

PRÁCTICO 1

Soluciones

Álgebra II – Año 2024/1 – FAMAF

Vectores y producto escalar.

(1) Dados $v = (-1, 2, 0)$, $w = (2, -3, -1)$ y $u = (1, -1, 1)$, calcular:

a) $2v + 3w - 5u$,

b) $5(v + w)$,

c) $5v + 5w$ (y verificar que es igual al vector de arriba).

SOLUCIÓN:

$$\begin{aligned} a) \quad 2v + 3w - 5u &= 2 \cdot (-1, 2, 0) + 3 \cdot (2, -3, -1) - 5 \cdot (1, -1, 1) \\ &= (-2, 4, 0) + (6, -9, -3) + (-5, 5, -5) = \boxed{(-1, 0, -8)} \end{aligned}$$

$$b) \quad 5(v + w) = 5 \cdot ((-1, 2, 0) + (2, -3, -1)) = 5 \cdot (1, -1, -1) = \boxed{(5, -5, -5)}$$

$$c) \quad 5v + 5w = 5 \cdot (-1, 2, 0) + 5 \cdot (2, -3, -1) = (-5, 10, 0) + (10, -15, -5) = \boxed{(5, -5, -5)}$$

□

(2) Calcular los siguientes productos escalares.

a) $\langle (-1, 2, 0), (2, -3, -1) \rangle$,

b) $\langle (4, -1), (-1, 2) \rangle$.

SOLUCIÓN:

$$a) \quad \langle (-1, 2, 0), (2, -3, -1) \rangle = (-1) \cdot 2 + 2 \cdot (-3) + 0 \cdot (-1) = -2 + (-6) + 0 = \boxed{-8}$$

$$b) \quad \langle (4, -1), (-1, 2) \rangle = 4 \cdot (-1) + (-1) \cdot 2 = -4 + (-2) = \boxed{-6}$$

□

(3) Dados $v = (-1, 2, 0)$, $w = (2, -3, -1)$ y $u = (1, -1, 1)$, verificar que:

$$\langle 2v + 3w, -u \rangle = -2\langle v, u \rangle - 3\langle w, u \rangle$$

SOLUCIÓN: Calculamos ambos miembros por separado.

$$\begin{aligned} \text{Miembro izquierdo: } \langle 2v + 3w, -u \rangle &= \langle 2 \cdot (-1, 2, 0) + 3 \cdot (2, -3, -1), -(1, -1, 1) \rangle \\ &= \langle (-2, 4, 0) + (6, -9, -3), (-1, 1, -1) \rangle = \langle (4, -5, -3), (-1, 1, -1) \rangle \\ &= 4 \cdot (-1) + (-5) \cdot 1 + (-3) \cdot (-1) = -4 + (-5) + 3 = \boxed{-6} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Miembro derecho: } -2\langle v, u \rangle - 3\langle w, u \rangle &= -2\langle (-1, 2, 0), (1, -1, 1) \rangle - 3\langle (2, -3, -1), (1, -1, 1) \rangle \\ &= -2 \cdot (-1 \cdot 1 + 2 \cdot (-1) + 0 \cdot 1) - 3 \cdot (2 \cdot 1 + (-3) \cdot (-1) + (-1) \cdot 1) \\ &= -2 \cdot (-1 + (-2) + 0) - 3 \cdot (2 + 3 + (-1)) = -2 \cdot (-3) - 3 \cdot 4 = 6 - 12 = \boxed{-6} \end{aligned}$$

□

(4) Probar que

a) $(2, 3, -1)$ y $(1, -2, -4)$ son ortogonales.b) $(2, -1)$ y $(1, 2)$ son ortogonales. Dibujar en el plano.

SOLUCIÓN: Calculamos su producto interno para ver si es nulo.

$$a) \langle (2, 3, -1), (1, -2, -4) \rangle = 2 \cdot 1 + 3 \cdot (-2) + (-1) \cdot (-4) = 2 + (-6) + 4 = \boxed{0}$$

$$b) \langle (2, -1), (1, 2) \rangle = 2 \cdot 1 + (-1) \cdot 2 = 2 - 2 = \boxed{0}$$



FIGURE 1. Ejercicio 4.b

□

(5) Encontrar

a) un vector no nulo ortogonal a $(3, -4)$,b) un vector no nulo ortogonal a $(2, -1, 4)$,c) un vector no nulo ortogonal a $(2, -1, 4)$ y $(0, 1, -1)$,

SOLUCIÓN:

a) $(4, 3)$ es un vector no nulo ortogonal a $(3, -4)$, pues:

$$\langle (3, -4), (4, 3) \rangle = 3 \cdot 4 + (-4) \cdot 3 = 12 - 12 = \boxed{0}$$

b) $(1, 2, 0)$ es un vector no nulo ortogonal a $(2, -1, 4)$, pues:

$$\langle (2, -1, 4), (1, 2, 0) \rangle = 2 \cdot 1 + (-1) \cdot 2 + 4 \cdot 0 = 2 - 2 + 0 = \boxed{0}$$

c) Primero notar que cualquier vector de la pinta (a, b, b) será ortogonal a $(0, 1, -1)$, pues:

$$\langle (0, 1, -1), (a, b, b) \rangle = 0 \cdot a + 1 \cdot b + (-1) \cdot b = 0 + b - b = \boxed{0}$$

Si ahora multiplicamos nuestro candidato (a, b, b) con $(2, -1, 4)$ tenemos:

$$\langle (2, -1, 4), (a, b, b) \rangle = 2 \cdot a + (-1) \cdot b + 4 \cdot b = \boxed{2a + 3b}$$

Luego, si elegimos por ejemplo $a = -3$ y $b = 2$ vamos a tener a nuestro candidato ortogonal a ambos vectores. Es decir, $(-3, 2, 2)$ cumple lo requerido.

□

(6) Encontrar la longitud de los vectores.

(a) $(2, 3)$,

(b) (t, t^2) ,

(c) $(\cos \phi, \sin \phi)$.

SOLUCIÓN:

a) $\|(2, 3)\| = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{4 + 9} = \sqrt{13}$

b) $\|(t, t^2)\| = \sqrt{t^2 + (t^2)^2} = \sqrt{t^2 + t^4} = |t|\sqrt{1 + t^2}$

c) $\|(\cos \phi, \sin \phi)\| = \sqrt{\cos^2 \phi + \sin^2 \phi} = \sqrt{1} = 1$

□

(7) Calcular $\langle v, w \rangle$ y el ángulo entre v y w para los siguientes vectores.

(a) $v = (2, 2)$, $w = (1, 0)$,

(b) $v = (-5, 3, 1)$, $w = (2, -4, -7)$.

SOLUCIÓN: Para encontrar el ángulo se deben calcular además las normas de los vectores:

a) $\langle v, w \rangle = \langle (2, 2), (1, 0) \rangle = 2 \cdot 1 + 2 \cdot 0 = 2 + 0 = 2$

$\|v\| = \|(2, 2)\| = \sqrt{2^2 + 2^2} = \sqrt{4 + 4} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

$\|w\| = \|(1, 0)\| = \sqrt{1^2 + 0^2} = \sqrt{1 + 0} = \sqrt{1} = 1$

$\theta = \cos^{-1} \left(\frac{\langle v, w \rangle}{\|v\| \|w\|} \right) = \cos^{-1} \left(\frac{2}{2\sqrt{2} \cdot 1} \right) = \cos^{-1} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right) = 45^\circ$

b) $\langle v, w \rangle = \langle (-5, 3, 1), (2, -4, -7) \rangle = -5 \cdot 2 + 3 \cdot (-4) + 1 \cdot (-7) = -10 - 12 - 7 = -29$

$\|v\| = \|(-5, 3, 1)\| = \sqrt{(-5)^2 + 3^2 + 1^2} = \sqrt{25 + 9 + 1} = \sqrt{35}$

$\|w\| = \|(2, -4, -7)\| = \sqrt{2^2 + (-4)^2 + (-7)^2} = \sqrt{4 + 16 + 49} = \sqrt{69}$

$\theta = \cos^{-1} \left(\frac{\langle v, w \rangle}{\|v\| \|w\|} \right) = \cos^{-1} \left(\frac{-29}{\sqrt{35}\sqrt{69}} \right) = 126^\circ 9' 55.57''$

□

(8) Recordar los vectores e_1 , e_2 y e_3 dados en la página 12 del apunte. Sea $v = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$. Verificar que

$$v = x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3 = \langle v, e_1 \rangle e_1 + \langle v, e_2 \rangle e_2 + \langle v, e_3 \rangle e_3.$$

SOLUCIÓN: Podemos empezar desde el miembro de la derecha, pasar por el del medio y llegar al de la izquierda aplicando las definiciones y propiedades conocidas:

$$\begin{aligned} & \langle v, e_1 \rangle e_1 + \langle v, e_2 \rangle e_2 + \langle v, e_3 \rangle e_3 = \\ & = \langle (x_1, x_2, x_3), (1, 0, 0) \rangle e_1 + \langle (x_1, x_2, x_3), (0, 1, 0) \rangle e_2 + \langle (x_1, x_2, x_3), (0, 0, 1) \rangle e_3 \\ & = (x_1 \cdot 1 + x_2 \cdot 0 + x_3 \cdot 0) e_1 + (x_1 \cdot 0 + x_2 \cdot 1 + x_3 \cdot 0) e_2 + (x_1 \cdot 0 + x_2 \cdot 0 + x_3 \cdot 1) e_3 \\ & = (x_1 + 0 + 0) e_1 + (0 + x_2 + 0) e_2 + (0 + 0 + x_3) e_3 = x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3 \\ & x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3 = x_1(1, 0, 0) + x_2(0, 1, 0) + x_3(0, 0, 1) = \\ & = (x_1 \cdot 1, x_1 \cdot 0, x_1 \cdot 0) + (x_2 \cdot 0, x_2 \cdot 1, x_2 \cdot 0) + (x_3 \cdot 0, x_3 \cdot 0, x_3 \cdot 1) \\ & = (x_1, 0, 0) + (0, x_2, 0) + (0, 0, x_3) = (x_1 + 0 + 0, 0 + x_2 + 0, 0 + 0 + x_3) = \\ & (x_1, x_2, x_3) = v \end{aligned}$$

□

- (9) Probar, usando sólo las propiedades **P1**, **P2**, y **P3** del producto escalar, que dados $v, w, u \in \mathbb{R}^n$ y $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$,

a) se cumple:

$$\langle \lambda_1 v + \lambda_2 w, u \rangle = \lambda_1 \langle v, u \rangle + \lambda_2 \langle w, u \rangle.$$

b) Si $\langle v, w \rangle = 0$, es decir si v y w son ortogonales, entonces

$$\langle \lambda_1 v + \lambda_2 w, \lambda_1 v + \lambda_2 w \rangle = \lambda_1^2 \langle v, v \rangle + \lambda_2^2 \langle w, w \rangle.$$

SOLUCIÓN:

$$a) \langle \lambda_1 v + \lambda_2 w, u \rangle \stackrel{P2}{=} \langle u, \lambda_1 v \rangle + \langle u, \lambda_2 w \rangle \stackrel{P3}{=} \lambda_1 \langle u, v \rangle + \lambda_2 \langle u, w \rangle \stackrel{P1}{=} \lambda_1 \langle v, u \rangle + \lambda_2 \langle w, u \rangle$$

$$b) \langle \lambda_1 v + \lambda_2 w, \lambda_1 v + \lambda_2 w \rangle \stackrel{P2}{=} \langle \lambda_1 v + \lambda_2 w, \lambda_1 v \rangle + \langle \lambda_1 v + \lambda_2 w, \lambda_2 w \rangle \stackrel{P2}{=} \\ \stackrel{P2}{=} \langle \lambda_1 v, \lambda_1 v \rangle + \langle \lambda_1 v, \lambda_2 w \rangle + \langle \lambda_2 w, \lambda_1 v \rangle + \langle \lambda_2 w, \lambda_2 w \rangle \stackrel{P3}{=} \\ \stackrel{P3}{=} \lambda_1^2 \langle v, v \rangle + \lambda_1 \lambda_2 \langle v, w \rangle + \lambda_2 \lambda_1 \langle w, v \rangle + \lambda_2^2 \langle w, w \rangle \stackrel{HIP}{=} \lambda_1^2 \langle v, v \rangle + \lambda_2^2 \langle w, w \rangle$$

En el último paso se utilizó la hipótesis $\langle v, w \rangle = 0$.

□

- (10) Dados $v, w \in \mathbb{R}^n$, probar que si $\langle v, w \rangle = 0$, es decir si v y w son ortogonales, entonces

$$\|v + w\|^2 = \|v\|^2 + \|w\|^2.$$

¿Cuál es el nombre con que se conoce este resultado en \mathbb{R}^2 ?

SOLUCIÓN: Vamos a usar la definición de norma y el inciso b) del ejercicio anterior, tomando $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$:

$$\|v + w\|^2 \stackrel{def}{=} \langle v + w, v + w \rangle \stackrel{9.b)}{=} \langle v, v \rangle + \langle w, w \rangle \stackrel{def}{=} \|v\|^2 + \|w\|^2.$$

En \mathbb{R}^2 esta igualdad es el *Teorema de Pitágoras*.

□

- (11) @ Sean $v, w \in \mathbb{R}^2$, probar usando solo la definición explícita del producto escalar en \mathbb{R}^2 que

$$|\langle v, w \rangle| \leq \|v\| \|w\| \quad (\text{Desigualdad de Schwarz}).$$

SOLUCIÓN: Vamos a escribir $v = (v_1, v_2)$ y $w = (w_1, w_2)$. Veamos la pinta del cuadrado del lado izquierdo:

$$\langle v, w \rangle^2 = \langle (v_1, v_2), (w_1, w_2) \rangle^2 = (v_1 w_1 + v_2 w_2)^2 \quad (1.1)$$

Ahora comenzamos por el cuadrado del lado derecho con el objetivo de llegar a (1.1):

$$\|v\|^2 \|w\|^2 = (v_1^2 + v_2^2)(w_1^2 + w_2^2) = (v_1 w_1)^2 + (v_1 w_2)^2 + (v_2 w_1)^2 + (v_2 w_2)^2.$$

Mirando el primer y último término tenemos que si completamos ese cuadrado obtendríamos (1.1). Sumamos y restamos $2(v_1 w_1)(v_2 w_2)$ y agrupamos:

$$\begin{aligned} \|v\|^2 \|w\|^2 &= (v_1 w_1)^2 + (v_1 w_2)^2 + (v_2 w_1)^2 + (v_2 w_2)^2 + \\ &\quad + 2(v_1 w_1)(v_2 w_2) - 2(v_1 w_1)(v_2 w_2) = \\ &= [(v_1 w_1)^2 + 2(v_1 w_1)(v_2 w_2) + (v_2 w_1)^2] + [(v_2 w_1)^2 - 2v_1 w_1 v_2 w_2 + (v_1 w_2)^2] \end{aligned}$$

El segundo grupo de términos también forma un cuadrado perfecto. Escribimos ambos como cuadrados y acotamos:

$$\|v\|^2 \|w\|^2 = \underbrace{(v_1 w_1 + v_2 w_2)^2}_{=\langle v, w \rangle^2} + \underbrace{(v_2 w_1 - v_1 w_2)^2}_{\geq 0} \geq \langle v, w \rangle^2.$$

□

Rectas y planos.

(12) En cada uno de los siguientes casos determinar si los vectores \vec{vw} y \vec{xy} son equivalentes y/o paralelos.

a) $v = (1, -1)$, $w = (4, 3)$, $x = (-1, 5)$, $y = (5, 2)$.

b) $v = (1, -1, 5)$, $w = (-2, 3, -4)$, $x = (3, 1, 1)$, $y = (-3, 9, -17)$.

SOLUCIÓN: Calculamos las diferencias correspondientes y las analizamos:

a) $w - v = (4, 3) - (1, -1) = (4 - 1, 3 - (-1)) = (3, 4)$

$y - x = (5, 2) - (-1, 5) = (5 - (-1), 2 - 5) = (6, -3)$

No son equivalentes ni paralelos.

b) $w - v = (-2, 3, -4) - (1, -1, 5) = (-2 - 1, 3 - (-1), -4 - 5) = (-3, 4, -9)$

$y - x = (-3, 9, -17) - (3, 1, 1) = (-3 - 3, 9 - 1, -17 - 1) = (-6, 8, -18)$.

No son equivalente pero si paralelos. Tomando $\lambda = 2$ se tiene que $y - x = \lambda(w - v)$.

□

(13) Sea R_1 la recta que pasa por $p_1 = (2, 0)$ y es ortogonal a $(1, 3)$.

a) Dar la descripción paramétrica e implícita de R_1 .

b) Graficar en el plano a R_1 .

c) Dar un punto p por el que pase R_1 distinto a p_1 .

d) Verificar si $p + p_1$ y $-p$ pertenecen a R_1

SOLUCIÓN:

a) Para la descripción paramétrica necesitamos un vector paralelo a R_1 , es decir, ortogonal a $(1, 3)$. Un vector así puede ser el $(3, -1)$, con el que tenemos:

Descripción paramétrica: $R_1 = \{(2, 0) + t(3, -1) \mid t \in \mathbb{R}\}$

Para la descripción implícita simplemente reemplazamos todos los datos dados en la ecuación $ax + by = \langle (x_0, y_0), (a, b) \rangle$ y tenemos:

Descripción implícita: $R_1 = \{(x, y) \mid x + 3y = 2\}$

b) ver figura 2

c) Para dar un punto sobre la recta conviene usar la descripción paramétrica. En este caso debe ser distinto a p_1 , con lo que cualquier valor de $t \neq 0$ va a servir. Si tomamos por ejemplo $t = -1$ vamos a tener $p = (-1, 1)$.

d) Para verificar si un punto pertenece, conviene usar la descripción implícita. Calculamos cada punto y reemplazamos en la ecuación:

$$\begin{array}{l|l} p + p_1 = (-1, 1) + (2, 0) = (1, 1) & -p = (1, -1) \\ (1) + 3 \cdot (1) = 4 \neq 2 & (1) + 3 \cdot (-1) = -2 \neq 2 \\ \therefore p + p_1 \notin R_1 & \therefore -p \notin R_1 \end{array}$$

□

(14) Repetir el ejercicio anterior con las siguientes rectas.

a) R_2 : recta que pasa por $p_2 = (0, 0)$ y es ortogonal a $(1, 3)$.

b) R_3 : recta que pasa por $p_3 = (1, 0)$ y es paralela a R_1 .

SOLUCIÓN: Los procedimientos son análogos a los del ejercicio 13. Las gráficas están en la figura 2

a) Descripción paramétrica: $R_2 = \{t(3, -1) \mid t \in \mathbb{R}\}$

Descripción implícita: $R_2 = \{(x, y) \mid x + 3y = 0\}$

Tomando $t = -1$ tenemos $p = (-3, 1)$.

$$\begin{array}{l|l} p + p_2 = (-3, 1) + (0, 0) = (-3, 1) & -p = (3, -1) \\ (-3) + 3 \cdot (1) = -3 + 3 = 0 & (3) + 3 \cdot (-1) = 3 - 3 = 0 \\ \therefore p + p_2 \in R_2 & \therefore -p \in R_2 \end{array}$$

b) Descripción paramétrica: $R_3 = \{(1, 0) + t(3, -1) \mid t \in \mathbb{R}\}$

Descripción implícita: $R_3 = \{(x, y) \mid x + 3y = 1\}$

Tomando $t = -1$ tenemos $p = (-2, 1)$.

$$\begin{array}{l|l} p + p_3 = (-2, 1) + (1, 0) = (-1, 1) & -p = (2, -1) \\ (-1) + 3 \cdot (1) = 2 \neq 1 & (2) + 3 \cdot (-1) = -1 \neq 1 \\ \therefore p + p_3 \notin R_3 & \therefore -p \notin R_3 \end{array}$$

□

(15) Calcular, numérica y gráficamente, las intersecciones $R_1 \cap R_2$ y $R_1 \cap R_3$.

SOLUCIÓN: Para el cálculo numérico, notar que las ecuaciones de las tres rectas son de la forma $x + 3y = c$ donde c vale 2, 0 y 1 para R_1 , R_2 y R_3 respectivamente. Así tendremos por ejemplo que para calcular la intersección $R_1 \cap R_2$ tendremos que resolver el sistema:



FIGURE 2

$$\begin{cases} x + 3y = 2 \\ x + 3y = 0 \end{cases}$$

Este sistema no tiene solución, pues para cualquier valores de x e y que elijamos, no puede suceder que al hacer la cuenta $x + 3y$ obtengamos simultáneamente el resultado 2 y el resultado 0. El caso $R_1 \cap R_3$ es análogo.

Para la determinación gráfica, se pueden observar los gráficos de la figura 2 y notar que ambas parejas son paralelas, y por lo tanto no tienen intersección.

En conclusión, tenemos $R_1 \cap R_2 = R_1 \cap R_3 = \emptyset$

□

(16) Sea $v_0 = (2, -1, 1)$.

- Describir paramétricamente el conjunto $P_1 = \{w \in \mathbb{R}^3 : \langle v_0, w \rangle = 0\}$.
- Describir paramétricamente el conjunto $P_2 = \{w \in \mathbb{R}^3 : \langle v_0, w \rangle = 1\}$.
- ¿Qué relación hay entre P_1 y P_2 ?

SOLUCIÓN:

- Debemos despejar la ecuación implícita y reemplazarla en el vector:

$$(x, y, z) \in P_1 \iff \langle (2, -1, 1), (x, y, z) \rangle = 0$$

$$(x, y, z) \in P_1 \iff 2x - y + z = 0$$

$$(x, y, z) \in P_1 \iff 2x + z = y$$

$$(x, y, z) \in P_1 \iff (x, y, z) = (x, 2x + z, z) = x(1, 2, 0) + z(0, 1, 1)$$

$$\therefore P_1 = \{s(1, 2, 0) + t(0, 1, 1) \mid s, t, \in \mathbb{R}\}$$

- Análogo al ítem anterior:

$$(x, y, z) \in P_2 \iff \langle (2, -1, 1), (x, y, z) \rangle = 1$$

$$(x, y, z) \in P_2 \iff 2x - y + z = 1$$

$$(x, y, z) \in P_2 \iff 2x + z - 1 = y$$

$$(x, y, z) \in P_2 \iff (x, y, z) = (x, 2x + z - 1, z) = (0, -1, 0) + x(1, 2, 0) + z(0, 1, 1)$$

$$\therefore P_2 = \{(0, -1, 0) + s(1, 2, 0) + t(0, 1, 1) \mid s, t, \in \mathbb{R}\}$$

- Los planos P_1 y P_2 son paralelos.

□

(17) Escribir la ecuación paramétrica y la ecuación normal de los siguientes planos.

- a) π_1 : el plano que pasa por $(0, 0, 0)$, $(1, 1, 0)$, $(1, -2, 0)$.
 b) π_2 : el plano que pasa por $(1, 2, -2)$ y es perpendicular a la recta que pasa por $(2, 1, -1)$, $(3, -2, 1)$.
 c) $\pi_3 = \{w \in \mathbb{R}^3 : w = s(1, 2, 0) + t(2, 0, 1) + (1, 0, 0); s, t \in \mathbb{R}\}$.

SOLUCIÓN:

- a) Llamemos $p_0 = (0, 0, 0)$, $p_1 = (1, 1, 0)$ y $p_2 = (1, -2, 0)$ a los puntos involucrados. Como p_0 es el origen y p_2 no es un múltiplo de p_1 , tenemos que los puntos no son colineales. Luego para la descripción paramétrica basta con elegir uno de ellos y dos parejas distintas cualquiera. Así, por ejemplo podríamos escribir:

$$\pi_1 = \{p_0 + s \overrightarrow{p_0 p_1} + t \overrightarrow{p_0 p_2} \mid s, t \in \mathbb{R}\} = \boxed{\{s(1, 1, 0) + t(1, -2, 0) \mid s, t \in \mathbb{R}\}}$$

Notar que cualquier otra elección para el primer punto y las dos parejas da lugar a parametrizaciones diferentes, pero equivalentes, de π_1 .

Para la ecuación normal vamos a necesitar un vector que sea ortogonal a ambas direcciones, $\overrightarrow{p_0 p_1}$ y $\overrightarrow{p_0 p_2}$. A simple vista puede verse que un vector que cumple eso es $e_3 = (0, 0, 1)$. Luego reemplazamos eso en la ecuación normal $\langle v, e_3 \rangle = \langle p_0, e_3 \rangle$. Notar que podríamos haber elegido cualquier punto en π_1 en lugar de p_0 , y todos deberían dar el mismo resultado. La ecuación normal sería entonces:

$$\pi_1 = \boxed{\{w \in \mathbb{R}^3 \mid \langle w, e_3 \rangle = 0\}}$$

- b) Llamemos $p_0 = (1, 2, -2)$, $p_1 = (2, 1, -1)$ y $p_2 = (3, -2, 1)$. En este caso conviene empezar con la ecuación normal pues contamos con una dirección perpendicular al plano: $\overrightarrow{p_1 p_2} = p_2 - p_1 = (1, -3, 2)$. Reemplazamos en la ecuación normal y tenemos:

$$\pi_2 = \{w \in \mathbb{R}^3 \mid \langle w, \overrightarrow{p_1 p_2} \rangle = \langle p_0, \overrightarrow{p_1 p_2} \rangle\} = \boxed{\{w \in \mathbb{R}^3 \mid \langle w, \overrightarrow{p_1 p_2} \rangle = -9\}}$$

Para encontrar la forma paramétrica se siguen los mismos pasos que en el ejercicio 16.a) y 16.b):

$$(x, y, z) \in \pi_2 \iff \langle (1, -3, 2), (x, y, z) \rangle = -9$$

$$(x, y, z) \in \pi_2 \iff x - 3y + 2z = -9$$

$$(x, y, z) \in \pi_2 \iff x = -9 + 3y - 2z$$

$$(x, y, z) \in \pi_2 \iff (x, y, z) = (-9 + 3y - 2z, y, z) = (-9, 0, 0) + y(3, 1, 0) + z(-2, 1, 0)$$

$$\therefore \pi_2 = \boxed{\{(-9, 0, 0) + s(3, 1, 0) + t(-2, 1, 0) \mid s, t \in \mathbb{R}\}}$$

- c) El plano ya viene dado en forma paramétrica, por lo que sólo resta expresarlo en forma normal. Para ello es necesario encontrar un vector (x, y, z) que sea perpendicular a $(1, 2, 0)$ y a $(2, 0, 1)$. Como en este caso no es obvio, podemos plantear ambos productos escalares y despejar:

$$\begin{cases} x + 2y = 0 \\ 2x + z = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} x = -2y \\ z = -2x = -2(-2y) = 4y \end{cases} \implies \begin{cases} x = -2y \\ z = 4y \end{cases}$$

Es decir que el vector buscado es de la pinta $(-2y, y, 4y) = y(-2, 1, 4)$ o, lo que es lo mismo, cualquier múltiplo de $(-2, 1, 4)$ será perpendicular al plano. La forma normal es entonces:

$$\pi_3 = \{w \in \mathbb{R}^3 \mid \langle w, (-2, 1, 4) \rangle = \langle (1, 0, 0), (-2, 1, 4) \rangle\} = \boxed{\{w \in \mathbb{R}^3 \mid \langle w, (-2, 1, 4) \rangle = -2\}}$$

□

(18) ¿Cuáles de las siguientes rectas cortan al plano π_3 del ejercicio c)? Describir la intersección en cada caso.

- (a) $\{w : w = (3, 2, 1) + t(1, 1, 1)\}$, (b) $\{w : w = (1, -1, 1) + t(1, 2, -1)\}$,
 (c) $\{w : w = (-1, 0, -1) + t(1, 2, -1)\}$, (d) $\{w : w = (1, -2, 1) + t(2, -1, 1)\}$.

SOLUCIÓN: La manera más directa de chequear si una recta interseca a un plano es con la forma normal del plano. Si la dirección de la recta es perpendicular a la dirección normal del plano, la recta es paralela al plano. Luego, o bien toda la recta está contenida en el plano, o bien la recta y el plano tienen intersección vacía.

Si una recta no es paralela a un plano, lo corta en un único punto. La manera más fácil de hallar ese punto es reemplazar la parametrización de la recta en la ecuación normal y despejar t . Luego, reemplazando t en la parametrización de la recta se encuentra el punto.

a) Como $\langle (1, 1, 1), (-2, 1, 4) \rangle = 3 \neq 0$, la recta corta al plano π_3 . Encuentro el punto de intersección:

$$\begin{aligned} -2(3+t) + (2+t) + 4(1+t) &= -2 \\ -6 - 2t + 2 + t + 4 + 4t &= -2 \\ 3t &= -2 \implies \boxed{t = -\frac{2}{3}} \end{aligned}$$

$$\text{El punto de intersección es } (3, 2, 1) - \frac{2}{3}(1, 1, 1) = \boxed{\left(\frac{7}{3}, \frac{4}{3}, \frac{1}{3}\right)}$$

b) Como $\langle (1, 2, -1), (-2, 1, 4) \rangle = -4 \neq 0$, la recta corta al plano π_3 . Encuentro el punto de intersección:

$$\begin{aligned} -2(1+t) + (-1+2t) + 4(1-t) &= -2 \\ -2 - 2t - 1 + 2t + 4 - 4t &= -2 \\ 3 &= 4t \implies \boxed{t = \frac{3}{4}} \end{aligned}$$

$$\text{El punto de intersección es } (1, -1, 1) + \frac{3}{4}(1, 2, -1) = \boxed{\left(\frac{7}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)}$$

c) Como $\langle (1, 2, -1), (-2, 1, 4) \rangle = -4 \neq 0$, la recta corta al plano π_3 . Encuentro el punto de intersección:

$$\begin{aligned}
 -2(-1+t) + (2t) + 4(-1-t) &= -2 \\
 2 - 2t + 2t - 4 - 4t &= -2 \\
 -4t &= 0 \implies \boxed{t = 0}
 \end{aligned}$$

El punto de intersección es $(-1, 0, -1) + 0 \cdot (1, 2, -1) = \boxed{(-1, 0, -1)}$

d) Como $\langle (2, -1, 1), (-2, 1, 4) \rangle = -1 \neq 0$, la recta corta al plano π_3 . Encuentro el punto de intersección:

$$\begin{aligned}
 -2(1+2t) + (-2-t) + 4(1+t) &= -2 \\
 -2 - 4t - 2 - t + 4 + 4t &= -2 \\
 -t &= -2 \implies \boxed{t = 2}
 \end{aligned}$$

El punto de intersección es $(1, -2, 1) + 2(2, -1, 1) = \boxed{(5, -4, 3)}$

□

(19) Sea $L = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : ax + by = c\}$ una recta en \mathbb{R}^2 . Sean p y q dos puntos por los que pasa L .

- ¿Para qué valores de c puede asegurar que $(0, 0) \in L$?
- ¿Para qué valores de c puede asegurar que $\lambda q \in L$? donde $\lambda \in \mathbb{R}$.
- ¿Para qué valores de c puede asegurar que $p + q \in L$?

SOLUCIÓN:

a) Si $(0, 0) \in L$, entonces esos valores de x e y deben verificar la ecuación normal de la recta. Es decir, debe suceder $c = ax + by = a \cdot 0 + b \cdot 0 = 0$. Con lo cual debe ser $c = 0$ y por lo tanto es el único valor de c con esta propiedad.

b) Llamemos $q = (x_q, y_q)$. Como $q \in L$, sabemos que se cumple

$$ax_q + by_q = c \tag{1.2}$$

Ahora supongamos que además $\lambda q = (\lambda x_q, \lambda y_q) \in L$. Vamos a tener entonces:

$$\begin{aligned}
 a(\lambda x_q) + b(\lambda y_q) &= c \\
 \lambda ax_q + \lambda by_q &= c \\
 \lambda(ax_q + by_q) &= c \text{ (Reemplazamos la ecuación 1.2)} \\
 \lambda c &= c \\
 (\lambda - 1)c &= 0
 \end{aligned}$$

Luego tenemos dos casos: Si $\lambda = 1$, entonces c puede tomar cualquier valor. Si $\lambda \neq 1$ entonces sólo puede ser $c = 0$. En particular, si $c = 0$, λ puede tener cualquier valor.

c) Llamemos $p = (x_p, y_p)$. Como $p \in L$ vamos a tener el análogo a la ecuación 1.2 para p :

$$ax_p + by_p = c \tag{1.3}$$

Ahora suponemos que además $p + q = (x_p + x_q, y_p + y_q) \in L$ y tenemos:

$$\begin{aligned} a(x_p + x_q) + b(y_p + y_q) &= c \\ ax_p + ax_q + by_p + by_q &= c \\ (ax_p + by_p) + (ax_q + by_q) &= c \\ c + c &= c \quad (\text{reemplazamos las ecuaciones 1.2 y 1.3}) \\ 2c &= c \\ c &= 0 \end{aligned}$$

Por lo tanto debe ser $c = 0$ y es el único valor con esta propiedad. \square

(20) Sea L una recta en \mathbb{R}^2 . Probar que L pasa por $(0, 0)$ si y sólo si pasa por $p + \lambda q$ para todo par de puntos p y q de L y para todo $\lambda \in \mathbb{R}$.

SOLUCIÓN:

\Rightarrow Supongo que $(0, 0) \in L$, entonces por el ejercicio 19.a) tengo que $c = 0$. Si $c = 0$, por ejercicio 19.b) tengo que como $q \in L$ entonces $\lambda q \in L$. Luego, por ejercicio 19.c) tengo que como $p \in L$ y $\lambda q \in L$ entonces su suma también: $p + \lambda q \in L$.

\Leftarrow Considero un $p \in L$ cualquiera, y tomo $\lambda = -1$ y $q = p$. Tengo entonces por hipótesis que $p + \lambda q \in L$, pero $p + \lambda q = p + (-1)p = p - p = (0, 0)$ y por lo tanto $(0, 0) \in L$. \square

PRÁCTICO 2

Soluciones

Álgebra II – Año 2024/1 – FAMAF

- (1) *Juego Suko*. Colocar los números del 1 al 9 en las celdas de la siguiente tabla de modo que el número en cada círculo sea igual a la suma de las cuatro celdas adyacentes, y la suma de las celdas del mismo color sea igual al número en el círculo de igual color.



SOLUCIÓN: Queremos ver que valor toma cada celda y, por lo tanto, a cada celda le asignamos una variable:

x_1	x_2	x_3
x_4	x_5	x_6
x_7	x_8	x_9

Tenemos entonces las 9 incógnitas que debemos resolver y la información del Suko original nos dice que se deben cumplir las siguientes ecuaciones:

$$x_1 + x_2 + x_4 + x_5 = 12, \quad (2.1)$$

$$x_2 + x_3 + x_5 + x_6 = 19, \quad (2.2)$$

$$x_4 + x_5 + x_7 + x_8 = 23, \quad (2.3)$$

$$x_5 + x_6 + x_8 + x_9 = 26, \quad (2.4)$$

$$x_4 + x_5 = 9, \quad (2.5)$$

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_6 = 14, \quad (2.6)$$

$$x_7 + x_8 + x_9 = 22 \quad (2.7)$$

Primero vamos a tratar de resolver el sistema de ecuaciones. Podríamos plantear la matriz ampliada del sistema y reducir la matriz, pero en este caso

va a resultar más corto trabajar con las ecuaciones directamente. Hay 9 incógnitas y 7 ecuaciones, entonces en general es razonable que queden 7 variables dependientes y 2 variables libres. Con esto en mente trataremos de despejar todo en función de las variables x_1 y x_3 (esto fue elegido arbitrariamente).

Como $x_4 + x_5 = 9 \xrightarrow{(1)} x_1 + x_2 + 9 = 12$, es decir $x_1 + x_2 = 3$ o $x_2 = 3 - x_1$ (a).

Como $x_4 + x_5 = 9 \xrightarrow{(3)} 9 + x_7 + x_8 = 23 \Rightarrow x_7 + x_8 = 14 \xrightarrow{(7)} 14 + x_9 = 22 \Rightarrow x_9 = 8$ (b).

Ahora, como $x_1 + x_2 = 3 \xrightarrow{(6)} 3 + x_3 + x_6 = 14$, es decir $x_3 + x_6 = 11$ o $x_6 = 11 - x_3$ (c).

Si en la ecuación (2) reemplazamos x_2 y x_6 , obtenemos

$$19 = x_2 + x_3 + x_5 + x_6 = (3 - x_1) + x_3 + x_5 + (11 - x_3) = 14 - x_1 + x_5,$$

o $x_5 = 5 + x_1$ (d).

Con todo lo que hemos averiguado hacemos reemplazos en (4):

$$26 = x_5 + x_6 + x_8 + x_9 = (5 + x_1) + (11 - x_3) + x_8 + 8 = 24 + x_1 - x_3 + x_8,$$

luego $x_8 = 2 - x_1 + x_3$ (e).

De la fórmula (7), de (e) y de (b), obtenemos

$$22 = x_7 + x_8 + x_9 = x_7 + (2 - x_1 + x_3) + 8 = 10 + x_7 - x_1 + x_3,$$

luego $x_7 = 12 + x_1 - x_3$ (f).

Utilizando (d) y la fórmula (5):

$$9 = x_4 + x_5 = x_4 + (5 + x_1) = 5 + x_1 + x_4,$$

luego $x_4 = 4 - x_1$ (g).

Teníamos 7 ecuaciones y 9 incógnitas, entonces. como ya dijimos, era de esperarse que queden 7 variables dependientes y 2 variables libres, en este caso x_1 y x_3 . Si no tuviéramos más restricciones la cantidad de soluciones sería infinita, pero debemos considerar que

$$x_i \in \mathbb{N} \quad \wedge \quad 1 \leq x_i \leq 9 \quad \wedge \quad x_i \neq x_j \text{ si } i \neq j. \quad (*)$$

($1 \leq i, j \leq 7$).

Debido a (*) y (a), x_1 solo puede ser 1 o 2.

Caso $x_1 = 1$. por las ecuaciones (a), ..., (f) obtenemos:

$$\begin{array}{lll} x_1 = 1, & x_2 = 2, & x_4 = 3, \\ x_5 = 6, & x_9 = 8, & \\ x_6 = 11 - x_3, & x_7 = 13 - x_3, & x_8 = x_3 + 1, \end{array} \quad (**)$$

y x_3 libre (con las restricciones de (*)). Luego, x_3 tampoco puede tomar los valores 1, 2, 3, 6, 8 (pues ya los tienen otras variables), así que $x_3 = 4, 5, 7, 9$.

Subcaso $x_1 = 1$, $x_3 = 4$. En este caso, por (**): $x_6 = 7$, $x_7 = 9$, $x_8 = 5$, y estas serían soluciones admisibles.

Subcaso $x_1 = 1, x_3 = 5$. En este caso, por (**), $x_6 = 6 = x_5$, lo cual no es admisible (debe ser $x_6 \neq x_5$.)

Subcaso $x_1 = 1, x_3 = 7$. En este caso, por (**), $x_8 = 7 + 1 = 8 = x_9$, lo cual no es admisible.

Subcaso $x_1 = 1, x_3 = 9$. En este caso, por (**), $x_8 = 10$, lo cual no es admisible ($x_i \leq 9$ para todo i).

Falta ver

Caso $x_1 = 2$. Por la ecuación (g) obtenemos $x_4 = 4 - 2 = 2 = x_1$, lo cual no es admisible.

Es decir, hay una única solución para estas ecuaciones con las restricciones mencionadas:

$$\begin{array}{lll} x_1 = 1, & x_2 = 2, & x_3 = 4, \\ x_4 = 3, & x_5 = 6, & x_6 = 7 \\ x_7 = 9, & x_8 = 5, & x_9 = 8. \end{array}$$

□

- (2) Encontrar los coeficientes reales del polinomio $p(x) = ax^2 + bx + c$ de manera tal que $p(1) = 2$, $p(2) = 7$ y $p(3) = 14$.

SOLUCIÓN: Planteemos a nivel de los coeficientes del polinomio las condiciones:

$$\begin{array}{lll} P(1) = 2 & \Rightarrow & a \cdot 1^2 + b \cdot 1 + c = 2 \\ P(2) = 7 & \Rightarrow & a \cdot 2^2 + b \cdot 2 + c = 7 \\ P(3) = 14 & \Rightarrow & a \cdot 3^2 + b \cdot 3 + c = 14. \end{array} \quad (*)$$

Nuestro objetivo es averiguar a , b y c , que como vemos, se podrían obtener resolviendo el sistema de ecuaciones lineales planteado en (*). La matriz ampliada de este sistema es

$$[A|Y] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 1 & 7 \\ 9 & 3 & 1 & 14 \end{array} \right]$$

Resolvamos el sistema.

$$\begin{array}{l} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 1 & 7 \\ 9 & 3 & 1 & 14 \end{array} \right] \xrightarrow[F_2-4F_1]{F_3-9F_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & -3 & -1 \\ 0 & -6 & -8 & -4 \end{array} \right] \xrightarrow{F_3-3F_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array} \right] \\ \xrightarrow[F_2+3F_3]{F_1-F_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & -2 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array} \right] \xrightarrow{F_2/(-2)} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array} \right] \xrightarrow{F_1-F_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array} \right] \end{array}$$

Luego $a = 1$, $b = 2$, $c = -1$. Es decir el polinomio que satisface las hipótesis es:

$$x^2 + 2x - 1.$$

□

(3) Determinar cuáles de las siguientes matrices son MERF.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

SOLUCIÓN: Recordemos que una matriz MERF debe satisfacer:

- a) la primera entrada no nula de una fila es 1 (el 1 principal).
- b) Cada columna que contiene un 1 principal tiene todos los otros elementos iguales a 0.
- c) todas las filas cuyas entradas son todas iguales a cero están al final de la matriz, y
- d) en dos filas consecutivas no nulas el 1 principal de la fila inferior está más a la derecha que el 1 principal de la fila superior.

Las primeras cuatro matrices satisfacen la definición de MERF.

La 5ª matriz no satisface b), pues el 1 principal es la segunda fila está en la columna 3 y en esa columna hay otro elemento no nulo (en la posición 33 hay un 1).

La 6ª matriz tampoco es MERF pues la fila 2 es nula y la fila 3 no lo es. Luego no satisface c).

□

(4) Para cada una de las MERF del ejercicio anterior,

- a) asumir que es la matriz de un sistema homogéneo, escribir el sistema y dar las soluciones del sistema.
- b) asumir que es la matriz ampliada de un sistema no homogéneo, escribir el sistema y dar las soluciones del sistema.

SOLUCIÓN: Como ya vimos en el ejercicio anterior las MERF son

$$(i) \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (ii) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -3 \end{bmatrix}, \quad (iii) \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (iv) \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

(a)

(i) El sistema homogéneo correspondiente es

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &= 0 \\ x_3 &= 0, \end{aligned}$$

luego $x_1 = -2x_2$ y las soluciones del sistema son $\{(-2t, t, 0) : t \in \mathbb{R}\}$.

(ii) El sistema homogéneo correspondiente es

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_3 &= 0 \\ x_2 - 3x_3 &= 0, \end{aligned}$$

luego $x_1 = -2x_3$, $x_2 = 3x_3$ y las soluciones son $\{(-2t, 3t, t) : t \in \mathbb{R}\}$.

(iii) El sistema homogéneo correspondiente es

$$\begin{aligned}x_2 &= 0 \\x_3 &= 0,\end{aligned}$$

luego las soluciones son $\{(t, 0, 0) : t \in \mathbb{R}\}$.

(iv) El sistema homogéneo correspondiente es

$$x_2 = 0,$$

luego las soluciones son $\{(t, 0, s) : t, s \in \mathbb{R}\}$.

(b) Las matrices ampliadas son

$$(i) \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right], \quad (ii) \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -3 \end{array} \right], \quad (iii) \left[\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right], \quad (iv) \left[\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right].$$

(i) El sistema no homogéneo correspondiente es

$$\begin{aligned}x_1 + 2x_2 &= 0 \\0 &= 1.\end{aligned}$$

Por lo tanto no tiene solución.

(ii) El sistema correspondiente es

$$\begin{aligned}x_1 &= 2 \\x_2 &= -3,\end{aligned}$$

luego la solución es $(2, -3)$.

(iii) El sistema correspondiente es

$$\begin{aligned}x_2 &= 0 \\0 &= 1.\end{aligned}$$

Por lo tanto no tiene solución.

(iv) El sistema correspondiente es

$$x_2 = 0,$$

luego las soluciones son $\{(t, 0) : t \in \mathbb{R}\}$.

□

(5) Para cada uno de los siguientes sistemas de ecuaciones, describir explícita o paramétricamente todas las soluciones e indicar cuál es la MERF asociada al sistema.

$$\begin{aligned}a) \begin{cases} -x - y + 4z = 0 \\ x + 3y + 8z = 0 \\ x + 2y + 5z = 0 \end{cases} & \quad b) \begin{cases} x - 3y + 5z = 0 \\ 2x - 3y + z = 0 \\ -y + 3z = 0 \end{cases} & \quad c) \begin{cases} x - z + 2t = 0 \\ -x + 2y - z + 2t = 0 \\ -x + y = 0 \end{cases}\end{aligned}$$

$$(d) \begin{cases} -x - y + 4z = 1 \\ x + 3y + 8z = 3 \\ x + 2y + 5z = 1 \end{cases} \quad (e) \begin{cases} x - 3y + 5z = 1 \\ 2x - 3y + z = 3 \\ -y + 3z = 1 \end{cases} \quad (f) \begin{cases} x - z + 2t = 1 \\ -x + 2y - z + 2t = 3 \\ -x + y = 1 \end{cases}$$

SOLUCIÓN:

(a) La matriz asociada a este sistema es la matriz A_1 que escribimos más abajo y a la cual luego reducimos a una MERF.

$$A_1 = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 4 \\ 1 & 3 & 8 \\ 1 & 2 & 5 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{F_2+F_1 \\ F_3+F_1}} \begin{bmatrix} -1 & -1 & 4 \\ 0 & 2 & 12 \\ 0 & 1 & 9 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{F_1+F_3 \\ F_2-2F_3}} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 13 \\ 0 & 0 & -6 \\ 0 & 1 & 9 \end{bmatrix} \\ \xrightarrow{\substack{F_1/(-1) \\ F_2/(-6)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -13 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 9 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{F_1+13F_2 \\ F_3-9F_2}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{F_2 \leftrightarrow F_3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = R_1.$$

Luego el sistema tiene solución trivial $(0, 0, 0)$ y la MERF es la matriz Id_3 .

(b)

$$A_2 = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 5 \\ 2 & -3 & 1 \\ 0 & -1 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{F_2-2F_1} \begin{bmatrix} 1 & -3 & 5 \\ 0 & 3 & -9 \\ 0 & -1 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{F_1-3F_3 \\ F_2+3F_3}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 3 \end{bmatrix} \\ \xrightarrow{-F_3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 \end{bmatrix} \xrightarrow{F_2 \leftrightarrow F_3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = R_2.$$

Luego la MERF asociada al sistema es R_2 y ahora el nuevo sistema es

$$\begin{cases} x - 4z = 0 \\ y - 3z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 4z \\ y = 3z. \end{cases}$$

Por lo tanto las soluciones del sistema son $\{(4t, 3t, t) : t \in \mathbb{R}\}$.

(c) Este es un sistema homogéneo de 3 ecuaciones con 4 incógnitas (x, y, z, t) . La matriz del sistema es la A_3 que mostramos en la siguiente fila y luego la reducimos a MERF:

$$A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{F_2+F_1 \\ F_3+F_1}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{F_2/2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{F_3-F_2} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = R_3.$$

Luego R_3 es la MERF asociada al sistema. El sistema ahora es

$$\begin{cases} x - z + 2t = 0 \\ y - z + 2t = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = z - 2t \\ y = z - 2t. \end{cases}$$

Por lo tanto, las soluciones del sistema son $\{(u - 2v, u - 2v, u, v) : u, v \in \mathbb{R}\}$.

(d) Este es un sistema no homogéneo de 3 ecuaciones y 3 incógnitas. La matriz ampliada del sistema es $[A_1|Y]$, donde A_1 es la matriz del inciso (a). Luego para reducir A_1 a MERF hacemos los mismos pasos que en (a):

$$\begin{aligned} [A_1|Y] &= \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & -1 & 4 & 1 \\ 1 & 3 & 8 & 3 \\ 1 & 2 & 5 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{\substack{F_2+F_1 \\ F_3+F_1}} \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & -1 & 4 & 1 \\ 0 & 2 & 12 & 4 \\ 0 & 1 & 9 & 2 \end{array} \right] \xrightarrow{\substack{F_1+F_3 \\ F_2-2F_3}} \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 13 & 3 \\ 0 & 0 & -6 & 0 \\ 0 & 1 & 9 & 2 \end{array} \right] \\ &\xrightarrow{\substack{F_1/(-1) \\ F_2/(-6)}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -13 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 9 & 2 \end{array} \right] \xrightarrow{\substack{F_1+13F_2 \\ F_3-9F_2}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{array} \right] \xrightarrow{F_2 \leftrightarrow F_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right]. \end{aligned}$$

Luego la MERF asociada al sistema es Id_3 (con en (a), obviamente) y la solución del sistema es $(-3, 2, 0)$.

(e) Este es un sistema no homogéneo de 3 ecuaciones y 3 incógnitas. La matriz ampliada del sistema es $[A_2|Y]$ donde A_2 es la matriz del inciso (b). Luego para reducir A_2 a MERF hacemos los mismos pasos que en (b):

$$\begin{aligned} [A_2|Y] &= \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 5 & 1 \\ 2 & -3 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 3 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{F_2-2F_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 5 & 1 \\ 0 & 3 & -9 & 1 \\ 0 & -1 & 3 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{\substack{F_1-3F_3 \\ F_2+3F_3}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -4 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & -1 & 3 & 1 \end{array} \right] \\ &\xrightarrow{-F_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -4 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & -3 & -1 \end{array} \right] \xrightarrow{F_2 \leftrightarrow F_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -4 & -2 \\ 0 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{array} \right]. \end{aligned}$$

Luego la MERF asociada al sistema es R_2 del ejercicio (b) y como en el nuevo sistema tenemos la ecuación $0 = 4$, el sistema no tiene solución.

(f) Este es un sistema no homogéneo de 3 ecuaciones con 4 incógnitas. La matriz ampliada del sistema es $[A_3|Y]$ donde A_3 es la matriz del inciso (c). Luego para reducir A_3 a MERF hacemos los mismos pasos que en (c):

$$\begin{aligned} [A_3|Y] &= \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & -1 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{\substack{F_2+F_1 \\ F_3+F_1}} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -2 & 4 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 2 \end{array} \right] \xrightarrow{F_2/2} \\ &\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 2 \end{array} \right] \xrightarrow{F_3-F_2} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]. \end{aligned}$$

Luego R_3 (de (c)) es la MERF asociada al sistema. El sistema ahora es

$$\begin{cases} x - z + 2t = 2 \\ y - z + 2t = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = z - 2t + 2 \\ y = z - 2t + 2. \end{cases}$$

Por lo tanto, las soluciones del sistema son $\{(u - 2v + 2, u - 2v + 2, u, v) : u, v \in \mathbb{R}\}$.

□

- (6) Para cada uno de los siguientes sistemas, describir implícitamente el conjunto de los vectores (b_1, b_2, b_3) o (b_1, b_2, b_3, b_4) para los cuales cada sistema tiene solución.

$$a) \begin{cases} x - 3y + 5z = b_1 \\ 2x - 3y + z = b_2 \\ -y + 3z = b_3 \end{cases} \quad b) \begin{cases} x - z + 2t = b_1 \\ -x + 2y - z + 2t = b_2 \\ -x + y = b_3 \\ y - z + 2t = b_4 \end{cases} \quad \begin{cases} -x - y + 4z = b_1 \\ x + 3y + 8z = b_2 \\ x + 2y + 5z = b_3 \end{cases}$$

SOLUCIÓN:

(a) La matriz ampliada del sistema es

$$[A_2|Y] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 5 & b_1 \\ 2 & -3 & 1 & b_2 \\ 0 & -1 & 3 & b_3 \end{array} \right].$$

Observar que A_2 es la misma matriz que la de los ejercicios ((5)) b) y e) y, por lo tanto, los pasos para reducir la matriz asociada al sistema serán los mismos.

$$\begin{aligned} [A_2|Y] &= \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 5 & b_1 \\ 2 & -3 & 1 & b_2 \\ 0 & -1 & 3 & b_3 \end{array} \right] \xrightarrow{F_2 - 2F_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 5 & b_1 \\ 0 & 3 & -9 & b_2 - 2b_1 \\ 0 & -1 & 3 & b_3 \end{array} \right] \xrightarrow{\substack{F_1 - 3F_3 \\ F_2 + 3F_3}} \\ &\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -4 & b_1 - 3b_3 \\ 0 & 0 & 0 & -2b_1 + b_2 + 3b_3 \\ 0 & -1 & 3 & b_3 \end{array} \right] \xrightarrow{-F_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -4 & b_1 - 3b_3 \\ 0 & 0 & 0 & -2b_1 + b_2 + 3b_3 \\ 0 & 1 & -3 & -b_3 \end{array} \right] \\ &\xrightarrow{F_2 \leftrightarrow F_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -4 & b_1 - 3b_3 \\ 0 & 1 & -3 & -b_3 \\ 0 & 0 & 0 & -2b_1 + b_2 + 3b_3 \end{array} \right]. \end{aligned}$$

Luego el conjunto de b_i 's para los cuales el sistema tiene solución es

$$\{(b_1, b_2, b_3) \in \mathbb{R}^3 : -2b_1 + b_2 + 3b_3 = 0\}.$$

(b) La matriz ampliada del sistema es

$$[B|Y] = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & 2 & b_1 \\ -1 & 2 & -1 & 2 & b_2 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & b_3 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & b_4 \end{array} \right].$$

Ahora, reducimos B a una MERF.:

$$\begin{aligned} [B|Y] &= \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & 2 & b_1 \\ -1 & 2 & -1 & 2 & b_2 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & b_3 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & b_4 \end{array} \right] \xrightarrow[\substack{F_3+F_1 \\ F_2+F_1}]{F_2+F_1} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & 2 & b_1 \\ 0 & 2 & -2 & 4 & b_1+b_2 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & b_1+b_3 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & b_4 \end{array} \right] \xrightarrow{F_2/2} \\ &\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & 2 & b_1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & \frac{1}{2}b_1 + \frac{1}{2}b_2 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & b_1+b_3 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & b_4 \end{array} \right] \xrightarrow[\substack{F_3-F_2 \\ F_4-F_2}]{F_3-F_2} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & 2 & b_1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & \frac{1}{2}b_1 + \frac{1}{2}b_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b_1+b_3 - \frac{1}{2}b_1 - \frac{1}{2}b_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b_4 - \frac{1}{2}b_1 - \frac{1}{2}b_2 \end{array} \right] \\ &= \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & 2 & b_1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & \frac{1}{2}b_1 + \frac{1}{2}b_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}b_1 - \frac{1}{2}b_2 + b_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2}b_1 - \frac{1}{2}b_2 + b_4 \end{array} \right]. \end{aligned}$$

Luego el conjunto de b_i 's para los cuales el sistema tiene solución es

$$\{(b_1, b_2, b_3, b_4) \in \mathbb{R}^3 : \frac{1}{2}b_1 - \frac{1}{2}b_2 + b_3 = 0 \wedge -\frac{1}{2}b_1 - \frac{1}{2}b_2 + b_4 = 0\}.$$

(c) La matriz ampliada del sistema es

$$[A_1|Y] = \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & -1 & 4 & b_1 \\ 1 & 3 & 8 & b_2 \\ 1 & 2 & 5 & b_3 \end{array} \right].$$

Observar que A_1 es la misma matriz que la de los ejercicios (5) a) y d) y, por lo tanto, los pasos para reducir la matriz asociada al sistema serán los mismos.

$$\begin{aligned}
A_1 &= \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & -1 & 4 & b_1 \\ 1 & 3 & 8 & b_2 \\ 1 & 2 & 5 & b_3 \end{array} \right] \xrightarrow[\substack{F_2+F_1 \\ F_3+F_1}]{F_2+F_1} \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & -1 & 4 & b_1 \\ 0 & 2 & 12 & b_1+b_2 \\ 0 & 1 & 9 & b_1+b_3 \end{array} \right] \xrightarrow[\substack{F_2-2F_3}]{F_1+F_3} \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 13 & 2b_1+b_3 \\ 0 & 0 & -6 & -b_1+b_2-2b_3 \\ 0 & 1 & 9 & b_1+b_3 \end{array} \right] \\
&\xrightarrow[\substack{F_1/(-1) \\ F_2/(-6)}]{F_1/(-1)} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -13 & -2b_1-b_3 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{6}b_1-\frac{1}{6}b_2+\frac{1}{3}b_3 \\ 0 & 1 & 9 & b_1+b_3 \end{array} \right] \xrightarrow[\substack{F_1+13F_2 \\ F_3-9F_2}]{F_1+13F_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{6}b_1-\frac{13}{6}b_2+\frac{10}{3}b_3 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{6}b_1-\frac{1}{6}b_2+\frac{1}{3}b_3 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2}b_1+\frac{3}{2}b_2-2b_3 \end{array} \right] \\
&\xrightarrow{F_2 \leftrightarrow F_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{6}b_1-\frac{13}{6}b_2+\frac{10}{3}b_3 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2}b_1+\frac{3}{2}b_2-2b_3 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{6}b_1-\frac{1}{6}b_2+\frac{1}{3}b_3 \end{array} \right].
\end{aligned}$$

Luego el conjunto de b_i 's para los cuales el sistema tiene solución es \mathbb{R}^3 .

□

$$(7) \text{ Sea } A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & 2016 \\ 2 & 3 & 4 & \cdots & 2017 \\ 3 & 4 & 5 & \cdots & 2018 \\ \vdots & & & & \vdots \\ 100 & 101 & 102 & \cdots & 2115 \end{bmatrix}.$$

a) Encontrar todas las soluciones del sistema $AX = 0$.

b) Encontrar todas las soluciones del sistema $AX = \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$.

SOLUCIÓN:

a) Reducimos la matriz A aplicando operaciones elementales por filas:

$$\begin{aligned}
 A &= \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & 2016 \\ 2 & 3 & 4 & \cdots & 2017 \\ 3 & 4 & 5 & \cdots & 2018 \\ \vdots & & & & \vdots \\ 100 & 101 & 102 & \cdots & 2115 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{F_2-F_1 \\ F_3-F_1 \\ \vdots \\ F_{100}-F_1}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & 2016 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 2 & 2 & 2 & \cdots & 2 \\ \vdots & & & & \vdots \\ 99 & 99 & 99 & \cdots & 99 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{F_3-2F_2 \\ F_4-3F_2 \\ \vdots \\ F_{100}-99F_2}} \\
 &\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & 2016 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{F_2 \leftrightarrow F_1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & 2016 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{F_2-F_1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & \cdots & 2015 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{F_1-F_2} \\
 &\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -2 & \cdots & -2014 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & \cdots & 2015 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} = R_A
 \end{aligned}$$

Luego R_A es la MERF asociada al sistema. El sistema ahora es

$$\begin{cases} x_1 + (-1)x_3 + (-2)x_4 + \cdots + (-2014)x_{2016} = 0 \\ x_2 + 2x_3 + 3x_4 + \cdots + 2015x_{2016} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \sum_{j=3}^{2016} (j-2)x_j \\ x_2 = \sum_{j=3}^{2016} (1-j)x_j \end{cases}$$

Por lo tanto, las soluciones del sistema son:

$$\left\{ \left(\sum_{j=3}^{2016} (j-2)x_j, \sum_{j=3}^{2016} (1-j)x_j, x_3, x_4, \dots, x_{2016} \right) : x_3, x_4, \dots, x_{2016} \in \mathbb{R} \right\}.$$

b) Podemos repetir la secuencia de operaciones elementales sobre el vector de unos para obtener las soluciones:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{F_2-F_1 \\ F_3-F_1 \\ \vdots \\ F_{100}-F_1}} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{F_3-2F_2 \\ F_4-3F_2 \\ \vdots \\ F_{100}-99F_2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{F_2 \leftrightarrow F_1} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{F_2-F_1} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{F_1-F_2} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

Análogamente al inciso (a), el sistema ahora es:

$$\begin{cases} x_1 + (-1)x_3 + (-2)x_4 + \cdots + (-2014)x_{2016} = -1 \\ x_2 + 2x_3 + 3x_4 + \cdots + 2015x_{2016} = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -1 + \sum_{j=3}^{2016} (j-2)x_j \\ x_2 = 1 + \sum_{j=3}^{2016} (1-j)x_j \end{cases}$$

Por lo tanto, las soluciones del sistema son:

$$\{(-1 + \sum_{j=3}^{2016} (j-2)x_j, 1 + \sum_{j=3}^{2016} (1-j)x_j, x_3, x_4, \dots, x_{2016}) : x_3, x_4, \dots, x_{2016} \in \mathbb{R}\}.$$

□

(8) Sea $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 0 \end{bmatrix}$. Reduciendo A por filas,

a) encontrar todas las soluciones sobre \mathbb{R} y \mathbb{C} del sistema $AX = 0$.

b) encontrar todas las soluciones sobre \mathbb{R} y \mathbb{C} del sistema $AX = \begin{bmatrix} 1 \\ i \\ 0 \end{bmatrix}$.

SOLUCIÓN:

a) Reducimos la matriz A aplicando operaciones elementales por filas:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{F_1 \leftrightarrow F_3} \begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{\begin{smallmatrix} F_2 - 2F_1 \\ F_3 - 3F_1 \end{smallmatrix}} \begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 0 & 7 & 1 \\ 0 & 8 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{F_3 - F_2} \begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 0 & 7 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{F_3 \leftrightarrow F_2} \begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 7 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\begin{smallmatrix} F_1 + 3F_2 \\ F_3 - 7F_2 \end{smallmatrix}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -6 \end{bmatrix} \xrightarrow{F_3(-\frac{1}{6})} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\begin{smallmatrix} F_1 - 3F_3 \\ F_2 - F_3 \end{smallmatrix}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = R_A$$

Luego el sistema tiene solución trivial $(0, 0, 0)$ y la MERF es la matriz Id_3 .
Notar que todas las operaciones realizadas valen tanto para \mathbb{R} como para \mathbb{C} , por lo que $(0, 0, 0)$ es la solución para ambos casos.

b) Análogamente a lo realizado en el ejercicio (7.b), podemos repetir la se-

cuencia de operaciones elementales sobre el vector $\begin{bmatrix} 1 \\ i \\ 0 \end{bmatrix}$:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ i \\ 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{F_1 \leftrightarrow F_3} \begin{bmatrix} 0 \\ i \\ 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\begin{smallmatrix} F_2 - 2F_1 \\ F_3 - 3F_1 \end{smallmatrix}} \begin{bmatrix} 0 \\ i \\ 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{F_3 - F_2} \begin{bmatrix} 0 \\ i \\ 1 - i \end{bmatrix} \xrightarrow{F_3 \leftrightarrow F_2} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 - i \\ i \end{bmatrix} \xrightarrow{\begin{smallmatrix} F_1 + 3F_2 \\ F_3 - 7F_2 \end{smallmatrix}} \begin{bmatrix} 3 - 3i \\ 1 - i \\ -7 + 8i \end{bmatrix} \xrightarrow{F_3(-\frac{1}{6})} \begin{bmatrix} 3 - 3i \\ 1 - i \\ \frac{7}{6} - \frac{4}{3}i \end{bmatrix} \xrightarrow{\begin{smallmatrix} F_1 - 3F_3 \\ F_2 - F_3 \end{smallmatrix}} \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} + i \\ -\frac{1}{6} + \frac{1}{3}i \\ \frac{7}{6} - \frac{4}{3}i \end{bmatrix}$$

En este punto, si bien las operaciones propiamente dichas sólo involucraron números reales, tenemos que la solución tiene números complejos,

por lo que el sistema no tiene solución en \mathbb{R} , pero si tiene solución en \mathbb{C} ,

$$\text{y es } X = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} + i \\ -\frac{1}{6} + \frac{1}{3}i \\ \frac{7}{6} - \frac{4}{3}i \end{bmatrix}$$

□

- (9) Suponga que tiene que resolver un sistema de ecuaciones lineales homogéneo y que tras hacer algunas operaciones elementales por fila a la matriz asociada obtiene una matriz con la siguiente forma

$$\begin{pmatrix} a & * & * & * \\ 0 & b & * & * \\ 0 & 0 & c & * \\ 0 & 0 & 0 & d \end{pmatrix}$$

donde $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ y $*$ son algunos números reales. ¿Qué conclusiones puede inferir acerca del conjunto de soluciones a partir de los valores de a, b, c y d ?

SOLUCIÓN:

Lo primero que podemos observar es que si a, b, c y d son todos no nulos entonces podemos aplicar las operaciones elementales por fila de multiplicar cada fila por a^{-1}, b^{-1}, c^{-1} y d^{-1} . Luego de esto nos quedaría una matriz con la siguiente forma

$$\begin{pmatrix} 1 & * & * & * \\ 0 & 1 & * & * \\ 0 & 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Luego podemos usando esos 1's principales podemos eliminar las entradas por encima de ellos obteniendo la matriz identidad

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

En conclusión si a, b, c y d son todos no nulos podemos llegar mediante operaciones elementales por filas a la identidad y por lo tanto la única solución del sistema es la trivial $(0, 0, 0, 0)$, recordar el Teorema 2.4.5.

En cambio, si alguno de los escalares a, b, c y d es nulo, entonces no podemos obtener un 1 principal en su lugar. Más aún, la MERF a la que lleguemos tendrá una fila nula y por lo tanto el sistema tendrá infinitas soluciones, recordar el Teorema 2.4.2.

Por ejemplo, si $d = 0$ esto es claro pues la matriz sería

$$\begin{pmatrix} a & * & * & * \\ 0 & b & * & * \\ 0 & 0 & c & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Si $c = 0$ y $d \neq 0$, entonces la matriz es

$$\begin{pmatrix} a & * & * & * \\ 0 & b & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & d \end{pmatrix}.$$

Luego, podemos multiplicar por d^{-1} la última fila y luego anular la entrada por arriba del 1 que nos quede y así obtener la matriz

$$\begin{pmatrix} a & * & * & * \\ 0 & b & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Un razonamiento similar podríamos hacer con las demás posibilidades.

Moraleja: para saber si un sistema homogéneo tiene una o infinitas soluciones no es necesario reducir la matriz hasta llegar a una MERF basta con llegar a una triangular superior. Pero para calcular de forma paramétrica el conjunto de soluciones si es necesario llegar a una MERF.

□

- (10) Suponga que tiene que resolver un sistema de ecuaciones lineales y que tras hacer algunas operaciones elementales por fila a la matriz ampliada obtiene una matriz con la siguiente forma

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a & * & * & * & * \\ 0 & b & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 & d & * \end{array} \right)$$

donde $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ y $*$ son algunos números reales. ¿Qué conclusiones puede inferir acerca del conjunto de soluciones a partir de los valores de a, b, c y d ?

SOLUCIÓN:

Lo primero que podemos notar es que si c es no nulo el sistema no tiene solución. Pues sería equivalente a un sistema cuya ecuación $0 = c$ es falsa.

Asumamos ahora que $c = 0$. Si a, b y d son no nulos, entonces como antes podemos simplificarlos aplicando la operación elemental multiplicar la respectiva fila por a^{-1} , b^{-1} y d^{-1} . Luego intercambiar la tercer y cuarta fila

para obtener la matriz

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & * & * & * & * \\ 0 & 1 & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

Razonando como en el ejercicio anterior podemos transformar la matriz en una MERF que va a tener una fila nula. Además, este sistema tiene una solución. En efecto, para fijar ideas supongamos que z_1, z_2 y z_3 son las entradas de la última columna de la matriz ampliada entonces $(z_1, z_2, 0, z_3)$ es una solución. Por el Teorema 2.4.2, en este caso el sistema tiene infinitas soluciones.

Hay otros varios casos para analizar de manera similar.

Moraleja: al igual que antes no es necesario llegar a una MERF para saber si el sistema tendrá o no solución, una o infinitas. Pero para calcular de forma paramétrica el conjunto de soluciones si es necesario llegar a una MERF. \square

- (11) Suponga que tiene que resolver un sistema de m ecuaciones lineales con n incógnitas. Antes de empezar a hacer cuentas y apelando a la teoría, ¿Qué puede afirmar acerca del conjunto de soluciones en base a m y n ? ¿Cómo saber si es vacío o no vacío? ¿Si tiene una o varias soluciones?

SOLUCIÓN:

No hay una respuesta concluyente a este ejercicio pero nos sirve para pensar un poco y repasar la teoría. Algunos razonamientos que podemos hacer son los siguientes.

Si el sistema tiene menos incógnitas que ecuaciones hay chances de que no tenga solución. En cierto sentido, cada ecuación es una condición para el conjunto de soluciones y entonces podría ser que estemos poniendo demasiadas condiciones y que sean contradictorias entre ellas y así no habría una solución común a todas (ver la página 29 de la Clase 08 Teórica - Sistemas de ecuaciones 3 (17-09-20) del turno mañana).

Si el sistema tiene más incógnitas que ecuaciones y el sistema tiene solución entonces el sistema tiene infinitas soluciones. Esto es porque hay incógnitas que no van a ser 1 principal y entonces serían variables libres (ver la página 35 de la Clase 08 Teórica - Sistemas de ecuaciones 3 (17-09-20) del turno mañana). \square

- (12) @ Sean $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ y $b_1, \dots, b_n \in \mathbb{R}$.

a) Para cada $n \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$, plantear un sistema de ecuaciones lineales que le permita encontrar un polinomio $p(x)$ con coeficientes reales de grado $n - 1$ tal que

$$p(\lambda_1) = b_1, \dots, p(\lambda_n) = b_n.$$

b) ¿Se le ocurre alguna condición con la cual pueda afirmar que el sistema anterior no tiene solución?

c) ¿Puede dar una forma general del sistema para cualquier n ?

SOLUCIÓN:

a) En el ejercicio (2) hicimos el caso $n = 3$ para un caso concreto ($p(1) = 2$, $p(2) = 7$ y $p(3) = 14$). Una forma de resolver el problema, basada en lo anterior, es plantear un sistema de ecuaciones donde los coeficientes del polinomio sean la incógnitas. Sea

$$p_n(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_{n-1}x^{n-1},$$

entonces, $p_n(\lambda_i) = b_i$ se traduce en la ecuación

$$a_0 + a_1\lambda_i + a_2\lambda_i^2 + \cdots + a_{n-1}\lambda_i^{n-1} = b_i.$$

Las matrices ampliadas de los sistemas de ecuaciones para $n = 4$ y $n = 5$, son

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & \lambda_1 & \lambda_1^2 & \lambda_1^3 & b_1 \\ 1 & \lambda_2 & \lambda_2^2 & \lambda_2^3 & b_2 \\ 1 & \lambda_3 & \lambda_3^2 & \lambda_3^3 & b_3 \\ 1 & \lambda_4 & \lambda_4^2 & \lambda_4^3 & b_4 \end{array} \right], \quad \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & \lambda_1 & \lambda_1^2 & \lambda_1^3 & \lambda_1^4 & b_1 \\ 1 & \lambda_2 & \lambda_2^2 & \lambda_2^3 & \lambda_2^4 & b_2 \\ 1 & \lambda_3 & \lambda_3^2 & \lambda_3^3 & \lambda_3^4 & b_3 \\ 1 & \lambda_4 & \lambda_4^2 & \lambda_4^3 & \lambda_4^4 & b_4 \\ 1 & \lambda_5 & \lambda_5^2 & \lambda_5^3 & \lambda_5^4 & b_5 \end{array} \right],$$

respectivamente. Para $n = 1, 2, 3$ es claro como son los sistemas.

b) Si sobrentendemos que todos los λ_i son distintos entre si, la respuesta es *no*.

Obviamente si $\lambda_i = \lambda_j$ y $b_i \neq b_j$, entonces $p(\lambda_i) = b_i \neq b_j = p(\lambda_j) = p(\lambda_i)$, es decir llegamos a la conclusión que $p(\lambda_i) \neq p(\lambda_i)$, lo cual es absurdo.

(Veremos más adelante, usando determinantes, que si $\lambda_i \neq \lambda_j$ para $i \neq j$, entonces siempre encontraremos un polinomio que satisfaga las condiciones del ejercicio).

c) No es difícil generalizar (a) para cualquier n : la matriz ampliada del sistema de ecuaciones correspondiente al caso n es

$$[V|Y] = \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & \lambda_1 & \lambda_1^2 & \cdots & \lambda_1^{n-1} & b_1 \\ 1 & \lambda_2 & \lambda_2^2 & \cdots & \lambda_2^{n-1} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & \lambda_n & \lambda_n^2 & \cdots & \lambda_n^{n-1} & b_n \end{array} \right].$$

(La matriz V es llamada *la matriz de Vandermonde*.)

□

PRÁCTICO 3

Soluciones

Álgebra II – Año 2024/1 – FAMAF

(1) Sean

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -2 & 0 & -1 \\ 1 & 3 & 5 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Verificar que $A(BC) = (AB)C$, es decir que vale la asociatividad del producto.

SOLUCIÓN:

$$BC = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -2 & 0 & -1 \\ 1 & 3 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & -1 & 4 \\ -5 & 2 & -3 \\ 22 & -1 & 9 \end{bmatrix}$$

$$A(BC) = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 9 & -1 & 4 \\ -5 & 2 & -3 \\ 22 & -1 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 19 & -5 & 10 \\ 41 & -6 & 19 \\ -3 & -4 & 1 \end{bmatrix} \quad (*)$$

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -2 & 0 & -1 \\ 1 & 3 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 4 \\ 6 & 4 & 9 \\ 4 & -2 & -1 \end{bmatrix}$$

$$(AB)C = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 4 \\ 6 & 4 & 9 \\ 4 & -2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 19 & -5 & 10 \\ 41 & -6 & 19 \\ -3 & -4 & 1 \end{bmatrix} \quad (**)$$

Luego $(*) = (**)$ y el resultado queda verificado. □

(2) Determinar cuál de las siguientes matrices es A , cuál es B y cuál es C de modo tal que sea posible realizar el producto ABC y verificar que $A(BC) = (AB)C$.

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

SOLUCIÓN: la primera matriz es 2×3 , la segunda es 3×1 y la tercera es 1×2 . Entonces, podemos multiplicar la 1ª por la 2ª y queda una matriz 2×1 que es posible multiplicar por la 3ª matriz, que es 1×2 , y así obtenemos una matriz

2×2 . Es decir,

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Ahora bien,

$$\begin{aligned} BC &= \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -3 \\ 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \\ A(BC) &= \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -3 \\ 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -4 \\ 4 & -4 \end{bmatrix} \\ AB &= \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \end{bmatrix}. \\ (AB)C &= \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -4 \\ 4 & -4 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

□

(3) Calcular A^2 y A^3 para la matriz $A = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 6 & 8 \end{bmatrix}$.

SOLUCIÓN:

$$\begin{aligned} A^2 &= \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 6 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 6 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 33 & 44 \\ 66 & 88 \end{bmatrix} = 11 \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 6 & 8 \end{bmatrix} = 11A \\ A^3 &= A \cdot A^2 = A \cdot 11A = 11A^2 = 11^2A. \end{aligned}$$

Observación. Este es un caso muy particular. En el caso de una matriz escalar $c \text{Id}$, tenemos que $(c \text{Id})^n = c^n \text{Id}$. Aquí tenemos una matriz A tal que $A^n = 11^{n-1}A$.

□

(4) Dar ejemplos de matrices no nulas A y B de orden 2×2 tales que

a) $A^2 = 0$ (dar dos ejemplos).

c) $A^2 = -I_2$.

b) $AB \neq BA$.

d) $A^2 = A \neq I_2$.

SOLUCIÓN:

a)

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

b)

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

$$AB = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$BA = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

c)

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \Rightarrow \quad A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

d)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

□

- (5) Sea $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ tal que $AB = BA$ para toda $B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$. Probar que A es un múltiplo de I_2 .

SOLUCIÓN: Sea

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix},$$

y sean

$$E_{11} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad E_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad E_{21} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad E_{22} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Entonces

$$AE_{11} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 \\ a_{21} & 0 \end{bmatrix},$$

$$E_{11}A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Como $AE_{11} = E_{11}A$, tenemos que $a_{12} = a_{21} = 0$.

Probemos ahora con E_{12} :

$$AE_{12} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & a_{11} \\ 0 & a_{21} \end{bmatrix},$$

$$E_{12}A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{21} & a_{22} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Como $AE_{12} = E_{12}A$, tenemos que $a_{11} = a_{22}$.

Ya no hace falta hacer más ensayos, pues hemos probado que $a_{12} = a_{21} = 0$ y $a_{11} = a_{22}$, es decir A es una matriz escalar y al ser escalar sabemos que conmuta con todas las matrices.

Observación. El resultado es cierto también para matrices $n \times n$ con $n \in \mathbb{N}$. Es decir, si $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ tal que $AB = BA$ para toda $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$, entonces A es un múltiplo de I_n . La estrategia para probar este resultado es la misma que para el caso 2×2 : probar con las matrices E_{ij} que son aquellas que tiene un 1 en la entrada ij y 0 en las demás entradas.

□

- (6) Para cada $n \in \mathbb{N}$, con $n \geq 2$, hallar una matriz no nula $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ tal que $A^n = 0$ pero $A^{n-1} \neq 0$.

SOLUCIÓN: las matrices triangulares estrictas, superiores o inferiores, satisfacen la propiedad de que $A^n = 0$ y muchas de ellas satisfacen que $A^{n-1} \neq 0$. Probemos con una matriz triangular superior estricta particular

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e_2 \\ e_3 \\ e_4 \\ \vdots \\ e_n \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} | & | & | & & & | \\ 0 & e_1 & e_2 & \dots & e_{n-1} \\ | & | & | & & & | \end{bmatrix}$$

Es decir A es una matriz $n \times n$ con 1 encima de la diagonal y 0 en todas las demás entradas. Más formalmente: $[A]_{i,i+1} = 1$ y $[A]_{i,j} = 0$ si $j \neq i+1$.

Probaremos por inducción que para $k < n$, $[A^k]_{i,i+k} = 1$ y $[A]_{i,j} = 0$ si $j \neq i+k$. Es decir,

$$A^k = \begin{bmatrix} | & \dots & | & | & | & & | \\ 0 & \dots & 0 & e_1 & e_2 & \dots & e_{n-k} \\ | & \dots & | & | & | & & | \end{bmatrix},$$

donde e_1 está en la columna $k+1$.

Si $k = 1$ el resultado vale por definición de A . Supongamos que el resultado es cierto para $k-1$, luego

$$A^{k-1} = \begin{bmatrix} | & \dots & | & | & | & & | \\ 0 & \dots & 0 & e_1 & e_2 & \dots & e_{n-k+1} \\ | & \dots & | & | & | & & | \end{bmatrix}, \quad (\text{HI})$$

donde e_1 está en la columna k . Por lo tanto,

$$A \cdot A^{k-1} = \begin{bmatrix} e_2 \\ e_3 \\ e_4 \\ \vdots \\ e_n \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} | & \cdots & | & | & | & & | \\ 0 & \cdots & 0 & e_1 & e_2 & \cdots & e_{n-k+1} \\ | & \cdots & | & | & | & & | \end{bmatrix},$$

Como $[A \cdot A^{k-1}]_{ij} = F_i(A) \cdot C_j(A^{k-1})$ (donde \cdot indica el producto escalar), los únicos productos no nulos son $F_1(A) \cdot C_{k+1}(A^{k-1}) = 1$, $F_2(A) \cdot C_{k+2}(A^{k-1}) = 1$, $F_3(A) \cdot C_{k+3}(A^{k-1}) = 1$, etc. Es decir, las entradas de A^k valen 1 en $(1, k+1)$, $(2, k+2)$, $(3, k+3)$, etc. lo cual prueba el resultado.

Probado esto, tenemos $A^{n-1} = [0 \cdots 0 \ e_1] \neq 0$ y $A^n = A \cdot A^{n-1} = 0$.

□

(7) Dar condiciones necesarias y suficientes sobre matrices A y B de tamaño $n \times n$ para que

$$a) (A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2.$$

$$b) A^2 - B^2 = (A - B)(A + B).$$

SOLUCIÓN:

a) Como

$$(A + B)^2 = (A + B)(A + B) = AA + AB + BA + BB = A^2 + AB + BA + B^2 \text{ y}$$

$$A^2 + 2AB + B^2 = A^2 + AB + AB + B^2,$$

tenemos que

$$\begin{aligned} (A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2 &\Leftrightarrow A^2 + AB + BA + B^2 = A^2 + AB + AB + B^2 \\ &\Leftrightarrow AB + BA = AB + AB \\ &\Leftrightarrow BA = AB. \end{aligned}$$

b) Como

$$A^2 - B^2 = AA - BB \quad \text{y}$$

$$(A - B)(A + B) = AA + AB - BA - BB,$$

tenemos que

$$\begin{aligned} A^2 - B^2 = (A - B)(A + B) &\Leftrightarrow AA - BB = AA + AB - BA - BB \\ &\Leftrightarrow 0 = AB - BA \\ &\Leftrightarrow BA = AB. \end{aligned}$$

□

(8) Sean

$$v = \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times 1} \quad \text{y} \quad A = \begin{bmatrix} | & | & \cdots & | \\ C_1 & C_2 & \cdots & C_n \\ | & | & \cdots & | \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{m \times n},$$

es decir, C_1, \dots, C_n denotan las columnas de A . Probar que $Av = \sum_{j=1}^n v_j C_j$.

SOLUCIÓN: sea

$$C_j = \begin{bmatrix} c_{1j} \\ c_{2j} \\ \vdots \\ c_{mj} \end{bmatrix}, \quad \text{para } 1 \leq j \leq n.$$

Av es una matriz $m \times 1$ cuya coordenada $i, 1$ es $[Av]_{i1} = F_i(C) \cdot v$ donde \cdot es el producto escalar. Es decir

$$[Av]_{i1} = \sum_{j=1}^n c_{ij} v_j, \quad (1 \leq i \leq m).$$

Por lo tanto

$$Av = \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^n c_{1j} v_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^n c_{ij} v_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^n c_{mj} v_j \end{bmatrix} = \sum_{j=1}^n \begin{bmatrix} c_{1j} v_j \\ \vdots \\ c_{ij} v_j \\ \vdots \\ c_{mj} v_j \end{bmatrix} = \sum_{j=1}^n v_j \begin{bmatrix} c_{1j} \\ \vdots \\ c_{ij} \\ \vdots \\ c_{mj} \end{bmatrix} = \sum_{j=1}^n v_j C_j.$$

□

(9) Si A es una matriz cuadrada $n \times n$, se define la *traza* de A como $\text{Tr}(A) = \sum_{i=1}^n a_{ii}$.

a) Calcular la traza de las matrices del ejercicio (10).

b) Probar que si $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ y $c \in \mathbb{R}$ entonces

$$\text{Tr}(A + cB) = \text{Tr}(A) + c \text{Tr}(B) \quad \text{y} \quad \text{Tr}(AB) = \text{Tr}(BA).$$

SOLUCIÓN: (a)

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 0 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \text{Tr}(A) = 3 + 1 + 0 = 4,$$

$$B = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 4 \\ 1 & 3 & 8 \\ 1 & 2 & 5 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \text{Tr}(B) = -1 + 3 + 5 = 7,$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & -3 & 3 & -8 \\ -2 & 1 & 2 & -2 \\ 1 & 2 & 1 & 4 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \text{Tr}(C) = 1 + (-3) + 2 + 4 = 4,$$

$$D = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 5 \\ 2 & -3 & 1 \\ 0 & -1 & 3 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \text{Tr}(D) = 1 + (-3) + 3 = 1.$$

(b) Sea $A = [a_{ij}]$ y $B = [b_{ij}]$, entonces

$$\begin{aligned} \text{Tr}(A + cB) &= \sum_{i=1}^n [A + cB]_{ii} \\ &= \sum_{i=1}^n (a_{ii} + cb_{ii}) = \sum_{i=1}^n a_{ii} + c \sum_{i=1}^n b_{ii} \\ &= \text{Tr}(A) + c \text{Tr}(B) \end{aligned}$$

Veamos la segunda afirmación de (b):

$$\begin{aligned} \text{Tr}(AB) &= \sum_{i=1}^n [AB]_{ii} = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n a_{ij} b_{ji} \right) \\ &= \sum_{i,j=1}^n a_{ij} b_{ji} = \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^n a_{ij} b_{ji} \right) \\ &= \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^n b_{ji} a_{ij} \right) = \sum_{j=1}^n [BA]_{jj} \\ &= \text{Tr}(BA). \end{aligned}$$

□

- (10) Para cada una de las siguientes matrices, usar operaciones elementales por fila para decidir si son invertibles y hallar la matriz inversa cuando sea posible.

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} -1 & -1 & 4 \\ 1 & 3 & 8 \\ 1 & 2 & 5 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & -3 & 3 & -8 \\ -2 & 1 & 2 & -2 \\ 1 & 2 & 1 & 4 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & -3 & 5 \\ 2 & -3 & 1 \\ 0 & -1 & 3 \end{bmatrix}.$$

(para que hagan menos cuentas: las matrices 3×3 aparecieron en el Práctico 2).

SOLUCIÓN:

$$\begin{aligned} [A | \text{Id}] &= \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 & | & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & | & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & 0 & | & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{F_1 \leftrightarrow F_3} \begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 & | & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & | & 0 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 2 & | & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &\xrightarrow{\substack{F_2 - 2F_1 \\ F_3 - 3F_1}} \begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 & | & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 7 & 1 & | & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 8 & 2 & | & 1 & 0 & -3 \end{bmatrix} \xrightarrow{F_3 - F_2} \begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 & | & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 7 & 1 & | & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & | & 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \\ &\xrightarrow{F_3 \leftrightarrow F_2} \begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 & | & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & | & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 7 & 1 & | & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{F_1 + 3F_2 \\ F_3 - 7F_2}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & | & 3 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & | & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -6 & | & -7 & 8 & 5 \end{bmatrix} \\ &\xrightarrow{F_3(-\frac{1}{6})} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & | & 3 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & | & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & | & 7/6 & -4/3 & -5/6 \end{bmatrix} \\ &\xrightarrow{\substack{F_1 - 3F_3 \\ F_2 - F_3}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & | & -1/2 & 1 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 & | & -1/6 & 1/3 & -1/6 \\ 0 & 0 & 1 & | & 7/6 & -4/3 & -5/6 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Luego

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 0 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} -1/2 & 1 & 1/2 \\ -1/6 & 1/3 & -1/6 \\ 7/6 & -4/3 & -5/6 \end{bmatrix}.$$

Siguiendo un procedimiento análogo al anterior se obtiene

$$\begin{bmatrix} -1 & -1 & 4 \\ 1 & 3 & 8 \\ 1 & 2 & 5 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1/6 & -13/6 & 10/3 \\ -1/2 & 3/2 & -2 \\ 1/6 & -1/6 & 1/3 \end{bmatrix}.$$

La tercera matriz tiene una MERF con una fila nula. Por lo tanto no es invertible:

$$\begin{aligned}
 & \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & -3 & 3 & -8 \\ -2 & 1 & 2 & -2 \\ 1 & 2 & 1 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{F_2-F_1 \\ F_3+2F_1 \\ F_4-F_1}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -4 & 2 & -10 \\ 0 & 3 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{F_1-F_4 \\ F_2+4F_4 \\ F_3-3F_4}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 4 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \\
 & \xrightarrow{\substack{F_2/2 \\ F_3/4}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{F_1-F_3 \\ F_2-F_3}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{F_2 \leftrightarrow F_4} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.
 \end{aligned}$$

Finalmente, la última matriz tiene una MERF con una fila nula. Por lo tanto no es invertible:

$$\begin{aligned}
 & \begin{bmatrix} 1 & -3 & 5 \\ 2 & -3 & 1 \\ 0 & -1 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{F_2-2F_1} \begin{bmatrix} 1 & -3 & 5 \\ 0 & 3 & -9 \\ 0 & -1 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{F_1-3F_3 \\ F_2+3F_3}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 3 \end{bmatrix} \\
 & \xrightarrow{-F_3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 \end{bmatrix} \xrightarrow{F_2 \leftrightarrow F_3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.
 \end{aligned}$$

□

- (11) Sea A la primera matriz del ejercicio anterior. Hallar matrices elementales E_1, E_2, \dots, E_k tales que $E_k E_{k-1} \cdots E_2 E_1 A = I_3$.

SOLUCIÓN: en la primera matriz del ejercicio (10) realizamos 10 operaciones elementales de fila para llevar la matriz a la identidad. Si llamamos a la matriz A , entonces

$$I_3 = E_{10} E_9 E_8 E_7 E_6 E_5 E_4 E_3 E_2 E_1 A,$$

Donde

$$\begin{aligned}
 E_1 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} (F_1 \leftrightarrow F_3), & E_2 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} (F_2 - 2F_1), \\
 E_3 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{bmatrix} (F_3 - 3F_1), & E_4 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} (F_3 - F_2), \\
 E_5 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} (F_3 \leftrightarrow F_2), & E_6 &= \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} (F_1 + 3F_2),
 \end{aligned}$$

$$E_7 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -7 & 1 \end{bmatrix} (F_3 - 7F_2), \quad E_8 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1/6 \end{bmatrix} (-(1/6)F_3),$$

$$E_9 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} (F_1 - 3F_3), \quad E_{10} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} (F_2 - F_3)$$

□

- (12) ¿Es cierto que si A y B son matrices invertibles entonces $A + B$ es una matriz invertible? Justificar su respuesta.

SOLUCIÓN: es falso, el ejemplo más sencillo es $\text{Id} + (-\text{Id}) = 0$. Otro ejemplo,

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

□

- (13) Una matriz $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ se dice *nilpotente* si $A^k = 0$ para algún $k \in \mathbb{N}$. Probar que si una matriz A es nilpotente, entonces $I_n - A$ es invertible.

SOLUCIÓN: supongamos que $A^k = 0$ para algún $k \in \mathbb{N}$, y probemos que:

$$(I_n - A)^{-1} = I_n + A + A^2 + \dots + A^{k-1} = \sum_{i=0}^{k-1} A^i.$$

En efecto,

$$\begin{aligned} & (I_n - A)(I_n + A + A^2 + \dots + A^{k-1}) \\ &= I_n(I_n + A + A^2 + \dots + A^{k-1}) - A(I_n + A + A^2 + \dots + A^{k-1}) \\ &= (I_n + A + A^2 + \dots + A^{k-1}) - (A + A^2 + A^3 + \dots + A^k) \\ &= I_n - A^k = I_n - 0 = I_n. \end{aligned}$$

□

- (14) Sean v y w dos soluciones del sistema homogéneo $AX = 0$. Probar que $v + tw$ también es solución para todo $t \in \mathbb{K}$.

SOLUCIÓN: como v, w soluciones de $AX = 0$, tenemos que $Av = 0$ y $Aw = 0$. Luego, por las propiedades que cumple el producto y suma de matrices:

$$A(v + tw) = Av + A(tw) = 0 + t(Aw) = 0 + 0 = 0.$$

Es decir, $v + tw$ es solución de $AX = 0$.

□

- (15) Sea v una solución del sistema $AX = Y$ y w una solución del sistema homogéneo $AX = 0$. Probar que $v + tw$ también es solución del sistema $AX = Y$ para todo $t \in \mathbb{K}$.

SOLUCIÓN: como v solución de $AX = Y$, tenemos que $Av = Y$. Al ser w solución del sistema $AX = 0$, se cumple $Aw = 0$. Luego, por las propiedades que cumple el producto y suma de matrices:

$$A(v + tw) = Av + A(tw) = Y + t(Aw) = Y + 0 = Y.$$

Es decir, $v + tw$ es solución de $AX = Y$. □

- (16) Probar que si el sistema homogéneo $AX = 0$ posee alguna solución no trivial, entonces el sistema $AX = Y$ no tiene solución o tiene al menos dos soluciones distintas.

SOLUCIÓN: si $AX = Y$ no tiene solución, listo, pues es uno de los casos. Si $AX = Y$ tiene solución, sea entonces w alguna solución del sistema, es decir $Aw = Y$. Por hipótesis $AX = 0$ tiene soluciones no triviales, es decir existe $v \neq 0$ tal que $Av = 0$. Por el ejercicio (15): $v + w$ es solución del sistema $AX = Y$, como $v \neq 0$, los vectores w y $v + w$ son distintos y ambos son solución del sistema $AX = Y$.

Observación. En realidad, la existencia de una solución w del sistema $AX = Y$ implica la existencia de infinitas soluciones, pues por ejercicio (15) los vectores $w + tv$ son soluciones de $AX = Y$ para todo $t \in \mathbb{K}$. □

- (17) Supongamos que los sistemas $AX = Y$ y $AX = Z$ tienen solución. Probar que el sistema $AX = Y + tZ$ también tiene solución para todo $t \in \mathbb{K}$.

SOLUCIÓN: sea v solución de $AX = Y$, es decir $Av = Y$ y sea w solución del sistema $AX = Z$, es decir $Aw = Z$. Entonces, dado $t \in \mathbb{K}$

$$A(v + tw) = Av + Atw = Y + tAw = Y + tZ.$$

Es decir $v + tw$ es solución de $AX = Y + tZ$. □

- (18) Sean A una matriz invertible $n \times n$, y B una matriz $n \times m$. Probar que los sistemas $BX = Y$ y $ABX = AY$ tienen las mismas soluciones.

SOLUCIÓN:

$$\begin{aligned} v \text{ es sol. de } BX = Y &\Rightarrow Bv = Y \\ &\Rightarrow ABv = AY && (\text{mult. por } A \text{ a izq.}) \\ &\Rightarrow v \text{ es sol. de } ABX = AY \end{aligned}$$

Esta “ida” vale para cualquier matriz A , sea invertible o no. Para la vuelta debemos utilizar la existencia de A^{-1} :

$$\begin{aligned}
 v \text{ es sol. de } ABX = AY &\Rightarrow ABv = AY \\
 &\Rightarrow A^{-1}ABv = A^{-1}AY && (\text{mult. por } A^{-1} \text{ a izq.}) \\
 &\Rightarrow \text{Id } Bv = \text{Id } Y && (A^{-1}A = \text{Id}) \\
 &\Rightarrow Bv = Y && (\text{Id es neutro del prod.}) \\
 &\Rightarrow v \text{ es sol. de } BX = Y
 \end{aligned}$$

□

(19) Sean A y B matrices $r \times n$ y $n \times m$ respectivamente. Probar que:

- a) Si $m > n$, entonces el sistema $ABX = 0$ tiene soluciones no triviales.
- b) Si $r > n$, entonces existe un Y , $r \times 1$, tal que $ABX = Y$ no tiene solución.

SOLUCIÓN:

a) Como $m > n$ el sistema $BX = 0$ tiene más incógnitas que ecuaciones, por lo tanto tiene soluciones no triviales. Sea $v \neq 0$ solución de $BX = 0$, es decir $Bv = 0$. Entonces $ABv = A(Bv) = A0 = 0$, por lo tanto v es solución del sistema $ABX = 0$.

b) Sea P matriz $r \times r$ invertible tal que PA es MERF. Como $r > n$, la matriz PA tiene más filas que columnas y como es MERF la última fila debe ser nula.

Ahora bien, por el ejercicio (18), los sistemas $PABX = PY$ y $ABX = Y$ tienen las mismas soluciones, por lo tanto si existe Y tal que $PABX = PY$ no tiene solución, entonces el sistema $ABX = Y$ tampoco tiene solución.

Demostremos, entonces, que existe Y tal que $PABX = PY$ no tiene solución: como PA tiene la última fila nula, $PABX$ también tiene la última fila nula. Sea e_r la matriz $r \times 1$ con 1 en la coordenada r y 0 en las otras coordenadas. Entonces $e_r = P(P^{-1}e_r)$ tiene la última fila no nula, por lo tanto el sistema $PABX = P(P^{-1}e_r)$ no tiene solución y, por lo dicho anteriormente, el sistema $ABX = P^{-1}e_r$ no tiene solución. □

PRÁCTICO 4

Soluciones

Álgebra II – Año 2024/1 – FAMAF

(1) Calcular el determinante de las siguientes matrices.

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 7 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -3 & 2 & 4 \\ 1 & -1 & 2 \\ -1 & 4 & 0 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 5 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 5 \end{bmatrix}.$$

SOLUCIÓN:

$$|A| = 4 \cdot 3 - 7 \cdot 5 = -23,$$

$$\begin{aligned} |B| &= -3 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} \\ &= -3 \cdot (-8) - 1 \cdot (-16) - 1 \cdot 8 \\ &= 24 + 16 - 8 = 32, \end{aligned}$$

$$|C| = 2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 5 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 5 \end{vmatrix} - 0 \cdot |C(2|1)| + 0 \cdot |C(3|1)| - 1 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 5 & 1 & 1 \end{vmatrix} \quad (*)$$

Debemos ahora calcular el determinante de las matrices 3×3 que aparecen en la expresión de $|C|$.

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 5 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 5 \end{vmatrix} &= 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} - 5 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \\ &= 2 \cdot 3 - 5 \cdot (-11) + 1 \cdot (-4) = 57, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 5 & 1 & 1 \end{vmatrix} &= 3 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + 5 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} \\ &= 3 \cdot (-4) - 2 \cdot 0 + 5 \cdot 4 = -12 + 20 = 8. \end{aligned}$$

Luego, por (*):

$$|C| = 2 \cdot 57 - 1 \cdot 8 = 106.$$

□

(2) Sean

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 3 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Calcular:

a) $\det(AB)$.

b) $\det(BA)$.

c) $\det(A^{-1})$.

d) $\det(A^4)$.

e) $\det(A + B)$.

f) $\det(A + tB)$, con $t \in \mathbb{R}$.

SOLUCIÓN:

Primero nos conviene calcular los determinantes de A y B , pues algunos cálculos se reducen a saber estos números.

$$\begin{aligned} \det(A) &= \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 3 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - 3 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} \\ &= 1 \cdot (-2) - 3 \cdot 1 + 1 \cdot 6 = 1, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \det(B) &= \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \\ &= 1 \cdot 4 - 1 \cdot (-1) - 1 \cdot (-3) = 8. \end{aligned}$$

Resumiendo $\det(A) = 1$ y $\det(B) = 8$. Ahora sí, calculemos los determinantes pedidos.

a) $\det(AB) = \det(A) \det(B) = 1 \cdot 8 = 8$.

b) $\det(BA) = \det(B) \det(A) = 8 \cdot 1 = 8$.

c) $\det(A^{-1}) = 1/\det(A) = 1/1 = 1$.

d) $\det(A^4) = \det(A)^4 = 1^4 = 1$.

f) El ejercicio e) es un caso especial de f) para $t = 1$. Así que haremos este inciso primero. Para ello, antes que nada, calculemos la matriz $A + tB$:

$$\begin{aligned} A + tB &= \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 3 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 3 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1+t & 3-t & 2+2t \\ 3+t & t & 2+t \\ 1-t & 1-t & 1+3t \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Entonces

$$\begin{aligned}
 \begin{vmatrix} 1+t & 3-t & 2+2t \\ 3+t & t & 2+t \\ 1-t & 1-t & 1+3t \end{vmatrix} &= (1+t) \cdot \begin{vmatrix} t & 2+t \\ 1-t & 1+3t \end{vmatrix} - (3+t) \cdot \begin{vmatrix} 3-t & 2+2t \\ 1-t & 1+3t \end{vmatrix} \\
 &\quad + (1-t) \cdot \begin{vmatrix} 3-t & 2+2t \\ t & 2+t \end{vmatrix} \\
 &= (1+t) \cdot (t(1+3t) - (2+t)(1-t)) - \\
 &\quad - (3+t) \cdot ((3-t)(1+3t) - (2+2t)(1-t)) + \\
 &\quad + (1-t) \cdot ((3-t)(2+t) - (2+2t)t) \\
 &= (1+t) \cdot (4t^2 + 2t - 2) + \\
 &\quad - (3+t) \cdot (-t^2 + 8t + 1) + \\
 &\quad + (1-t) \cdot (-3t^2 - t + 6) \\
 &= (4t^3 + 6t^2 - 2) + (t^3 - 5t^2 - 25t - 3) + (3t^3 - 2t^2 - 7t + 6) \\
 &= 8t^3 - t^2 - 32t + 1
 \end{aligned}$$

$$e) \det(A+B) = \det(a+1 \cdot B) \stackrel{f)}{=} 8 \cdot 1^3 - 1^2 - 32 \cdot 1 + 1 = -24.$$

□

- (3) Calcular el determinante de las siguientes matrices haciendo la reducción a matrices triangulares superiores.

$$A = \begin{bmatrix} a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & 1 & a \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 3 & 3 & 3 \\ 1 & 3 & 5 & 5 & 5 \\ 1 & 3 & 5 & 7 & 7 \\ 1 & 3 & 5 & 7 & 9 \end{bmatrix}.$$

SOLUCIÓN: Recordemos que si M es una matriz triangular superior, entonces $\det(M)$ es el producto de los elementos de la diagonal principal. Por otro lado, las operaciones elementales por fila necesarias para obtener una matriz triangular superior tienen el siguiente efecto en el cálculo del determinante:

- intercambiar dos filas cambia el signo del determinante, y
- sumar a una fila un múltiplo de otra fila no cambia el determinante.

La operación elemental de multiplicar una fila por una constante no es necesaria para conseguir una matriz triangular superior.

Cálculo de $\det(A)$. Un caso particular es cuando $a = 0$, en ese caso la matriz tiene todas las filas iguales y por lo tanto $\det(A) = 0$.

Analicemos el caso $a \neq 1$.

Veamos como reducimos A a triangular superior:

$$\begin{aligned}
 A \xrightarrow{\substack{F_1 - aF_2 \\ F_3 - F_2 \\ F_4 - F_2}} &= \begin{bmatrix} 0 & 1-a^2 & 1-a & 1-a \\ 1 & a & 1 & 1 \\ 0 & 1-a & a-1 & 0 \\ 0 & 1-a & 0 & a-1 \end{bmatrix} \xrightarrow{F_1 \leftrightarrow F_4} \begin{bmatrix} 0 & 1-a & 0 & a-1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ 0 & 1-a & a-1 & 0 \\ 0 & 1-a^2 & 1-a & 1-a \end{bmatrix} \\
 &\xrightarrow{F_1 \leftrightarrow F_2} \begin{bmatrix} 1 & a & 1 & 1 \\ 0 & 1-a & 0 & a-1 \\ 0 & 1-a & a-1 & 0 \\ 0 & 1-a^2 & 1-a & 1-a \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{F_3 - F_2 \\ F_4 - (1+a)F_2}} \begin{bmatrix} 1 & a & 1 & 1 \\ 0 & 1-a & 0 & a-1 \\ 0 & 0 & a-1 & 1-a \\ 0 & 0 & 1-a & 2-a-a^2 \end{bmatrix} \\
 &\xrightarrow{F_4 + F_3} \begin{bmatrix} 1 & a & 1 & 1 \\ 0 & 1-a & 0 & a-1 \\ 0 & 0 & a-1 & 1-a \\ 0 & 0 & 0 & 3-2a-a^2 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

Como solo hicimos dos permutaciones de filas, el determinante de A es igual al determinante de la última matriz, es decir

$$\det(A) = (1-a)(a-1)(3-2a-a^2) = a^4 - 6a^2 + 8a - 3.$$

Cálculo de $\det(B)$.

$$\begin{aligned}
 B &\xrightarrow{\substack{F_2 - F_1 \\ F_3 - F_1 \\ F_4 - F_1 \\ F_5 - F_1}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 4 & 4 & 4 \\ 0 & 2 & 4 & 6 & 6 \\ 0 & 2 & 4 & 6 & 8 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{F_3 - F_2 \\ F_4 - F_2 \\ F_5 - F_2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & 6 \end{bmatrix} \\
 &\xrightarrow{\substack{F_4 - F_3 \\ F_5 - F_3}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow{F_5 - F_4} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.
 \end{aligned}$$

El determinante de B es igual al determinante de la última matriz, es decir:

$$\det(B) = 2^4 = 16.$$

□

- (4) Sean A , B y C matrices $n \times n$, tales que $\det A = -1$, $\det B = 2$ y $\det C = 3$. Calcular:

a) $\det(PQR)$, donde P , Q y R son las matrices que se obtienen a partir de A , B y C mediante operaciones elementales por filas de la siguiente manera

$$A \xrightarrow{F_1 + 2F_2} P, \quad B \xrightarrow{3F_3} Q \quad \text{y} \quad C \xrightarrow{F_1 \leftrightarrow F_4} R.$$

Es decir,

- P se obtiene a partir de A sumando a la fila 1 la fila 2 multiplicada por 2.
- Q se obtiene a partir de B multiplicando la fila 3 por 3.
- R se obtiene a partir de C intercambiando las filas 1 y 4.

b) $\det(A^2BC^tB^{-1})$ y $\det(B^2C^{-1}AB^{-1}C^t)$.

SOLUCIÓN:

a) La matriz P se obtiene de A sumando a la fila 1 la fila 2 multiplicada por 2. Esta operación elemental no cambia el determinante, luego $\det(P) = \det(A) = -1$. La matriz Q se obtiene de B multiplicando la fila 3 por 3, luego $\det(Q) = 3 \cdot \det(B) = 6$. La matriz R se obtiene de C intercambiando las filas 1 y 4, luego $\det(R) = -\det(C) = -3$.

b)

$$\begin{aligned}\det(A^2BC^tB^{-1}) &= \det(A^2) \det(B) \det(C^t) \det(B^{-1}) \\ &= \det(A)^2 \det(B) \det(C) \det(B)^{-1} \\ &= (-1)^2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 1/2 \\ &= 3.\end{aligned}$$

□

(5) Sea

$$A = \begin{bmatrix} x & y & z \\ 3 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Sabiendo que $\det(A) = 5$, calcular el determinante de las siguientes matrices.

$$B = \begin{bmatrix} 2x & 2y & 2z \\ 3/2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} x & y & z \\ 3x+3 & 3y & 3z+2 \\ x+1 & y+1 & z+1 \end{bmatrix}.$$

SOLUCIÓN: $A \xrightarrow[F_2/2]{2F_1} B$, luego $\det(B) = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \det(A) = \det(A) = 5$.

$A \xrightarrow[F_3+F_1]{F_2+3F_1} C$, luego $\det(C) = \det(A) = 5$.

□

(6) Determinar todos los valores de $c \in \mathbb{R}$ tales que las siguientes matrices sean invertibles.

$$A = \begin{bmatrix} 4 & c & 3 \\ c & 2 & c \\ 5 & c & 4 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & c & -1 \\ c & 1 & 1 \\ 0 & 1 & c \end{bmatrix}.$$

SOLUCIÓN: recordar que una matriz es invertible si y solo si su determinante es no nulo. Luego, debemos calcular el determinante de A y B y ver para qué valores de c son distintos de cero.

Para el cálculo del determinante desarrollamos por la primera fila.

$$\begin{aligned}\det(A) &= 4 \cdot \begin{vmatrix} 2 & c \\ c & 4 \end{vmatrix} - c \cdot \begin{vmatrix} c & c \\ 5 & 4 \end{vmatrix} + 3 \cdot \begin{vmatrix} c & 2 \\ 5 & c \end{vmatrix} \\ &= 4 \cdot (8 - c^2) - c \cdot (4c - 5c) + 3 \cdot (c^2 - 10) \\ &= 32 - 4c^2 - 4c^2 + 5c^2 + 3c^2 - 30 \\ &= 2.\end{aligned}$$

Como $\det(A) = 2 \neq 0$ independientemente del valor de c , la matriz A es invertible para todo $c \in \mathbb{R}$.

Para el cálculo del determinante de B desarrollamos por la primera fila.

$$\begin{aligned}\det(B) &= 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & c \end{vmatrix} - c \cdot \begin{vmatrix} c & 1 \\ 0 & c \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} c & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \\ &= 1 \cdot (c - 1) - c \cdot c^2 - 1 \cdot c \\ &= -c^3 - 1.\end{aligned}$$

Luego, $\det(B) = 0$ si y solo si $c^3 = -1$, es decir si y solo si $c = -1$. Por lo tanto, la matriz B es invertible si y solo si $c \neq -1$. \square

- (7) Calcular el determinante de las siguientes matrices, usando operaciones elementales por fila y/o columnas u otras propiedades del determinante. Determinar cuáles de ellas son invertibles.

$$\begin{aligned}A &= \begin{bmatrix} -2 & 3 & 2 & -6 \\ 0 & 4 & 4 & -5 \\ 5 & -6 & -3 & 2 \\ -3 & 7 & 0 & 0 \end{bmatrix}, & B &= \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}, \\ C &= \begin{bmatrix} -2 & 3 & 2 & -6 & 0 \\ 0 & 4 & 4 & -5 & 0 \\ 5 & -6 & -3 & 2 & 0 \\ -3 & 7 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, & D &= \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -13 & 6 & \frac{1}{3} \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 11 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \sqrt{2} & 2 & 1 & \pi & 0 \end{bmatrix}, \\ E &= \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 4 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 4 \end{bmatrix}.\end{aligned}$$

SOLUCIÓN:

Cálculo de $\det(A)$. Calculamos el determinante de A desarrollando por la última fila debido a que tiene dos 0.

$$\begin{aligned}\det(A) &= 3 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 2 & -6 \\ 4 & 4 & -5 \\ -6 & -3 & 2 \end{vmatrix} + 7 \cdot \begin{vmatrix} -2 & 2 & -6 \\ 0 & 4 & -5 \\ 5 & -3 & 2 \end{vmatrix} \\ &= 3 \cdot (-49) + 7 \cdot 84 \\ &= 441.\end{aligned}$$

Como $\det(A) \neq 0$, la matriz A es invertible.

Cálculo de $\det(B)$. Permutando la fila 2 con la fila 3 obtenemos una matriz diagonal con 2, 3, -1 , 4 en la diagonal, luego $\det(B) = -(2 \cdot 3 \cdot (-1) \cdot 4) = 24$. Por lo tanto, B es invertible.

Cálculo de $\det(C)$. En este caso conviene desarrollar por la última columna debido a que tiene cuatro 0. Entonces

$$\det(C) = 1 \cdot \begin{vmatrix} -2 & 3 & 2 & -6 \\ 0 & 4 & 4 & -5 \\ 5 & -6 & -3 & 2 \\ -3 & 7 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

Observar que la matriz de la derecha es la matriz A del ejercicio anterior. Luego $\det(C) = 1 \cdot 441 = 441$. Por lo tanto, C es invertible.

Cálculo de $\det(D)$. Desarrollaremos por la última columna y luego de nuevo por la última columna.

$$\begin{aligned}\det(D) &= -\frac{1}{3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 11 & 1 & 0 & 0 \\ \sqrt{2} & 2 & 1 & \pi \end{vmatrix} = -\frac{1}{3} \cdot \pi \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 0 \\ 11 & 1 & 0 \end{vmatrix} \\ &= -\frac{1}{3} \cdot \pi \cdot (-2) \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -\frac{1}{3} \cdot \pi \cdot (-2) \cdot (-3) = -2\pi.\end{aligned}$$

En el renglón anterior desarrollamos por la fila 2. Luego, $\det(D) = -2\pi$. Por lo tanto, D es invertible.

Cálculo de $\det(E)$. Para facilitar la escritura escribamos la matriz como una matriz de bloques,

$$E = \begin{bmatrix} E_1 & 0 \\ 0 & E_2 \end{bmatrix},$$

donde E_1 es el primer bloque diagonal 3×3 y E_2 es el segundo bloque diagonal de 2×2 .

Desarrollemos por la última columna dos veces

$$\begin{aligned}\det(E) &= (-1) \cdot \begin{vmatrix} E_1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + 4 \cdot \begin{vmatrix} E_1 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} \\ &= (-1) \cdot 1 \cdot |E_1| + 4 \cdot 2 \cdot |E_1| \\ &= ((-1) \cdot 1 + 4 \cdot 2) |E_1|.\end{aligned}$$

Averigüemos ahora el determinante de E_1 . Podríamos hacerlo por cálculo directo, pero lo haremos transformando E_1 en triangular superior por medio de operaciones elementales de fila y luego multiplicando los elementos de la diagonal.

$$E_1 \xrightarrow[F_3-2F_1]{F_2-3F_1} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 4 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{F_2 \leftrightarrow F_3} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow{F_3-4F_2} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -6 \end{bmatrix}.$$

Como hay una permutación de filas tenemos que

$$\det(E_1) = -(1 \cdot 1 \cdot (-6)) = 6.$$

Luego $\det(E) = (4 \cdot 2 - 1) \cdot 6 = 42$. Por lo tanto, E es invertible.

Observación. Notemos que en este ejercicio

$$\det(E) = \det(E_1) \det(E_2),$$

y este es un hecho general: si E es una matriz $n \times n$ de bloques diagonales E_1 y E_2 , es decir

$$E = \begin{bmatrix} E_1 & 0 \\ 0 & E_2 \end{bmatrix},$$

entonces

$$\det(E) = \det(E_1) \det(E_2).$$

También vale el resultado para un número arbitrario de bloques diagonales. Dejamos al lector interesado la demostración de este hecho. \square

(8) Sean A y B matrices $n \times n$. Probar que:

a) $\det(AB) = \det(BA)$.

b) Si B es invertible, entonces $\det(BAB^{-1}) = \det(A)$.

c) $\det(-A) = (-1)^n \det(A)$.

SOLUCIÓN: En todos los incisos usamos la propiedad de que el determinante del producto de matrices es el producto de los determinantes de cada matriz.

a)

$$\det(AB) = \det(A) \det(B) = \det(B) \det(A) = \det(BA).$$

b) Como $BB^{-1} = \text{Id}$, entonces $\det(B^{-1})\det(B) = \det(\text{Id}) = 1$. Luego, $\det(B^{-1}) = 1/\det(B)$. Por lo tanto,

$$\begin{aligned}\det(BAB^{-1}) &= \det(B)\det(A)\det(B^{-1}) = \det(B)\det(B^{-1})\det(A) \\ &= \det(B)\frac{1}{\det(B)}\det(A) = \det(A).\end{aligned}$$

c) Sea Id es la matriz identidad $n \times n$. Observar que $-A = (-\text{Id})A$. Luego, $\det(-A) = \det((-\text{Id})A) = \det(-\text{Id})\det(A)$. Como $-\text{Id}$ es una matriz diagonal con -1 en la diagonal, entonces $\det(-\text{Id}) = (-1)^n$. Por lo tanto, $\det(-A) = (-1)^n \det(A)$.

□

(9) Sean $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ escalares, la matriz de *Vandermonde* asociada es

$$V_n = \begin{bmatrix} 1 & \lambda_1 & \lambda_1^2 & \cdots & \lambda_1^{n-1} \\ 1 & \lambda_2 & \lambda_2^2 & \cdots & \lambda_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \lambda_n & \lambda_n^2 & \cdots & \lambda_n^{n-1} \end{bmatrix}.$$

Esta es la matriz del sistema de ecuaciones del ejercicio (12) *c)* del Práctico 2.

- a)* Si $n = 2$, probar que $\det(V_n) = \lambda_2 - \lambda_1$.
- b)* Si $n = 3$, probar que $\det(V_n) = (\lambda_3 - \lambda_2)(\lambda_3 - \lambda_1)(\lambda_2 - \lambda_1)$.
- c)* Probar que $\det(V_n) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (\lambda_j - \lambda_i)$ para todo $n \in \mathbb{N}$.
- d)* Dar una condición necesaria y suficiente para que la matriz de Vandermonde sea invertible.
- e)* Dados b_1, \dots, b_n y $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ secuencias de números reales, dar una condición suficiente para que exista un polinomio de grado n , digamos p , tal que

$$p(\lambda_1) = b_1, \dots, p(\lambda_n) = b_n.$$

(ver ejercicio (12) del Práctico 2).

SOLUCIÓN:

a) En este caso la matriz es 2×2 y por lo tanto es fácil calcular el determinante:

$$\det(V_2) = \begin{vmatrix} 1 & \lambda_1 \\ 1 & \lambda_2 \end{vmatrix} = \lambda_2 - \lambda_1.$$

b) En este caso la matriz es 3×3 y calcularemos el determinante transformado la matriz por operaciones elementales de columnas y filas. El método

que haremos servirá para generalizarlo en el caso *c*).

$$\begin{aligned}
 \det(V_3) &= \begin{vmatrix} 1 & \lambda_1 & \lambda_1^2 \\ 1 & \lambda_2 & \lambda_2^2 \\ 1 & \lambda_3 & \lambda_3^2 \end{vmatrix} \\
 &\stackrel{C_3 - \lambda_1 C_2}{=} \begin{vmatrix} 1 & \lambda_1 & 0 \\ 1 & \lambda_2 & \lambda_2(\lambda_2 - \lambda_1) \\ 1 & \lambda_3 & \lambda_3(\lambda_3 - \lambda_1) \end{vmatrix} \\
 &\stackrel{C_2 - \lambda_1 C_1}{=} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & \lambda_2 - \lambda_1 & \lambda_2(\lambda_2 - \lambda_1) \\ 1 & \lambda_3 - \lambda_1 & \lambda_3(\lambda_3 - \lambda_1) \end{vmatrix} \\
 &\stackrel{\substack{F_2/(\lambda_2 - \lambda_1) \\ F_3/(\lambda_3 - \lambda_1)}}{=} (\lambda_2 - \lambda_1)(\lambda_3 - \lambda_1) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & \lambda_2 \\ 1 & 1 & \lambda_3 \end{vmatrix} \\
 &= (\lambda_2 - \lambda_1)(\lambda_3 - \lambda_1) \begin{vmatrix} 1 & \lambda_2 \\ 1 & \lambda_3 \end{vmatrix} \\
 &= (\lambda_2 - \lambda_1)(\lambda_3 - \lambda_1)(\lambda_3 - \lambda_2).
 \end{aligned}$$

Para el último cálculo desarrollamos por la primera fila.

Observar que $\det(V_3)$ es $(\lambda_2 - \lambda_1)(\lambda_3 - \lambda_1)$ por una matriz de Vandermonde de dimensión 2×2 . Esto se puede generalizar para calcular el determinante de una matriz de Vandermonde de mayor dimensión, como veremos a continuación.

c) Haremos la demostración por inducción. El caso base es $n = 2$ y en ese caso el resultado vale por *a*). Supongamos ahora que valga el resultado *c*) para $n - 1$.

Fijarse que en el caso anterior (*b*)) hicimos dos operaciones elementales de columna: $C_3 - \lambda_1 C_2$ y $C_2 - \lambda_1 C_1$, en ese orden. En general, haremos $n - 1$ operaciones elementales de columnas de la forma $C_i - \lambda_1 C_{i-1}$, desde $i = n$ hasta $i = 2$, en ese orden con lo cual obtenemos la matriz

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & \lambda_2 - \lambda_1 & \lambda_2(\lambda_2 - \lambda_1) & \dots & \lambda_2^{n-2}(\lambda_2 - \lambda_1) \\ 1 & \lambda_3 - \lambda_1 & \lambda_3(\lambda_3 - \lambda_1) & \dots & \lambda_3^{n-2}(\lambda_3 - \lambda_1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \lambda_n - \lambda_1 & \lambda_n(\lambda_n - \lambda_1) & \dots & \lambda_n^{n-2}(\lambda_n - \lambda_1) \end{bmatrix} \quad (*)$$

Ninguna de las operaciones elementales que hicimos cambia el valor del determinante. Si calculamos el determinante de la matriz (*) desarrollando por

la primera fila, obtenemos

$$|V_n| = \begin{vmatrix} \lambda_2 - \lambda_1 & \lambda_2(\lambda_2 - \lambda_1) & \dots & \lambda_2^{n-2}(\lambda_2 - \lambda_1) \\ \lambda_3 - \lambda_1 & \lambda_3(\lambda_3 - \lambda_1) & \dots & \lambda_3^{n-2}(\lambda_3 - \lambda_1) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda_n - \lambda_1 & \lambda_n(\lambda_n - \lambda_1) & \dots & \lambda_n^{n-2}(\lambda_n - \lambda_1) \end{vmatrix} \dots \quad (**)$$

Ahora dividimos la fila i de la matriz de la derecha de $(**)$ por $\lambda_i - \lambda_1$ para $i = 2, \dots, n$ y obtenemos

$$|V_n| = (\lambda_2 - \lambda_1)(\lambda_3 - \lambda_1) \dots (\lambda_n - \lambda_1) \begin{vmatrix} 1 & \lambda_2 & \lambda_2^2 & \dots & \lambda_2^{n-2} \\ 1 & \lambda_3 & \lambda_3^2 & \dots & \lambda_3^{n-2} \\ 1 & \lambda_4 & \lambda_4^2 & \dots & \lambda_4^{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \lambda_n & \lambda_n^2 & \dots & \lambda_n^{n-2} \end{vmatrix}. \quad (***)$$

La matriz de la derecha de $(***)$ es una matriz de Vandermonde de dimensión $n-1$ con variables $\lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_n$, y por lo tanto su determinante es, por hipótesis inductiva,

$$\prod_{2 \leq i < j \leq n} (\lambda_j - \lambda_i).$$

En consecuencia,

$$\begin{aligned} |V_n| &= (\lambda_2 - \lambda_1)(\lambda_3 - \lambda_1) \dots (\lambda_n - \lambda_1) \prod_{2 \leq i < j \leq n} (\lambda_j - \lambda_i) \\ &= \prod_{1 \leq i < j \leq n} (\lambda_j - \lambda_i). \end{aligned}$$

d) Sabemos que una matriz es invertible si y solo si su determinante es no nulo y que el determinante de una matriz de Vandermonde es el producto de los factores $(\lambda_j - \lambda_i)$ con $i < j$. Por lo tanto, la matriz de Vandermonde es invertible si y solo si $\lambda_j - \lambda_i \neq 0$ para $i < j$. Es decir, si y solo si $\lambda_j \neq \lambda_i$ para $i \neq j$.

e) Dados b_1, \dots, b_n y $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ secuencias de números reales, se plantea se plantea si existe una polinomio de grado n , digamos p , tal que

$$p(\lambda_1) = b_1, \dots, p(\lambda_n) = b_n.$$

Los coeficientes de p son las incógnitas del sistema y la matriz de coeficientes es la matriz de Vandermonde. Por lo tanto, el sistema tiene solución única si la matriz de Vandermonde es invertible, es decir si $\lambda_j \neq \lambda_i$ para $i \neq j$. Por lo tanto, una condición suficiente para que exista el polinomio p es: $\lambda_j \neq \lambda_i$ para $i \neq j$.

Hay otras situaciones donde el sistema tiene solución, pero no es única. Por ejemplo, si $\lambda_1 = \lambda_2$ y $b_1 = b_2$, y $\lambda_j \neq \lambda_i$ para $i \neq j$ para $2 \leq i, j \leq n$, entonces el sistema tiene infinitas soluciones.

□

(10) Decidir si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justificar con una demostración o con un contraejemplo, según corresponda.

- a) Sean A y B matrices $n \times n$. Entonces $\det(A + B) = \det(A) + \det(B)$.
- b) Existen una matriz 3×2 , A , y una matriz 2×3 , B , tales que $\det(AB) \neq 0$.
- c) Sea A una matriz $n \times n$. Si A^n es no invertible, entonces A es no invertible.

SOLUCIÓN:

a) Como ya fue visto en la teórica esta afirmación es falsa y un ejemplo sencillo es el siguiente:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

En este caso $\det(A) = \det(B) = 0$ y $\det(A + B) = 1$.

b) Esta afirmación es falsa y la a continuación haremos una demostración de este hecho. Observar que con un contraejemplo no basta, pues debemos demostrar que dadas A matriz 3×2 y B matriz 2×3 , cualesquiera, entonces que $\det(AB) = 0$.

Haremos operaciones elementales por fila en la matriz A para transformarla en una matriz triangular superior. Como en el caso 3×3 hacer operaciones elementales por fila es equivalente a multiplicar a izquierda por matrices elementales 3×3 .

Por lo tanto si A' es una matriz triangular superior obtenida de A por operaciones elementales por fila, entonces $A' = EA$ para alguna matriz E invertible 3×3 donde E es producto de matrices elementales. Como $\det(EAB) = \det(E) \det(AB)$, entonces $\det(EAB) \neq 0$ si y solo si $\det(AB) \neq 0$.

Ahora bien, A' una matriz 3×2 triangular superior tiene la forma

$$A' = \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

por lo tanto

$$A'B = \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x & y & z \\ u & v & w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ax + bu & ay + bv & az + bw \\ 0 & cy & cz \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

La matriz resultante tiene la última fila con todos los coeficientes iguales a 0, por lo tanto $\det(A'B) = 0$, lo cual implica que $\det(AB) = 0$, como queríamos demostrar.

c) Esta afirmación es verdadera. Si A^n es no invertible, entonces $\det(A^n) = 0$. Como $\det(A^n) = \det(A)^n$, entonces $\det(A)^n = 0$ y por lo tanto $\det(A) = 0$. En consecuencia, A es no invertible.

□

PRÁCTICO 5

Soluciones

Álgebra II – Año 2024/1 – FAMAF

- (1) Para cada una de las siguientes matrices, hallar sus autovalores reales, y para cada autovalor, dar una descripción paramétrica del autoespacio asociado sobre \mathbb{R} .

$$a) \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 4 \end{bmatrix},$$

$$d) \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -5 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix},$$

$$b) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -2 \end{bmatrix},$$

$$e) \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 1 & \lambda & 0 \\ 0 & 1 & \lambda \end{bmatrix}, \lambda \in \mathbb{R}$$

$$c) \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix},$$

$$f) \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}, 0 \leq \theta < 2\pi.$$

SOLUCIÓN: En todos los casos calculamos el polinomio característico, averiguamos sus raíces y luego resolvemos el sistema de ecuaciones que nos da el autoespacio asociado a cada autovalor.

a) Denominamos A a la matriz del enunciado. El polinomio característico de A es

$$\begin{aligned} \chi_A(x) &= \begin{vmatrix} x-2 & -1 \\ 1 & x-4 \end{vmatrix} \\ &= (x-2)(x-4) - (-1)(1) = x^2 - 6x + 9 \\ &= (x-3)^2. \end{aligned}$$

Luego $\lambda = 3$ es el único autovalor. Para calcular el autoespacio asociado a $\lambda = 3$ resolvemos el sistema $(3 \text{Id} - A)v = 0$, es decir

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 3-2 & -1 \\ 1 & 3-4 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ \Rightarrow \begin{bmatrix} v_1 - v_2 \\ v_1 - v_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow v_1 = v_2. \end{aligned}$$

Luego, el único autovalor es $\lambda = 3$ y el autoespacio asociado es $\{(t, t) : t \in \mathbb{R}\}$.

b) Denominamos B a la matriz del enunciado. El polinomio característico de B es

$$\begin{aligned}\chi_B(x) &= \begin{vmatrix} x-1 & 0 \\ -1 & x+2 \end{vmatrix} \\ &= (x-1)(x+2) - (-1)(0) = x^2 + x - 2 \\ &= (x+2)(x-1).\end{aligned}$$

Luego $\lambda_1 = -2$ y $\lambda_2 = 1$ son los autovalores.

Para calcular el autoespacio asociado a $\lambda_1 = -2$ resolvemos el sistema $(-2\text{Id} - B)v = 0$, es decir

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix} -2-1 & 0 \\ -1 & -2+2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ \Rightarrow \begin{bmatrix} -3v_1 \\ -v_1 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow v_1 = 0.\end{aligned}$$

Luego, el autovalor $\lambda_1 = -2$ tiene autoespacio asociado $\{(0, t) : t \in \mathbb{R}\}$. Para calcular el autoespacio asociado a $\lambda_2 = 1$ resolvemos el sistema $(\text{Id} - B)v = 0$, es decir

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix} 1-1 & 0 \\ -1 & 1+2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 \\ -v_1 + 3v_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow v_1 = 3v_2.\end{aligned}$$

Luego, el autovalor $\lambda_2 = 1$ tiene autoespacio asociado $\{(3t, t) : t \in \mathbb{R}\}$.

c) Denominamos C a la matriz del enunciado. El polinomio característico de C es

$$\begin{aligned}\chi_C(x) &= \begin{vmatrix} x-2 & 0 & 0 \\ 1 & x-1 & 1 \\ 0 & 0 & x-2 \end{vmatrix} \\ &= (x-2)^2(x-1).\end{aligned}$$

Luego $\lambda_1 = 2$ y $\lambda_2 = 1$ son los autovalores.

Para calcular el autoespacio asociado a $\lambda_1 = 2$ resolvemos el sistema $(2\text{Id} - C)v = 0$, es decir

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix} 2-2 & 0 & 0 \\ 1 & 2-1 & 1 \\ 0 & 0 & 2-2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 \\ v_1 + v_2 + v_3 \\ 0 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow v_1 = -v_2 - v_3.\end{aligned}$$

Luego, el autovalor $\lambda_1 = 2$ tiene autoespacio asociado $\{(-t, t, s) : t, s \in \mathbb{R}\}$.

Para calcular el autoespacio asociado a $\lambda_2 = 1$ resolvemos el sistema $(\text{Id} - C)v = 0$, es decir

$$\begin{bmatrix} 1-2 & 0 & 0 \\ 1 & 1-1 & 1 \\ 0 & 0 & 1-2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} -v_1 \\ v_1 + v_3 \\ -v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow v_1 = v_3 = 0.$$

Luego, el autovalor $\lambda_2 = 1$ tiene autoespacio asociado $\{(0, t, 0) : t \in \mathbb{R}\}$.

d) Denominamos D a la matriz del enunciado. El polinomio característico de D es

$$\begin{aligned} \chi_D(x) &= \begin{vmatrix} x+1 & 0 & 0 \\ 0 & x-3 & 5 \\ 0 & -1 & x+1 \end{vmatrix} \\ &= (x+1) \begin{vmatrix} x-3 & 5 \\ -1 & x+1 \end{vmatrix} \\ &= (x+1)[(x-3)(x+1) - (-1)(5)] \\ &= (x+1)(x^2 - 2x + 2). \end{aligned}$$

El polinomio $x^2 - 2x + 2$ no tiene raíces reales, luego el único autovalor real de D es -1 . Averiguemos el autoespacio correspondiente, resolviendo el sistema $(-\text{Id} - D)v = 0$, es decir el sistema homogéneo

$$\begin{bmatrix} -1+1 & 0 & 0 \\ 0 & -1-3 & -5 \\ 0 & 1 & -1+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & -5 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{F_2-4F_3} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Luego $v_2 = 0$ y $v_3 = 0$, es decir $v_2 = v_3 = 0$. Por lo tanto, el autoespacio asociado a -1 es $\{(v_1, 0, 0) : v_1 \in \mathbb{R}\}$.

e) Denominamos E a la matriz del enunciado. En realidad la matriz E depende de λ y debemos analizar la existencia de autovalores y autovectores para diferentes valores de λ . El polinomio característico de E es

$$\begin{aligned} \chi_E(x) &= \begin{vmatrix} x-\lambda & 0 & 0 \\ 1 & x-\lambda & 0 \\ 0 & 1 & x-\lambda \end{vmatrix} \\ &= (x-\lambda)^3. \end{aligned}$$

Luego λ es el único autovalor. Para calcular el autoespacio asociado a λ resolvemos el sistema $(\lambda \text{Id} - E)v = 0$, es decir

$$\begin{bmatrix} \lambda - \lambda & 0 & 0 \\ 1 & \lambda - \lambda & 0 \\ 0 & 1 & \lambda - \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 0 \\ v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow v_1 = v_2 = 0.$$

Luego, el único autovalor es λ y el autoespacio asociado es $\{(0, 0, t) : t \in \mathbb{R}\}$.

f) Denominamos F a la matriz del enunciado. En realidad la matriz F depende de θ y debemos analizar la existencia de autovalores y autovectores para diferentes valores de θ . El polinomio característico de F es

$$\begin{aligned} \chi_F(x) &= \begin{vmatrix} x - \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & x - \cos \theta \end{vmatrix} \\ &= (x - \cos \theta)^2 + \sin^2(\theta) \\ &= x^2 - 2x \cos \theta + \cos^2 \theta + \sin^2(\theta) \\ &= x^2 - 2x \cos \theta + 1. \end{aligned}$$

Las raíces del polinomio $x^2 - 2x \cos \theta + 1$ son

$$\begin{aligned} \lambda_{1,2} &= \frac{2 \cos \theta \pm 2\sqrt{\cos^2 \theta - 1}}{2} = \cos \theta \pm \sqrt{\cos^2 \theta - 1} \\ &= \cos \theta \pm \sqrt{-\sin^2 \theta} \end{aligned} \quad (*)$$

Debemos dividir en 3 casos, según el valor de θ .

i) Cuando $\theta = 0$ tenemos que $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$. En ese caso, F es la matriz identidad y por lo tanto hay un único autovalor, 1, y el autoespacio correspondiente es todo \mathbb{R}^3 .

ii) Cuando $\theta = \pi$, tenemos que $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$. En este caso la matriz es

$$F = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Luego, F es $-\text{Id}$, hay un solo autovalor, -1 , y el autoespacio correspondiente es todo \mathbb{R}^2

iii) Cuando $\theta \neq 0, \pi$ y en este caso tenemos que $-\sin^2 \theta < 0$ y por lo tanto, por (*), no hay autovalores reales. \square

- (2) Calcular los autovalores complejos de las matrices *d)* y *f)* del ejercicio anterior, y para cada autovalor, dar una descripción paramétrica del autoespacio asociado sobre \mathbb{C} .

SOLUCIÓN:

En el caso de la matriz **d)** del ejercicio anterior, el polinomio característico es $x^2 - 2x + 2$ como ya fue calculado. Por lo tanto sus raíces son

$$\lambda_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 8}}{2} = 1 \pm i.$$

Para calcular el autoespacio asociado a $\lambda_1 = 1 + i$ resolvemos el sistema $((1 + i)\text{Id} - D)v = 0$, es decir el sistema homogéneo

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 1 + i - 3 & 5 \\ -1 & 1 + i + 1 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -2 + i & 5 \\ -1 & 2 + i \end{bmatrix} \xrightarrow{F_2/(-1)} \begin{bmatrix} -2 + i & 5 \\ 1 & -2 - i \end{bmatrix} \\ &\xrightarrow{F_1 + (2+i)F_2} \begin{bmatrix} 0 & 5 - (2+i)(2-i) \\ 1 & -2 - i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -2 - i \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Por lo tanto $v_1 + (-2 - i)v_2 = 0$, es decir $v_1 = (2 + i)v_2$. Luego, el autoespacio asociado a $\lambda_1 = 1 + i$ es $\{(2 + i)t, t) : t \in \mathbb{C}\}$.

Para calcular el autoespacio asociado a $\lambda_2 = 1 - i$ resolvemos el sistema $((1 - i)\text{Id} - D)v = 0$, es decir el sistema homogéneo

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 1 - i - 3 & 5 \\ -1 & 1 - i + 1 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -2 - i & 5 \\ -1 & 2 - i \end{bmatrix} \xrightarrow{F_2/(-1)} \begin{bmatrix} -2 - i & 5 \\ 1 & -2 + i \end{bmatrix} \\ &\xrightarrow{F_1 + (2+i)F_2} \begin{bmatrix} 0 & 5 - (2-i)(2+i) \\ 1 & -2 + i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -2 + i \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Por lo tanto $v_1 + (-2 + i)v_2 = 0$, es decir $v_1 = (2 - i)v_2$. Luego, el autoespacio asociado a $\lambda_2 = 1 - i$ es $\{(2 - i)t, t) : t \in \mathbb{C}\}$.

En la resolución del punto **f)** del ejercicio anterior, obtuvimos $\lambda_{1,2} = \cos \theta \pm \sqrt{-\sin^2 \theta}$. Luego, los autovalores son $\lambda_1 = \cos \theta + i \sin \theta$ y $\lambda_2 = \cos \theta - i \sin \theta$. Veamos ahora los autoespacios asociados a estos autovalores complejos, es decir cuando $\sin \theta \neq 0$. En el caso $\lambda_1 = \cos \theta + i \sin \theta$ resolvemos el sistema $((\cos \theta + i \sin \theta)\text{Id} - F)v = 0$, es decir el sistema homogéneo

$$\begin{aligned} &\begin{bmatrix} \cos \theta + i \sin \theta - \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta + i \sin \theta - \cos \theta \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} i \sin \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & i \sin \theta \end{bmatrix} \xrightarrow{F_1 \cdot i} \begin{bmatrix} -\sin \theta & -i \sin \theta \\ \sin \theta & i \sin \theta \end{bmatrix} \\ &\xrightarrow{\substack{F_1/\sin \theta \\ F_2/\sin \theta}} \begin{bmatrix} -1 & -i \\ 1 & i \end{bmatrix} \xrightarrow{F_2 + F_1} \begin{bmatrix} -1 & -i \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Por lo tanto $-v_1 - iv_2 = 0$, es decir $v_1 = -iv_2$. Luego, el autoespacio asociado a $\lambda_1 = \cos \theta + i \sin \theta$ es $\{t(-i, 1) : t \in \mathbb{C}\}$.

En el caso $\lambda_2 = \cos \theta - i \sin \theta$ resolvemos el sistema $((\cos \theta - i \sin \theta) \text{Id} - F)v = 0$, es decir el sistema homogéneo

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} \cos \theta - i \sin \theta - \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta - i \sin \theta - \cos \theta \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -i \sin \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & -i \sin \theta \end{bmatrix} \xrightarrow{F_1 \cdot i} \begin{bmatrix} \sin \theta & -i \sin \theta \\ \sin \theta & -i \sin \theta \end{bmatrix} \\ & \xrightarrow{\substack{F_1/\sin \theta \\ F_2/\sin \theta}} \begin{bmatrix} 1 & -i \\ 1 & -i \end{bmatrix} \xrightarrow{F_2 - F_1} \begin{bmatrix} 1 & -i \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Por lo tanto $v_1 - iv_2 = 0$, es decir $v_1 = iv_2$. Luego, el autoespacio asociado a $\lambda_2 = \cos \theta - i \sin \theta$ es $\{t(i, 1) : t \in \mathbb{C}\}$.

Conclusión. Haremos un resumen de los resultados acerca de autovalores y autovectores de la matriz del ejercicio (1) f), es decir de la matriz

$$\begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}.$$

- Si $\theta = 0$, entonces F tiene un único autovalor, 1, y el autoespacio correspondiente es todo \mathbb{R}^2 .
- Si $\theta = \pi$, entonces F tiene un único autovalor, -1, y el autoespacio correspondiente es todo \mathbb{R}^2 .
- Si $\theta \neq 0, \pi$, entonces F tiene dos autovalores complejos, $\lambda_1 = \cos \theta + i \sin \theta$ y $\lambda_2 = \cos \theta - i \sin \theta$, cuyos autoespacios son $\{t(-i, 1) : t \in \mathbb{C}\}$ y $\{t(i, 1) : t \in \mathbb{C}\}$, respectivamente.

□

- (3) Probar que hay una única matriz $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ tal que $(1, 1)$ es autovector de autovalor 2, y $(-2, 1)$ es autovector de autovalor 1.

SOLUCIÓN: Para encontrar la matriz debemos resolver los sistemas

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

O, equivalentemente,

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} x + y \\ z + w \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} -2x + y \\ -2z + w \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Son sistemas sencillos de resolver:

$$x + y = 2, \quad z + w = 2, \quad -2x + y = -2, \quad -2z + w = 1.$$

Luego, $y = 2 - x$ y por lo tanto $-2x + 2 - x = -2$, es decir $-3x = -4 \Rightarrow x = 4/3$, y en consecuencia $y = 2 - x = 2 - 4/3 = 2/3$.

Por otro lado, $w = 2 - z$ y por lo tanto $-2z + 2 - z = 1$, es decir $-3z = -1 \Rightarrow z = 1/3$, y en consecuencia $w = 2 - z = 2 - 1/3 = 5/3$.

Luego, la matriz buscada es

$$A = \begin{bmatrix} 4/3 & 2/3 \\ 1/3 & 5/3 \end{bmatrix}.$$

□

- (4) Sea $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$, y sea $f(x) = ax^2 + bx + c$ un polinomio, con $a, b, c \in \mathbb{K}$. Sea $f(A)$ la matriz $n \times n$ definida por

$$f(A) = aA^2 + bA + c \operatorname{Id}_n.$$

Probar que todo autovector de A con autovalor λ es autovector de $f(A)$ con autovalor $f(\lambda)$.

SOLUCIÓN: Sea v un autovector de A con autovalor λ , es decir $Av = \lambda v$. Entonces

$$\begin{aligned} f(A)v &= (aA^2 + bA + c \operatorname{Id}_n)v \\ &= aA^2v + bAv + c \operatorname{Id}_n v \\ &= aA(\lambda v) + b(\lambda v) + c \operatorname{Id}_n v \\ &= a\lambda A(v) + \lambda bv + cv \\ &= a\lambda^2 v + \lambda bv + cv \\ &= (\lambda^2 a + \lambda b + c)v \\ &= f(\lambda)v. \end{aligned}$$

□

- (5) Sea $A \in \mathbb{K}^{2 \times 2}$.

- Probar que el polinomio característico de A es $\chi_A(x) = x^2 - \operatorname{Tr}(A)x + \det(A)$.
- Si A no es invertible, probar que los autovalores de A son 0 y $\operatorname{Tr}(A)$.

SOLUCIÓN: *a)* Si $A = [a_{ij}]$, entonces

$$\begin{aligned}\chi_A(x) &= \begin{vmatrix} x - a_{11} & -a_{12} \\ -a_{21} & x - a_{22} \end{vmatrix} \\ &= (x - a_{11})(x - a_{22}) - (-a_{12})(-a_{21}) \\ &= x^2 - (a_{11} + a_{22})x + a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \\ &= x^2 - \text{Tr}(A)x + \det(A).\end{aligned}$$

b) Si A no es invertible, entonces $\det(A) = 0$ y por lo tanto $\chi_A(x) = x^2 - \text{Tr}(A)x$. Luego, los autovalores de A son las raíces de $x^2 - \text{Tr}(A)x = x(x - \text{Tr}(A))$, es decir 0 y $\text{Tr}(A)$. \square

- (6) Sea $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$. Probar que el polinomio $\tilde{\chi}_A(x) = \det(A - x \text{Id}_n)$ y el polinomio característico de A tienen las mismas raíces.

SOLUCIÓN: Observar que $A - x \text{Id}_n$ es igual a $-\text{Id}_n(x \text{Id}_n - A)$ y por lo tanto,

$$\begin{aligned}\tilde{\chi}_A(x) &= \det(A - x \text{Id}_n) \\ &= \det(-\text{Id}_n(x \text{Id}_n - A)) \\ &= \det(-\text{Id}_n) \det(x \text{Id}_n - A) \\ &= (-1)^n \det(x \text{Id}_n - A) \\ &= (-1)^n \chi_A(x).\end{aligned}$$

Luego, $\tilde{\chi}_A(x)$ y $\chi_A(x)$ son polinomios que difieren por un factor $(-1)^n$, es decir tienen las mismas raíces. \square

- (7) Probar que si $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ es una matriz nilpotente entonces 0 es el único autovalor de A . Usar esto para deducir que la matriz $\text{Id}_n - A$ es invertible (esta es otra demostración del ejercicio (13) del Práctico 3).

SOLUCIÓN: Recordemos que A es nilpotente si existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $A^k = 0$. Si A es nilpotente y v autovector con autovalor λ , entonces $Av = \lambda v$ y por lo tanto $A^2v = A(Av) = A(\lambda v) = \lambda Av = \lambda^2 v$. Iterando este argumento, obtenemos que $A^k v = \lambda^k v$. Pero $A^k = 0$, luego $\lambda^k v = 0$ y por lo tanto $\lambda^k = 0$ y en consecuencia $\lambda = 0$. Luego, 0 es el único autovalor de A .

Ahora bien, si 0 es el único autovalor de A , entonces $\chi_A(x) = x^n$ y por lo tanto $1 = \chi_A(1) = \det(\text{Id}_n - A)$ como el determinante de $\text{Id}_n - A$ es no nulo, esa matriz es invertible. \square

- (8) Decidir si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justificar.

- a)* Existe una matriz invertible A tal que 0 es autovalor de A .
b) Si A es invertible, entonces todo autovector de A es autovector de A^{-1} .

SOLUCIÓN:

a) Falso. Si A es invertible, entonces 0 no es autovalor de A . Dado v tal que $Av = 0v = 0$, entonces $v = A^{-1}Av = A^{-1}(0) = 0$, por lo tanto no puede haber autovectores con autovalor 0 , por lo tanto 0 no es autovalor de A .

b) Verdadero. Sea $v \neq 0$ autovector de A con autovalor λ , luego $Av = \lambda v$. Aplicando A^{-1} a ambos lados de la igualdad tenemos $A^{-1}Av = A^{-1}(\lambda v)$, o equivalentemente $v = \lambda A^{-1}v$, luego $A^{-1}v = \frac{1}{\lambda}v$. Es decir, v es autovector de A^{-1} con autovalor $\frac{1}{\lambda}$.

□

(9) Repetir los ejercicios (1) y (2) con las siguientes matrices.

$$a) \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix},$$

$$b) \begin{bmatrix} -9 & 4 & 4 \\ -8 & 3 & 4 \\ -16 & 8 & 7 \end{bmatrix},$$

$$c) \begin{bmatrix} 4 & 4 & -12 \\ 1 & -1 & 1 \\ 5 & 3 & -11 \end{bmatrix},$$

$$d) \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & -1 \end{bmatrix},$$

$$e) \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & \lambda & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \lambda & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & \lambda \end{bmatrix}, \lambda \in \mathbb{R}.$$

SOLUCIÓN:

PRÁCTICO 6

Soluciones

Álgebra II – Año 2024/1 – FAMAF

Completar.

PRÁCTICO 7

Soluciones

Álgebra II – Año 2024/1 – FAMAF

Completar.