

# Matemática Discreta I

## Clase 4 - Inducción

FAMAF / UNC

28 de marzo de 2023

## El principio de inducción

Queremos analizar la suma de los primeros  $n$  números impares, es decir

$$1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1).$$

Por la definición recursiva de la sumatoria, tenemos que

$$a_1 = 1, \text{ y } a_n = a_{n-1} + 2n - 1,$$

Analicemos los primeros valores

- $a_1 = 1,$
- $a_2 = 1 + 3 = 4,$
- $a_3 = 1 + 3 + 5 = 9,$
- $a_4 = 1 + 3 + 5 + 7 = 16,$
- $a_5 = a_4 + 9 = 25,$

Entonces, podemos conjeturar que

$$a_n = 1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1) = n^2.$$

Para convencernos de que la fórmula es ciertamente correcta procedemos de la siguiente manera

**Caso  $n=1$ .** La fórmula es verdadera cuando  $n = 1$  puesto que  $1 = 1^2$ .

**Paso recursivo.** Supongamos que es correcta para un valor específico de  $n$ , digamos para  $n = k$ , de modo que

$$a_k = 1 + 3 + 5 + \cdots + (2k - 1) = k^2. \quad (a)$$

Podemos utilizar (a) para simplificar la expresión definida recursivamente a la izquierda cuando  $n$  es igual a  $k + 1$ ,

$$\begin{aligned} 1 + 3 + 5 + \cdots + (2k + 1) &= 1 + 3 + 5 + \cdots + (2k - 1) + (2k + 1) \\ &\stackrel{(a)}{=} k^2 + (2k + 1) \\ &= (k + 1)^2. \end{aligned}$$

Por lo tanto si el resultado es correcto cuando  $n = k$ , entonces lo es cuando  $n = k + 1$ .

Se comienza observando que si es correcto cuando  $n = 1$ , debe ser por lo tanto correcto cuando  $n = 2$ .

Con el mismo argumento como es correcto cuando  $n = 2$  debe serlo cuando  $n = 3$ . Continuando de esta forma veremos que es correcto para todos los enteros positivos  $n$ .

La esencia de este argumento es comúnmente llamada *principio de inducción*.

Con  $S$  denotemos al subconjunto de  $\mathbb{N}$  para el cual el resultado es correcto: por supuesto, nuestra intención es probar que  $S$  es todo  $\mathbb{N}$ .

### Teorema

*Supongamos que  $S$  es un subconjunto de  $\mathbb{N}$  que satisface las condiciones*

- a)  $1 \in S$ ,*
- b) para cada  $k \in \mathbb{N}$ , si  $k \in S$  entonces  $k + 1 \in S$ .*

*Entonces se sigue que  $S = \mathbb{N}$ .*

## Demostración.

Si la conclusión es falsa,  $S \neq \mathbb{N}$  y el conjunto complementario  $S^c$  definido por

$$S^c = \{r \in \mathbb{N} | r \notin S\}$$

es no vacío.

Por el axioma del buen orden,  $S^c$  tiene un menor elemento (mínimo)  $m$ .

Como 1 pertenece a  $S$ ,  $m \neq 1$ . Se sigue que  $m - 1$  pertenece a  $\mathbb{N}$  y como  $m$  es el mínimo de  $S^c$ ,  $m - 1$  debe pertenecer a  $S$ .

Poniendo  $k = m - 1$  en la condición (b), concluimos que  $m$  está en  $S$ , lo cual contradice el hecho de que  $m$  pertenece a  $S^c$ .

De este modo, la suposición  $S \neq \mathbb{N}$  nos lleva a un absurdo, y por lo tanto tenemos  $S = \mathbb{N}$ . □

El principio de inducción es útil para probar la veracidad de propiedades relativas a los números naturales. Por ejemplo, consideremos la siguiente propiedad de  $P(n)$ :

◦  $P(n)$  es la propiedad: 
$$\sum_{i=1}^n 2i - 1 = n^2,$$

Hemos notado que  $P(n)$  es verdadera para cualquier  $n$  natural y lo podríamos probar usando el siguiente teorema:

## Teorema (Principio de inducción)

Sea  $P(n)$  una propiedad para  $n \in \mathbb{N}$  tal que:

a)  $P(1)$  es verdadera.

b) Para todo  $k \in \mathbb{N}$ ,  $P(k)$  verdadera implica  $P(k + 1)$  verdadera.

Entonces  $P(n)$  es verdadera para todo  $n \in \mathbb{N}$ .

### Demostración.

Basta tomar

$$S = \{n \in \mathbb{N} | P(n) \text{ es verdadera}\}.$$

Entonces  $S$  es un subconjunto de  $\mathbb{N}$  y las condiciones (a) y (b) nos dicen que  $1 \in S$  y si  $k \in S$  entonces  $k + 1 \in S$ .

Por el teorema anterior se sigue que  $S = \mathbb{N}$ , es decir que  $P(n)$  es verdadera para todo  $n$ . natural. □



En la práctica, generalmente presentamos una “demostración por inducción” en términos más descriptivos.

En la notación del teorema anterior,

- (a) es llamado el *caso base*,
- (b) es llamado el *paso inductivo* y
- $P(k)$  es llamada la *hipótesis inductiva*.

El paso inductivo consiste en probar que  $P(k) \Rightarrow P(k + 1)$  o, equivalentemente, podemos suponer  $P(k)$  verdadera y a partir de ella probar  $P(k + 1)$ .

## Ejemplo

El entero  $x_n$  está definido recursivamente por

$$x_1 = 2, \quad x_n = x_{n-1} + 2n, \quad n \geq 2.$$

Demostremos que  $x_n = n(n+1)$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ .

## Demostración

(Caso base) El resultado es verdadero cuando  $n = 1$  pues  $2 = 1 \cdot 2$ .

$$\text{Caso base } n = 1: \quad x_1 = 2 = 1 \cdot 2 = n(n+1)$$

## Demostración

(*Paso inductivo*) Supongamos que el resultado verdadero cuando  $n = k$ , o sea, que

$$x_k = k(k + 1) \text{ hipótesis inductiva (HI).}$$

En el paso inductivo queremos probar que

$$x_k = k(k + 1) \Rightarrow x_{k+1} = (k + 1)(k + 2).$$

Entonces

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= x_k + 2(k + 1) && \text{(por la definición recursiva)} \\ &= k(k + 1) + 2(k + 1) && \text{(por hipótesis inductiva)} \\ &= (k + 1)(k + 2). && ((k + 1) \text{ factor común}) \end{aligned}$$

Luego el resultado es verdadero cuando  $n = k + 1$  y por el principio de inducción, es verdadero para todos los enteros positivos  $n$ . □

## Ejercicio (Serie aritmética)

Probar que

$$1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2},$$

para  $n \in \mathbb{N}$ .

## Demostración

(*Caso base*) El resultado es verdadero cuando  $n = 1$  pues  $1 = \frac{1 \cdot (1+1)}{2}$ .

(Paso inductivo)

Supongamos que el resultado verdadero cuando  $n = k$ , o sea, que

$$\sum_{i=1}^k i = \frac{k(k+1)}{2} \quad \text{hipótesis inductiva (HI)}.$$

En el paso inductivo queremos probar que

$$\sum_{i=1}^k i = \frac{k(k+1)}{2} \Rightarrow \sum_{i=1}^{k+1} i = \frac{(k+1)(k+2)}{2}.$$

Entonces

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{k+1} i &= \sum_{i=0}^k i + (k+1) && \text{(por la definición recursiva de } \sum \text{)} \\ &= \frac{k(k+1)}{2} + (k+1) && \text{(por hipótesis inductiva)} \\ &= (k+1)\left(\frac{k}{2} + 1\right) && ((k+1) \text{ factor común)} \\ &= (k+1)\frac{(k+2)}{2}. \\ &= \frac{(k+1)(k+2)}{2}.\end{aligned}$$

Luego el resultado es verdadero cuando  $n = k + 1$  y por el principio de inducción, es verdadero para todos los enteros positivos  $n$ . □

## Observación

En los teoremas del principio de inducción podemos reemplazar  $\mathbb{N}$  por  $\mathbb{N}_0$  y el teorema queda:

## Teorema (Principio de inducción)

*Sea  $P(n)$  una propiedad para  $n \in \mathbb{N}_0$  tal que:*

- a)  $P(0)$  es verdadera.*
- b) Para todo  $k \in \mathbb{N}_0$ ,  $P(k)$  verdadera implica  $P(k + 1)$  verdadera.*

*Entonces  $P(n)$  es verdadera para todo  $n \in \mathbb{N}_0$ .*

## Ejercicio (Serie geométrica)

Probar que

$$1 + q + q^2 + \cdots + q^n = \sum_{i=0}^n q^i = \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1},$$

para  $n \in \mathbb{N}_0$ ,  $q > 0$  y  $q \neq 1$ .

### Demostración

(Caso base) El resultado es verdadero cuando  $n = 0$  pues

$$q^0 = 1 = \frac{q^{0+1} - 1}{q - 1}.$$



(*Paso inductivo*) Supongamos que el resultado verdadero cuando  $n = k$ , o sea, que

$$\sum_{i=0}^k q^i = \frac{q^{k+1} - 1}{q - 1}, \quad \text{hipótesis inductiva (HI)}.$$

En el paso inductivo queremos probar que

$$\sum_{i=0}^k q^i = \frac{q^{k+1} - 1}{q - 1} \quad \Rightarrow \quad \sum_{i=0}^{k+1} q^i = \frac{q^{k+2} - 1}{q - 1}.$$

Entonces

$$\sum_{i=0}^{k+1} q^i = \sum_{i=0}^k q^i + q^{k+1} \quad (\text{por la definición recursiva})$$

$$= \frac{q^{k+1} - 1}{q - 1} + q^{k+1} \quad (\text{por hipótesis inductiva})$$

$$= \frac{q^{k+1} - 1 + (q - 1)q^{k+1}}{q - 1}$$

$$= \frac{q^{k+1} - 1 + q \cdot q^{k+1} - q^{k+1}}{q - 1}$$

$$= \frac{q^{k+2} - 1}{q - 1}$$

Luego el resultado es verdadero cuando  $n = k + 1$  y por el principio de inducción, es verdadero para todos los enteros positivos  $n$ . □