

**Práctico 3**  
**Matemática Discreta I – Año 2021/1**  
**FAMAF**

- (1) Hallar el cociente y el resto de la división de:
- (2) a) Si  $a = b \cdot q + r$ , con  $b \leq r < 2b$ , hallar el cociente y el resto de la división de  $a$  por  $b$ .  
b) Repetir el ejercicio anterior, suponiendo ahora que  $-b \leq r < 0$ .
- (3) Dado  $m \in \mathbb{N}$  hallar los restos posibles de  $m^2$  y  $m^3$  en la división por 3, 4, 5, 7, 8, 11.
- (4) Expresar en base 10 los siguientes enteros:  
a)  $(1503)_6$                       b)  $(1111)_2$                       c)  $(1111)_{12}$   
d)  $(123)_4$                       e)  $(12121)_3$                       f)  $(1111)_5$
- (5) Convertir  
a)  $(133)_4$  a base 8,                      b)  $(B38)_{16}$  a base 8,  
c)  $(3506)_7$  a base 2,                      d)  $(1541)_6$  a base 4.
- (6) Calcular:  
a)  $(2234)_5 + (2310)_5$ ,                      b)  $(10101101)_2 + (10011)_2$ .
- (7) Sean  $a, b, c \in \mathbb{Z}$ . Demostrar las siguientes afirmaciones:  
a) Si  $ab = 1$ , entonces  $a = b = 1$  ó  $a = b = -1$ .  
b) Si  $a, b \neq 0$ ,  $a|b$  y  $b|a$ , entonces  $a = b$  ó  $a = -b$ .  
c) Si  $a|1$ , entonces  $a = 1$  ó  $a = -1$ .  
d) Si  $a \neq 0$ ,  $a|b$  y  $a|c$ , entonces  $a|(b + c)$  y  $a|(b - c)$ .  
e) Si  $a \neq 0$ ,  $a|b$  y  $a|(b + c)$ , entonces  $a|c$ .  
f) Si  $a \neq 0$  y  $a|b$ , entonces  $a|b \cdot c$ .
- (8) Dados  $b, c$  enteros, probar las siguientes propiedades:  
a) 0 es par y 1 es impar.  
b) Si  $b$  es par y  $b | c$ , entonces  $c$  es par. (Por lo tanto, si  $b$  es par, también lo es  $-b$ ).  
c) Si  $b$  y  $c$  son pares, entonces  $b + c$  también lo es.  
d) Si un número par divide a 2, entonces ese número es 2 ó  $-2$ .  
e) La suma de un número par y uno impar es impar.

f)  $b + c$  es par si y sólo si  $b$  y  $c$  son ambos pares o ambos impares.

(9) Sea  $n \in \mathbb{Z}$ . Probar que  $n$  es par si y sólo si  $n^2$  es par.

(10) Probar que  $n(n + 1)$  es par para todo  $n$  entero.

(11) Sean  $a, b, c \in \mathbb{Z}$ . ¿Cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas? Justificar las respuestas.

a)  $a \mid b \cdot c \Rightarrow a \mid b$  ó  $a \mid c$ .

b)  $a \mid (b + c) \Rightarrow a \mid b$  ó  $a \mid c$ .

c)  $a \mid c$  y  $b \mid c \Rightarrow a \cdot b \mid c$ .

d)  $a \mid c$  y  $b \mid c \Rightarrow (a + b) \mid c$ .

e)  $a, b, c > 0$  y  $a = b \cdot c$ , entonces  $a \geq b$  y  $a \geq c$ .

(12) Probar que cualquiera sea  $n \in \mathbb{N}$ :

a)  $3^{2n+2} + 2^{6n+1}$  es múltiplo de 11.

b)  $3^{2n+2} - 8n - 9$  es divisible por 64.

(13) Decir si es verdadero o falso justificando:

a)  $3^n + 1$  es múltiplo de  $n$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}$ .

b)  $3n^2 + 1$  es múltiplo de 2,  $\forall n \in \mathbb{N}$ .

c)  $(n + 1) \cdot (5n + 2)$  es múltiplo de 2,  $\forall n \in \mathbb{N}$ .

(14) Probar que para todo  $n \in \mathbb{Z}$ ,  $n^2 + 2$  no es divisible por 4.

(15) Probar que todo entero impar que no es múltiplo de 3, es de la forma  $6m \pm 1$ , con  $m$  entero.

(16) a) Probar que el producto de tres enteros consecutivos es divisible por 6.

b) Probar que el producto de cuatro enteros consecutivos es divisible por 24 (ayuda: el número combinatorio  $\binom{n}{4}$  es entero).

(17) Probar que si  $a$  y  $b$  son enteros entonces  $a^2 + b^2$  es divisible por 7 si y sólo si  $a$  y  $b$  son divisibles por 7. ¿Es lo mismo cierto para 3? ¿Para 5?

(18) Encontrar  $(7469, 2464)$ ,  $(2689, 4001)$ ,  $(2447, -3997)$ ,  $(-1109, -4999)$ .

(19) Calcular el máximo común divisor y expresarlo como combinación lineal de los números dados, para cada uno de los siguientes pares de números:

a) 14 y 35,

b) 11 y 15,

c) 12 y 52,

- d) 12 y  $-52$ ,                      e) 12 y 532,                      f) 725 y 441,  
g) 606 y 108.

- (20) Probar que no existen enteros  $x$  e  $y$  que satisfagan  $x + y = 100$  y  $(x, y) = 3$ .
- (21) a) Sean  $a$  y  $b$  coprimos. Probar que si  $a \mid b \cdot c$  entonces  $a \mid c$ .  
b) Sean  $a$  y  $b$  coprimos. Probar que si  $a \mid c$  y  $b \mid c$ , entonces  $a \cdot b \mid c$ .
- (22) Probar que si  $n \in \mathbb{Z}$ , entonces los números  $2n + 1$  y  $\frac{n(n+1)}{2}$  son coprimos.
- (23) Encontrar todos los enteros positivos  $a$  y  $b$  tales que  $(a, b) = 10$  y  $[a, b] = 100$ .
- (24) a) Probar que si  $d$  es divisor común de  $a$  y  $b$ , entonces  $\frac{(a, b)}{d} = \left( \frac{a}{d}, \frac{b}{d} \right)$ .  
b) Probar que si  $a, b \in \mathbb{Z}$  no nulos, entonces  $\frac{a}{(a, b)}$  y  $\frac{b}{(a, b)}$  son coprimos.
- (25) Probar que 3 y 5 son números primos.
- (26) Dar todos los números primos positivos menores que 100.
- (27) Determinar con el criterio de la raíz cuáles de los siguientes números son primos: 113, 123, 131, 151, 199, 503.
- (28) Si  $a \cdot b$  es un cuadrado y  $a$  y  $b$  son coprimos, probar que  $a$  y  $b$  son cuadrados.
- (29) a) Probar que  $\sqrt{5}$  no es un número racional.  
b) Probar que  $\sqrt{15}$  no es un número racional.  
c) Probar que  $\sqrt{8}$  no es un número racional.  
d) Probar que  $\sqrt[3]{4}$  no es un número racional.
- (30) Probar que si  $p_k$  es el  $k$ -ésimo primo positivo entonces
- $$p_{k+1} \leq p_1 \cdot p_2 \cdot \cdots \cdot p_k + 1$$
- (31) Calcular el máximo común divisor y el mínimo común múltiplo de los siguientes pares de números usando la descomposición en números primos.
- a)  $a = 12$  y  $b = 15$ .                      b)  $a = 11$  y  $b = 13$ .  
c)  $a = 140$  y  $b = 150$ .                      d)  $a = 3^2 \cdot 5^2$  y  $b = 2^2 \cdot 11$ .  
e)  $a = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$  y  $b = 2 \cdot 5 \cdot 7$ .