Matemática Discreta I
Clase 21 - Grafos 3

FAMAF / UNC

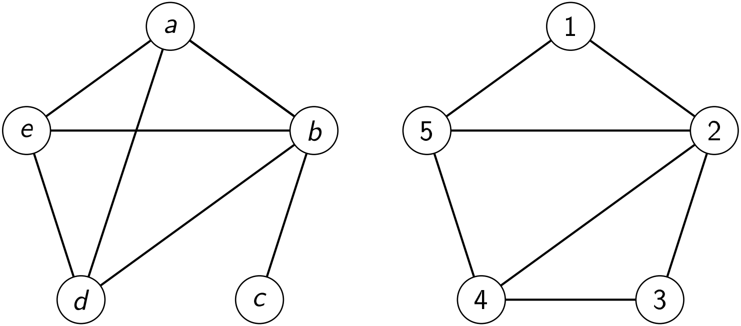
28 de mayo de 2020

Una aplicación importante de la noción de valencia es en el problema de determinar si dos grafos son o no isomorfos.

Si $\alpha : V_1 \to V_2$ es un isomorfismo entre G_1 y G_2, y $\alpha(v) = w$, entonces cada arista que contiene a v se transforma en una arista que contiene a w.

En consecuencia $\delta(v) = \delta(w)$. Por otro lado, si G_1 tiene un vértice x, con valencia $\delta(x) = \delta_0$, y G_2 no tiene vértices con valencia δ_0, entonces G_1 y G_2 no pueden ser isomorfos.

Esto nos da otra manera de ver que no son isomorfos los siguientes grafos:



Puesto que el primer grafo tiene un vértice de valencia 1 y el segundo no.

Una extensión de esta idea se da en la siguiente proposición.

Proposición

Sean G_1 y G_2 grafos isomorfos. Para cada $k \geq 0$ sea $n_i(k)$ el número de vértices de G_i que tienen valencia k ($i = 1, 2$). Entonces $n_1(k) = n_2(k)$.

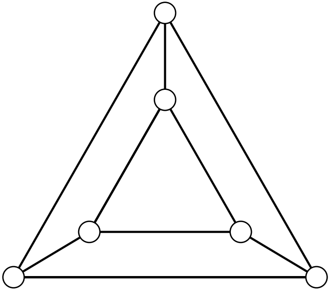
Demostración

Hemos visto más arriba que si $\alpha : V_1 \to V_2$ es un isomorfismo entre G_1 y G_2 y $v \in V_1$, entonces $\delta(v) = \delta(\alpha(v))$. Luego la cantidad de vértices con valencia k en G_1 es igual a la cantidad de vértices con valencia k en G_2.

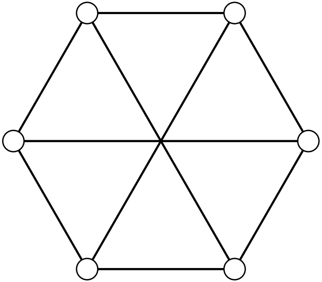
No hay ningún criterio general eficiente para determinar si dos grafos son isomorfos o no. En el siguiente ejemplo, no se aplica el criterio anterior.

Ejemplo

Probar que los siguientes grafos no son isomorfos.



G_1

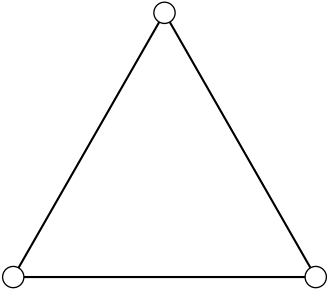


G_2

Solución

Ambos tienen 6 vértices, 9 aristas y todos los vértices son de valencia 3.

Sin embargo, observar que G_1 tiene un subgrafo K_3:



Mientras que G_2 no lo tiene. Por lo tanto, G_1 y G_2 no son isomorfos.

Caminatas, caminos y ciclos

Definición

Una *caminata* en un grafo G es una secuencia de vértices

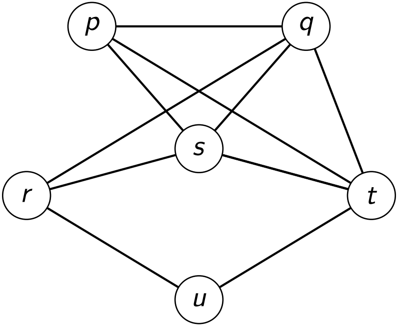
$$v_1, v_2, \ldots, v_k,$$

tal que v_i y v_{i+1} son adyacentes $(1 \leq i \leq k-1)$. Si todos los vértices son distintos, una caminata es llamada un *camino*.

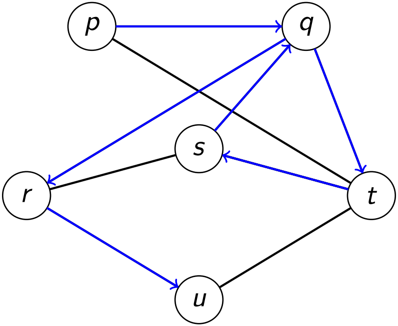
Llamaremos *ciclo* a una caminata $v_1, v_2, \ldots, v_{r+1}$ cuyos vértices son distintos exceptuando los extremos, es decir que $v_1 = v_{r+1}$ y a menudo diremos que es un *r-ciclo*, o un ciclo de *longitud* r en G.

Ejemplo

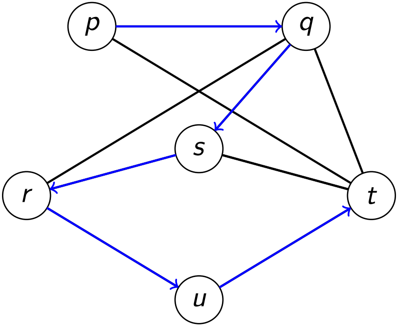
Dibujemos caminatas, caminos y ciclos en el siguiente grafo:



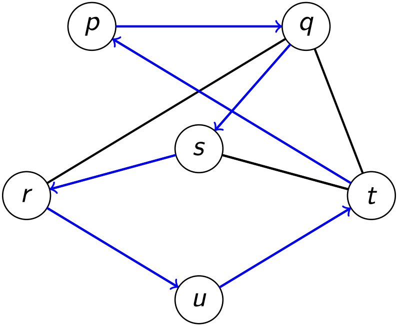
Caminata: p, q, t, s, q, r, u



Camino: p, q, s, r, u, t



Ciclo: p, q, s, r, u, t, p



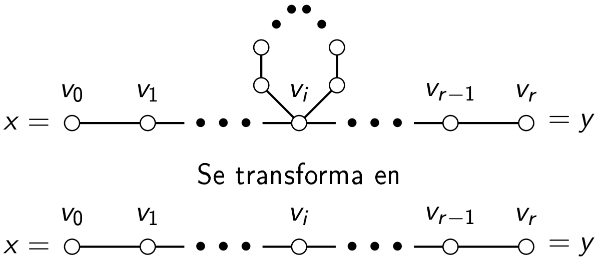
Lema

Sea G un grafo. Entonces, x e y pueden ser unidos por una caminata si y sólo si x e y pueden ser unidos por un camino.

Idea de la demostración

($\Leftarrow$) es trivial (un camino es una caminata).

($\Rightarrow$) Eliminar "bucles".



Escribamos $x \sim y$ siempre y cuando los vértices x e y de G puedan ser unidos por un camino en G: hablando en forma rigurosa, esto significa que hay un camino $v_1, v_2, \ldots, v_k$ en G con $x = v_1$ e $y = v_k$.

Definición

Sea G grafo, diremos que es conexo si para $x \sim y$ para cualesquiera x, y vértices en G.

El lema de la página anterior implica que:

- $x \sim x$ (reflexividad de $\sim$).
- $x \sim y$, entonces $y \sim x$ (simetría de $\sim$).
- $x \sim y$, $y \sim z$, entonces $x \sim z$ (transitividad de $\sim$).

Es decir, $\sim$ es una relación de equivalencia.