

# Práctico 5 Matemática Discreta I – Año 2021/1 FAMAF

(1) ¿Cuántas aristas tiene el grafo completo  $K_n$ ? ¿Para cuáles valores de  $n$  se puede encontrar un dibujo de  $K_n$  con la propiedad que las líneas representan las aristas sin cruzarse?

(2) Encuentre un isomorfismo entre los grafos por las siguientes listas. (Ambas listas especifican versiones de un famoso grafo conocida como *grafo de Petersen*.)

$a$	$b$	$c$	$d$	$e$	$f$	$g$	$h$	$i$	$j$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$b$	$a$	$b$	$c$	$d$	$a$	$b$	$c$	$d$	$e$	1	2	3	4	5	0	1	0	2	6
$e$	$c$	$d$	$e$	$a$	$h$	$i$	$j$	$f$	$g$	5	0	1	2	3	4	4	3	5	7
$f$	$g$	$h$	$i$	$j$	$i$	$j$	$f$	$g$	$h$	7	6	8	7	6	8	9	9	9	8

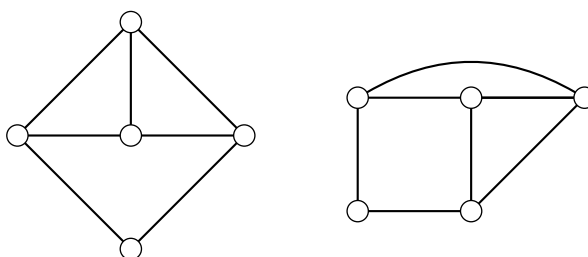
(3) *a)* Encuentre todos los grafos de 5 vértices y 2 aristas no isomorfos entre sí.  
*b)* ¿Cuál es el máximo número de aristas que puede tener un grafo de 5 vértices?

(4) Para cada una de las siguientes secuencias, encuentre un grafo que tenga exactamente las valencias indicadas o demuestre que tal grafo no existe:

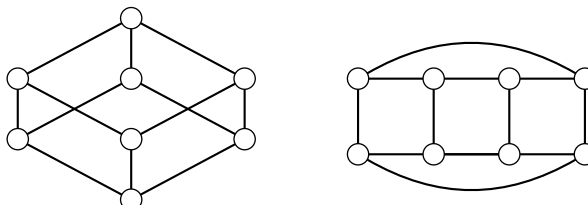
- a)* 3, 3, 1, 1                      *b)* 3, 2, 2, 1                      *c)* 3, 3, 2, 2, 1, 1  
*d)* 4, 1, 1, 1, 1                      *e)* 7, 3, 3, 3, 2, 2                      *f)* 4, 1, 1, 1, 1

(5) Demuestre que los siguientes pares de grafos son isomorfos (encuentre un isomorfismo):

(a)



(b)



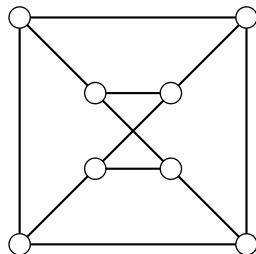
(6) Sean  $G = (V, E)$  y  $G' = (V', E')$  dos grafos y sea  $\alpha : V \mapsto V'$  una función tal que  $\delta(v) = \delta(\alpha(v)) \quad \forall v \in V$ .

a) ¿Puede afirmar que  $\alpha$  es un isomorfismo?

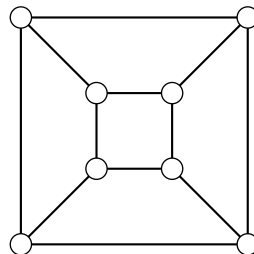
b) ¿Puede afirmarlo si  $|V| = 3$  ó 4?

(7) Encuentre una función del grafo  $A$  al  $B$  que preserve valencias. ¿Es un isomorfismo?

$A$ :



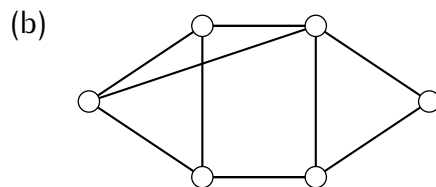
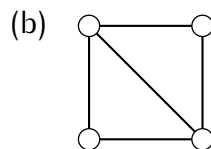
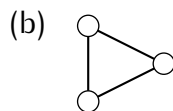
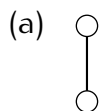
$B$ :



(8) Pruebe que si  $G$  es un grafo con más de un vértice, entonces existen dos vértices con la misma valencia.

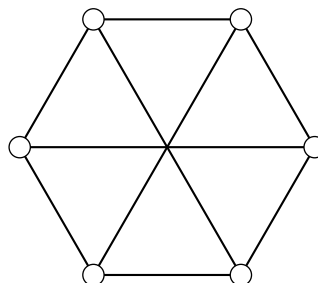
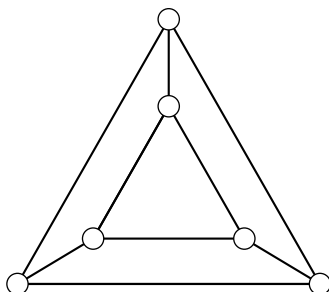
(9) Si  $G = (V, E)$  grafo, el *grafo complemento* es  $G' = (V, E')$ , donde  $E'$  son todos los 2-subconjuntos de  $V$  que no están en  $E$ . Es decir, el grafo complemento tiene los mismos vértices que el grafo original y todas las aristas que le faltan a  $G$  para ser grafo completo.

a) Halle el complemento de los siguientes grafos:

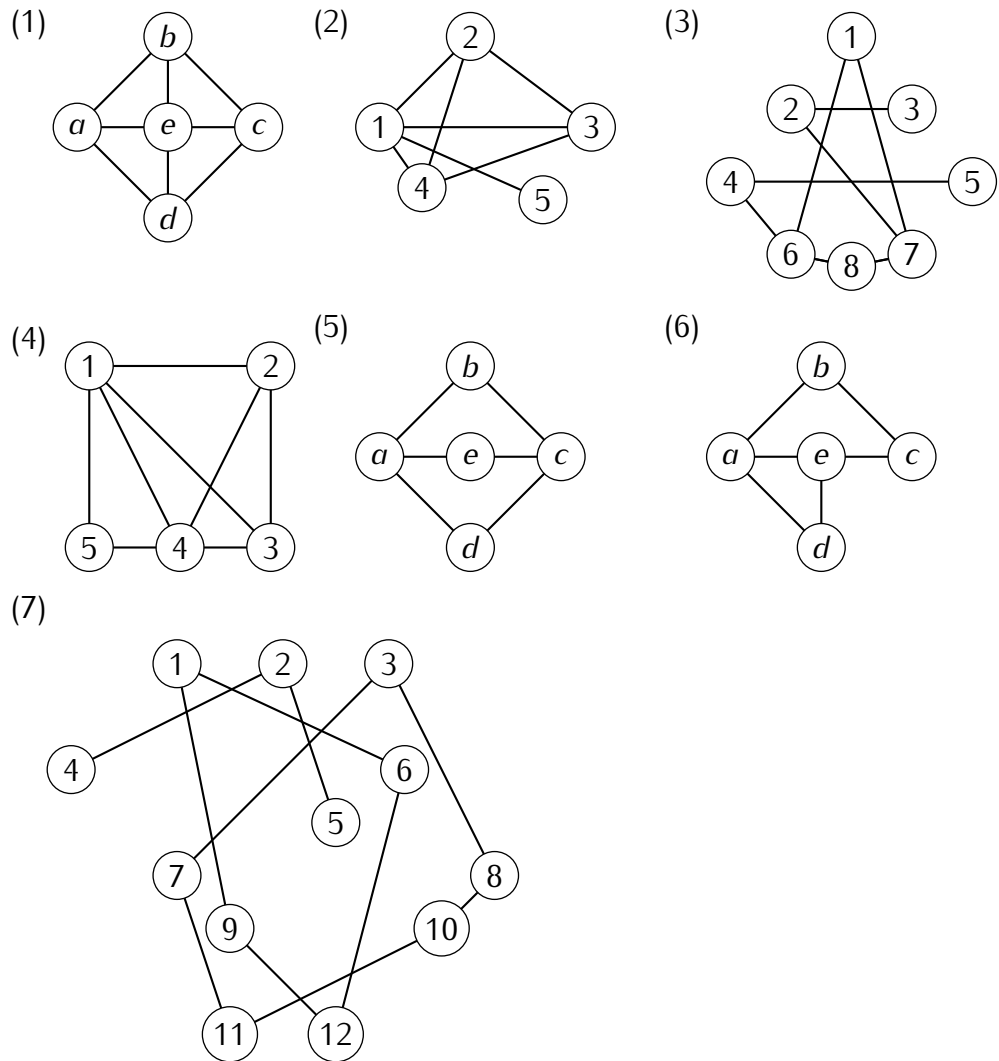


b) Si  $V = \{v_1 \dots v_n\}$  y  $\delta(v_i) = d_i \quad \forall i = 1, \dots, n$ , calcule las valencias de el grafo complemento.

(10) Pruebe que los siguientes grafos no son isomorfos:



(11) Dados los siguientes grafos:



- a) Determine en cada caso si existen subgrafos completos de más de 2 vértices.
- b) Para el grafo (1), dé todos los caminos que unen  $a$  con  $b$ .
- c) Dé caminatas eulerianas en los grafos (4), (5) y (6).
- d) Para (2) y (3), decir si existen ciclos hamiltonianos.
- e) Determinar cuales de los siguientes pares de grafos son isomorfos:
- (i) (4) y (2),
  - (ii) (5) y (6),
  - (iii) (5) y (1).
- f) Halle las componentes conexas del grafo (7).

(12) Dado el siguiente grafo

0	1	2	3	4	5	6	7	8
1	0	1	0	3	0	1	0	1
3	2	3	2	5	4	5	2	3
5	6	7	4		6	7	6	5
7	8		8		8		8	7

encuentre un ciclo hamiltoniano (si existe). Determine si existe una caminata euleriana y en caso de ser así encuentre una.

(13) Un ratón intenta comer un  $3 \times 3 \times 3$  cubo de queso. Él comienza en una esquina y come un subcubo de  $1 \times 1 \times 1$ , para luego pasar a un subcubo adyacente. ¿Podrá el ratón terminar de comer el queso en el centro?

(14) Dé todos los árboles de 5 vértices no isomorfos.

§ **Ejercicios de repaso.** Los ejercicios marcados con <sup>(\*)</sup> son de mayor dificultad.

(15) a falta

(16) b

(17) c