

# Matemática Discreta I

## Clase 22 - Árboles / Coloreo de vértices

FAMAF / UNC

9 de junio de 2022

# Árboles

## Definición

Diremos que un grafo  $T$  es un *árbol* si cumple que es conexo y no hay ciclos en  $T$ .

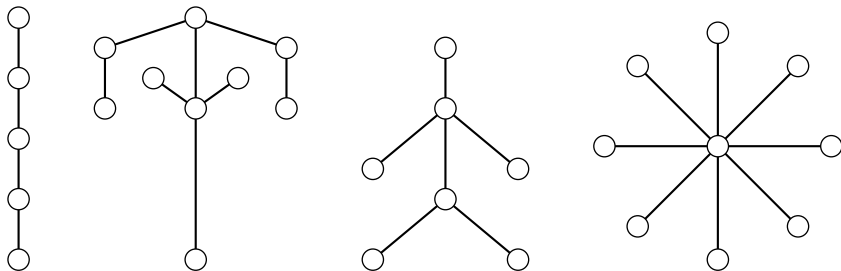


Figura: Algunos árboles

A causa de su particular estructura y propiedades, los árboles aparecen en diversas aplicaciones de la matemática, especialmente en investigación operativa y ciencias de la computación.

El siguiente lema nos resultará útil para probar una parte del teorema fundamental de esta sección.

### Lema

*Sea  $G = (V, E)$  un grafo conexo, entonces  $|E| \geq |V| - 1$ .*

## Demostración

Como  $G$  es conexo existe una caminata que recorre todos los vértices de  $G$ :

$$v_1, v_2, \dots, v_r.$$

Renombremos los vértices de  $G$  con números naturales de tal forma que el primer vértice de la caminata sea 1, el segundo 2 y cada vez que aparece un vértice que no ha sido renombrado se le asigna el número siguiente.

Luego la caminata comienza en 1 y termina en  $n$ , donde  $n = |V|$ .

Observar: si  $i$  tal que  $1 < i \leq n$  tenemos que la caminata tiene la forma

$$1, \dots, j_i, i, \dots, j_n, n$$

donde  $j_i < i$ , luego es claro que

$$\{j_2, 2\}, \{j_3, 3\}, \dots, \{j_n, n\}$$

forman un conjunto de  $n - 1$  aristas distintas en  $G$ .



El siguiente teorema nos da 3 nociones equivalente a la definición de árbol.

### Teorema

*Si  $T = (V, E)$  es un grafo conexo con al menos dos vértices, entonces son equivalentes las siguientes propiedades*

**T1)**  *$T$  es un árbol.*

**T2)** *Para cada par  $x, y$  de vértices existe un único camino en  $T$  de  $x$  a  $y$ .*

**T3)**  $|E| = |V| - 1$ .

Este teorema se demuestra haciendo las pruebas:

$$\mathbf{T1} \Rightarrow \mathbf{T2} \Rightarrow \mathbf{T3} \Rightarrow \mathbf{T1}.$$

Luego, toda equivalencia se deduce de estas implicaciones.

Por ejemplo,

$$\mathbf{T1} \Leftrightarrow \mathbf{T3} \quad \text{pues} \quad \begin{cases} \mathbf{T1} \Rightarrow \mathbf{T2} \Rightarrow \mathbf{T3} \\ \mathbf{T3} \Rightarrow \mathbf{T1}. \end{cases}$$

(T1  $\Rightarrow$  T2) Si hubiera dos caminos podríamos formar un ciclo.

(T2  $\Rightarrow$  T3) Se hará por inducción en  $|V|$ .

Sea  $uv$  arista de  $T$  y sea  $F = T - uv$ . Como hay un único camino de  $u$  a  $v$ ,  $F$  tiene dos componentes conexas:  $T_1$  la componente conexa de  $u$  y  $T_2$  la componente conexa de  $v$ .

En cada componente conexa  $T_i = (V_i, E_i)$  hay un único camino de un vértice a otro, pues sino esa propiedad no se cumpliría en  $T$ .

Por HI,  $|E_1| = |V_1| - 1$  y  $|E_2| = |V_2| - 1$ . Luego

$$\begin{aligned} |E| &= |E_1 \cup E_2| + 1 = |E_1| + |E_2| + 1 \stackrel{(HI)}{=} (|V_1| - 1) + (|V_2| - 1) + 1 \\ &= |V_1 \cup V_2| - 1 = |V| - 1. \end{aligned}$$

(T3  $\Rightarrow$  T1)  $|E| = |V| - 1$  y supongamos que  $T$  no es árbol  $\Rightarrow$  hay un ciclo  $\Rightarrow$  podemos sacar una arista  $uv$  y sigue siendo conexo  $\Rightarrow$   
 $|E - uv| = |V| - 2$  y conexo. Absurdo por el lema. □

## Corolario

*Sea  $T$  árbol con al menos dos vértices, entonces:*

*El grafo obtenido de  $T$  removiendo alguna arista tiene dos componentes, cada una de las cuales es un árbol.*

## Demostración

Es parte de la demostración de  $T_2 \Rightarrow T_3$ : el grafo que se obtiene de quitar una arista, es un grafo con dos componentes conexas cada una de ellas sin ciclos (pues sino los habría en  $T$ ), luego cada una de ellas es árbol.





# Coloreo de los vértices de un grafo

## Problema

¿Cómo hacer un horario de actividades sin interferencias?

## Ejemplo

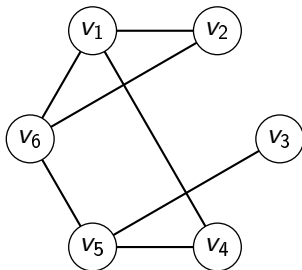
Supongamos que deseamos hacer un horario con seis cursos de una hora,  $v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6$ . Entre la audiencia potencial hay gente que desea asistir simultáneamente a

$\{v_1, v_2\}, \{v_1, v_4\}, \{v_3, v_5\}, \{v_2, v_6\}, \{v_4, v_5\}, \{v_5, v_6\}, \{v_1, v_6\}$ .

¿Cuántas horas son necesarias para poder confeccionar un horario en el cual no haya interferencias?

## Solución

Podemos representar la situación con el grafo:



Los vértices corresponden a las seis clases, y las aristas indican las interferencias potenciales.

Un horario el cual cumple con la condición de evitar interferencias es el siguiente:

Hora 1	Hora 2	Hora 3	Hora 4
$v_1$ y $v_3$	$v_2$ y $v_4$	$v_5$	$v_6$

Es una partición del conjuntos de vértices en cuatro partes, con la propiedad que ninguna parte contiene un par de vértices adyacentes del grafo.

Claramente, le corresponde una función:

$$c : \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\} \rightarrow \{1, 2, 3, 4\},$$

donde

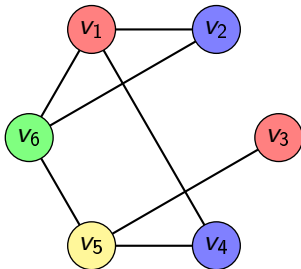
$$c(v_1) = c(v_3) = 1$$

$$c(v_2) = c(v_4) = 2$$

$$c(v_5) = 3$$

$$c(v_6) = 4.$$

También podemos representar esta función como un *coloreo de vértices* donde dos vértices adyacentes tienen distintos colores:



Cualquiera de las tres formas de presentar el resultado nos daría una solución (quizás no la mejor).



## Definición

Una *coloración de vértices* de un grafo  $G = (V, E)$  es una función  $c : V \rightarrow \mathbb{N}$  con la siguiente propiedad:

$$c(x) \neq c(y) \quad \text{si} \quad \{x, y\} \in E.$$

El *número cromático* de  $G$ , denotado  $\chi(G)$ , se define como el mínimo entero  $k$  para el cual existe una coloración de vértices de  $G$  usando  $k$ -colores.

En otra palabras,  $\chi(G) = k$  si y sólo si existe una coloración de vértices  $c$  la cual es una función de  $V$  a  $\mathbb{N}_k$ , y  $k$  es el mínimo entero con esta propiedad.

Volviendo al ejemplo de los horarios, nuestro primer intento fue de 4 colores.

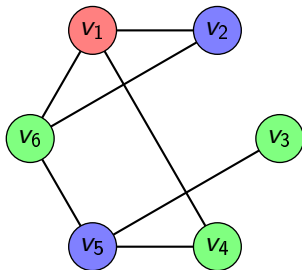
Un rápido intento con tres colores nos da la solución de este problema:

Color 1	Color 2	Color 3
$v_1$	$v_2$ y $v_5$	$v_3, v_4$ y $v_6$ .

Más aún, hacen falta por lo menos tres colores, puesto que  $v_1$ ,  $v_2$ , y  $v_6$  son mutuamente adyacentes y por lo tanto deben tener diferentes colores.

Luego concluimos que el número cromático del grafo es 3.

Podemos representar en el grafo la coloración:



En general, para probar que el número cromático de un grafo dado es  $k$ , debemos hacer dos cosas:

- a) encontrar una coloración de vértices usando  $k$  colores;
- b) probar que ninguna coloración de vértices usa menos de  $k$  colores.

¿Existe algún algoritmo general eficiente para encontrar el número cromático?

**Respuesta:** No.

Veremos la clase que viene un algoritmo para encontrar una coloración de vértices que aunque no es óptima nos da un resultado satisfactorio.