Matemática Discreta I
Clase 5 - Inducción completa - Conteo

FAMAF / UNC

30 de marzo de 2023

Practiquemos un poco con inducción.

Ejercicio

Probar que

$$(1+2+3+\cdots+n)^2 = 1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3,$$

para $n \in \mathbb{N}$.

Demostración

Para probar esto primero debemos usar el resultado de la página **??** que nos dice que

$$(1+2+3+\cdots+n)^2 = \left(\sum_{i=1}^{n} i\right)^2 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}.$$

Luego debemos probar que

$$\sum_{i=1}^{n} i^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}.$$

(*Caso base*)El resultado es verdadero cuando $n = 1$ pues

$$\sum_{i=1}^{1} i^3 = 1 \quad \text{y} \quad \frac{1^2(1+1)^2}{4} = \frac{4}{4} = 1.$$

(*Paso inductivo*)Debemos probar que si $k \geq 1$,

$$\sum_{i=0}^{k} i^3 = \frac{k^2(k+1)^2}{4} \quad \text{(HI)} \qquad \Rightarrow \quad \sum_{i=0}^{k+1} i^3 = \frac{(k+1)^2(k+2)^2}{4}.$$

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{k+1} i^3 &= \sum_{i=0}^{k} i^3 + (k+1)^3 && \text{(por la definición recursiva de } \textstyle\sum \text{)} \\
&= \frac{k^2(k+1)^2}{4} + (k+1)^3 && \text{(por hipótesis inductiva)} \\
&= (k+1)^2\left(\frac{k^2}{4} + (k+1)\right)) && ((k+1)^2 \text{ factor común}) \\
&= (k+1)^2 \frac{(k^2+4k+4)}{4}. \\
&= \frac{(k+1)^2(k+2)^2}{4}.
\end{aligned}
$$

Luego el resultado es verdadero cuando $n = k+1$ y por el principio de inducción, es verdadero para todos los enteros positivos n. $\square$

Inducción completa

Existen varias formas modificadas del principio de inducción. A veces es conveniente tomar como base inductiva el valor $n = 0$, por otro lado puede ser apropiado tomar un valor como 2 o 3 porque los primeros casos pueden ser excepcionales.

Cada problema debe ser tratado según sus características.

Otra modificación útil es tomar como hipótesis inductiva la suposición de que el resultado es verdadero para todos los valores $n \leq k$, más que para $n = k$ solamente.

Esta formulación es llamada a veces el *principio de inducción completa*. Todas esas modificaciones pueden justificarse con cambios triviales en la demostración del principio de inducción.

El siguiente teorema incorpora muchas de las modificaciones del principio de inducción mencionadas más arriba.

Teorema (Inducción completa)

Sea n_0 número entero y sea $P(n)$ una propiedad para $n \geq n_0$ tal que:

a) $P(n_0)$ es verdadera.
b) Si $P(h)$ verdadera para toda h tal que $n_0 \leq h \leq k$ implica $P(k+1)$ verdadera.

Entonces $P(n)$ es verdadera para todo $n \geq n_0$.

Ejemplo

$$u_1 = 3, \qquad u_2 = 5, \qquad u_n = 3u_{n-1} - 2u_{n-2}, \qquad n \geq 3.$$

Probemos que $u_n = 2^n + 1$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Solución.

(*Caso base*)

$$n = \boxed{1} : 3 = 2^1 + 1 \checkmark, \qquad n = \boxed{2} : 5 = 2^2 + 1 \checkmark.$$

(*Paso inductivo*) Hipótesis inductiva:

$$u_h = 2^h + 1 \text{ para } \boxed{1} \leq h \leq k \text{ y } k \geq \boxed{2} \text{ (HI)},$$

Luego debemos probar que:

$$u_h = 2^h + 1 \text{ para } 1 \leq h \leq k \text{ (HI)} \quad \Rightarrow \quad u_{k+1} = 2^{k+1} + 1.$$

Se comienza con el término izquierdo de lo que se quiere probar y se obtiene el derecho.

$$\begin{aligned}
u_{k+1} &= 3u_k - 2u_{k-1} && \text{(por definición recursiva)} \\
. \quad &= 3(2^k + 1) - 2(2^{k-1} + 1) && \text{(por hipótesis inductiva)} \\
&= 3 \cdot 2^k + 3 - 2 \cdot 2^{k-1} - 2 \\
&= 3 \cdot 2^k + 1 - 2^k \\
&= 2 \cdot 2^k + 1 \\
&= 2^{k+1} + 1.
\end{aligned}$$

$\square$

Ejercicio

Sea u_n definida recursivamente por:

$$u_0 = 1, \ u_1 = 0, \qquad u_n = 5u_{n-1} - 6u_{n-2}, \ \forall n \geq 2.$$

1. Calcule u_2 y u_3 usando recursión.
2. Pruebe por inducción que $u_n = 3 \cdot 2^n - 2 \cdot 3^n$ $(n \in \mathbb{N}_0)$.

Solución

1. Por definición $u_0 = 1, \ u_1 = 0$, luego:

$$u_2 = 5u_{2-1} - 6u_{2-2} = 5u_1 - 6u_0 = 5 \cdot 0 - 6 \cdot 1 = -6$$

Ahora $u_1 = 0, \ u_2 = -6$, luego:

$$u_3 = 5u_{3-1} - 6u_{3-2} = 5u_2 - 6u_1 = 5 \cdot (-6) - 6 \cdot 0 = -30.$$

2. (*Caso base*)

$n = \boxed{0}$: por un lado $u_0 = 1$, por definición, por otro lado si calculamos con la fórmula: $u_0 = 3 \cdot 2^0 - 2 \cdot 3^0 = 3 - 2 = 1$ y listo.

$n = \boxed{1}$: por un lado $u_1 = 0$, por definición, por otro lado si calculamos con la fórmula: $u_1 = 3 \cdot 2^1 - 2 \cdot 3^1 = 3 \cdot 2 - 2 \cdot 3 = 6 - 6 = 0$ y listo.

(*Paso inductivo*)

Debemos probar que si

$$k \geq \boxed{1} \ \text{ y } \ u_h = 3 \cdot 2^h - 2 \cdot 3^h \ \text{ para } \ \boxed{0} \leq h \leq k, \qquad \text{(HI)}$$

eso implica que

$$u_{k+1} = 3 \cdot 2^{k+1} - 2 \cdot 3^{k+1}. \qquad (*)$$

Comenzamos por el lado izquierdo de (*):

$$
\begin{aligned}
u_{k+1} &= 5u_{k+1-1} - 6u_{k+1-2} && \text{(def. } u_n\text{)} \\
&= 5u_k - 6u_{k-1} \\
&= 5(3 \cdot 2^k - 2 \cdot 3^k) - 6(3 \cdot 2^{k-1} - 2 \cdot 3^{k-1}) && \text{(por HI)}
\end{aligned}
$$

En lo que se refiere al procedimiento de inducción hemos terminado, ahora solo queda por probar que

$$5(3 \cdot 2^k - 2 \cdot 3^k) - 6(3 \cdot 2^{k-1} - 2 \cdot 3^{k-1}) = 3 \cdot 2^{k+1} - 2 \cdot 3^{k+1} \qquad (**)$$

Desarrollemos el término de la izquierda

$$
\begin{aligned}
&= 5(3 \cdot 2^k - 2 \cdot 3^k) - 6(3 \cdot 2^{k-1} - 2 \cdot 3^{k-1}) \\
&= 5 \cdot 3 \cdot 2^k - 5 \cdot 2 \cdot 3^k - 6 \cdot 3 \cdot 2^{k-1} + 6 \cdot 2 \cdot 3^{k-1} \\
&= 5 \cdot 3 \cdot 2^k - 5 \cdot 2 \cdot 3^k - 3 \cdot 3 \cdot 2^k + 2 \cdot 2 \cdot 3^k \\
&= 6 \cdot 2^k - 6 \cdot 3^k
\end{aligned}
$$

Luego (**) se transforma en

$$6 \cdot 2^k - 6 \cdot 3^k = 3 \cdot 2^{k+1} - 2 \cdot 3^{k+1} \qquad (***)$$

$$\Updownarrow$$

$$3 \cdot 2 \cdot 2^k - 2 \cdot 3 \cdot 3^k = 3 \cdot 2^{k+1} - 2 \cdot 3^{k+1}$$

$$\Updownarrow$$

$$3 \cdot 2^{k+1} - 2 \cdot 3^{k+1} = 3 \cdot 2^{k+1} - 2 \cdot 3^{k+1}.$$

Como esto último es verdadero, es verdadero (***) y por lo tanto son verdaderos (**) y (*).

$\square$

Nos adelantamos un poco en los temas de la materia para ejemplificar el principio de inducción completa aplicado a un problema que no es de recursión.

Definición

Sea $n \in \mathbb{N}$ diremos que es *primo* si $n \neq 1$ y el único natural menor que lo divide es 1.

Ejercicio

Probar que si $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$, entonces n es producto de primos.

Demostración

Lo haremos por inducción en $n \geq 2$.

(*Caso base*)

El caso base es $n = 2$, y es claro que 2 es primo (y por lo tanto producto de primos en un sentido generalizado).

(*Paso inductivo*)

Probaremos que dado $k \geq 2$,

$$\text{todo } h \text{ tal que } 2 \leq h \leq k, \text{ es producto de primos (HI)}$$

$$\Downarrow$$

$$k + 1 \text{ es producto de primos.}$$

Si $k+1$ es primo, listo, es producto de primos.

Si $k+1$ no es primo, significa que $k+1 = d \cdot e$ donde $d, e < k+1$.

Por (HI), d y e son productos de primos, es decir

$$d = p_1 \cdot p_2 \cdots p_r$$
$$e = q_1 \cdot q_2 \cdots q_s$$

donde p_i, q_i son primos.Luego

$$k+1 = d \cdot e = p_1 \cdot p_2 \cdots p_r \cdot q_1 \cdot q_2 \cdots q_s.$$

Por lo tanto $k+1$ es producto de primos.

$\square$

Problemas de conteo

Contar, a veces, no es una tarea sencilla.

Por ejemplo:

- ¿Cuántas chapas patente es posible hacer con el actual esquema de numeración? Nos referimos a las patentes de automóviles en Argentina.
- ¿De cuántas formas se pueden elegir 7 personas entre 20? (no importa el orden de la elección)

En las próximas clases podremos resolver estos dos problemas utilizando *técnicas de conteo.*

Las técnicas de conteo son estrategias matemáticas que permiten determinar el número total de resultados que pueden haber a partir de hacer combinaciones dentro de un conjunto o conjuntos de objetos.

Cardinal de un conjunto

Un conjunto A es finito si podemos contar la cantidad de elementos que tiene. En ese caso denotaremos $|A|$ la cantidad de elementos de A y la llamaremos el *cardinal de A*.
A veces se denota también $\sharp A$.

Por ejemplo, los conjuntos

$$A = \{a, b, z, x, 1\}, \qquad B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

tienen 5 elementos cada uno. Es decir $|A| = 5$ y $|B| = 5$.

Conjuntos como $\mathbb{Z}$, $\mathbb{N}$ o $\mathbb{R}$ son infinitos y por lo tanto no tiene sentido hablar de la cantidad de elementos de estos conjuntos.

El principio de adición

Dadas dos actividades X e Y, si se puede realizar X de n formas distintas o, alternativamente, se puede realizar Y de m formas distintas. Entonces el número de formas de realizar "X o Y" es $n + m$.

Ejemplo

Supongamos que una persona va a salir a pasear y puede ir al cine donde hay 3 películas en cartel o al teatro donde hay 4 obras posibles. Entonces, tendrá un total de $3 + 4 = 7$ formas distintas de elegir el paseo.

Este principio, el *principio de adición*, es el más básico del conteo y más formalmente dice que si A y B son conjuntos finitos disjuntos, entonces

$$|A \cup B| = |A| + |B|.$$

Se generaliza fácilmente: Sean $A_1, \ldots, A_n$ conjuntos finitos tal que $A_i \cap A_j = \emptyset$ cuando $i \neq j$, entonces

$$|A_1 \cup \cdots \cup A_n| = |A_1| + \cdots + |A_n|.$$

Remarcamos que para aplicar el principio de adición es necesario que los eventos se **excluyan mutuamente**. El caso general es

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|.$$

El principio de multiplicación

Suponga que una actividad consiste de 2 etapas y la primera etapa puede ser realizada de n maneras y la etapa 2 puede realizarse de m maneras, independientemente de como se ha hecho la etapa 1.

Principio de multiplicación: la actividad puede ser realizada de $n \cdot m$ formas distintas.

Ejemplo

Supongamos que la persona del ejemplo anterior tiene suficiente tiempo y dinero para ir primero al cine (3 posibilidades) y luego al teatro (4 posibilidades).

Entonces tendrá $3 \cdot 4 = 12$ formas distintas de hacer el paseo.

Formalmente, si A, B conjuntos y definimos el *producto cartesiano* entre A y B por

$$A \times B = \{(a, b) : a \in A, b \in B\}.$$

Entonces si A y B son conjuntos finitos se cumple que

$$|A \times B| = |A| \cdot |B|.$$

Caso especial: $A = B$.

Ejemplo

¿Cuántas palabras de dos letras hay? (26 letras, no importa si las palabras tienen significado)

Respuesta: $26 \cdot 26$. □