Álgebra/Álgebra II
Clase 12 - Determinante 1

FAMAF / UNC

8 de octubre de 2020

Resumen

En esta clase veremos

- La definición de determinante de una matriz cuadrada.
- Cálculo de determinantes 2×2 y 3×3.
- Determinantes de matrices triangulares y diagonales.
- Cálculo de determinante de matrices $n \times n$ utilizando operaciones elementales por fila.

El tema de esta clase está contenido de la sección la sección 2.8 del apunte de clase "Álgebra II / Álgebra - Notas del teórico".

Introducción

El *determinante* es una función que a cada matriz cuadrada $n \times n$ con coeficientes en $\mathbb{K}$, le asocia un elemento de $\mathbb{K}$.

$$
\begin{aligned}
\det : \ \mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^n &\longrightarrow \mathbb{K} \\
[a_{ij}] &\longrightarrow \det([a_{ij}])
\end{aligned}
$$

Formas de definir determinante

- Una forma de definir determinante es con una fórmula cerrada que usa el *grupo de permutaciones.* Esta forma de definir determinante está fuera del alcance de este curso.
- La forma que usaremos nosotros para definir determinante es mediante una definición recursiva.
- Es decir para calcular el determinante de una matriz $n \times n$, usaremos el cálculo del determinante para matrices $n - 1 \times n - 1$,
    - que a su vez se calcula usando el determinante de matrices $n - 2 \times n - 2$
        - y así sucesivamente hasta llegar al caso base, que es el caso de matrices 1×1.

El determinante, permite, entre otras cosas

- determinar si una matriz cuadrada es invertible,
- dar una fórmula cerrada para la inversa de una matriz invertible.

Para la definición del determinante de una matriz cuadrada A usaremos *submatrices* de la matriz A.

Definición

Sea $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ y sean i, j tales que $1 \leq i, j \leq n$. Entonces

$$A(i|j) \in \mathbb{K}^{n-1\times n-1}$$

es la matriz que se obtine eliminando la fila i y la columna j de A.

$$A(i|j) = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

(tacho la fila i y la columna j.)

Más precisamente,

$$A(i|j) = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & \cdots & a_{1j-1} & a_{1j+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-11} & \cdots & \cdots & a_{i-1j-1} & a_{i-1j+1} & \cdots & a_{i-1n} \\ a_{i+11} & \cdots & \cdots & a_{i+1j-1} & a_{i+1j+1} & \cdots & a_{i+1n} \\ \vdots & & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & \cdots & a_{mj-1} & a_{mj+1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Ejemplos

Si $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$, entonces $A(1|2) = \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 9 \end{bmatrix}$, $A(1|1) = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{bmatrix}$.

Si $A = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 2 & 5 \\ -2 & 7 & 2 & 6 \\ -3 & 2 & 1 & 11 \\ -4 & 5 & 3 & -3 \end{bmatrix}$, entonces $A(3|2) = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 5 \\ -2 & 2 & 6 \\ -4 & 3 & -3 \end{bmatrix}$.

Definición

Sea $n \in \mathbb{N}$ y $A = [a_{ij}] \in \mathbb{K}^{n\times n}$, entonces el determinante de A, denotado $\det(A)$ ó $|A|$, se define como

1. Si $n = 1$, $\det A = a_{11}$
2. Si $n > 1$,

   $$\det A = a_{11} \det A(1|1) - a_{21} \det A(2|1) + \cdots + (-1)^{1+n} a_{n1} \det A(n|1),$$

   o

   $$\det A = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{1+i}\, a_{i1}\, \det A(i|1).$$

Si $1 \leq i, j \leq n$,

- $\det A(i|j)$: *menor i, j de A.*
- $C_{ij} := (-1)^{i+j} \det A(i|j)$: *cofactor i, j de A.*
  Luego
  $$\det A = \sum_{i=1}^{n} a_{i1}\, C_{i1}\,.$$

Este es el *cálculo del determinante por desarrollo de la primera columna* pues para calcular el determinante estamos usando los coeficientes de la primera columna:

$$a_{11}\,, a_{21}\,, a_{31}\,, \ldots\,, a_{n1}\,.$$

Determinante 2×2

Calculemos el determinante de las matrices 2×2. Sea

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix},$$

entonces

$$\begin{aligned} \det A &= a \det[d] - c \det[b] \\ &= ad - bc. \end{aligned}$$

Observación

Si $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$, entonces $\det(A) = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$

(solo es notación),

Ejemplo

Si $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$, entonces $\det(A) = 1 \cdot 4 - 2 \cdot 3 = -2$

Ejemplo

Si

$$A = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix},$$

entonces

$$\det(A) = \cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta = 1.$$

Hemos visto en la clase anterior que $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ es invertible si y solo si $ad - bc \neq 0$, es decir

A es invertible si y solo si $\det A \neq 0$.

Más aún, la fórmula de la inversa de A es

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{bmatrix} d & c \\ b & a \end{bmatrix}.$$

Se puede reescribir como

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{bmatrix}.$$

Esta fórmula se puede generalizar a matrices $n \times n$.

Determinantes 3×3.

Sea

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix},$$

entonces

$$\begin{aligned} \det A &= a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{21} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{31} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} \\ &= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{21}(a_{12}a_{33} - a_{13}a_{32}) + a_{31}(a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22}) \\ &= a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{13}a_{21}a_{32} + a_{12}a_{23}a_{31} - a_{13}a_{22}a_{31}. \end{aligned}$$

Observación

Observar que el determinante de una matriz 3×3 es una sumatoria de seis términos cada uno de los cuales es de la forma $\pm a_{1\,i_1} a_{2\,i_2} a_{3\,i_3}$ e $i_1 i_2 i_3$ puede ser cualquier permutación de 123.

Es decir

$$|A| = \sum_{\sigma \in \mathbb{S}_3} \pm a_{1\,\sigma(1)} a_{2\,\sigma(2)} a_{3\,\sigma(3)},$$

donde $\mathbb{S}_3$ son las permutaciones de 3 elementos.

La fórmula

$$|A| = a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{13}a_{21}a_{32} + a_{12}a_{23}a_{31} - a_{13}a_{22}a_{31},$$

no es fácil de recordar, pero existe un procedimiento sencillo que nos permite obtenerla.

Cálculo de $|A|$:

1. a la matriz original le agregamos las dos primeras filas al final,
2. sumamos cada "producto" de las diagonales descendentes y
3. restamos cada "producto" de las diagonales ascendentes.

$$
\begin{array}{cccc}
+ & & & \\
 & a_{11} & a_{12} & a_{13} \\
+ & & & \\
 & a_{21} & a_{22} & a_{23} \\
+ & & & \\
 & a_{31} & a_{32} & a_{33} \\
- & & & \\
 & a_{11} & a_{12} & a_{13} \\
- & & & \\
 & a_{21} & a_{22} & a_{13} \\
- & & &
\end{array}
$$

Es decir,

(a) se suman $a_{11}a_{22}a_{33}$, $a_{21}a_{32}a_{13}$, $a_{31}a_{12}a_{23}$, y

(b) se restan $a_{31}a_{22}a_{13}$, $a_{11}a_{32}a_{23}$, $a_{21}a_{12}a_{33}$,

obteniéndose nuevamente

$$|A| = a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{13}a_{21}a_{32} + a_{12}a_{23}a_{31} - a_{13}a_{22}a_{31}.$$

Ejemplo

Si

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}.$$

Calculamos:

$$\begin{array}{ccc|l} 1 & 2 & 3 & -7 \cdot 5 \cdot 3 \\ 4 & 5 & 6 & -1 \cdot 8 \cdot 6 \\ 7 & 8 & 9 & -4 \cdot 2 \cdot 9 \\ 1 & 2 & 3 & +1 \cdot 5 \cdot 9 \\ 4 & 5 & 6 & +4 \cdot 8 \cdot 3 \\ & & & +7 \cdot 2 \cdot 6 \end{array}$$

Entonces $\det(A) = 45 + 96 + 84 - 105 - 48 - 72 = 0.$

Ejemplo

Calculemos el determinante de una matriz 4×4

$$
\begin{aligned}
\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} =& 1 \begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} \\
& + 0 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} \\
=& 13 - 3 + 0 - 8 \\
=& 2.
\end{aligned}
$$

Observación

Las fórmulas para $n = 2$ y $n = 3$ es un caso particular de la fórmula

$$\det(A) = \sum_{\sigma \in \mathbb{S}_n} \operatorname{sgn}(\sigma)\, a_{1\sigma(1)}\, a_{2\sigma(2)} \cdots a_{n\sigma(n)}$$

válida para todo n, la cual tiene $n!$ términos.

($\mathbb{S}_n$ es el conjunto de permutaciones de $\{1, ..., n\}$ y $\operatorname{sgn} : \mathbb{S}_n \to \{1, -1\}$ es una función, llamada *función signo*.)

Observación

- Del modo que lo presentamos, el determinante no es más que una fórmula que le aplicamos a una matriz. Pero aquí sólo estamos viendo el producto final de años y años de estudio.
- De hecho, el determinante existió antes que las matrices y se lo utilizaba para "determinar" cuando un sistema de n ecuaciones con n incógnitas tiene solución única (si y sólo si el determinante es no nulo).
- También tiene otras aplicaciones.
- Pueden googlear "determinante" para saber más o leer la página de Wikipedia.

Viendo la fórmula del determinante

$$\det(A) = a_{11} \det A(1|1) - a_{21} \det A(2|1) + \cdots + (-1)^{1+n} a_{n1} \det A(n|1)$$

notamos que mientras más ceros tenga la primera columna (o sea, más a_{i1}'s iguales a 0), menos cuentas deberemos hacer.

Por ejemplo, si A es triangular superior o una MERF.

Determinante de una matriz triangular superior

Proposición

El determinante de una matriz triangular superior es el producto de los elementos de la diagonal

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & & a_{2n} \\ \vdots & 0 & \ddots & & \vdots \\ & \vdots & & & \\ & & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} \cdots a_{nn}$$

(esto aplica también a las matrices diagonal)

Demostración

Podemos demostrar el resultado por inducción sobre n.

Si $n = 1$, es decir si $A = [a_{11}]$, el determinante vale a_{11}.

Sea $n > 1$, observemos que $A(1|1)$ es también triangular superior con valores $a_{22}, \ldots, a_{nn}$ en la diagonal principal. Por HI:

$$\det(A(1|1)) = a_{22}.\ldots.a_{nn}.$$

Por definición de determinante observamos que el desarrollo por la primera columna solo tiene un término (a_{11}) en la primera posición.

Por lo tanto,

$$\det(A) = a_{11}\det(A(1|1)) \overset{(\mathrm{HI})}{=} a_{11}.(a_{22}.\ldots.a_{nn}).$$

$\square$

Corolario 1

$$\det(\mathrm{Id}_n) = 1$$

Corolario 2

Si $R \in \mathbb{K}^{n\times n}$ es una MERF, entonces

$$\det(R) = \begin{cases} 1 & \text{si } R \text{ no tiene filas nulas} \\ 0 & \text{si } R \text{ tiene filas nulas} \end{cases}$$

Volvamos a la fórmula del determinante

$$\det(A) = a_{11} \det A(1|1) - a_{21} \det A(2|1) + \cdots + (-1)^{1+n} a_{n1} \det A(n|1)$$

y a la observación de que con más ceros en la primera columna menos cuentas deberemos hacer.

Con las operaciones elementales por filas podemos anular las entradas no nulas como lo hacíamos para transformar una matriz en MERF.

Entonces deberíamos analizar como estas operaciones afectan en el cálculo del determinante.

Teorema E1

Sea $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ *y* $c \in \mathbb{K}$ *no nulo. Sea*

$$A \xrightarrow{cF_i} B,$$

entonces

$$\det(B) = c\det(A).$$

Ejemplo (verificar cuentas)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow{10F_1} B = \begin{bmatrix} 10 & 20 \\ 3 & 4 \end{bmatrix},$$

y

$$\det \begin{bmatrix} 10 & 20 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = -20 = 10\det \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}.$$

Teorema E2

Sean $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ *y* $1 \leq s, t \leq n$ *con* $s \neq t$*. Sea* $t \in \mathbb{K}$ *y*

$$A \xrightarrow{F_r + tF_s} B,$$

entonces

$$\det(B) = \det(A).$$

Ejemplo (verificar cuentas)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow{F_2 + 10F_1} B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 13 & 24 \end{bmatrix},$$

y

$$\det \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 13 & 24 \end{bmatrix} = -2 = \det \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}.$$

Teorema E3

Sean $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$. *Sea*

$$A \xrightarrow{F_r \leftrightarrow F_s} B,$$

entonces

$$\det(B) = -\det(A)$$

Ejemplo (verificar cuentas)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow{F_2 \leftrightarrow F_1} B = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix},$$

y

$$\det \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = 2 = -\det \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}.$$

Observación

- En todos los casos $\det(B) = k\det(A)$ para algún $k \in \mathbb{K}$ no nulo.
- A partir de lo anterior podemos plantear una estrategia general para calcular el determinante.

Proposición

Sea A matriz $n \times n$ y C matriz que se obtiene de A a partir de operaciones elementales de fila. Luego $\det(C) = k\det(A)$, para $k \neq 0$ en $\mathbb{K}$.

Estrategia para calcular el determinante de $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$

1. Realizando ℓ operaciones elementales de fila obtenemos a partir de A una matriz triangular superior C.
2. Luego,
$$\det(C) = k_\ell \cdots k_1 \det(A)$$
3. Como C es triangular superior, el determinante de C es el producto de la diagonal.
4. Entonces, podemos despejar
$$\det(A) = \frac{1}{k_\ell \cdots k_1} \det(C)$$

Problema

Calcular el determinante de $A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 7 \\ 1 & 3 & 0 \end{bmatrix}$

Solución

Primero, le aplicamos operaciones elementales a A hasta obtener una matriz triangular superior.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 7 \\ 1 & 3 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{F_1 \leftrightarrow F_3} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & -1 & 7 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{F_2 - 2F_1} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & -7 & 7 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{-\frac{1}{7}F_2} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{F_3 - 2F_2} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} = C$$

Entonces

$$C = e_4(e_3(e_2(e_1(A))))$$

donde e_1, e_2, e_3 y e_4 denotan las operaciones elementales aplicadas en cada paso Ahora calculamos el determinante de C usando Teoremas Ei:

$$5 = \det \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} = \det\left(e_4(e_3(e_2(e_1(A))))\right)$$

Donde $e_4 = F_3 - 2F_2$, $e_3 = -\frac{1}{7}F_2$, $e_2 = F_2 - 2F_1$, $e_1 = F_1 \leftrightarrow F_3$, Luego,

$$\begin{aligned}
5 &= \det\left(e_4(e_3(e_2(e_1(A))))\right) \\
&\overset{\text{Teorema E2}}{=} \det\left(e_3(e_2(e_1(A)))\right) \overset{\text{Teorema E1}}{=} -\frac{1}{7}\det\left(e_2(e_1(A))\right) \\
&\overset{\text{Teorema E2}}{=} -\frac{1}{7}\det\left(e_1(A)\right) \overset{\text{Teorema E3}}{=} -\frac{1}{7}\cdot(-1)\cdot\det(A)
\end{aligned}$$

De esta igualdad podemos despejar $\det(A)$

$$\det A = 7 \cdot 5 = 35.$$

$\square$

La próxima clase veremos resultados de suma utilidad:

Teorema

Sean A y B matrices $n \times n$. Entonces

1. $\det(AB) = \det(A)\det(B)$
2. A es invertible si y sólo si $\det(A) \neq 0$
3. Si A invertible, $\det(A^{-1}) = \dfrac{1}{\det(A)}$.