Práctico 1
Matemática Discreta I – Año 2021/1
FAMAF

Ejercicios resueltos

(1) Demostrar las siguientes afirmaciones donde a, b, c y d son siempre números enteros. Justificar cada uno de los pasos en cada demostración indicando el axioma o resultado que utiliza.

a) $a = -(-a)$
Rta: $-a$ es el inverso aditivo de a y por lo tanto el inverso aditivo de $-a$ es a. Ahora bien, $-(-a)$ es el inverso aditivo de $-a$, luego por unicidad del inverso aditivo (axioma I6), obtenemos que $a = -(-a)$.

b) $a = b$ si y sólo si $-a = -b$
Rta: Si $a = b$, es claro que $-a = -b$. Si $-a = -b$, entonces $-(-a) = -(-b)$ y por *a)*, tenemos que $a = b$.

c) $a + a = a$ implica que $a = 0$.
Rta: Sumo $-a$ a ambos lados de la ecuación $a + a = a$ y obtengo, por axioma I6, $-a + a + a = -a + a$, luego $0 + a = 0$ y, finalmente por axioma I4, $a = 0$.

(2) Idem (1).

a) $0 < a$ y $0 < b$ implican $0 < a \cdot b$
Rta: Como $0 < a$ y $0 < b$, por axioma I11, $0 \cdot b < a \cdot b$. Por un resultado del teórico tenemos que $0 \cdot b = 0$, luego $0 < a \cdot b$.

b) $a < b$ y $c < 0$ implican $b \cdot c < a \cdot c$
Rta: Sumamos $-c$ a la inecuación $c < 0$ y obtenemos, por axioma I10, $-c + c < -c + 0$, luego por axioma I6 en la parte izquierda y axioma I4 en la parte derecha, obtenemos $0 < -c$: Ahora bien por axioma I11, $a < b$ y $0 < -c$ implican $a \cdot (-c) < b \cdot (-c)$. Por la regla de los signos tenemos $-a \cdot c < -b \cdot c$. Sumando $a \cdot c$ y $b \cdot c$ a ambos lados de la inecuación y aplicando axioma I10 y repetidamente los axiomas I4 e I6, obtenemos $b \cdot c < a \cdot c$.

(3) Probar las siguientes afirmaciones, justificando los pasos que realiza.

a) Si $0 < a$ y $0 < b$ entonces $a < b$ si y sólo si $a^2 < b^2$.
Rta: Como $a < b$ y $0 < a$ por I11 obtenemos $a^2 < ba$. Como $a < b$ y $0 < b$ por I11 obtenemos $ab < b^2$. Luego $a^2 < ba = ab < b^2$.

b) Si $a \neq 0$ entonces $0 < a^2$.
Rta: Por tricotomía (axioma I8) o bien $0 < a$ o bien $a < 0$. Si $0 < a$, entonces, por *a)* tenemos que $0 = 0^2 < a^2$. Si $a < 0$, sumando $-a$ a ambos miembros de la desigualdad y aplicando axiomas I10, I6 e I4 obtenemos $0 < -a$. Luego, por *a)*, $0 = 0^2 < (-a)^2 = a^2$. La última igualdad se deduce de la regla de los signos.

c) Si $a \neq b$ entonces $a^2 + b^2 > 0$.

Rta: Como $a \neq b$, alguno de los dos, a o b, es distinto de cero. Supongamos que $a \neq 0$ y, entonces, por *b)* tenemos que $0 =< a^2$. Análogamente, si $b \neq 0$, $0 < b^2$ y sumando a^2 a esta inecuación, por axioma I10, obtenemos $a^2 + 0 < a^2 + b^2$, que por axioma I4, es $a^2 < a^2 + b^2$. Como $0 =< a^2$, tenemos $0 =< a^2 < a^2 + b^2$. Falta considerar el caso en que $b = 0$. en este caso $a^2 + b^2 = a^2 + 0^2 = a^2 + 0 = a^2 > 0$.

d) Probar que si $a + c < b + c$ entonces $a < b$.

Rta: Por axioma I10 $a + c - c < b + c - c$. Por axiomas I6 e I4 obtenemos $a < b$.

(4) Calcular evaluando las siguientes expresiones:

a) $\displaystyle\sum_{r=0}^{4} r$. *Rta:* $\displaystyle\sum_{r=0}^{4} r = 0 + 1 + 2 + 3 + 4 = 10$.

b) $\displaystyle\prod_{i=1}^{5} i$. *Rta:* $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$.

c) $\displaystyle\sum_{k=-3}^{-1} \frac{1}{k(k+4)}$. *Rta:* $\frac{1}{-3(-3+4)} + \frac{1}{-2(-2+4)} + \frac{1}{-1(-1+4)} = \frac{1}{-3} + \frac{1}{-4} + \frac{1}{-3} = -\frac{11}{12}$.

d) $\displaystyle\prod_{n=2}^{7} \frac{n}{n-1}$. *Rta:* $\displaystyle\frac{2}{1}\frac{3}{2}\frac{4}{3}\frac{5}{4}\frac{6}{5}\frac{7}{6} = \frac{7}{1} = 7$

(5) Calcular:

a) $2^{10} - 2^9$. *Rta:* $2^{10} - 2^9 = 2 \cdot 2^9 - 2^9 = 2^9 + 2^9 - 2^9 = 2^9$.

b) $3^2 2^5 - 3^5 2^2$. *Rta:* $3^2 2^5 - 3^5 2^2 = 3^2 2^2 (2^3 - 3^3) = 36(-19)$.

c) $(2^2)^n - (2^n)^2$. *Rta:* $(2^2)^n - (2^n)^2 = 2^{2n} - 2^{n2} = 0$.

d) $(2^{2^n} + 1)(2^{2^n} - 1)$. *Rta:* $(2^{2^n} + 1)(2^{2^n} - 1) = (2^{2^n})^2 - 1^2 = 2^{2 \cdot 2^n} - 1 = 2^{2^{n+1}} - 1$.

(6) Dado un natural m, probar que $\forall n \in \mathbb{N}$; x, $y \in \mathbb{R}$, se cumple:

a) $x^n \cdot x^m = x^{n+m}$

Rta: Se fijará n y se hará inducción sobre m.

(*Caso base*) Debemos ver que $x^n x^1 = x^{n+1}$, lo cual es verdadero por la definición recursiva de potencia.

(*Paso inductivo*) Supongamos que el resultado es verdadero para $m = k$, es decir que $x^n x^k = a^{n+k}$ (HI). Veamos que $x^n x^{k+1} = x^{n+k+1}$. Ahora bien,

$$\begin{aligned} x^n x^{k+1} &= x^n x^k x \text{ (definición de potencia)} \\ &= x^{n+k} x \text{ (HI)} \\ &= x^{n+k+1} \text{(definición de potencia)}. \end{aligned}$$

b) $(x \cdot y)^n = x^n \cdot y^n$

Rta: Se hará inducción sobre n.

(*Caso base*) $(x \cdot y)^1 = x \cdot y = x^1 \cdot y^1$, por definición de potencia.

(*Paso inductivo*) Veamos que $(x \cdot y)^k = x^k \cdot y^k$ (HI) $\Rightarrow (x \cdot y)^{k+1} = x^{k+1} \cdot y^{k+1}$, para $k \geq 1$. Ahora bien,

$$(x \cdot y)^{k+1} \overset{\text{def}}{=} (x \cdot y)^k (x \cdot y) \overset{\text{(HI)}}{=} (x^k \cdot y^k)(x \cdot y) = (x^k x) \cdot (y^k y) \overset{\text{def}}{=} x^{k+1} \cdot y^{k+1}.$$

c) $(x^n)^m = x^{n \cdot m}$

Rta: Al igual que en *a)*, se fijará n y se hará inducción sobre m.

(*Caso base*) Debemos ver que $(x^n)^1 = x^n$, lo cual es verdadero por la definición recursiva de potencia.

(*Paso inductivo*) Supongamos que el resultado es verdadero para $m = k$, es decir que $(x^n)^k = x^{nk}$ (HI). Veamos que $(x^n)^{k+1} = x^{n(k+1)}$.

$$(x^n)^{k+1} \overset{\text{def}}{=} (x^n)^k x^n \overset{\text{(HI)}}{=} x^{nk} x^n \overset{(a)}{=} x^{nk+n} = x^{n(k+1)}.$$

(7) Analizar la validez de las siguientes afirmaciones:

a) $(2^{2^n})^{2^k} = 2^{2^{n+k}}$, $n, k \in \mathbb{N}$. *Rta:* Verdadera: $(2^{2^n})^{2^k} = (2^{2^n 2^k}) = 2^{2^{n+k}}$.

b) $(2^n)^2 = 4^n$, $n \in \mathbb{N}$. *Rta:* Verdadera: $(2^n)^2 = 2^{2n} = (2^2)^n = 4^n$.

c) $2^{7+11} = 2^7 + 2^{11}$. Falsa: si divido la ecuación por 2^7 se obtiene $2^{11} = 1 + 2^4$, donde la expresión de la izquierda es par y la de la derecha es impar.

(8) Probar que $\sum_{i=0}^{n} 2^i = 2^{n+1} - 1$ $(n \geq 0)$.

Rta: Haremos inducción sobre n.

(Caso base $n = 0$) $\sum_{i=0}^{0} n2^i = 2^0 = 1 = 2^{+1} - 1$.

(Paso inductivo) Supongamos que $k \geq 0$ y se cumple que $\sum_{i=0}^{k} 2^i = 2^{k+1} - 1$ (hipótesis inductiva). Probaremos que $\sum_{i=0}^{k+1} 2^i = 2^{k+2} - 1$. Ahora bien,

$$\sum_{i=0}^{k+1} 2^i = \sum_{i=0}^{k} 2^i + 2^{k+1} \overset{\text{(HI)}}{=} 2^{k+1} - 1 + 2^{k+1} = 2 \cdot 2^{k+1} - 1 = 2^{k+2} - 1.$$

(9) Probar las siguientes afirmaciones usando inducción en n:

a) $n^2 \leq 2^n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, $n > 3$.

Rta: Se probara por inducción sobre n.

(Caso base $n = 4$) En este caso $4^2 = 16$ y $2^4 = 16$, luego $4^2 \leq 2^4$.

(Paso inductivo) Debemos probar que si para $k \geq 4$ se cumple que $k^2 \leq 2^k$ (HI), entonces $(k+1)^2 \leq 2^{k+1}$.

$$(k+1)^2 \quad = \quad k^2 + 2k + 1 \overset{\text{(HI)}}{\leq} 2^k + 2k + 1. \qquad (*)$$

Por otro lado, $2^{k+1} = 2 \cdot 2^k = 2^k + 2^k$, deberíamos, entonces, probar $2^k + 2k + 1 \leq 2^k + 2^k$ o equivalentemente,

$$2k + 1 \quad \leq \quad 2^k. \qquad (**)$$

Para probar esto debemos hacer inducción nuevamente. El caso base es $k = 4$, y en ese caso $2 \cdot 4 + 1 = 9 \leq 2^4 = 16$. En el paso inductivo debemos probar que $2s + 1 < 2^s$ (HI) $\Rightarrow 2(s+1) + 1 < 2^{s+1}$. Ahora bien,

$$2(s+1) + 1 = (2s+1) + 2 \overset{\text{(HI)}}{\leq} 2^s + 2 < 2^s + 2^s = 2 \cdot 2^s = 2^{s+1}.$$

Luego, hemos probado (∗∗). Por lo tanto

$$(k+1)^2 \overset{(*)}{\leq} 2^k + 2k + 1 \overset{(**)}{\leq} 2^k + 2^k = 2^{k+1}.$$

b) $\forall n \in \mathbb{N}$, $3^n \geq 1 + 2^n$.

Rta: Inducción sobre n.

(Caso base $n = 1$) En este caso $3^1 = 3$ y $1 + 2^1 = 3$, y se verifica la desigualdad.

(Paso inductivo) Debemos ver que si para $k \in \mathbb{N}$, tenemos que $3^k \geq 1 + 2^k$ (HI), entonces $3^{k+1} \geq 1 + 2^{k+1}$.

$$3^{k+1} = 3^k \cdot 3 \overset{\text{(HI)}}{\geq} (1 + 2^k) \cdot 3 = 3 + 3 \cdot 2^k \geq 1 + 2 \cdot 2^k = 1 + 2^{k+1}.$$

(10) Demostrar por inducción las siguientes igualdades:

a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(a_k + b_k) = \sum_{k=1}^{n} a_k + \sum_{k=1}^{n} b_k$, $n \in \mathbb{N}$.

Rta: Inducción en n.

(Caso base $n = 1$) $\sum_{k=1}^{1}(a_k + b_k) = a_1 + b_1 = \sum_{k=1}^{1} a_k + \sum_{k=1}^{1} b_k$, verdadero.

(Paso inductivo) Dado $h \geq 1$ supondremos que

$$\sum_{k=1}^{h}(a_k + b_k) = \sum_{k=1}^{h} a_k + \sum_{k=1}^{h} b_k$$

es verdadera (HI) y deduciremos que

$$\sum_{k=1}^{h+1}(a_k + b_k) = \sum_{k=1}^{h+1} a_k + \sum_{k=1}^{h+1} b_k.$$

Comenzamos con el término de la izquierda de lo que queremos probar y debemos obtener el término de la derecha.

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{h+1}(a_k + b_k) &\overset{(\text{def } \Sigma)}{=} \sum_{k=1}^{h}(a_k + b_k) + a_{h+1} + b_{h+1} \\
&\overset{\text{(HI)}}{=} \sum_{k=1}^{h} a_k + \sum_{k=1}^{h} b_k + a_{h+1} + b_{h+1} \\
&= (\sum_{k=1}^{h} a_k + a_{h+1}) + (\sum_{k=1}^{h} b_k + b_{h+1}) \\
&\overset{(\text{def } \Sigma)}{=} \sum_{k=1}^{h+1} a_k + \sum_{k=1}^{h+1} b_k.
\end{aligned}$$

b) $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} j = \frac{n(n+1)}{2}$, $n \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}$.

Rta: Esta es llamada la *suma aritmética* y la demostraremos por inducción en n.

(Caso base $n = 1$) $\sum_{j=1}^{1} j = 1 = (1 \cdot 2)/2$. Verdadero.

(Paso inductivo) Para $k \geq 1$ suponemos cierto

$$\sum_{j=1}^{k} j = \frac{k(k+1)}{2} \quad \text{(HI)}$$

y debemos demostrar que

$$\sum_{j=1}^{k+1} j = \frac{(k+1)(k+2)}{2} = \frac{(k+1)(k+2)}{2}.$$

Ahora bien,

$$\sum_{j=1}^{k+1} j \overset{(\text{def } \Sigma)}{=} \sum_{j=1}^{k} j + (k+1) \overset{(\text{HI})}{=} \frac{k(k+1)}{2} + (k+1)$$
$$= \frac{k(k+1) + 2(k+1)}{2} = \frac{(k+1)(k+2)}{2}.$$

c) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, $n \in \mathbb{N}$.

Rta: Inducción en n.

(Caso base $n = 1$) $\sum_{i=1}^{1} i^2 = 1$ y $(1(1+1)(2 \cdot 1 + 1))/2 = (1 \cdot 2 \cdot 3)/6 = 1$. Verdadero.

(Paso inductivo) Para $k \geq 1$, supondremos cierto

$$\sum_{i=1}^{k} i^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} \quad \text{(HI)}$$

y probaremos que

$$\sum_{i=1}^{k+1} i^2 = \frac{(k+1)(k+2)(2(k+1)+1)}{6} = \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6} \quad \text{(T)}.$$

Operemos con el lado izquierdo de (T):

$$\sum_{i=1}^{k+1} i^2 \overset{(\text{def } \Sigma)}{=} \sum_{i=1}^{k} i^2 + (k+1)^2$$
$$\overset{(\text{HI})}{=} \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} + (k+1)^2$$
$$= \frac{k(k+1)(2k+1) + 6(k+1)^2}{6} = \frac{(k+1)(k(2k+1) + 6(k+1))}{6}$$
$$= \frac{(k+1)(2k^2 + k + 6k + 6))}{6} = \frac{(k+1)(2k^2 + 7k + 6))}{6}.$$

Por otro lado, desarrollamos el lado derecho de (T):

$$\frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6} = \frac{(k+1)(2k^2 + 3k + 4k + 6)}{6}$$
$$= \frac{(k+1)(2k^2 + 7k + 6)}{6}.$$

Es decir, hemos probado que el lado derecho y el lado izquierdo de (T) son iguales y con esto se prueba el resultado.

d) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(2k+1)=(n+1)^2$, $n\in\mathbb{N}_0$.

Rta: Inducción en n.

(Caso base $n=0$) $\sum_{k=0}^{0}(2k+1)=1=1^2$. Verdadero.

(Paso inductivo) Para $h\geq 0$ suponemos que $\sum_{k=0}^{h}(2k+1)=(h+1)^2$ (HI) y debemos probar que $\sum_{k=0}^{h+1}(2k+1)=(h+2)^2$. Ahora bien,

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{h+1}(2k+1) &\overset{(\text{def }\Sigma)}{=} \sum_{k=0}^{h}(2k+1)+2(h+1)+1\\ &\overset{(\text{HI})}{=} (h+1)^2+2(h+1)+1=(h+2)^2.\end{aligned}$$

e) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i^3=\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$, $n\in\mathbb{N}$.

Rta: Inducción en n.

(Caso base $n=1$) $\sum_{i=1}^{1} i^3=1=(\frac{1\cdot 2}{2})^2$. Verdadero.

(Paso inductivo) Para $k\geq 1$, supondremos cierto $\sum_{i=1}^{k} i^3=\left(\frac{k(k+1)}{2}\right)^2$ (HI) y probaremos $\sum_{i=1}^{k+1} i^3=\left(\frac{(k+1)(k+2)}{2}\right)^2$. Ahora bien,

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{k+1} i^3 &\overset{(\text{def }\Sigma)}{=} \sum_{i=1}^{k} i^3+(k+1)^3 \overset{(\text{HI})}{=} \left(\frac{k(k+1)}{2}\right)^2+(k+1)^3\\ &= \frac{k^2(k+1)^2}{4}+(k+1)^3=(k+1)^2\left(\frac{k^2}{4}+k+1\right)\\ &= (k+1)^2\left(\frac{k^2+4k+4}{4}\right)=(k+1)^2\frac{(k+2)^2}{4}\\ &= \left(\frac{(k+1)(k+2)}{2}\right)^2.\end{aligned}$$

f) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} a^k=\frac{a^{n+1}-1}{a-1}$, donde $a\in\mathbb{R}$, $a\neq 0,\ 1$, $n\in\mathbb{N}_0$.

Rta: Esta es llamada la *suma geométrica* y la demostraremos por inducción en n.

(Caso base $n=0$) $\sum_{k=0}^{0} a^k=a^0=1$ y $\frac{a^1-1}{a-1}=1$. Luego el resultado es verdadero para $n=1$.

(Paso inductivo) Para $h\geq 0$, supondremos cierto $\sum_{k=0}^{h} a^k=\frac{a^{h+1}-1}{a-1}$ (HI) y probaremos $\sum_{k=0}^{h+1} a^k=\frac{a^{h+2}-1}{a-1}$. Ahora bien,

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{h+1} a^k &\overset{(\text{def }\Sigma)}{=} \sum_{k=0}^{h} a^k+a^{h+1} \overset{(\text{HI})}{=} \frac{a^{h+1}-1}{a-1}+a^{h+1}\\ &= \frac{a^{h+1}-1+a^{h+1}(a-1)}{a-1}=\frac{a^{h+1}-1+a^{h+2}-a^{h+1}}{a-1}\\ &= \frac{a^{h+2}-1}{a-1}.\end{aligned}$$

g) $\displaystyle\prod_{i=1}^{n} \frac{i+1}{i} = n+1$, $n \in \mathbb{N}$.

Rta: Inducción en n.

(Caso base $n=1$) $\prod_{i=1}^{1} \frac{i+1}{i} = \frac{2}{1} = 2$. Verdadero.

(Paso inductivo) Para $k \geq 1$, supondremos cierto $\prod_{i=1}^{k} \frac{i+1}{i} = k+1$ y probaremos que $\prod_{i=1}^{k+1} \frac{i+1}{i} = k+2$. Ahora bien,

$$\prod_{i=1}^{k+1} \frac{i+1}{i} \overset{(\text{def } \Pi)}{=} \prod_{i=1}^{k} \frac{i+1}{i} \cdot \frac{k+2}{k+1} \overset{(\text{HI})}{=} (k+1) \cdot \frac{k+2}{k+1} = k+2.$$

h) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{4i^2-1} = \frac{n}{2n+1}$, $n \in \mathbb{N}$.

Rta: Inducción en n.

(Caso base $n=1$) $\sum_{i=1}^{1} \frac{1}{4i^2-1} = \frac{1}{4\cdot 1^2-1} = \frac{1}{3}$. Por otro lado $\frac{1}{2\cdot 1+1} = \frac{1}{3}$. Por lo tanto la fórmula vale para $n=1$.

(Paso inductivo) Para $k \geq 1$, supondremos cierto $\sum_{i=1}^{k} \frac{1}{4i^2-1} = \frac{k}{2k+1}$ (HI) y probaremos $\sum_{i=1}^{k+1} \frac{1}{4i^2-1} = \frac{k+1}{2(k+1)+1} = \frac{k+1}{2k+3}$. Ahora bien,

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{k+1} \frac{1}{4i^2-1} &\overset{(\text{def } \Sigma)}{=} \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{4i^2-1} + \frac{1}{4(k+1)^2-1} \\ &\overset{(\text{HI})}{=} \frac{k}{2k+1} + \frac{1}{4(k+1)^2-1} = (*)\end{aligned}$$

Ahora debemos observar que $4(k+1)^2-1 = 4k^2+8k+3 = (2k+1)(2k+3)$, luego

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{k+1} \frac{1}{4i^2-1} &\overset{(*)}{=} \frac{k}{2k+1} + \frac{1}{(2k+1)(2k+3)} \\ &= \frac{k(2k+3)+1}{(2k+1)(2k+3)} = \frac{k(2k+3)+1}{(2k+1)(2k+3)} \\ &= \frac{2k^2+3k+1}{(2k+1)(2k+3)} = (**)\end{aligned}$$

Observemos que $2k^2+3k+1 = (k+1)(2k+1)$, luego

$$\sum_{i=1}^{k+1} \frac{1}{4i^2-1} \overset{(**)}{=} \frac{(k+1)(2k+1)}{(2k+1)(2k+3)} = \frac{(k+1)}{(2k+3)},$$

que es lo que queríamos demostrar.

i) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i^2 \Big/ \sum_{j=1}^{n} j = \frac{2n+1}{3}$, $n \in \mathbb{N}$.

Rta: En este caso no hace falta hacer inducción: por *c))* y *b))* tenemos que

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \quad \text{y} \quad \sum_{j=1}^{n} j = \frac{n(n+1)}{2},$$

respectivamente. Por lo tanto,

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 \,/\, \sum_{j=1}^{n} j = \left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right) / \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)$$
$$= \frac{n(n+1)(2n+1)2}{6n(n+1)} = \frac{2n+1}{3}.$$

j) $\displaystyle\prod_{i=2}^{n}\left(1-\frac{1}{i^2}\right) = \frac{n+1}{2n}$, $n \in \mathbb{N}$ y $n \geq 2$.
Rta: Inducción en n.
(Caso base $n = 2$) $\prod_{i=2}^{2}\left(1-\frac{1}{i^2}\right) = (1-\frac{1}{2^2}) = \frac{4-1}{4} = \frac{3}{4} = \frac{2+1}{2\cdot 2}$.
(Paso inductivo) Para $k \geq 1$, supondremos cierto $\prod_{i=2}^{k}\left(1-\frac{1}{i^2}\right) = \frac{k+1}{2k}$ y deberemos probar que $\prod_{i=2}^{k+1}\left(1-\frac{1}{i^2}\right) = \frac{k+2}{2(k+1)}$. Ahora bien,

$$\prod_{i=1}^{k+1}\left(1-\frac{1}{i^2}\right) \overset{(\text{def }\Pi)}{=} \prod_{i=1}^{k}\left(1-\frac{1}{i^2}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{(k+1)^2}\right)$$
$$\overset{(\text{HI})}{=} \frac{k+1}{2k}\cdot\left(1-\frac{1}{(k+1)^2}\right) = \frac{k+1}{2k}\cdot\frac{(k+1)^2-1}{(k+1)^2}$$
$$= \frac{k+1}{2k}\cdot\frac{k^2+2k}{(k+1)^2} = \frac{k^2+2k}{2k(k+1)} = \frac{k(k+2)}{2k(k+1)}$$
$$= \frac{k+2}{2(k+1)}.$$

k) Si $a \in \mathbb{R}$ y $a \geq -1$, entonces $(1+a)^n \geq 1 + n\cdot a$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$.
Rta: Inducción en n.
(Caso base $n = 1$) $(1+a)^1 = 1 + a = 1 + 1\cdot a$.
(Paso inductivo) Para $k \geq 1$, supondremos cierto que $(1+a)^k \geq 1 + ka$ y probaremos que $(1+a)^{k+1} \geq 1 + (k+1)a$. Ahora bien,

$$(1+a)^{k+1} \overset{(\text{def } x^n)}{=} (1+a)^k(1+a) \qquad (*)$$

Como $a \geq -1$, entonces $1 + a \geq 0$, por (HI) tenemos que $(1+a)^k \geq 1 + ka$, entonces por compatibilidad del producto con el orden obtenemos

$$(1+a)^k(1+a) \geq (1+ka)(1+a) \qquad (**)$$

De $(*)$ y $(**)$ obtenemos

$$(1+a)^{k+1} \geq (1+ka)(1+a)$$
$$= 1 + ka + a + ka^2 = 1 + (k+1)a + ka^2$$
$$\geq 1 + (k+1)a$$

(la última desigualdad vale pues $ka^2 \geq 0$).

l) Si $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$, entonces $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k^2 \leq \left(\sum_{k=1}^{n} |a_k|\right)^2$, $n \in \mathbb{N}$.
Rta: Como a_k^2 y $|a_k|$ son no negativos, podemos hacer el ejercicio pensando que $a_k \geq 0$ para todo k (con eso evitamos un poco de notación). Debemos

entonces probar que si $a_1, \ldots, a_n$ son no negativos, entonces

$$\sum_{k=1}^{n} a_k^2 \leq \left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)^2.$$

Lo haremos por inducción en n.

(Caso base $n = 1$) $\sum_{k=1}^{1} a_k^2 = a_1^2 = (\sum_{k=1}^{1} a_k)^2$.

(Paso inductivo) Para $h \geq 1$, supondremos cierto $\sum_{k=1}^{h} a_k^2 \leq \left(\sum_{k=1}^{h} a_k\right)^2$ y deberemos probar $\sum_{k=1}^{h+1} a_k^2 \leq \left(\sum_{k=1}^{h+1} a_k\right)^2$. Ahora bien,

$$\sum_{k=1}^{h+1} a_k^2 \overset{(\text{def } \Sigma)}{=} \sum_{k=1}^{h} a_k^2 + a_{h+1}^2 \overset{(\text{HI})}{\leq} \left(\sum_{k=1}^{h} a_k\right)^2 + a_{h+1}^2. \qquad (*)$$

Observemos que si $x, y \geq 0$, entonces $x^2 + y^2 \leq (x+y)^2$ (pues $2xy \geq 0$). Por lo tanto

$$\left(\sum_{k=1}^{h} a_k\right)^2 + a_{h+1}^2 \leq \left(\sum_{k=1}^{h} a_k + a_{h+1}\right)^2. \qquad (**)$$

Combinanado $(*)$ y $(**)$ obtenemos

$$\sum_{k=1}^{h+1} a_k^2 \leq \left(\sum_{k=1}^{h} a_k + a_{h+1}\right)^2 \overset{(\text{def } \Sigma)}{=} \left(\sum_{k=1}^{h+1} a_k\right)^2$$

que es lo que queríamos demostrar.

m) Si $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ y $0 < a_i < 1$ para $1 \leq i \leq n$, entonces $(1-a_1)\cdots(1-a_n) \geq 1 - a_1 - \cdots - a_n$, $n \in \mathbb{N}$.

Rta: Lo que debemos probar es equivalente a $\prod_{i=1}^{n}(1-a_i) \geq 1 - \sum_{i=1}^{n} a_i$ y la demostraremos haciendo inducción en n.

(Caso base $n = 1$) $\prod_{i=1}^{1}(1-a_i) = 1 - a_1 = 1 - \sum_{i=1}^{1} a_i$.

(Paso inductivo) Para $k \geq 1$, supondremos cierto $\prod_{i=1}^{k}(1-a_i) \geq 1 - \sum_{i=1}^{k} a_i$ (HI) y probaremos $\prod_{i=1}^{k+1}(1-a_i) \geq 1 - \sum_{i=1}^{k+1} a_i$. Ahora bien,

$$\begin{aligned}\prod_{i=1}^{k+1}(1-a_i) &\overset{(\text{def } \Pi)}{=} \prod_{i=1}^{k}(1-a_i) \cdot (1-a_{k+1}) \\ &\overset{(\text{HI})}{\geq} (1 - \sum_{i=1}^{k} a_i) \cdot (1-a_{k+1}) = (*)\end{aligned}$$

La última desigualdad es verdadera, puesto que como $0 < a_{k+1} < 1$, entonces $0 < 1 - a_{k+1} < 1$. Luego

$$\begin{aligned}(*) &= 1 - \sum_{i=1}^{k} a_i - a_{k+1} + (\sum_{i=1}^{k} a_i)a_{k+1} \overset{(\text{def } \Sigma)}{=} 1 - \sum_{i=1}^{k+1} a_i + (\sum_{i=1}^{k} a_i)a_{k+1} \\ &\geq 1 - \sum_{i=1}^{k+1} a_i,\end{aligned}$$

y esta última desigualdad se debe a que $(\sum_{i=1}^{k} a_i)a_{k+1} \geq 0$.

(11) Hallar $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\forall n \geq n_0$ se cumpla que $n^2 \geq 11 \cdot n + 3$.
Rta: Para $n = 1, \ldots, 11$, es claro que no se cumple pues $n^2 \leq 11n < 11n + 3$. Para $n = 12$ la desiguald se cumple, pues $12^2 = 144 \geq 121 + 3$. Probaremos que $n^2 \geq 11n + 3$ para $n \geq 12$.

(Caso base $n = 12$) Lo vimos más arriba.

(Paso inductivo) Para $k \geq 12$, supondremos cierto $k^2 \geq 11n + 3$ (HI) y debemos probar que $(k+1)^2 \geq 11(k+1) + 3 = 11k + 14$. Ahora bien,

$$(k+1)^2 = k^2 + 2k + 1 \overset{\text{(HI)}}{\geq} 11k + 3 + 2k + 1 = 11k + 2k + 4 \geq 11k + 14,$$

y la última desigualdad es válida pues como $k \geq 12$, entonces $2k + 4 \geq 14$.

(12) Sea $u_1 = 3$, $u_2 = 5$ y $u_n = 3u_{n-1} - 2u_{n-2}$ con $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$. Probar que $u_n = 2^n + 1$.
Rta: Para $n = 1$ el resultado es verdadero pues $u_1 = 3 = 1^1 + 1$. Tomaremos el caso base $n = 2$.

(Caso base) El resultado es verdadero cuando $n = 2$ pues $u_2 = 5 = 2^2 + 1$.

(Paso inductivo) Supongamos que $k \geq 2$ y el resultado es cierto para los h tales que $1 \leq h \leq k$. Es decir que $u_h = 2^h + 1$ para $1 \leq h \leq k$ y $k \geq 2$ (hipótesis inductiva), entonces debemos probar que $u_{k+1} = 2^{k+1} + 1$. Ahora bien,

$$\begin{aligned}
u_{k+1} &= 3u_k - 2u_{k-1} && \text{(por definición recursiva)} \\
&= 3(2^k + 1) - 2(2^{k-1} + 1) && \text{(por hipótesis inductiva)} \\
&= 3 \cdot 2^k + 3 - 2 \cdot 2^{k-1} - 2 \\
&= 3 \cdot 2^k + 1 - 2^k \\
&= 2 \cdot 2^k + 1 \\
&= 2^{k+1} + 1.
\end{aligned}$$

(13) Sea $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ la sucesión definida por recurrencia como sigue: $u_1 = 9$, $u_2 = 33$, $u_n = 7u_{n-1} - 10u_{n-2}$, $\forall n \geq 3$. Probar que $u_n = 2^{n+1} + 5^n$, para todo $n \in \mathbb{N}$.
Rta: Para $n = 1$ el resultado es verdadero pues $u_1 = 9 = 2^{1+1} + 5^1$. Tomaremos el caso base $n = 2$.

(Caso base) El resultado es verdadero cuando $n = 2$ pues $u_2 = 33 = 2^{2+1} + 5^2$.

(Paso inductivo) Supongamos que $k \geq 2$ y el resultado es cierto para los h tales que $1 \leq h \leq k$. Es decir que $u_h = 2^{h+1} + 5^h$ para $1 \leq h \leq k$ y $k \geq 2$ (hipótesis inductiva), entonces debemos probar que $u_{k+1} = 2^{k+2} + 5^{k+1}$. Ahora bien,

$$\begin{aligned}
u_{k+1} &= 7u_{k+1-1} - 10u_{k+1-2} && \text{(por definición recursiva)} \\
&= 7u_k - 10u_{k-1} \\
&= 7(2^{k+1} + 5^k) - 10(2^{k-1+1} + 5^{k-1}) && \text{(por hipótesis inductiva)} \\
&= 7 \cdot 2^{k+1} + 7 \cdot 5^k - 10 \cdot 2^k - 10 \cdot 5^{k-1} \\
&= 7 \cdot 2 \cdot 2^k + 7 \cdot 5 \cdot 5^{k-1} - 10 \cdot 2^k - 10 \cdot 5^{k-1} \\
&= (7 \cdot 2 - 10) \cdot 2^k + (7 \cdot 5 - 10) \cdot 5^{k-1} \\
&= 4 \cdot 2^k + 25 \cdot 5^{k-1} \\
&= 2^2 \cdot 2^k + 5^2 \cdot 5^{k-1} \\
&= 2^{k+2} + 5^{k+1}
\end{aligned}$$

(14) Sea u_n definida recursivamente por: $u_1 = 2$, $u_n = 2 + \sum_{i=1}^{n-1} 2^{n-2i} u_i \ \ \forall\, n > 1$.

a) Calcule u_2 y u_3.

Rta: $u_2 = 2 + \sum_{i=1}^{1} 2^{2-2i} u_i = 2 + 2^{2-2} u_1 = 2 + u_1 = 4$.
$u_3 = 2 + \sum_{i=1}^{2} 2^{3-2i} u_i = 2 + 2^{3-2} u_1 + 2^{3-4} u_2 = 2 + 2^1 2 + 2^{-1} 4 = 8$.

b) Proponga una fórmula para el término general u_n y pruébela por inducción.

Rta: Calculemos el cuarto témino de la sucesión: $u_4 = 2 + \sum_{i=1}^{3} 2^{4-2i} u_i = 2 + 2^{4-2} u_1 + 2^{4-4} u_2 + 2^{4-6} u_3 = 2 + 2^2 2 + 2^0 4 + 2^{-2} 8 = 16$.

Entonces tenemos que $u_1 = 2 = 2^1$, $u_2 = 4 = 2^2$, $u_3 = 8 = 2^3$. Esto nos indica que debería ser $u_n = 2^n$. y lo haremos por inducción completa.

(Caso base) Para $n = 2$, por *a)*, se cumple $u_2 = 4 = 2^2$.

(Paso inductivo) Supongamos que $k \geq 1$ y el resultado es cierto para los h tales que $1 \leq h \leq k$, es decir $u_h = 2^h$ para $1 \leq h \leq k$. Debemos probar que $u_{k+1} = 2^{k+1}$. Ahora bien

$$\begin{aligned}
u_{k+1} &= 2 + \textstyle\sum_{i=1}^{k+1-1} 2^{k+1-2i} u_i && \text{(por definición recursiva)}\\
&= 2 + \textstyle\sum_{i=1}^{k} 2^{k+1-2i} u_i \\
&= 2 + \textstyle\sum_{i=1}^{k} 2^{k+1-2i} 2^i && \text{(por hipótesis inductiva)}\\
&= 2 + \textstyle\sum_{i=1}^{k} 2^{k+1-2i+i} \\
&= 2 + \textstyle\sum_{i=1}^{k} 2^{k+1-i} \\
&= 2 + \textstyle\sum_{j=1}^{k} 2^{j} && \text{(cambio de variables } j = k+1-i\text{)}\\
&= 2 + 2^{k+1} - 2 && \text{(por ej. (8) o su generalización, ej. } f)\text{)}\\
&= 2^{k+1}
\end{aligned}$$

(15) Las siguientes proposiciones no son válidas para todo $n \in \mathbb{N}$. Indicar en qué paso del principio de inducción falla la demostración:

a) $n = n^2$.

Rta: Para el caso base no falla pues $1 = 1^2$, pero cuando queremos hacer el paso inductivo tenemos

$$k + 1 \overset{\text{(HI)}}{=} k^2 + 1 \neq (k+1)^2.$$

b) $n = n + 1$. No vale en el caso base: $1 \neq 1 + 1$.

c) $3^n = 3^{n+2}$. No vale en el caso base: $3^1 = 3 \neq 27 = 3^3$.

d) $3^{3n} = 3^{n+2}$.

Rta: La afirmación vale en el caso base pues $3^{3\cdot 1} = 3^{1+2}$. En el paso inductivo debemos probar que si vale $3^{3k} = 3^{k+2}$, entonces se cumple $3^{3(k+1)} = 3^{(k+1)+3}$. Sin embargo, usando la (HI) obtenemos:

$$3^{3(k+1)} = 3^{3k+3} = 3^{3k} 3^3 \overset{\text{(HI)}}{=} 3^{k+2} 3^3 = 3^{k+5}.$$

Por otro lado $3^{(k+1)+2} = 3^{k+3}$. Deberíamos probar entonces que $3^{k+5} = 3^{k+3}$, pero esto es falso pues dividiendo por 3^{k+3} obtenemos $3^2 = 1$, lo cual es absurdo.

(16) Encuentre el error en los siguientes argumentos de inducción.

a) Demostraremos que $5n + 3$ es múltiplo de 5 para todo $n \in \mathbb{N}$.

Supongamos que $5k + 3$ es múltiplo de 5, siendo $k \in \mathbb{N}$. Entonces existe $p \in \mathbb{N}$ tal que $5k + 3 = 5p$. Probemos que $5(k+1) + 3$ es múltiplo de 5:

Como

$$5(k+1)+3 = (5k+5)+3 = (5k+3)+5 = 5p+5 = 5(p+1),$$

entonces obtenemos que $5(k+1)+3$ es múltiplo de 5. Por lo tanto, por el principio de inducción, demostramos que $5n+3$ es múltiplo de 5 para todo $n \in \mathbb{N}$.

Rta: El caso base es par $n = 1$ y en ese caso $5 \cdot 1 + 3 = 8$ que no es divisible por 5. Por lo tanto al fallar el caso base no es posible hacer la demostración por inducción.

b) Sea $a \in \mathbb{R}$, con $a \neq 0$. Vamos a demostrar que para todo entero no negativo n, $a^n = 1$.

Como $a^0 = 1$ por definición, la proposición es verdadera para $n = 0$. Supongamos que para un entero k, $a^m = 1$ para $0 \leq m \leq k$. Entonces $a^{k+1} = \frac{a^k a^k}{a^{k-1}} = \frac{1 \cdot 1}{1} = 1$. Por lo tanto, el principio de inducción fuerte implica que $a^n = 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Rta: En este caso falla el paso inductivo para $k = 0$, en este caso el razonamiento es

$$a^1 = \frac{a^0 a^0}{a^{-1}} = \frac{1 \cdot 1}{1} = 1$$

Pero la última igualdad es incorrecta, pues nada demuestra que a^{-1} se igual a 1 y, en efecto, no lo es salvo que $a = 1$.

(17) * La *sucesión de Fibonacci* se define recursivamente de la siguiente manera:

$$u_1 = 1, \quad u_2 = 1, \quad u_{n+1} = u_n + u_{n-1},\ n \geq 2.$$

Los primeros términos de esta sucesión son: $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \ldots$

Demostrar por inducción que el término general de esta sucesión se puede calcular mediante la fórmula

$$u_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right].$$

(*Ayuda:* usar que $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ y $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ son las raíces de la ecuación cuadrática $x^2 - x - 1 = 0$ y por lo tanto $\left(\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} = \left(\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}\right)^n + \left(\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}$).

Rta: LLamemos $\rho_+ = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ y $\rho_= \frac{1-\sqrt{5}}{2}$, queremos probar entonces

$$u_n = \frac{1}{\sqrt{5}}(\rho_+^n - \rho_-^n). \qquad (P_n)$$

Como dice el enunciado, lo haremos por indicción en n.

(Caso base, $n = 1, 2$) . Para $n = 1$:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\rho_+^1 - \rho_-^1\right] &= \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}-1+\sqrt{5}}{2}\right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{5}}\frac{2\sqrt{5}}{2} = 1 \\
&= u_1.
\end{aligned}$$

Para $n = 2$:

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\rho_+^2 - \rho_-^2\right] &= \frac{1}{\sqrt{5}}(\rho_+ - \rho_-)(\rho_+ + \rho_-)\\ &= \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \sqrt{5} \cdot 1 = 1\\ &= u_2.\end{aligned}$$

(Paso inductivo) Dado $n \geq 2$, supongamos que

$$u_k = \frac{1}{\sqrt{5}}(\rho_+^k - \rho_-^k) \quad \text{para } k \leq n. \tag{HI}$$

y probemos que

$$u_{n+1} = \frac{1}{\sqrt{5}}(\rho_+^{n+1} - \rho_-^{n+1}).$$

Como dice la ayuda, $\rho_\pm^2 - \rho_\pm - 1$, luego,

$$\rho_\pm^2 = \rho_\pm + 1,$$

y si multiplicamos por $\rho_\pm^{n-1}$, obtenemos

$$\rho_\pm^{n+1} = \rho_\pm^n + \rho_\pm^{n-1}. \tag{*}$$

Luego

$$\begin{aligned}u_{n+1} &= u_n + u_{n-1} && \text{(def. recursiva)}\\ &= \frac{1}{\sqrt{5}}(\rho_+^n - \rho_-^n) + \frac{1}{\sqrt{5}}(\rho_+^{n-1} - \rho_-^{n-1}) && \text{(por HI)}\\ &= \frac{1}{\sqrt{5}}(\rho_+^n + \rho_+^{n-1}) - \frac{1}{\sqrt{5}}(\rho_-^n + \rho_-^{n-1})\\ &= \frac{1}{\sqrt{5}}\rho_+^{n+1} - \frac{1}{\sqrt{5}}\rho_-^{n+1} && \text{(por (*))}\\ &= \frac{1}{\sqrt{5}}(\rho_+^{n+1} - \rho_-^{n+1}).\end{aligned}$$