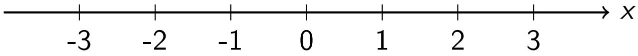
Álgebra/Álgebra II
Clase 1 - Vectores en $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$

FAMAF / UNC

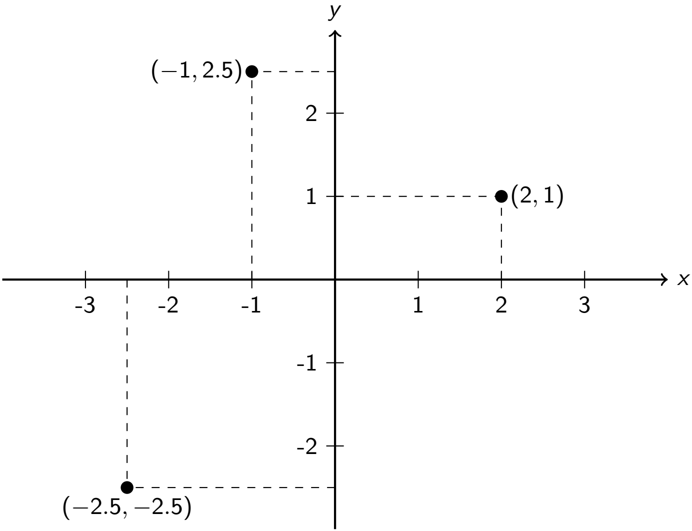
12 de marzo de 2024

Álgebra lineal en $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$

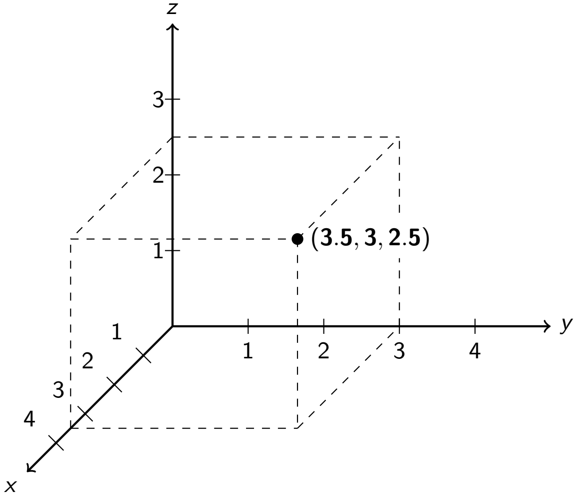
Sabemos que se puede usar un número para representar un punto en una línea, una vez que se selecciona la longitud de una unidad:



Se puede usar un par de números (x, y) para representar un punto en el plano:



Ahora observamos que un triple de números (x, y, z) se puede usar para representar un punto en el espacio:



En lugar de usar (x, y, z), también suele usarse la notación (x_1, x_2, x_3).

Definición

Sea $\mathbb{R}$ el cuerpo de los números reales, entonces

$$\mathbb{R}^n := \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) : x_i \in \mathbb{R}, 1 \leq i \leq n\}.$$

Todo v en $\mathbb{R}^n$ será llamado *punto*. Alternativamente, también podemos decir que v es un *vector en el origen* o simplemente un *vector*.

La mayoría de nuestros ejemplos tendrán lugar cuando $n = 2$ o $n = 3$.

Para ello usaremos el *sistema de coordenadas cartesianas* para representar los elementos de $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$.

Ejemplo

El ministerio de economía quiere representar la inversión anual en 6 ramas de la industria: 1. acero, 2. automotriz, 3. productos agrícolas, 4. productos químicos, 5. indumentaria y 6. transporte.

Se puede representar esta situación por una 6-upla donde cada coordenada representa la inversión anual de las industrias correspondientes.

Por ejemplo, si la 6-upla correspondiente al año 2019 es

$$(1200, 700, 600, 300, 900, 250),$$

significa que la industria del acero invirtió 1200 en ese año, la automotriz 700, etc.

Recordemos que a los números complejos se los puede representar en el plano y que la suma es *coordenada a coordenada.*

En el ejemplo de la diapositiva anterior veamos que también es natural definir la suma coordenada a coordenada.

Por ejemplo, si las inversiones en los años 2018 y 2019 fueron

$$\begin{array}{ccc} 2018 & \rightarrow & (1000, 800, 550, 300, 700, 200) \\ 2019 & \rightarrow & (1200, 700, 600, 300, 900, 250) \end{array}$$

Las inversiones totales, por rubro, en los dos años fueron:

$$\begin{aligned} &(1000, 800, 550, 300, 700, 200) + (1200, 700, 600, 300, 900, 250) = \\ &= (1000 + 1200, 800 + 700, 550 + 600, 300 + 300, 700 + 900, 200 + 250) \\ &= (2200, 1500, 1350, 600, 1600, 450). \end{aligned}$$

Suma en $\mathbb{R}^n$

Definición 1.1.2

Si $(x_1, \ldots, x_n), (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$, definimos

$$(x_1, \ldots, x_n) + (y_1, \ldots, y_n) := (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n),$$

es decir sumamos "coordenada a coordenada".

Ejemplo

En $\mathbb{R}^5$ tenemos que

$$\begin{aligned}(1, 2, 3, 4, 5) + (6, 7, 8, 9, 0) &= (1 + 6, 2 + 7, 3 + 8, 4 + 9, 5 + 0)\\ &= (7, 9, 11, 13, 5)\end{aligned}$$

Propiedades

La suma de vectores en $\mathbb{R}^n$ satisface que

1. Es asociativa:

$$u + (v + w) = (u + v) + w \quad \forall u, v, w \in \mathbb{R}^n$$

2. Es conmutativa:

$$v + w = w + v \quad \forall v, w \in \mathbb{R}^n$$

3. El vector $0 := (0, \ldots, 0)$, es el elemento *neutro*:

$$v + 0 = 0 + v = v \quad \forall v \in \mathbb{R}^n$$

4. El vector $-v := (-x_1, \ldots, -x_n)$ es el *opuesto* de $v = (x_1, \ldots, x_n)$:

$$v + (-v) = (-v) + v = 0.$$

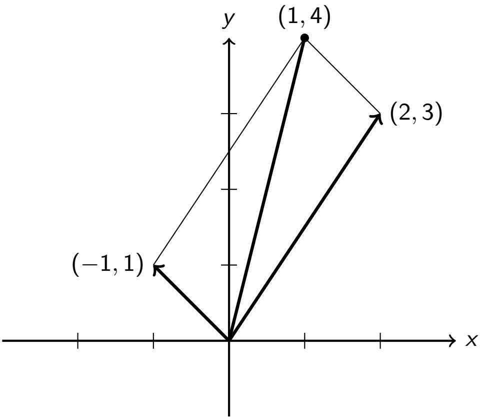
Estas propiedades son consecuencias de las propiedades análogas de la suma de números reales. Pues la suma de vectores es coordenada a coordenada y las coordenadas son números reales.

Por ejemplo, si $u = (u_1, ..., u_n)$, $v = (v_1, ..., v_n)$, $w = (w_1, ..., w_n)$

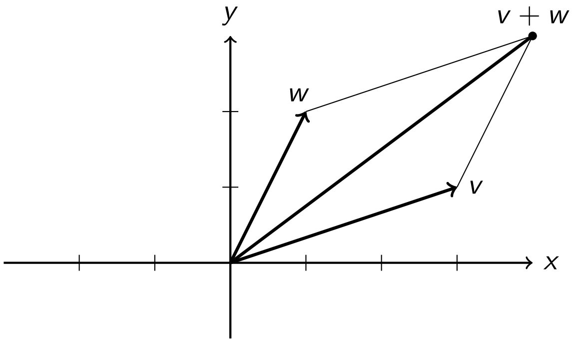
$$\begin{aligned}
u + (v + w) &= (u_1, ..., u_n) + \Big((v_1, ..., v_n) + (w_1, ..., w_n)\Big) \\
&= (u_1, ..., u_n) + (v_1 + w_1, ..., v_n + w_n) \\
&= \Big(u_1 + (v_1 + w_1), ..., u_n + (v_n + w_n)\Big) \\
&= \Big((u_1 + v_1) + w_1, ..., (u_n + v_n) + w_n\Big) \\
&= (u_1 + v_1, ..., u_n + v_n) + (w_1, ..., w_n) \\
&= \Big((u_1, ..., u_n) + (v_1, ..., v_n)\Big) + (w_1, ..., w_n) \\
&= (u + v) + w
\end{aligned}$$

Ley del paralelogramo

Sea $v = (2, 3)$ y $w = (-1, 1)$. Entonces $v + w = (1, 4)$. En el dibujo de los puntos involucrados aparece un *paralelogramo*

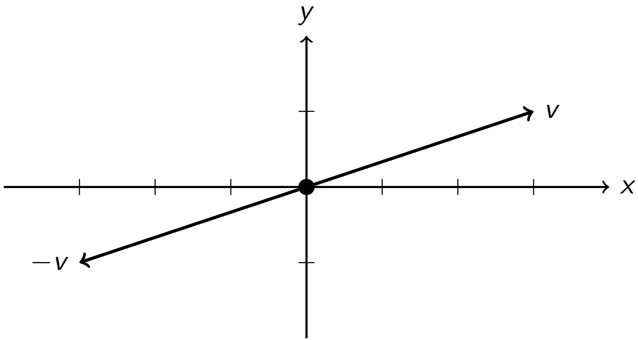


En general, la suma de dos vectores se puede representar geométricamente con la *ley del paralelogramo*:



El opuesto de un vector

El opuesto de un vector v en el plano es $-v$ y geométricamente es el vector reflejado respecto al centro:

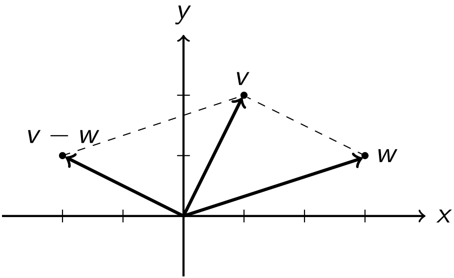


Resta de vectores

Dados dos vectores v, w en el plano, podemos representar la resta como la suma de v más el opuesto de w, es decir

$$v - w := v + (-w).$$

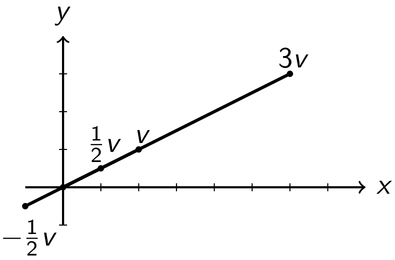
Como $(v - w) + w = v$, la ley del paralelogramo también nos sirve para visualizar la resta.



Producto de un vector por un escalar

Ejemplo

Sea $v = (1, 2)$, podemos representar los "múltiplos" de v en forma natural:



Definición

Sea $v = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ y $\lambda \in \mathbb{R}$, entonces

$$\lambda . v = (\lambda x_1, \ldots, \lambda x_n).$$

También denotamos a esta multiplicación por λv.

Ejemplo

Si $v = (2, -1.5)$ y $\lambda = 7$, entonces $\lambda v = (14, -10.5)$.

Propiedades

La multiplicación por escalares satisface que

1. Es asociativa

$$(\lambda\mu)v = \lambda(\mu v) \quad \forall v \in \mathbb{R}^n,\ \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

2. Es distributiva

$$\lambda(v + w) = \lambda v + \lambda w \quad \forall v, w \in \mathbb{R}^n,\ \lambda \in \mathbb{R}$$
$$(\lambda + \mu)v = \lambda v + \mu v \quad \forall v \in \mathbb{R}^n,\ \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

Al igual que las propiedades de la suma, estas también se deducen de las propiedades de los números.

Similarmente, multiplicando por (-1) obtenemos el opuesto:

$$(-1)v = -v \quad \forall v \in \mathbb{R}^n.$$

Definición

Sean $v_1, \dots, v_k$ vectores en $\mathbb{R}^n$. Una *combinación lineal de* $v_1, \dots, v_k$ es un vector de la forma

$$\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_k v_k,$$

donde $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ son números reales.

Ejemplo

En $\mathbb{R}^3$, sean los vectores $v_1 = (1, 2, 3)$, $v_2 = (-1, 3, 0)$, $v3 = (-1, -0, 1)$ y $v_4 = (-2, -1, -3)$ entonces

$$\begin{aligned} v &= 2v_1 - 3v_2 + 4v_3 - 5v_4 \\ &= 2(1, 2, 3) - 3(-1, 3, 0) + 4(-1, 0, 1) - 5(-2, -1, -3) \\ &= (2, 4, 6) + (3, -9, 0) + (-4, 0, 4) + (10, 5, 15) \\ &= (11, 0, 25), \end{aligned}$$

es una combinación lineal de v_1, v_2, v_3, v_4.

Definición

Dado $i \in \{1, ..., n\}$, se denota $e_i \in \mathbb{R}^n$ al vector cuyas coordenadas son todas 0 excepto la coordenada i que es un 1.

$$e_i = (0, ..., 1, ..., 0)$$

El conjunto $\{e_1, ..., e_n\}$ se llama *base canónica* de $\mathbb{R}^n$.

Ejemplo

En $\mathbb{R}^3$ los vectores son $e_1 = (1, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0)$, $e_3 = (0, 0, 1)$

Estos vectores jugarán un rol central en la materia.

Principalmente, por la siguiente propiedad.

Propiedad

Todo vector de $\mathbb{R}^n$ se escribe como combinación lineal de la base canónica. Explicitamente, si $(x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$ entonces

$$(x_1, ..., x_n) = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \cdots + x_n e_n$$

La demostración es trivial pero por ahora no la haremos.

Ejemplo

$$\begin{aligned}(1, 2, 3) &= (1, 0, 0) + (0, 2, 0) + (0, 0, 3)\\ &= 1(1, 0, 0) + 2(0, 1, 0) + 3(0, 0, 1)\\ &= 1e_1 + 2e_2 + 3e_3\end{aligned}$$