Matemática Discreta I
Clase 3 - Recursión

FAMAF / UNC

22 de marzo de 2022

Definiciones recursivas

Definiciones recursivas

Sea $\mathbb{N}$ el conjuntos de enteros positivos, esto es

$$\mathbb{N} = \{n \in \mathbb{Z} | n \geq 1\},$$

y denotemos $\mathbb{N}_0$ el conjunto $\mathbb{N} \cup \{0\}$, esto es

$$\mathbb{N}_0 = \{n \in \mathbb{Z} | n \geq 0\}.$$

Definiciones recursivas

Sea $\mathbb{N}$ el conjuntos de enteros positivos, esto es

$$\mathbb{N} = \{n \in \mathbb{Z} | n \geq 1\},$$

y denotemos $\mathbb{N}_0$ el conjunto $\mathbb{N} \cup \{0\}$, esto es

$$\mathbb{N}_0 = \{n \in \mathbb{Z} | n \geq 0\}.$$

$\mathbb{N}$ es llamado el conjunto de *números naturales*.

Definiciones recursivas

Sea $\mathbb{N}$ el conjuntos de enteros positivos, esto es

$$\mathbb{N} = \{n \in \mathbb{Z} | n \geq 1\},$$

y denotemos $\mathbb{N}_0$ el conjunto $\mathbb{N} \cup \{0\}$, esto es

$$\mathbb{N}_0 = \{n \in \mathbb{Z} | n \geq 0\}.$$

$\mathbb{N}$ es llamado el conjunto de *números naturales*.

- $X \subset \mathbb{N}$ (o de $\mathbb{N}_0$) $\wedge$ $X \neq \emptyset \Rightarrow X$ tiene cota inferior (0 o un $x < 0$).

Definiciones recursivas

Sea $\mathbb{N}$ el conjuntos de enteros positivos, esto es

$$\mathbb{N} = \{n \in \mathbb{Z} | n \geq 1\},$$

y denotemos $\mathbb{N}_0$ el conjunto $\mathbb{N} \cup \{0\}$, esto es

$$\mathbb{N}_0 = \{n \in \mathbb{Z} | n \geq 0\}.$$

$\mathbb{N}$ es llamado el conjunto de *números naturales*.

- $X \subset \mathbb{N}$ (o de $\mathbb{N}_0$) $\wedge$ $X \neq \emptyset \Rightarrow X$ tiene cota inferior (0 o un $x < 0$).
- Así, en este caso el axioma del buen orden toma la forma

si $X \subset \mathbb{N} \vee X \subset \mathbb{N}_0$, *no vacío* $\quad \Rightarrow \quad X$ *tiene un mínimo.*

Una sucesión u_n puede ser dada en forma explícita, por ejemplo

Una sucesión u_n puede ser dada en forma explícita, por ejemplo

- $u_n = 3n + 2$,

Una sucesión u_n puede ser dada en forma explícita, por ejemplo

- $u_n = 3n + 2$, o
- $w_n = (n + 1)(n + 2)(n + 3)$.

Una sucesión u_n puede ser dada en forma explícita, por ejemplo

- $u_n = 3n + 2$, o
- $w_n = (n + 1)(n + 2)(n + 3)$.

En este caso es fácil calcular algún valor de cada sucesión, por ejemplo

Una sucesión u_n puede ser dada en forma explícita, por ejemplo

- $u_n = 3n + 2$, o
- $w_n = (n+1)(n+2)(n+3)$.

En este caso es fácil calcular algún valor de cada sucesión, por ejemplo

$$u_5 = 3 \cdot 5 + 2 = 17 \quad \text{o} \quad w_3 = 4 \cdot 5 \cdot 6 = 120$$

Una sucesión u_n puede ser dada en forma explícita, por ejemplo

- $u_n = 3n + 2$, o
- $w_n = (n+1)(n+2)(n+3)$.

En este caso es fácil calcular algún valor de cada sucesión, por ejemplo

$$u_5 = 3 \cdot 5 + 2 = 17 \quad \text{o} \quad w_3 = 4 \cdot 5 \cdot 6 = 120$$

Cuando una sucesión puede expresar se como combinación de un número determinado de operaciones elementales, diremos que tiene una *fórmula cerrada.*

A veces la sucesión que nos interesa no tiene una fórmula *cerrada* como las anteriores y podemos expresarla en forma *recursiva*.

A veces la sucesión que nos interesa no tiene una fórmula *cerrada* como las anteriores y podemos expresarla en forma *recursiva*. Por ejemplo,

- $u_1 = 1$, $u_2 = 2$, (casos base)

A veces la sucesión que nos interesa no tiene una fórmula *cerrada* como las anteriores y podemos expresarla en forma *recursiva*. Por ejemplo,

- $u_1 = 1,\ u_2 = 2,$ (casos base)
- $u_n = u_{n-1} + u_{n-2}$, para $n \geq 3$ (caso recursivo).

A veces la sucesión que nos interesa no tiene una fórmula *cerrada* como las anteriores y podemos expresarla en forma *recursiva*. Por ejemplo,

- $u_1 = 1$, $u_2 = 2$, (casos base)
- $u_n = u_{n-1} + u_{n-2}$, para $n \geq 3$ (caso recursivo).

La anterior es la *sucesión de Fibonacci.* Entonces podemos calcular los término $n \geq 3$ de la sucesión usando la recursión:

A veces la sucesión que nos interesa no tiene una fórmula *cerrada* como las anteriores y podemos expresarla en forma *recursiva*. Por ejemplo,

- $u_1 = 1$, $u_2 = 2$, (casos base)
- $u_n = u_{n-1} + u_{n-2}$, para $n \geq 3$ (caso recursivo).

La anterior es la *sucesión de Fibonacci.* Entonces podemos calcular los término $n \geq 3$ de la sucesión usando la recursión:

- $u_3 = u_2 + u_1 = 2 + 1 = 3$,

A veces la sucesión que nos interesa no tiene una fórmula *cerrada* como las anteriores y podemos expresarla en forma *recursiva*. Por ejemplo,

- $u_1 = 1,\ u_2 = 2$, (casos base)
- $u_n = u_{n-1} + u_{n-2}$, para $n \geq 3$ (caso recursivo).

La anterior es la *sucesión de Fibonacci.* Entonces podemos calcular los término $n \geq 3$ de la sucesión usando la recursión:

- $u_3 = u_2 + u_1 = 2 + 1 = 3$,
- $u_4 = u_3 + u_2 = 3 + 2 = 5$

A veces la sucesión que nos interesa no tiene una fórmula *cerrada* como las anteriores y podemos expresarla en forma *recursiva*. Por ejemplo,

- $u_1 = 1$, $u_2 = 2$, (casos base)
- $u_n = u_{n-1} + u_{n-2}$, para $n \geq 3$ (caso recursivo).

La anterior es la *sucesión de Fibonacci.* Entonces podemos calcular los término $n \geq 3$ de la sucesión usando la recursión:

- $u_3 = u_2 + u_1 = 2 + 1 = 3$,
- $u_4 = u_3 + u_2 = 3 + 2 = 5$
- $u_5 = u_4 + u_3 = 5 + 3 = 8$

y así sucesivamente.

Ejemplo

Sea u_n definida

- $u_1 = 3$, $u_2 = 5$ y
- $u_n = 3u_{n-1} - 2u_{n-2}$ para $n \geq 3$.

Calcular u_n para $n \leq 5$.

Ejemplo

Sea u_n definida

- $u_1 = 3,\ u_2 = 5$ y
- $u_n = 3u_{n-1} - 2u_{n-2}$ para $n \geq 3$.

Calcular u_n para $n \leq 5$.

Solución

Ejemplo

Sea u_n definida

- $u_1 = 3$, $u_2 = 5$ y
- $u_n = 3u_{n-1} - 2u_{n-2}$ para $n \geq 3$.

Calcular u_n para $n \leq 5$.

Solución

Los valores para $n = 1$ y $n = 2$ ya los conocemos. La fórmula recursiva es la que nos servirá para conocer los siguientes términos

Ejemplo

Sea u_n definida

- $u_1 = 3$, $u_2 = 5$ y
- $u_n = 3u_{n-1} - 2u_{n-2}$ para $n \geq 3$.

Calcular u_n para $n \leq 5$.

Solución

Los valores para $n = 1$ y $n = 2$ ya los conocemos. La fórmula recursiva es la que nos servirá para conocer los siguientes términos

- $u_3 = 3u_2 - 2u_1$

Ejemplo

Sea u_n definida

- $u_1 = 3$, $u_2 = 5$ y
- $u_n = 3u_{n-1} - 2u_{n-2}$ para $n \geq 3$.

Calcular u_n para $n \leq 5$.

Solución

Los valores para $n = 1$ y $n = 2$ ya los conocemos. La fórmula recursiva es la que nos servirá para conocer los siguientes términos

- $u_3 = 3u_2 - 2u_1 = 3 \cdot 5 - 2 \cdot 3 = 9$,

Ejemplo

Sea u_n definida

- $u_1 = 3$, $u_2 = 5$ y
- $u_n = 3u_{n-1} - 2u_{n-2}$ para $n \geq 3$.

Calcular u_n para $n \leq 5$.

Solución

Los valores para $n = 1$ y $n = 2$ ya los conocemos. La fórmula recursiva es la que nos servirá para conocer los siguientes términos

- $u_3 = 3u_2 - 2u_1 = 3 \cdot 5 - 2 \cdot 3 = 9$,
- $u_4 = 3u_3 - 2u_2$

Ejemplo

Sea u_n definida

- $u_1 = 3$, $u_2 = 5$ y
- $u_n = 3u_{n-1} - 2u_{n-2}$ para $n \geq 3$.

Calcular u_n para $n \leq 5$.

Solución

Los valores para $n = 1$ y $n = 2$ ya los conocemos. La fórmula recursiva es la que nos servirá para conocer los siguientes términos

- $u_3 = 3u_2 - 2u_1 = 3 \cdot 5 - 2 \cdot 3 = 9$,
- $u_4 = 3u_3 - 2u_2 = 3 \cdot 9 - 2 \cdot 5 = 17$,

Ejemplo

Sea u_n definida

- $u_1 = 3, \ u_2 = 5$ y
- $u_n = 3u_{n-1} - 2u_{n-2}$ para $n \geq 3$.

Calcular u_n para $n \leq 5$.

Solución

Los valores para $n = 1$ y $n = 2$ ya los conocemos. La fórmula recursiva es la que nos servirá para conocer los siguientes términos

- $u_3 = 3u_2 - 2u_1 = 3 \cdot 5 - 2 \cdot 3 = 9,$
- $u_4 = 3u_3 - 2u_2 = 3 \cdot 9 - 2 \cdot 5 = 17,$
- $u_5 = 3u_4 - 2u_3$

Ejemplo

Sea u_n definida

- $u_1 = 3$, $u_2 = 5$ y
- $u_n = 3u_{n-1} - 2u_{n-2}$ para $n \geq 3$.

Calcular u_n para $n \leq 5$.

Solución

Los valores para $n = 1$ y $n = 2$ ya los conocemos. La fórmula recursiva es la que nos servirá para conocer los siguientes términos

- $u_3 = 3u_2 - 2u_1 = 3 \cdot 5 - 2 \cdot 3 = 9$,
- $u_4 = 3u_3 - 2u_2 = 3 \cdot 9 - 2 \cdot 5 = 17$,
- $u_5 = 3u_4 - 2u_3 = 3 \cdot 17 - 2 \cdot 9 = 33$,

En base al resultado podemos, en este caso, adivinar una fórmula general para u_n. Escribamos de nuevo los valores de la sucesión para $n \leq 5$.

En base al resultado podemos, en este caso, adivinar una fórmula general para u_n. Escribamos de nuevo los valores de la sucesión para $n \leq 5$.

- $u_1 = 3$,

En base al resultado podemos, en este caso, adivinar una fórmula general para u_n. Escribamos de nuevo los valores de la sucesión para $n \leq 5$.

- $u_1 = 3$,
- $u_2 = 5$,

En base al resultado podemos, en este caso, adivinar una fórmula general para u_n. Escribamos de nuevo los valores de la sucesión para $n \leq 5$.

- $u_1 = 3$,
- $u_2 = 5$,
- $u_3 = 9$,

En base al resultado podemos, en este caso, adivinar una fórmula general para u_n. Escribamos de nuevo los valores de la sucesión para $n \leq 5$.

- $u_1 = 3$,
- $u_2 = 5$,
- $u_3 = 9$,
- $u_4 = 17$,

En base al resultado podemos, en este caso, adivinar una fórmula general para u_n. Escribamos de nuevo los valores de la sucesión para $n \leq 5$.

- $u_1 = 3$,
- $u_2 = 5$,
- $u_3 = 9$,
- $u_4 = 17$,
- $u_5 = 33$,

En base al resultado podemos, en este caso, adivinar una fórmula general para u_n. Escribamos de nuevo los valores de la sucesión para $n \leq 5$.

- $u_1 = 3$,
- $u_2 = 5$,
- $u_3 = 9$,
- $u_4 = 17$,
- $u_5 = 33$,

En base al resultado podemos, en este caso, adivinar una fórmula general para u_n. Escribamos de nuevo los valores de la sucesión para $n \leq 5$.

- $u_1 = 3$,
- $u_2 = 5$,
- $u_3 = 9$,
- $u_4 = 17$,
- $u_5 = 33$,

Observando cuidadosamente estos valores podemos darnos cuenta que:

- $u_1 = 3 = 2 + 1 = 2^1 + 1,$

- $u_1 = 3 = 2 + 1 = 2^1 + 1,$
- $u_2 = 5 = 4 + 1 = 2^2 + 1,$

- $u_1 = 3 = 2 + 1 = 2^1 + 1,$
- $u_2 = 5 = 4 + 1 = 2^2 + 1,$
- $u_3 = 9 = 8 + 1 = 2^3 + 1,$

- $u_1 = 3 = 2 + 1 = 2^1 + 1,$
- $u_2 = 5 = 4 + 1 = 2^2 + 1,$
- $u_3 = 9 = 8 + 1 = 2^3 + 1,$
- $u_4 = 17 = 16 + 1 = 2^4 + 1,$

- $u_1 = 3 = 2 + 1 = 2^1 + 1,$
- $u_2 = 5 = 4 + 1 = 2^2 + 1,$
- $u_3 = 9 = 8 + 1 = 2^3 + 1,$
- $u_4 = 17 = 16 + 1 = 2^4 + 1,$
- $u_5 = 33 = 32 + 1 = 2^5 + 1,$

- $u_1 = 3 = 2 + 1 = 2^1 + 1,$
- $u_2 = 5 = 4 + 1 = 2^2 + 1,$
- $u_3 = 9 = 8 + 1 = 2^3 + 1,$
- $u_4 = 17 = 16 + 1 = 2^4 + 1,$
- $u_5 = 33 = 32 + 1 = 2^5 + 1,$

Ahora sí, claramente podemos deducir que (posiblemente)

$$u_n = 2^n + 1.$$

- $u_1 = 3 = 2 + 1 = 2^1 + 1,$
- $u_2 = 5 = 4 + 1 = 2^2 + 1,$
- $u_3 = 9 = 8 + 1 = 2^3 + 1,$
- $u_4 = 17 = 16 + 1 = 2^4 + 1,$
- $u_5 = 33 = 32 + 1 = 2^5 + 1,$

Ahora sí, claramente podemos deducir que (posiblemente)

$$u_n = 2^n + 1.$$

La clase que viene aprenderemos un método (principio de inducción) que nos permitirá probar este tipo de afirmaciones.

El método de definición recursiva aparecerá bastante seguido en la materia. Existen otras formas de este procedimiento que se "esconden" por su notación.

El método de definición recursiva aparecerá bastante seguido en la materia. Existen otras formas de este procedimiento que se "esconden" por su notación. ¿Qué significan las siguientes expresiones?

$$\sum_{r=1}^{n} r, \qquad 1 + 2 + 3 + \cdots + n.$$

El método de definición recursiva aparecerá bastante seguido en la materia. Existen otras formas de este procedimiento que se “esconden” por su notación. ¿Qué significan las siguientes expresiones?

$$\sum_{r=1}^{n} r, \qquad 1 + 2 + 3 + \cdots + n.$$

Ambas significan que sumamos los primeros n números naturales, pero cada uno contiene un misterioso símbolo, $\sum$ y $\cdots$, respectivamente.

El método de definición recursiva aparecerá bastante seguido en la materia. Existen otras formas de este procedimiento que se "esconden" por su notación. ¿Qué significan las siguientes expresiones?

$$\sum_{r=1}^{n} r, \qquad 1 + 2 + 3 + \cdots + n.$$

Ambas significan que sumamos los primeros n números naturales, pero cada uno contiene un misterioso símbolo, $\sum$ y $\cdots$, respectivamente.
Lo que deberíamos decir es que cada uno de ellos es equivalente a la expresión s_n, dada por la siguiente definición recursiva:

El método de definición recursiva aparecerá bastante seguido en la materia. Existen otras formas de este procedimiento que se "esconden" por su notación. ¿Qué significan las siguientes expresiones?

$$\sum_{r=1}^{n} r, \qquad 1 + 2 + 3 + \cdots + n.$$

Ambas significan que sumamos los primeros n números naturales, pero cada uno contiene un misterioso símbolo, $\sum$ y $\cdots$, respectivamente. Lo que deberíamos decir es que cada uno de ellos es equivalente a la expresión s_n, dada por la siguiente definición recursiva:

$$s_1 = 1, \qquad s_n = s_{n-1} + n, \qquad n \geq 2.$$

Definición

Sea $n \in \mathbb{N}$ sean a_i, $1 \leq i \leq n$ una secuencia de números (enteros, reales, etc.).

Definición

Sea $n \in \mathbb{N}$ sean a_i, $1 \leq i \leq n$ una secuencia de números (enteros, reales, etc.).Entonces $\sum_{i=1}^{n} a_i$ denota la función recursiva definida

Definición

Sea $n \in \mathbb{N}$ sean a_i, $1 \leq i \leq n$ una secuencia de números (enteros, reales, etc.).Entonces $\sum_{i=1}^{n} a_i$ denota la función recursiva definida

$$\sum_{i=1}^{1} a_i = a_1, \qquad \sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{i=1}^{n-1} a_i + a_n \quad (n \geq 2).$$

Definición

Sea $n \in \mathbb{N}$ sean a_i, $1 \leq i \leq n$ una secuencia de números (enteros, reales, etc.).Entonces $\sum_{i=1}^{n} a_i$ denota la función recursiva definida

$$\sum_{i=1}^{1} a_i = a_1, \qquad \sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{i=1}^{n-1} a_i + a_n \quad (n \geq 2).$$

En este caso decimos que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_i$ es la *sumatoria* de los a_i de $i = 1$ a n.

Definición

El símbolo $\prod_{i=1}^{n} a_i$ denota la función recursiva definida

Definición

El símbolo $\prod_{i=1}^{n} a_i$ denota la función recursiva definida

$$\prod_{i=1}^{1} a_i = a_1, \qquad \prod_{i=1}^{n} a_i = \prod_{i=1}^{n-1} a_i \cdot a_n \quad (n \geq 2).$$

Definición

El símbolo $\prod_{i=1}^{n} a_i$ denota la función recursiva definida

$$\prod_{i=1}^{1} a_i = a_1, \qquad \prod_{i=1}^{n} a_i = \prod_{i=1}^{n-1} a_i \cdot a_n \quad (n \geq 2).$$

En este caso decimos que $\prod_{i=1}^{n} a_i$ es la *productoria* de los a_i de $i = 1$ a n.

Una definición muy utilizada es la de $n!$ (que se lee *n factorial*). Intuitivamente podemos definirlo como

Una definición muy utilizada es la de $n!$ (que se lee *n factorial*). Intuitivamente podemos definirlo como

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n,$$

Una definición muy utilizada es la de $n!$ (que se lee n *factorial*). Intuitivamente podemos definirlo como

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n,$$

y el significado es bastante claro para cualquiera.

Una definición muy utilizada es la de $n!$ (que se lee *n factorial*). Intuitivamente podemos definirlo como

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n,$$

y el significado es bastante claro para cualquiera.

Pero para precisar (y hacerlo claro para una computadora) debemos usar una definición recursiva:

Una definición muy utilizada es la de $n!$ (que se lee n *factorial*). Intuitivamente podemos definirlo como

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n,$$

y el significado es bastante claro para cualquiera.

Pero para precisar (y hacerlo claro para una computadora) debemos usar una definición recursiva:

- $1! = 1$,

Una definición muy utilizada es la de $n!$ (que se lee n *factorial*). Intuitivamente podemos definirlo como

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n,$$

y el significado es bastante claro para cualquiera.

Pero para precisar (y hacerlo claro para una computadora) debemos usar una definición recursiva:

- $1! = 1,$
- $n! = (n-1)! \cdot n.$

Observar que también podemos definir

Observar que también podemos definir

$$n! = \prod_{i=1}^{n} i.$$

Observar que también podemos definir

$$n! = \prod_{i=1}^{n} i.$$

Pese a que esta última fórmula parece cerrada, oculta la definición recursiva de $\prod$.

Observar que también podemos definir

$$n! = \prod_{i=1}^{n} i.$$

Pese a que esta última fórmula parece cerrada, oculta la definición recursiva de $\prod$.

Es un resultado conocido que la función $n!$ *no* admite una fórmula cerrada.

Finalmente definiremos la “n-ésima potencia” de un número: sea x un número, si $n \in \mathbb{N}$ definimos

Finalmente definiremos la "n-ésima potencia" de un número: sea x un número, si $n \in \mathbb{N}$ definimos

$$x^1 = x, \qquad x^n = x \cdot x^{n-1} \quad (n \geq 2).$$

Finalmente definiremos la "n-ésima potencia" de un número: sea x un número, si $n \in \mathbb{N}$ definimos

$$x^1 = x, \qquad x^n = x \cdot x^{n-1} \quad (n \geq 2).$$

Por completitud, definimos $x^0 = 1$ cuando $x \neq 0$ y dejamos indefinido 0^0.