

# Matemática Discreta I

## Clase 19 - Grafos 1

FAMAF / UNC

21 de mayo de 2020

# Grafos y sus representaciones

Usaremos la siguiente definición en lo que sigue: dado un conjunto  $X$  un *2-subconjunto* es un subconjunto de  $X$  de dos elementos.

## Definición

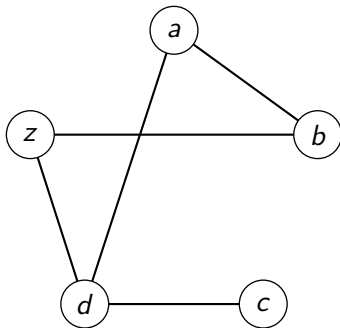
Un *grafo*  $G$  consiste de un conjunto finito  $V$ , cuyos miembros son llamados *vértices*, y un conjunto de 2-subconjuntos de  $V$ , cuyos miembros son llamados *aristas*.

Nosotros usualmente escribiremos  $G = (V, E)$  y diremos que  $V$  es el *conjunto de vértices* y  $E$  es el *conjunto de aristas*.

Un ejemplo típico de un grafo  $G = (V, E)$  es dado por los conjuntos

$$V = \{a, b, c, d, z\}, \quad E = \{\{a, b\}, \{a, d\}, \{b, z\}, \{c, d\}, \{d, z\}\}.$$

Este ejemplo y la definición misma no son demasiado esclarecedores, y solamente cuando consideramos la *representación pictórica* de un grafo es cuando entendemos un poco más la definición.



- La representación pictórica es intuitivamente atractiva pero es claramente inútil cuando deseamos comunicarnos con una computadora.
- Debemos representar el grafo mediante cierta clase de lista o tabla.

## Definición

Diremos que dos vértices  $x$  e  $y$  de un grafo son *adyacentes* cuando  $\{x, y\}$  es una arista.

## Definición

Podemos representar un grafo  $G = (V, E)$  por su *lista de adyacencia*, donde cada vértice  $v$  encabeza una lista de aquellos vértices que son adyacentes a  $v$ :

## Ejemplo

Vimos el  $G = (V, E)$  es dado por

$$V = \{a, b, c, d, z\}, \quad E = \{\{a, b\}, \{a, d\}, \{b, z\}, \{c, d\}, \{d, z\}\}.$$

Su lista de adyacencia es

<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>	<i>d</i>	<i>z</i>
<i>b</i>	<i>a</i>	<i>d</i>	<i>a</i>	<i>b</i>
<i>d</i>	<i>z</i>		<i>c</i>	<i>d</i>
			<i>z</i>	

En Python el grafo estaría representado por la lista de listas

$$[[b, d], [a, z], [d], [a, c, z], [b, d]].$$

## Definición

Por cada entero positivo  $n$  definimos el *grafo completo*  $K_n$  como el grafo con  $n$  vértices y en el cual cada par de vértices es adyacente.

La lista de adyacencia de  $K_n$  es una lista donde en la columna del vértice  $i$  están todos los vértices menos  $i$  ( $n - 1$  vértices).

¿Cuántas aristas tiene  $K_n$ ?

De cada vértice “salen”  $n - 1$  aristas, las que van a otros vértices.

Si sumamos  $n$ -veces las  $n - 1$  aristas es claro que estamos contando cada arista dos veces, luego el número total de aristas es  $n(n - 1)/2$ .

Observar que esta es una demostración, usando grafos, de que  $\sum_{i=1}^{n-1} i = n(n - 1)/2$ .

## Ejemplo

Mario y su mujer Abril dan una fiesta en la cual hay otras cuatro parejas de casados. Las parejas, cuando arriban, estrechan la mano a algunas personas, pero, naturalmente, no se estrechan la mano entre marido y mujer. Cuando la fiesta finaliza el profesor pregunta a los otros a cuantas personas han estrechado la mano, recibiendo 9 respuestas diferentes. ¿Cuántas personas estrecharon la mano de Abril?

## Solución

Construyamos un grafo cuyos vértices son las personas que asisten a la fiesta. Las aristas del grafo son las  $\{x, y\}$  siempre y cuando  $x$  e  $y$  se hayan estrechado las manos.

Puesto que hay nueve personas aparte de Mario, y que una persona puede estrechar a lo sumo a otras 8 personas, se sigue que las 9 respuestas diferentes que ha recibido el profesor deben ser 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8.





Ahora, el vértice 8 alcanza a todos los otros vértices excepto uno, el cual debe por lo tanto representar a la esposa de 8. Este vértice debe ser el 0 el cual por cierto que no está unido al 8 (ni obviamente a ningún otro).

Luego 8 y 0 son una pareja de casados y 8 está unido a 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 y  $M$ . En particular el 1 está unido al 8 y ésta es la única arista que parte del 1.

Por consiguiente 7 no está unido al 0 y al 1 y sí está unido a 2, 3, 4, 5, 6, 8 y  $M$ . La esposa de 7 debe ser 1, puesto que 0 está casado con 8.

Continuando con este razonamiento vemos que 6 y 2, y 5 y 3 son parejas de casados.

Se sigue entonces que  $M$  y 4 están casados, luego el vértice 4 representa a Abril, quien estrechó la mano de cuatro personas. □

## Ejemplo

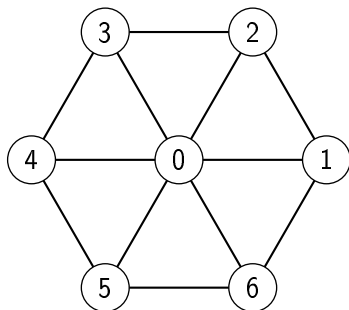
Los senderos de un jardín han sido diseñados dándoles forma de *grafo rueda*  $W_n$ , cuyos vértices son  $V = \{0, 1, 2, \dots, n\}$  y sus aristas son

$$\{0, 1\}, \{0, 2\}, \dots, \{0, n\}, \\ \{1, 2\}, \{2, 3\}, \dots, \{n-1, n\}, \{n, 1\}.$$

Describir una ruta por los senderos de tal forma que empiece y termine en el vértice 0 y que pase por cada vértice una sola vez.

## Solución

Primero dibujemos el grafo para darnos cuenta de por que se llama "rueda".  
Dibujemos  $W_6$ :



El dibujo nos orienta de como puede ser una ruta: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 0.

En general una respuesta es: 0, 1, 2, 3,  $\dots$ ,  $n - 1$ ,  $n$ , 0.

