

Álgebra/Álgebra II

Clase 12- Subespacios vectoriales.

FAMAF / UNC

30 de abril de 2024

En esta clase veremos que

- más ejemplos de subespacios,
- combinaciones lineales de vectores,
- vectores generadores de subespacios, y
- Determinación implícita de un subespacio de \mathbb{K}^n a partir de generadores
- Intersección y suma de subespacios vectoriales .

El tema de esta clase está contenido de la sección 4.2 del apunte de clase “Álgebra II / Álgebra - Notas del teórico”.

Ejemplos de subespacio vectoriales

4. Sean $V = \mathbb{K}^n$ y $1 \leq j \leq n$. Definimos

$$W = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) : x_i \in \mathbb{K} \ (1 \leq i \leq n), x_j = 0\}.$$

Es decir W es el subconjunto de V de todas las n -tuplas con la coordenada j igual a 0. Por ejemplo si $j = 1$

$$W = \{(0, x_2, \dots, x_n) : x_i \in \mathbb{K} \ (2 \leq i \leq n)\}.$$

Veamos que este último es un subespacio.

Si $(0, x_2, \dots, x_n), (0, y_2, \dots, y_n) \in W$ y $\lambda \in \mathbb{K}$, entonces

$$(0, x_2, \dots, x_n) + \lambda(0, y_2, \dots, y_n) = (0, x_2 + \lambda y_2, \dots, x_n + \lambda y_n) \in W.$$

La demostración para $j > 1$ es completamente análoga.

5. Sea $\text{Sim}_n(\mathbb{K}) = \{A \in M_n(\mathbb{K}) : A^t = A\}$.

Es claro que: $A \in \text{Sim}_n(\mathbb{K}) \Leftrightarrow [A]_{ij} = [A]_{ji} \forall i, j$.

Proposición

$A \in \text{Sim}_n(\mathbb{K})$ es subespacio de $M_n(\mathbb{K})$

Demostración

Sean $A = [a_{ij}]$, $B = [b_{ij}]$ tales que $A = A^t$ y $B = B^t$ y sea $\lambda \in \mathbb{K}$, entonces debemos verificar que: $A + \lambda B \in \text{Sim}_n(\mathbb{K})$.

$$\begin{aligned} [(A + \lambda B)^t]_{ij} &= [(A + \lambda B)]_{ji} && \text{(definición de transpuesta)} \\ &= [A]_{ji} + \lambda[B]_{ji} && \text{(def. de suma y prod. por escalar)} \\ &= [A]_{ij} + \lambda[B]_{ij} && (A \text{ y } B \text{ simétricas)} \\ &= [A + \lambda B]_{ij} && \text{(def. de suma y prod. por escalar)} \end{aligned}$$

Luego $A + \lambda B \in \text{Sim}_n(\mathbb{K})$.



6. El conjunto $\mathbb{R}[x] = \{P(x) : P(x) \text{ es polinomio en } \mathbb{R}\}$, es subespacio de $F(\mathbb{R})$, pues $\mathbb{R}[x] \subset F(\mathbb{R})$ y las operaciones de suma y producto por un escalar son cerradas en $\mathbb{R}[x]$.
7. Sea $C(\mathbb{R})$ las funciones continuas de \mathbb{R} en \mathbb{R} . Entonces, $C(\mathbb{R})$ es subespacio de $F(\mathbb{R})$.

Demostración

Sean f, g funciones continuas, es decir $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ y $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = g(a)$, $\forall a \in \mathbb{R}$. Sea $\lambda \in \mathbb{R}$. Por las propiedades de los límites

$$\lim_{x \rightarrow a} (f + \lambda g)(x) = \lim_{x \rightarrow a} f + \lambda \lim_{x \rightarrow a} g(x) = f(a) + \lambda g(a) = (f + \lambda g)(a)$$



De forma análoga, el conjunto $\mathbb{R}[x]$ es subespacio de $C(\mathbb{R})$.

Combinaciones lineales

Definición

Sea V espacio vectorial sobre \mathbb{K} y v_1, \dots, v_n vectores en V . Dado $v \in V$, diremos que v es *combinación lineal* de los v_1, \dots, v_n si existen escalares $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ en \mathbb{K} , tal que

$$v = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n.$$

Ejemplo

Sean $v_1 = (1, 0)$, $v_2 = (0, 1)$ en \mathbb{C}^2 ¿es $v = (i, 2)$ combinación lineal de v_1, v_2 ? La respuesta es sí, pues

$$v = iv_1 + 2v_2.$$

Observar además que es la única combinación lineal posible, pues si

$$v = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2,$$

entonces

$$(i, 2) = (\lambda_1, 0) + (0, \lambda_2) = (\lambda_1, \lambda_2),$$

luego $\lambda_1 = i$ y $\lambda_2 = 2$.

Ejemplo

Puede ocurrir que un vector sea combinación lineal de otros vectores de varias formas diferentes. Por ejemplo, si $v = (i, 2)$ y $v_1 = (1, 0)$, $v_2 = (0, 1)$, $v_3 = (1, 1)$, tenemos que

$$\begin{aligned}v &= i v_1 + 2 v_2 + 0 v_3, & \text{y también} \\v &= (i - 1) v_1 + v_2 + v_3.\end{aligned}$$

Ejemplo

Sean $(0, 1, 0)$, $(0, 1, 1)$ en \mathbb{C}^3 ¿es $(1, 1, 0)$ combinación lineal de $(0, 1, 0)$, $(0, 1, 1)$? La respuesta es no, pues si

$$(1, 1, 0) = \lambda_1(0, 1, 0) + \lambda_2(0, 1, 1) = (0, \lambda_1, 0) + (0, \lambda_2, \lambda_2) = (0, \lambda_1 + \lambda_2, \lambda_2),$$

luego, la primera coordenada nos dice que $1 = 0$, lo cual es absurdo.

Ejemplo

Demostrar que $(7, 5, 4)$ es combinación lineal de los vectores $(1, -5, 2)$, $(1, -1, 1)$ y escribir la combinación lineal explícita.

Solución

Planteamos la ecuación:

$$\begin{aligned}(7, 5, 4) &= \lambda_1(1, -5, 2) + \lambda_2(1, -1, 1) \\ &= (\lambda_1 + \lambda_2, -5\lambda_1 - \lambda_2, 2\lambda_1 + \lambda_2).\end{aligned}$$

Por consiguiente, esta ecuación se resuelve con el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned}\lambda_1 + \lambda_2 &= 7 \\ -5\lambda_1 - \lambda_2 &= 5 \\ 2\lambda_1 + \lambda_2 &= 4.\end{aligned}$$

Ahora bien, usando el método de Gauss

$$\begin{aligned} & \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 7 \\ -5 & -1 & 5 \\ 2 & 1 & 4 \end{array} \right] \xrightarrow[\substack{F_2+5F_1 \\ F_3-2F_1}]{} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 7 \\ 0 & 4 & 40 \\ 0 & -1 & -10 \end{array} \right] \xrightarrow{F_2/4} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 7 \\ 0 & 1 & 10 \\ 0 & -1 & -10 \end{array} \right] \\ & \xrightarrow{F_3+F_2} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 7 \\ 0 & 1 & 10 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{F_1-F_2} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 10 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right]. \end{aligned}$$

Luego $\lambda_1 = -3$ y $\lambda_2 = -10$, es decir,

$$(7, 5, 4) = -3(1, -5, 2) + 10(1, -1, 1).$$



Teorema

Sea V un espacio vectorial sobre \mathbb{K} y sean $v_1, \dots, v_k \in V$. Entonces

$$W = \{\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_k v_k : \lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{K}\}$$

es un subespacio vectorial. Es decir, el conjunto de las combinaciones lineales de v_1, \dots, v_k es un subespacio vectorial.

Demostración

Sean $\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_k v_k$, $\mu_1 v_1 + \dots + \mu_k v_k$ dos combinaciones lineales de v_1, \dots, v_k y $\lambda \in \mathbb{K}$, entonces

$$\begin{aligned} & (\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_k v_k) + \lambda(\mu_1 v_1 + \dots + \mu_k v_k) \\ &= \lambda_1 v_1 + \lambda \mu_1 v_1 + \dots + \lambda_k v_k + \lambda \mu_k v_k \\ &= (\lambda_1 + \lambda \mu_1) v_1 + \dots + (\lambda_k + \lambda \mu_k) v_k, \end{aligned}$$

que es una combinación lineal de v_1, \dots, v_k y por lo tanto pertenece a W .



Definición

Sea V un espacio vectorial sobre \mathbb{K} y sean $v_1, \dots, v_k \in V$. Al subespacio vectorial $W = \{\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_k v_k : \lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{K}\}$ de las combinaciones lineales de v_1, \dots, v_k se lo denomina *subespacio generado por v_1, \dots, v_k* y se lo denota

$$W = \langle v_1, \dots, v_k \rangle = \text{gen} \{v_1, \dots, v_k\} = \text{span} \{v_1, \dots, v_k\}.$$

Además, en este caso, diremos que el conjunto $S = \{v_1, \dots, v_k\}$ *genera* al subespacio W o que los vectores v_1, \dots, v_k *generan* W .

Observación

Un caso especial, que será de suma importancia, es el caso en que consideramos todo V .

Estudiaremos en las clases que siguen conjuntos de generadores de V llamados *bases*, que tienen la propiedad de que todo vector de V se escribe de una única forma como c.l. de los generadores.

Determinación “implícita” de un subespacio de \mathbb{K}^n

En general, si queremos averiguar si un vector concreto $(b_1, b_2, \dots, b_m) \in \mathbb{K}^m$ es combinación lineal de vectores $v_1, \dots, v_n \in \mathbb{K}^m$, debemos plantear la ecuación

$$(b_1, b_2, \dots, b_m) = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n, \quad (*)$$

y resolver el sistema correspondiente, así como lo hicimos en el ejemplo de la página 9.

Es decir, si

$$W = \{\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n : \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}\},$$

queremos averiguar si el vector $(b_1, b_2, \dots, b_m) \in \mathbb{K}^m$ pertenece a W o, equivalentemente, si es combinación lineal de v_1, \dots, v_n .

Ahora, si

$$v_1 = (a_{11}, a_{21}, \dots, a_{m1}),$$

$$v_2 = (a_{12}, a_{22}, \dots, a_{m2}),$$

$$\vdots$$

$$v_n = (a_{1n}, a_{2n}, \dots, a_{mn}),$$

la ecuación (*) de la página anterior se traduce en el sistema de ecuaciones

$$\begin{array}{ccccccc} a_{11}\lambda_1 & + & a_{12}\lambda_2 & + & \cdots & + & a_{1n}\lambda_n & = & b_1 \\ \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \\ a_{m1}\lambda_1 & + & a_{m2}\lambda_2 & + & \cdots & + & a_{mn}\lambda_n & = & b_m. \end{array}$$

De la matriz ampliada original $[A \mid b]$ podemos obtener una MERF equivalente $[A' \mid b']$ y el sistema asociado.

$$\begin{array}{rclcl}
 x_{k_1} & + & \sum_{j \neq k_1, \dots, k_r} a'_{1j} x_j & = & b'_1 \\
 x_{k_2} & + & \sum_{j \neq k_1, \dots, k_r} a'_{2j} x_j & = & b'_2 \\
 \vdots & & & & \vdots \\
 x_{k_r} & + & \sum_{j \neq k_1, \dots, k_r} a'_{rj} x_j & = & b'_r \\
 & & 0 & = & b'_{r+1} \\
 & & \vdots & & \\
 & & 0 & = & b'_m,
 \end{array}$$

donde $k_1 < k_2 < \dots < k_r$.

Por lo tanto, el sistema tiene solución si y solo si $b'_{r+1} = \dots = b'_m = 0$.
Luego,

$$W = \{(b_1, b_2, \dots, b_m) \in \mathbb{K}^m : b'_{r+1} = \dots = b'_m = 0\}.$$

Las ecuaciones $b'_{r+1} = \dots = b'_m = 0$ son las ecuaciones implícitas que definen a W y nos permiten decidir rápidamente si un vector pertenece o no a W , simplemente viendo si sus coordenadas satisfacen las ecuaciones.

Ejemplo

Caracterizar mediante ecuaciones el subespacio del subespacio generado por

$$\begin{aligned}v_1 &= (3, 1, 2, -1), & v_2 &= (6, 2, 4, -2), \\v_3 &= (3, 0, 1, 1), & v_4 &= (15, 3, 8, -1).\end{aligned}$$

Solución

En otras palabras, queremos describir implícitamente el conjunto de los $b = (b_1, b_2, b_3, b_4) \in \mathbb{R}^4$ tales que $b \in \langle v_1, v_2, v_3, v_4 \rangle$.

O sea, los $b = (b_1, b_2, b_3, b_4) \in \mathbb{R}^4$ tales que

$$b = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 + \lambda_4 v_4 \tag{*}$$

con $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4 \in \mathbb{R}$.

Planteemos la fórmula (*) en como un sistema de ecuaciones. Obtenemos:

$$b_1 = 3\lambda_1 + 6\lambda_2 + 3\lambda_3 + 15\lambda_4$$

$$b_2 = \lambda_1 + 2\lambda_2 + 3\lambda_4$$

$$b_3 = 2\lambda_1 + 4\lambda_2 + \lambda_3 + 8\lambda_4$$

$$b_4 = -\lambda_1 - 2\lambda_2 + \lambda_3 - \lambda_4$$

Luego, escrito como producto de matrices, el sistema es

$$\begin{bmatrix} 3 & 6 & 3 & 15 \\ 1 & 2 & 0 & 3 \\ 2 & 4 & 1 & 8 \\ -1 & -2 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ \lambda_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{bmatrix}$$

Resolvamos el sistema anterior.

$$\begin{array}{c}
 \left[\begin{array}{cccc|c} 3 & 6 & 3 & 15 & b_1 \\ 1 & 2 & 0 & 3 & b_2 \\ 2 & 4 & 1 & 8 & b_3 \\ -1 & -2 & 1 & -1 & b_4 \end{array} \right] \xrightarrow[\substack{F_3 - 2F_2 \\ F_4 + F_2}]{F_1 - 3F_2} \left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 3 & 6 & b_1 - 3b_2 \\ 1 & 2 & 0 & 3 & b_2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & b_3 - 2b_2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & b_4 + b_2 \end{array} \right] \\
 \\
 \xrightarrow[\substack{F_4 - F_3}]{F_1 - 3F_3} \left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 & b_1 + 3b_2 - 3b_3 \\ 1 & 2 & 0 & 3 & b_2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & b_3 - 2b_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3b_2 - b_3 + b_4 \end{array} \right].
 \end{array}$$

Luego el sistema tiene solución si y solo si $b_1 + 3b_2 - 3b_3 = 0$ y $3b_2 - b_3 + b_4 = 0$. Por lo tanto, el subespacio que estamos buscando es

$$\langle v_1, v_2, v_3, v_4 \rangle =$$

$$\{(b_1, b_2, b_3, b_4) \in \mathbb{R}^4 \mid b_1 + 3b_2 - 3b_3 = 0, 3b_2 - b_3 + b_4 = 0\}. \quad \square$$

Notemos que podemos repetir todo el razonamiento anterior para cualesquiera vectores v_1, \dots, v_k en cualquier \mathbb{R}^n y cualquier $b \in \mathbb{R}^n$.

Sólo hay que tener presente que multiplicar una matriz por un vector columna es lo mismo que hacer una combinación lineal de las columnas de la matriz:

Es decir, si

$$A = \left[\begin{array}{c|c|c|c} | & | & & | \\ v_1 & v_2 & \cdots & v_k \\ | & | & & | \end{array} \right],$$

entonces

$$A \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_k \end{bmatrix} = \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_k v_k$$

Conclusión

Sean $v_1, \dots, v_k \in \mathbb{K}^n$ y $A \in \mathbb{K}^{n \times k}$ la matriz cuyas columnas son los vectores v_1, \dots, v_k , es decir

$$A = \begin{bmatrix} | & | & \cdots & | \\ v_1 & v_2 & \cdots & v_k \\ | & | & \cdots & | \end{bmatrix}.$$

Entonces

- El subespacio vectorial $\langle v_1, \dots, v_k \rangle$ es igual al conjunto de los $b \in \mathbb{K}^n$ para los cuales el sistema $AX = b$ tiene solución.
- Las ecuaciones vienen dadas por las filas nulas de la MERF equivalente a A . En particular, si no tiene filas nulas entonces $\langle v_1, \dots, v_k \rangle = \mathbb{K}^n$ porque el sistema $AX = b$ siempre tiene solución.

Intersección y suma de subespacios vectoriales

Teorema

Sea V un espacio vectorial sobre \mathbb{K} . Entonces la intersección de subespacios vectoriales es un subespacio vectorial.

Demostración

Veamos el caso de la intersección de dos subespacios.

Debemos probar que si W_1, W_2 subespacios $\Rightarrow W_1 \cap W_2$ es subespacio.

Observemos: $w \in W_1 \cap W_2 \Leftrightarrow w \in W_1 \wedge w \in W_2$.

$$\begin{aligned}\text{Sea } \lambda \in \mathbb{K}. \quad u, v \in W_1 \cap W_2 &\Rightarrow u, v \in W_1 \wedge u, v \in W_2 \\ &\Rightarrow u + \lambda v \in W_1 \wedge u + \lambda v \in W_2 \\ &\Rightarrow u + \lambda v \in W_1 \cap W_2.\end{aligned}$$

Luego $W_1 \cap W_2$ es subespacio. □

Ejemplo

Sean

$$W_1 = \{(x, y, z) : -3x + y + 2z = 0\}$$

y

$$W_2 = \{(x, y, z) : x - y + 2z = 0\}.$$

Encontrar generadores de $W_1 \cap W_2$.

Solución

Es claro que

$$W_1 \cap W_2 = \{(x, y, z) : -3x + y + 2z = 0 \wedge x - y + 2z = 0\}.$$

Por lo tanto debemos resolver el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} -3x + y + 2z = 0 \\ x - y + 2z = 0 \end{cases}$$

Reduzcamos la matriz del sistema a una MRF:

$$\begin{bmatrix} -3 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{F_1+3F_2} \begin{bmatrix} 0 & -2 & 8 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{F_1/(-2)} \begin{bmatrix} 0 & 1 & -4 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{F_2+F_1} \begin{bmatrix} 0 & 1 & -4 \\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

Por lo tanto, $x_2 - 4x_3 = 0$ y $x_1 - 2x_3 = 0$, es decir $x_2 = 4x_3$ y $x_1 = 2x_3$.

Luego,

$$W_1 \cap W_2 = \{(2t, 4t, t) : t \in \mathbb{R}\} = \{t(2, 4, 1) : t \in \mathbb{R}\}.$$

La respuesta es entonces: $(2, 4, 1)$ es generador $W_1 \cap W_2$.



Teorema

Sea V un espacio vectorial sobre \mathbb{K} y sean $v_1, \dots, v_k \in V$. Entonces, la intersección de todos los subespacios vectoriales que contienen a v_1, \dots, v_k es igual a $\langle v_1, \dots, v_k \rangle$.

Demostración

Denotemos

- $U = \bigcap$ de todos los subespacios vectoriales $\supseteq \{v_1, \dots, v_k\}$.

Probaremos que $U = \langle v_1, \dots, v_k \rangle$ con la doble inclusión, es decir probando que

$$U \subseteq \langle v_1, \dots, v_k \rangle \quad \text{y} \quad \langle v_1, \dots, v_k \rangle \subseteq U.$$

$$(U \subseteq \langle v_1, \dots, v_k \rangle)$$

Primero, $U \subseteq \langle v_1, \dots, v_k \rangle$ vale puesto que $\langle v_1, \dots, v_k \rangle$ es un subespacio que contiene a $\{v_1, \dots, v_k\}$.

$$(\langle v_1, \dots, v_k \rangle \subseteq U)$$

U es intersección de subespacios \Rightarrow (teor. p. 22) U es un subespacio.

Luego, $\{v_1, \dots, v_k\} \subset U \Rightarrow \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_k v_k \in U, \quad \forall \lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{K}$.

Por lo tanto $\langle v_1, \dots, v_k \rangle \subseteq U$.



Observación

Si V es un \mathbb{K} -espacio vectorial, S y T subespacios de V .

Entonces $S \cup T$ *no es necesariamente un subespacio* de V .

En efecto, consideremos en \mathbb{R}^2 los subespacios

$$S = \mathbb{R}(1, 0) \quad \text{y} \quad T = \mathbb{R}(0, 1).$$

- $(1, 0) \in S$ y $(0, 1) \in T \Rightarrow (1, 0), (0, 1) \in S \cup T$.
- Ahora bien $(1, 0) + (0, 1) = (1, 1) \notin S \cup T$, puesto que $(1, 1) \notin S$ y $(1, 1) \notin T$.

Definición

Sea V un espacio vectorial sobre \mathbb{K} y sean S_1, \dots, S_k subconjuntos de V . definimos

$$S_1 + \dots + S_k := \{s_1 + \dots + s_k : s_i \in S_i, 1 \leq i \leq k\},$$

el conjunto *suma de los* S_1, \dots, S_k .

Teorema

Sea V un espacio vectorial sobre \mathbb{K} y sean W_1, \dots, W_k subespacios de V . Entonces $W = W_1 + \dots + W_k$ es un subespacio de V .

Demostración

Ejercicio (ver apunte).



Proposición

Sea V un espacio vectorial sobre \mathbb{K} y sean v_1, \dots, v_r elementos de V .
Entonces

$$\langle v_1, \dots, v_r \rangle = \langle v_1 \rangle + \dots + \langle v_r \rangle.$$

Demostración

Probemos el resultado viendo que los dos conjuntos se incluyen mutuamente.

(\subseteq) Sea $w \in \langle v_1, \dots, v_r \rangle$, luego $w = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_r v_r$. Como $\lambda_i v_i \in \langle v_i \rangle$, $1 \leq i \leq r$, tenemos que $w \in \langle v_1 \rangle + \dots + \langle v_r \rangle$. En consecuencia,
 $\langle v_1, \dots, v_r \rangle \subseteq \langle v_1 \rangle + \dots + \langle v_r \rangle$.

(\supseteq) Si $w \in \langle v_1 \rangle + \dots + \langle v_r \rangle$, entonces $w = w_1 + \dots + w_r$ con $w_i \in \langle v_i \rangle$ para todo i . Por lo tanto, $w_i = \lambda_i v_i$ para algún $\lambda_i \in \mathbb{K}$ y
 $w = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_r v_r \in \langle v_1, \dots, v_r \rangle$. En consecuencia,
 $\langle v_1 \rangle + \dots + \langle v_r \rangle \subseteq \langle v_1, \dots, v_r \rangle$.