Matemática Discreta I
Clase 4 - Inducción

FAMAF / UNC

28 de marzo de 2023

El principio de inducción

Queremos analizar la suma de los primeros n números impares, es decir

$$1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1).$$

Por la definición recursiva de la sumatoria, tenemos que

$$a_1 = 1, \quad \text{y} \quad a_n = a_{n-1} + 2n - 1,$$

Analicemos los primero valores

- $a_1 = 1,$
- $a_2 = 1 + 3 = 4,$
- $a_3 = 1 + 3 + 5 = 9,$
- $a_4 = 1 + 3 + 5 + 7 = 16,$
- $a_5 = a_4 + 9 = 25,$

Entonces, podemos conjeturar que

$$a_n = 1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1) = n^2.$$

Para convencernos de que la fórmula es ciertamente correcta procedemos de la siguiente manera

Caso n=1. La fórmula es verdadera cuando $n = 1$ puesto que $1 = 1^2$.

Paso recursivo. Supongamos que es correcta para un valor específico de n, digamos para $n = k$, de modo que

$$a_k = 1 + 3 + 5 + \cdots + (2k - 1) = k^2. \tag{a}$$

Podemos utilizar (a) para simplificar la expresión definida recursivamente a la izquierda cuando n es igual a $k+1$,

$$\begin{aligned} 1+3+5+\cdots+(2k+1) &= 1+3+5+\cdots+(2k-1)+(2k+1) \\ &\overset{(a)}{=} k^2+(2k+1) \\ &= (k+1)^2. \end{aligned}$$

Por lo tanto si el resultado es correcto cuando $n=k$, entonces lo es cuando $n=k+1$.

Se comienza observando que si es correcto cuando $n=1$, debe ser por lo tanto correcto cuando $n=2$.

Con el mismo argumento como es correcto cuando $n=2$ debe serlo cuando $n=3$. Continuando de esta forma veremos que es correcto para todos los enteros positivos n.

La esencia de este argumento es comúnmente llamada *principio de inducción*.

Con S denotemos al subconjunto de $\mathbb{N}$ para el cual el resultado es correcto: por supuesto, nuestra intención es probar que S es todo $\mathbb{N}$.

Teorema

Supongamos que S es un subconjunto de $\mathbb{N}$ que satisface las condiciones

a) $1 \in S$,

b) *para cada* $k \in \mathbb{N}$, *si* $k \in S$ *entonces* $k+1 \in S$.

Entonces se sigue que $S = \mathbb{N}$.

Demostración.

Si la conclusión es falsa, $S \neq \mathbb{N}$ y el conjunto complementario S^c definido por

$$S^c = \{r \in \mathbb{N} | r \notin S\}$$

es no vacío.

Por el axioma del buen orden, S^c tiene un menor elemento (mínimo) m.

Como 1 pertenece a S, $m \neq 1$. Se sigue que $m - 1$ pertenece a $\mathbb{N}$ y como m es el mínimo de S^c, $m - 1$ debe pertenecer a S.

Poniendo $k = m - 1$ en la condición (b), concluimos que m esta en S, lo cual contradice el hecho de que m pertenece a S^c.

De este modo, la suposición $S \neq \mathbb{N}$ nos lleva a un absurdo, y por lo tanto tenemos $S = \mathbb{N}$. $\square$

El principio de inducción es útil para probar la veracidad de propiedades relativas a los números naturales. Por ejemplo, consideremos la siguiente propieda de $P(n)$:

- $P(n)$ es la propiedad: $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} 2i - 1 = n^2,$

Hemos notado que $P(n)$ es verdadera para cualquier n natural y lo podríamos probar usando el siguiente teorema:

Teorema (Principio de inducción)

Sea $P(n)$ una propiedad para $n \in \mathbb{N}$ tal que:

a) $P(1)$ es verdadera.

b) Para todo $k \in \mathbb{N}$, $P(k)$ verdadera implica $P(k+1)$ verdadera.

Entonces $P(n)$ es verdadera para todo $n \in \mathbb{N}$.

Demostración.

Basta tomar

$$S = \{n \in \mathbb{N} | P(n) \text{ es verdadera}\}.$$

Entonces S es un subconjunto de $\mathbb{N}$ y las condiciones (a) y (b) nos dicen que $1 \in S$ y si $k \in S$ entonces $k+1 \in S$.

Por el teorema anterior se sigue que $S = \mathbb{N}$, es decir que $P(n)$ es verdadera para todo n. natural. $\square$

En la práctica, generalmente presentamos una “demostración por inducción” en términos más descriptivos.

En la notación del teorema anterior,

- (a) es llamado el *caso base*,
- (b) es llamado el *paso inductivo* y
- $P(k)$ es llamada la *hipótesis inductiva*.

El paso inductivo consiste en probar que $P(k) \Rightarrow P(k+1)$ o, equivalentemente, podemos suponer $P(k)$ verdadera y a partir de ella probar $P(k+1)$.

Ejemplo

El entero x_n esta definido recursivamente por

$$x_1 = 2, \qquad x_n = x_{n-1} + 2n, \qquad n \geq 2.$$

Demostremos que $\quad x_n = n(n+1)$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Demostración

(*Caso base*) El resultado es verdadero cuando $n = 1$ pues $2 = 1 \cdot 2$.

$$\textit{Caso base } n = 1\textit{:} \quad x_1 = 2 = 1 \cdot 2 = n(n+1)$$

Demostración

(*Paso inductivo*) Supongamos que el resultado verdadero cuando $n = k$, o sea, que

$$x_k = k(k+1) \text{ hipótesis inductiva (HI).}$$

En el paso inductivo queremos probar que

$$x_k = k(k+1) \quad \Rightarrow \quad x_{k+1} = (k+1)(k+2).$$

Entonces

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= x_k + 2(k+1) && \text{(por la definición recursiva)} \\ &= k(k+1) + 2(k+1) && \text{(por hipótesis inductiva)} \\ &= (k+1)(k+2). && \text{((}k+1\text{) factor común)} \end{aligned}$$

Luego el resultado es verdadero cuando $n = k+1$ y por el principio de inducción, es verdadero para todos los enteros positivos n. □

Ejercicio (Serie aritmética)

Probar que

$$1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2},$$

para $n \in \mathbb{N}$.

Demostración

(*Caso base*) El resultado es verdadero cuando $n = 1$ pues $1 = \frac{1\cdot(1+1)}{2}$.

(*Paso inductivo*)

Supongamos que el resultado verdadero cuando $n = k$, o sea, que

$$\sum_{i=1}^{k} i = \frac{k(k+1)}{2} \quad \text{hipótesis inductiva (HI).}$$

En el paso inductivo queremos probar que

$$\sum_{i=1}^{k} i = \frac{k(k+1)}{2} \quad \Rightarrow \quad \sum_{i=1}^{k+1} i = \frac{(k+1)(k+2)}{2}.$$

Entonces

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{k+1} i &= \sum_{i=0}^{k} i + (k+1) && \text{(por la definición recursiva de } \textstyle\sum\text{)} \\
&= \frac{k(k+1)}{2} + (k+1) && \text{(por hipótesis inductiva)} \\
&= (k+1)(\frac{k}{2} + 1)) && \text{((}k+1\text{) factor común)} \\
&= (k+1)\frac{(k+2)}{2}. \\
&= \frac{(k+1)(k+2)}{2}.
\end{aligned}$$

Luego el resultado es verdadero cuando $n = k + 1$ y por el principio de inducción, es verdadero para todos los enteros positivos n. □

Observación

En los teoremas del principio de inducción podemos reemplazar $\mathbb{N}$ por $\mathbb{N}_0$ y el teorema queda:

Teorema (Principio de inducción)

Sea $P(n)$ una propiedad para $n \in \mathbb{N}_0$ tal que:

a) $P(0)$ es verdadera.

b) Para todo $k \in \mathbb{N}_0$, $P(k)$ verdadera implica $P(k+1)$ verdadera.

Entonces $P(n)$ es verdadera para todo $n \in \mathbb{N}_0$.

Ejercicio (Serie geométrica)

Probar que

$$1 + q + q^2 + \cdots + q^n = \sum_{i=0}^{n} q^i = \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1},$$

para $n \in \mathbb{N}_0$, $q > 0$ y $q \neq 1$.

Demostración

(*Caso base*) El resultado es verdadero cuando $n = 0$ pues

$$q^0 = 1 = \frac{q^{0+1} - 1}{q - 1}.$$

(*Paso inductivo*) Supongamos que el resultado verdadero cuando $n = k$, o sea, que

$$\sum_{i=0}^{k} q^i = \frac{q^{k+1} - 1}{q - 1}, \quad \text{hipótesis inductiva (HI).}$$

En el paso inductivo queremos probar que

$$\sum_{i=0}^{k} q^i = \frac{q^{k+1} - 1}{q - 1} \quad \Rightarrow \quad \sum_{i=0}^{k+1} q^i = \frac{q^{k+2} - 1}{q - 1}.$$

Entonces

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{k+1} q^i &= \sum_{i=0}^{k} q^i + q^{k+1} && \text{(por la definición recursiva)} \\
&= \frac{q^{k+1}-1}{q-1} + q^{k+1} && \text{(por hipótesis inductiva)} \\
&= \frac{q^{k+1}-1+(q-1)q^{k+1}}{q-1} \\
&= \frac{q^{k+1}-1+q\cdot q^{k+1}-q^{k+1}}{q-1} \\
&= \frac{q^{k+2}-1}{q-1}
\end{aligned}
$$

Luego el resultado es verdadero cuando $n = k+1$ y por el principio de inducción, es verdadero para todos los enteros positivos n. $\square$