

Práctico 9

TRANSFORMACIONES LINEALES

Objetivos.

- Aprender a calcular coordenadas de vectores
- Aprender a la matriz de una transformación lineal
- Aprender a calcular la matriz de una transformación respecto a las bases canónicas.
- Aprender a calcular el núcleo y la imagen de una transformación.
- Aprender a verificar si una transformación lineal es inyectiva, sobreyectiva o un isomorfismo.
- Familiarizarse con el teorema sobre la dimensión del núcleo y la imagen.

Ejercicios. Algunos ejercicios tienen ayuda, las que hemos puesto al final del archivo para que los puedan pensar un poco antes de leerlas.

- Decidir si las siguientes funciones son transformaciones lineales entre los respectivos espacios vectoriales sobre \mathbb{R} .
 - La traza $\text{Tr} : \mathbb{R}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{R}$ (recordar Ejercicios 7, Práctico 3)
 - $T : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, $T(z) = \bar{z}$.
 - $T : \mathbb{R}[x] \rightarrow \mathbb{R}[x]$, $T(p(x)) = x p(x)$.
 - $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $T(x, y) = xy$
 - $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $T(x, y) = (x, y, 1)$
 - El determinante $\det : \mathbb{R}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{R}$
- Calcular la matriz con respecto a la base canónica de las siguientes transformaciones. Es decir, encontrar una matriz del tamaño apropiado de tal modo que las transformaciones sean iguales a multiplicar por dicha matriz. (Recordar Observación 3.1.2 de Garcia-Tiraboschi y la sección “Transformaciones de \mathbb{R}^n a \mathbb{R}^m ” de la clase teórica “Transformaciones lineales 1”)
 - $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, $T(x, y, z) = x + 2y + 3z$
 - $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $T(x, y, z) = (x + 2y + 3z, y - z)$
 - $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $T(x, y, z) = (x + 2y + 3z, y - z, 0)$
 - $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $T(x, y) = (x - y, x + y, 2x + 3y)$.
- Para cada una de las transformaciones lineales del ejercicio anterior describir implícitamente el núcleo y dar un conjunto de generadores de la imagen.
- Sea $T : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^5$ dada por $T(v) = Av$ donde A es la siguiente matriz

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

- Decir cuáles de los siguientes vectores están en el núcleo: $(1, 2, 3, 4)$, $(1, -1, -1, 2)$, $(1, 0, 2, 1)$.
- Decir cuáles de los siguientes vectores están en la imagen: $(2, 3, -1, 0, 1)$, $(1, 1, 0, 3, 1)$, $(1, 0, 2, 1, 0)$.
- Dar una base del núcleo y de la imagen.

-
- (d) Dar la dimensión del núcleo y de la imagen.
- (e) Describir el núcleo y la imagen implícitamente.
- (5) Sea $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ una transformación lineal tal que $T(e_1) = (1, 2, 3)$, $T(e_2) = (-1, 0, 5)$ y $T(e_3) = (-2, 3, 1)$. Calcular $T(2, 3, 8)$ y $T(0, 1, -1)$. Más generalmente, calcular $T(x, y, z)$ para todo $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ (es decir, que T quede definida de manera parecida a las del ejercicio (2)).
- (6) Encontrar en cada caso, cuando sea posible, una matriz $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ tal que la transformación lineal $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $T(v) = Av$, satisfaga las condiciones exigidas. Cuando no sea posible, explicar por qué no es posible.
- (a) $\dim \text{Im}(T) = 2$ y $\dim \text{Nu}(T) = 2$.
- (b) T inyectiva y $T(e_1) = (1, 1, 1)$, $T(e_2) = (1, 0, 1)$ y $T(e_3) = (0, 1, 0)$
- (c) T sobreyectiva y $T(e_1) = (1, 1, 1)$, $T(e_2) = (1, 0, 1)$ y $T(e_3) = (0, 1, 0)$
- (d) $T(e_1) = (1, 1, 0)$, $T(e_2) = (0, 1, 1)$ y $T(e_3) = (1, 0, 1)$
- (e) $(1, 1, 0) \in \text{Im}(T)$ y $(0, 1, 1) \in \text{Nu}(T)$
- (f) $\dim \text{Im}(T) = 1$
- (7) Sea V un espacio vectorial no nulo y $T : V \rightarrow \mathbb{R}$ probar que $T = 0$ ó T es sobreyectiva.

Más ejercicios.

- (8) Verificar, en cada una de las transformaciones lineales de este práctico, si son inyectivas, sobreyectivas o isomorfismos.
- (9) Sea $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}[x]$ una transformación lineal tal que $T(e_1) = x^2 + 2x + 3$, $T(e_2) = -x^2 + 5$ y $T(e_3) = -2x^2 + 3x + 1$. Calcular $T(2, 3, 8)$ y $T(0, 1, -1)$. Más generalmente, calcular $T(a, b, c)$ para todo $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$.
- (10) Sea V un espacio vectorial de dimensión finita y $T : V \rightarrow V$ una transformación lineal. Probar las siguientes afirmaciones.
- (a) $\text{Nu}(T) \subseteq \text{Nu}(T^2)$
- (b) $\text{Nu}(T) \neq \text{Im}(T)$ si $\dim(V)$ es impar.
- (11) Decidir si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justificar.
- (a) Existe una transformación lineal $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $T(1, 0, -1) = (1, -1)$ y $T(-1, 0, 1) = (1, 0)$.
- (b) Existe una transformación lineal $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $T(1, 0, -1) = (1, -1)$ y $T(-1, 0, 1) = (-1, 1)$.
- (c) Si $T : \mathbb{R}^9 \rightarrow \mathbb{R}^7$ es una transformación lineal, entonces $\dim \text{Nu}(T) \geq 2$.
- (d) Sea $T : V \rightarrow W$ una transformación lineal tal que $T(v_i) = w_i$, para $i = 1, \dots, n$. Si $\{w_1, \dots, w_n\}$ genera W , entonces $\{v_1, \dots, v_n\}$ genera V .
- (e) Existe una transformación lineal $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^5$ tal que los vectores $(1, 0, -1, 0, 0)$, $(1, 1, -1, 0, 0)$ y $(1, 0, -1, 2, 1)$ pertenecen a la imagen de T .
- (f) Existe una transformación lineal sobreyectiva $T : \mathbb{R}^5 \rightarrow \mathbb{R}^4$ tal que los vectores $(1, 0, 1, -1, 0)$ y $(0, 0, 0, -1, 2)$ pertenecen al núcleo de T .