Matemática Discreta I
Clase 8 - Conteo (4° parte)

FAMAF / UNC

13 de abril de 2023

El teorema del binomio

En álgebra elemental aprendemos las fórmulas

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2, \qquad (a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3.$$

A veces nos piden desarrollar la formula para $(a+b)^4$ y potencias mayores de $a+b$.

El resultado general que da una formula para $(a+b)^n$ es conocido como el *teorema del binomio* o *binomio de Newton*.

El teorema del binomio

Teorema

Sea n un entero positivo. El coeficiente del termino $a^{n-r}b^r$ en el desarrollo de $(a+b)^n$ es el número binomial $\binom{n}{r}$.Explícitamente, tenemos

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \cdots + \binom{n}{n}b^n.$$

Escrito de otra forma:

Si $n > 0$,

$$(a+b)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a^{n-i} b^i.$$

Observación

Los coeficientes binomiales que intervienen en la fórmula de $(a+b)^n$ forman una fila del triángulo de Pascal:

$$\binom{n}{0} \quad \binom{n}{1} \quad \binom{n}{2} \quad \cdots \quad \binom{n}{n-2} \quad \binom{n}{n-1} \quad \binom{n}{n}$$

Ejemplo

$$(a+b)^4 = \binom{4}{0}a^4 + \binom{4}{1}a^3b + \binom{4}{2}a^2b^2 + \binom{4}{3}ab^3 + \binom{4}{4}b^4$$

$$= a^4 \ + \ 4a^3b \ + \ 6a^2b^2 \ + \ 4ab^3 \ + \ b^4.$$

El teorema del binomio puede usarse para deducir identidades en que estén involucrados los números binomiales.

Ejemplo

Probemos que

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \cdots + \binom{n}{n} = 2^n.$$

Demostración.

Observemos que $2^n = (1+1)^n$. Por el teorema del binomio sabemos que

$$\begin{aligned}(1+1)^n &= \binom{n}{0}1^n + \binom{n}{1}1^{n-1}1 + \binom{n}{2}1^{n-2}1^2 + \cdots + \binom{n}{n}1^n \\ &= \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \cdots + \binom{n}{n}. \quad \square\end{aligned}$$

Observación

La fórmula

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \cdots + \binom{n}{n} = 2^n. \qquad (*)$$

tiene una interpretación combinatoria: nos permite calcular nuevamente la cantidad de subconjuntos de un conjuntos de n elementos.

1. Es claro que la cantidad de subconjuntos de k elementos de un conjunto de n elementos es $\binom{n}{k}$.

2. Los subconjuntos de un conjunto son los subconjuntos de 0 elementos, unión los subconjuntos de 1 elemento, unión los subconjuntos de 2 elementos, unión los subconjuntos de 3 elementos, etc.

3 . Por el principio de adición y la fórmula $(*)$ obtenemos que la cantidad de subconjuntos de un conjuntos de n elementos es 2^n.

Ejercicios de conteo

Ejercicio

¿Cuántos números naturales existen menores que 10^5, cuyos dígitos sean todos distintos?

Solución.

Los números naturales menores de 10^5 son todos aquellos que tienen como máximo 5 dígitos.

1. 1 dígito $\rightarrow$ 9 posibilidades,
2. 2 dígitos $\rightarrow 9 \times 9$ posibilidades (81),
3. 3 dígitos $\rightarrow 9 \times 9 \times 8$ posibilidades (648),
4. 4 dígitos $\rightarrow 9 \times 9 \times 8 \times 7$ posibilidades (4536),
5. 5 dígitos $\rightarrow 9 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6$ posibilidades (27216),

Total: $9 + 81 + 648 + 4536 + 27216 = 32490$. $\square$

Ejercicio

¿De cuántas formas distintas se pueden escoger 5 cartas de una baraja de 52 cartas?

(1) Si no hay restricciones.
(2) Si debe haber tres picas y dos corazones.
(3) Si debe haber al menos una carta de cada palo.

Solución.

(1) Como no nos imponen ninguna condición especial entonces solo debemos determinar cuántos subconjuntos hay con 5 elementos de un conjunto de 52 objetos, es decir, debemos hacer una ***selección sin orden de 5 cartas entre 52 cartas***, esto es:

$$\binom{52}{5} = \frac{52!}{(52-5)!5!} = \frac{52!}{47!5!} = \frac{52 \cdot 51 \cdot 50 \cdot 49 \cdot 48 \cdot 47!}{47!5!}$$

$$= \frac{52 \cdot 51 \cdot 50 \cdot 49 \cdot 48}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2} = 52 \cdot 51 \cdot 49 \cdot 20.$$

(2) En este caso, debemos elegir 3 cartas entre 13 (para las picas), y la cantidad de elecciones posibles es $\binom{13}{3}$.

Por otro lado, para el palo de corazones, hay $\binom{13}{2}$ formas de elegir 2 cartas entre 13.

Luego, por el principio de multiplicación, el resultado es:

$$\binom{13}{3} \cdot \binom{13}{2} = \frac{13!}{10!3!} \cdot \frac{13!}{11!2!} = \frac{13 \cdot 12 \cdot 11}{6} \cdot \frac{13 \cdot 12}{2} = 13^2 \cdot 12 \cdot 11.$$

(3) Como debe haber al menos una carta de cada palo, y hay 4 palos, entonces en cada elección de 5 cartas **ineludiblemente tiene que haber dos del mismo palo**. Ahora bien, si fijamos el palo que se repite, hay

$$\binom{13}{2} \cdot \binom{13}{1} \cdot \binom{13}{1} \cdot \binom{13}{1}$$

formas de elegir las 5 cartas. Como hay 4 palos, tenemos un total de:

$$4 \cdot \binom{13}{2} \cdot \binom{13}{1} \cdot \binom{13}{1} \cdot \binom{13}{1} = 4 \cdot 13 \cdot 6 \cdot 13 \cdot 13 \cdot 13 = 24 \cdot 13^4.$$

□

Ejercicio

¿De cuántas formas diferentes pueden repartirse 5 bolas blancas, 3 rojas y 2 negras en 10 urnas distintas (etiquetadas) de forma que cada urna contenga una bola?

Solución.

Observar que como hay 10 bolas y 10 urnas, cada urna debe contener una bola.

Primero nos preguntamos ¿de cuántas forma puedo poner las 5 bolas blancas en las 10 urnas?

Este problema es equivalente a elegir 5 urnas entre 10 (las urnas donde pondremos las bolas blancas) y sabemos que las posibilidades son $\binom{10}{5}$.

Ahora quedan 5 lugares y queremos ver de cuántas formas ponemos 3 bolas rojas en 5 urnas y la respuesta es $\binom{5}{3}$

Finalmente, hay dos lugares para las dos bolas negras y hay una sola forma de ponerlas.

El resultado es entonces

$$\binom{10}{5}\binom{5}{3} = \frac{10!}{5!5!}\frac{5!}{2!3!} = \frac{10!}{5!2!3!}.$$

$\square$

Observación Este problema es equivalente a "cuantas permutaciones hay de 5 bolas blancas, 3 rojas y 2 negras".

Podemos pensar primero que toda las bolas tienen distinto color, con lo cual tenemos 10! permutaciones.

Luego, hay que dividir por las permutaciones de 2 bolas blancas, 3 rojas y 2 negras, y el resultado es

$$\frac{10!}{5!2!3!}.$$

Ejercicio

Un ascensor de un centro comercial parte del sótano con 5 pasajeros y se detiene en 7 pisos. ¿De cuántas maneras distintas pueden descender los pasajeros? ¿Y con la condición de que dos pasajeros no bajen en el mismo piso?

Solución.

Hagamos un poco de abstracción del problema y pensemos las posibilidades que tiene 5 personas para ubicarse en 7 lugares: la primera persona tiene 7 posibilidades, la segunda también y así sucesivamente, luego el total de posibilidades es

$$7 \times 7 \times 7 \times 7 \times 7 = 7^5.$$

Si no estás convencido del razonamiento, lo podemos ver de la siguiente manera: supongamos que tenemos 5 posiciones (que representan los 5 pasajeros) y en cada posición podemos poner un número del 1 al 7 (el piso en que baja), entonces la pregunta se reduce a ¿cuántos números de 5 dígitos se pueden formar con los dígitos del 1 al 7?

Claramente, la respuesta es también 7^5.

Para la segunda pregunta, simplemente hay que modificar la pregunta anterior ¿cuántos números de 5 dígitos con todos los dígitos diferentes se pueden formar con los dígitos del 1 al 7?

La respuesta es:

$$7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 = \frac{7!}{(7-5)!} = \frac{7!}{2!}.$$

Ejercicio

Para participar en un torneo de tenis de dobles mixtos, es necesario presentar un equipo de 3 parejas, debiéndose elegir los jugadores entre los integrantes de un grupo constituido por 6 hombres y 3 mujeres.

¿De cuántas maneras puede seleccionarse el equipo?

Solución.

1) Nos piden que armemos 3 parejas, sin que importe el orden de las parejas.

2) Observar **todas** las mujeres deben formar parte del equipo, ya que requerimos de 3 mujeres para formar las 3 parejas. De donde, el problema lo podemos replantear como:

¿De cuántas maneras le podemos asignar un compañero (hombre) de juego a cada mujer?

3) Para resolver esto, representamos al problema en un esquema de la siguiente manera: Por comodidad, y sin perdida de generalidad, digamos que las mujeres las numeramos 1, 2 y 3. Entonces asignarle un compañero a cada una equivale a completar las siguientes casillas

$$\underline{1} \; \sqcup \qquad \underline{2} \; \sqcup \qquad \underline{2} \; \sqcup$$

- 1º casilla: 6 posibilidades (los 6 hombres).
- 2º casilla: 5 posibilidades (5 hombres).
- 3º casilla: 4 posibilidades (4 hombres).

Así, por el principio de multiplicación, las maneras de seleccionar al equipo son:

$$6 \cdot 5 \cdot 4 = 120.$$

$\square$

Ejercicio

Tenemos tres cajas numeradas y 10 bolitas indistinguibles ¿De cuántas formas puedo distribuir las bolitas en las cajas?

Solución.

1) Pensemos en el problema equivalente: tengo 10 bolitas alineadas, ¿de cuántas maneras puedo poner dos paredes que separen las bolitas en tres grupos?

2) Ahora bien, si pensamos que las bolitas son 0's y las paredes son 1's, entonces el problema se reduce a: ¿cuántas permutaciones hay de la palabra?

$$1\,1\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0$$

3) Lo resolvemos como siempre: primero consideramos que todos los caracteres son distintos y obtenemos 12! permutaciones, luego dividimos por 10! y 2! para eliminar las permutaciones de 0's seguidos y de 1's seguidos, respectivamente. Luego el resultado es

$$\frac{12!}{10!2!} = \frac{12 \cdot 11 \cdot 10!}{10!2} = \frac{12 \cdot 11}{2} = 66.$$

$\square$

Ejercicio

Tenemos m cajas numeradas y n bolitas indistinguibles. Probar que hay

$$\binom{m+n-1}{m-1}$$

formas de distribuir las bolitas en las cajas.

(Selecciones no ordenadas con repetición)