

Matemática Discreta I

Clase 1 - Los números enteros

FAMAF / UNC

14 de marzo de 2023

Axiomas de los números enteros

Todos conocemos los *enteros*.

Primero, los “números naturales”

$$1, 2, 3, 4, 5, \dots$$

Más adelante introducimos el 0 (cero).

Luego, los enteros negativos

$$-1, -2, -3, -4, -5, \dots$$

- En este curso no nos preocupamos demasiado por el significado lógico y filosófico de estos objetos, pero necesitamos saber las propiedades que se supone que tienen.

- La idea es: si todos parten de las mismas suposiciones entonces todos llegarán a los mismos resultados.
- Estos supuestos son los llamados *axiomas*.
- Aceptamos sin reparo que existe un conjunto de objetos llamados *enteros*.
- El conjunto de enteros se denotará por el símbolo especial \mathbb{Z} .
- Las propiedades de \mathbb{Z} serán dadas por una lista de axiomas.
- Un resultado acerca de \mathbb{Z} es válido si se deduce lógicamente de los axiomas.

Empezaremos listando aquellos axiomas que tratan la suma y la multiplicación.

Notación

Sean $a, b \in \mathbb{Z}$ (números enteros)

- $a + b$ denota la suma.
- $a \cdot b$ (o ab o también $a \times b$) el producto de enteros.

El hecho de que $a \cdot b$ y $a + b$ son enteros, es nuestro primer axioma.

En la siguiente lista de axiomas a , b , c denotan enteros arbitrarios, y 0 y 1 denotan enteros especiales que cumplen las propiedades especificadas más abajo.

I1) $a + b$ y $a \cdot b$ pertenecen a \mathbb{Z} .

I2) *Conmutatividad*. $a + b = b + a$; $ab = ba$.

I3) *Asociatividad*. $(a + b) + c = a + (b + c)$; $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$.

I4) *Existencia de elemento neutro*. Existen números $0, 1 \in \mathbb{Z}$ con $0 \neq 1$ tal que $a + 0 = a$; $a \cdot 1 = a$.

Los axiomas anteriores involucran a la suma y al producto por separado.

El axioma siguiente relaciona el suma y el producto.

15) *Distributividad.* $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c.$

También tenemos propiedades de cancelación.

16) *Existencia del inverso aditivo, también llamado opuesto.* Por cada a en \mathbb{Z} existe un único entero $-a$ en \mathbb{Z} tal que $a + (-a) = 0.$

17) *Cancelación.* Si a es distinto de 0 y $a \cdot b = a \cdot c$, entonces $b = c.$

- Debido a la ley de asociatividad para la suma axioma (I3) $(a + b) + c$ es igual a $a + (b + c)$ y por lo tanto podemos eliminar los paréntesis sin ambigüedad. Es decir, denotamos

$$a + b + c := (a + b) + c = a + (b + c).$$

- De forma análoga, usaremos la notación

$$abc = (ab)c = a(bc).$$

- Debido a la ley de conmutatividad axioma (I2), es claro que del axioma (I4) se deduce que $0 + a = a + 0 = a$ y $1 \cdot a = a \cdot 1 = a$.
- Análogamente, por (I2) e (I6) obtenemos que $-a + a = a + (-a) = 0$.

Una propiedad que debemos mencionar es la siguiente:

Si $a, b, c \in \mathbb{Z}$ y $a = b$, entonces $a + c = b + c$ y $ac = bc$.

Esto se debe a que:

- la suma y el producto son operaciones que devuelven enteros.
- Si $a = b$, entonces el par a, c es igual al par b, c y por lo tanto devuelven la misma suma y el mismo producto.

Esta propiedad *no es un axioma*, sino una mera aplicación de la lógica formal.

Ejemplo

Demostremos que, para todo n entero, el opuesto de $-n$ es n , es decir que

$$-(-n) = n.$$

Demostración

El axioma (I6) nos dice que $-(-n)$ es el único número que sumado a $-n$, da cero. Por lo tanto, para demostrar que $-(-n) = n$ basta ver que $(-n) + n = 0$. Esto se cumple puesto que

$$\begin{aligned} (-n) + n &= n + (-n) && \text{axioma (I2)} \\ &= 0 && \text{axioma (I6)} \end{aligned}$$

Por lo tanto $(-n) + n = 0$. □

A continuación definimos la resta o sustracción.

Definición

Si $a, b \in \mathbb{Z}$ definimos $a - b$ como la suma de a más el opuesto de b , es decir que $a - b = a + (-b)$ por definición.

Ahora demostremos una propiedad básica de la resta.

Ejemplo

Sean m y n enteros, entonces

$$m - (-n) = m + n.$$

Demostración

Por la definición de sustracción, $m - (-n)$ es la suma $m + (-(-n))$, es decir

$$m - (-n) = m + (-(-n)).$$

Por el ejemplo de la p. 9 sabemos que $-(-n) = n$ y por lo tanto
 $m - (-n) = m + (-(-n)) = m + n.$



Ejemplo

Supongamos que existen dos enteros 0 y $0'$ ambos cumpliendo el axioma (I4), esto es

$$a + 0 = a, \quad a + 0' = a$$

para todo a de \mathbb{Z} . Entonces $0 = 0'$.

Demostración

$0 = 0 + 0'$	axioma (I4) aplicado a 0 y con $0'$ como neutro
$= 0' + 0$	axioma (I2)
$= 0'$	axioma (I4) aplicado a $0'$ y con 0 como neutro.



Observación

Vale el resultado análogo para el producto: el elemento neutro del producto es único.

Ejemplo

Sea $a \in \mathbb{Z}$, entonces

$$a \cdot 0 = 0$$

Demostración

$$a \cdot 0 = a \cdot (0 + 0) \quad \text{axioma (I4)}$$

$$a \cdot 0 = a \cdot 0 + a \cdot 0 \quad \text{axioma (I5)}$$

$$a \cdot 0 - a \cdot 0 = a \cdot 0 + a \cdot 0 - a \cdot 0 \quad \text{lógica}$$

$$0 = a \cdot 0 + 0 \quad \text{2 veces axioma (I6)}$$

$$0 = a \cdot 0 \quad \text{axioma (I4).}$$



Ejemplo

(Regla de los signos) Veamos que si $a, b \in \mathbb{Z}$ entonces

$$(1) \quad (-a)(-b) = ab, \quad (2) \quad a(-b) = (-a)b = -(ab).$$

Demostración

(2) Probaremos $a(-b) = -(ab)$.

Para ello, veremos que $a(-b)$ es el inverso aditivo de ab .

Por unicidad del inverso aditivo (axioma **I6**), se deduce que $a(-b) = -(ab)$.

$$\begin{aligned}
 ab + a(-b) &= a(b - b) && \text{axioma (I5)} \\
 &= a \cdot 0 && \text{axioma (I6)} \\
 &= 0 && \text{ejercicio p. 13.}
 \end{aligned}$$

Es completamente análogo probar $(-a)b = -(ab)$.

(1) Ejercicio.

