Práctico 1
Matemática Discreta I – Año 2023/1
FAMAF

Ejercicios resueltos (1° parte)

(1) Demostrar las siguientes afirmaciones donde a, b, c y d son siempre números enteros. Justificar cada uno de los pasos en cada demostración indicando el axioma o resultado que utiliza.

a) $a = -(-a)$
Rta: $-a$ es el inverso aditivo de a y por lo tanto el inverso aditivo de $-a$ es a. Ahora bien, $-(-a)$ es el inverso aditivo de $-a$, luego por unicidad del inverso aditivo (axioma I6), obtenemos que $a = -(-a)$.

b) $a = b$ si y sólo si $-a = -b$
Rta: Si $a = b$, es claro que $-a = -b$. Si $-a = -b$, entonces $-(-a) = -(-b)$ y por *a)*, tenemos que $a = b$.

c) $a + a = a$ implica que $a = 0$.
Rta: Sumo $-a$ a ambos lados de la ecuación $a + a = a$ y obtengo, por axioma I6, $-a + a + a = -a + a$, luego $0 + a = 0$ y, finalmente por axioma I4, $a = 0$.

(2) Idem (1).

a) $0 < a$ y $0 < b$ implican $0 < a \cdot b$
Rta: Como $0 < a$ y $0 < b$, por axioma I11, $0 \cdot b < a \cdot b$. Por un resultado del teórico tenemos que $0 \cdot b = 0$, luego $0 < a \cdot b$.

b) $a < b$ y $c < 0$ implican $b \cdot c < a \cdot c$
Rta: Sumamos $-c$ a la inecuación $c < 0$ y obtenemos, por axioma I10, $-c + c < -c + 0$, luego por axioma I6 en la parte izquierda y axioma I4 en la parte derecha, obtenemos $0 < -c$: Ahora bien por axioma I11, $a < b$ y $0 < -c$ implican $a \cdot (-c) < b \cdot (-c)$. Por la regla de los signos tenemos $-a \cdot c < -b \cdot c$. Sumando $a \cdot c$ y $b \cdot c$ a ambos lados de la inecuación y aplicando axioma I10 y repetidamente los axiomas I4 e I6, obtenemos $b \cdot c < a \cdot c$.

(3) Probar las siguientes afirmaciones, justificando los pasos que realiza.

a) Si $0 < a$ y $0 < b$ entonces $a < b$ si y sólo si $a^2 < b^2$.
Rta: Como $a < b$ y $0 < a$ por I11 obtenemos $a^2 < ba$. Como $a < b$ y $0 < b$ por I11 obtenemos $ab < b^2$. Luego $a^2 < ba = ab < b^2$.

b) Si $a \neq 0$ entonces $0 < a^2$.
Rta: Por tricotomía (axioma I8) o bien $0 < a$ o bien $a < 0$. Si $0 < a$, entonces, por *a)* tenemos que $0 = 0^2 < a^2$. Si $a < 0$, sumando $-a$ a ambos

miembros de la desigualdad y aplicando axiomas I10, I6 e I4 obtenemos $0 < -a$. Luego, por *a)*, $0 = 0^2 < (-a)^2 = a^2$. La última igualdad se deduce de la regla de los signos.

c) Si $a \neq b$ entonces $a^2 + b^2 > 0$.
Rta: Como $a \neq b$, alguno de los dos, a o b, es distinto de cero. Supongamos que $a \neq 0$ y, entonces, por *b)* tenemos que $0 =< a^2$. Análogamente, si $b \neq 0$, $0 < b^2$ y sumando a^2 a esta inecuación, por axioma I10, obtenemos $a^2 + 0 < a^2 + b^2$, que por axioma I4, es $a^2 < a^2 + b^2$. Como $0 =< a^2$, tenemos $0 =< a^2 < a^2 + b^2$. Falta considerar el caso en que $b = 0$. en este caso $a^2 + b^2 = a^2 + 0^2 = a^2 + 0 = a^2 > 0$.

d) Probar que si $a + c < b + c$ entonces $a < b$.
Rta: Por axioma I10 $a + c - c < b + c - c$. Por axiomas I6 e I4 obtenemos $a < b$.