

Práctico 3
Matemática Discreta I – Año 2020/1
FAMAF

(1) Hallar el cociente y el resto de la división de:

- | | | |
|-------------------|-----------------------|----------------|
| a) 135 por 23, | c) 135 por -23 , | e) 127 por 99, |
| b) -135 por 23, | d) -135 por -23 , | f) 98 por 73. |

- (2) a) Si $a = b \cdot q + r$, con $b \leq r < 2b$, hallar el cociente y el resto de la división de a por b .
b) Repetir el ejercicio anterior, suponiendo ahora que $-b \leq r < 0$.

(3) Dado $m \in \mathbb{N}$ hallar los restos posibles de m^2 y m^3 en la división por 3, 4, 5, 7, 8, 11.

(4) Expresar en base 10 los siguientes enteros:

- | | | |
|---------------|------------------|----------------|
| a) $(1503)_6$ | c) $(1111)_{12}$ | e) $(12121)_3$ |
| b) $(1111)_2$ | d) $(123)_4$ | f) $(1111)_5$ |

(5) Convertir

- | | |
|---------------------------|-------------------------|
| a) $(133)_4$ a base 8, | c) $(3506)_7$ a base 2, |
| b) $(B38)_{16}$ a base 8, | d) $(1541)_6$ a base 4. |

(6) Calcular: a) $(2234)_5 + (2310)_5$ b) $(10101101)_2 + (10011)_2$.

(7) Sean $a, b, c \in \mathbb{Z}$. Demostrar las siguientes afirmaciones:

- a) Si $ab = 1$, entonces $a = b = 1$ ó $a = b = -1$.
- b) Si $a, b \neq 0$, $a|b$ y $b|a$, entonces $a = b$ ó $a = -b$.
- c) Si $a|1$, entonces $a = 1$ ó $a = -1$.
- d) Si $a \neq 0$, $a|b$ y $a|c$, entonces $a|(b+c)$ y $a|(b-c)$.
- e) Si $a \neq 0$, $a|b$ y $a|(b+c)$, entonces $a|c$.
- f) Si $a \neq 0$ y $a|b$, entonces $a|b \cdot c$.

(8) Dados b, c enteros, probar las siguientes propiedades:

- a) 0 es par y 1 es impar.
- b) Si b es par y $b|c$, entonces c es par. (Por lo tanto, si b es par, también lo es $-b$).
- c) Si b y c son pares, entonces $b+c$ también lo es.
- d) Si un número par divide a 2, entonces ese número es 2 ó -2 .

- e) La suma de un número par y uno impar es impar.
 f) $b + c$ es par si y sólo si b y c son ambos pares o ambos impares.

- (9) Sea $n \in \mathbb{Z}$. Probar que n es par si y sólo si n^2 es par.
- (10) Probar que $n(n + 1)$ es par para todo n entero.
- (11) Sean $a, b, c \in \mathbb{Z}$. ¿Cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas? Justificar las respuestas.
- $a \mid b \cdot c \Rightarrow a \mid b \text{ ó } a \mid c$.
 - $a \mid (b + c) \Rightarrow a \mid b \text{ ó } a \mid c$.
 - $a \mid c \text{ y } b \mid c \Rightarrow a \cdot b \mid c$.
 - $a \mid c \text{ y } b \mid c \Rightarrow (a + b) \mid c$.
 - $a, b, c > 0$ y $a = b \cdot c$, entonces $a \geq b$ y $a \geq c$.
- (12) Probar que cualquiera sea $n \in \mathbb{N}$:
- $3^{2n+2} + 2^{6n+1}$ es múltiplo de 11.
 - $3^{2n+2} - 8n - 9$ es divisible por 64.
- (13) Decir si es verdadero o falso justificando:
- $3^n + 1$ es múltiplo de n , $\forall n \in \mathbb{N}$.
 - $3n^2 + 1$ es múltiplo de 2, $\forall n \in \mathbb{N}$.
 - $(n + 1) \cdot (5n + 2)$ es múltiplo de 2, $\forall n \in \mathbb{N}$.
- (14) Probar que para todo $n \in \mathbb{Z}$, $n^2 + 2$ no es divisible por 4.
- (15) Probar que todo entero impar que no es múltiplo de 3, es de la forma $6m \pm 1$, con m entero.
- (16)
 - Probar que el producto de tres enteros consecutivos es divisible por 6.
 - Probar que el producto de cuatro enteros consecutivos es divisible por 24 (ayuda: el número combinatorio $\binom{n}{4}$ es entero).
- (17) Probar que si a y b son enteros entonces $a^2 + b^2$ es divisible por 7 si y sólo si a y b son divisibles por 7. ¿Es lo mismo cierto para 3? ¿Para 5?
- (18) Encontrar $(7469, 2464)$, $(2689, 4001)$, $(2447, -3997)$, $(-1109, -4999)$.
- (19) Calcular el máximo común divisor y expresarlo como combinación lineal de los números dados, para cada uno de los siguientes pares de números:
- 14 y 35,
 - 11 y 15,
 - 12 y 52,
 - 12 y -52,
 - 12 y 532,
 - 725 y 441,
 - 606 y 108.

- (20) Probar que no existen enteros x e y que satisfagan $x + y = 100$ y $(x, y) = 3$.
- (21) a) Sean a y b coprimos. Probar que si $a \mid b \cdot c$ entonces $a \mid c$.
 b) Sean a y b coprimos. Probar que si $a \mid c$ y $b \mid c$, entonces $a \cdot b \mid c$.
- (22) Probar que si $n \in \mathbb{Z}$, entonces los números $2n + 1$ y $\frac{n(n+1)}{2}$ son coprimos.
- (23) Encontrar todos los enteros positivos a y b tales que $(a, b) = 10$ y $[a, b] = 100$.
- (24) a) Probar que si d es divisor común de a y b , entonces $\frac{(a, b)}{d} = \left(\frac{a}{d}, \frac{b}{d} \right)$.
 b) Probar que si $a, b \in \mathbb{Z}$ no nulos, entonces $\frac{a}{(a, b)}$ y $\frac{b}{(a, b)}$ son coprimos.
- (25) Probar que 3 y 5 son números primos.
- (26) Dar todos los números primos positivos menores que 100.
- (27) Determinar con el criterio de la raíz cuáles de los siguientes números son primos: 113, 123, 131, 151, 199, 503.
- (28) Si $a \cdot b$ es un cuadrado y a y b son coprimos, probar que a y b son cuadrados.
- (29) a) Probar que $\sqrt{5}$ no es un número racional.
 b) Probar que $\sqrt{15}$ no es un número racional.
 c) Probar que $\sqrt{8}$ no es un número racional.
 d) Probar que $\sqrt[3]{4}$ no es un número racional.
- (30) Probar que si p_k es el k -ésimo primo positivo entonces
- $$p_{k+1} \leq p_1 \cdot p_2 \cdot \dots \cdot p_k + 1$$
- (31) Calcular el máximo común divisor y el mínimo común múltiplo de los siguientes pares de números usando la descomposición en números primos.
- a) $a = 12$ y $b = 15$. d) $a = 3^2 \cdot 5^2$ y $b = 2^2 \cdot 11$. e) $a = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$ y $b = 2 \cdot 5 \cdot 7$.
 b) $a = 11$ y $b = 13$.
 c) $a = 140$ y $b = 150$.