

**Práctico 1**  
**Matemática Discreta I – Año 2021/1**  
**FAMAF**

(1) Demostrar las siguientes afirmaciones donde  $a, b, c$  y  $d$  son siempre números enteros. Justificar cada uno de los pasos en cada demostración indicando el axioma o resultado que utiliza.

a)  $a = -(-a)$

b)  $a = b$  si y sólo si  $-a = -b$

c)  $a + a = a$  implica que  $a = 0$ .

(2) Idem (1).

a)  $0 < a$  y  $0 < b$  implican  $0 < a \cdot b$

b)  $a < b$  y  $c < 0$  implican  $b \cdot c < a \cdot c$

(3) Probar las siguientes afirmaciones, justificando los pasos que realiza.

a) Si  $0 < a$  y  $0 < b$  entonces  $a < b$  si y sólo si  $a^2 < b^2$ .

b) Si  $a \neq 0$  entonces  $a^2 > 0$ .

c) Si  $a \neq b$  entonces  $a^2 + b^2 > 0$ .

d) Probar que si  $a + c < b + c$  entonces  $a < b$ .

(4) Calcular evaluando las siguientes expresiones:

a)  $\sum_{r=0}^4 r$

b)  $\prod_{i=1}^5 i$

c)  $\sum_{k=-3}^{-1} \frac{1}{k(k+4)}$

d)  $\prod_{n=2}^7 \frac{n}{n-1}$

(5) Calcular:

a)  $2^{10} - 2^9$

b)  $3^2 2^5 - 3^5 2^2$

c)  $(2^2)^n - (2^n)^2$

d)  $(2^{2^n} + 1)(2^{2^n} - 1)$

(6) Dado un natural  $m$ , probar que  $\forall n \in \mathbb{N}; x, y \in \mathbb{R}$ , se cumple:

a)  $x^n \cdot x^m = x^{n+m}$

b)  $(x \cdot y)^n = x^n \cdot y^n$

c)  $(x^n)^m = x^{n \cdot m}$

(7) Analizar la validez de las siguientes afirmaciones:

a)  $(2^n)^{2^k} = 2^{2^{n+k}}, n, k \in \mathbb{N}$ .

b)  $(2^n)^2 = 4^n, n \in \mathbb{N}$ .

c)  $2^{7+11} = 2^7 + 2^{11}$ .

(8) Probar que  $\sum_{i=0}^n 2^i = 2^{n+1} - 1$  ( $n \geq 0$ ).

(9) Demostrar por inducción las siguientes igualdades:

$$a) \sum_{k=1}^n (a_k + b_k) = \sum_{k=1}^n a_k + \sum_{k=1}^n b_k, n \in \mathbb{N}.$$

$$b) \sum_{j=1}^n j = \frac{n(n+1)}{2}, n \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{N}.$$

$$c) \sum_{i=1}^n i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}, n \in \mathbb{N}.$$

$$d) \sum_{k=0}^n (2k+1) = (n+1)^2, n \in \mathbb{N}_0.$$

$$e) \sum_{i=1}^n i^3 = \left( \frac{n(n+1)}{2} \right)^2, n \in \mathbb{N}.$$

$$f) \sum_{k=0}^n a^k = \frac{a^{n+1} - 1}{a - 1}, \text{ donde } a \in \mathbb{R}, a \neq 0, 1, n \in \mathbb{N}_0.$$

(10) Hallar  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $\forall n \geq n_0$  se cumpla que  $n^2 \geq 11n + 3$ .

(11) Sea  $u_1 = 3$ ,  $u_2 = 5$  y  $u_n = 3u_{n-1} - 2u_{n-2}$  con  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq 3$ . Probar que  $u_n = 2^n + 1$ .

(12) Sea  $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  la sucesión definida por recurrencia como sigue:  $u_1 = 9$ ,  $u_2 = 33$ ,  $u_n = 7u_{n-1} - 10u_{n-2}$ ,  $\forall n \geq 3$ . Probar que  $u_n = 2^{n+1} + 5^n$ , para todo  $n \in \mathbb{N}$ .

(13) Sea  $u_n$  definida recursivamente por:  $u_1 = 2$ ,  $u_n = 2 + \sum_{i=1}^{n-1} 2^{n-2i} u_i \quad \forall n > 1$ .

a) Calcule  $u_2$  y  $u_3$ .

b) Proponga una fórmula para el término general  $u_n$  y pruébela por inducción.

(14) Sea  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}_0}$  la sucesión definida recursivamente por

$$\begin{cases} a_0 = 1, \\ a_1 = 1, \\ a_n = 3a_{n-1} + (n-1)(n-3)a_{n-2}, \text{ para } n \geq 2. \end{cases}$$

Probar que  $a_n = n!$  para todo  $n \in \mathbb{N}_0$ .

(15) Sea  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}_0}$  la sucesión definida recursivamente por

$$\begin{cases} a_0 = 0, \\ a_1 = 7, \\ a_n = 5a_{n-1} + 6a_{n-2}, \text{ para } n \geq 2. \end{cases}$$

Probar que  $a_n = 6^n + (-1)^{n+1}$  para todo  $n \in \mathbb{N}_0$ .

(16) Las siguientes proposiciones no son válidas para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Indicar en qué paso del principio de inducción falla la demostración:

a)  $n = n^2$ ,      b)  $n = n + 1$ ,      c)  $3^n = 3^{n+2}$ ,      d)  $3^{3n} = 3^{n+2}$ .

§ **Ejercicios de repaso.** Los ejercicios marcados con (\*) son de mayor dificultad.

(17) Demostrar por inducción las siguientes igualdades:

a)  $\prod_{i=1}^n \frac{i+1}{i} = n+1, n \in \mathbb{N}$ .

b)  $\sum_{i=1}^n \frac{1}{4i^2 - 1} = \frac{n}{2n+1}, n \in \mathbb{N}$ .

c)  $\sum_{i=1}^n i^2 / \sum_{j=1}^n j = \frac{2n+1}{3}, n \in \mathbb{N}$ .

d)  $\prod_{i=2}^n \left(1 - \frac{1}{i^2}\right) = \frac{n+1}{2n}, n \in \mathbb{N} \text{ y } n \geq 2$ .

e) Si  $a \in \mathbb{R}$  y  $a \geq -1$ , entonces  $(1+a)^n \geq 1 + n \cdot a, \forall n \in \mathbb{N}$ .

f) Si  $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ , entonces  $\sum_{k=1}^n a_k^2 \leq \left(\sum_{k=1}^n |a_k|\right)^2, n \in \mathbb{N}$ .

g) Si  $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$  y  $0 < a_i < 1 \forall i$ , entonces  $(1-a_1) \cdots (1-a_n) \geq 1 - a_1 - \cdots - a_n, n \in \mathbb{N}$ .

(18) Sea  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  la sucesión definida recursivamente por

$$\begin{cases} a_1 = 1, \\ a_2 = 2, \\ a_n = (n-2)a_{n-1} + 2(n-1)a_{n-2}, \text{ para } n \geq 3. \end{cases}$$

Probar que  $a_n = n!$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ .

(19) Sea  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}_0}$  la sucesión definida recursivamente por

$$\begin{cases} a_0 = 0, \\ a_1 = 5, \\ a_n = a_{n-1} + 6a_{n-2}, \text{ para } n \geq 2. \end{cases}$$

Probar que  $a_n = 3^n + (-1)^{n+1}2^n$  para todo  $n \in \mathbb{N}_0$ .

(20) (\*) Encuentre el error en los siguientes argumentos de inducción.

a) Demostraremos que  $5n+3$  es múltiplo de 5 para todo  $n \in \mathbb{N}$ .

Supongamos que  $5k+3$  es múltiplo de 5, siendo  $k \in \mathbb{N}$ . Entonces existe  $p \in \mathbb{N}$  tal que  $5k+3 = 5p$ . Probemos que  $5(k+1)+3$  es múltiplo de 5:

Como

$$5(k+1)+3=(5k+5)+3=(5k+3)+5=5p+5=5(p+1),$$

entonces obtenemos que  $5(k+1)+3$  es múltiplo de 5. Por lo tanto, por el principio de inducción, demostramos que  $5n+3$  es múltiplo de 5 para todo  $n \in \mathbb{N}$ .

b) Sea  $a \in \mathbb{R}$ , con  $a \neq 0$ . Vamos a demostrar que para todo entero no negativo  $n$ ,  $a^n = 1$ .

Como  $a^0 = 1$  por definición, la proposición es verdadera para  $n = 0$ .

Supongamos que para un entero  $k$ ,  $a^m = 1$  para  $0 \leq m \leq k$ . Entonces

$a^{k+1} = \frac{a^k a^k}{a^{k-1}} = \frac{1 \cdot 1}{1} = 1$ . Por lo tanto, el principio de inducción fuerte implica que  $a^n = 1$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ .

(21) (\*) La *sucesión de Fibonacci* se define recursivamente de la siguiente manera:

$$u_1 = 1, \quad u_2 = 1, \quad u_{n+1} = u_n + u_{n-1}, \quad n \geq 2.$$

Los primeros términos de esta sucesión son: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, ...

Demostrar por inducción que el término general de esta sucesión se puede calcular mediante la fórmula

$$u_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[ \left( \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left( \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right].$$

(Ayuda: usar que  $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$  y  $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$  son las raíces de la ecuación cuadrática  $x^2 - x - 1 = 0$  y por lo tanto  $\left( \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} = \left( \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} \right)^n + \left( \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} \right)^{n-1}$ ).