Práctico 3 - Repaso
Matemática Discreta I – Año 2021/1
FAMAF

(1) Sea p primo positivo. Probar que $(p,(p-1)!) = 1$.

(2) Demostrar que $\forall n \in \mathbb{Z}$, $n > 2$, existe p primo tal que $n < p < n!$. (Ayuda: pensar qué primos dividen a $n! - 1$.)

(3) Dado un entero $a > 0$ fijo, caracterizar aquellos números que al dividirlos por a tienen cociente igual al resto.

(4) Probar que si $(a, 4) = 2$ y $(b, 4) = 2$ entonces $(a + b, 4) = 4$.

(5) Probar que si a, b son coprimos entonces $(a + b, a - b) = 1$ ó 2.

(6) Completar y demostrar:
  a) Si $a \in \mathbb{Z}$, entonces $[a, a] = \ldots$
  b) Si a, $b \in \mathbb{Z}$, $[a, b] = b$ si y sólo si $\ldots$
  c) $(a, b) = [a, b]$ si y sólo si $\ldots$

(7) Probar que si d es un divisor común de a y b, entonces $\dfrac{[a,b]}{d} = \left[\dfrac{a}{d}, \dfrac{b}{d}\right]$.

(8) Probar que $(a + b, [a, b]) = (a, b)$.

(9) Probar que si $(a, b) = 1$ y $n+2$ es un número primo, entonces $(a+b, a^2+b^2-nab) = 1$ ó $n+2$.

(10) Si $a \cdot b$ es un cuadrado y a y b son coprimos, probar que a y b son cuadrados.

(11) Probar que $\sqrt{6}$ es irracional.

(12) Hallar el menor múltiplo de 168 que es un cuadrado.

(13) Probar que el producto de dos enteros consecutivos no nulos no es un cuadrado. (Ayuda: usar el Teorema Fundamental de la Aritmética).

(14) ¿Existen enteros m y n tales que:
  a) $m^4 = 27$? b) $m^2 = 12n^2$? c) $m^3 = 47n^3$?

(15) Sean a y b enteros coprimos. Probar que
  a) $(a \cdot c, b) = (b, c)$, para todo entero c.
  b) a^m y b^n son coprimos, para todo $m, n \in \mathbb{N}$.
  c) $a + b$ y $a \cdot b$ son coprimos.

(16) ¿Cuál es la mayor potencia de 3 que divide a 100!? ¿En cuántos ceros termina el desarrollo decimal de 100!?

(17) Determinar todos los $p \in \mathbb{N}$ tales que

$$p,\ p+2,\ p+6,\ p+8,\ p+12,\ p+14$$

sean todos primos.

(18) Sea $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ la sucesión de Fibonacci, definida recursivamente por: $f_1 = 1$, $f_2 = 1$, $f_{n+1} = f_n + f_{n-1}$, $n \geq 2$. Probar que:

a) f_{3n} es par $\forall\, n \in \mathbb{N}$.
b) f_{3n+1} y f_{3n+2} son impares $\forall\, n \in \mathbb{N}$.
c) $f_{n+m} = f_m f_{n+1} + f_{m-1} f_n$ $\forall n, m \in \mathbb{N}$, $m \geq 2$.
d) $f_n \mid f_{nk}$ $\forall k \in \mathbb{N}$.
e) $f_{n+1} f_{n-1} - f_n^2 = (-1)^n$ $\forall n \geq 2$.
f) $(f_{n+1}, f_n) = 1$ $\forall\, n \in \mathbb{N}$.