Práctico 8

Ejercicios resueltos.

(1) Dar las coordenadas de la matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \in \mathbb{K}^{2\times 2}$ en la base ordenada

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right\}.$$

Más generalmente, dar las coordenadas de cualquier matriz $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ en la base $\mathcal{B}$.

Solución:

Es claro que

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = 2\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + 4\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + 1\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + 3\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},$$

luego

$$[A]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Análogamente,

$$G := \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = b\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + d\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + a\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + c\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},$$

luego

$$[G]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} b \\ d \\ a \\ c \end{bmatrix}.$$

(2) Dar las coordenadas del polinomio $p(x) = -1+10x+2x^2 \in \mathbb{K}_3[x]$ en la base ordenada

$$\mathcal{B} = \{1, 1+x, 1+x+x^2\}.$$

Solución:

$[p(x)]_{\mathcal{B}} = (a, b, c)$ si y solo si

$$\begin{aligned} -1 + 10x + 2x^2 &= a \cdot 1 + b(1+x) + c(1+x+x^2) \\ &= a + b + bx + c + cx + cx^2 \\ &= (a+b+c) + (b+c)x + cx^2 \end{aligned}$$

si y solo si

$$\begin{cases} -1 &= a+b+c \\ 10 &= b+c \\ 2 &= c \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} a &= -11 \\ b &= 8 \\ c &= 2 \end{cases}$$

Es decir, $[p(x)]_{\mathcal{B}} = (-11, 8, 2)$.

(3) *a)* Dar una base ordenada del subespacio $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{K}^3 \mid x - y + 2z = 0\}$.
b) Dar las coordenadas de $w = (1, -1, -1)$ en la base que haya dado en el item anterior.
c) Dado $(x, y, z) \in W$, dar las coordenadas de (x, y, z) en la base que haya calculado en el item (a).

Solución:

a) Tenemos que:

$$\begin{aligned} W &= \{(x, y, z) \in \mathbb{K}^3 \mid x = y - 2z\} = \{(y - 2z, y, z) \mid y, z \in \mathbb{K}\} \\ &= \{t(1, 1, 0) + s(-2, 0, 1) \mid t, s \in \mathbb{K}\} = \langle(1, 1, 0), (-2, 0, 1)\rangle. \end{aligned}$$

Luego $\mathcal{B} = \{(1, 1, 0), (-2, 0, 1)\}$ es una base ordenada de W.

b) Planteamos

$$w = (1, -1, -1) = a(1, 1, 0) + b(-2, 0, 1) = (a - 2b, a, b).$$

Así, $a = -1$ y $b = -1$. Por lo tanto,

$$[w]_{\mathcal{B}} = (-1, -1).$$

c) Análogamente a lo que hemos hecho en el punto anterior planteamos

$$(x, y, z) = a(1, 1, 0) + b(-2, 0, 1) = (a - 2b, a, b).$$

Luego $a = y$ y $b = z$. Por lo tanto,

$$[(x, y, z)]_{\mathcal{B}} = (y, z).$$

(4) Sea $\mathcal{C}$ la base canónica de $\mathbb{R}^2$ y $\mathcal{B} = \{(1, 0), (1, 1)\}$ otra base ordenada de $\mathbb{R}^2$.
a) Encontrar la matriz de cambio de base $P_{\mathcal{C},\mathcal{B}}$ de $\mathcal{C}$ a $\mathcal{B}$.
b) Encontrar la matriz de cambio de base $P_{\mathcal{B},\mathcal{C}}$ de $\mathcal{B}$ a $\mathcal{C}$.
c) ¿Qué relación hay entre $P_{\mathcal{C},\mathcal{B}}$ y $P_{\mathcal{B},\mathcal{C}}$?
d) Encontrar $(x, y), (z, w) \in \mathbb{R}^2$ tal que $[(x, y)]_{\mathcal{B}} = (1, 4)$ y $[(z, w)]_{\mathcal{B}} = (1, -1)$.
e) Determinar las coordenadas de $(2, 3)$, y más generalmente de cualquier (x, y), en la base $\mathcal{B}$.

Solución:

a) $P_{\mathcal{C},\mathcal{B}} = [\mathrm{Id}]_{\mathcal{C}\mathcal{B}}$. Ahora bien,

$$\begin{aligned} \mathrm{Id}(1, 0) &= (1, 0) = 1(1, 0) + 0(1, 1) \\ \mathrm{Id}(0, 1) &= (0, 1) = (-1)(1, 0) + 1(1, 1). \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$P_{\mathcal{C},\mathcal{B}} = [\mathrm{Id}]_{\mathcal{C}\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

b) $P_{\mathcal{B},\mathcal{C}} = [\mathrm{Id}]_{\mathcal{B}\mathcal{C}}$. Ahora bien,

$$\begin{aligned} \mathrm{Id}(1, 0) &= (1, 0) = 1(1, 0) + 0(0, 1) \\ \mathrm{Id}(1, 1) &= (1, 1) = 1(1, 0) + 1(0, 1). \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$P_{\mathcal{B},\mathcal{C}} = [\mathrm{Id}]_{\mathcal{B}\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

c) Como

$$\begin{bmatrix}1 & -1\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix},$$

entonces $P_{\mathcal{C},\mathcal{B}}$ y $P_{\mathcal{B},\mathcal{C}}$ son una inversa de la otra. Sabemos de las clase teóricas que dicha relación vale en general.

d)

$$\begin{aligned}[(x,y)]_{\mathcal{B}}=(1,4) \quad &\Leftrightarrow \quad (x,y)=1(1,0)+4(1,1)\\ &\Leftrightarrow \quad x=5 \quad \wedge \quad y=4.\end{aligned}$$

También es posible hacerlo por la matriz de cambio de base:

$$\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=[(x,y)]_{\mathcal{C}}=P_{\mathcal{B},\mathcal{C}}\,[(x,y)]_{\mathcal{B}}=P_{\mathcal{B},\mathcal{C}}\begin{bmatrix}1\\ 4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\ 4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5\\ 4\end{bmatrix}.$$

Análogamente,

$$\begin{aligned}[(z,w)]_{\mathcal{B}}=(1,-1) \quad &\Leftrightarrow \quad (z,w)=1(1,0)+(-1)(1,1)\\ &\Leftrightarrow \quad z=0 \quad \wedge \quad w=-1.\end{aligned}$$

También es posible hacerlo por la matriz de cambio de base:

$$\begin{bmatrix}z\\ w\end{bmatrix}=P_{\mathcal{B},\mathcal{C}}\,[(z,w)]_{\mathcal{B}}=P_{\mathcal{B},\mathcal{C}}\begin{bmatrix}1\\ -1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\ -1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ -1\end{bmatrix}.$$

e)

$$[(2,3)]_{\mathcal{B}}=P_{\mathcal{C},\mathcal{B}}\,[(2,3)]_{\mathcal{C}}=\begin{bmatrix}1 & -1\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\ 3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1\\ 3\end{bmatrix}.$$

El caso general se hace de forma análoga,

$$[(x,y)]_{\mathcal{B}}=P_{\mathcal{C},\mathcal{B}}\,[(x,y)]_{\mathcal{C}}=\begin{bmatrix}1 & -1\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x-y\\ y\end{bmatrix}.$$

(5) Sea $P=\begin{bmatrix}1 & 1 & 0\\ 2 & 1 & 1\\ 3 & 1 & 0\end{bmatrix}\in\mathbb{K}^{3\times 3}$.

a) Calcular la inversa de P.

b) Dar una base ordenada $\mathcal{B}$ de $\mathbb{K}^3$ tal que P es la matriz de cambio de base de la base canónica $\mathcal{C}$ de $\mathbb{K}^3$ a la base $\mathcal{B}$.

c) Encontrar $(x,y,z)\in\mathbb{K}^3$ tal que su vector de coordenadas con respecto a $\mathcal{B}$ es

$$[(x,y,z)]_{\mathcal{B}}=(2,-1,-1).$$

Solución:

a)

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[F_3-3F_1]{F_2-2F_1} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{-F_2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[F_3+2F_2]{F_1-F_2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{-F_3/2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \end{array}\right] \xrightarrow[F_2+F_3]{F_1-F_3} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{3}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \end{array}\right]$$

Luego

$$P^{-1} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \end{bmatrix}.$$

b) Dada una base $\mathcal{B}$, recordar que la matriz de cambio de base de la base canónica $\mathcal{C}$ a la base $\mathcal{B}$ es la matriz $[\mathrm{Id}]_{\mathcal{CB}}$, que nos piden sea igual a P.
Por lo tanto $P = [\mathrm{Id}]_{\mathcal{CB}} = [\mathrm{Id}]_{\mathcal{BC}}^{-1}$, de donde $[\mathrm{Id}]_{\mathcal{BC}} = P^{-1}$, y la matriz $[\mathrm{Id}]_{\mathcal{BC}}$ son los vectores de $\mathcal{B}$ puestos como columnas. Concluyendo, Si $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$,

$$\begin{bmatrix} | & | & | \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ | & | & | \end{bmatrix} = [\mathrm{Id}]_{\mathcal{BC}} = P^{-1} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \end{bmatrix}.$$

Es decir, $v_1 = \frac{1}{2}(-1, 3, -1)$, $v_2 = (0, 0, 1)$, $v_3 = \frac{1}{2}(1, -1, -1)$.

c)

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} &= [(x, y, z)]_{\mathcal{C}} = [\mathrm{Id}]_{\mathcal{BC}}[(x, y, z)]_{\mathcal{B}} = P^{-1}\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -3 \\ 7 \\ -3 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Por lo tanto, $(x, y, z) = \left(-\frac{3}{2}, \frac{7}{2}, -\frac{3}{2}\right)$.

(6) Sea $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ la transformación lineal definida por

$$T(x, y, z) = (x - y, x - z).$$

Sean $\mathcal{C}$ la base canónica de $\mathbb{R}^3$ y $\mathcal{B}' = \{(1, 1), (1, -1)\}$ una base ordenada de $\mathbb{R}^2$.
a) Calcular la matriz $[T]_{\mathcal{CB}'}$, es decir la matriz de T respecto de las bases $\mathcal{C}$ y $\mathcal{B}'$.
b) Sea $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Dar las coordenadas de $T(x, y, z)$ respecto de la base $\mathcal{B}'$.

c) Sea $S : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ una transformación lineal tal que su matriz respecto a las bases $\mathcal{B}'$ y $\mathcal{C}$ es

$$[S]_{\mathcal{B}'\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Calcular la matriz de la composición $T \circ S : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ con respecto a la base $\mathcal{B}'$.

d) Calcular la matriz de $T \circ S$ respecto a la base $\mathcal{B}$ del Ejercicio (4) usando las matrices de cambio de base calculadas en ese ejercicio.

Solución:

a) Para calcular $[T]_{\mathcal{C}\mathcal{B}'}$ podemos calcular $T(e_1)$, $T(e_2)$, $T(e_3)$ y escribirlos en términos de la base $\mathcal{B}'$. Esto es equivalente a primero calcular como se escribe la base canónica en términos de la base $\mathcal{B}'$, es decir calcular $[\mathrm{Id}]_{\mathcal{C}\mathcal{B}'}$, y luego usar que $[T]_{\mathcal{C}\mathcal{B}'} = [\mathrm{Id}]_{\mathcal{C}\mathcal{B}'}[T]_{\mathcal{C}\mathcal{C}}$ ($\mathcal{C}$ indica también la base canónica de $\mathbb{R}^2$). Hagámoslo de esta segunda forma.

$$\begin{array}{rcl} T(1,0,0) & = & (1,1) \\ T(0,1,0) & = & (-1,0) \\ T(0,0,1) & = & (0,-1) \end{array} \quad \Rightarrow \quad [T]_{\mathcal{C}\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Por otro lado,

$$[\mathrm{Id}]_{\mathcal{C}\mathcal{B}'} = [\mathrm{Id}]_{\mathcal{B}'\mathcal{C}}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}^{-1}$$

y calculemos esto:

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{F_2-F_1} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{-F_2/2} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{array}\right]$$
$$\xrightarrow{F_1-F_2} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{array}\right].$$

Luego

$$[\mathrm{Id}]_{\mathcal{C}\mathcal{B}'} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

Finalmente:

$$[T]_{\mathcal{C}\mathcal{B}'} = [\mathrm{Id}]_{\mathcal{B}'\mathcal{C}}^{-1}[T]_{\mathcal{C}\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

b) Usamos el resultado que dice que $[T]_{\mathcal{C}\mathcal{B}'}[v]_{\mathcal{C}} = [T(v)]_{\mathcal{B}'}$, luego

$$[T(x,y,z)]_{\mathcal{B}'} = [T]_{\mathcal{C}\mathcal{B}'}\,[(x,y,z)]_{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x - \frac{1}{2}y - \frac{1}{2}z \\ -\frac{1}{2}y + \frac{1}{2}z \end{bmatrix}.$$

c)

$$[T \circ S]_{\mathcal{B}'} = [T \circ S]_{\mathcal{B}'\mathcal{B}'} = [T]_{\mathcal{C}\mathcal{B}'}[S]_{\mathcal{B}'\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{5}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

d) Deseamos calcular $[T \circ S]_{\mathcal{B}\mathcal{B}}$ y usaremos la siguiente fórmula:

$$[T \circ S]_{\mathcal{B}\mathcal{B}} = [T]_{\mathcal{C}\mathcal{B}}[S]_{\mathcal{B}\mathcal{C}} = ([\mathrm{Id}]_{\mathcal{C}\mathcal{B}}[T]_{\mathcal{C}\mathcal{C}})[S]_{\mathcal{B}\mathcal{C}}. \tag{d1}$$

De esta fórmula conocemos $[\mathrm{Id}]_{\mathcal{CB}}$ (por ejercicio (4)), y $[T]_{\mathcal{CC}}$ (por inciso *a)*). Faltaría averiguar $[S]_{\mathcal{BC}}$ a partir del único dato que tenemos de S que es $[S]_{\mathcal{B'C}}$. Ahora bien,

$$
\begin{aligned}
[S]_{\mathcal{BC}} &= [S]_{\mathcal{B'C}}[\mathrm{Id}]_{\mathcal{BB'}} \\
&= [S]_{\mathcal{B'C}}[\mathrm{Id}]_{\mathcal{CB'}}[\mathrm{Id}]_{\mathcal{BC}} \\
&= \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \text{(por hipótesis, inciso } a) \text{ y ej. (4))} \\
&= \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 1 \\ \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & 1 \\ 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}.
\end{aligned}
$$

Luego, por (d1),

$$
\begin{aligned}
[T \circ S]_{\mathcal{BB}} &= \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & 1 \\ 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.
\end{aligned}
$$

(7) Sea A la primera matriz del Ejercicio 1 del Práctico 5 y $T_A : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ la transformación lineal dada por $T_A(v) = Av$. Hallar los autovalores de T_A, y para cada uno de ellos, dar una base de autovectores del correspondiente autoespacio. Decidir si T_A es o no diagonalizable. En caso de serlo dar una matriz invertible P tal que $P^{-1}AP$ es diagonal. Repetir esto para cada una de las matrices de dicho ejercicio.

Solución:

Como $[T_A]_{\mathcal{C}} = A$, entonces los autovalores y autovectores de T_A serán los autovalores y autovectores de A (lo mismo vale para todas las matrices del Ejercicio 1 del Práctico 5), así que podremos usar todo lo calculado en el Práctico 5.

a) Como se vio en el práctico 5, A tiene un solo autovalor, que es 3 y el autoespacio correspondiente tiene como base a $\{(1,1)\}$. Por lo tanto, T_A no es diagonalizable.

b) Como se vio en el práctico 5, B tiene dos autovalores: 1 con autoespacio con base $\{(3,1)\}$, y -2 con autoespacio con base $\{(0,1)\}$. Por lo tanto, T_B es diagonalizable y la base que "diagonaliza" es $\mathcal{B} = \{(3,1),(0,1)\}$. Es decir,

$$[T_B]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}.$$

Como $[T_B]_{\mathcal{C}} = B$ y

$$[T_B]_{\mathcal{B}} = [\mathrm{Id}]_{\mathcal{CB}}\,[T_B]_{\mathcal{C}}\,[\mathrm{Id}]_{\mathcal{BC}} = [\mathrm{Id}]_{\mathcal{CB}}\,B\,[\mathrm{Id}]_{\mathcal{BC}},$$

tenemos que $P = [\mathrm{Id}]_{\mathcal{BC}} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$.

c) Como se vio en el práctico 5, C tiene dos autovalores: 1 con autoespacio con base $\{(0,1,0)\}$, y 2 con autoespacio con base $\{(-1,1,0),(-1,0,1)\}$. Por lo tanto, $T_C : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ es diagonalizable y la base que "diagonaliza" es

$$\mathcal{B} = \{(0,1,0),(-1,1,0),(-1,0,1)\}.$$

Es decir,

$$[T_C]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Como $[T_C]_{\mathcal{C}} = C$ y

$$[T_C]_{\mathcal{B}} = [\mathrm{Id}]_{\mathcal{CB}}\,[T_C]_{\mathcal{C}}\,[\mathrm{Id}]_{\mathcal{BC}} = [\mathrm{Id}]_{\mathcal{CB}}\,C\,[\mathrm{Id}]_{\mathcal{BC}},$$

tenemos que $P = [\mathrm{Id}]_{\mathcal{BC}} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

d) En este caso $T_D : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ no es diagonalizable pues hay un solo autovalor y la dimensión del autoespacio es 1. El autoespacio tiene base $\{e_3\}$.

e) En este caso $T_E : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ no tiene autovalores reales, y por lo tanto no hay autoespacios y no es diagonalizable.

f) En este caso la matriz era

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \operatorname{sen}\theta \\ 0 & -\operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix}, 0 \le \theta < 2\pi,$$

y se dividía en 3 casos:

Caso 1. Si $\theta = 0$, entonces la matriz es Id, por lo tanto hay un único autovalor (el 1) y el autoespacio correspondiente es todo $\mathbb{R}^3$, en consecuencia cualquier base es base del autoespacio (por ejemplo, la canónica). Obviamente es diagonalizable, pues ya es diagonal y $P = \mathrm{Id}$.

Caso 2. Si $\theta = \pi$. En este caso la matriz también es diagonal, con dos autovalores 1 y -1, el primero con base $\{e_1\}$ y el segundo con base $\{e_2, e_3\}$. De nuevo, $P = \mathrm{Id}$.

Caso 3. Si $\theta \neq 0, \pi$. En este caso hay un solo autovalor 1 y su autoespacio es de dimensión 1, con base $\{e_1\}$. Por lo tanto $T_{F_\theta} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ no es diagonalizable.

(8) Repetir el ejercicio anterior para cada matriz del Ejercicio 1 del Práctico 5 pero ahora considerando a la transformación como una transformación lineal entre los $\mathbb{C}$-espacios vectoriales $\mathbb{C}^n$.

Solución:

Los únicos casos que hay que estudiar son *e)* y *f)*, caso $\theta \neq 0, \pi$, pues son las únicas situaciones donde el polinomio característico tiene algunas raíces complejas, no reales. En todos los demás casos, los autovalores son reales y por lo tanto son los mismos que en caso complejo. También, las bases de los autoespacios y el P son los mismos.

e) Como se vio en el ejercicio (2) del práctico 5, $T_E : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ tiene autovalores $1+i, 1-i$, con $V_{1+i} = \langle (2+i,1) \rangle_{\mathbb{C}}$ y $V_{1-i} = \langle (2-i,1) \rangle_{\mathbb{C}}$. Por lo tanto, la transformación es diagonalizable, más aún, la base $\mathcal{B} = \{(2+i,1),(2-i,1)\}$

diagonaliza T_E, es decir

$$[T_E]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1+i & 0 \\ 0 & 1-i \end{bmatrix}.$$

Como en el ejercicio anterior, basta considerar

$$P = [\mathrm{Id}]_{\mathcal{BC}} = \begin{bmatrix} 2+i & 2-i \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

f) Caso $\theta \neq 0, \pi$. En el práctico 5, ejercicio (2), calculamos que en este caso los autovalores son $1, \cos\theta + i \operatorname{sen}\theta$, $\cos\theta - i\operatorname{sen}\theta$, con

$$V_1 = \langle(1,0,0)\rangle_{\mathbb{C}}, \qquad V_{\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta} = \langle(0,-i,1)\rangle_{\mathbb{C}}, \qquad V_{\cos\theta - i\operatorname{sen}\theta} = \langle(0,i,1)\rangle_{\mathbb{C}}.$$

Luego, $\mathcal{B} = \{(1,0,0),(0,-i,1),(0,i,1)\}$ es una base que diagonaliza T_{F_θ}. Es decir

$$[T_{F_\theta}]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta + i\sin\theta & 0 \\ 0 & 0 & \cos\theta - i\sin\theta \end{bmatrix}.$$

Y consideramos

$$P = [\mathrm{Id}]_{\mathcal{BC}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -i & i \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

(9) Sea V un $\mathbb{K}-$espacio vectorial, y $T : V \longrightarrow V$ una transformación lineal tal que $v \in V$ es un autovector de autovalor λ. Probar las siguientes afirmaciones.

a) Si $\lambda = 0$, entonces $v \in \mathrm{Nu}(T)$.
b) Si $\lambda \neq 0$, entonces $v \in \mathrm{Im}(T)$.
c) Si $T^2 = 0$, entonces $T - \mathrm{Id}$ es un isomorfismo.

Solución:

a) $T(v) = \lambda v = 0v = 0$. luego $v \in \mathrm{Nu}(T)$.

b) $v = \frac{1}{\lambda}\lambda v = \frac{1}{\lambda}T(v) = T(\frac{1}{\lambda}v)$. Por lo tanto, $v \in \mathrm{Im}(T)$.

c) $(T - \mathrm{Id})(T + \mathrm{Id}) = T^2 - \mathrm{Id} = -\mathrm{Id}$. Por lo tanto, $(T - \mathrm{Id})(-T - \mathrm{Id}) = \mathrm{Id}$ y en consecuencia $-T - \mathrm{Id}$ es la inversa de $T - \mathrm{Id}$. Ahora bien, un operador lineal tiene inversa si y solo si es un isomorfismo.

(10) Sea V un $\mathbb{K}$-espacio vectorial de dimensión 3, y $T : V \longrightarrow V$ una transformación lineal. Supongamos que existe $v \in V$ tal que $T^3(v) = 0$ pero $T^2(v) \neq 0$.

a) Probar que $\mathcal{B} = \{v, T(v), T^2(v)\}$ es una base de V.
b) Calcular la matriz de T respecto de la base $\mathcal{B}$.
c) Calcular los autovalores de T y sus correspondientes autoespacios. Decidir si T es diagonalizable.

Solución:

a) Vamos a probar que $\{v, T(v), T^2(v)\}$ es LI. Sea

$$0 = \alpha v + \beta T(v) + \gamma T^2(v), \tag{01}$$

entonces, aplicando T a la ecuación anterior, obtenemos

$$0 = \alpha T(v) + \beta T^2(v) + \gamma T^3(v) = \alpha T(v) + \beta T^2(v). \tag{02}$$

Finalmente, aplicando T a esta última ecuación obtenemos:

$$0 = \alpha T^2(v) + \beta T^3(v) = \alpha T^2(v). \tag{03}$$

Como $T^2(v) \neq 0$ y $\alpha T^2(v) = 0$, tenemos que $\alpha = 0$. Por (02), obtenemos entonces que $\beta T^2(v) = 0$ y por lo tanto $\beta = 0$. Ahora tenemos $\alpha = \beta = 0$ y entonces por ecuación (01), obtenemos que $\gamma T^2(v) = 0$, lo cual implica que $\gamma = 0$. Concluimos entonces que $\alpha = \beta = \gamma = 0$ y por lo tanto $\{v, T(v), T^2(v)\}$ es LI. Al ser tres vectores LI en un espacio de dimensión 3, resulta que $\mathcal{B} = \{v, T(v), T^2(v)\}$ es una base de V.

b) Veamos como se escriben los vectores resultantes de aplicar T a la base $\mathcal{B} = \{v, T(v), T^2(v)\}$. Es decir $T(v)$, $T^2(v)$, $T^3(v)$:

$$\begin{array}{lclclcl} T(v) & = & 0 \cdot v & + & 1 \cdot T(v) & + & 0 \cdot T^2(v) \\ T^2(v) & = & 0 \cdot v & + & 0 \cdot T(v) & + & 1 \cdot T^2(v) \\ T^3(v) = 0 & = & 0 \cdot v & + & 0 \cdot T(v) & + & 0 \cdot T^2(v). \end{array}$$

Luego

$$[T]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

c) Calculemos el polinomio característico de T:

$$\chi_T(x) = \det([T]_{\mathcal{B}} - x\,\mathrm{Id}) = \det \begin{bmatrix} -x & 0 & 0 \\ 1 & -x & 0 \\ 0 & 1 & -x \end{bmatrix} = -x^3.$$

Luego las raíces del polinomio característico son 0, y por lo tanto el único autovalor es 0. Los autovectores de autovalor 0 son los vectores soluciones de la ecuación

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

es decir $x_1 = 0$ y $x_2 = 0$, por lo tanto $V_0 = \langle (0, 0, 1) \rangle$. Hay un único autoespacio y es de dimensión 1. Por lo tanto T no es diagonalizable.

(11) Definir en cada caso una transformación lineal $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ que satisfaga las condiciones requeridas. ¿Es posible definir más de una transformación lineal?

a) $(1, 0, 0) \in \mathrm{Nu}(T)$
b) $(1, 0, 0) \in \mathrm{Im}(T)$
c) $\{(1, 0, 0), (1, 2, 1)\} \subseteq \mathrm{Nu}(T)$ y $(1, 0, 0) \in \mathrm{Im}(T)$

Solución:

a) $T = 0$ cumple con lo pedido. Para encontrar otras transformaciones lineales que cumplan con lo pedido, completemos $\{e_1 = (1, 0, 0)\}$ a una base de $\mathbb{R}^3$, por ejemplo a la base canónica $\{e_1, e_2, e_3\}$, y luego definimos: $T(e_1) = 0$, $T(e_2) = e_2$, $T(e_3) = e_3$. Podríamos haber elegido en la imagen cualesquiera otros vectores. Por el teorema 4.1.1 del apunte 2020, podemos extender linealmente T a una transformación lineal de $\mathbb{R}^3$ a $\mathbb{R}^3$. De esta forma podemos obtener infinitas transformaciones lineales que satisfacen la consigna del ejercicio.

b) Consideremos e_1, e_2, e_3 y definamos $T(e_1) = e_1$, $T(e_2) = 0$ y $T(e_3) = 0$, luego, por teorema 4.1.1, extendemos a $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ y esta T cumple con lo se pide en el ejercicio. Obviamente hay infinitas posibilidades para elegir $T(e_i)$ y por lo tanto infinitas posibles T.

c) Completemos $\{(1,0,0),(1,2,1)\}$ a una base de $\mathbb{R}^3$, por ejemplo $\mathcal{B} = \{(1,0,0),(1,2,1),(0,1,0)\}$ y definamos $T(1,0,0) = (0,0,0)$, $T(1,2,1) = (0,0,0)$, $T(0,1,0) = (1,0,0)$. Luego, por teorema 4.1.1, extendemos a $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ y esta T cumple con lo se pide en el ejercicio. Evidentemente, hay otros valores posibles de $T(0,1,0)$ que también cumplen que $(1,0,0) \in \operatorname{Im}(T)$. Por ejemplo, $T(0,1,0) = (2,0,0) \Rightarrow T(0,\frac{1}{2},0) = (1,0,0)$.

(12) Decidir si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justificar.

a) Existe una transformación lineal $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $\{(1,0,1),(0,1,0)\}$ es una base de $\operatorname{Nu}(T)$ y $\{(1,0,-1),(0,1,0)\}$ es una base de la $\operatorname{Im}(T)$.
b) Existe una transformación lineal $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $\{(1,0,1)\}$ es una base de $\operatorname{Nu}(T)$ y $\{(1,0,-1),(0,1,0)\}$ es una base de la $\operatorname{Im}(T)$.
c) Existe una transformación lineal $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $\langle(1,2,3),(2,1,-1)\rangle$ es el autoespacio asociado a 0 y $\langle(3,1,1),(1,1,3)\rangle$ es el autoespacio asociado a 5.
d) Existe una transformación lineal $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $\langle(1,2,3)\rangle$ es el autoespacio asociado a 0 y $\langle(3,1,1)\rangle$ es el autoespacio asociado a 5.

Solución:

a) **Falso.** Si existiera tal transformación lineal tendríamos,

$$\dim \operatorname{Nu}(T) + \dim \operatorname{Im}(T) = 2 + 2 = 4 > 3 = \dim \mathbb{R}^3.$$

Lo cual, por el teorema de la dimensión, es absurdo.

b) **Verdadero.** Extendamos $\{(1,0,1)\}$ a una base de $\mathbb{R}^3$, por ejemplo

$$\mathcal{B} = \{(1,0,1),(1,0,0),(0,1,0)\}$$

y definamos

$$T(1,0,1) = (0,0,0), \qquad T(1,0,0) = (1,0,-1), \qquad T(0,1,0) = (0,1,0).$$

Extendemos por linealidad a $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ y obtenemos la transformación lineal deseada.

c) **Falso.** Es claro que $\{(1,2,3),(2,1,-1)\}$ es una base del autoespacio V_0 y $\{(3,1,1),(1,1,3)\}$ es una base del autoespacio V_5. Supongamos que exista tal T. Por un resultado visto en la teórica, sabemos que

$$\dim(V_0 + V_5) = \dim V_0 + \dim V_5 - \dim(V_0 \cap V_5). \qquad (*)$$

Ahora bien, $V_0 + V_5 \subset \mathbb{R}^3$, por lo tanto $3 \geq \dim(V_0 + V_5)$. Por otro lado, $V_0 \cap V_5 = 0$, pues no puede haber un vector no nulo con dos autovalores diferentes. Todo esto implica que, por la ecuación (*),

$$3 \geq \dim(V_0 + V_5) = \dim V_0 + \dim V_5 - 0 = 4.$$

Lo cual es absurdo! y el absurdo vino de suponer que existe una $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ con autoespacios V_0, V_5, cada uno con dimensión 2.

d) **Verdadero.** Como $(1,2,3)$ y $(3,1,1)$ son LI, podemos extender $\{(1,2,3),(3,1,1)\}$ a una base de $\mathbb{R}^3$, por ejemplo $\{(1,2,3),(3,1,1),(0,0,1)\}$. Después definimos

$$T(1,2,3) = (0,0,0), \qquad T(3,1,1) = 5(3,1,1), \qquad T(0,0,1) = (0,0,1)$$

y extendemos por linealidad.