Matemática Discreta I
Clase 8 - Conteo (3° parte)

FAMAF / UNC

13 de abril de 2021

Selecciones sin orden

X finito de n elementos.

¿Cuántos subconjuntos de m elementos hay en X?

Ejemplo

Por ejemplo, sea $\mathbb{I}_5 = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ y nos interesan los subconjuntos de tres elementos. ¿Cuántos habrá?

Solución.

Contemos directamente:
$\{1, 2, 3\}$, $\{1, 2, 4\}$, $\{1, 2, 5\}$, $\{1, 3, 4\}$, $\{1, 3, 5\}$, $\{1, 4, 5\}$,
$\{2, 3, 4\}$, $\{2, 3, 5\}$, $\{2, 4, 5\}$,
$\{3, 4, 5\}$.

La respuesta, entonces, es 10.

¿Cómo podemos calcular este número sin contar caso por caso?

Una forma de individualizar un subconjunto de tres elementos en $\mathbb{I}_5$, consiste en, primero, seleccionar ordenadamente 3 elementos.

Habría, a priori, $5 \cdot 4 \cdot 3$ subconjuntos pues ese es el número de selecciones ordenadas y sin repetición de 3 elementos de $\mathbb{I}_5$.

Es claro que algunas de las selecciones ordenadas pueden determinar el mismo subconjunto. En efecto, por ejemplo, cualesquiera de las selecciones

$$123, \qquad 132, \qquad 213, \qquad 231, \qquad 312, \qquad 321$$

determina el subconjunto $\{1, 2, 3\}$.

Es decir las permutaciones de $\{1, 2, 3\}$ determinan el mismo subconjunto.

Veamos todos los casos:

123	132	213	231	312	321	$\to$	$\{1,2,3\}$
124	142	214	241	412	421	$\to$	$\{1,2,4\}$
125	152	215	251	312	521	$\to$	$\{1,2,5\}$
134	143	314	341	413	431	$\to$	$\{1,3,4\}$
135	153	315	351	513	531	$\to$	$\{1,3,5\}$
145	154	415	451	514	541	$\to$	$\{1,4,5\}$
234	243	324	342	423	432	$\to$	$\{2,3,4\}$
235	253	325	352	523	532	$\to$	$\{2,3,5\}$
245	254	425	452	524	542	$\to$	$\{2,4,5\}$
345	354	435	453	534	543	$\to$	$\{3,4,5\}$

Es decir $3! = 6$ selecciones ordenadas nos determinan un subconjunto de tres elementos. Por lo tanto, el número total de subconjuntos de 3 elementos es

$$\frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{3!} = \frac{5!}{3!(5-3)!}$$

Podemos hacer el mismo razonamiento, si tuviéramos que elegir subconjuntos de 2 elementos:

- Tenemos $5 \cdot 4 = \frac{5!}{3!}$ selecciones ordenadas de 2 elementos.
- La cantidad de permutaciones de dos elementos es $2!$, luego,
- hay $\frac{5!}{3!2!} = 10$ subconjuntos de 2 elementos.

En el caso general de subconjuntos de m elementos de un conjunto de n elementos ($m \leq n$) podemos razonar en forma análoga.

- Tenemos $\dfrac{n!}{(n-m)!}$ selecciones ordenadas de m elementos entre n.
- La cantidad de permutaciones de m elementos es $m!$, luego,
- hay $\dfrac{n!}{(n-m)!m!}$ subconjuntos de m elementos.

Teorema

Sea X un conjunto de n elementos. Entonces el número total de subconjuntos de m elementos de X es

$$\frac{n!}{(n-m)!\,m!}$$

Número combinatorio

Sean $n, m \in \mathbb{N}_0$, $m \leq n$. Definimos

$$\binom{n}{m} = \frac{n!}{(n-m)!\, m!}$$

el *número combinatorio* asociado al par n, m con $m \leq n$.

Por razones que se verán más adelante se denomina también el *coeficiente binomial* asociado al par n, m con $m \leq n$.

Definimos también

$$\binom{n}{m} = 0, \qquad \text{si } m > n.$$

Hay unos pocos números combinatorios que son fácilmente calculables:

$$\binom{n}{0} = \binom{0}{0} = 1 \qquad \text{y} \qquad \binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n.$$

Estos resultados se obtienen por aplicación directa de la definición (recordar que $0! = 1$).

Con el número combinatorio podemos reescribir el resultado visto más arriba:

Teorema

Sean $n, m \in \mathbb{N}_0$, $m \leq n$, y supongamos que el conjunto X tiene n elementos. Entonces la cantidad de subconjuntos de X con m elementos es $\binom{n}{m}$.

Ejemplo

¿Cuántos comités pueden formarse de un conjunto de 6 mujeres y 4 hombres, si el comité debe estar compuesto por 4 mujeres y 2 hombres?

Solución

Debemos elegir 4 mujeres entre 6, y la cantidad de elecciones posibles es $\binom{6}{4}$. Por otro lado, hay $\binom{4}{2}$ formas de elegir 2 hombres entre 4. Luego, por el principio de multiplicación, el resultado es

$$\binom{6}{3} \cdot \binom{4}{2} = \frac{6!}{2!4!} \cdot \frac{4!}{2!2!} = \frac{6 \cdot 5}{2} \cdot \frac{4 \cdot 3}{2} = 15 \cdot 6 = 90.$$

Simetría del número combinatorio

Proposición

Sean $m, n \in \mathbb{N}_0$, tal que $m \leq n$. Entonces

$$\binom{n}{m} = \binom{n}{n-m}.$$

Demostración.

$$\begin{aligned} \binom{n}{n-m} &= \frac{n!}{(n-(n-m))!\,(n-m)!} \\ &= \frac{n!}{m!\,(n-m)!} \\ &= \frac{n!}{(n-m)!\,m!} = \binom{n}{m}. \end{aligned}$$

El hecho de que

$$\binom{n}{m} = \binom{n}{n-m}.$$

se puede interpretar en términos de subconjuntos: $\binom{n}{m}$ es el número de subconjuntos de m elementos de un conjunto de n elementos.

Puesto que con cada subconjunto de m elementos hay unívocamente asociado un subconjunto de $n-m$ elementos, su complemento en X, es claro que

$$\binom{n}{m} = \binom{n}{n-m}.$$

Triángulo de Pascal

Teorema

Sean $m, n \in \mathbb{N}$, tal que $m \leq n$. Entonces

$$\binom{n}{m-1} + \binom{n}{m} = \binom{n+1}{m}$$

Demostración.

El enunciado nos dice que debemos demostrar que

$$\frac{n!}{(n-m+1)!\,(m-1)!} + \frac{n!}{(n-m)!\,m!} = \frac{(n+1)!}{(n-m+1)!\,m!}$$

y lo dejamos como ejercicio. $\square$

Veamos unos pocos ejemplos de la fórmula $\binom{n}{m-1} + \binom{n}{m} = \binom{n+1}{m}$ o equivalentemente.

$$\binom{n+1}{m} = \binom{n}{m-1} + \binom{n}{m}.$$

$$\binom{4}{2} = \binom{3}{1} + \binom{3}{2} = 3 + 3 = 6.$$

$$\binom{5}{2} = \binom{4}{1} + \binom{4}{2} = 4 + 6 = 10,$$
$$\binom{5}{3} = \binom{4}{2} + \binom{4}{3} = 6 + 4 = 10.$$

El teorema precedente permite calcular los coeficientes binomiales:

$$
\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & \binom{0}{0} & & & & \\
 & & & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} & & & \\
 & & \binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} & & \\
 & \binom{3}{0} & & \binom{3}{1} & & \binom{3}{2} & & \binom{3}{3} & \\
\binom{4}{0} & & \binom{4}{1} & & \binom{4}{2} & & \binom{4}{3} & & \binom{4}{4}
\end{array}
$$

Cada término interior es suma de los dos términos inmediatos superiores.
Los elementos en los lados valen 1.

Escribamos los valores de cada fila:

$$
\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 2 & & 1 & & \\
 & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & \\
1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1
\end{array}
$$

El triángulo es denominado *triángulo de Pascal*.

Entre las propiedades que cuenta el triángulo de Pascal está la de ser simétrico respecto al eje vertical central, como consecuencia de la simetría de los números combinatorios.