimensión finita y

$$\dim(W_1 + W_2) = \dim W_1 + \dim W_2 - \dim(W_1 \cap W_2).$$