Matemática Discreta I
Clase 7 - Conteo (2° parte)

FAMAF / UNC

7 de abril de 2022

Selecciones ordenadas sin repetición

X finito de n objetos.

¿De cuántas formas podemos elegir m objetos de X en forma ordenada?

Ejemplo

Elegir en forma ordenada y sin repetición 2 elementos del conjunto $X = \{a, b, c\}$, tenemos ab, ac, ba, bc, ca, cb, 6 elecciones.

Es decir si el conjunto es $X = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$, las selecciones deben ser del tipo

$$a_{i_1} a_{i_2} \cdots a_{i_m}$$

donde $a_{i_j} \neq a_{i_k}$ si $i \neq k$.

Por ejemplo, las selecciones de 3 elementos en forma ordenada y sin repetición de $\{1, 2, 3\}$ son exactamente

$$123,\ 132,\ 213,\ 231,\ 312,\ 321$$

(son las ternas donde los tres números son distintos).

O sea hay 6 selecciones ordenadas y sin repetición de elementos de $\{1, 2, 3\}$.

Notemos que:

1° elemento $\rightarrow$ 3 posibilidades: 1, 2, 3
2° elemento $\rightarrow$ 2 posibilidades: distinto al elegido en 1°
3° elemento $\rightarrow$ 1 posibilidades: distinto a los elegidos en 1° y 2°

Tenemos entonces $3 \cdot 2 \cdot 1 = 3!$ selecciones posibles.

Pensemos ahora que queremos elegir en forma ordenada y sin repetición 3 elementos entre 5. Entonces para la primera elección tenemos 5 posibilidades, para la segunda 4 posibilidades y para la tercera 3 posibilidades haciendo un total de

$$5 \cdot 4 \cdot 3$$

selecciones posibles.

Proposición

Si $n \geq m$ entonces existen

$$n \cdot (n-1) \cdots (n-m+1), \qquad (m \text{ - factores})$$

selecciones ordenadas y sin repetición de m elementos de un conjunto de n elementos.

Ejemplo

Si hay 10 personas ¿De cuántas formas puedo hacer una fila de 7 personas?

Solución.

Razonando,

$$\begin{array}{lccl} 1^\circ \text{ puesto} & \rightarrow & 10 & \text{posibilidades} \\ 2^\circ \text{ puesto} & \rightarrow & 9 & \text{posibilidades} \\ 3^\circ \text{ puesto} & \rightarrow & 8 & \text{posibilidades} \\ 4^\circ \text{ puesto} & \rightarrow & 7 & \text{posibilidades} \\ 5^\circ \text{ puesto} & \rightarrow & 6 & \text{posibilidades} \\ 6^\circ \text{ puesto} & \rightarrow & 5 & \text{posibilidades} \\ 7^\circ \text{ puesto} & \rightarrow & 4 & \text{posibilidades} \end{array}$$

La solución es entonces $10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4$. $\square$

Ejemplo (repetido)

Si hay 10 personas ¿De cuántas formas puedo hacer una fila de 7 personas?

Solución (aplicando la proposición de p. 4).

Cantidad de elementos: $\rightarrow$ $n = 10$

Cantidad de elecciones: $\rightarrow$ $m = 7$

Por lo tanto, $n - m + 1 = 10 - 7 + 1 = 4$.

La solución es entonces: $10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4$.

Observar que

$$
\begin{aligned}
10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 &= \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{3 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{10!}{3!} \\
&= \frac{10!}{(10-7)!}.
\end{aligned}
$$

$\square$

Ejemplo

¿Cómo elegir 4 elementos entre n?

Solución.

Razonando,

1° puesto	$\rightarrow$	n-1	posibilidades
2° puesto	$\rightarrow$	n-2	posibilidades
3° puesto	$\rightarrow$	n-3	posibilidades
4° puesto	$\rightarrow$	n-4	posibilidades

La solución es entonces

$$(n-1)(n-2)(n-3)(n-4) = \frac{(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)!}{(n-5)!}$$
$$= \frac{n!}{(n-5)!}$$

$\square$

En general

$$n \cdot (n-1) \cdots (n-m+1) = \frac{n \cdot (n-1) \cdots (n-m+1) \cdot (n-m) \cdots 2 \cdot 1}{(n-m) \cdots 2 \cdot 1}.$$

Es decir

$$n \cdot (n-1) \cdots (n-m+1) = \frac{n!}{(n-m)!}.$$

Por lo tanto podemos reescribir la proposición en forma mas compacta:

Proposición

Si $n \geq m$ entonces existen

$$\frac{n!}{(n-m)!}$$

selecciones ordenadas y sin repetición de m elementos de un conjunto de n elementos.

Ejemplo

Si en un colectivo hay 9 asientos vacíos.

¿De cuántas formas se pueden distribuir 3 pasajeros?
Lo que se está preguntando es cuantas posibles distribuciones de 3 asientos existen (no importa quien se sienta en cada asiento).

Solución

Se trata de ver cuantas selecciones ordenadas y sin repetición hay de 3 asientos entre 9.

Primero hagámoslo usando el principio de multiplicación:

- 1° persona: 9 lugares posibles. Total: 9
- 2° persona: 8 lugares posibles. Total: 9×8
- 3° persona: 7 lugares posibles. Total: $9 \times 8 \times 7$.

Este número es

$$9 \cdot 8 \cdot 7, \qquad 3 \text{ - factores.}$$

Podríamos haberlo hecho directamente por la proposición de la p. 9: elegir 3 elementos entre 9 son

$$\begin{aligned} \frac{9!}{(9-3)!} &= \frac{9!}{6!} \\ &= \frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} \\ &= 9 \cdot 8 \cdot 7 \end{aligned}$$

posibilidades. $\square$

Permutaciones

Hay

$$\frac{n!}{0!} = n!$$

selecciones ordenadas y sin repetición de n elementos en un conjunto con n elementos.

Las selecciones ordenadas y sin repetición de n elementos en un conjunto con n elementos se denominan *permutaciones* de grado n.

Hay, pues, $n!$ permutaciones de grado n.

Permutaciones

Respondamos la siguiente pregunta:

¿De cuantas formas puedo ordenar n objetos?

Observemos que, ordenar n objetos es equivalente a seleccionar ordenadamente y sin repetición los n objetos (de un conjunto con n objetos).

Por lo tanto, la respuesta es $n!$.

Ejemplo.

Dado el conjunto $\mathbb{I}_4 = \{1, 2, 3, 4\}$ ¿cuántas permutaciones de los elementos de $\mathbb{I}_4$ hay?

Solución. $4!$. $\square$

Ejemplo

¿Cuántas permutaciones pueden formarse con las letras de *silvia*?

Solución

Afirmamos que se pueden formar $\frac{6!}{2!}$ palabras usando las letras de *silvia*. Si escribo en lugar de *silvia*,

$$s\ i\ l\ v\ i'\ a$$

Es decir si cambio la segunda i por i', todas las letras son distintas, luego hay 6! permutaciones, pero cada par de permutaciones del tipo

$$\ldots i \ldots i' \ldots$$
$$\ldots i' \ldots i \ldots$$

coinciden, por lo tanto tengo que dividir por 2 el número total de permutaciones: $6!/2! = 360$. $\square$

Tomemos la palabra

$$ramanathan$$

el número total de permutaciones es

$$\frac{10!}{4!2!}.$$

En efecto, escribiendo el nombre anterior así

$$r_1 \ a_1 \ m_1 \ a_2 \ n_1 \ a_3 \ t_1 \ h_1 \ a_4 \ n_2$$

el número total de permutaciones es 10! Pero permutando las a_i y las n_i sin mover las otras letras obtenemos la misma permutación de *ramanathan*.

Como hay 4! permutaciones de las letras a_1, a_2, a_3, a_4, y 2! de n_1, n_2 el número buscado es

$$\frac{10!}{4!2!}.$$