Matemática Discreta I
Clase 2 - Ordenando los enteros

FAMAF / UNC

18 de marzo de 2021

- El orden natural de los enteros es tan importante como sus propiedades aritméticas.
- Expresamos la idea de orden formalmente diciendo que existe una relación que indicamos "$<$".
- Solo cuatro axiomas se necesitan para especificar las propiedades básicas del símbolo $<$.

Observación

Si $a, b \in \mathbb{Z}$, $a < b$ se lee:

$$a \textit{ es menor que } b \quad \text{o también} \quad b \textit{ es mayor que } a.$$

Axiomas de orden

I1) *Ley de tricotomía.* Vale una y sólo una de las relaciones siguientes:

$$a < b, \qquad a = b, \qquad b < a.$$

I2) *Ley transitiva.* Si $a < b$ y $b < c$, entonces $a < c$.

I3) *Compatibilidad de la suma con el orden.* Si $a < b$, entonces $a + c < b + c$.

I4) *Compatibilidad del producto con el orden.* Si $a < b$ y $0 < c$, entonces $ac < bc$.

Esta claro que podemos definir los otros símbolos de orden $>$, $\leq$ y $\geq$, en términos de los símbolos $<$ e $=$.

- $(>)$ Diremos que $m > n$ si $n < m$.
- $(\leq)$ Diremos que $m \leq n$ si $m < n$ o $m = n$.
- $(\geq)$ Diremos que $m \geq n$ si $m > n$ o $m = n$.

Es importante notar que el axioma (**I11**) tiene una versión valedera para estos nuevos símbolos.

- ($>$) Si $a > b$ y $c > 0$, entonces $ac > bc$.
- ($\leq$) Si $a \leq b$ y $0 \leq c$, entonces $ac \leq bc$.
- ($\geq$) Si $a \geq b$ y $c \geq 0$, entonces $ac \geq bc$.

Usando las definiciones de $\geq$, $<$, $>$ y el axioma (**I11**) original es muy sencillo demostrar estas variantes.

El axioma (**I11**) tiene nuevas variante cuando consideramos la multiplicación de una desigualdád por enteros negativos.

Proposición

Sean $a, b, c \in \mathbb{Z}$.

a) *Si* $c < 0$, *entonces* $0 < -c$.

b) *Si* $a < b$ *y* $c < 0$, *entonces* $ac > bc$.

La demostración pueden verla en el apunte (proposición 1.2.1).

Usando esta proposición y la definición de $>$, $\leq$, $\geq$ podemos hacer más variantes del axioma (**I11**) (¡16 en total!). Todas ellas bastante obvias.

Ejemplo

Sean $a, b, c \in \mathbb{Z}$. Entonces,

$$a \geq b \ \wedge \ c < 0 \quad \Rightarrow \quad ac \leq bc.$$

Demostración

Como $a \geq b$, tenemos que $a > b$ o $a = b$.

Si $a > b$, entonces $b < a$. Como $c < 0 \Rightarrow bc > ac \Rightarrow ac < bc \Rightarrow ac \leq bc$.

Si $a = b$, entonces $ac = bc \Rightarrow ac \leq bc$. $\square$

Ya hemos usado (en axioma **I4**) el símbolo $\neq$ que denota "*no* es igual a " o bien "es distinto a". En general, cuando tachemos un símbolo, estamos indicando la negación de la relación que define. Por ejemplo, $a \not< b$ denota "a *no* es menor que b".

Observación

Demostremos que $a \not< b$ es equivalente a $a \geq b$: por la ley de tricotomía axioma (**I8**) tenemos que solo vale una y solo una de las siguientes afirmaciones

$$a < b, \qquad a = b, \qquad b < a.$$

Como $a \not< b$, entonces vale una de las dos afirmaciones siguientes, $a = b$ o $b < a$, es decir vale que $a \geq b$. De forma análoga se prueba que $a \not\leq b$ si y sólo si $a > b$, $a \not> b$ si y sólo si $a \leq b$ y $a \not\geq b$ si y sólo si $a < b$.

$\leq$ es una relación de orden

Sean a, b y c enteros arbitrarios. Es posible demostrar las siguiente propiedades de $\leq$:

O1) *Reflexividad.* $a \leq a$.

O2) *Antisimetría.* Si $a \leq b$ y $b \leq a$, entonces $a = b$.

O3) *Transitividad.* Si $a \leq b$ y $b \leq c$, entonces $a \leq c$.

Las demostraciones no son difíciles y las dejamos como ejercicios (se encuentran en el apunte).

Una relación que satisfaga las tres propiedades anteriores (reflexividad, antisimetría y transitividad) es llamada *una relación de orden*.

Observar que $<$ *no* es una relación de orden, en el sentido de la definición anterior.

A primera vista podría parecer que ya tenemos todas las propiedades que necesitamos de $\mathbb{Z}$, pero, sorprendentemente, aún falta un axioma de vital importancia.

Observemos, que todos los axiomas que enunciamos también los cumplen los números racionales $\mathbb{Q}$ y los números reales $\mathbb{R}$.

¿Cuál es la diferencia *fundamental* entre $\mathbb{Z}$ y $\mathbb{Q}$ o $\mathbb{R}$?

Figura: El dibujo correcto de $\mathbb{Z}$.

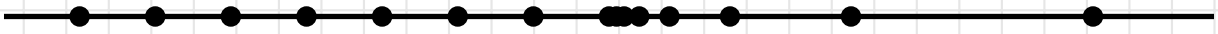

Figura: El dibujo incorrecto de $\mathbb{Z}$.

Axioma de buena ordenación

Supongamos que X es un subconjunto de $\mathbb{Z}$; entonces diremos que el entero b es una *cota inferior* de X si

$$b \leq x \qquad \text{para todo} \;\; x \in X.$$

Algunos subconjuntos no tienen cotas inferiores: por ejemplo, el conjunto de los enteros negativos $-1, -2, -3, \ldots$, claramente no tiene cota inferior.

Definición

Una cota inferior de un conjunto X que es a su vez es un elemento de X, es conocido como el *mínimo* de X.

Axioma de buena ordenación

Nuestro último axioma para $\mathbb{Z}$ afirma algo que es (aparentemente) una propiedad obvia.

I12) Si X es un subconjunto de $\mathbb{Z}$ que no es vacío y tiene una cota inferior, entonces X tiene un mínimo.

El axioma (**I12**) es conocido como el *axioma de buena ordenación* o *axioma del buen orden* o *principio de buena ordenación*.

Observar que $\mathbb{Q}$ o $\mathbb{R}$ con $<$ *no* satisfacen el axioma de buena ordenación.

El hecho de que haya espacios vacíos entre los enteros nos lleva a decir que el conjunto $\mathbb{Z}$ es *discreto* y es esta propiedad la que da origen al nombre "matemática discreta".

En cálculo y análisis, los procesos de límite son de fundamental importancia, y es preciso usar aquellos sistemas numéricos que son *continuos*, en vez de los discretos.

Repitamos los gráficos de la p. 10

Figura: El dibujo correcto de $\mathbb{Z}$.

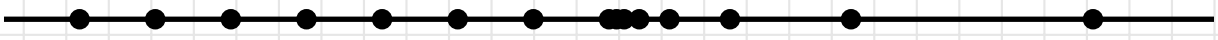

Figura: El dibujo incorrecto de $\mathbb{Z}$.

El siguiente resultado es obvio, pero debe ser demostrado.

Proposición

1 *es el menor entero mayor que* 0*.*

Es posible hacer la demostración con las herramientas que ya poseemos (si no ¡faltaría algún axioma!).

Sin embargo, la demostración es relativamente compleja y el estudiante interesado la puede ver en el apunte.