Matemática Discreta I
Clase 6 - Conteo

FAMAF / UNC

4 de abril de 2023

Selecciones ordenadas con repetición

Ejemplo

Sea $X = \{1, 2, 3\}$.

¿De cuántas formas se pueden elegir dos de estos números en forma ordenada?

Notación: si elegimos a y b en forma ordenada, denotamos ab.

Entonces, las posibilidades son

$$\begin{array}{ccc} 11 & 12 & 13 \\ 21 & 22 & 23 \\ 31 & 32 & 33 \end{array}$$

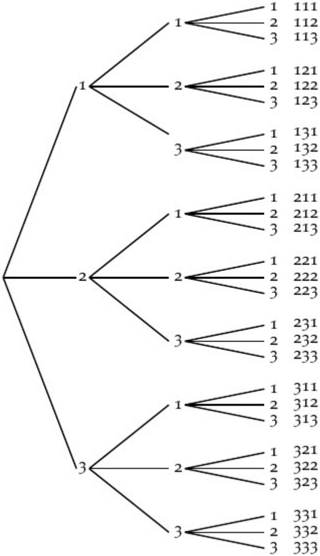
Es decir, hay $9 = 3^2$ formas posibles.

Avancemos un poco más y ahora elijamos en forma ordenada 3 elementos de $1, 2, 3$, es claro que estas elecciones son

$$\begin{array}{ccc}
111 & 211 & 311 \\
112 & 212 & 312 \\
113 & 213 & 313 \\
121 & 221 & 321 \\
122 & 222 & 322 \\
123 & 223 & 323 \\
131 & 231 & 331 \\
132 & 232 & 332 \\
133 & 233 & 333.
\end{array}$$

El total de elecciones posibles $27 = 3^3$.

Un diagrama arbolado ayuda a pensar.



¿Cómo justificamos esto? Por el principio de multiplicación.

De los dos ejemplos anteriores se podría inferir que hay 3^4 formas posibles de elegir en forma ordenada 4 elementos del conjunto 1, 2, 3. También, que cuando elijamos 5 habrá 3^5 posibilidades y así sucesivamente para enteros más grandes.

¿Cómo justificamos esto? Por el principio de multiplicación

Hemos visto en las página anteriores que hay 3^3 formas posibles de elegir 3 números entre 1, 2, 3.

Ahora, para elegir el cuarto número hay 3 posibilidades, por lo tanto, por el principio de multiplicación, el número de posibilidades con cuatro elecciones es

$$3^3 \times 3 = 3^4.$$

El razonamiento anterior se puede extender:

Proposición

Sean $m, n \in \mathbb{N}$. Hay n^m formas posibles de elegir ordenadamente m elementos de un conjunto de n elementos.

Idea de la prueba.

La prueba de esta proposición se basa en aplicar el principio de multiplicación $m - 1$ veces,

A nivel formal, debemos hacer inducción sobre m y usar el principio de multiplicación en el paso inductivo.

$\square$

Ejemplo

¿Cuántos números de cuatro dígitos pueden formarse con los dígitos $1, 2, 3, 4, 5, 6$?

Por la proposición anterior es claro que hay 6^4 números posibles.

Ejemplo

¿Cuántos números de 5 dígitos y capicúas pueden formarse con los dígitos $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$?

Un número capicúa de cinco dígitos es de la forma

$$xyzyx$$

Se reduce a ver cuántos números de tres dígitos pueden formarse con aquéllos dígitos. Exactamente 8^3.

Ejemplo

Sea X un conjunto de n elementos. ¿Cuántos subconjuntos tiene este conjunto?

Por ejemplo, si $X = \{a, b, c\}$ los subconjuntos de X son:

$$\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}.$$

Es decir, si X es un conjunto de 3 elementos, entonces tiene 8 subconjuntos.

$$\begin{array}{lll} \text{Sea } A \subseteq X & \to & a \in A \text{ o } a \notin A \text{ (2 posibilidades)} \\ & \to & b \in A \text{ o } b \notin A \text{ (2 posibilidades)} \\ & \to & c \in A \text{ o } c \notin A \text{ (2 posibilidades)} \end{array}$$

Luego hay

$$2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^3 = 8$$

posibles subconjuntos de X.

Razonando de manera análoga obtenemos nuestro primer resultado "no sencillo" de conteo.

Proposición

La cantidad de subconjuntos de un conjunto de n elementos es 2^n.

Dado X un conjunto, denotamos $\mathcal{P}(X)$, *partes de* X, al conjunto formado por todos los subconjuntos de X, por ejemplo

$$\mathcal{P}(\{1,2\}) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1,2\}\}.$$

Si X es un conjunto finito la proposición anterior nos dice que

$$|P(X)| = 2^{|X|}$$

Selecciones ordenadas sin repetición

Sea X un conjunto finito de n elementos.

¿De cuántas formas podemos elegir m de X en forma ordenada?

Ejemplo

Elegir en forma ordenada y sin repetición 2 elementos del conjunto $X = \{a, b, c\}$, tenemos ab, ac, ba, bc, ca, cb, 6 elecciones.

Es decir si el conjunto es $X = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$, las selecciones deben ser del tipo

$$a_{i_1} a_{i_2} \cdots a_{i_m}$$

donde $a_{i_j} \neq a_{i_k}$ si $i \neq k$.

Por ejemplo, las selecciones de 3 elementos en forma ordenada y sin repetición de $\{1, 2, 3\}$ son exactamente

$$123,\ 132,\ 213,\ 231,\ 312,\ 321$$

(son las ternas donde los tres números son distintos).

O sea hay 6 selecciones ordenadas y sin repetición de elementos de $\{1, 2, 3\}$.

Notemos que:

1° elemento	$\rightarrow$	3 posibilidades: 1, 2, 3
2° elemento	$\rightarrow$	2 posibilidades: distinto al elegido en 1°
3° elemento	$\rightarrow$	1 posibilidades: distinto a los elegidos en 1° y 2°

Tenemos entonces $3 \cdot 2 \cdot 1 = 3!$ selecciones posibles.

Pensemos ahora que queremos elegir en forma ordenada y sin repetición 3 elementos entre 5. Entonces para la primera elección tenemos 5 posibilidades, para la segunda 4 posibilidades y para la tercera 3 posibilidades haciendo un total de

$$5 \cdot 4 \cdot 3$$

selecciones posibles.

Proposición

Si $n \geq m$ entonces existen

$$n \cdot (n-1) \cdots (n-m+1), \qquad \textit{(m - factores)}$$

selecciones ordenadas y sin repetición de m elementos de un conjunto de n elementos.

Ejemplo

Si hay 10 personas ¿De cuántas formas puedo hacer una fila de 7 personas?

Solución.

Razonando,

$$\begin{array}{lcrl} 1^\circ \text{ puesto} & \to & 10 & \text{posibilidades} \\ 2^\circ \text{ puesto} & \to & 9 & \text{posibilidades} \\ 3^\circ \text{ puesto} & \to & 8 & \text{posibilidades} \\ 4^\circ \text{ puesto} & \to & 7 & \text{posibilidades} \\ 5^\circ \text{ puesto} & \to & 6 & \text{posibilidades} \\ 6^\circ \text{ puesto} & \to & 5 & \text{posibilidades} \\ 7^\circ \text{ puesto} & \to & 4 & \text{posibilidades} \end{array}$$

La solución es entonces $10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4$. $\square$

Ejemplo (repetido)

Si hay 10 personas ¿De cuántas formas puedo hacer una fila de 7 personas?

Solución (aplicando la proposición de p. 12).

Cantidad de elementos: $\rightarrow \quad n = 10$

Cantidad de elecciones: $\rightarrow \quad m = 7$

Por lo tanto, $n - m + 1 = 10 - 7 + 1 = 4$.

La solución es entonces: $10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4$.

Observar que

$$10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{3 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{10!}{3!}$$
$$= \frac{10!}{(10-7)!}.$$

$\square$

Ejemplo

¿Cómo elegir 4 elementos entre n?

Solución.

Razonando,

$$\begin{array}{llll} 1^\circ \text{ puesto} & \rightarrow & \text{n-1} & \text{posibilidades} \\ 2^\circ \text{ puesto} & \rightarrow & \text{n-2} & \text{posibilidades} \\ 3^\circ \text{ puesto} & \rightarrow & \text{n-3} & \text{posibilidades} \\ 4^\circ \text{ puesto} & \rightarrow & \text{n-4} & \text{posibilidades} \end{array}$$

La solución es entonces

$$\begin{aligned}(n-1)(n-2)(n-3)(n-4) &= \frac{(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)!}{(n-5)!} \\ &= \frac{n!}{(n-5)!}\end{aligned}$$

□

En general

$$n \cdot (n-1) \cdots (n-m+1) = \frac{n \cdot (n-1) \cdots (n-m+1) \cdot (n-m) \cdots 2 \cdot 1}{(n-m) \cdots 2 \cdot 1}.$$

Es decir

$$n \cdot (n-1) \cdots (n-m+1) = \frac{n!}{(n-m)!}.$$

Por lo tanto podemos reescribir la proposición en forma mas compacta:

Proposición

Si $n \geq m$ *entonces existen*

$$\frac{n!}{(n-m)!}$$

selecciones ordenadas y sin repetición de m *elementos de un conjunto de* n *elementos.*

Ejemplo

Si en un colectivo hay 9 asientos vacíos.

¿De cuántas formas se pueden distribuir 3 pasajeros?
Lo que se está preguntando es cuantas posibles distribuciones de 3 asientos existen (no importa quien se sienta en cada asiento).

Solución

Se trata de ver cuantas selecciones ordenadas y sin repetición hay de 3 asientos entre 9.

Primero hagámoslo usando el principio de multiplicación:

- 1° persona: 9 lugares posibles. Total: 9
- 2° persona: 8 lugares posibles. Total: 9×8
- 3° persona: 7 lugares posibles. Total: $9 \times 8 \times 7$.

Este número es

$$9 \cdot 8 \cdot 7, \qquad 3 \text{ - factores.}$$

Podríamos haberlo hecho directamente por la proposición de la p. 17: elegir 3 elementos entre 9 son

$$\begin{aligned} \frac{9!}{(9-3)!} &= \frac{9!}{6!} \\ &= \frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} \\ &= 9 \cdot 8 \cdot 7 \end{aligned}$$

posibilidades. □

Permutaciones

Hay

$$\frac{n!}{0!} = n!$$

selecciones ordenadas y sin repetición de n elementos en un conjunto con n elementos.

Las selecciones ordenadas y sin repetición de n elementos en un conjunto con n elementos se denominan *permutaciones* de grado n.

Hay, pues, $n!$ permutaciones de grado n.

Permutaciones

Respondamos la siguiente pregunta:

¿De cuantas formas puedo ordenar n objetos?

Observemos que, ordenar n objetos es equivalente a seleccionar ordenadamente y sin repetición los n objetos (de un conjunto con n objetos).

Por lo tanto, la respuesta es $n!$.

Ejemplo.

Dado el conjunto $\mathbb{I}_4 = \{1, 2, 3, 4\}$ ¿cuántas permutaciones de los elementos de $\mathbb{I}_4$ hay?

Solución. $4!$. $\square$

Ejemplo

¿Cuántas permutaciones pueden formarse con las letras de *silvia*?

Solución

Afirmamos que se pueden formar $\frac{6!}{2!}$ palabras usando las letras de *silvia*.
Si escribo en lugar de *silvia*,

$$s \ i \ l \ v \ i' \ a$$

Es decir si cambio la segunda i por i', todas las letras son distintas, luego hay 6! permutaciones, pero cada par de permutaciones del tipo

$$\dots i \ \dots i' \ \dots$$

$$\dots i' \ \dots i \ \dots$$

coinciden, por lo tanto tengo que dividir por 2 el número total de permutaciones: $6!/2! = 360$. □

Tomemos la palabra

$$ramanathan$$

el número total de permutaciones es

$$\frac{10!}{4!2!}.$$

En efecto, escribiendo el nombre anterior así

$$r_1 \;\; a_1 \;\; m_1 \;\; a_2 \;\; n_1 \;\; a_3 \;\; t_1 \;\; h_1 \;\; a_4 \;\; n_2$$

el número total de permutaciones es 10! Pero permutando las a_i y las n_i sin mover las otras letras obtenemos la misma permutación de *ramanathan*.

Como hay 4! permutaciones de las letras a_1, a_2, a_3, a_4, y 2! de n_1, n_2 el número buscado es

$$\frac{10!}{4!2!}.$$