Práctico 1
Álgebra II – Año 2024/1
FAMAF

SOLUCIONES

Vectores y producto escalar.

(1) Dados $v = (-1, 2, 0)$, $w = (2, -3, -1)$ y $u = (1, -1, 1)$, calcular:
a) $2v + 3w - 5u$,
b) $5(v + w)$,
c) $5v + 5w$ (y verificar que es igual al vector de arriba).

SOLUCIÓN:
a) $2v + 3w - 5u = 2 \cdot (-1, 2, 0) + 3 \cdot (2, -3, -1) - 5 \cdot (1, -1, 1)$
$= (-2, 4, 0) + (6, -9, -3) + (-5, 5, -5) = \boxed{(-1, 0, -8)}$
b) $5(v + w) = 5 \cdot ((-1, 2, 0) + (2, -3, -1)) = 5 \cdot (1, -1, -1) = \boxed{(5, -5, -5)}$
c) $5v + 5w = 5 \cdot (-1, 2, 0) + 5 \cdot (2, -3, -1) = (-5, 10, 0) + (10, -15, -5) = \boxed{(5, -5, -5)}$

(2) Calcular los siguientes productos escalares.
a) $\langle(-1, 2, -0), (2, -3, -1)\rangle$,
b) $\langle(4, -1), (-1, 2)\rangle$.

SOLUCIÓN:
a) $\langle(-1, 2, -0), (2, -3, -1)\rangle = (-1)\cdot 2+2\cdot(-3)+0\cdot(-1) = -2+(-6)+0 = \boxed{-8}$
b) $\langle(4, -1), (-1, 2)\rangle = 4 \cdot (-1) + (-1) \cdot 2 = -4 + (-2) = \boxed{-6}$

(3) Dados $v = (-1, 2, 0)$, $w = (2, -3, -1)$ y $u = (1, -1, 1)$, verificar que:

$$\langle 2v + 3w, -u\rangle = -2\langle v, u\rangle - 3\langle w, u\rangle$$

SOLUCIÓN: Calculamos ambos miembros por separado.

Miembro izquierdo: $\langle 2v+3w, -u\rangle = \langle 2\cdot(-1, 2, 0)+3\cdot(2, -3, -1), -(1, -1, 1)\rangle$
$= \langle(-2, 4, 0) + (6, -9, -3), (-1, 1, -1)\rangle = \langle(4, -5, -3), (-1, 1, -1)\rangle$
$= 4 \cdot (-1) + (-5) \cdot 1 + (-3) \cdot (-1) = -4 + (-5) + 3 = \boxed{-6}$

Miembro derecho: $-2\langle v, u\rangle - 3\langle w, u\rangle = -2\langle(-1, 2, 0), (1, -1, 1)\rangle - 3\langle(2, -3, -1), (1, -1, 1)\rangle$
$= -2 \cdot (-1 \cdot 1 + 2 \cdot (-1) + 0 \cdot 1) - 3 \cdot (2 \cdot 1 + (-3) \cdot (-1) + (-1) \cdot 1)$
$= -2 \cdot (-1 + (-2) + 0) - 3 \cdot (2 + 3 + (-1)) = -2 \cdot (-3) - 3 \cdot 4 = 6 - 12 = \boxed{-6}$

(4) Probar que
a) $(2, 3, -1)$ y $(1, -2, -4)$ son ortogonales.

b) $(2,-1)$ y $(1,2)$ son ortogonales. Dibujar en el plano.

Solución: Calculamos su producto interno para ver si es nulo.
a) $\langle(2,3,-1),(1,-2,-4)\rangle = 2\cdot 1 + 3\cdot(-2) + (-1)\cdot(-4) = 2 + (-6) + 4 = \boxed{0}$
b) $\langle(2,-1),(1,2)\rangle = 2\cdot 1 + (-1)\cdot 2 = 2 - 2 = \boxed{0}$

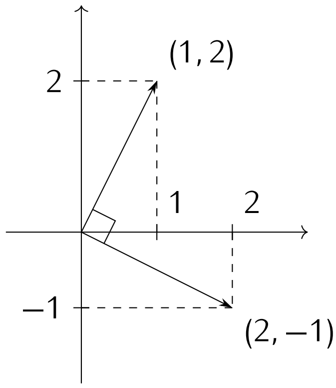


Figure 1. Ejercicio 4.b

(5) Encontrar
a) un vector no nulo ortogonal a $(3,-4)$,
b) un vector no nulo ortogonal a $(2,-1,4)$,
c) un vector no nulo ortogonal a $(2,-1,4)$ y $(0,1,-1)$,

Solución:
a) $(4,3)$ es un vector no nulo ortogonal a $(3,-4)$, pues:
$\langle(3,-4),(4,3)\rangle = 3\cdot 4 + (-4)\cdot 3 = 12 - 12 = \boxed{0}$
b) $(1,2,0)$ es un vector no nulo ortogonal a $(2,-1,4)$, pues:
$\langle(2,-1,4),(1,2,0)\rangle = 2\cdot 1 + (-1)\cdot 2 + 4\cdot 0 = 2 - 2 + 0 = \boxed{0}$
c) Primero notar que cualquier vector de la pinta (a,b,b) será ortogonal a $(0,1,-1)$, pues:
$\langle(0,1,-1),(a,b,b)\rangle = 0\cdot a + 1\cdot b + (-1)\cdot b = 0 + b - b = \boxed{0}$
Si ahora multiplicamos nuestro candidato (a,b,b) con $(2,-1,4)$ tenemos:
$\langle(2,-1,4),(a,b,b)\rangle = 2\cdot a + (-1)\cdot b + 4\cdot b = \boxed{2a+3b}$
Luego, si elegimos por ejemplo $a = -3$ y $b = 2$ vamos a tener a nuestro candidato ortogonal a ambos vectores. Es decir, $(-3,2,2)$ cumple lo requerido.

(6) Encontrar la longitud de los vectores.
(a) $(2,3)$, (b) (t,t^2), (c) $(\cos\phi, \operatorname{sen}\phi)$.

Solución:
a) $||(2,3)|| = \sqrt{2^2+3^2} = \sqrt{4+9} = \boxed{\sqrt{13}}$
b) $||(t,t^2)|| = \sqrt{t^2+(t^2)^2} = \sqrt{t^2+t^4} = \boxed{|t|\sqrt{1+t^2}}$
c) $||(\cos\phi,\operatorname{sen}\phi)|| = \sqrt{\cos^2\phi + \operatorname{sen}^2\phi} = \sqrt{1} = \boxed{1}$

(7) Calcular $\langle v, w\rangle$ y el ángulo entre v y w para los siguientes vectores.

(a) $v = (2, 2), w = (1, 0)$, (b) $v = (-5, 3, 1), w = (2, -4, -7)$.

Solución: Para encontrar el ángulo se deben calcular además las normas de los vectores:

a) $\langle v, w\rangle = \langle(2, 2), (1, 0)\rangle = 2 \cdot 1 + 1 \cdot 0 = 2 + 0 = \boxed{2}$
$||v|| = ||(2, 2)|| = \sqrt{2^2 + 2^2} = \sqrt{4 + 4} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$
$||w|| = ||(1, 0)|| = \sqrt{1^2 + 0^2} = \sqrt{1 + 0} = \sqrt{1} = 1$
$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{\langle v, w\rangle}{||v||\,||w||}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{2}{2\sqrt{2}\cdot 1}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \boxed{45°}$

b) $\langle v, w\rangle = \langle(-5, 3, 1), (2, -4, -7)\rangle = -5\cdot 2+3\cdot(-4)+1\cdot(-7) = -10-12-7 = \boxed{-29}$
$||v|| = ||(-5, 3, 1)|| = \sqrt{(-5)^2 + 3^2 + 1^2} = \sqrt{25 + 9 + 1} = \sqrt{35}$
$||w|| = ||(2, -4, -7)|| = \sqrt{2^2 + (-4)^2 + (-7)^2} = \sqrt{4 + 16 + 49} = \sqrt{69}$
$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{\langle v, w\rangle}{||v||\,||w||}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{-29}{\sqrt{35}\sqrt{69}}\right) = \boxed{126°9'55.57''}$

(8) Recordar los vectores e_1, e_2 y e_3 dados en la página 12 del apunte. Sea $v = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$. Verificar que

$$v = x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3 = \langle v, e_1\rangle e_1 + \langle v, e_2\rangle e_2 + \langle v, e_3\rangle e_3.$$

Solución: Podemos empezar desde el miembro de la derecha, pasar por el del medio y llegar al de la izquierda aplicando las definiciones y propiedades conocidas:

$$\begin{aligned}
&\langle v, e_1\rangle e_1 + \langle v, e_2\rangle e_2 + \langle v, e_3\rangle e_3 = \\
&= \langle(x_1, x_2, x_3), (1, 0, 0)\rangle e_1 + \langle(x_1, x_2, x_3), (0, 1, 0)\rangle e_2 + \langle(x_1, x_2, x_3), (0, 0, 1)\rangle e_3 \\
&= (x_1 \cdot 1 + x_2 \cdot 0 + x_3 \cdot 0)e_1 + (x_1 \cdot 0 + x_2 \cdot 1 + x_3 \cdot 0)e_2 + (x_1 \cdot 0 + x_2 \cdot 0 + x_3 \cdot 1)e_3 \\
&= (x_1 + 0 + 0)e_1 + (0 + x_2 + 0)e_2 + (0 + 0 + x_3)e_3 = \boxed{x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3 = x_1(1, 0, 0) + x_2(0, 1, 0) + x_3(0, 0, 1) = \\
&= (x_1 \cdot 1, x_1 \cdot 0, x_1 \cdot 0) + (x_2 \cdot 0, x_2 \cdot 1, x_2 \cdot 0) + (x_3 \cdot 0, x_3 \cdot 0, x_3 \cdot 1) \\
&= (x_1, 0, 0) + (0, x_2, 0) + (0, 0, x_3) = (x_1 + 0 + 0, 0 + x_2 + 0, 0 + 0 + x_3) = (x_1, x_2, x_3) = \boxed{v}
\end{aligned}$$

(9) Probar, usando sólo las propiedades **P1**, **P2**, y **P3** del producto escalar, que dados $v, w, u \in \mathbb{R}^n$ y $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$,

a) se cumple:

$$\langle\lambda_1v + \lambda_2w, u\rangle = \lambda_1\langle v, u\rangle + \lambda_2\langle w, u\rangle.$$

b) Si $\langle v, w\rangle = 0$, es decir si v y w son ortogonales, entonces

$$\langle\lambda_1v + \lambda_2w, \lambda_1v + \lambda_2w\rangle = \lambda_1^2\langle v, v\rangle + \lambda_2^2\langle w, w\rangle.$$

Solución:

a) $\langle\lambda_1v + \lambda_2w, u\rangle \overset{\textbf{P2}}{=} \langle u, \lambda_1v\rangle + \langle u, \lambda_2w\rangle \overset{\textbf{P3}}{=} \lambda_1\langle u, v\rangle + \lambda_2\langle u, w\rangle \overset{\textbf{P1}}{=} \lambda_1\langle v, u\rangle + \lambda_2\langle w, u\rangle$

b) $\langle \lambda_1 v + \lambda_2 w, \lambda_1 v + \lambda_2 w\rangle \overset{\text{P2}}{=} \langle \lambda_1 v + \lambda_2 w, \lambda_1 v\rangle + \langle \lambda_1 v + \lambda_2 w, \lambda_2 w\rangle \overset{\text{P2}}{=}$
$\overset{\text{P2}}{=} \langle \lambda_1 v, \lambda_1 v\rangle + \langle \lambda_1 v, \lambda_2 w\rangle + \langle \lambda_2 w, \lambda_1 v\rangle + \langle \lambda_2 w, \lambda_2 w\rangle \overset{\text{P3}}{=}$
$\overset{\text{P3}}{=} \lambda_1^2\langle v, v\rangle + \lambda_1\lambda_2\langle v, w\rangle + \lambda_2\lambda_1\langle w, v\rangle + \lambda_2^2\langle w, w\rangle \overset{\text{HIP}}{=} \lambda_1^2\langle v, v\rangle + \lambda_2^2\langle w, w\rangle$

En el último paso se utilizó la hipótesis $\langle v, w\rangle = 0$.

(10) Dados $v, w \in \mathbb{R}^n$, probar que si $\langle v, w\rangle = 0$, es decir si v y w son ortogonales, entonces

$$||v + w||^2 = ||v||^2 + ||w||^2.$$

¿Cuál es el nombre con que se conoce este resultado en $\mathbb{R}^2$?

Solución: Vamos a usar la definición de norma y el inciso b) del ejercicio anterior, tomando $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$:

$$||v + w||^2 \overset{def}{=} \langle v + w, v + w\rangle \overset{9.b)}{=} \langle v, v\rangle + \langle w, w\rangle \overset{def}{=} ||v||^2 + ||w||^2 \qquad \square$$

En $\mathbb{R}^2$ esta igualdad es el *Teorema de Pitágoras*.

(11) @ Sean $v, w \in \mathbb{R}^2$, probar usando solo la definición explícita del producto escalar en $\mathbb{R}^2$ que

$$|\langle v, w\rangle| \leq ||v||\,||w|| \qquad \text{(Desigualdad de Schwarz).}$$

Solución: Vamos a escribir $v = (v_1, v_2)$ y $w = (w_1, w_2)$. Veamos la pinta del cuadrado del lado izquierdo:

$$\langle v, w\rangle^2 = \langle (v_1, v_2), (w_1, w_2)\rangle^2 = (v_1 w_1 + v_2 w_2)^2 \tag{0.1}$$

Ahora comenzamos por el cuadrado del lado derecho con el objetivo de llegar a (0.1):

$$||v||^2||w||^2 = (v_1^2 + v_2^2)(w_1^2 + w_2^2) = (v_1 w_1)^2 + (v_1 w_2)^2 + (v_2 w_1)^2 + (v_2 w_2)^2$$

Mirando el primer y último término tenemos que si completamos ese cuadrado obtendríamos (0.1). Sumamos y restamos $2(v_1 w_1)(v_2 w_2)$ y agrupamos:

$||v||^2||w||^2 = (v_1 w_1)^2 + (v_1 w_2)^2 + (v_2 w_1)^2 + (v_2 w_2)^2 + 2(v_1 w_1)(v_2 w_2) - 2(v_1 w_1)(v_2 w_2) =$

$$= [(v_1 w_1)^2 + 2(v_1 w_1)(v_2 w_2) + (v_2 w_2)^2] + [(v_2 w_1)^2 - 2 v_1 w_1 v_2 w_2 + (v_1 w_2)^2]$$

El segundo grupo de términos también forma un cuadrado perfecto. Escribimos ambos como cuadrados y acotamos:

$$||v||^2||w||^2 = \underbrace{(v_1w_1 + v_2w_2)^2}_{=\langle v,w\rangle^2} + \underbrace{(v_2w_1 - v_1w_2)^2}_{\geq 0} \geq \langle v, w\rangle^2 \qquad \square$$

Rectas y planos.

(12) En cada uno de los siguientes casos determinar si los vectores $\overrightarrow{vw}$ y $\overrightarrow{xy}$ son equivalentes y/o paralelos.

a) $v = (1, -1)$, $w = (4, 3)$, $x = (-1, 5)$, $y = (5, 2)$.

b) $v = (1, -1, 5)$, $w = (-2, 3, -4)$, $x = (3, 1, 1)$, $y = (-3, 9, -17)$.

Solución: Calulamos las diferencias correspondientes y las analizamos:

a) $w - v = (4, 3) - (1, -1) = (4 - 1, 3 - (-1)) = (3, 4)$
$y - x = (5, 2) - (-1, 5) = (5 - (-1), 2 - 5) = (6, -3)$
No son equivalentes ni paralelos.

b) $w - v = (-2, 3, -4) - (1, -1, 5) = (-2 - 1, 3 - (-1), -4 - 5) = (-3, 4, -9)$
$y - x = (-3, 9, -17) - (3, 1, 1) = (-3 - 3, 9 - 1, -17 - 1) = (-6, 8, -18)$.
No son equivalente pero si paralelos. Tomando $\lambda = 2$ se tiene que $y - x = \lambda(w - v)$.

(13) Sea R_1 la recta que pasa por $p_1 = (2, 0)$ y es ortogonal a $(1, 3)$.

a) Dar la descripción paramétrica e implícita de R_1.

b) Graficar en el plano a R_1.

c) Dar un punto p por el que pase R_1 distinto a p_1.

d) Verificar si $p + p_1$ y $-p$ pertenecen a R_1

Solución:

a) Para la descripción paramétrica necesitamos un vector paralelo a R_1, es decir, ortogonal a $(1, 3)$. Un vector así puede ser el $(3, -1)$, con el que tenemos:
Descripción paramétrica: $\boxed{R_1 = \{(2, 0) + t(3, -1) \mid t \in \mathbb{R}\}}$

Para la descripción implícita simplemente reemplazamos todos los datos dados en la ecuación $ax + by = \langle (x_0, y_0), (a, b)\rangle$ y tenemos:
Descripción implícita: $\boxed{R_1 = \{(x, y) \mid x + 3y = 2\}}$

b) ver figura 2

c) Para dar un punto sobre la recta conviene usar la descripción paramétrica. En este caso debe ser distinto a p_1, con lo que cualquier valor de $t \neq 0$ va a servir. Si tomamos por ejemplo $t = -1$ vamos a tener $\boxed{p = (-1, 1)}$.

d) Para verificar si un punto pertenece, conviene usar la descripción implícita. Calculamos cada punto y reemplazamos en la ecuación:

$p + p_1 = (-1, 1) + (2, 0) = (1, 1)$	$-p = (1, -1)$
$(1) + 3 \cdot (1) = 4 \neq 2$	$(1) + 3 \cdot (-1) = -2 \neq 2$
$\therefore p + p_1 \notin R_1$	$\therefore -p \notin R_1$

(14) Repetir el ejercicio anterior con las siguientes rectas.

a) R_2: recta que pasa por $p_2 = (0, 0)$ y es ortogonal a $(1, 3)$.

b) R_3: recta que pasa por $p_3 = (1, 0)$ y es paralela a R_1.

Solución: Los procedimientos son análogos a los del ejercicio 13. Las gráficas están en la figura 2

a) Descripción paramétrica: $\boxed{R_2 = \{t(3, -1) \mid t \in \mathbb{R}\}}$

Descripción implícita: $\boxed{R_2 = \{(x, y) \mid x + 3y = 0\}}$

Tomando $t = -1$ tenemos $\boxed{p = (-3, 1)}$.

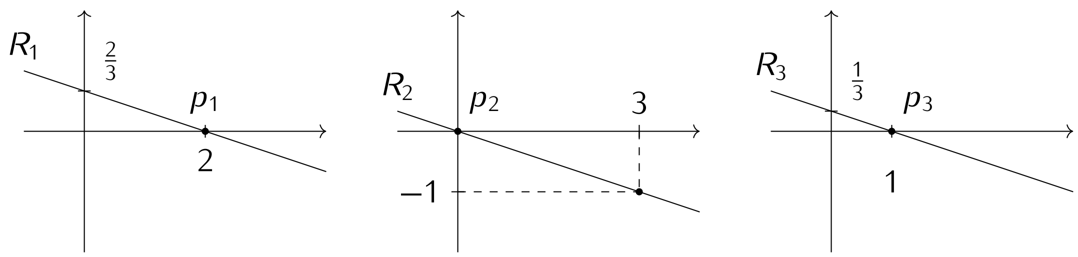
$p + p_2 = (-3, 1) + (0, 0) = (-3, 1)$	$-p = (3, -1)$
$(-3) + 3 \cdot (1) = -3 + 3 = 0$	$(3) + 3 \cdot (-1) = 3 - 3 = 0$
$\therefore p + p_2 \in R_2$	$\therefore -p \in R_2$

b) Descripción paramétrica: $\boxed{R_3 = \{(1, 0) + t(3, -1) \mid t \in \mathbb{R}\}}$

Descripción implícita: $\boxed{R_3 = \{(x, y) \mid x + 3y = 1\}}$

Tomando $t = -1$ tenemos $\boxed{p = (-2, 1)}$.

$p + p_3 = (-2, 1) + (1, 0) = (-1, 1)$	$-p = (2, -1)$
$(-1) + 3 \cdot (1) = 2 \neq 1$	$(2) + 3 \cdot (-1) = -1 \neq 1$
$\therefore p + p_3 \notin R_3$	$\therefore -p \notin R_3$



(A) Ejercicio 13.b (B) Ejercicio 14.a (C) Ejercicio 14.b

Figure 2

(15) Calcular, numérica y graficamente, las intersecciones $R_1 \cap R_2$ y $R_1 \cap R_3$.

Solución: Para el cálculo numérico, notar que las ecuaciones de las tres rectas son de la forma $x + 3y = c$ donde c vale 2, 0 y 1 para R_1, R_2 y R_3 respectivamente. Así tendremos por ejemplo que para calcular la intersección $R_1 \cap R_2$ tendremos que resolver el sistema:

$$\begin{cases} x + 3y = 2 \\ x + 3y = 0 \end{cases}$$

Este sistema no tiene solución, pues para cualquier valores de x e y que elijamos, no puede suceder que al hacer la cuenta $x + 3y$ obtengamos simultáneamente el resultado 2 y el resultado 0. El caso $R_1 \cap R_3$ es análogo.

Para la determinación gráfica, se pueden observar los gráficos de la figura 2 y notar que ambas parejas son paralelas, y por lo tanto no tienen intersección.

En conclusión, tenemos $\boxed{R_1 \cap R_2 = R_1 \cap R_3 = \emptyset}$

(16) Sea $v_0 = (2, -1, 1)$.

a) Describir paramétricamente el conjunto $P_1 = \{w \in \mathbb{R}^3 : \langle v_0, w\rangle = 0\}$.

b) Describir paramétricamente el conjunto $P_2 = \{w \in \mathbb{R}^3 : \langle v_0, w\rangle = 1\}$.

c) ¿Qué relación hay entre P_1 y P_2?

Solución:

a) Debemos despejar la ecuación implícita y reemplazarla en el vector:

$(x, y, z) \in P_1 \iff \langle(2, -1, 1),(x, y, z)\rangle = 0$

$(x, y, z) \in P_1 \iff 2x - y + z = 0$

$(x, y, z) \in P_1 \iff 2x + z = y$

$(x, y, z) \in P_1 \iff (x, y, z) = (x, 2x + z, z) = x(1, 2, 0) + z(0, 1, 1)$

$\therefore \boxed{P_1 = \{s(1, 2, 0) + t(0, 1, 1) \mid s, t, \in \mathbb{R}\}}$

b) Análogo al item anterior:

$(x, y, z) \in P_2 \iff \langle(2, -1, 1),(x, y, z)\rangle = 1$

$(x, y, z) \in P_2 \iff 2x - y + z = 1$

$(x, y, z) \in P_2 \iff 2x + z - 1 = y$

$(x, y, z) \in P_2 \iff (x, y, z) = (x, 2x + z - 1, z) = (0, -1, 0) + x(1, 2, 0) + z(0, 1, 1)$

$\therefore \boxed{P_2 = \{(0, -1, 0) + s(1, 2, 0) + t(0, 1, 1) \mid s, t, \in \mathbb{R}\}}$

c) Los planos P_1 y P_2 son paralelos.

(17) Escribir la ecuación paramétrica y la ecuación normal de los siguientes planos.

a) π_1: el plano que pasa por $(0, 0, 0)$, $(1, 1, 0)$, $(1, -2, 0)$.

b) π_2: el plano que pasa por $(1, 2, -2)$ y es perpendicular a la recta que pasa por $(2, 1, -1)$, $(3, -2, 1)$.

c) $\pi_3 = \{w \in \mathbb{R}^3 : w = s(1, 2, 0) + t(2, 0, 1) + (1, 0, 0);\ s, t \in \mathbb{R}\}$.

Solución:

a) Llamemos $p_0 = (0, 0, 0)$, $p_1 = (1, 1, 0)$ y $p_2 = (1, -2, 0)$ a los puntos involucrados. Como p_0 es el origen y p_2 no es un múltiplo de p_1, tenemos que los puntos no son colineales. Luego para la descripción paramétrica basta con elegir uno de ellos y dos parejas distintas cualquiera. Así, por ejemplo podríamos escribir:

$\pi_1 = \{p_0 + s\ \overrightarrow{p_0p_1} + t\ \overrightarrow{p_0p_2} \mid s, t \in \mathbb{R}\} = \boxed{\{s(1, 1, 0) + t(1, -2, 0) \mid s, t \in \mathbb{R}\}}$

Notar que cualquier otra elección para el primer punto y las dos parejas da lugar a parametrizaciones diferentes, pero equivalentes, de π_1.

Para la ecuación normal vamos a necesitar un vector que sea ortogonal a ambas direcciones, $\overrightarrow{p_0p_1}$ y $\overrightarrow{p_0p_2}$. A simple vista puede verse que un vector que cumple eso es $e_3 = (0, 0, 1)$. Luego reemplazamos eso en la ecuación normal $\langle v, e_3\rangle = \langle p_0, e_3\rangle$. Notar que podríamos haber elegido cualquier

punto en π_1 en lugar de p_0, y todos deberían dar el mismo resultado. La ecuación normal sería entonces:
$\pi_1 = \boxed{\{w \in \mathbb{R}^3 \mid \langle w, e_3 \rangle = 0\}}$

b) Llamemos $p_0 = (1, 2, -2)$, $p_1 = (2, 1, -1)$ y $p_2 = (3, -2, 1)$. En este caso conviene empezar con la ecuación normal pues contamos con una dirección perpendicular al plano: $\overrightarrow{p_1 p_2} = p_2 - p_1 = (1, -3, 2)$. Reemplazamos en la ecuación normal y tenemos:
$\pi_2 = \{w \in \mathbb{R}^3 \mid \langle w, \overrightarrow{p_1 p_2} \rangle = \langle p_0, \overrightarrow{p_1 p_2} \rangle\} = \boxed{\{w \in \mathbb{R}^3 \mid \langle w, \overrightarrow{p_1 p_2} \rangle = -9\}}$
Para encontrar la forma paramétrica se siguen los mismos pasos que en el ejercicio 16.a) y 16.b):
$(x, y, z) \in \pi_2 \iff \langle (1, -3, 2), (x, y, z) \rangle = -9$
$(x, y, z) \in \pi_2 \iff x - 3y + 2z = -9$
$(x, y, z) \in \pi_2 \iff x = -9 + 3y - 2z$
$(x, y, z) \in \pi_2 \iff (x, y, z) = (-9 + 3y - 2z, y, z) = (-9, 0, 0) + y(3, 1, 0) + z(-2, 1, 0)$
$\therefore \boxed{\pi_2 = \{(-9, 0, 0) + s(3, 1, 0) + t(-2, 1, 0) \mid s, t, \in \mathbb{R}\}}$

c) El plano ya viene dado en forma paramétrica, por lo que sólo resta expresarlo en forma normal. Para ello es necesario encontrar un vector (x, y, z) que sea perpendicular a $(1, 2, 0)$ y a $(2, 0, 1)$. Como en este caso no es obvio, podemos plantear ambos productos escalares y despejar:

$$\left\{ \begin{array}{ll} x + 2y & = 0 \\ 2x + z & = 0 \end{array} \right. \implies \left\{ \begin{array}{ll} x & = -2y \\ z & = -2x = -2(-2y) = 4y \end{array} \right. \implies \left\{ \begin{array}{ll} x & = -2y \\ z & = 4y \end{array} \right.$$

Es decir que el vector buscado es de la pinta $(-2y, y, 4y) = y(-2, 1, 4)$ o, lo que es lo mismo, cualquier múltplo de $(-2, 1, 4)$ será perpendicular al plano. La forma normal es entonces:
$\pi_3 = \{w \in \mathbb{R}^3 \mid \langle w, (-2, 1, 4) \rangle = \langle (1, 0, 0), (-2, 1 - 4) \rangle\} = \boxed{\{w \in \mathbb{R}^3 \mid \langle w, (-2, 1, 4) \rangle = -2}$

(18) ¿Cuáles de las siguientes rectas cortan al plano π_3 del ejercicio (*c)*)? Describir la intersección en cada caso.

(*a*) $\{w : w = (3, 2, 1) + t(1, 1, 1)\}$, (*b*) $\{w : w = (1, -1, 1) + t(1, 2, -1)\}$,
(*c*) $\{w : w = (-1, 0, -1) + t(1, 2, -1)\}$, (*d*) $\{w : w = (1, -2, 1) + t(2, -1, 1)\}$.

Solución: La manera más directa de chequear si una recta interseca a un plano es con la forma normal del plano. Si la dirección de la recta es perpendicular a la dirección normal del plano, la recta es paralela al plano. Luego, o bien toda la recta está contenida en el plano, o bien la recta y el plano tienen intersección vacía.

Si una recta no es paralela a un plano, lo corta en un único punto. La manera más fácil de hallar ese punto es reemplazar la parametrización de la recta en la ecuación normal y despejar t. Luego, reemplazando t en la parametrización de la recta se encuentra el punto.

a) Como $\langle (1,1,1),(-2,1,4)\rangle = 3 \neq 0$, la recta corta al plano π_3. Encuentro el punto de intersección:

$$\begin{aligned} -2(3+t)+(2+t)+4(1+t) &= -2 \\ -6-2t+2+t+4+4t &= -2 \\ 3t &= -2 \implies \boxed{t = -\frac{2}{3}} \end{aligned}$$

El punto de intersección es $(3,2,1) - \frac{2}{3}(1,1,1) = \boxed{\left(\frac{7}{3},\frac{4}{3},\frac{1}{3}\right)}$

b) Como $\langle (1,2,-1),(-2,1,4)\rangle = -4 \neq 0$, la recta corta al plano π_3. Encuentro el punto de intersección:

$$\begin{aligned} -2(1+t)+(-1+2t)+4(1-t) &= -2 \\ -2-2t-1+2t+4-4t &= -2 \\ 3 &= 4t \implies \boxed{t = \frac{3}{4}} \end{aligned}$$

El punto de intersección es $(1,-1,1) + \frac{3}{4}(1,2,-1) = \boxed{\left(\frac{7}{4},\frac{1}{2},\frac{1}{4}\right)}$

c) Como $\langle (1,2,-1),(-2,1,4)\rangle = -4 \neq 0$, la recta corta al plano π_3. Encuentro el punto de intersección:

$$\begin{aligned} -2(-1+t)+(2t)+4(-1-t) &= -2 \\ 2-2t+2t-4-4t &= -2 \\ -4t &= 0 \implies \boxed{t = 0} \end{aligned}$$

El punto de intersección es $(-1,0,-1) + 0\cdot(1,2,-1) = \boxed{(-1,0,-1)}$

d) Como $\langle (2,-1,1),(-2,1,4)\rangle = -1 \neq 0$, la recta corta al plano π_3. Encuentro el punto de intersección:

$$\begin{aligned} -2(1+2t)+(-2-t)+4(1+t) &= -2 \\ -2-4t-2-t+4+4t &= -2 \\ -t &= -2 \implies \boxed{t = 2} \end{aligned}$$

El punto de intersección es $(1,-2,1) + 2(2,-1,1) = \boxed{(5,-4,3)}$

(19) Sea $L = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : ax+by=c\}$ una recta en $\mathbb{R}^2$. Sean p y q dos puntos por los que pasa L.

a) ¿Para qué valores de c puede asegurar que $(0,0)\in L$?
b) ¿Para qué valores de c puede asegurar que $\lambda q \in L$? donde $\lambda\in\mathbb{R}$.
c) ¿Para qué valores de c puede asegurar que $p+q\in L$?

Solución:

a) Si $(0,0)\in L$, entonces esos valores de x e y deben verificar la ecuación normal de la recta. Es decir, debe suceder $c = ax+by = a\cdot 0 + b\cdot 0 = 0$. Con lo cual debe ser $c=0$ y por lo tanto es el único valor de c con esta propiedad.

b) Llamemos $q = (x_q, y_q)$. Como $q \in L$, sabemos que se cumple

$$ax_q + by_q = c \tag{0.2}$$

Ahora supongamos que además $\lambda q = (\lambda x_q, \lambda y_q) \in L$. Vamos a tener entonces:

$$\begin{aligned} a(\lambda x_q) + b(\lambda y_q) &= c \\ \lambda a x_q + \lambda b y_q &= c \\ \lambda(a x_q + b y_q) &= c \quad \text{(Reemplazamos la ecuación 0.2)} \\ \lambda c &= c \\ (\lambda - 1)c &= 0 \end{aligned}$$

Luego tenemos dos casos: Si $\lambda = 1$, entonces c puede tomar cualquier valor. Si $\lambda \neq 1$ entonces sólo puede ser $c = 0$. En particular, si $c = 0$, λ puede tener cualquier valor.

c) Llamemos $p = (x_p, y_p)$. Como $p \in L$ vamos a tener el análogo a la ecuación 0.2 para p:

$$ax_p + by_p = c \tag{0.3}$$

Ahora suponemos que además $p + q = (x_p + x_q, y_p + y_q) \in L$ y tenemos:

$$\begin{aligned} a(x_p + x_q) + b(y_p + y_q) &= c \\ ax_p + ax_q + by_p + by_q &= c \\ (ax_p + by_p) + (ax_q + by_q) &= c \\ c + c &= c \quad \text{(Reemplazamos las ecuaciones 0.2 y 0.3)} \\ 2c &= c \\ c &= 0 \end{aligned}$$

Por lo tanto debe ser $c = 0$ y es el único valor con esta propiedad.

(20) Sea L una recta en $\mathbb{R}^2$. Probar que L pasa por $(0,0)$ si y sólo si pasa por $p + \lambda q$ para todo par de puntos p y q de L y para todo $\lambda \in \mathbb{R}$.

Solución:

$\boxed{\Longrightarrow}$ Supongo que $(0,0) \in L$, entonces por el ejercicio 19.a) tengo que $c = 0$. Si $c = 0$, por ejercicio 19.b) tengo que como $q \in L$ entonces $\lambda q \in L$. Luego, por ejercicio 19.c) tengo que como $p \in L$ y $\lambda q \in L$ entonces su suma también: $p + \lambda q \in L$.

$\boxed{\Longleftarrow}$ Considero un $p \in L$ cualquiera, y tomo $\lambda = -1$ y $q = p$. Tengo entonces por hipótesis que $p + \lambda q \in L$, pero $p + \lambda q = p + (-1)p = p - p = (0,0)$ y por lo tanto $(0,0) \in L$. $\square$