Matemática Discreta I
Clase 4 - Inducción

FAMAF / UNC

31 de marzo de 2020

El principio de inducción

Queremos analizar la suma de los primeros n números impares, es decir

$$1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1).$$

Por la definición recursiva de la sumatoria, tenemos que

$$a_1 = 1, \quad \text{y} \quad a_n = a_{n-1} + 2n - 1,$$

Analicemos los primero valores

- $a_1 = 1,$
- $a_2 = 1 + 3 = 4,$
- $a_3 = 1 + 3 + 5 = 9,$
- $a_4 = 1 + 3 + 5 + 7 = 16,$

Entonces, podemos conjeturar que

$$1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1) = n^2.$$

Para convencernos de que la fórmula es ciertamente correcta procedemos de la siguiente manera: cuando $n = 1$ puesto que $1 = 1^2$. Supongamos que es correcta para un valor específico de n, digamos para $n = k$, de modo que

$$1 + 3 + 5 + \cdots + (2k - 1) = k^2.$$

Podemos usar esto para simplificar la expresión definida recursivamente a la izquierda cuando n es igual a $k+1$,

$$\begin{aligned} 1+3+5+\cdots+(2k+1) &= 1+3+5+\cdots+(2k-1)+(2k+1) \\ &= k^2+(2k+1) \\ &= (k+1)^2. \end{aligned}$$

Por lo tanto si el resultado es correcto cuando $n=k$, entonces lo es cuando $n=k+1$. Se comienza observando que si es correcto cuando $n=1$, debe ser por lo tanto correcto cuando $n=2$. Con el mismo argumento como es correcto cuando $n=2$ debe serlo cuando $n=3$. Continuando de esta forma veremos que es correcto para todos los enteros positivos n.

La esencia de este argumento es comúnmente llamada *principio de inducción*.

Con S denotemos al subconjunto de $\mathbb{N}$ para el cual el resultado es correcto: por supuesto, nuestra intención es probar que S es todo $\mathbb{N}$.

Teorema

Supongamos que S es un subconjunto de $\mathbb{N}$ que satisface las condiciones

a) $1 \in S$,

b) *para cada* $k \in \mathbb{N}$, *si* $k \in S$ *entonces* $k + 1 \in S$.

Entonces se sigue que $S = \mathbb{N}$.

Demostración.

Si la conclusión es falsa, $S \neq \mathbb{N}$ y el conjunto complementario S^c definido por

$$S^c = \{r \in \mathbb{N} | r \notin S\}$$

es no vacío.

Demostración.

Si la conclusión es falsa, $S \neq \mathbb{N}$ y el conjunto complementario S^c definido por

$$S^c = \{r \in \mathbb{N} | r \notin S\}$$

es no vacío.

Por el axioma del buen orden, S^c tiene un menor elemento (mínimo) m.

Demostración.

Si la conclusión es falsa, $S \neq \mathbb{N}$ y el conjunto complementario S^c definido por

$$S^c = \{r \in \mathbb{N} | r \notin S\}$$

es no vacío.

Por el axioma del buen orden, S^c tiene un menor elemento (mínimo) m.

Como 1 pertenece a S, $m \neq 1$. Se sigue que $m - 1$ pertenece a $\mathbb{N}$ y como m es el mínimo de S^c, $m - 1$ debe pertenecer a S.

Demostración.

Si la conclusión es falsa, $S \neq \mathbb{N}$ y el conjunto complementario S^c definido por

$$S^c = \{r \in \mathbb{N} | r \notin S\}$$

es no vacío.

Por el axioma del buen orden, S^c tiene un menor elemento (mínimo) m.

Como 1 pertenece a S, $m \neq 1$. Se sigue que $m - 1$ pertenece a $\mathbb{N}$ y como m es el mínimo de S^c, $m - 1$ debe pertenecer a S.

Poniendo $k = m - 1$ en la condición (b), concluimos que m esta en S, lo cual contradice el hecho de que m pertenece a S^c.

Demostración.

Si la conclusión es falsa, $S \neq \mathbb{N}$ y el conjunto complementario S^c definido por

$$S^c = \{r \in \mathbb{N} | r \notin S\}$$

es no vacío.

Por el axioma del buen orden, S^c tiene un menor elemento (mínimo) m.

Como 1 pertenece a S, $m \neq 1$. Se sigue que $m - 1$ pertenece a $\mathbb{N}$ y como m es el mínimo de S^c, $m - 1$ debe pertenecer a S.

Poniendo $k = m - 1$ en la condición (b), concluimos que m esta en S, lo cual contradice el hecho de que m pertenece a S^c.

De este modo, la suposición $S \neq \mathbb{N}$ nos lleva a un absurdo, y por lo tanto tenemos $S = \mathbb{N}$.

El principio de inducción es útil para probar la veracidad de propiedades relativas a los números naturales. Por ejemplo, consideremos la siguiente propiedade $P(n)$:

- $P(n)$ es la propiedad: $2n - 1 < n^2 + 1$,

Intuitivamente notamos que $P(n)$ es verdadera para cualquier n natural y lo podemos probar usando el siguiente teorema:

Teorema (Principio de inducción)

Sea $P(n)$ una propiedad para $n \in \mathbb{N}$ tal que:

a) *$P(1)$ es verdadera.*

b) *Para todo $k \in \mathbb{N}$, $P(k)$ verdadera implica $P(k+1)$ verdadera.*

Entonces $P(n)$ es verdadera para todo $n \in \mathbb{N}$.

Demostración.

Teorema (Principio de inducción)

Sea $P(n)$ una propiedad para $n \in \mathbb{N}$ tal que:

a) $P(1)$ *es verdadera.*

b) *Para todo* $k \in \mathbb{N}$, $P(k)$ *verdadera implica* $P(k+1)$ *verdadera.*

Entonces $P(n)$ es verdadera para todo $n \in \mathbb{N}$.

Demostración.

Basta tomar

$$S = \{n \in \mathbb{N} | P(n) \text{ es verdadera}\}.$$

Teorema (Principio de inducción)

Sea $P(n)$ una propiedad para $n \in \mathbb{N}$ tal que:

a) *$P(1)$ es verdadera.*

b) *Para todo $k \in \mathbb{N}$, $P(k)$ verdadera implica $P(k+1)$ verdadera.*

Entonces $P(n)$ es verdadera para todo $n \in \mathbb{N}$.

Demostración.

Basta tomar

$$S = \{n \in \mathbb{N} | P(n) \text{ es verdadera}\}.$$

Entonces S es un subconjunto de $\mathbb{N}$ y las condiciones (a) y (b) nos dicen que $1 \in S$ y si $k \in S$ entonces $k+1 \in S$.

Teorema (Principio de inducción)

Sea $P(n)$ una propiedad para $n \in \mathbb{N}$ tal que:

a) *$P(1)$ es verdadera.*

b) *Para todo $k \in \mathbb{N}$, $P(k)$ verdadera implica $P(k+1)$ verdadera.*

Entonces $P(n)$ es verdadera para todo $n \in \mathbb{N}$.

Demostración.

Basta tomar

$$S = \{n \in \mathbb{N} | P(n) \text{ es verdadera}\}.$$

Entonces S es un subconjunto de $\mathbb{N}$ y las condiciones (a) y (b) nos dicen que $1 \in S$ y si $k \in S$ entonces $k+1 \in S$.
Por el teorema anterior se sigue que $S = \mathbb{N}$, es decir que $P(n)$ es verdadera para todo n. natural.

En la práctica, generalmente presentamos una “demostración por inducción” en términos más descriptivos.

En la notación del teorema anterior,

- (a) es llamado el *caso base*,
- (b) es llamado el *paso inductivo* y
- $P(k)$ es llamada la *hipótesis inductiva*.

El paso inductivo consiste en probar que $P(k) \Rightarrow P(k+1)$ o, equivalentemente, podemos suponer $P(k)$ verdadera y a partir de ella probar $P(k+1)$.

Ejemplo

El entero x_n esta definido recursivamente por

$$x_1 = 2, \qquad x_n = x_{n-1} + 2n, \qquad n \geq 2.$$

Demostremos que $\qquad x_n = n(n+1)$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Demostración.

Demostración.

Demostración.

(*Caso base*) El resultado es verdadero cuando $n = 1$ pues $2 = 1 \cdot 2$.

Demostración.

(*Caso base*) El resultado es verdadero cuando $n = 1$ pues $2 = 1 \cdot 2$.

(*Paso inductivo*) Supongamos que el resultado verdadero cuando $n = k$, o sea, que

$$x_k = k(k+1) \text{ hipótesis inductiva (HI).}$$

Demostración.

(*Caso base*) El resultado es verdadero cuando $n = 1$ pues $2 = 1 \cdot 2$.

(*Paso inductivo*) Supongamos que el resultado verdadero cuando $n = k$, o sea, que

$$x_k = k(k+1) \text{ hipótesis inductiva (HI).}$$

Entonces

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= x_k + 2(k+1) && \text{(por la definición recursiva)} \\ &= k(k+1) + 2(k+1) && \text{(por hipótesis inductiva)} \\ &= (k+1)(k+2). && \text{((}k+1\text{) factor común)} \end{aligned}$$

Luego el resultado es verdadero cuando $n = k+1$ y por el principio de inducción, es verdadero para todos los enteros positivos n.

Existen varias formas modificadas del principio de inducción. A veces es conveniente tomar como base inductiva el valor $n = 0$, por otro lado puede ser apropiado tomar un valor como 2 o 3 porque los primeros casos pueden ser excepcionales.

Cada problema debe ser tratado según sus características.

Otra modificación útil es tomar como hipótesis inductiva la suposición de que el resultado es verdadero para todos los valores $n \leq k$, más que para $n = k$ solamente.

Esta formulación es llamada a veces el *principio de inducción completa*. Todas esas modificaciones pueden justificarse con cambios triviales en la demostración del principio de inducción.

El siguiente teorema incorpora todas las modificaciones del principio de inducción mencionadas más arriba.

Teorema (Inducción completa)

Sea n_0 número entero y sea $P(n)$ una propiedad para $n \geq n_0$ tal que:

a) $P(n_0)$ es verdadera.

b) Si $P(h)$ verdadera para toda h tal que $n_0 \leq h \leq k$ implica $P(k+1)$ verdadera.

Entonces $P(n)$ es verdadera para todo $n \geq n_0$.

Ejemplo

$$u_1 = 3, \qquad u_2 = 5, \qquad u_n = 3u_{n-1} - 2u_{n-2}, \qquad n \geq 3.$$

Probemos que $u_n = 2^n + 1$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Solución.

Ejemplo

$$u_1 = 3, \qquad u_2 = 5, \qquad u_n = 3u_{n-1} - 2u_{n-2}, \qquad n \geq 3.$$

Probemos que $u_n = 2^n + 1$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Solución.

(*Caso base*) $n = 1 : 3 = 2^1 + 1 \checkmark, \qquad n = 2 : 5 = 2^2 + 1 \checkmark.$

Ejemplo

$$u_1 = 3, \qquad u_2 = 5, \qquad u_n = 3u_{n-1} - 2u_{n-2}, \qquad n \geq 3.$$

Probemos que $u_n = 2^n + 1$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Solución.

(*Caso base*) $n = 1 : 3 = 2^1 + 1 \checkmark, \qquad n = 2 : 5 = 2^2 + 1 \checkmark.$

(*Paso inductivo*) Hipótesis inductiva:

$$u_h = 2^h + 1 \text{ para } 1 \leq h \leq k \text{ y } k \geq 2 \text{ (HI)},$$

Ejemplo

$$u_1 = 3, \qquad u_2 = 5, \qquad u_n = 3u_{n-1} - 2u_{n-2}, \qquad n \geq 3.$$

Probemos que $u_n = 2^n + 1$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Solución.

(*Caso base*) $n = 1 : 3 = 2^1 + 1$ ✓, $\qquad n = 2 : 5 = 2^2 + 1$ ✓.

(*Paso inductivo*) Hipótesis inductiva:

$$u_h = 2^h + 1 \text{ para } 1 \leq h \leq k \text{ y } k \geq 2 \text{ (HI)},$$

entonces,

$$\begin{aligned}
u_{k+1} &= 3u_k - 2u_{k-1} && \text{(por definición recursiva)}\\
&= 3(2^k + 1) - 2(2^{k-1} + 1) && \text{(por hipótesis inductiva)}\\
&= 3 \cdot 2^k + 3 - 2 \cdot 2^{k-1} - 2\\
&= 3 \cdot 2^k + 1 - 2^k\\
&= 2 \cdot 2^k + 1\\
&= 2^{k+1} + 1.
\end{aligned}$$