Matemática Discreta I
Clase 5 - Ejercicios de inducción

FAMAF / UNC

30 de marzo de 2021

Ejercicio (Serie aritmética)

Probar que

$$1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2},$$

para $n \in \mathbb{N}$.

Demostración

(*Caso base*) El resultado es verdadero cuando $n = 1$ pues $1 = \frac{1 \cdot (1+1)}{2}$.

(*Paso inductivo*)

Supongamos que el resultado verdadero cuando $n = k$, o sea, que

$$\sum_{i=1}^{k} i = \frac{k(k+1)}{2} \quad \text{hipótesis inductiva (HI).}$$

En el paso inductivo queremos probar que

$$\sum_{i=1}^{k} i = \frac{k(k+1)}{2} \quad \Rightarrow \quad \sum_{i=1}^{k+1} i = \frac{(k+1)(k+2)}{2}.$$

Entonces

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{k+1} i &= \sum_{i=0}^{k} i + (k+1) && \text{(por la definición recursiva de } \textstyle\sum) \\
&= \frac{k(k+1)}{2} + (k+1) && \text{(por hipótesis inductiva)} \\
&= (k+1)(\frac{k}{2}+1)) && ((k+1) \text{ factor común}) \\
&= (k+1)\frac{(k+2)}{2}. \\
&= \frac{(k+1)(k+2)}{2}.
\end{aligned}$$

Luego el resultado es verdadero cuando $n = k+1$ y por el principio de inducción, es verdadero para todos los enteros positivos n. □

Ejercicio (Serie geométrica)

Probar que

$$1 + q + q^2 + \cdots + q^n = \sum_{i=0}^{n} q^i = \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1},$$

para $n \in \mathbb{N}_0$, $q > 0$ y $q \neq 1$.

Demostración

(*Caso base*) El resultado es verdadero cuando $n = 0$ pues

$$q^0 = 1 = \frac{q^{0+1} - 1}{q - 1}.$$

(*Paso inductivo*) Supongamos que el resultado verdadero cuando $n = k$, o sea, que

$$\sum_{i=0}^{k} q^i = \frac{q^{k+1} - 1}{q - 1}, \quad \text{hipótesis inductiva (HI).}$$

En el paso inductivo queremos probar que

$$\sum_{i=0}^{k} q^i = \frac{q^{k+1} - 1}{q - 1} \quad \Rightarrow \quad \sum_{i=0}^{k+1} q^i = \frac{q^{k+2} - 1}{q - 1}.$$

Entonces

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{k+1} q^i &= \sum_{i=0}^{k} q^i + q^{k+1} && \text{(por la definición recursiva)} \\
&= \frac{q^{k+1}-1}{q-1} + q^{k+1} && \text{(por hipótesis inductiva)} \\
&= \frac{q^{k+1}-1+(q-1)q^{k+1}}{q-1} \\
&= \frac{q^{k+1}-1+q\cdot q^{k+1}-q^{k+1}}{q-1} \\
&= \frac{q^{k+2}-1}{q-1}
\end{aligned}
$$

Luego el resultado es verdadero cuando $n = k + 1$ y por el principio de inducción, es verdadero para todos los enteros positivos n. □

Ejercicio

Probar que

$$(1+2+3+\cdots+n)^2 = 1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3,$$

para $n \in \mathbb{N}$.

Demostración

Para probar esto primero debemos usar el resultado de la página 2 que nos dice que

$$(1+2+3+\cdots+n)^2 = \left(\sum_{i=1}^{n} i\right)^2 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}.$$

Luego debemos probar que

$$\sum_{i=1}^{n} i^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}.$$

(*Caso base*)El resultado es verdadero cuando $n = 1$ pues

$$\sum_{i=1}^{1} i^3 = 1 \quad \text{y} \quad \frac{1^2(1+1)^2}{4} = \frac{4}{4} = 1.$$

(*Paso inductivo*)Debemos probar que si $k \geq 1$,

$$\sum_{i=0}^{k} i^3 = \frac{k^2(k+1)^2}{4} \quad \text{(HI)} \qquad \Rightarrow \quad \sum_{i=0}^{k+1} i^3 = \frac{(k+1)^2(k+2)^2}{4}.$$

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{k+1} i^3 &= \sum_{i=0}^{k} i^3 + (k+1)^3 && \text{(por la definición recursiva de } \textstyle\sum\text{)}\\
&= \frac{k^2(k+1)^2}{4} + (k+1)^3 && \text{(por hipótesis inductiva)}\\
&= (k+1)^2\left(\frac{k^2}{4} + (k+1)\right)) && ((k+1)^2 \text{ factor común})\\
&= (k+1)^2\frac{(k^2+4k+4)}{4}.\\
&= \frac{(k+1)^2(k+2)^2}{4}.
\end{aligned}
$$

Luego el resultado es verdadero cuando $n = k + 1$ y por el principio de inducción, es verdadero para todos los enteros positivos n. □

Inducción completa

Ejercicio

Sea u_n definida recursivamente por:

$$u_0 = 1, \; u_1 = 0, \qquad u_n = 5u_{n-1} - 6u_{n-2}, \; \forall n \geq 2.$$

1. Calcule u_2 y u_3 usando recursión.
2. Pruebe por inducción que $u_n = 3 \cdot 2^n - 2 \cdot 3^n$ $(n \in \mathbb{N}_0)$.

Solución

1. Por definición $u_0 = 1, \; u_1 = 0$, luego:

$$u_2 = 5u_{2-1} - 6u_{2-2} = 5u_1 - 6u_0 = 5 \cdot 0 - 6 \cdot 1 = -6$$

Ahora $u_1 = 0, \; u_2 = -6$, luego:

$$u_3 = 5u_{3-1} - 6u_{3-2} = 5u_2 - 6u_1 = 5 \cdot (-6) - 6 \cdot 0 = -30.$$

2. (*Caso base*)

Por un lado $u_0 = 1$, por definición, por otro lado si calculamos con la fórmula: $u_0 = 3 \cdot 2^0 - 2 \cdot 3^0 = 3 - 2 = 1$ y listo.

Por un lado $u_1 = 0$, por definición, por otro lado si calculamos con la fórmula: $u_1 = 3 \cdot 2^1 - 2 \cdot 3^1 = 3 \cdot 2 - 2 \cdot 3 = 6 - 6 = 0$ y listo.

(*Paso inductivo*)

Debemos probar que si vale

$$u_h = 3 \cdot 2^h - 2 \cdot 3^h \quad \text{para} \quad 0 \leq h \leq k \quad \text{con} \quad k \geq 1, \tag{HI}$$

eso implica que

$$u_{k+1} = 3 \cdot 2^{k+1} - 2 \cdot 3^{k+1}. \tag{*}$$

Comenzamos por el lado izquierdo de (*):

$$\begin{aligned} u_{k+1} &= 5u_{k+1-1} - 6u_{k+1-2} && \text{(def. } u_n\text{)} \\ &= 5u_k - 6u_{k-1} \\ &= 5(3 \cdot 2^k - 2 \cdot 3^k) - 6(3 \cdot 2^{k-1} - 2 \cdot 3^{k-1}) && \text{(por HI)} \end{aligned}$$

En lo que se refiere al procedimiento de inducción hemos terminado, ahora solo queda por probar que

$$5(3 \cdot 2^k - 2 \cdot 3^k) - 6(3 \cdot 2^{k-1} - 2 \cdot 3^{k-1}) = 3 \cdot 2^{k+1} - 2 \cdot 3^{k+1} \qquad (**)$$

Desarrollemos el término de la izquierda

$$\begin{aligned} &= 5(3 \cdot 2^k - 2 \cdot 3^k) - 6(3 \cdot 2^{k-1} - 2 \cdot 3^{k-1}) \\ &= 5 \cdot 3 \cdot 2^k - 5 \cdot 2 \cdot 3^k - 6 \cdot 3 \cdot 2^{k-1} + 6 \cdot 2 \cdot 3^{k-1} \\ &= 5 \cdot 3 \cdot 2^k - 5 \cdot 2 \cdot 3^k - 3 \cdot 3 \cdot 2^k + 2 \cdot 2 \cdot 3^k \\ &= 6 \cdot 2^k - 6 \cdot 3^k \end{aligned}$$

Luego (**) se transforma en

$$6 \cdot 2^k - 6 \cdot 3^k = 3 \cdot 2^{k+1} - 2 \cdot 3^{k+1} \qquad (***)$$

$$\Updownarrow$$

$$3 \cdot 2 \cdot 2^k - 2 \cdot 3 \cdot 3^k = 3 \cdot 2^{k+1} - 2 \cdot 3^{k+1}$$

$$\Updownarrow$$

$$3 \cdot 2^{k+1} - 2 \cdot 3^{k+1} = 3 \cdot 2^{k+1} - 2 \cdot 3^{k+1}.$$

Como esto último es verdadero, es verdadero (***) y por lo tanto son verdaderos (**) y (*).

$\square$

Nos adelantamos un poco en los temas de la materia para ejemplificar el principio de inducción completa.

Definición

Sea $n \in \mathbb{N}$ diremos que es *primo* si $n \neq 1$ y el único natural menor que lo divide es 1.

Ejercicio

Probar que si $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$, entonces n es producto de primos.

Demostración

Lo haremos por inducción en $n \geq 2$.

(*Caso base*)

El caso base es $n = 2$, y es claro que 2 es primo (y por lo tanto producto de primos en un sentido generalizado).

(*Paso inductivo*)

Probaremos que dado $k > 1$,

$$\text{todo } h \text{ tal que } 2 \leq h \leq k, \text{ es producto de primos (HI)}$$

$$\Downarrow$$

$$k + 1 \text{ es producto de primos.}$$

Si $k+1$ es primo, listo, es producto de primos.

Si $k+1$ no es primo, significa que $k+1 = d \cdot e$ donde $d, e < k+1$.

Por (HI), d y e son productos de primos, es decir

$$d = p_1 \cdot p_2 \cdots p_r$$
$$e = q_1 \cdot q_2 \cdots q_s$$

donde p_i, q_i son primos.Luego

$$k+1 = d \cdot e = p_1 \cdot p_2 \cdots p_r \cdot q_1 \cdot q_2 \cdots q_s.$$

Por lo tanto $k+1$ es producto de primos.

$\square$