

# Matemática Discreta I

## Clase 5 - Ejercicios de inducción

FAMAF / UNC

31 de marzo de 2022

## Ejercicio (Serie aritmética)

Probar que

$$1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2},$$

para  $n \in \mathbb{N}$ .

## Demostración

(*Caso base*) El resultado es verdadero cuando  $n = 1$  pues  $1 = \frac{1 \cdot (1+1)}{2}$ .

(Paso inductivo)

Supongamos que el resultado verdadero cuando  $n = k$ , o sea, que

$$\sum_{i=1}^k i = \frac{k(k+1)}{2} \quad \text{hipótesis inductiva (HI)}.$$

En el paso inductivo queremos probar que

$$\sum_{i=1}^k i = \frac{k(k+1)}{2} \Rightarrow \sum_{i=1}^{k+1} i = \frac{(k+1)(k+2)}{2}.$$

Entonces

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{k+1} i &= \sum_{i=0}^k i + (k+1) && \text{(por la definición recursiva de } \sum \text{)} \\ &= \frac{k(k+1)}{2} + (k+1) && \text{(por hipótesis inductiva)} \\ &= (k+1)\left(\frac{k}{2} + 1\right) && ((k+1) \text{ factor común}) \\ &= (k+1)\frac{(k+2)}{2}. \\ &= \frac{(k+1)(k+2)}{2}.\end{aligned}$$

Luego el resultado es verdadero cuando  $n = k + 1$  y por el principio de inducción, es verdadero para todos los enteros positivos  $n$ . □

## Ejercicio (Serie geométrica)

Probar que

$$1 + q + q^2 + \cdots + q^n = \sum_{i=0}^n q^i = \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1},$$

para  $n \in \mathbb{N}_0$ ,  $q > 0$  y  $q \neq 1$ .

### Demostración

(Caso base) El resultado es verdadero cuando  $n = 0$  pues

$$q^0 = 1 = \frac{q^{0+1} - 1}{q - 1}.$$

(*Paso inductivo*) Supongamos que el resultado verdadero cuando  $n = k$ , o sea, que

$$\sum_{i=0}^k q^i = \frac{q^{k+1} - 1}{q - 1}, \quad \text{hipótesis inductiva (HI)}.$$

En el paso inductivo queremos probar que

$$\sum_{i=0}^k q^i = \frac{q^{k+1} - 1}{q - 1} \quad \Rightarrow \quad \sum_{i=0}^{k+1} q^i = \frac{q^{k+2} - 1}{q - 1}.$$

Entonces

$$\sum_{i=0}^{k+1} q^i = \sum_{i=0}^k q^i + q^{k+1} \quad (\text{por la definición recursiva})$$

$$= \frac{q^{k+1} - 1}{q - 1} + q^{k+1} \quad (\text{por hipótesis inductiva})$$

$$= \frac{q^{k+1} - 1 + (q - 1)q^{k+1}}{q - 1}$$

$$= \frac{q^{k+1} - 1 + q \cdot q^{k+1} - q^{k+1}}{q - 1}$$

$$= \frac{q^{k+2} - 1}{q - 1}$$

Luego el resultado es verdadero cuando  $n = k + 1$  y por el principio de inducción, es verdadero para todos los enteros positivos  $n$ . □

## Ejercicio

Probar que

$$(1 + 2 + 3 + \cdots + n)^2 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3,$$

para  $n \in \mathbb{N}$ .

## Demostración

Para probar esto primero debemos usar el resultado de la página 2 que nos dice que

$$(1 + 2 + 3 + \cdots + n)^2 = \left( \sum_{i=1}^n i \right)^2 = \left( \frac{n(n+1)}{2} \right)^2 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}.$$

Luego debemos probar que

$$\sum_{i=1}^n i^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}.$$



(Caso base) El resultado es verdadero cuando  $n = 1$  pues

$$\sum_{i=1}^1 i^3 = 1 \quad \text{y} \quad \frac{1^2(1+1)^2}{4} = \frac{4}{4} = 1.$$

(Paso inductivo) Debemos probar que si  $k \geq 1$ ,

$$\sum_{i=0}^k i^3 = \frac{k^2(k+1)^2}{4} \quad (\text{HI}) \quad \Rightarrow \quad \sum_{i=0}^{k+1} i^3 = \frac{(k+1)^2(k+2)^2}{4}.$$

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{k+1} i^3 &= \sum_{i=0}^k i^3 + (k+1)^3 && \text{(por la definición recursiva de } \sum) \\
&= \frac{k^2(k+1)^2}{4} + (k+1)^3 && \text{(por hipótesis inductiva)} \\
&= (k+1)^2 \left( \frac{k^2}{4} + (k+1) \right) && ((k+1)^2 \text{ factor común}) \\
&= (k+1)^2 \frac{(k^2 + 4k + 4)}{4}. \\
&= \frac{(k+1)^2(k+2)^2}{4}.
\end{aligned}$$

Luego el resultado es verdadero cuando  $n = k + 1$  y por el principio de inducción, es verdadero para todos los enteros positivos  $n$ . □

# Inducción completa

## Ejercicio

Sea  $u_n$  definida recursivamente por:

$$u_0 = 1, \quad u_1 = 0, \quad u_n = 5u_{n-1} - 6u_{n-2}, \quad \forall n \geq 2.$$

1. Calcule  $u_2$  y  $u_3$  usando recursión.
2. Pruebe por inducción que  $u_n = 3 \cdot 2^n - 2 \cdot 3^n$  ( $n \in \mathbb{N}_0$ ).

## Solución

1. Por definición  $u_0 = 1$ ,  $u_1 = 0$ , luego:

$$u_2 = 5u_{2-1} - 6u_{2-2} = 5u_1 - 6u_0 = 5 \cdot 0 - 6 \cdot 1 = -6$$

Ahora  $u_1 = 0$ ,  $u_2 = -6$ , luego:

$$u_3 = 5u_{3-1} - 6u_{3-2} = 5u_2 - 6u_1 = 5 \cdot (-6) - 6 \cdot 0 = -30.$$

## 2. (Caso base)

Por un lado  $u_0 = 1$ , por definición, por otro lado si calculamos con la fórmula:  $u_0 = 3 \cdot 2^0 - 2 \cdot 3^0 = 3 - 2 = 1$  y listo.

Por un lado  $u_1 = 0$ , por definición, por otro lado si calculamos con la fórmula:  $u_1 = 3 \cdot 2^1 - 2 \cdot 3^1 = 3 \cdot 2 - 2 \cdot 3 = 6 - 6 = 0$  y listo.

## (Paso inductivo)

Debemos probar que si vale

$$u_h = 3 \cdot 2^h - 2 \cdot 3^h \text{ para } 0 \leq h \leq k \text{ con } k \geq 1, \quad (\text{HI})$$

eso implica que

$$u_{k+1} = 3 \cdot 2^{k+1} - 2 \cdot 3^{k+1}. \quad (*)$$

Comenzamos por el lado izquierdo de (\*):

$$\begin{aligned}u_{k+1} &= 5u_{k+1-1} - 6u_{k+1-2} && (\text{def. } u_n) \\&= 5u_k - 6u_{k-1} \\&= 5(3 \cdot 2^k - 2 \cdot 3^k) - 6(3 \cdot 2^{k-1} - 2 \cdot 3^{k-1}) && (\text{por HI})\end{aligned}$$

En lo que se refiere al procedimiento de inducción hemos terminado, ahora solo queda por probar que

$$5(3 \cdot 2^k - 2 \cdot 3^k) - 6(3 \cdot 2^{k-1} - 2 \cdot 3^{k-1}) = 3 \cdot 2^{k+1} - 2 \cdot 3^{k+1} \quad (**)$$

Desarrollemos el término de la izquierda

$$\begin{aligned}&= 5(3 \cdot 2^k - 2 \cdot 3^k) - 6(3 \cdot 2^{k-1} - 2 \cdot 3^{k-1}) \\&= 5 \cdot 3 \cdot 2^k - 5 \cdot 2 \cdot 3^k - 6 \cdot 3 \cdot 2^{k-1} + 6 \cdot 2 \cdot 3^{k-1} \\&= 5 \cdot 3 \cdot 2^k - 5 \cdot 2 \cdot 3^k - 3 \cdot 3 \cdot 2^k + 2 \cdot 2 \cdot 3^k \\&= 6 \cdot 2^k - 6 \cdot 3^k\end{aligned}$$

Luego (\*\*) se transforma en

$$6 \cdot 2^k - 6 \cdot 3^k = 3 \cdot 2^{k+1} - 2 \cdot 3^{k+1} \quad (***)$$



$$3 \cdot 2 \cdot 2^k - 2 \cdot 3 \cdot 3^k = 3 \cdot 2^{k+1} - 2 \cdot 3^{k+1}$$



$$3 \cdot 2^{k+1} - 2 \cdot 3^{k+1} = 3 \cdot 2^{k+1} - 2 \cdot 3^{k+1}.$$

Como esto último es verdadero, es verdadero (\*\*\*) y por lo tanto son verdaderos (\*\*) y (\*).



Nos adelantamos un poco en los temas de la materia para ejemplificar el principio de inducción completa.

### Definición

Sea  $n \in \mathbb{N}$  diremos que es *primo* si  $n \neq 1$  y el único natural menor que lo divide es 1.

### Ejercicio

Probar que si  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n > 1$ , entonces  $n$  es producto de primos.

### Demostración

Lo haremos por inducción en  $n \geq 2$ .

(Caso base)

El caso base es  $n = 2$ , y es claro que 2 es primo (y por lo tanto producto de primos en un sentido generalizado).

(Paso inductivo)

Probaremos que dado  $k > 1$ ,

todo  $h$  tal que  $2 \leq h \leq k$ , es producto de primos (HI)



$k + 1$  es producto de primos.



Si  $k + 1$  es primo, listo, es producto de primos.

Si  $k + 1$  no es primo, significa que  $k + 1 = d \cdot e$  donde  $d, e < k + 1$ .

Por (HI),  $d$  y  $e$  son productos de primos, es decir

$$d = p_1 \cdot p_2 \cdots p_r$$

$$e = q_1 \cdot q_2 \cdots q_s$$

donde  $p_i, q_i$  son primos. Luego

$$k + 1 = d \cdot e = p_1 \cdot p_2 \cdots p_r \cdot q_1 \cdot q_2 \cdots q_s.$$

Por lo tanto  $k + 1$  es producto de primos.

