

Matemática Discreta I

Clase 2 - Ordenando los enteros

FAMAF / UNC

16 de marzo de 2023

- El orden natural de los enteros es tan importante como sus propiedades aritméticas.

- El orden natural de los enteros es tan importante como sus propiedades aritméticas.
- Expresamos la idea de orden formalmente diciendo que existe una relación que indicamos “ $<$ ”.

- El orden natural de los enteros es tan importante como sus propiedades aritméticas.
- Expresamos la idea de orden formalmente diciendo que existe una relación que indicamos “ $<$ ”.
- Solo cuatro axiomas se necesitan para especificar las propiedades básicas del símbolo $<$.

- El orden natural de los enteros es tan importante como sus propiedades aritméticas.
- Expresamos la idea de orden formalmente diciendo que existe una relación que indicamos “ $<$ ”.
- Solo cuatro axiomas se necesitan para especificar las propiedades básicas del símbolo $<$.

Observación

Si $a, b \in \mathbb{Z}$, $a < b$ se lee:

a es menor que b o también *b es mayor que a*.

Axiomas de orden

Axiomas de orden

18) *Ley de tricotomía*. Vale una y sólo una de las relaciones siguientes:

$$a < b, \quad a = b, \quad b < a.$$

Axiomas de orden

18) *Ley de tricotomía*. Vale una y sólo una de las relaciones siguientes:

$$a < b, \quad a = b, \quad b < a.$$

19) *Ley transitiva*. Si $a < b$ y $b < c$, entonces $a < c$.

Axiomas de orden

18) *Ley de tricotomía.* Vale una y sólo una de las relaciones siguientes:

$$a < b, \quad a = b, \quad b < a.$$

19) *Ley transitiva.* Si $a < b$ y $b < c$, entonces $a < c$.

110) *Compatibilidad de la suma con el orden.* Si $a < b$, entonces $a + c < b + c$.

Axiomas de orden

18) *Ley de tricotomía.* Vale una y sólo una de las relaciones siguientes:

$$a < b, \quad a = b, \quad b < a.$$

19) *Ley transitiva.* Si $a < b$ y $b < c$, entonces $a < c$.

110) *Compatibilidad de la suma con el orden.* Si $a < b$, entonces $a + c < b + c$.

111) *Compatibilidad del producto con el orden.* Si $a < b$ y $0 < c$, entonces $ac < bc$.

Esta claro que podemos definir los otros símbolos de orden $>$, \leq y \geq , en términos de los símbolos $<$ e $=$.

Esta claro que podemos definir los otros símbolos de orden $>$, \leq y \geq , en términos de los símbolos $<$ e $=$.

- ($>$) Diremos que $m > n$ si $n < m$.

Esta claro que podemos definir los otros símbolos de orden $>$, \leq y \geq , en términos de los símbolos $<$ e $=$.

- ($>$) Diremos que $m > n$ si $n < m$.
- (\leq) Diremos que $m \leq n$ si $m < n$ o $m = n$.

Esta claro que podemos definir los otros símbolos de orden $>$, \leq y \geq , en términos de los símbolos $<$ e $=$.

- ($>$) Diremos que $m > n$ si $n < m$.
- (\leq) Diremos que $m \leq n$ si $m < n$ o $m = n$.
- (\geq) Diremos que $m \geq n$ si $m > n$ o $m = n$.

Es importante notar que el axioma (I11) tiene una versión valedera para estos nuevos símbolos.

Es importante notar que el axioma (I11) tiene una versión valedera para estos nuevos símbolos.

- ($>$) Si $a > b$ y $c > 0$, entonces $ac > bc$.

Es importante notar que el axioma (I11) tiene una versión valedera para estos nuevos símbolos.

- ($>$) Si $a > b$ y $c > 0$, entonces $ac > bc$.
- (\leq) Si $a \leq b$ y $0 \leq c$, entonces $ac \leq bc$.

Es importante notar que el axioma (I11) tiene una versión valedera para estos nuevos símbolos.

- ($>$) Si $a > b$ y $c > 0$, entonces $ac > bc$.
- (\leq) Si $a \leq b$ y $0 \leq c$, entonces $ac \leq bc$.
- (\geq) Si $a \geq b$ y $c \geq 0$, entonces $ac \geq bc$.

Es importante notar que el axioma (I11) tiene una versión valedera para estos nuevos símbolos.

- ($>$) Si $a > b$ y $c > 0$, entonces $ac > bc$.
- (\leq) Si $a \leq b$ y $0 \leq c$, entonces $ac \leq bc$.
- (\geq) Si $a \geq b$ y $c \geq 0$, entonces $ac \geq bc$.

Usando las definiciones de \geq , $<$, $>$ y el axioma (I11) original es muy sencillo demostrar estas variantes.

El axioma (I11) tiene nuevas variantes cuando consideramos la multiplicación de una desigualdad por enteros negativos.

El axioma (I11) tiene nuevas variantes cuando consideramos la multiplicación de una desigualdad por enteros negativos.

Proposición

Sean $a, b, c \in \mathbb{Z}$.

- a) Si $c < 0$, entonces $0 < -c$.
- b) Si $a < b$ y $c < 0$, entonces $ac > bc$.

El axioma (I11) tiene nuevas variantes cuando consideramos la multiplicación de una desigualdad por enteros negativos.

Proposición

Sean $a, b, c \in \mathbb{Z}$.

- a) Si $c < 0$, entonces $0 < -c$.
- b) Si $a < b$ y $c < 0$, entonces $ac > bc$.

La demostración pueden verla en el apunte (proposición 1.2.1).

El axioma (I11) tiene nuevas variantes cuando consideramos la multiplicación de una desigualdad por enteros negativos.

Proposición

Sean $a, b, c \in \mathbb{Z}$.

- a) Si $c < 0$, entonces $0 < -c$.
- b) Si $a < b$ y $c < 0$, entonces $ac > bc$.

La demostración pueden verla en el apunte (proposición 1.2.1).

Usando esta proposición y la definición de $>$, \leq , \geq podemos hacer más variantes del axioma (I11) (¡16 en total!). Todas ellas bastante obvias.

Ejemplo

Sean $a, b, c \in \mathbb{Z}$. Entonces,

$$a \geq b \wedge c < 0 \Rightarrow ac \leq bc.$$

Ejemplo

Sean $a, b, c \in \mathbb{Z}$. Entonces,

$$a \geq b \wedge c < 0 \Rightarrow ac \leq bc.$$

Demostración

Ejemplo

Sean $a, b, c \in \mathbb{Z}$. Entonces,

$$a \geq b \wedge c < 0 \Rightarrow ac \leq bc.$$

Demostración

Como $a \geq b$, tenemos que $a > b$ o $a = b$.

Si $a > b$, entonces $b < a$. Como $c < 0 \Rightarrow bc > ac \Rightarrow ac < bc \Rightarrow ac \leq bc$.

Si $a = b$, entonces $ac = bc \Rightarrow ac \leq bc$. □

Ya hemos usado (en axioma I4) el símbolo \neq que denota “no es igual a” o bien “es distinto a”. En general, cuando tachemos un símbolo, estamos indicando la negación de la relación que define. Por ejemplo, $a \not< b$ denota “ a no es menor que b ”.

Ya hemos usado (en axioma I4) el símbolo \neq que denota “no es igual a” o bien “es distinto a”. En general, cuando tachemos un símbolo, estamos indicando la negación de la relación que define. Por ejemplo, $a \not< b$ denota “ a no es menor que b ”.

Observación

Demostremos que $a \not< b$ es equivalente a $a \geq b$: por la ley de tricotomía axioma (I8) tenemos que solo vale una y solo una de las siguientes afirmaciones

$$a < b, \quad a = b, \quad b < a.$$

Ya hemos usado (en axioma I4) el símbolo \neq que denota “no es igual a” o bien “es distinto a”. En general, cuando tachemos un símbolo, estamos indicando la negación de la relación que define. Por ejemplo, $a \not< b$ denota “ a no es menor que b ”.

Observación

Demostremos que $a \not< b$ es equivalente a $a \geq b$: por la ley de tricotomía axioma (I8) tenemos que solo vale una y solo una de las siguientes afirmaciones

$$a < b, \quad a = b, \quad b < a.$$

Como $a \not< b$, entonces vale una de las dos afirmaciones siguientes, $a = b$ o $b < a$, es decir vale que $a \geq b$. De forma análoga se prueba que $a \not\leq b$ si y sólo si $a > b$, $a \not> b$ si y sólo si $a \leq b$ y $a \not\geq b$ si y sólo si $a < b$.

\leq es una relación de orden

\leq es una relación de orden

Sean a , b y c enteros arbitrarios. Es posible demostrar las siguientes propiedades de \leq :

O1) *Reflexividad.* $a \leq a$.

\leq es una relación de orden

Sean a , b y c enteros arbitrarios. Es posible demostrar las siguientes propiedades de \leq :

O1) *Reflexividad*. $a \leq a$.

O2) *Antisimetría*. Si $a \leq b$ y $b \leq a$, entonces $a = b$.

\leq es una relación de orden

Sean a , b y c enteros arbitrarios. Es posible demostrar las siguientes propiedades de \leq :

01) *Reflexividad*. $a \leq a$.

02) *Antisimetría*. Si $a \leq b$ y $b \leq a$, entonces $a = b$.

03) *Transitividad*. Si $a \leq b$ y $b \leq c$, entonces $a \leq c$.

\leq es una relación de orden

Sean a , b y c enteros arbitrarios. Es posible demostrar las siguientes propiedades de \leq :

01) *Reflexividad*. $a \leq a$.

02) *Antisimetría*. Si $a \leq b$ y $b \leq a$, entonces $a = b$.

03) *Transitividad*. Si $a \leq b$ y $b \leq c$, entonces $a \leq c$.

\leq es una relación de orden

Sean a , b y c enteros arbitrarios. Es posible demostrar las siguientes propiedades de \leq :

O1) Reflexividad. $a \leq a$.

O2) Antisimetría. Si $a \leq b$ y $b \leq a$, entonces $a = b$.

O3) Transitividad. Si $a \leq b$ y $b \leq c$, entonces $a \leq c$.

Las demostraciones no son difíciles y las dejamos como ejercicios (se encuentran en el apunte).

\leq es una relación de orden

Sean a , b y c enteros arbitrarios. Es posible demostrar las siguientes propiedades de \leq :

O1) Reflexividad. $a \leq a$.

O2) Antisimetría. Si $a \leq b$ y $b \leq a$, entonces $a = b$.

O3) Transitividad. Si $a \leq b$ y $b \leq c$, entonces $a \leq c$.

Las demostraciones no son difíciles y las dejamos como ejercicios (se encuentran en el apunte).

Una relación que satisfaga las tres propiedades anteriores (reflexividad, antisimetría y transitividad) es llamada *una relación de orden*.

\leq es una relación de orden

Sean a , b y c enteros arbitrarios. Es posible demostrar las siguientes propiedades de \leq :

O1) Reflexividad. $a \leq a$.

O2) Antisimetría. Si $a \leq b$ y $b \leq a$, entonces $a = b$.

O3) Transitividad. Si $a \leq b$ y $b \leq c$, entonces $a \leq c$.

Las demostraciones no son difíciles y las dejamos como ejercicios (se encuentran en el apunte).

Una relación que satisfaga las tres propiedades anteriores (reflexividad, antisimetría y transitividad) es llamada *una relación de orden*.

Observar que $<$ *no* es una relación de orden, en el sentido de la definición anterior.

A primera vista podría parecer que ya tenemos todas las propiedades que necesitamos de \mathbb{Z} , pero, sorprendentemente, aún falta un axioma de vital importancia.

A primera vista podría parecer que ya tenemos todas las propiedades que necesitamos de \mathbb{Z} , pero, sorprendentemente, aún falta un axioma de vital importancia.

Observemos, que todos los axiomas que enunciamos también los cumplen los números racionales \mathbb{Q} y los números reales \mathbb{R} .

A primera vista podría parecer que ya tenemos todas las propiedades que necesitamos de \mathbb{Z} , pero, sorprendentemente, aún falta un axioma de vital importancia.

Observemos, que todos los axiomas que enunciamos también los cumplen los números racionales \mathbb{Q} y los números reales \mathbb{R} .

¿Cuál es la diferencia *fundamental* entre \mathbb{Z} y \mathbb{Q} o \mathbb{R} ?

A primera vista podría parecer que ya tenemos todas las propiedades que necesitamos de \mathbb{Z} , pero, sorprendentemente, aún falta un axioma de vital importancia.

Observemos, que todos los axiomas que enunciamos también los cumplen los números racionales \mathbb{Q} y los números reales \mathbb{R} .

¿Cuál es la diferencia *fundamental* entre \mathbb{Z} y \mathbb{Q} o \mathbb{R} ?



Figura: El dibujo correcto de \mathbb{Z} .

A primera vista podría parecer que ya tenemos todas las propiedades que necesitamos de \mathbb{Z} , pero, sorprendentemente, aún falta un axioma de vital importancia.

Observemos, que todos los axiomas que enunciamos también los cumplen los números racionales \mathbb{Q} y los números reales \mathbb{R} .

¿Cuál es la diferencia *fundamental* entre \mathbb{Z} y \mathbb{Q} o \mathbb{R} ?



Figura: El dibujo correcto de \mathbb{Z} .



Figura: El dibujo incorrecto de \mathbb{Z} .

Axioma de buena ordenación

Axioma de buena ordenación

Supongamos que X es un subconjunto de \mathbb{Z} ; entonces diremos que el entero b es una *cota inferior* de X si

$$b \leq x \quad \text{para todo } x \in X.$$

Axioma de buena ordenación

Supongamos que X es un subconjunto de \mathbb{Z} ; entonces diremos que el entero b es una *cota inferior* de X si

$$b \leq x \quad \text{para todo } x \in X.$$

Algunos subconjuntos no tienen cotas inferiores: por ejemplo, el conjunto de los enteros negativos $-1, -2, -3, \dots$, claramente no tiene cota inferior.

Axioma de buena ordenación

Supongamos que X es un subconjunto de \mathbb{Z} ; entonces diremos que el entero b es una *cota inferior* de X si

$$b \leq x \quad \text{para todo } x \in X.$$

Algunos subconjuntos no tienen cotas inferiores: por ejemplo, el conjunto de los enteros negativos $-1, -2, -3, \dots$, claramente no tiene cota inferior.

Definición

Una cota inferior de un conjunto X que es a su vez es un elemento de X , es conocido como el *mínimo* de X .

Axioma de buena ordenación

Nuestro último axioma para \mathbb{Z} afirma algo que es (aparentemente) una propiedad obvia.

Axioma de buena ordenación

Nuestro último axioma para \mathbb{Z} afirma algo que es (aparentemente) una propiedad obvia.

I12) Si X es un subconjunto de \mathbb{Z} que no es vacío y tiene una cota inferior, entonces X tiene un mínimo.

El axioma (I12) es conocido como el *axioma de buena ordenación* o *axioma del buen orden* o *principio de buena ordenación*.

Axioma de buena ordenación

Nuestro último axioma para \mathbb{Z} afirma algo que es (aparentemente) una propiedad obvia.

I12) Si X es un subconjunto de \mathbb{Z} que no es vacío y tiene una cota inferior, entonces X tiene un mínimo.

El axioma (I12) es conocido como el *axioma de buena ordenación* o *axioma del buen orden* o *principio de buena ordenación*.

Axioma de buena ordenación

Nuestro último axioma para \mathbb{Z} afirma algo que es (aparentemente) una propiedad obvia.

I12) Si X es un subconjunto de \mathbb{Z} que no es vacío y tiene una cota inferior, entonces X tiene un mínimo.

El axioma (I12) es conocido como el *axioma de buena ordenación* o *axioma del buen orden* o *principio de buena ordenación*.

Observar que \mathbb{Q} o \mathbb{R} con $<$ *no* satisfacen el axioma de buena ordenación.

El hecho de que haya espacios vacíos entre los enteros nos lleva a decir que el conjunto \mathbb{Z} es *discreto* y es esta propiedad la que da origen al nombre “matemática discreta”.

El hecho de que haya espacios vacíos entre los enteros nos lleva a decir que el conjunto \mathbb{Z} es *discreto* y es esta propiedad la que da origen al nombre “matemática discreta”.

En cálculo y análisis, los procesos de límite son de fundamental importancia, y es preciso usar aquellos sistemas numéricos que son *continuos*, en vez de los discretos.

El hecho de que haya espacios vacíos entre los enteros nos lleva a decir que el conjunto \mathbb{Z} es *discreto* y es esta propiedad la que da origen al nombre “matemática discreta”.

En cálculo y análisis, los procesos de límite son de fundamental importancia, y es preciso usar aquellos sistemas numéricos que son *continuos*, en vez de los discretos.

Repitamos los gráficos de la p. ??



Figura: El dibujo correcto de \mathbb{Z} .

El hecho de que haya espacios vacíos entre los enteros nos lleva a decir que el conjunto \mathbb{Z} es *discreto* y es esta propiedad la que da origen al nombre “matemática discreta”.

En cálculo y análisis, los procesos de límite son de fundamental importancia, y es preciso usar aquellos sistemas numéricos que son *continuos*, en vez de los discretos.

Repitamos los gráficos de la p. ??



Figura: El dibujo correcto de \mathbb{Z} .



Figura: El dibujo incorrecto de \mathbb{Z} .

El siguiente resultado es obvio, pero debe ser demostrado.

El siguiente resultado es obvio, pero debe ser demostrado.

Proposición

1 es el menor entero mayor que 0.

El siguiente resultado es obvio, pero debe ser demostrado.

Proposición

1 es el menor entero mayor que 0.

Es posible hacer la demostración con las herramientas que ya poseemos (si no ¡faltaría algún axioma!).

El siguiente resultado es obvio, pero debe ser demostrado.

Proposición

1 es el menor entero mayor que 0.

Es posible hacer la demostración con las herramientas que ya poseemos (si no ¡faltaría algún axioma!).

Sin embargo, la demostración es relativamente compleja y el estudiante interesado la puede ver en el apunte.