Álgebra/Álgebra II
Clase 08 - Álgebra de matrices 3

FAMAF / UNC

11 de abril de 2024

Resumen

En esta clase veremos:

- toda matriz elemental es invertible.
- Toda matriz invertible es producto de matrices elementales.
- Estudiaremos la forma de calcular la inversa de una matriz (cuando existe) con operaciones elementales.
- Finalmente, probarémos que los sistemas de ecuaciones cuya matriz es invertible tienen una única solución.

El tema de esta clase está contenido de la sección la sección 3.4 del apunte de clase "Álgebra II / Álgebra - Notas del teórico".

Teorema

Una matriz elemental es invertible.

Demostración

Sea E la matriz elemental que se obtiene a partir de Id_n por la operación elemental e. Sea e' la operación elemental inversa y $E' = e'(\mathrm{Id}_n)$. Entonces

$$
\begin{aligned}
EE' &= e(e'(\mathrm{Id}_n)) = \mathrm{Id}_n, \\
E'E &= e'(e(\mathrm{Id}_n)) = \mathrm{Id}_n\,.
\end{aligned}
$$

Luego $E' = E^{-1}$. $\square$

Es fácil encontrar explícitamente la matriz inversa de una matríz elemental, por ejemplo, en el caso 2×2 tenemos:

1. Si $c \neq 0$,

$$\begin{bmatrix} c & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1/c & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ y } \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & c \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/c \end{bmatrix},$$

2. si $c \in \mathbb{K}$, ,

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ c & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -c & 1 \end{bmatrix} \text{ y } \begin{bmatrix} 1 & c \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -c \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

3. Finalmente,

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Lema

Sea $R \in \mathbb{K}^{n\times n}$. *Entonces*

$$R \text{ es MERF} \wedge R \text{ es invertible} \quad \Rightarrow \quad R = \mathrm{Id}_n\,.$$

Demostración

Supongamos que la $r_{11} = 0$. Como R es MERF $\Rightarrow C_1 = 0$.

Sea $t \neq 0$ en $\mathbb{K}$. Como $C_1 = 0$,

$$R\begin{bmatrix} t \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & * & \cdots & * \\ 0 & * & \cdots & * \\ \vdots & & & \\ 0 & * & \cdots & * \end{bmatrix}\begin{bmatrix} t \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

Luego, como R tiene inversa:

$$\begin{bmatrix} t \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = \mathrm{Id} \begin{bmatrix} t \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = R^{-1}R \begin{bmatrix} t \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = R^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

Esto nos dice que $t = 0$, lo cual es absurdo pues habíamos partido de $t \neq 0$. Por lo tanto

$$R = \begin{bmatrix} 1 & * & \cdots & * \\ 0 & * & \cdots & * \\ \vdots & & & \\ 0 & * & \cdots & * \end{bmatrix}.$$

Por inducción podemos probar que $R = \mathrm{Id}_n$. □

Otra demostración del lema de la página 5

Demostración

Debemos demostrar que

$$R \text{ es MERF} \;\wedge\; R \text{ es invertible} \quad \Rightarrow \quad R = \mathrm{Id}_n\,.$$

Si R es MERF y si la fila i no es 0, el 1 principal de la fila i se encuentra en la columna j con $j \geq i$.

Esto se puede demostrar por inducción:

- La afirmación para la fila 1 es trivial, y
- si eliminamos la fila 1 y la columna 1 de R, nos queda una matriz $(n-1)\times(n-1)$ que es MERF y aplicando la hipótesis inductiva a la matriz resultante, obtenemos el resultado.

Ahora, supongamos que R tiene un 1 principal en la fila i y columna j con $j > i$.

Entonces en la fila $i+1$ el 1 principal está en la posición j' con $j' > j > i$ y por lo tanto $j' > i+1$.

Si seguimos este razonamiento hasta la última fila, llegamos a la conclusión que el 1 principal de fila n está en la columna j'' con $j'' > n$, lo cual es absurdo.

El absurdo vino de suponer de que en la columna i el 1 principal no está en la columna i. Por lo tanto todos los 1 principales están en la diagonal.

Como R no puede tener una fila de ceros, la diagonal de R son todos 1 principales. Por lo tanto $R = \mathrm{Id}_n$. $\square$

Teorema

Sea A matriz $n \times n$ con coeficientes en $\mathbb{K}$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes

$i)$ *A es invertible,*

$ii)$ *A es equivalente por filas a Id_n,*

$iii)$ *A es producto de matrices elementales.*

Demostración

$i) \Rightarrow ii)$ Sea R una MERF que se obtiene de a A.

- Existen $E_1, \dots, E_k$ matrices elementales tal que $E_1 \dots E_k A = R$.
- Como $E_1, \dots, E_k$, A invertibles $\Rightarrow E_1 \dots E_k A = R$ invertible.
- R es MERF e invertible $\Rightarrow R = \mathrm{Id}_n$.
- A es equivalente por filas a $R = \mathrm{Id}_n$.

ii) $\Rightarrow$ *iii*)

- A es equivalente por filas a $\mathrm{Id}_n \Rightarrow$ existen $E_1, \ldots, E_k$ matrices elementales tal que $E_1 \cdots E_k A = \mathrm{Id}_n$.
- Sean $F_1, \ldots, F_k$ las inversas de $E_1, \ldots, E_k$, respectivamente $\Rightarrow$

$$(E_1 \cdots E_k)^{-1} = E_k^{-1} \cdots E_1^{-1} = F_k \cdots F_1,$$

  luego

$$F_k \cdots F_1 E_1 \cdots E_k A = \mathrm{Id}_n A = A.$$

- Como $E_1 \cdots E_k A = \mathrm{Id}_n \Rightarrow F_k \cdots F_1 = F_k \cdots F_1 \mathrm{Id}_n = A$. Es decir

$$A = F_k \cdots F_1.$$

iii) $\Rightarrow$ *i*) Sea $A = E_1 E_2, \ldots, E_k$ donde E_i es una matriz elemental $(i = 1, \ldots, k)$. Como cada E_i es invertible, el producto de ellos es invertible, por lo tanto A es invertible. $\square$

Corolario

Sean A y B matrices $m \times n$. Entonces, B es equivalente por filas a A si y sólo si existe matriz invertible P de orden $m \times m$ tal que $B = PA$.

Demostración

($\Rightarrow$)

- B es equivalente por filas a $A \Rightarrow \exists\, E_1, \cdots, E_k$ elementales tal que $B = E_1 \dots E_k A$.
- Sea $P = E_1 \dots E_k$, luego $B = PA$.
- Cada E_i es invertible $\Rightarrow P = E_1 \dots E_k$ es invertible.

($\Leftarrow$)

- Sea P matriz invertible tal que $B = PA$.
- Como P es invertible $\Rightarrow P = E_1 \dots E_k$, producto de matrices elementales.
- Por lo tanto,$B = PA = E_1 \dots E_k A$ es equivalente por filas a A. $\square$

Corolario

Sea A matriz $n \times n$. Sean $e_1, \dots, e_k$ operaciones elementales por filas tal que

$$e_1(e_2(\cdots(e_k(A))\cdots)) = \operatorname{Id}_n\,. \tag{*}$$

Entonces, A invertible y

$$e_1(e_2(\cdots(e_k(\operatorname{Id}_n))\cdots)) = A^{-1}. \tag{**}$$

Demostración

- (*) $\Rightarrow A$ es equivalente por filas a $\operatorname{Id}_n \Rightarrow A$ es invertible.
- Sean las matrices elementales $E_i = e_i(\operatorname{Id}_n)$ para $i = 1, \dots, k$, entonces $E_1 E_2 \dots E_k A = \operatorname{Id}_n$, por lo tanto,

$$\begin{aligned} E_1 E_2 \dots E_k A A^{-1} = \operatorname{Id}_n A^{-1} \quad &\Leftrightarrow \\ E_1 E_2 \dots E_k \operatorname{Id}_n = A^{-1} \quad &\Leftrightarrow \\ e_1(e_2(\cdots(e_k(\operatorname{Id}_n))\cdots)) = A^{-1}. \end{aligned}$$

□

Este último corolario nos provee un método sencillo para calcular la inversa de una matriz cuadrada A invertible.

1. Aplicando operaciones elementales $e_1, \ldots, e_k$ encontramos $R = \mathrm{Id}_n$ la MERF de A.
2. Aplicando las operaciones elementales $e_1, \ldots, e_k$ a Id_n, obtenemos A^{-1} la inversa de A.

Para facilitar el cálculo es conveniente comenzar con A e Id_n e ir aplicando paralelamente las operaciones elementales por fila.

En las próxima filminas veremos un ejemplo.

Ejemplo

Calculemos la inversa (si tiene) de

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Solución

Tratararemos de reducir por filas a A y todas las operaciones elementales las haremos en paralelo partiendo de la matriz identidad:

$$[A|\,\mathrm{Id}] = \left[\begin{array}{cc|cc} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{F_1 \leftrightarrow F_2} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 3 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{F_2 - 2F_1} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & -7 & 1 & -2 \end{array}\right] \xrightarrow{F_2/(-7)} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1/7 & 2/7 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{F_1 - 3F_2} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 3/7 & 1/7 \\ 0 & 1 & -1/7 & 2/7 \end{array}\right].$$

Luego, A es invertible y su inversa es

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 3/7 & 1/7 \\ -1/7 & 2/7 \end{bmatrix}.$$

$\square$

- El lector desconfiado podrá comprobar, haciendo el producto de matrices, que $AA^{-1} = A^{-1}A = \mathrm{Id}_2$.

Teorema

Sea A matriz $n \times n$ con coeficientes en $\mathbb{K}$. Entonces, las siguientes afirmaciones son equivalentes.

$i)$ *A es invertible.*

$ii)$ *El sistema $AX = Y$ tiene una única solución para toda matriz Y de orden $n \times 1$.*

$iii)$ *El sistema homogéneo $AX = 0$ tiene una única solución ($X = 0$).*

Demostración

$i) \Rightarrow ii)$ Sea X_0 solución del sistema $AX = Y$, luego

$$AX_0 = Y \quad \Rightarrow \quad A^{-1}AX_0 = A^{-1}Y \quad \Rightarrow \quad X_0 = A^{-1}Y.$$

Es decir, X_0 es único (siempre igual a $A^{-1}Y$).

ii) $\Rightarrow$ *iii*) Es trivial, tomando $Y = 0$.

iii) $\Rightarrow$ *i*) La hipótesis es $AX = 0 \Rightarrow X = 0$.

- Sea R la MERF equivalente a A.
- Si R tiene una filas nulas hay variables que no corresponden a 1's principales, luego esas variables son libres. Por lo tanto, el sistema $AX = 0$ tiene más de una solución, contradiciendo la hipótesis.
- Por lo tanto, R no tiene filas nulas.
- Como R es una matriz cuadrada y es MERF, tenemos que $R = \mathrm{Id}_n$.
- Luego A es equivalente por filas a $\mathrm{Id}_n \Rightarrow A$ es invertible.

$\square$

Corolario

Sea A una matriz $n \times n$ con coeficientes en $\mathbb{K}$.

1. *Si existe B matriz $n \times n$ tal que $BA = \mathrm{Id}_n$, entonces $AB = \mathrm{Id}_n$. (A tiene inversa a izquierda $\Rightarrow$ es invertible).*
2. *Si existe C matriz $n \times n$ tal que $AC = \mathrm{Id}_n$, entonces $CA = \mathrm{Id}_n$. (A tiene inversa a derecha $\Rightarrow$ es invertible).*

Demostración

1. Sea B tal que $BA = \mathrm{Id}_n$. El sistema $AX = 0$ tiene una única solución, pues

$$AX_0 = 0 \quad \Rightarrow \quad BAX_0 = B0 = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathrm{Id}_n X_0 = 0 \quad \Rightarrow \quad X_0 = 0.$$

Luego, A es invertible (y su inversa es B).

2. Sea C tal que $AC = \mathrm{Id}_n$. Luego A es la inversa a izquierda de C. Por lo que demostramos más arriba, C es invertible y su inversa es A, es decir $AC = \mathrm{Id}_n$ y $CA = \mathrm{Id}_n$, luego C es invertible. $\square$

Elsiguiente teorema reune algunos resultados ya demostrados.

Teorema

Sea $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes

1. A es invertible,
2. A es equivalente por fila a Id_n,
3. el sistema $AX = 0$ tiene solución única (la trivial),
4. el sistema $AX = Y$ tiene solución única para todo $Y \in \mathbb{K}^n$ (la solución es $A^{-1}Y$),
5. A es el producto de matrices elementales,
6. existe B matriz $n \times n$ tal que $BA = \mathrm{Id}$,
7. existe C matriz $n \times n$ tal que $AC = \mathrm{Id}$,
8. $\det(A) \neq 0$ (esto lo veremos en próximas clases).

Matrices invertibles 2×2

Dados $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, determinaremos cuando la matriz $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ es invertible y en ese caso, cual es su inversa.

Solución

Para poder aplicar el método de Gauss-Jordan debemos analizar dos casos: $a \neq 0$ y $a = 0$.

Caso 1. $a \neq 0$.
Como $a \neq 0$, entonces

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \xrightarrow{F_1/a} \begin{bmatrix} 1 & \dfrac{b}{a} \\ c & d \end{bmatrix} \xrightarrow{F_2 - cF_1} \begin{bmatrix} 1 & \dfrac{b}{a} \\ 0 & d - c\dfrac{b}{a} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \dfrac{b}{a} \\ 0 & \dfrac{ad - bc}{a} \end{bmatrix}$$

Caso 1.1 $a \neq 0$ y $ad - bc = 0$.
Si $ad - bc = 0$, entonces la matriz se encuentra reducida por filas y la última fila es 0, luego en ese caso no es invertible.

Caso 1.2 $a \neq 0$ y $ad - bc \neq 0$.
Entonces

$$\begin{bmatrix} 1 & \dfrac{b}{a} \\ 0 & \dfrac{ad-bc}{a} \end{bmatrix} \overset{a/(ad-bc)\,F_2}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & \dfrac{b}{a} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \overset{F1-b/a\,F_2}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Luego, en este caso $a \neq 0$, $ad - bc \neq 0$ hemos reducido por filas la matriz A a la identidad y por lo tanto A es invertible.

Además, podemos encontrar A^{-1} aplicando a Id_2 las mismas operaciones elementales que reducían A a la identidad:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{F_1/a} \begin{bmatrix} \frac{1}{a} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{F_2 - cF_1} \begin{bmatrix} \frac{1}{a} & 0 \\ -\frac{c}{a} & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{a/(ad-bc)\, F_2} \begin{bmatrix} \frac{1}{a} & 0 \\ -\frac{c}{ad-bc} & \frac{a}{ad-bc} \end{bmatrix} \xrightarrow{F1 - b/a\, F_2}$$

$$\longrightarrow \begin{bmatrix} \frac{1}{a} + \frac{bc}{a(ad-bc)} & -\frac{b}{ad-bc} \\ -\frac{c}{ad-bc} & \frac{a}{ad-bc} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{d}{ad-bc} & -\frac{b}{ad-bc} \\ -\frac{c}{ad-bc} & \frac{a}{ad-bc} \end{bmatrix}.$$

Concluyendo, en el caso $a \neq 0$, $ad - bc \neq 0$, A es invertible y

$$A^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}. \tag{1}$$

Caso 2. $a = 0$.

Si $c = 0$ o $b = 0$, entonces la matriz no es invertible, pues en ambos casos nos quedan matrices que no pueden ser reducidas por fila a la identidad.

Luego la matriz puede ser invertible si $bc \neq 0$ y en este caso la reducción por filas es:

$$\begin{bmatrix} 0 & b \\ c & d \end{bmatrix} \xrightarrow{F_1 \leftrightarrow F_2} \begin{bmatrix} c & d \\ 0 & b \end{bmatrix} \xrightarrow{F_1/c} \begin{bmatrix} 1 & \dfrac{d}{c} \\ 0 & b \end{bmatrix} \xrightarrow{F_2/b} \begin{bmatrix} 1 & \dfrac{d}{c} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{F_1 - d/cF_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Luego A es invertible y aplicando estas mismas operaciones elementales a la identidad obtenemos la inversa:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{F_1 \leftrightarrow F_2} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{F_1/c} \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{c} \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{F_2/b} \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{c} \\ \frac{1}{b} & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{F_1 - d/cF_2} \begin{bmatrix} -\frac{d}{bc} & \frac{1}{c} \\ \frac{1}{b} & 0 \end{bmatrix}.$$

Es decir, en el caso que $a = 0$, entonces A invertible si $bc \neq 0$ y su inversa es

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{d}{bc} & \frac{1}{c} \\ \frac{1}{b} & 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{-bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & 0 \end{bmatrix}. \tag{2}$$

Es decir, la expresión de la inversa es igual a (1) (considerando que $a = 0$).

Reuniendo los dos casos: de (1) y (2) se deduce:

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \text{ es invertible } \quad \Leftrightarrow \quad ad - bc \neq 0,$$

y en ese caso, su inversa viene dada por

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

Observación

Definiremos $\det(A) := ad - bc$. Luego,

- A invertible si y solo si $\det(A) \neq 0$.
- Veremos en las próximas clases que el uso de determinantes permitirá establecer la generalización de este resultado para matrices $n \times n$ con $n \geq 1$.

Terminaremos la clase con un cálculo de matriz inversa.

Ejemplo

Calcular la inversa (si tiene) de la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}.$$

Solución

$$\left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{F_2-3F_1} \left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & -2 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{F_2 \leftrightarrow F_3}$$

$$\longrightarrow \left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & -2 & -3 & 1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{F_1+F_2} \left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & -2 & -3 & 1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{F_3-5F_2}$$

$$\longrightarrow \left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 8 & -3 & 1 & -5 \end{array}\right] \xrightarrow{F_3/8} \left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{3}{8} & \frac{1}{8} & -\frac{5}{8} \end{array}\right] \xrightarrow{F_2+2F_3}$$

$$\longrightarrow \left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{3}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{3}{8} & \frac{1}{8} & -\frac{5}{8} \end{array}\right].$$

Por lo tanto

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -\frac{3}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{3}{8} & \frac{1}{8} & -\frac{5}{8} \end{bmatrix}$$

$\square$