Matemática Discreta I
Clase 5 - Ejercicios de inducción

FAMAF / UNC

31 de marzo de 2022

Ejercicio (Serie aritmética)

Probar que
$$1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2},$$
para $n \in \mathbb{N}$.

Ejercicio (Serie aritmética)

Probar que

$$1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2},$$

para $n \in \mathbb{N}$.

Demostración

Ejercicio (Serie aritmética)

Probar que

$$1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2},$$

para $n \in \mathbb{N}$.

Demostración

(*Caso base*) El resultado es verdadero cuando $n = 1$ pues $1 = \frac{1\cdot(1+1)}{2}$.

(*Paso inductivo*)

(*Paso inductivo*)

Supongamos que el resultado verdadero cuando $n = k$, o sea, que

$$\sum_{i=1}^{k} i = \frac{k(k+1)}{2} \quad \text{hipótesis inductiva (HI).}$$

(*Paso inductivo*)

Supongamos que el resultado verdadero cuando $n = k$, o sea, que

$$\sum_{i=1}^{k} i = \frac{k(k+1)}{2} \quad \text{hipótesis inductiva (HI).}$$

En el paso inductivo queremos probar que

$$\sum_{i=1}^{k} i = \frac{k(k+1)}{2} \quad \Rightarrow \quad \sum_{i=1}^{k+1} i = \frac{(k+1)(k+2)}{2}.$$

Entonces

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{k+1} i &= \sum_{i=0}^{k} i + (k+1) && \text{(por la definición recursiva de } \textstyle\sum) \\
&= \frac{k(k+1)}{2} + (k+1) && \text{(por hipótesis inductiva)} \\
&= (k+1)(\frac{k}{2}+1)) && ((k+1) \text{ factor común}) \\
&= (k+1)\frac{(k+2)}{2}. \\
&= \frac{(k+1)(k+2)}{2}.
\end{aligned}$$

Entonces

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{k+1} i &= \sum_{i=0}^{k} i + (k+1) && \text{(por la definición recursiva de } \textstyle\sum) \\
&= \frac{k(k+1)}{2} + (k+1) && \text{(por hipótesis inductiva)} \\
&= (k+1)(\frac{k}{2}+1)) && ((k+1) \text{ factor común}) \\
&= (k+1)\frac{(k+2)}{2}. \\
&= \frac{(k+1)(k+2)}{2}.
\end{aligned}
$$

Luego el resultado es verdadero cuando $n = k+1$ y por el principio de inducción, es verdadero para todos los enteros positivos n. □

Ejercicio (Serie geométrica)

Probar que

$$1 + q + q^2 + \cdots + q^n = \sum_{i=0}^{n} q^i = \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1},$$

para $n \in \mathbb{N}_0$, $q > 0$ y $q \neq 1$.

Ejercicio (Serie geométrica)

Probar que

$$1 + q + q^2 + \cdots + q^n = \sum_{i=0}^{n} q^i = \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1},$$

para $n \in \mathbb{N}_0$, $q > 0$ y $q \neq 1$.

Demostración

Ejercicio (Serie geométrica)

Probar que

$$1 + q + q^2 + \cdots + q^n = \sum_{i=0}^{n} q^i = \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1},$$

para $n \in \mathbb{N}_0$, $q > 0$ y $q \neq 1$.

Demostración

(*Caso base*) El resultado es verdadero cuando $n = 0$ pues

$$q^0 = 1 = \frac{q^{0+1} - 1}{q - 1}.$$

(*Paso inductivo*) Supongamos que el resultado verdadero cuando $n = k$, o sea, que

$$\sum_{i=0}^{k} q^i = \frac{q^{k+1} - 1}{q - 1}, \quad \text{hipótesis inductiva (HI).}$$

(*Paso inductivo*) Supongamos que el resultado verdadero cuando $n = k$, o sea, que

$$\sum_{i=0}^{k} q^i = \frac{q^{k+1} - 1}{q - 1}, \quad \text{hipótesis inductiva (HI).}$$

En el paso inductivo queremos probar que

$$\sum_{i=0}^{k} q^i = \frac{q^{k+1} - 1}{q - 1} \quad \Rightarrow \quad \sum_{i=0}^{k+1} q^i = \frac{q^{k+2} - 1}{q - 1}.$$

Entonces

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{k+1} q^i &= \sum_{i=0}^{k} q^i + q^{k+1} && \text{(por la definición recursiva)}\\
&= \frac{q^{k+1}-1}{q-1} + q^{k+1} && \text{(por hipótesis inductiva)}\\
&= \frac{q^{k+1}-1+(q-1)q^{k+1}}{q-1}\\
&= \frac{q^{k+1}-1+q\cdot q^{k+1}-q^{k+1}}{q-1}\\
&= \frac{q^{k+2}-1}{q-1}
\end{aligned}$$

Entonces

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{k+1} q^i &= \sum_{i=0}^{k} q^i + q^{k+1} && \text{(por la definición recursiva)} \\
&= \frac{q^{k+1}-1}{q-1} + q^{k+1} && \text{(por hipótesis inductiva)} \\
&= \frac{q^{k+1}-1+(q-1)q^{k+1}}{q-1} \\
&= \frac{q^{k+1}-1+q\cdot q^{k+1}-q^{k+1}}{q-1} \\
&= \frac{q^{k+2}-1}{q-1}
\end{aligned}
$$

Luego el resultado es verdadero cuando $n = k+1$ y por el principio de inducción, es verdadero para todos los enteros positivos n. □

Ejercicio

Probar que

$$(1 + 2 + 3 + \cdots + n)^2 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3,$$

para $n \in \mathbb{N}$.

Ejercicio

Probar que

$$(1+2+3+\cdots+n)^2 = 1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3,$$

para $n \in \mathbb{N}$.

Demostración

Ejercicio

Probar que

$$(1+2+3+\cdots+n)^2 = 1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3,$$

para $n \in \mathbb{N}$.

Demostración

Para probar esto primero debemos usar el resultado de la página 2 que nos dice que

$$(1+2+3+\cdots+n)^2 = \left(\sum_{i=1}^{n} i\right)^2 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}.$$

Ejercicio

Probar que

$$(1+2+3+\cdots+n)^2 = 1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3,$$

para $n \in \mathbb{N}$.

Demostración

Para probar esto primero debemos usar el resultado de la página 2 que nos dice que

$$(1+2+3+\cdots+n)^2 = \left(\sum_{i=1}^{n} i\right)^2 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}.$$

Luego debemos probar que

$$\sum_{i=1}^{n} i^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}.$$

(*Caso base*)

(*Caso base*) El resultado es verdadero cuando $n = 1$ pues

$$\sum_{i=1}^{1} i^3 = 1 \quad \text{y} \quad \frac{1^2(1+1)^2}{4} = \frac{4}{4} = 1.$$

(*Caso base*)El resultado es verdadero cuando $n = 1$ pues

$$\sum_{i=1}^{1} i^3 = 1 \quad \text{y} \quad \frac{1^2(1+1)^2}{4} = \frac{4}{4} = 1.$$

(*Paso inductivo*)

(*Caso base*)El resultado es verdadero cuando $n = 1$ pues

$$\sum_{i=1}^{1} i^3 = 1 \quad \text{y} \quad \frac{1^2(1+1)^2}{4} = \frac{4}{4} = 1.$$

(*Paso inductivo*)Debemos probar que si $k \geq 1$,

$$\sum_{i=0}^{k} i^3 = \frac{k^2(k+1)^2}{4} \quad \text{(HI)} \qquad \Rightarrow \quad \sum_{i=0}^{k+1} i^3 = \frac{(k+1)^2(k+2)^2}{4}.$$

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{k+1} i^3 &= \sum_{i=0}^{k} i^3 + (k+1)^3 && \text{(por la definición recursiva de } \textstyle\sum\text{)} \\
&= \frac{k^2(k+1)^2}{4} + (k+1)^3 && \text{(por hipótesis inductiva)} \\
&= (k+1)^2\left(\frac{k^2}{4} + (k+1)\right) && \text{(}(k+1)^2\text{ factor común)} \\
&= (k+1)^2\frac{(k^2+4k+4)}{4}. \\
&= \frac{(k+1)^2(k+2)^2}{4}.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{k+1} i^3 &= \sum_{i=0}^{k} i^3 + (k+1)^3 && \text{(por la definición recursiva de } \textstyle\sum\text{)} \\
&= \frac{k^2(k+1)^2}{4} + (k+1)^3 && \text{(por hipótesis inductiva)} \\
&= (k+1)^2\left(\frac{k^2}{4} + (k+1)\right) && \text{((}k+1)^2 \text{ factor común)} \\
&= (k+1)^2 \frac{(k^2+4k+4)}{4}. \\
&= \frac{(k+1)^2(k+2)^2}{4}.
\end{aligned}
$$

Luego el resultado es verdadero cuando $n = k + 1$ y por el principio de inducción, es verdadero para todos los enteros positivos n. $\square$

Inducción completa

Ejercicio

Sea u_n definida recursivamente por:

$$u_0 = 1,\ u_1 = 0, \qquad u_n = 5u_{n-1} - 6u_{n-2},\ \forall n \geq 2.$$

1. Calcule u_2 y u_3 usando recursión.
2. Pruebe por inducción que $u_n = 3 \cdot 2^n - 2 \cdot 3^n$ $(n \in \mathbb{N}_0)$.

Inducción completa

Ejercicio

Sea u_n definida recursivamente por:

$$u_0 = 1,\ u_1 = 0, \qquad u_n = 5u_{n-1} - 6u_{n-2},\ \forall n \geq 2.$$

1. Calcule u_2 y u_3 usando recursión.
2. Pruebe por inducción que $u_n = 3 \cdot 2^n - 2 \cdot 3^n$ $(n \in \mathbb{N}_0)$.

Solución

Inducción completa

Ejercicio

Sea u_n definida recursivamente por:

$$u_0 = 1, \; u_1 = 0, \qquad u_n = 5u_{n-1} - 6u_{n-2}, \; \forall n \geq 2.$$

1. Calcule u_2 y u_3 usando recursión.
2. Pruebe por inducción que $u_n = 3 \cdot 2^n - 2 \cdot 3^n$ $(n \in \mathbb{N}_0)$.

Solución

1. Por definición $u_0 = 1, \; u_1 = 0$, luego:

$$u_2 = 5u_{2-1} - 6u_{2-2} = 5u_1 - 6u_0 = 5 \cdot 0 - 6 \cdot 1 = -6$$

Ejercicio

Sea u_n definida recursivamente por:

$$u_0 = 1, \ u_1 = 0, \qquad u_n = 5u_{n-1} - 6u_{n-2}, \ \forall n \geq 2.$$

1. Calcule u_2 y u_3 usando recursión.
2. Pruebe por inducción que $u_n = 3 \cdot 2^n - 2 \cdot 3^n$ $(n \in \mathbb{N}_0)$.

Solución

1. Por definición $u_0 = 1, \ u_1 = 0$, luego:

$$u_2 = 5u_{2-1} - 6u_{2-2} = 5u_1 - 6u_0 = 5 \cdot 0 - 6 \cdot 1 = -6$$

Ahora $u_1 = 0, \ u_2 = -6$, luego:

Ejercicio

Sea u_n definida recursivamente por:

$$u_0 = 1, \ u_1 = 0, \qquad u_n = 5u_{n-1} - 6u_{n-2}, \ \forall n \geq 2.$$

1. Calcule u_2 y u_3 usando recursión.
2. Pruebe por inducción que $u_n = 3 \cdot 2^n - 2 \cdot 3^n$ $(n \in \mathbb{N}_0)$.

Solución

1. Por definición $u_0 = 1, \ u_1 = 0$, luego:

$$u_2 = 5u_{2-1} - 6u_{2-2} = 5u_1 - 6u_0 = 5 \cdot 0 - 6 \cdot 1 = -6$$

Ahora $u_1 = 0, \ u_2 = -6$, luego:

$$u_3 = 5u_{3-1} - 6u_{3-2} = 5u_2 - 6u_1 = 5 \cdot (-6) - 6 \cdot 0 = -30.$$

2. (*Caso base*)

2. (*Caso base*)

Por un lado $u_0 = 1$, por definición, por otro lado si calculamos con la fórmula: $u_0 = 3 \cdot 2^0 - 2 \cdot 3^0 = 3 - 2 = 1$ y listo.

2. (*Caso base*)

Por un lado $u_0 = 1$, por definición, por otro lado si calculamos con la fórmula: $u_0 = 3 \cdot 2^0 - 2 \cdot 3^0 = 3 - 2 = 1$ y listo.

Por un lado $u_1 = 0$, por definición, por otro lado si calculamos con la fórmula: $u_1 = 3 \cdot 2^1 - 2 \cdot 3^1 = 3 \cdot 2 - 2 \cdot 3 = 6 - 6 = 0$ y listo.

2. (*Caso base*)

Por un lado $u_0 = 1$, por definición, por otro lado si calculamos con la fórmula: $u_0 = 3 \cdot 2^0 - 2 \cdot 3^0 = 3 - 2 = 1$ y listo.

Por un lado $u_1 = 0$, por definición, por otro lado si calculamos con la fórmula: $u_1 = 3 \cdot 2^1 - 2 \cdot 3^1 = 3 \cdot 2 - 2 \cdot 3 = 6 - 6 = 0$ y listo.

(*Paso inductivo*)

2. (*Caso base*)

Por un lado $u_0 = 1$, por definición, por otro lado si calculamos con la fórmula: $u_0 = 3 \cdot 2^0 - 2 \cdot 3^0 = 3 - 2 = 1$ y listo.

Por un lado $u_1 = 0$, por definición, por otro lado si calculamos con la fórmula: $u_1 = 3 \cdot 2^1 - 2 \cdot 3^1 = 3 \cdot 2 - 2 \cdot 3 = 6 - 6 = 0$ y listo.

(*Paso inductivo*)

Debemos probar que si vale

$$u_h = 3 \cdot 2^h - 2 \cdot 3^h \quad \text{para} \quad 0 \leq h \leq k \quad \text{con} \quad k \geq 1, \qquad \text{(HI)}$$

2. (*Caso base*)

Por un lado $u_0 = 1$, por definición, por otro lado si calculamos con la fórmula: $u_0 = 3 \cdot 2^0 - 2 \cdot 3^0 = 3 - 2 = 1$ y listo.

Por un lado $u_1 = 0$, por definición, por otro lado si calculamos con la fórmula: $u_1 = 3 \cdot 2^1 - 2 \cdot 3^1 = 3 \cdot 2 - 2 \cdot 3 = 6 - 6 = 0$ y listo.

(*Paso inductivo*)

Debemos probar que si vale

$$u_h = 3 \cdot 2^h - 2 \cdot 3^h \quad \text{para} \quad 0 \leq h \leq k \quad \text{con} \quad k \geq 1, \tag{HI}$$

eso implica que

$$u_{k+1} = 3 \cdot 2^{k+1} - 2 \cdot 3^{k+1}. \tag{*}$$

Comenzamos por el lado izquierdo de (*):

$$\begin{aligned} u_{k+1} &= 5u_{k+1-1} - 6u_{k+1-2} && \text{(def. } u_n\text{)} \\ &= 5u_k - 6u_{k-1} \\ &= 5(3 \cdot 2^k - 2 \cdot 3^k) - 6(3 \cdot 2^{k-1} - 2 \cdot 3^{k-1}) && \text{(por HI)} \end{aligned}$$

En lo que se refiere al procedimiento de inducción hemos terminado, ahora solo queda por probar que

$$5(3 \cdot 2^k - 2 \cdot 3^k) - 6(3 \cdot 2^{k-1} - 2 \cdot 3^{k-1}) = 3 \cdot 2^{k+1} - 2 \cdot 3^{k+1} \qquad (**)$$

Desarrollemos el término de la izquierda

Comenzamos por el lado izquierdo de (*):

$$\begin{aligned} u_{k+1} &= 5u_{k+1-1} - 6u_{k+1-2} && \text{(def. } u_n) \\ &= 5u_k - 6u_{k-1} \\ &= 5(3 \cdot 2^k - 2 \cdot 3^k) - 6(3 \cdot 2^{k-1} - 2 \cdot 3^{k-1}) && \text{(por HI)} \end{aligned}$$

En lo que se refiere al procedimiento de inducción hemos terminado, ahora solo queda por probar que

$$5(3 \cdot 2^k - 2 \cdot 3^k) - 6(3 \cdot 2^{k-1} - 2 \cdot 3^{k-1}) = 3 \cdot 2^{k+1} - 2 \cdot 3^{k+1} \qquad (**)$$

Desarrollemos el término de la izquierda

$$\begin{aligned} &= 5(3 \cdot 2^k - 2 \cdot 3^k) - 6(3 \cdot 2^{k-1} - 2 \cdot 3^{k-1}) \\ &= 5 \cdot 3 \cdot 2^k - 5 \cdot 2 \cdot 3^k - 6 \cdot 3 \cdot 2^{k-1} + 6 \cdot 2 \cdot 3^{k-1} \\ &= 5 \cdot 3 \cdot 2^k - 5 \cdot 2 \cdot 3^k - 3 \cdot 3 \cdot 2^k + 2 \cdot 2 \cdot 3^k \\ &= 6 \cdot 2^k - 6 \cdot 3^k \end{aligned}$$

Comenzamos por el lado izquierdo de (*):

$$\begin{aligned} u_{k+1} &= 5u_{k+1-1} - 6u_{k+1-2} && \text{(def. } u_n) \\ &= 5u_k - 6u_{k-1} \\ &= 5(3\cdot 2^k - 2\cdot 3^k) - 6(3\cdot 2^{k-1} - 2\cdot 3^{k-1}) && \text{(por HI)} \end{aligned}$$

En lo que se refiere al procedimiento de inducción hemos terminado, ahora solo queda por probar que

$$5(3\cdot 2^k - 2\cdot 3^k) - 6(3\cdot 2^{k-1} - 2\cdot 3^{k-1}) = 3\cdot 2^{k+1} - 2\cdot 3^{k+1} \qquad (**)$$

Desarrollemos el término de la izquierda

$$\begin{aligned} &= 5(3\cdot 2^k - 2\cdot 3^k) - 6(3\cdot 2^{k-1} - 2\cdot 3^{k-1}) \\ &= 5\cdot 3\cdot 2^k - 5\cdot 2\cdot 3^k - 6\cdot 3\cdot 2^{k-1} + 6\cdot 2\cdot 3^{k-1} \\ &= 5\cdot 3\cdot 2^k - 5\cdot 2\cdot 3^k - 3\cdot 3\cdot 2^k + 2\cdot 2\cdot 3^k \\ &= 6\cdot 2^k - 6\cdot 3^k \end{aligned}$$

Luego (**) se transforma en

$$6 \cdot 2^k - 6 \cdot 3^k = 3 \cdot 2^{k+1} - 2 \cdot 3^{k+1} \qquad (***)$$
$$\Updownarrow$$
$$3 \cdot 2 \cdot 2^k - 2 \cdot 3 \cdot 3^k = 3 \cdot 2^{k+1} - 2 \cdot 3^{k+1}$$
$$\Updownarrow$$
$$3 \cdot 2^{k+1} - 2 \cdot 3^{k+1} = 3 \cdot 2^{k+1} - 2 \cdot 3^{k+1}.$$

Como esto último es verdadero, es verdadero (***) y por lo tanto son verdaderos (**) y (*).

$\square$

Nos adelantamos un poco en los temas de la materia para ejemplificar el principio de inducción completa.

Nos adelantamos un poco en los temas de la materia para ejemplificar el principio de inducción completa.

Definición

Sea $n \in \mathbb{N}$ diremos que es *primo* si $n \neq 1$ y el único natural menor que lo divide es 1.

Nos adelantamos un poco en los temas de la materia para ejemplificar el principio de inducción completa.

Definición

Sea $n \in \mathbb{N}$ diremos que es *primo* si $n \neq 1$ y el único natural menor que lo divide es 1.

Ejercicio

Probar que si $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$, entonces n es producto de primos.

Nos adelantamos un poco en los temas de la materia para ejemplificar el principio de inducción completa.

Definición

Sea $n \in \mathbb{N}$ diremos que es *primo* si $n \neq 1$ y el único natural menor que lo divide es 1.

Ejercicio

Probar que si $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$, entonces n es producto de primos.

Demostración

Nos adelantamos un poco en los temas de la materia para ejemplificar el principio de inducción completa.

Definición

Sea $n \in \mathbb{N}$ diremos que es *primo* si $n \neq 1$ y el único natural menor que lo divide es 1.

Ejercicio

Probar que si $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$, entonces n es producto de primos.

Demostración

Lo haremos por inducción en $n \geq 2$.

(*Caso base*)

(*Caso base*)

El caso base es $n = 2$, y es claro que 2 es primo (y por lo tanto producto de primos en un sentido generalizado).

(*Caso base*)

El caso base es $n = 2$, y es claro que 2 es primo (y por lo tanto producto de primos en un sentido generalizado).

(*Paso inductivo*)

(*Caso base*)

El caso base es $n = 2$, y es claro que 2 es primo (y por lo tanto producto de primos en un sentido generalizado).

(*Paso inductivo*)

Probaremos que dado $k > 1$,

$$\text{todo } h \text{ tal que } 2 \leq h \leq k, \text{ es producto de primos (HI)}$$

$$\Downarrow$$

$$k + 1 \text{ es producto de primos.}$$

Si $k+1$ es primo, listo, es producto de primos.

Si $k+1$ es primo, listo, es producto de primos.

Si $k+1$ no es primo, significa que $k+1 = d \cdot e$ donde $d, e < k+1$.

Si $k + 1$ es primo, listo, es producto de primos.

Si $k + 1$ no es primo, significa que $k + 1 = d \cdot e$ donde $d, e < k + 1$.

Por (HI), d y e son productos de primos, es decir

$$
\begin{aligned}
d &= p_1 \cdot p_2 \cdots p_r \\
e &= q_1 \cdot q_2 \cdots q_s
\end{aligned}
$$

donde p_i, q_i son primos.

Si $k+1$ es primo, listo, es producto de primos.

Si $k+1$ no es primo, significa que $k+1 = d \cdot e$ donde $d, e < k+1$.

Por (HI), d y e son productos de primos, es decir

$$\begin{aligned} d &= p_1 \cdot p_2 \cdots p_r \\ e &= q_1 \cdot q_2 \cdots q_s \end{aligned}$$

donde p_i, q_i son primos.Luego

$$k+1 = d \cdot e = p_1 \cdot p_2 \cdots p_r \cdot q_1 \cdot q_2 \cdots q_s.$$

Si $k+1$ es primo, listo, es producto de primos.

Si $k+1$ no es primo, significa que $k+1 = d \cdot e$ donde $d, e < k+1$.

Por (HI), d y e son productos de primos, es decir

$$d = p_1 \cdot p_2 \cdots p_r$$
$$e = q_1 \cdot q_2 \cdots q_s$$

donde p_i, q_i son primos.Luego

$$k+1 = d \cdot e = p_1 \cdot p_2 \cdots p_r \cdot q_1 \cdot q_2 \cdots q_s.$$

Por lo tanto $k+1$ es producto de primos. $\square$