Práctico 3
Matemática Discreta I – Año 2021/1
FAMAF

(1) Hallar el cociente y el resto de la división de:

a) 135 por 23, *c)* 135 por -23, *e)* 127 por 99,
b) -135 por 23, *d)* -135 por -23, *f)* 98 por 73.

(2) *a)* Si $a = b \cdot q + r$, con $b \leq r < 2b$, hallar el cociente y el resto de la división de a por b.
b) Repetir el ejercicio anterior, suponiendo ahora que $-b \leq r < 0$.

(3) Dado $m \in \mathbb{N}$ hallar los restos posibles de m^2 y m^3 en la división por $3, 4, 5, 7, 8, 11$.

(4) Expresar en base 10 los siguientes enteros:

a) $(1503)_6$ *c)* $(1111)_{12}$ *e)* $(12121)_3$
b) $(1111)_2$ *d)* $(123)_4$ *f)* $(1111)_5$

(5) Convertir

a) $(133)_4$ a base 8, *c)* $(3506)_7$ a base 2,
b) $(B38)_{16}$ a base 8, *d)* $(1541)_6$ a base 4.

(6) Calcular: a) $(2234)_5 + (2310)_5$ b)$(10101101)_2 + (10011)_2$.

(7) Sean a, b, $c \in \mathbb{Z}$. Demostrar las siguientes afirmaciones:
a) Si $ab = 1$, entonces $a = b = 1$ ó $a = b = -1$.
b) Si $a, b \neq 0$, $a|b$ y $b|a$, entonces $a = b$ ó $a = -b$.
c) Si $a|1$, entonces $a = 1$ ó $a = -1$.
d) Si $a \neq 0$, $a|b$ y $a|c$, entonces $a|(b + c)$ y $a|(b - c)$.
e) Si $a \neq 0$, $a|b$ y $a|(b + c)$, entonces $a|c$.
f) Si $a \neq 0$ y $a|b$, entonces $a|b \cdot c$.

(8) Dados b, c enteros, probar las siguientes propiedades:
a) 0 es par y 1 es impar.
b) Si b es par y $b \mid c$, entonces c es par. (Por lo tanto, si b es par, también lo es $-b$).
c) Si b y c son pares, entonces $b + c$ también lo es.
d) Si un número par divide a 2, entonces ese número es 2 ó -2.
e) La suma de un número par y uno impar es impar.
f) $b + c$ es par si y sólo si b y c son ambos pares o ambos impares.

(9) Sea $n \in \mathbb{Z}$. Probar que n es par si y sólo si n^2 es par.

(10) Probar que $n(n+1)$ es par para todo n entero.

(11) Sean a, b, $c \in \mathbb{Z}$. ¿Cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas? Justificar las respuestas.
  a) $a \mid b \cdot c \Rightarrow a \mid b$ ó $a \mid c$.
  b) $a \mid (b+c) \Rightarrow a \mid b$ ó $a \mid c$.
  c) $a \mid c$ y $b \mid c \Rightarrow a \cdot b \mid c$.
  d) $a \mid c$ y $b \mid c \Rightarrow (a+b) \mid c$.
  e) $a, b, c > 0$ y $a = b \cdot c$, entonces $a \geq b$ y $a \geq c$.

(12) Probar que cualquiera sea $n \in \mathbb{N}$:
  a) $3^{2n+2} + 2^{6n+1}$ es múltiplo de 11.
  b) $3^{2n+2} - 8n - 9$ es divisible por 64.

(13) Decir si es verdadero o falso justificando:
  a) $3^n + 1$ es múltiplo de n, $\forall n \in \mathbb{N}$.
  b) $3n^2 + 1$ es múltiplo de 2, $\forall n \in \mathbb{N}$.
  c) $(n+1) \cdot (5n+2)$ es múltiplo de 2, $\forall n \in \mathbb{N}$.

(14) Probar que para todo $n \in \mathbb{Z}$, $n^2 + 2$ no es divisible por 4.

(15) Probar que todo entero impar que no es múltiplo de 3, es de la forma $6m \pm 1$, con m entero.

(16) *a)* Probar que el producto de tres enteros consecutivos es divisible por 6.
  b) Probar que el producto de cuatro enteros consecutivos es divisible por 24 (ayuda: el número combinatorio $\binom{n}{4}$ es entero).

(17) Probar que si a y b son enteros entonces $a^2 + b^2$ es divisible por 7 si y sólo si a y b son divisibles por 7. ¿Es lo mismo cierto para 3? ¿Para 5?

(18) Encontrar $(7469, 2464)$, $(2689, 4001)$, $(2447, -3997)$, $(-1109, -4999)$.

(19) Calcular el máximo común divisor y expresarlo como combinación lineal de los números dados, para cada uno de los siguientes pares de números:

  a) 14 y 35,
  b) 11 y 15,
  c) 12 y 52,
  d) 12 y -52,
  e) 12 y 532,
  f) 725 y 441,
  g) 606 y 108.

(20) Probar que no existen enteros x e y que satisfagan $x + y = 100$ y $(x, y) = 3$.

(21) *a)* Sean a y b coprimos. Probar que si $a \mid b \cdot c$ entonces $a \mid c$.
  b) Sean a y b coprimos. Probar que si $a \mid c$ y $b \mid c$, entonces $a \cdot b \mid c$.

(22) Probar que si $n \in \mathbb{Z}$, entonces los números $2n+1$ y $\dfrac{n(n+1)}{2}$ son coprimos.

(23) Encontrar todos los enteros positivos a y b tales que $(a, b) = 10$ y $[a, b] = 100$.

(24) *a)* Probar que si d es divisor común de a y b, entonces $\dfrac{(a,b)}{d} = \left(\dfrac{a}{d}, \dfrac{b}{d}\right)$.

b) Probar que si $a, b \in \mathbb{Z}$ no nulos, entonces $\dfrac{a}{(a,b)}$ y $\dfrac{b}{(a,b)}$ son coprimos.

(25) Probar que 3 y 5 son números primos.

(26) Dar todos los números primos positivos menores que 100.

(27) Determinar con el criterio de la raíz cuáles de los siguientes números son primos: 113, 123, 131, 151, 199, 503.

(28) Si $a \cdot b$ es un cuadrado y a y b son coprimos, probar que a y b son cuadrados.

(29) *a)* Probar que $\sqrt{5}$ no es un número racional.
b) Probar que $\sqrt{15}$ no es un número racional.
c) Probar que $\sqrt{8}$ no es un número racional.
d) Probar que $\sqrt[3]{4}$ no es un número racional.

(30) Probar que si p_k es el k-ésimo primo positivo entonces

$$p_{k+1} \leq p_1 \cdot p_2 \cdot \cdots \cdot p_k + 1$$

(31) Calcular el máximo común divisor y el mínimo común múltiplo de los siguientes pares de números usando la descomposición en números primos.

a) $a = 12$ y $b = 15$.
b) $a = 11$ y $b = 13$.
c) $a = 140$ y $b = 150$.
d) $a = 3^2 \cdot 5^2$ y $b = 2^2 \cdot 11$.
e) $a = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$ y $b = 2 \cdot 5 \cdot 7$.