Álgebra/Álgebra II
Clase 15 - Transformaciones lineales. Núcleo e imagen

FAMAF / UNC

28 de mayo de 2024

Definición

Una *transformación lineal* entre dos espacios vectoriales V y W es una función $T : V \longrightarrow W$ tal que

(1) Preserva la suma:

$$T(v + v') = T(v) + T(v') \quad \forall\, v, v' \in V$$

(2) Preserva el producto por escalares

$$T(\lambda v) = \lambda T(v) \quad \forall\, v \in V,\ \lambda \in \mathbb{R}$$

Observación

$T : V \longrightarrow W$ es transformación lineal $\Leftrightarrow$

$$T(v + \lambda v') = T(v) + \lambda T(v') \quad \forall\, v, v' \in V, \lambda \in \mathbb{K}.$$

Ya conocemos transformaciones lineales muy importantes.

Observación

Sea $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ y consideramos la función

$$\begin{array}{rccc} T: & \mathbb{R}^n & \rightarrow & \mathbb{R}^m \\ & v & \mapsto & Av. \end{array}$$

Entonces T es una transformación lineal.

Demostración

Debemos ver que T respeta suma y producto por escalares.

Sean $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^n$ y $\lambda \in \mathbb{R}$ entonces

$$T(v_1 + \lambda v_2) = A(v_1 + \lambda v_2) = Av_1 + \lambda A v_2 = T(v_1) + \lambda T(v_2).$$

$\square$

Ejemplo

Sea $D(\mathbb{R}) = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : \exists f'(x), \forall x \in \mathbb{R}\}$ el espacio vectorial de todas las funciones reales derivables.
Entonces la derivada es una transformación lineal de $D(\mathbb{R})$ a $F(\mathbb{R})$, el espacio vectorial de funciones de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$, pues

$$(f + cg)' = f' + cg'$$

Ejemplo

La integral indefinida es una transformación lineal de funciones continuas en funciones continuas, pues

$$\int (f + cg)\, dx = \int f\, dx + c \int g\, dx.$$

Ejemplos de transformaciones lineales

Ejemplo

Sea $T : \mathbb{K}^3 \to \mathbb{K}^2$ definida por

$$T(x_1, x_2, x_3) = (2x_1 - x_3, -x_1 + 3x_2 + x_3).$$

Entonces, T es una transformación lineal, pues observar que si

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -1 & 3 & 1 \end{bmatrix},$$

entonces

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -1 & 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x_1 - x_3 \\ -x_1 + 3x_2 + x_3 \end{bmatrix}.$$

Luego por el resultado de la p. 3, T es una transformación lineal.

Observación

Sea $T : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ definida por

$$T(x_1, \ldots, x_n) = (a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n, \ \ldots \ , a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n)$$

con $a_{ij} \in \mathbb{K}$, entonces

$$T(x) = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

Es decir, si $A = [a_{ij}]$, entonces T es la transformación lineal inducida como en la p. 3 por la matriz A.

(contra)Ejemplos

Ejemplo

No todas las funciones son transformaciones lineales. La función $f(x) = x^2$ de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ no es lineal.

Probamos esto dando un ejemplo concreto donde no se verifique algunas de las propiedades. Por ejemplo:

$$(1+1)^2 = 4 \neq 2 = 1^2 + 1^2.$$

Observación

Sea $T : V \longrightarrow W$ una transformación lineal. Entonces $T(0) = 0$.

Demostración

$$\begin{aligned} T(0) &= T(0+0) \\ T(0) &= T(0) + T(0) && \text{(linealidad de } T\text{)} \\ -T(0) + T(0) &= -T(0) + T(0) + T(0) \\ 0 &= 0 + T(0) = T(0). \end{aligned}$$

$\square$

Entre otras cosas esta propiedad, es útil como "test" para verificar si una función *no* es transformación lineal.

Ejemplo

Sea V un espacio vectorial y $v_0 \in V$ un vector no nulo. Entonces la función $f : V \longrightarrow V$ dada por

$$f(v) = v + v_0 \quad \forall v \in V$$

no es lineal dado que

$$f(0) = 0 + v_0 = v_0 \neq 0.$$

Observación

Las transformaciones lineales preservan combinaciones lineales, es decir si $T : V \longrightarrow W$ es una transformación lineal, $v_1, ..., v_k \in V$ y $\lambda_1, ..., \lambda_k \in \mathbb{R}$, entonces

$$T(\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_k v_k) = \lambda_1 T(v_1) + \cdots + \lambda_k T(v_k)$$

Esquema de la demostración

La demostración sigue por inducción y aplicando la definición de t. lineal.

- **Caso base.** $T(\lambda_1 v_1) = \lambda_1 T(v_1)$. Lo cual es cierto porque es una de las condiciones de la definición de transformación lineal.
- **Paso inductivo.**

$$\begin{aligned} T(\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_k v_k) &= T(\lambda_1 v_1) + T(v_2 + \cdots + \lambda_k v_k) && \text{(T es t.l.)} \\ &= \lambda_1 T(v_1) + \cdots + \lambda_k T(v_k) && \text{(C.B. e HI)} \end{aligned}$$

$\square$

Definición

Sea $T : V \longrightarrow W$ una transformación lineal.

- La *imagen de T* es el subconjunto de W

$$\operatorname{Im}(T) = \{T(v) \mid v \in V\} = \{w \in W \mid T(v) = w\}$$

- El *núcleo de T* es el subconjunto de V

$$\operatorname{Nu}(T) = \{v \in V \mid T(v) = 0\}$$

Observación

- $\operatorname{Im}(T)$ se define como la imagen de cualquier función.
- $\operatorname{Nu}(T)$ serían las raíces de la transformación.
- $\operatorname{Nu}(T)$ es definido de forma implícita al igual que la segunda expresión de $\operatorname{Im}(T)$.
- La primera expresión de $\operatorname{Im}(T)$ es de forma explícita o paramétrica, donde el parámetro es un vector.

Notación

Si $T : V \to W$ transformación lineal denotamos

$$T(V) := \{T(v) : v \in V\} = \operatorname{Im}(T).$$

El núcleo y la imagen son importante entre otras cosas por lo siguiente.

Teorema

Sea $T : V \longrightarrow W$ una transformación lineal. Entonces

- $\mathrm{Im}(T)$ es un subespacio vectorial de W.
- $\mathrm{Nu}(T)$ es un subespacio vectorial de V.

A continuación haremos la demostración.

Demostración: Nu(T) es subespacio

- Nu(T) $\neq \emptyset$ pues $T(0) = 0$ y por lo tanto $0 \in$ Nu(T).
- Si $v, w \in V$ tales que $T(v) = 0$ y $T(w) = 0$, entonces,
  - $T(v + w) = T(v) + T(w) = 0 \Rightarrow v + w \in$ Nu(T).
  - Si $\lambda \in \mathbb{K}$, entonces $T(\lambda v) = \lambda T(v) = \lambda.0 = 0 \Rightarrow \lambda v \in$ Nu(T).

Demostración: $\operatorname{Im}(T)$ es subespacio

- $\operatorname{Im}(T) \neq \emptyset$, pues $0 = T(0) \in \operatorname{Im}(T)$.
- Si $T(v_1), T(v_2) \in \operatorname{Im}(T)$ y $\lambda \in \mathbb{K}$, entonces
  - $T(v_1) + T(v_2) = T(v_1 + v_2) \in \operatorname{Im}(T)$.
  - $\lambda T(v_1) = T(\lambda v_1) \in \operatorname{Im}(T)$.

Lema

Sea $T : V \longrightarrow W$ *una transformación lineal con* V *de dimensión finita. Sea* $\{v_1, ..., v_k\}$ *una base de* V*. Entonces* $\{T(v_1), ..., T(v_k)\}$ *genera a* $\mathrm{Im}(T)$ *y por lo tanto* $\mathrm{Im}(T)$ *es de dimensión finita.*

Demostración

Por hipotesis: $V = \langle v_1, ..., v_k \rangle = \{\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_k v_k \mid \lambda_1, ..., \lambda_k \in \mathbb{K}\}$.

$$
\begin{aligned}
\text{Luego,}\quad \mathrm{Im}(T) &= \{T(v) \mid v \in V\} \\
&= \{T(\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_k v_k) \mid \lambda_1, ..., \lambda_k \in \mathbb{K}\} \\
&= \{\lambda_1 T(v_1) + \cdots + \lambda_k T(v_k) \mid \lambda_1, ..., \lambda_k \in \mathbb{K}\} \\
&= \langle T(v_1), ..., T(v_k) \rangle.
\end{aligned}
$$

Entonces $\mathrm{Im}(T)$ es generado por $S = \{T(v_1), ..., T(v_k)\}$. Por resultado ya visto, existe un subconjunto $\mathcal{B}$ de S que es base de $\mathrm{Im}(T)$. En particular, $\mathrm{Im}(T)$ es de dimensión finita. $\square$

Sea $T : V \longrightarrow W$ una transformación lineal y supongamos que V es de dimensión finita.

Como $\mathrm{Nu}(T)$ es un subespacio de un espacio dimensión $< \infty \Rightarrow \dim(\mathrm{Nu}\ T) < \infty$.

Por el lema anterior $\dim(\mathrm{Im}\ T) < \infty$.

Definición

Sea $T : V \longrightarrow W$ una transformación lineal y supongamos que V es de dimensión finita. Entonces

- El *rango de* T es la dimensión de $\mathrm{Im}(T)$.
- La *nulidad de* T es la dimensión de $\mathrm{Nu}(T)$.

Vimos en la p. 3 que toda matriz $m \times n$ induce una transformación lineal de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^m$.

Observación

Toda transformación lineal entre $\mathbb{R}^n$ y $\mathbb{R}^m$ es de la forma "multiplicar por una matriz".

Demostración

La demostración es parte de un resultado más general, por ahora solo decimos que si $\{e_i\}$ es la base canónica,

$$T(e_i) = a_{1i}e_1 + a_{2i}e_2 + \cdots + a_{mi}e_m, \text{ para } i = 1, \ldots, n,$$

y $A = [a_{ij}]$, entonces $Tv = Av$. $\square$

Así que analicemos un poco más en detalle las transformaciones lineales inducidas por matrices.

Definición

Sea $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ y sea T la transformación lineal

$$\begin{array}{rccc} T: & \mathbb{R}^n & \to & \mathbb{R}^m \\ & v & \mapsto & Av. \end{array}$$

Diremos que T es *la transformación lineal asociada a A* o *la transformación lineal inducida por A*.

Muchas veces denotaremos a esta transformación lineal con el mismo símbolo que la matriz, es decir, en este caso con A.

Ejemplo

Consideremos la matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}$.

Entonces si $v = (x, y, z)$,

$$A(v) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x + y + z \\ 2x + 2y + 2z \end{bmatrix}$$

En particular, $(1, -1, 0) \in \mathrm{Nu}(A)$ pues

$A(1, -1, 0) = (1 + (-1) + 0, 2 \cdot 1 + 2 \cdot (-1) + 2 \cdot 0) = (0, 0)$

y

$$A(1, 0, 0) = (1, 2) \in \mathrm{Im}(A)$$
$$A(0, 1, \pi) = (1 + \pi, 2 + 2\pi) \in \mathrm{Im}(A)$$

Proposición

Sea $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ y $T : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ la transformación lineal asociada. Entonces

- El núcleo de T es el conjunto de soluciones del sistema homogéneo $AX = 0$
- La imagen de T es el conjunto de los $b \in \mathbb{R}^m$ para los cuales el sistema $AX = b$ tiene solución

Demostración

Se demuestra fácilmente escribiendo las definiciones de los respectivos subconjuntos.

$$v \in \mathrm{Nu}(T) \Leftrightarrow Av = 0 \Leftrightarrow v \text{ es solución de } AX = 0.$$

$$b \in \mathrm{Im}(T) \Leftrightarrow \exists v \in \mathbb{R}^n \text{ tal que } Av = b \Leftrightarrow AX = b \text{ tienen solución.}$$

□

Ejemplo

Sea $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$, definida

$$T(x, y, z) = (x + y,\ x + 2y + z,\ 3y + 3z,\ 2x + 4y + 2z).$$

(1) Describir $\mathrm{Nu}(T)$ en forma paramétrica y dar una base.

(2) Describir $\mathrm{Im}(T)$ en forma paramétrica y dar una base.

Solución

La matriz asociada a esta transformación lineal es

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 3 \\ 2 & 4 & 2 \end{bmatrix}$$

Debemos encontrar la descripción paramétrica de

$$\begin{aligned} \mathrm{Nu}(T) &= \{v = (x, y, z) : A.v = 0\} \\ \mathrm{Im}(T) &= \{y = (y_1, y_2, y_3, y_4) : \text{ tal que } \exists v \in \mathbb{R}^3, A.v = y\} \end{aligned}$$

En ambos casos, la solución depende de resolver el sistema de ecuaciones cuya matriz asociada es A:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & y_1 \\ 1 & 2 & 1 & y_2 \\ 0 & 3 & 3 & y_3 \\ 2 & 4 & 2 & y_4 \end{array}\right] \xrightarrow[F_4 - 2F_1]{F_2 - F_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & y_1 \\ 0 & 1 & 1 & -y_1 + y_2 \\ 0 & 3 & 3 & y_3 \\ 0 & 2 & 2 & -2y_1 + y_4 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[\substack{F_3 - 3F_2 \\ F_4 - 2F_2}]{F_1 - F_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 2y_1 - y_2 \\ 0 & 1 & 1 & -y_1 + y_2 \\ 0 & 0 & 0 & 3y_1 - 3y_2 + y_3 \\ 0 & 0 & 0 & -2y_2 + y_4 \end{array}\right],$$

$$T(x,y,z) = (y_1, y_2, y_3, y_4) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{aligned} x - z &= 2y_1 - y_2 \\ y + z &= -y_1 + y_2 \\ 0 &= 3y_1 - 3y_2 + y_3 \\ 0 &= -2y_2 + y_4 \end{aligned}$$

Si hacemos $y_1 = y_2 = y_3 = y_4 = 0$, entonces las soluciones del sistema describen el núcleo de T, es decir

$$\begin{aligned} \mathrm{Nu}(T) &= \{(x,y,z) : x - z = 0, y + z = 0\} = \{(s,-s,s) : s \in \mathbb{R}\} \\ &= \{s(1,-1,1) : s \in \mathbb{R}\} \end{aligned}$$

que es la forma paramétrica.

Una base del núcleo de T es $\{(1,-1,1)\}$.

$$T(x,y,z) = (y_1, y_2, y_3, y_4) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{aligned} x - z &= 2y_1 - y_2 \\ y + z &= -y_1 + y_2 \\ 0 &= 3y_1 - 3y_2 + y_3 \\ 0 &= -2y_2 + y_4 \end{aligned}$$

Luego,

$$\mathrm{Im}(T) = \{(y_1, y_2, y_3, y_4) : \text{ tal que } 0 = 3y_1 - 3y_2 + y_3 \text{ y } 0 = -2y_2 + y_4\}$$

Resolviendo este sistema, obtenemos

$$\begin{aligned} \mathrm{Im}(T) &= \{(-\frac{1}{3}s + \frac{1}{2}t, \frac{1}{2}t, s, t) : s, t \in \mathbb{R}\} \\ &= \{s(-\frac{1}{3}, 0, 1, 0) + t(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0, 1) : s, t \in \mathbb{R}\} \end{aligned}$$

.

Luego $\{(-\frac{1}{3}, 0, 1, 0), (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0, 1)\}$ es una base de $\mathrm{Im}(T)$. $\square$