

# Matemática Discreta I

## Clase 6 - Conteo

FAMAF / UNC

4 de abril de 2023

# Selecciones ordenadas con repetición - ejemplos

## Ejemplo

¿Cuántos números de cuatro dígitos pueden formarse con los dígitos 1, 2, 3, 4, 5, 6?

Por la proposición de la clase pasada es claro que hay  $6^4$  números posibles.

## Ejemplo

¿Cuántos números de 5 dígitos y capicúas pueden formarse con los dígitos 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8?

Un número capicúa de cinco dígitos es de la forma

$$xyzyx$$

Se reduce a ver cuántos números de tres dígitos pueden formarse con aquéllos dígitos. Exactamente  $8^3$ .

## Ejemplo

Sea  $X$  un conjunto de  $n$  elementos. ¿Cuántos subconjuntos tiene este conjunto?

Por ejemplo, si  $X = \{a, b, c\}$  los subconjuntos de  $X$  son:

$$\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}.$$

Es decir, si  $X$  es un conjunto de 3 elementos, entonces tiene 8 subconjuntos.

$$\begin{aligned} \text{Sea } A \subseteq X &\rightarrow a \in A \text{ o } a \notin A \text{ (2 posibilidades)} \\ &\rightarrow b \in A \text{ o } b \notin A \text{ (2 posibilidades)} \\ &\rightarrow c \in A \text{ o } c \notin A \text{ (2 posibilidades)} \end{aligned}$$

Luego hay

$$2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^3 = 8$$

posibles subconjuntos de  $X$ .

Razonando de manera análoga obtenemos nuestro primer resultado “no sencillo” de conteo.

### Proposición

*La cantidad de subconjuntos de un conjunto de  $n$  elementos es  $2^n$ .*

Dado  $X$  un conjunto, denotamos  $\mathcal{P}(X)$ , *partes de  $X$* , al conjunto formado por todos los subconjuntos de  $X$ , por ejemplo

$$\mathcal{P}(\{1, 2\}) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}.$$

Si  $X$  es un conjunto finito la proposición anterior nos dice que

$$|\mathcal{P}(X)| = 2^{|X|}$$

## Selecciones ordenadas sin repetición

Sea  $X$  un conjunto finito de  $n$  elementos.

*¿De cuántas formas podemos elegir  $m$  de  $X$  en forma ordenada?*

### Ejemplo

Elegir en forma ordenada y sin repetición 2 elementos del conjunto  $X = \{a, b, c\}$ , tenemos  $ab, ac, ba, bc, ca, cb$ , 6 elecciones.

Es decir si el conjunto es  $X = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ , las selecciones deben ser del tipo

$$a_{i_1} a_{i_2} \cdots a_{i_m}$$

donde  $a_{i_j} \neq a_{i_k}$  si  $i \neq k$ .

Por ejemplo, las selecciones de 3 elementos en forma ordenada y sin repetición de  $\{1, 2, 3\}$  son exactamente

123, 132, 213, 231, 312, 321

(son las ternas donde los tres números son distintos).

O sea hay 6 selecciones ordenadas y sin repetición de elementos de  $\{1, 2, 3\}$ .

Notemos que:

1° elemento  $\rightarrow$  3 posibilidades: 1, 2, 3

2° elemento  $\rightarrow$  2 posibilidades: distinto al elegido en 1°

3° elemento  $\rightarrow$  1 posibilidades: distinto a los elegidos en 1° y 2°

Tenemos entonces  $3 \cdot 2 \cdot 1 = 3!$  selecciones posibles.

Pensemos ahora que queremos elegir en forma ordenada y sin repetición 3 elementos entre 5. Entonces para la primera elección tenemos 5 posibilidades, para la segunda 4 posibilidades y para la tercera 3 posibilidades haciendo un total de

$$5 \cdot 4 \cdot 3$$

selecciones posibles.

### Proposición

*Si  $n \geq m$  entonces existen*

$$n \cdot (n - 1) \cdots (n - m + 1), \quad (m - \text{factores})$$

*selecciones ordenadas y sin repetición de  $m$  elementos de un conjunto de  $n$  elementos.*

## Ejemplo

Si hay 10 personas ¿De cuántas formas puedo hacer una fila de 7 personas?

Solución.

Razonando,

1° puesto	→	10	posibilidades
2° puesto	→	9	posibilidades
3° puesto	→	8	posibilidades
4° puesto	→	7	posibilidades
5° puesto	→	6	posibilidades
6° puesto	→	5	posibilidades
7° puesto	→	4	posibilidades

La solución es entonces  $10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4$ .





### Ejemplo (repetido)

Si hay 10 personas ¿De cuántas formas puedo hacer una fila de 7 personas?

Solución (aplicando la proposición de p. 7).

Cantidad de elementos:  $\rightarrow n = 10$

Cantidad de elecciones:  $\rightarrow m = 7$

Por lo tanto,  $n - m + 1 = 10 - 7 + 1 = 4$ .

La solución es entonces:  $10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4$ .

Observar que

$$\begin{aligned} 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 &= \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{3 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{10!}{3!} \\ &= \frac{10!}{(10 - 7)!}. \end{aligned}$$



## Ejemplo

¿Cómo elegir 4 elementos entre  $n$ ?

## Solución.

Razonando,

1° puesto  $\rightarrow$   $n-1$  posibilidades

2° puesto  $\rightarrow$   $n-2$  posibilidades

3° puesto  $\rightarrow$   $n-3$  posibilidades

4° puesto  $\rightarrow$   $n-4$  posibilidades

La solución es entonces

$$\begin{aligned}(n-1)(n-2)(n-3)(n-4) &= \frac{(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)!}{(n-5)!} \\ &= \frac{n!}{(n-5)!}\end{aligned}$$



En general

$$n \cdot (n-1) \cdots (n-m+1) = \frac{n \cdot (n-1) \cdots (n-m+1) \cdot (n-m) \cdots 2 \cdot 1}{(n-m) \cdots 2 \cdot 1}.$$

Es decir

$$n \cdot (n-1) \cdots (n-m+1) = \frac{n!}{(n-m)!}.$$

Por lo tanto podemos reescribir la proposición en forma mas compacta:

## Proposición

*Si  $n \geq m$  entonces existen*

$$\frac{n!}{(n-m)!}$$

*selecciones ordenadas y sin repetición de  $m$  elementos de un conjunto de  $n$  elementos.*

## Ejemplo

Si en un colectivo hay 9 asientos vacíos.

¿De cuántas formas se pueden distribuir 3 pasajeros?

Lo que se está preguntando es cuantas posibles distribuciones de 3 asientos existen (no importa quien se sienta en cada asiento).

## Solución

Se trata de ver cuantas selecciones ordenadas y sin repetición hay de 3 asientos entre 9.

Primero hagámoslo usando el principio de multiplicación:

- 1° persona: 9 lugares posibles. Total: 9
- 2° persona: 8 lugares posibles. Total:  $9 \times 8$
- 3° persona: 7 lugares posibles. Total:  $9 \times 8 \times 7$ .

Este número es

$$9 \cdot 8 \cdot 7, \quad 3 - \text{factores.}$$

Podríamos haberlo hecho directamente por la proposición de la p. 12: elegir 3 elementos entre 9 son

$$\begin{aligned} \frac{9!}{(9-3)!} &= \frac{9!}{6!} \\ &= \frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} \\ &= 9 \cdot 8 \cdot 7 \end{aligned}$$

posibilidades.



# Permutaciones

Hay

$$\frac{n!}{0!} = n!$$

selecciones ordenadas y sin repetición de  $n$  elementos en un conjunto con  $n$  elementos.

Las selecciones ordenadas y sin repetición de  $n$  elementos en un conjunto con  $n$  elementos se denominan *permutaciones* de grado  $n$ .

Hay, pues,  $n!$  permutaciones de grado  $n$ .

# Permutaciones

Respondamos la siguiente pregunta:

¿De cuantas formas puedo ordenar  $n$  objetos?

Observemos que, ordenar  $n$  objetos es equivalente a seleccionar ordenadamente y sin repetición los  $n$  objetos (de un conjunto con  $n$  objetos).

Por lo tanto, la respuesta es  $n!$ .

Ejemplo.

Dado el conjunto  $\mathbb{I}_4 = \{1, 2, 3, 4\}$  ¿cuántas permutaciones de los elementos de  $\mathbb{I}_4$  hay?

Solución.  $4!$ .





## Ejemplo

¿Cuántas permutaciones pueden formarse con las letras de *silvia*?

## Solución

Afirmamos que se pueden formar  $\frac{6!}{2!}$  palabras usando las letras de *silvia*.

Si escribo en lugar de *silvia*,

*s i l v i' a*

Es decir si cambio la segunda *i* por *i'*, todas las letras son distintas, luego hay  $6!$  permutaciones, pero cada par de permutaciones del tipo

$\dots i \dots i' \dots$

$\dots i' \dots i \dots$

coinciden, por lo tanto tengo que dividir por 2 el número total de permutaciones:  $6!/2! = 360$ .



Tomemos la palabra

*ramanathan*

el número total de permutaciones es

$$\frac{10!}{4!2!}.$$

En efecto, escribiendo el nombre anterior así

$r_1 \ a_1 \ m_1 \ a_2 \ n_1 \ a_3 \ t_1 \ h_1 \ a_4 \ n_2$

el número total de permutaciones es  $10!$  Pero permutando las  $a_i$  y las  $n_i$  sin mover las otras letras obtenemos la misma permutación de *ramanathan*.

Como hay  $4!$  permutaciones de las letras  $a_1, a_2, a_3, a_4$ , y  $2!$  de  $n_1, n_2$  el número buscado es

$$\frac{10!}{4!2!}.$$