

Matemática Discreta I

Clase 3 - Recursión

FAMAF / UNC

23 de marzo de 2020

Definiciones recursivas

Sea \mathbb{N} el conjunto de enteros positivos, esto es

$$\mathbb{N} = \{n \in \mathbb{Z} \mid n \geq 1\},$$

y denotemos \mathbb{N}_0 el conjunto $\mathbb{N} \cup \{0\}$, esto es

$$\mathbb{N}_0 = \{n \in \mathbb{Z} \mid n \geq 0\}.$$

\mathbb{N} es llamado el conjunto de *números naturales*. Si X es un subconjunto de \mathbb{N} (o de \mathbb{N}_0) entonces automáticamente tiene una cota inferior, pues cada elemento x de X satisface $x \geq 1$ (o $x \geq 0$). Así, en este caso el axioma del buen orden toma la forma

si X es un subconjunto no vacío de \mathbb{N} o \mathbb{N}_0 entonces X tiene un mínimo.

Esta la forma más usada en la práctica.

Una sucesión u_n puede ser dada en forma explícita, por ejemplo

- $u_n = 3n + 2$, o
- $w_n = (n + 1)(n + 2)(n + 3)$.

En este caso es fácil calcular algún valor de cada sucesión, por ejemplo

$$u_5 = 3 \cdot 5 + 2 = 17 \quad \text{o} \quad w_3 = 4 \cdot 5 \cdot 6 = 120$$

Cuando una sucesión puede expresarse como combinación de un número determinado de operaciones elementales, diremos que tiene una *fórmula cerrada*.

A veces la sucesión que nos interesa no tiene una fórmula *cerrada* como las anteriores y podemos expresarla en forma *recursiva*. Por ejemplo,

- $u_1 = 1, u_2 = 2$, (casos base)
- $u_n = u_{n-1} + u_{n-2}$, para $n \geq 3$ (caso recursivo).

La anterior es la *sucesión de Fibonacci*. Entonces podemos calcular los término $n \geq 3$ de la sucesión usando la recursión:

- $u_3 = u_2 + u_1 = 2 + 1 = 3$,
- $u_4 = u_3 + u_2 = 3 + 2 = 5$
- $u_5 = u_4 + u_3 = 5 + 3 = 8$

y así sucesivamente.

Ejemplo

Sea u_n definida

- $u_1 = 3$, $u_2 = 5$ y
- $u_n = 3u_{n-1} - 2u_{n-2}$ para $n \geq 3$.

Calcular u_n para $n \leq 5$.

Demostración

[Solución] Los valores para $n = 1$ y $n = 2$ ya los conocemos. La fórmula recursiva es la que nos servirá para conocer los siguientes términos

- $u_3 = 3u_2 - 2u_1 = 3 \cdot 5 - 2 \cdot 3 = 9$,
- $u_4 = 3u_3 - 2u_2 = 3 \cdot 9 - 2 \cdot 5 = 17$,
- $u_5 = 3u_4 - 2u_3 = 3 \cdot 17 - 2 \cdot 9 = 33$,

En base al resultado podemos, en este caso, adivinar una fórmula general para u_n . Escribamos de nuevo los valores de la sucesión para $n \leq 5$.

- $u_1 = 3$,
- $u_2 = 5$,
- $u_3 = 9$,
- $u_4 = 17$,
- $u_5 = 33$,

Observando cuidadosamente estos valores podemos darnos cuenta que:

- $u_1 = 3 = 2 + 1 = 2^1 + 1,$
- $u_2 = 5 = 4 + 1 = 2^2 + 1,$
- $u_3 = 9 = 8 + 1 = 2^3 + 1,$
- $u_4 = 17 = 16 + 1 = 2^4 + 1,$
- $u_5 = 33 = 32 + 1 = 2^5 + 1,$

Ahora sí, claramente podemos deducir que (posiblemente)

$$u_n = 2^n + 1.$$

La clase que viene aprenderemos un método (principio de inducción) que nos permitirá probar este tipo de afirmaciones.

El método de definición recursiva aparecerá bastante seguido en la materia. Existen otras formas de este procedimiento que se “esconden” por su notación. ¿Qué significan las siguientes expresiones?

$$\sum_{r=1}^n r, \quad 1 + 2 + 3 + \cdots + n.$$

Ambos significan que sumamos los primeros n números naturales, pero cada uno contiene un misterioso símbolo, \sum y \cdots , respectivamente.

Lo que deberíamos decir es que cada uno de ellos es equivalente a la expresión s_n , dada por la siguiente definición recursiva:

$$s_1 = 1, \quad s_n = s_{n-1} + n, \quad n \geq 2.$$

Definición

Sea $n \in \mathbb{N}$ sean a_i , $1 \leq i \leq n$ una secuencia de números (enteros, reales, etc.). Entonces $\sum_{i=1}^n a_i$ denota la función recursiva definida

$$\sum_{i=1}^1 a_i = a_1, \quad \sum_{i=1}^n a_i = \sum_{i=1}^{n-1} a_i + a_n \quad (n \geq 2).$$

En este caso decimos que $\sum_{i=1}^n a_i$ es la *sumatoria* de los a_i de $i = 1$ a n .

Definición

El símbolo $\prod_{i=1}^n a_i$ denota la función recursiva definida

$$\prod_{i=1}^1 a_i = a_1, \quad \prod_{i=1}^n a_i = \prod_{i=1}^{n-1} a_i \cdot a_n \quad (n \geq 2).$$

En este caso decimos que $\prod_{i=1}^n a_i$ es la *productoria* de los a_i de $i = 1$ a n .

Una definición muy utilizada es la de $n!$ (que se lee *n factorial*). Intuitivamente podemos definirlo como

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n,$$

y el significado es bastante claro para cualquiera.

Pero para precisar (y hacerlo claro para una computadora) debemos usar una definición recursiva:

- $1! = 1,$
- $n! = (n - 1)! \cdot n.$

Observar que también podemos definir

$$n! = \prod_{i=1}^n i.$$

Pese a que esta última fórmula parece cerrada, oculta la definición recursiva de \prod .

Es un resultado conocido que la función $n!$ *no* admite una fórmula cerrada.

Finalmente definiremos la “ n -ésima potencia” de un número: sea x un número, si $n \in \mathbb{N}$ definimos

$$x^1 = x, \quad x^n = x \cdot x^{n-1} \quad (n \geq 2).$$

Por completitud, definimos $x^0 = 1$ cuando $x \neq 0$ y dejamos indefinido 0^0 .