Matemática Discreta I
Clase 18 - Isomorfismo de grafos / Valencias

FAMAF / UNC

1 de junio de 2023

Isomorfismo de grafos

¿Cuándo debemos considerar a dos grafos “iguales”?

Isomorfismo de grafos

¿Cuándo debemos considerar a dos grafos "iguales"?

- No importa el nombre de los vértices.

Isomorfismo de grafos

¿Cuándo debemos considerar a dos grafos "iguales"?

- No importa el nombre de los vértices.
- Un grafo se puede dibujar de muchas maneras.

Isomorfismo de grafos

¿Cuándo debemos considerar a dos grafos "iguales"?

- No importa el nombre de los vértices.
- Un grafo se puede dibujar de muchas maneras.
- La propiedad característica de un grafo es la manera en que los vértices están conectados por aristas.

Isomorfismo de grafos

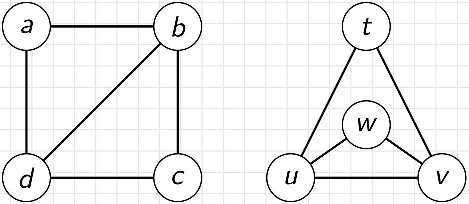
¿Cuándo debemos considerar a dos grafos "iguales"?

- No importa el nombre de los vértices.
- Un grafo se puede dibujar de muchas maneras.
- La propiedad característica de un grafo es la manera en que los vértices están conectados por aristas.

Dicho en forma directa: vamos a considerar que dos grafos G_1 y G_2 son "iguales" si cambiando el nombre de los vértices de G_2 por el de los vértices de G_1, en cierto orden, obtenemos G_1.

Ejemplo

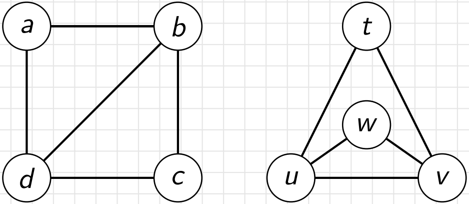
Tenemos dos grafos:



G_1 G_2

Ejemplo

Tenemos dos grafos:

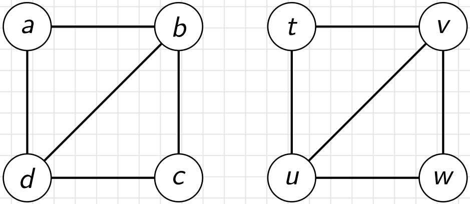


G_1 $\qquad\qquad$ G_2

Parecen ser distintos.

Sin embargo, si dibujamos G_2 diferente ("dando vuelta w alrededor del eje uv" y rotando), obtenemos:

Sin embargo, si dibujamos G_2 diferente ("dando vuelta w alrededor del eje uv" y rotando), obtenemos:



G_1 G_2

Los cuales claramente describen el mismo grafo, pero con los nombres de los vértices cambiados.

Isomorfismo de grafos: preliminares

Definición

Dado dos conjuntos X, Y diremos que una aplicación $f : X \to Y$ es *biyectiva* si para cada $y \in Y$ existe un único $x \in X$ tal que $f(x) = y$.

Isomorfismo de grafos: preliminares

Definición

Dado dos conjuntos X, Y diremos que una aplicación $f : X \to Y$ es *biyectiva* si para cada $y \in Y$ existe un único $x \in X$ tal que $f(x) = y$.

Un propiedad importante, de las funciones biyectivas es:

Teorema

f es biyectiva si y sólo sí f tiene inversa, *es decir existe $f^{-1} : Y \to X$, tal que*

$$f(f^{-1}(y)) = y \;\; \forall\, y \in Y \quad \wedge \quad f^{-1}(f(x)) = x, \;\; \forall\, x \in X.$$

Ejemplo

La función

$$f : \{1, 2, 3\} \to \{a, b, c\} \quad \text{definida } f(1) = c, f(2) = b, f(3) = a$$

es biyectiva y su inversa es

$$f^{-1}(a) = 3,\ f^{-1}(b) = 2,\ f^{-1}(c) = 1.$$

Isomorfismos de grafos: definición

Definición

Dos grafos G_1 y G_2 se dicen que son *isomorfos* cuando existe una biyección α entre el conjunto de vértices de G_1 y el conjunto de vértices de G_2 tal que

Isomorfismos de grafos: definición

Definición

Dos grafos G_1 y G_2 se dicen que son *isomorfos* cuando existe una biyección α entre el conjunto de vértices de G_1 y el conjunto de vértices de G_2 tal que

- si $\{x, y\}$ es una arista de G_1 entonces $\{\alpha(x), \alpha(y)\}$ es una arista de G_2

Isomorfismos de grafos: definición

Definición

Dos grafos G_1 y G_2 se dicen que son *isomorfos* cuando existe una biyección α entre el conjunto de vértices de G_1 y el conjunto de vértices de G_2 tal que

- si $\{x, y\}$ es una arista de G_1 entonces $\{\alpha(x), \alpha(y)\}$ es una arista de G_2 y, recíprocamente,
- si $\{z, w\}$ es una arista de G_2 entonces $\{\alpha^{-1}(z), \alpha^{-1}(w)\}$ es una arista de G_1.

Isomorfismos de grafos: definición

Definición

Dos grafos G_1 y G_2 se dicen que son *isomorfos* cuando existe una biyección α entre el conjunto de vértices de G_1 y el conjunto de vértices de G_2 tal que

- si $\{x, y\}$ es una arista de G_1 entonces $\{\alpha(x), \alpha(y)\}$ es una arista de G_2 y, recíprocamente,
- si $\{z, w\}$ es una arista de G_2 entonces $\{\alpha^{-1}(z), \alpha^{-1}(w)\}$ es una arista de G_1.

Equivalentemente, diremos que α es un *isomorfismo* si es una biyección entre el conjunto de vértices de G_1 y el conjunto de vértices de G_2 tal que por cada $\{z, w\}$ arista de G_2, existe una y solo una $\{x, y\}$ arista de G_1 tal que $\{\alpha(x), \alpha(y)\} = \{z, w\}$.

Ejemplo

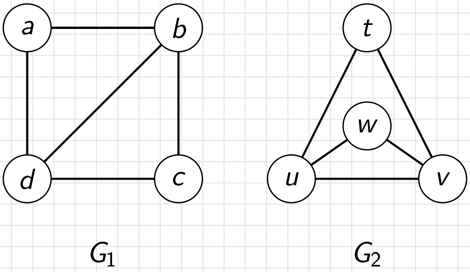


Figura: G_1 y G_2 son isomorfos

Una biyección es dada por

$$\alpha(a) = t, \quad \alpha(b) = v, \quad \alpha(c) = w, \quad \alpha(d) = u.$$

Podemos comprobar que a cada arista de G_1 le corresponde una arista de G_2 y viceversa.

- Para mostrar que dos grafos no son isomorfos, nosotros debemos demostrar que no hay una biyección entre el conjunto de vértices de uno con el conjunto de vértices de otro, que lleve las aristas de uno en las aristas del otro.

- Para mostrar que dos grafos no son isomorfos, nosotros debemos demostrar que no hay una biyección entre el conjunto de vértices de uno con el conjunto de vértices de otro, que lleve las aristas de uno en las aristas del otro.
- Si dos grafos tienen diferente número de vértices, entonces no es posible ninguna biyección, y los grafos no pueden ser isomorfos.

- Para mostrar que dos grafos no son isomorfos, nosotros debemos demostrar que no hay una biyección entre el conjunto de vértices de uno con el conjunto de vértices de otro, que lleve las aristas de uno en las aristas del otro.
- Si dos grafos tienen diferente número de vértices, entonces no es posible ninguna biyección, y los grafos no pueden ser isomorfos.
- Si los grafos tienen el mismo número de vértices, pero diferente número de aristas, entonces hay biyecciones de vértices pero ninguna de ellas puede ser un isomorfismo.

Definición

Sea $G = (V, E)$ un grafo. Se dice que $G' = (V', E')$ es *subgrafo* de $G = (V, E)$ si

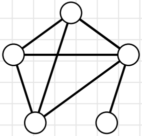
(1) G' es un grafo, y (2) $V' \subset V$, $E' \subset E$.

Definición

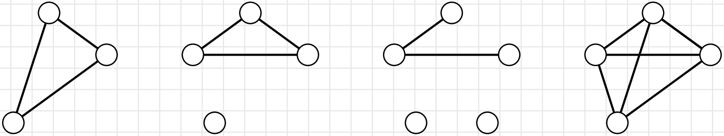
Sea $G = (V, E)$ un grafo. Se dice que $G' = (V', E')$ es *subgrafo* de $G = (V, E)$ si

(1) G' es un grafo, y (2) $V' \subset V$, $E' \subset E$.

Algunos subgrafos de



son:



Es claro, pero no lo demostraremos aquí, que un isomorfismo lleva un subgrafo a un subgrafo isomorfo. Este resultado es una herramienta que puede ser útil para ver si dos grafos no son isomorfos.

Es claro, pero no lo demostraremos aquí, que un isomorfismo lleva un subgrafo a un subgrafo isomorfo. Este resultado es una herramienta que puede ser útil para ver si dos grafos no son isomorfos.

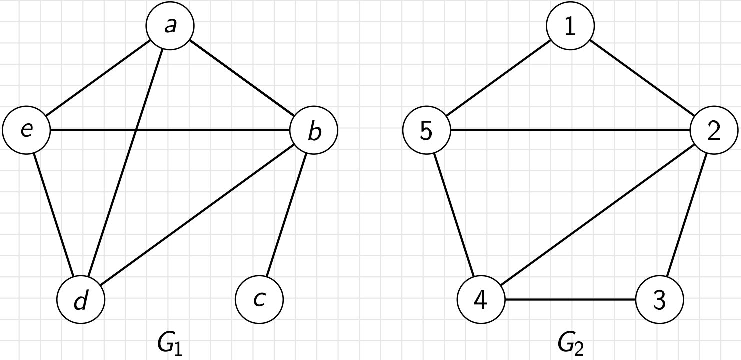


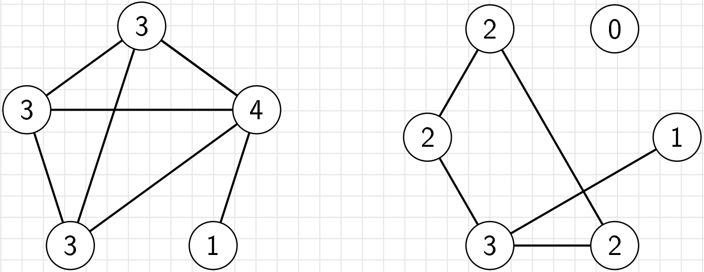
Figura: G_1 y G_2 no son isomorfos pues $K_4 \subset G_1$ y $K_4 \not\subset G_2$

Valencias

La *valencia* de un vértice v en un grafo $G = (V, E)$ es el número de aristas de G que contienen a v. Usaremos la notación $\delta(v)$ para la valencia de v, formalmente

$$\delta(v) = |D_v|, \quad \text{donde} \quad D_v = \{e \in E | v \in e\}.$$

Ejemplo



En una lista de adyacencia la valencia de un vértice es exactamente la cantidad de elementos que tiene la columna correspondiente al vértice.

Ejemplo

Vimos el $G = (V, E)$ es dado por

$$V = \{a, b, c, d, z\}, \qquad E = \{\{a, b\}, \{a, d\}, \{b, z\}, \{c, d\}, \{d, z\}\}.$$

En una lista de adyacencia la valencia de un vértice es exactamente la cantidad de elementos que tiene la columna correspondiente al vértice.

Ejemplo

Vimos el $G = (V, E)$ es dado por

$$V = \{a, b, c, d, z\}, \qquad E = \{\{a, b\}, \{a, d\}, \{b, z\}, \{c, d\}, \{d, z\}\}.$$

Su lista de adyacencia es

a	b	c	d	z
b	a	d	a	b
d	z		c	d
			z	

En una lista de adyacencia la valencia de un vértice es exactamente la cantidad de elementos que tiene la columna correspondiente al vértice.

Ejemplo

Vimos el $G = (V, E)$ es dado por

$$V = \{a, b, c, d, z\}, \qquad E = \{\{a, b\}, \{a, d\}, \{b, z\}, \{c, d\}, \{d, z\}\}.$$

Su lista de adyacencia es

a	b	c	d	z
b	a	d	a	b
d	z		c	d
			z	

Luego $\delta(a) = 2$, $\delta(b) = 2$, $\delta(c) = 1$, $\delta(d) = 3$, $\delta(z) = 2$.

Teorema

La suma de los valores de las valencias $\delta(v)$, tomados sobre todos los vértices v del grafo $G = (V, E)$, es igual a dos veces el número de aristas:

$$\sum_{v \in V} \delta(v) = 2|E|.$$

Teorema

La suma de los valores de las valencias $\delta(v)$, tomados sobre todos los vértices v del grafo $G = (V, E)$, es igual a dos veces el número de aristas:

$$\sum_{v \in V} \delta(v) = 2|E|.$$

Demostración

La valencia de un vértice v indica la cantidad de "extremos" de aristas que "tocan" a v. Es claro que hay $2|E|$ extremos de aristas, luego la suma total de las valencias de los vértices es $2|E|$. $\square$

Diremos que un vértice de G es *impar* si su valencia es impar, y *par* si su valencia es par.

Diremos que un vértice de G es *impar* si su valencia es impar, y *par* si su valencia es par.

Denotemos V_i y V_p los conjuntos de vértices impares y pares respectivamente, luego $V = V_i \cup V_p$ es una partición de V.

Diremos que un vértice de G es *impar* si su valencia es impar, y *par* si su valencia es par.

Denotemos V_i y V_p los conjuntos de vértices impares y pares respectivamente, luego $V = V_i \cup V_p$ es una partición de V.Luego

$$\sum_{v \in V_i} \delta(v) + \sum_{v \in V_p} \delta(v) = 2|E|.$$

y entonces

$$\sum_{v \in V_i} \delta(v) = \underbrace{2|E|}_{\text{par}} - \underbrace{\sum_{v \in V_p} \delta(v)}_{\text{par}}.$$

Diremos que un vértice de G es *impar* si su valencia es impar, y *par* si su valencia es par.

Denotemos V_i y V_p los conjuntos de vértices impares y pares respectivamente, luego $V = V_i \cup V_p$ es una partición de V.Luego

$$\sum_{v \in V_i} \delta(v) + \sum_{v \in V_p} \delta(v) = 2|E|.$$

y entonces

$$\sum_{v \in V_i} \delta(v) = \underbrace{2|E|}_{\text{par}} - \underbrace{\sum_{v \in V_p} \delta(v)}_{\text{par}}.$$

Luego, la suma de las valencias de los vértices impares es par $\Rightarrow$

Teorema

El número de vértices impares es par.

Este resultado es a veces llamado el "handshaking lemma": dado un conjunto de personas, el número de personas que le ha dado la mano a un número impar de miembros del conjunto es par.

Un grafo en el cual todos los vértices tienen la misma valencia r se llama *regular* (con valencia r), o r*-valente*. Luego,

$$r|V| = 2|E|.$$

- K_n regular $(n-1)$-valente.
- C_n, el polígono de n-lados. Si $n \geq 3$, C_n es regular de valencia 2.

C_n es llamado el *grafo cíclico* de n vértices. Formalmente $C_n = (V, E)$, con

$$V = \{1, 2, \ldots, n\}, \qquad E = \{\{1,2\}, \{2,3\}, \ldots, \{n-1, n\}, \{n, 1\}\}.$$