

**Práctico 1**  
**Matemática Discreta I – Año 2023/1**  
**FAMAF**

**Ejercicios resueltos**

(1) Demostrar las siguientes afirmaciones donde  $a, b, c$  y  $d$  son siempre números enteros. Justificar cada uno de los pasos en cada demostración indicando el axioma o resultado que utiliza.

a)  $a = -(-a)$

*Rta:*  $-a$  es el inverso aditivo de  $a$  y por lo tanto el inverso aditivo de  $-a$  es  $a$ . Ahora bien,  $-(-a)$  es el inverso aditivo de  $-a$ , luego por unicidad del inverso aditivo (axioma I6), obtenemos que  $a = -(-a)$ .

b)  $a = b$  si y sólo si  $-a = -b$

*Rta:* Si  $a = b$ , es claro que  $-a = -b$ . Si  $-a = -b$ , entonces  $-(-a) = -(-b)$  y por a), tenemos que  $a = b$ .

c)  $a + a = a$  implica que  $a = 0$ .

*Rta:* Sumo  $-a$  a ambos lados de la ecuación  $a + a = a$  y obtengo, por axioma I6,  $-a + a + a = -a + a$ , luego  $0 + a = 0$  y, finalmente por axioma I4,  $a = 0$ .

(2) Idem ??.

a)  $0 < a$  y  $0 < b$  implican  $0 < a \cdot b$

*Rta:* Como  $0 < a$  y  $0 < b$ , por axioma I11,  $0 \cdot b < a \cdot b$ . Por un resultado del teórico tenemos que  $0 \cdot b = 0$ , luego  $0 < a \cdot b$ .

b)  $a < b$  y  $c < 0$  implican  $b \cdot c < a \cdot c$

*Rta:* Sumamos  $-c$  a la inecuación  $c < 0$  y obtenemos, por axioma I10,  $-c + c < -c + 0$ , luego por axioma I6 en la parte izquierda y axioma I4 en la parte derecha, obtenemos  $0 < -c$ : Ahora bien por axioma I11,  $a < b$  y  $0 < -c$  implican  $a \cdot (-c) < b \cdot (-c)$ . Por la regla de los signos tenemos  $-a \cdot c < -b \cdot c$ . Sumando  $a \cdot c$  y  $b \cdot c$  a ambos lados de la inecuación y aplicando axioma I10 y repetidamente los axiomas I4 e I6, obtenemos  $b \cdot c < a \cdot c$ .

(3) Probar las siguientes afirmaciones, justificando los pasos que realiza.

a) Si  $0 < a$  y  $0 < b$  entonces  $a < b$  si y sólo si  $a^2 < b^2$ .

*Rta:* Como  $a < b$  y  $0 < a$  por I11 obtenemos  $a^2 < ba$ . Como  $a < b$  y  $0 < b$  por I11 obtenemos  $ab < b^2$ . Luego  $a^2 < ba = ab < b^2$ .

b) Si  $a \neq 0$  entonces  $0 < a^2$ .

*Rta:* Por tricotomía (axioma I8) o bien  $0 < a$  o bien  $a < 0$ . Si  $0 < a$ , entonces, por a) tenemos que  $0 = 0^2 < a^2$ . Si  $a < 0$ , sumando  $-a$  a ambos

miembros de la desigualdad y aplicando axiomas I10, I6 e I4 obtenemos  $0 < -a$ . Luego, por a),  $0 = 0^2 < (-a)^2 = a^2$ . La última igualdad se deduce de la regla de los signos.

c) Si  $a \neq b$  entonces  $a^2 + b^2 > 0$ .

*Rta:* Como  $a \neq b$ , alguno de los dos,  $a$  o  $b$ , es distinto de cero. Supongamos que  $a \neq 0$  y, entonces, por b) tenemos que  $0 = < a^2$ . Análogamente, si  $b \neq 0$ ,  $0 < b^2$  y sumando  $a^2$  a esta inecuación, por axioma I10, obtenemos  $a^2 + 0 < a^2 + b^2$ , que por axioma I4, es  $a^2 < a^2 + b^2$ . Como  $0 = < a^2$ , tenemos  $0 = < a^2 < a^2 + b^2$ . Falta considerar el caso en que  $b = 0$ . en este caso  $a^2 + b^2 = a^2 + 0^2 = a^2 + 0 = a^2 > 0$ .

d) Probar que si  $a + c < b + c$  entonces  $a < b$ .

*Rta:* Por axioma I10  $a + c - c < b + c - c$ . Por axiomas I6 e I4 obtenemos  $a < b$ .

(4) Calcular evaluando las siguientes expresiones:

a)  $\sum_{r=0}^4 r$ . *Rta:*  $\sum_{r=0}^4 r = 0 + 1 + 2 + 3 + 4 = 10$ .

b)  $\prod_{i=1}^5 i$ . *Rta:*  $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$ .

c)  $\sum_{k=-3}^{-1} \frac{1}{k(k+4)}$ . *Rta:*  $\frac{1}{-3(-3+4)} + \frac{1}{-2(-2+4)} + \frac{1}{-1(-1+4)} = \frac{1}{-3} + \frac{1}{-4} + \frac{1}{-3} = -\frac{11}{12}$ .

d)  $\prod_{n=2}^7 \frac{n}{n-1}$ . *Rta:*  $\frac{2}{1} \frac{3}{2} \frac{4}{3} \frac{5}{4} \frac{6}{5} \frac{7}{6} = \frac{7}{1} = 7$

(5) Calcular:

a)  $2^{10} - 2^9$ . *Rta:*  $2^{10} - 2^9 = 2 \cdot 2^9 - 2^9 = 2^9 + 2^9 - 2^9 = 2^9$ .

b)  $3^2 2^5 - 3^5 2^2$ . *Rta:*  $3^2 2^5 - 3^5 2^2 = 3^2 2^2 (2^3 - 3^3) = 36(-19)$ .

c)  $(2^2)^n - (2^n)^2$ . *Rta:*  $(2^2)^n - (2^n)^2 = 2^{2n} - 2^{n^2} = 0$ .

d)  $(2^{2^n} + 1)(2^{2^n} - 1)$ . *Rta:*  $(2^{2^n} + 1)(2^{2^n} - 1) = (2^{2^n})^2 - 1^2 = 2^{2 \cdot 2^n} - 1 = 2^{2^{n+1}} - 1$ .

(6) Dado un natural  $m$ , probar que  $\forall n \in \mathbb{N}; x, y \in \mathbb{R}$ , se cumple:

a)  $x^n \cdot x^m = x^{n+m}$

*Rta:* Se fijará  $n$  y se hará inducción sobre  $m$ .

(Caso base) Debemos ver que  $x^n x^1 = x^{n+1}$ , lo cual es verdadero por la definición recursiva de potencia.

(Paso inductivo) Supongamos que el resultado es verdadero para  $m = k$ , es decir que  $x^n x^k = x^{n+k}$  (HI). Veamos que  $x^n x^{k+1} = x^{n+k+1}$ . Ahora bien,

$$\begin{aligned} x^n x^{k+1} &= x^n x^k x \text{ (definición de potencia)} \\ &= x^{n+k} x \text{ (HI)} \\ &= x^{n+k+1} \text{ (definición de potencia).} \end{aligned}$$

b)  $(x \cdot y)^n = x^n \cdot y^n$

Rta: Se hará inducción sobre  $n$ .

(Caso base)  $(x \cdot y)^1 = x \cdot y = x^1 \cdot y^1$ , por definición de potencia.

(Paso inductivo) Veamos que  $(x \cdot y)^k = x^k \cdot y^k$  (HI)  $\Rightarrow (x \cdot y)^{k+1} = x^{k+1} \cdot y^{k+1}$ , para  $k \geq 1$ . Ahora bien,

$$(x \cdot y)^{k+1} \stackrel{\text{def}}{=} (x \cdot y)^k (x \cdot y) \stackrel{\text{(HI)}}{=} (x^k \cdot y^k)(x \cdot y) = (x^k x) \cdot (y^k y) \stackrel{\text{def}}{=} x^{k+1} \cdot y^{k+1}.$$

c)  $(x^n)^m = x^{n \cdot m}$

Rta: Al igual que en a), se fijará  $n$  y se hará inducción sobre  $m$ .

(Caso base) Debemos ver que  $(x^n)^1 = x^n$ , lo cual es verdadero por la definición recursiva de potencia.

(Paso inductivo) Supongamos que el resultado es verdadero para  $m = k$ , es decir que  $(x^n)^k = x^{nk}$  (HI). Veamos que  $(x^n)^{k+1} = x^{n(k+1)}$ .

$$(x^n)^{k+1} \stackrel{\text{def}}{=} (x^n)^k x^n \stackrel{\text{(HI)}}{=} x^{nk} x^n \stackrel{\text{(a)}}{=} x^{nk+n} = x^{n(k+1)}.$$

(7) Analizar la validez de las siguientes afirmaciones:

a)  $(2^{2^n})^{2^k} = 2^{2^{n+k}}$ ,  $n, k \in \mathbb{N}$ . Rta: Verdadera:  $(2^{2^n})^{2^k} = (2^{2^n})^{2^k} = 2^{2^{n+k}}$ .

b)  $(2^n)^2 = 4^n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . Rta: Verdadera:  $(2^n)^2 = 2^{2n} = (2^2)^n = 4^n$ .

c)  $2^{7+11} = 2^7 + 2^{11}$ . Rta: Falsa: si divido la ecuación por  $2^7$  se obtiene  $2^{11} = 1 + 2^4$ , donde la expresión de la izquierda es par y la de la derecha es impar.

(8) Probar que  $\sum_{i=0}^n 2^i = 2^{n+1} - 1$  ( $n \geq 0$ ).

Rta: Haremos inducción sobre  $n$ .

(Caso base  $n = 0$ )  $\sum_{i=0}^0 n 2^i = 2^0 = 1 = 2^{+1} - 1$ .

(Paso inductivo) Supongamos que  $k \geq 0$  y se cumple que  $\sum_{i=0}^k 2^i = 2^{k+1} - 1$  (hipótesis inductiva). Probaremos que  $\sum_{i=0}^{k+1} 2^i = 2^{k+2} - 1$ . Ahora bien,

$$\sum_{i=0}^{k+1} 2^i = \sum_{i=0}^k 2^i + 2^{k+1} \stackrel{\text{(HI)}}{=} 2^{k+1} - 1 + 2^{k+1} = 2 \cdot 2^{k+1} - 1 = 2^{k+2} - 1.$$

(9) Demostrar por inducción las siguientes igualdades:

a)  $\sum_{k=1}^n (a_k + b_k) = \sum_{k=1}^n a_k + \sum_{k=1}^n b_k$ ,  $n \in \mathbb{N}$ .

Rta: Inducción en  $n$ .

(Caso base  $n = 1$ )  $\sum_{k=1}^1 (a_k + b_k) = a_1 + b_1 = \sum_{k=1}^1 a_k + \sum_{k=1}^1 b_k$ , verdadero.

(Paso inductivo) Dado  $h \geq 1$  supondremos que

$$\sum_{k=1}^h (a_k + b_k) = \sum_{k=1}^h a_k + \sum_{k=1}^h b_k$$

es verdadera (HI) y deduciremos que

$$\sum_{k=1}^{h+1} (a_k + b_k) = \sum_{k=1}^{h+1} a_k + \sum_{k=1}^{h+1} b_k.$$

Comenzamos con el término de la izquierda de lo que queremos probar y debemos obtener el término de la derecha.

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{h+1} (a_k + b_k) &\stackrel{(\text{def } \Sigma)}{=} \sum_{k=1}^h (a_k + b_k) + a_{h+1} + b_{h+1} \\ &\stackrel{(\text{HI})}{=} \sum_{k=1}^h a_k + \sum_{k=1}^h b_k + a_{h+1} + b_{h+1} \\ &= \left( \sum_{k=1}^h a_k + a_{h+1} \right) + \left( \sum_{k=1}^h b_k + b_{h+1} \right) \\ &\stackrel{(\text{def } \Sigma)}{=} \sum_{k=1}^{h+1} a_k + \sum_{k=1}^{h+1} b_k. \end{aligned}$$

b)  $\sum_{j=1}^n j = \frac{n(n+1)}{2}, n \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{N}.$

Rta: Esta es llamada la *suma aritmética* y la demostraremos por inducción en  $n$ .

(Caso base  $n = 1$ )  $\sum_{j=1}^1 j = 1 = (1 \cdot 2)/2$ . Verdadero.

(Paso inductivo) Para  $k \geq 1$  suponemos cierto

$$\sum_{j=1}^k j = \frac{k(k+1)}{2} \quad (\text{HI})$$

y debemos demostrar que

$$\sum_{j=1}^{k+1} j = \frac{(k+1)(k+2)}{2} = \frac{(k+1)(k+2)}{2}.$$

Ahora bien,

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{k+1} j &\stackrel{(\text{def } \Sigma)}{=} \sum_{j=1}^k j + (k+1) \stackrel{(\text{HI})}{=} \frac{k(k+1)}{2} + (k+1) \\ &= \frac{k(k+1) + 2(k+1)}{2} = \frac{(k+1)(k+2)}{2}. \end{aligned}$$

c)  $\sum_{i=1}^n i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}, n \in \mathbb{N}.$

Rta: Inducción en  $n$ .

(Caso base  $n = 1$ )  $\sum_{i=1}^1 i^2 = 1$  y  $(1(1+1)(2 \cdot 1 + 1))/2 = (1 \cdot 2 \cdot 3)/6 = 1$ . Verdadero.

(Paso inductivo) Para  $k \geq 1$ , supondremos cierto

$$\sum_{i=1}^k i^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} \quad (\text{HI})$$

y probaremos que

$$\sum_{i=1}^{k+1} i^2 = \frac{(k+1)(k+2)(2(k+1)+1)}{6} = \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6} \quad (\text{T}).$$

Operemos con el lado izquierdo de (T):

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{k+1} i^2 &\stackrel{(\text{def } \Sigma)}{=} \sum_{i=1}^k i^2 + (k+1)^2 \\ &\stackrel{(\text{HI})}{=} \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} + (k+1)^2 \\ &= \frac{k(k+1)(2k+1) + 6(k+1)^2}{6} = \frac{(k+1)(k(2k+1) + 6(k+1))}{6} \\ &= \frac{(k+1)(2k^2 + k + 6k + 6)}{6} = \frac{(k+1)(2k^2 + 7k + 6)}{6}. \end{aligned}$$

Por otro lado, desarrollamos el lado derecho de (T):

$$\begin{aligned} \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6} &= \frac{(k+1)(2k^2 + 3k + 4k + 6)}{6} \\ &= \frac{(k+1)(2k^2 + 7k + 6)}{6}. \end{aligned}$$

Es decir, hemos probado que el lado derecho y el lado izquierdo de (T) son iguales y con esto se prueba el resultado.

$$d) \sum_{k=0}^n (2k+1) = (n+1)^2, \quad n \in \mathbb{N}_0.$$

Rta: Inducción en  $n$ .

(Caso base  $n = 0$ )  $\sum_{k=0}^0 (2k+1) = 1 = 1^2$ . Verdadero.

(Paso inductivo) Para  $h \geq 0$  suponemos que  $\sum_{k=0}^h (2k+1) = (h+1)^2$  (HI) y debemos probar que  $\sum_{k=0}^{h+1} (2k+1) = (h+2)^2$ . Ahora bien,

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{h+1} (2k+1) &\stackrel{(\text{def } \Sigma)}{=} \sum_{k=0}^h (2k+1) + 2(h+1) + 1 \\ &\stackrel{(\text{HI})}{=} (h+1)^2 + 2(h+1) + 1 = (h+2)^2. \end{aligned}$$

$$e) \sum_{i=1}^n i^3 = \left( \frac{n(n+1)}{2} \right)^2, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Rta: Inducción en  $n$ .

(Caso base  $n = 1$ )  $\sum_{i=1}^1 i^3 = 1 = \left(\frac{1 \cdot 2}{2}\right)^2$ . Verdadero.

(Paso inductivo) Para  $k \geq 1$ , supondremos cierto  $\sum_{i=1}^k i^3 = \left(\frac{k(k+1)}{2}\right)^2$  (HI) y probaremos  $\sum_{i=1}^{k+1} i^3 = \left(\frac{(k+1)(k+2)}{2}\right)^2$ . Ahora bien,

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{k+1} i^3 &\stackrel{(\text{def } \Sigma)}{=} \sum_{i=1}^k i^3 + (k+1)^3 \stackrel{(\text{HI})}{=} \left(\frac{k(k+1)}{2}\right)^2 + (k+1)^3 \\ &= \frac{k^2(k+1)^2}{4} + (k+1)^3 = (k+1)^2 \left(\frac{k^2}{4} + k + 1\right) \\ &= (k+1)^2 \left(\frac{k^2 + 4k + 4}{4}\right) = (k+1)^2 \frac{(k+2)^2}{4} \\ &= \left(\frac{(k+1)(k+2)}{2}\right)^2.\end{aligned}$$

f)  $\sum_{k=0}^n a^k = \frac{a^{n+1} - 1}{a - 1}$ , donde  $a \in \mathbb{R}$ ,  $a \neq 0, 1$ ,  $n \in \mathbb{N}_0$ .

Rta: Esta es llamada la *suma geométrica* y la demostraremos por inducción en  $n$ .

(Caso base  $n = 0$ )  $\sum_{k=0}^0 a^k = a^0 = 1$  y  $\frac{a^1 - 1}{a - 1} = 1$ . Luego el resultado es verdadero para  $n = 1$ .

(Paso inductivo) Para  $h \geq 0$ , supondremos cierto  $\sum_{k=0}^h a^k = \frac{a^{h+1} - 1}{a - 1}$  (HI) y probaremos  $\sum_{k=0}^{h+1} a^k = \frac{a^{h+2} - 1}{a - 1}$ . Ahora bien,

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{h+1} a^k &\stackrel{(\text{def } \Sigma)}{=} \sum_{k=0}^h a^k + a^{h+1} \stackrel{(\text{HI})}{=} \frac{a^{h+1} - 1}{a - 1} + a^{h+1} \\ &= \frac{a^{h+1} - 1 + a^{h+1}(a - 1)}{a - 1} = \frac{a^{h+1} - 1 + a^{h+2} - a^{h+1}}{a - 1} \\ &= \frac{a^{h+2} - 1}{a - 1}.\end{aligned}$$

(10) Hallar  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $\forall n \geq n_0$  se cumpla que  $n^2 \geq 11 \cdot n + 3$ .

Rta: Para  $n = 1, \dots, 11$ , es claro que no se cumple pues  $n^2 \leq 11n < 11n + 3$ . Para  $n = 12$  la desigualdad se cumple, pues  $12^2 = 144 \geq 121 + 3$ . Probaremos que  $n^2 \geq 11n + 3$  para  $n \geq 12$ .

(Caso base  $n = 12$ ) Lo vimos más arriba.

(Paso inductivo) Para  $k \geq 12$ , supondremos cierto  $k^2 \geq 11k + 3$  (HI) y debemos probar que  $(k+1)^2 \geq 11(k+1) + 3 = 11k + 14$ . Ahora bien,

$$(k+1)^2 = k^2 + 2k + 1 \stackrel{(\text{HI})}{\geq} 11k + 3 + 2k + 1 = 11k + 2k + 4 \geq 11k + 14,$$

y la última desigualdad es válida pues como  $k \geq 12$ , entonces  $2k + 4 \geq 14$ .

(11) Sea  $u_1 = 3$ ,  $u_2 = 5$  y  $u_n = 3u_{n-1} - 2u_{n-2}$  con  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq 3$ . Probar que  $u_n = 2^n + 1$ .

Rta:

(Caso base) Para  $n = 1$  el resultado es verdadero pues  $u_1 = 3 = 1^1 + 1$ .

El resultado es verdadero cuando  $n = 2$  pues  $u_2 = 5 = 2^2 + 1$ .

(Paso inductivo) Supongamos que  $k \geq 2$  y el resultado es cierto para los  $h$  tales que  $1 \leq h \leq k$ . Es decir que  $u_h = 2^h + 1$  para  $1 \leq h \leq k$  y  $k \geq 2$  (hipótesis inductiva), entonces debemos probar que  $u_{k+1} = 2^{k+1} + 1$ . Ahora bien,

$$\begin{aligned}
 u_{k+1} &= 3u_k - 2u_{k-1} && \text{(por definición recursiva)} \\
 &= 3(2^k + 1) - 2(2^{k-1} + 1) && \text{(por hipótesis inductiva)} \\
 &= 3 \cdot 2^k + 3 - 2 \cdot 2^{k-1} - 2 \\
 &= 3 \cdot 2^k + 1 - 2^k \\
 &= 2 \cdot 2^k + 1 \\
 &= 2^{k+1} + 1.
 \end{aligned}$$

- (12) Sea  $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  la sucesión definida por recurrencia como sigue:  $u_1 = 9$ ,  $u_2 = 33$ ,  $u_n = 7u_{n-1} - 10u_{n-2}$ ,  $\forall n \geq 3$ . Probar que  $u_n = 2^{n+1} + 5^n$ , para todo  $n \in \mathbb{N}$ .

Rta: (Caso base) Para  $n = 1$  el resultado es verdadero pues  $u_1 = 9 = 2^{1+1} + 5^1$ .

Para  $n = 2$  el resultado es verdadero pues  $u_2 = 33 = 2^{2+1} + 5^2$ .

(Paso inductivo) Supongamos que  $k \geq 2$  y el resultado es cierto para los  $h$  tales que  $1 \leq h \leq k$ . Es decir que  $u_h = 2^{h+1} + 5^h$  para  $1 \leq h \leq k$  y  $k \geq 2$  (hipótesis inductiva), entonces debemos probar que  $u_{k+1} = 2^{k+2} + 5^{k+1}$ . Ahora bien,

$$\begin{aligned}
 u_{k+1} &= 7u_{k+1-1} - 10u_{k+1-2} && \text{(por definición recursiva)} \\
 &= 7u_k - 10u_{k-1} \\
 &= 7(2^{k+1} + 5^k) - 10(2^{k-1+1} + 5^{k-1}) && \text{(por hipótesis inductiva)} \\
 &= 7 \cdot 2^{k+1} + 7 \cdot 5^k - 10 \cdot 2^k - 10 \cdot 5^{k-1} \\
 &= 7 \cdot 2 \cdot 2^k + 7 \cdot 5 \cdot 5^{k-1} - 10 \cdot 2^k - 10 \cdot 5^{k-1} \\
 &= (7 \cdot 2 - 10) \cdot 2^k + (7 \cdot 5 - 10) \cdot 5^{k-1} \\
 &= 4 \cdot 2^k + 25 \cdot 5^{k-1} \\
 &= 2^2 \cdot 2^k + 5^2 \cdot 5^{k-1} \\
 &= 2^{k+2} + 5^{k+1}
 \end{aligned}$$

- (13) Sea  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}_0}$  la sucesión definida recursivamente por

$$\begin{cases} a_0 = 1, \\ a_1 = 1, \\ a_n = 3a_{n-1} + (n-1)(n-3)a_{n-2}, \text{ para } n \geq 2. \end{cases}$$

Probar que  $a_n = n!$  para todo  $n \in \mathbb{N}_0$ .

Rta: (Caso base) Para  $n = 0$  el resultado es verdadero pues  $a_0 = 1 = 0!$ .

Para  $n = 1$  el resultado es verdadero pues  $a_1 = 1 = 1!$ .

(Paso inductivo) Supongamos que  $k \geq 1$  y el resultado es cierto para los  $h$  tales que  $1 \leq h \leq k$ . Es decir que  $a_h = h!$  para  $1 \leq h \leq k$  y  $k \geq 1$  (hipótesis

inductiva), entonces debemos probar que  $a_{k+1} = (k+1)!$ . Ahora bien,

$$\begin{aligned}
 a_{k+1} &= 3a_{k+1-1} + (k+1-1)(k+1-3)a_{k+1-2} && \text{(por definición recursiva)} \\
 &= 3a_k + k(k-2)a_{k-1} \\
 &= 3k! + k(k-2)(k-1)! && \text{(por hipótesis inductiva)} \\
 &= 3k! + (k-2)k! \\
 &= (3+k-2)k! \\
 &= (k+1)k! \\
 &= (k+1)!
 \end{aligned}$$

(14) Sea  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}_0}$  la sucesión definida recursivamente por

$$\begin{cases} a_0 = 0, \\ a_1 = 7, \\ a_n = 5a_{n-1} + 6a_{n-2}, \text{ para } n \geq 2. \end{cases}$$

Probar que  $a_n = 6^n + (-1)^{n+1}$  para todo  $n \in \mathbb{N}_0$ .

*Rta: (Caso base)* Para  $n = 0$  el resultado es verdadero pues  $a_0 = 0 = 6^0 + (-1)^1 = 1 - 1$ .

Para  $n = 1$  el resultado es verdadero pues  $a_1 = 7 = 6^1 + (-1)^{1+1} = 6 + 1$ .

*(Paso inductivo)* Supongamos que  $k \geq 1$  y el resultado es cierto para los  $h$  tales que  $1 \leq h \leq k$ . Es decir que  $a_h = 6^h + (-1)^{h+1}$  para  $1 \leq h \leq k$  y  $k \geq 2$  (hipótesis inductiva), entonces debemos probar que  $a_{k+1} = 6^{k+1} + (-1)^{k+2}$ . Ahora bien,

$$\begin{aligned}
 a_{k+1} &= 5a_{k+1-1} + 6a_{k+1-2} && \text{(por definición recursiva)} \\
 &= 5a_k + 6a_{k-1} \\
 &= 5(6^k + (-1)^{k+1}) + 6(6^{k-1} + (-1)^{k-1+1}) && \text{(por hipótesis inductiva)} \\
 &= 5(6^k + (-1)^{k+1}) + 6(6^{k-1} + (-1)^k) \\
 &= 5 \cdot 6^k + (-1)^{k+1}5 + 6 \cdot 6^{k-1} + (-1)^k6 \\
 &= 5 \cdot 6^k + 6^k + (-1)^k(-1)5 + (-1)^k6 \\
 &= (5+1) \cdot 6^k + (-1)^k((-1)5 + 6) \\
 &= 6 \cdot 6^k + (-1)^k \\
 &= 6^{k+1} + (-1)^{k+2} && ((-1)^{k+2} = (-1)^2(-1)^k = (-1)^k)
 \end{aligned}$$

(15) Sea  $u_n$  definida recursivamente por:  $u_1 = 2$ ,  $u_n = 2 + \sum_{i=1}^{n-1} 2^{n-2i} u_i \quad \forall n > 1$ .

a) Calcule  $u_2$  y  $u_3$ .

$$\text{Rta: } u_2 = 2 + \sum_{i=1}^1 2^{2-2i} u_i = 2 + 2^{2-2} u_1 = 2 + u_1 = 4.$$

$$u_3 = 2 + \sum_{i=1}^2 2^{3-2i} u_i = 2 + 2^{3-2} u_1 + 2^{3-4} u_2 = 2 + 2^1 2 + 2^{-1} 4 = 8.$$

b) Proponga una fórmula para el término general  $u_n$  y pruébela por inducción.

$$\text{Rta: Calculemos el cuarto término de la sucesión: } u_4 = 2 + \sum_{i=1}^3 2^{4-2i} u_i = 2 + 2^{4-2} u_1 + 2^{4-4} u_2 + 2^{4-6} u_3 = 2 + 2^2 2 + 2^0 4 + 2^{-2} 8 = 16.$$

Entonces tenemos que  $u_1 = 2 = 2^1$ ,  $u_2 = 4 = 2^2$ ,  $u_3 = 8 = 2^3$ . Esto nos indica que debería ser  $u_n = 2^n$ . y lo haremos por inducción completa.

*(Caso base)* Para  $n = 2$ , por a), se cumple  $u_2 = 4 = 2^2$ .



(Paso inductivo) Supongamos que  $k \geq 1$  y el resultado es cierto para los  $h$  tales que  $1 \leq h \leq k$ , es decir  $u_h = 2^h$  para  $1 \leq h \leq k$ . Debemos probar que  $u_{k+1} = 2^{k+1}$ . Ahora bien

$$\begin{aligned} u_{k+1} &= 2 + \sum_{i=1}^{k+1-1} 2^{k+1-2i} u_i \quad (\text{por definici3n recursiva}) \\ &= 2 + \sum_{i=1}^k 2^{k+1-2i} u_i \\ &= 2 + 2(\sum_{i=1}^k 2^{k-2i} u_i) \end{aligned}$$

Observar que  $u_k = 2 + \sum_{i=1}^{k-1} 2^{k-2i} u_i$ , luego

$$\sum_{i=1}^{k-1} 2^{k-2i} u_i = u_k - 2. \quad (*)$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} u_{k+1} &= 2 + 2(\sum_{i=1}^k 2^{k-2i} u_i) \\ &= 2 + 2(\sum_{i=1}^{k-1} 2^{k-2i} u_i + 2^{k-2k} u_k) \quad (\text{por def. recursiva de } \sum) \\ &= 2 + 2(u_k - 2 + 2^{-k} u_k) \quad (\text{por } (*)) \\ &= 2 + 2(2^k - 2 + 2^{-k} 2^k) \quad (\text{por (HI)}) \\ &= 2 + 2(2^k - 1) \\ &= 2 + 2 \cdot 2^k - 2 \\ &= 2^{k+1} \end{aligned}$$

(16) Las siguientes proposiciones no son v3lidas para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Indicar en qu3 paso del principio de inducci3n falla la demostraci3n:

a)  $n = n^2$ .

Rta: Para el caso base no falla pues  $1 = 1^2$ , pero cuando queremos hacer el paso inductivo tenemos

$$k + 1 \stackrel{\text{(HI)}}{=} k^2 + 1 \neq (k + 1)^2.$$

b)  $n = n + 1$ . Rta: No vale en el caso base:  $1 \neq 1 + 1$ .

c)  $3^n = 3^{n+2}$ . Rta: No vale en el caso base:  $3^1 = 3 \neq 27 = 3^3$ .

d)  $3^{3n} = 3^{n+2}$ .

Rta: La afirmaci3n vale en el caso base pues  $3^{3 \cdot 1} = 3^{1+2}$ . En el paso inductivo debemos probar que si vale  $3^{3k} = 3^{k+2}$ , entonces se cumple  $3^{3(k+1)} = 3^{(k+1)+3}$ . Sin embargo, usando la (HI) obtenemos:

$$3^{3(k+1)} = 3^{3k+3} = 3^{3k} 3^3 \stackrel{\text{(HI)}}{=} 3^{k+2} 3^3 = 3^{k+5}.$$

Por otro lado  $3^{(k+1)+2} = 3^{k+3}$ . Deber3amos probar entonces que  $3^{k+5} = 3^{k+3}$ , pero esto es falso pues dividiendo por  $3^{k+3}$  obtenemos  $3^2 = 1$ , lo cual es absurdo.