Matemática Discreta I
Clase 18 - Grafos y sus representaciones

FAMAF / UNC

18 de mayo de 2023

Grafos y sus representaciones

Usaremos la siguiente definición en lo que sigue: dado un conjunto X un 2-*subconjunto* es un subconjunto de X de dos elementos.

Definición

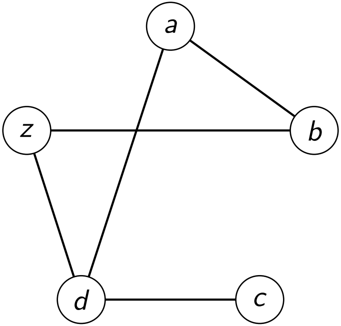
Un *grafo* G consiste de un conjunto finito V, cuyos miembros son llamados *vértices*, y un conjunto de 2-subconjuntos de V, cuyos miembros son llamados *aristas*.

Nosotros usualmente escribiremos $G = (V, E)$ y diremos que V es el *conjunto de vértices* y E es el *conjunto de aristas*.

Un ejemplo típico de un grafo $G = (V, E)$ es dado por los conjuntos

$$V = \{a, b, c, d, z\}, \qquad E = \{\{a, b\}, \{a, d\}, \{b, z\}, \{c, d\}, \{d, z\}\}.$$

Este ejemplo y la definición misma no son demasiado esclarecedores, y solamente cuando consideramos la *representación pictórica* de un grafo es cuando entendemos un poco más la definición.



- La representación pictórica es intuitivamente atractiva pero no es útil cuando deseamos comunicarnos con una computadora.
- Debemos representar el grafo mediante conjuntos o una tabla.

Definición

Diremos que dos vértices x e y de un grafo son *adyacentes* cuando $\{x, y\}$ es una arista.

Definición

Podemos representar un grafo $G = (V, E)$ por su *lista de adyacencia*, donde cada vértice v encabeza una lista de aquellos vértices que son adyacentes a v:

Ejemplo

Vimos el $G = (V, E)$ es dado por

$$V = \{a, b, c, d, z\}, \qquad E = \{\{a, b\}, \{a, d\}, \{b, z\}, \{c, d\}, \{d, z\}\}.$$

Su lista de adyacencia es

a	b	c	d	z
b	a	d	a	b
d	z		c	d
			z	

En Python el grafo estaría representado por la lista de listas

$$[[b, d], [a, z], [d], [a, c, z], [b, d]].$$

O el diccionario

$$\{a : [b, d],\ b : [a, z],\ c : [d],\ d : [a, c, z],\ z : [b, d]\}$$

Definición

Por cada entero positivo n definimos el *grafo completo* K_n como el grafo con n vértices y en el cual cada par de vértices es adyacente.

La lista de adyacencia de K_n es unas lista donde en la columna del vértice i están todos los vértices menos i ($n-1$ vértices).

¿Cuántas aristas tiene K_n?

De cada vértice "salen" $n-1$ aristas, las que van a otros vértices.

Si sumamos n-veces las $n-1$ aristas es claro que estamos contando cada arista dos veces, luego el número total de aristas es $n(n-1)/2$.

Observar que esta es una demostración, usando grafos, de que

$$\sum_{i=1}^{n-1} i = n(n-1)/2.$$

Ejemplo

Mario y su mujer Abril dan una fiesta en la cual hay otras cuatro parejas de casados. Las parejas, cuando arriban, estrechan la mano a algunas personas, pero, naturalmente, no se estrechan la mano entre marido y mujer. Cuando la fiesta finaliza el profesor pregunta a los otros a cuantas personas han estrechado la mano, recibiendo 9 respuestas diferentes. ¿Cuántas personas estrecharon la mano de Abril?

Solución

Construyamos un grafo cuyos vértices son las personas que asisten a la fiesta. Las aristas del grafo son las $\{x, y\}$ siempre y cuando x e y se hayan estrechado las manos.

Puesto que hay nueve personas aparte de Mario, y que una persona puede estrechar a lo sumo a otras 8 personas, se sigue que las 9 respuestas diferentes que ha recibido el profesor deben ser $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$.

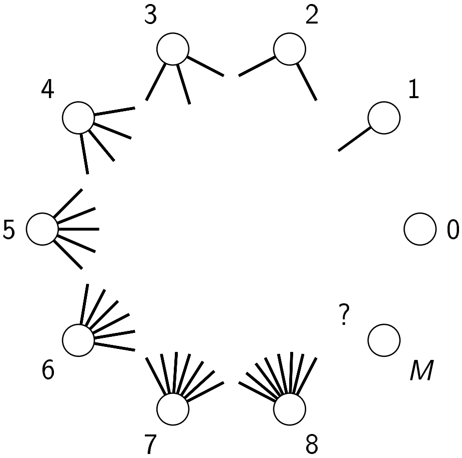


Figura: La fiesta de Abril

Ahora, el vértice 8 alcanza a todos los otros vértices excepto uno, el cual debe por lo tanto representar a la esposa de 8. Este vértice debe ser el 0 el cual por cierto que no está unido al 8 (ni obviamente a ningún otro).

Luego 8 y 0 son una pareja de casados y 8 está unido a $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$ y M. En particular el 1 está unido al 8 y ésta es la única arista que parte del 1.

Por consiguiente 7 no esta unido al 0 y al 1 y sí está unido a $2, 3, 4, 5, 6, 8$ y M. La esposa de 7 debe ser 1, puesto que 0 esta casado con 8.

Continuando con este razonamiento vemos que 6 y 2, y 5 y 3 son parejas de casados.

Se sigue entonces que M y 4 están casados, luego el vértice 4 representa a Abril, quien estrechó la mano de cuatro personas. $\square$

Ejemplo

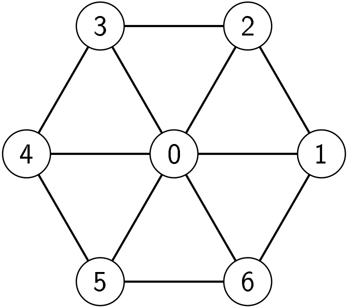
Los senderos de un jardín han sido diseñados dándoles forma de *grafo rueda* W_n, cuyos vértices son $V = \{0, 1, 2, \ldots, n\}$ y sus aristas son

$$\begin{gathered}\{0,1\},\{0,2\},\ldots,\{0,n\},\\ \{1,2\},\{2,3\},\ldots,\{n-1,n\},\{n,1\}.\end{gathered}$$

Describir una ruta por los senderos de tal forma que empiece y termine en le vértice 0 y que pase por cada vértice una sola vez.

Solución

Primero dibujemos el grafo para darnos cuenta de por que se llama “rueda”. Dibujemos W_6:



El dibujo nos orienta de como puede ser una ruta: $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 0$.

En general una respuesta es: $0, 1, 2, 3, \cdots, n-1, n, 0$. $\square$