Práctico 2
Matemática Discreta I – Año 2020/1
FAMAF

(1) La cantidad de dígitos o cifras de un número se cuenta a partir del primer dígito distinto de cero. Por ejemplo, 0035010 es un número de 5 dígitos.
  a) ¿Cuántos números de 5 dígitos hay?
  b) ¿Cuántos números pares de 5 dígitos hay?
  c) ¿Cuántos números de 5 dígitos existen con sólo un 3?
  d) ¿Cuántos números capicúas de 5 dígitos existen?
  e) ¿Cuántos números capicúas de a lo sumo 5 dígitos hay?

(2) ¿Cuántos números de 6 cifras pueden formarse con los dígitos de 112200?

(3) ¿Cuántos números impares de cuatro cifras hay?

(4) ¿Cuántos números múltiplos de 5 y menores que 4999 hay?

(5) En los boletos viejos de ómnibus, aparecía un *número* de 5 cifras (en este caso podían empezar con 0), y uno tenía un *boleto capicúa* si el número lo era.
  a) ¿Cuántos boletos capicúas había?
  b) ¿Cuántos boletos había en los cuales no hubiera ningún dígito repetido?

(6) Las antiguas patentes de auto tenían una letra indicativa de la provincia y luego 6 dígitos. (En algunas provincias, Bs. As. y Capital, tenían 7 dígitos, pero ignoremos eso por el momento). Luego vinieron patentes que tienen 3 letras y luego 3 dígitos. Finalmente, ahora las patentes tienen 2 letras, luego 3 dígitos y a continuación dos letras más ¿Cuántas patentes pueden hacerse con cada uno de los sistemas?

(7) Si uno tiene 8 CD distintos de Rock, 7 CD distintos de música clásica y 5 CD distintos de cuartetos,
  a) ¿Cuántas formas distintas hay de seleccionar un CD?
  b) ¿Cuántas formas hay de seleccionar tres CD, uno de cada tipo?
  c) Un sonidista en una fiesta de casamientos planea poner 3 CD, uno a continuación de otro. ¿Cuántas formas distintas tiene de hacerlo si le han dicho que no mezcle más de dos estilos?

(8) Mostrar que si uno arroja un dado n veces y suma todos los resultados obtenidos, hay $\frac{6^n}{2}$ formas distintas de obtener una suma par.

(9) ¿Cuántos enteros entre 1 y 10000 tienen exactamente un 7 y exactamente un 5 entre sus cifras?

(10) ¿Cuántos subconjuntos de $\{0, 1, 2, \ldots, 8, 9\}$ contienen al menos un impar?

(11) El truco se juega con un mazo de 40 cartas, y se reparten 3 cartas a cada jugador. Obtener el 1 de espadas (el *macho*) es muy bueno. También lo es, por otros motivos, obtener un 7 y un 6 del mismo palo (*tener 33*). ¿Qué es más probable: obtener el macho, o tener 33?

(12) ¿Cuántos comités pueden formarse de un conjunto de 6 mujeres y 4 hombres, si el comité debe estar compuesto por 3 mujeres y 2 hombres?

(13) ¿De cuántas formas puede formarse un comité de 5 personas tomadas de un grupo de 11 personas entre las cuales hay 4 profesores y 7 estudiantes, si:
  a) No hay restricciones en la selección?
  b) El comité debe tener exactamente 2 profesores?
  c) El comité debe tener al menos 3 profesores?
  d) El profesor X y el estudiante Y no pueden estar juntos en el comité?

(14) Si en un torneo de fútbol participan $2n$ equipos, probar que el número total de opciones posibles para la primera fecha es $1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)$. sugerencia: use un argumento por inducción.

(15) En una clase hay n chicas y n chicos. Dar el número de maneras de ubicarlos en una fila de modo que todas las chicas estén juntas.

(16) ¿De cuántas maneras distintas pueden sentarse 8 personas en una mesa circular?

(17) *a)* ¿De cuántas maneras distintas pueden sentarse 6 hombres y 6 mujeres en una mesa circular si nunca deben quedar dos mujeres juntas?
  b) Ídem, pero con 10 hombres y 7 mujeres.

(18) *a)* ¿De cuántas formas distintas pueden ordenarse las letras de la palabra MATEMATICA
  b) Ídem con las palabras ALGEBRA, GEOMETRIA.
  c) ¿De cuántas formas distintas pueden ordenarse las letras de la palabra MATEMATICA si se pide que las consonantes y las vocales se alternen?

(19) ¿Cuántas diagonales tiene un polígono regular de n lados?

(20) Dados m, n y k naturales tales que $m \leq k \leq n$, probar que se verifica
$$\binom{n}{k}\binom{k}{m} = \binom{n}{m}\binom{n-m}{k-m}.$$

(21) Probar que para todo $i, j, k \in \mathbb{N}_0$ vale
$$\binom{i+j+k}{i}\binom{j+k}{j} = \frac{(i+j+k)!}{i!j!k!}$$

(22) Demostrar que para todo $n \in \mathbb{N}$ vale:

a) $\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \cdots + \binom{n}{n} = 2^n.$

b) $\binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \cdots + (-1)^n \binom{n}{n} = 0$

(23) Probar que para todo natural n vale que
$$\binom{2n}{2} = 2\binom{n}{2} + n^2.$$

§ Ejercicios adicionales (para repasar)

(24) Con 20 socios de un club se desea formar 5 listas electorales (disjuntas). Cada lista consta de 1 Presidente, 1 Tesorero y 2 vocales. ¿De cuántas formas puede hacerse?

(25) ¿De cuántas formas se pueden fotografiar 7 matrimonios en una hilera, de tal forma que cada hombre aparezca al lado de su esposa?

(26) ¿De cuántas formas pueden distribuirse 14 libros distintos entre dos personas de manera tal que cada persona reciba al menos 3 libros?

(27) Cecilia ha olvidado la contraseña de su correo electrónico, la cual está formada por 11 caracteres: 4 dígitos y 7 letras todos mezclados. ¿Cuál es el máximo número de intentos que debería probar para entrar a su correo si:

a) tiene en cuenta que hay 26 letras?

b) la letra B y el dígito 2 no pueden estar ambos en la contraseña?

c) recuerda que ha formado la clave de la siguiente manera: los primeros siete caracteres son una mezcla de las letras de su nombre (CECILIA), y los últimos cuatro caracteres son una permutación de las cuatro cifras de su año de nacimiento (1998)?