

Matemática Discreta I

Clase 9 - Conteo (4° parte)

FAMAF / UNC

13 de abril de 2023

El teorema del binomio

En álgebra elemental aprendemos las fórmulas

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2, \quad (a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3.$$

A veces nos piden desarrollar la formula para $(a + b)^4$ y potencias mayores de $a + b$.

El resultado general que da una formula para $(a + b)^n$ es conocido como el *teorema del binomio* o *binomio de Newton*.

El teorema del binomio

Teorema

Sea n un entero positivo. El coeficiente del término $a^{n-r}b^r$ en el desarrollo de $(a+b)^n$ es el número binomial $\binom{n}{r}$. Explícitamente, tenemos

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \cdots + \binom{n}{n}b^n.$$

Escrito de otra forma:

Si $n > 0$,

$$(a+b)^n = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} a^{n-i} b^i.$$

Observación

Los coeficientes binomiales que intervienen en la fórmula de $(a + b)^n$ forman una fila del triángulo de Pascal:

$$\binom{n}{0} \quad \binom{n}{1} \quad \binom{n}{2} \quad \cdots \quad \binom{n}{n-2} \quad \binom{n}{n-1} \quad \binom{n}{n}$$

Ejemplo

$$\begin{aligned}(a + b)^4 &= \binom{4}{0} a^4 + \binom{4}{1} a^3 b + \binom{4}{2} a^2 b^2 + \binom{4}{3} a b^3 + \binom{4}{4} b^4 \\ &= a^4 + 4a^3 b + 6a^2 b^2 + 4ab^3 + b^4.\end{aligned}$$

El teorema del binomio puede usarse para deducir identidades en que estén involucrados los números binomiales.

Ejemplo

Probemos que

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \cdots + \binom{n}{n} = 2^n.$$

Demostración.

Observemos que $2^n = (1 + 1)^n$. Por el teorema del binomio sabemos que

$$\begin{aligned}(1 + 1)^n &= \binom{n}{0} 1^n + \binom{n}{1} 1^{n-1} 1 + \binom{n}{2} 1^{n-2} 1^2 + \cdots + \binom{n}{n} 1^n \\ &= \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \cdots + \binom{n}{n}. \quad \square\end{aligned}$$

Observación

La fórmula

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \cdots + \binom{n}{n} = 2^n. \quad (*)$$

tiene una interpretación combinatoria: nos permite calcular nuevamente la cantidad de subconjuntos de un conjunto de n elementos.

1. Es claro que la cantidad de subconjuntos de k elementos de un conjunto de n elementos es $\binom{n}{k}$.
2. Los subconjuntos de un conjunto son los subconjuntos de 0 elementos, unión los subconjuntos de 1 elemento, unión los subconjuntos de 2 elementos, unión los subconjuntos de 3 elementos, etc.
3. Por el principio de adición y la fórmula $(*)$ obtenemos que la cantidad de subconjuntos de un conjunto de n elementos es 2^n .

Ejercicios de conteo

Ejercicio

¿Cuántos números naturales existen menores que 10^5 , cuyos dígitos sean todos distintos?

Solución.

Los números naturales menores de 10^5 son todos aquellos que tienen como máximo 5 dígitos.

1. 1 dígito \rightarrow 9 posibilidades,
2. 2 dígitos $\rightarrow 9 \times 9$ posibilidades (81),
3. 3 dígitos $\rightarrow 9 \times 9 \times 8$ posibilidades (648),
4. 4 dígitos $\rightarrow 9 \times 9 \times 8 \times 7$ posibilidades (4536),
5. 5 dígitos $\rightarrow 9 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6$ posibilidades (27216),

Total: $9 + 81 + 648 + 4536 + 27216 = 32490$.



Ejercicio

Extrayendo 5 cartas de una baraja de 40 cartas ¿cuántos resultados diferentes pueden obtenerse? (no importa el orden)

Solución.

Las cuarenta cartas son diferentes y no nos importa el orden en que recibimos las cartas.

El problema es entonces elegir 5 entre 40, por lo tanto la respuesta es

$$\binom{40}{5}.$$



Ejercicio

¿De cuántas formas diferentes pueden repartirse 5 bolas blancas, 3 rojas y 2 negras en 10 urnas distintas (etiquetadas) de forma que cada urna contenga una bola?

Solución.

Primero nos preguntamos ¿de cuántas forma puedo poner las 5 bolas blancas en las 10 urnas?

Este problema es equivalente a elegir 5 urnas entre 10 (las urnas donde pondremos las bolas blancas) y sabemos que las posibilidades son $\binom{10}{5}$.

Ahora quedan 5 lugares y queremos ver de cuántas formas ponemos 3 bolas rojas en 5 urnas y la respuesta es $\binom{5}{3}$

Finalmente, hay dos lugares para las dos bolas negras y hay una sola forma de ponerlas.

El resultado es entonces

$$\binom{10}{5} \binom{5}{3} = \frac{10!}{5!5!} \frac{5!}{2!3!} = \frac{10!}{5!2!3!}.$$



Ejercicio

Un ascensor de un centro comercial parte del sótano con 5 pasajeros y se detiene en 7 pisos. ¿De cuántas maneras distintas pueden descender los pasajeros? ¿Y con la condición de que dos pasajeros no bajen en el mismo piso?

Solución.

Hagamos un poco de abstracción del problema y pensemos las posibilidades que tiene 5 personas para ubicarse en 7 lugares: la primera persona tiene 7 posibilidades, la segunda también y así sucesivamente, luego el total de posibilidades es

$$7 \times 7 \times 7 \times 7 \times 7 = 7^5.$$

Si no estás convencido del razonamiento, lo podemos ver de la siguiente manera: supongamos que tenemos 5 posiciones (que representan los 5 pasajeros) y en cada posición podemos poner un número del 1 al 7 (el piso en que baja), entonces la pregunta se reduce a ¿cuántos números de 5 dígitos se pueden formar con los dígitos del 1 al 7?

Claramente, la respuesta es también 7^5 .

Para la segunda pregunta, simplemente hay que modificar la pregunta anterior ¿cuántos números de 5 dígitos con todos los dígitos diferentes se pueden formar con los dígitos del 1 al 7?

La respuesta es:

$$7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 = \frac{7!}{(7-5)!} = \frac{7!}{2!}.$$

