

Matemática Discreta I

Clase 4 - Inducción

FAMAF / UNC

28 de marzo de 2023

El principio de inducción

Queremos analizar la suma de los primeros n números impares, es decir

$$1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1).$$

Por la definición recursiva de la sumatoria, tenemos que

$$a_1 = 1, \text{ y } a_n = a_{n-1} + 2n - 1,$$

Analicemos los primeros valores

- $a_1 = 1,$
- $a_2 = 1 + 3 = 4,$
- $a_3 = 1 + 3 + 5 = 9,$
- $a_4 = 1 + 3 + 5 + 7 = 16,$
- $a_5 = a_4 + 9 = 25,$

Entonces, podemos conjeturar que

$$1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1) = n^2.$$

Para convencernos de que la fórmula es ciertamente correcta procedemos de la siguiente manera

Caso $n=1$. La fórmula es verdadera cuando $n = 1$ puesto que $1 = 1^2$.

Paso recursivo. Supongamos que es correcta para un valor específico de n , digamos para $n = k$, de modo que

$$1 + 3 + 5 + \cdots + (2k - 1) = k^2. \quad (a)$$

Podemos utilizar (a) para simplificar la expresión definida recursivamente a la izquierda cuando n es igual a $k + 1$,

$$\begin{aligned} 1 + 3 + 5 + \cdots + (2k + 1) &= 1 + 3 + 5 + \cdots + (2k - 1) + (2k + 1) \\ &\stackrel{(a)}{=} k^2 + (2k + 1) \\ &= (k + 1)^2. \end{aligned}$$

Por lo tanto si el resultado es correcto cuando $n = k$, entonces lo es cuando $n = k + 1$.

Se comienza observando que si es correcto cuando $n = 1$, debe ser por lo tanto correcto cuando $n = 2$.

Con el mismo argumento como es correcto cuando $n = 2$ debe serlo cuando $n = 3$. Continuando de esta forma veremos que es correcto para todos los enteros positivos n .

La esencia de este argumento es comúnmente llamada *principio de inducción*.

Con S denotemos al subconjunto de \mathbb{N} para el cual el resultado es correcto: por supuesto, nuestra intención es probar que S es todo \mathbb{N} .

Teorema

Supongamos que S es un subconjunto de \mathbb{N} que satisface las condiciones

- a) $1 \in S$,*
- b) para cada $k \in \mathbb{N}$, si $k \in S$ entonces $k + 1 \in S$.*

Entonces se sigue que $S = \mathbb{N}$.

Demostración.

Si la conclusión es falsa, $S \neq \mathbb{N}$ y el conjunto complementario S^c definido por

$$S^c = \{r \in \mathbb{N} | r \notin S\}$$

es no vacío.

Por el axioma del buen orden, S^c tiene un menor elemento (mínimo) m .

Como 1 pertenece a S , $m \neq 1$. Se sigue que $m - 1$ pertenece a \mathbb{N} y como m es el mínimo de S^c , $m - 1$ debe pertenecer a S .

Poniendo $k = m - 1$ en la condición (b), concluimos que m está en S , lo cual contradice el hecho de que m pertenece a S^c .

De este modo, la suposición $S \neq \mathbb{N}$ nos lleva a un absurdo, y por lo tanto tenemos $S = \mathbb{N}$. □

El principio de inducción es útil para probar la veracidad de propiedades relativas a los números naturales. Por ejemplo, consideremos la siguiente propiedad de $P(n)$:

◦ $P(n)$ es la propiedad:
$$\sum_{i=1}^n 2i - 1 = n^2,$$

Hemos notado que $P(n)$ es verdadera para cualquier n natural y lo podríamos probar usando el siguiente teorema:

Teorema (Principio de inducción)

Sea $P(n)$ una propiedad para $n \in \mathbb{N}$ tal que:

a) $P(1)$ es verdadera.

b) Para todo $k \in \mathbb{N}$, $P(k)$ verdadera implica $P(k + 1)$ verdadera.

Entonces $P(n)$ es verdadera para todo $n \in \mathbb{N}$.

Demostración.

Basta tomar

$$S = \{n \in \mathbb{N} \mid P(n) \text{ es verdadera}\}.$$

Entonces S es un subconjunto de \mathbb{N} y las condiciones (a) y (b) nos dicen que $1 \in S$ y si $k \in S$ entonces $k + 1 \in S$.

Por el teorema anterior se sigue que $S = \mathbb{N}$, es decir que $P(n)$ es verdadera para todo n . natural. □

En la práctica, generalmente presentamos una “demostración por inducción” en términos más descriptivos.

En la notación del teorema anterior,

- (a) es llamado el *caso base*,
- (b) es llamado el *paso inductivo* y
- $P(k)$ es llamada la *hipótesis inductiva*.

El paso inductivo consiste en probar que $P(k) \Rightarrow P(k + 1)$ o, equivalentemente, podemos suponer $P(k)$ verdadera y a partir de ella probar $P(k + 1)$.

Ejemplo

El entero x_n está definido recursivamente por

$$x_1 = 2, \quad x_n = x_{n-1} + 2n, \quad n \geq 2.$$

Demostremos que $x_n = n(n+1)$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Demostración

(Caso base) El resultado es verdadero cuando $n = 1$ pues $2 = 1 \cdot 2$.

$$\text{Caso base } n = 1: \quad x_1 = 2 = 1 \cdot 2 = n(n+1)$$

Demostración

(*Paso inductivo*) Supongamos que el resultado verdadero cuando $n = k$, o sea, que

$$x_k = k(k + 1) \text{ hipótesis inductiva (HI).}$$

En el paso inductivo queremos probar que

$$x_k = k(k + 1) \Rightarrow x_{k+1} = (k + 1)(k + 2).$$

Entonces

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= x_k + 2(k + 1) && \text{(por la definición recursiva)} \\ &= k(k + 1) + 2(k + 1) && \text{(por hipótesis inductiva)} \\ &= (k + 1)(k + 2). && ((k + 1) \text{ factor común}) \end{aligned}$$

Luego el resultado es verdadero cuando $n = k + 1$ y por el principio de inducción, es verdadero para todos los enteros positivos n . □

Ejercicio (Serie aritmética)

Probar que

$$1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2},$$

para $n \in \mathbb{N}$.

Demostración

(*Caso base*) El resultado es verdadero cuando $n = 1$ pues $1 = \frac{1 \cdot (1+1)}{2}$.

(Paso inductivo)

Supongamos que el resultado verdadero cuando $n = k$, o sea, que

$$\sum_{i=1}^k i = \frac{k(k+1)}{2} \quad \text{hipótesis inductiva (HI)}.$$

En el paso inductivo queremos probar que

$$\sum_{i=1}^k i = \frac{k(k+1)}{2} \Rightarrow \sum_{i=1}^{k+1} i = \frac{(k+1)(k+2)}{2}.$$

Entonces

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{k+1} i &= \sum_{i=0}^k i + (k+1) && \text{(por la definición recursiva de } \sum \text{)} \\ &= \frac{k(k+1)}{2} + (k+1) && \text{(por hipótesis inductiva)} \\ &= (k+1)\left(\frac{k}{2} + 1\right) && ((k+1) \text{ factor común)} \\ &= (k+1)\frac{(k+2)}{2}. \\ &= \frac{(k+1)(k+2)}{2}.\end{aligned}$$

Luego el resultado es verdadero cuando $n = k + 1$ y por el principio de inducción, es verdadero para todos los enteros positivos n . □

Ejercicio (Serie geométrica)

Probar que

$$1 + q + q^2 + \cdots + q^n = \sum_{i=0}^n q^i = \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1},$$

para $n \in \mathbb{N}_0$, $q > 0$ y $q \neq 1$.

Demostración

(Caso base) El resultado es verdadero cuando $n = 0$ pues

$$q^0 = 1 = \frac{q^{0+1} - 1}{q - 1}.$$

(*Paso inductivo*) Supongamos que el resultado verdadero cuando $n = k$, o sea, que

$$\sum_{i=0}^k q^i = \frac{q^{k+1} - 1}{q - 1}, \quad \text{hipótesis inductiva (HI).}$$

En el paso inductivo queremos probar que

$$\sum_{i=0}^k q^i = \frac{q^{k+1} - 1}{q - 1} \quad \Rightarrow \quad \sum_{i=0}^{k+1} q^i = \frac{q^{k+2} - 1}{q - 1}.$$

Entonces

$$\sum_{i=0}^{k+1} q^i = \sum_{i=0}^k q^i + q^{k+1} \quad (\text{por la definición recursiva})$$

$$= \frac{q^{k+1} - 1}{q - 1} + q^{k+1} \quad (\text{por hipótesis inductiva})$$

$$= \frac{q^{k+1} - 1 + (q - 1)q^{k+1}}{q - 1}$$

$$= \frac{q^{k+1} - 1 + q \cdot q^{k+1} - q^{k+1}}{q - 1}$$

$$= \frac{q^{k+2} - 1}{q - 1}$$

Luego el resultado es verdadero cuando $n = k + 1$ y por el principio de inducción, es verdadero para todos los enteros positivos n . □