

Matemática Discreta I

Clase 6 - Conteo

FAMAF / UNC

4 de abril de 2023

Selecciones ordenadas con repetición

Ejemplo

Sea $X = \{1, 2, 3\}$.

¿De cuántas formas se pueden elegir dos de estos números en forma ordenada?

Notación: si elegimos a y b en forma ordenada, denotamos ab .

Entonces, las posibilidades son

11	12	13
21	22	23
31	32	33

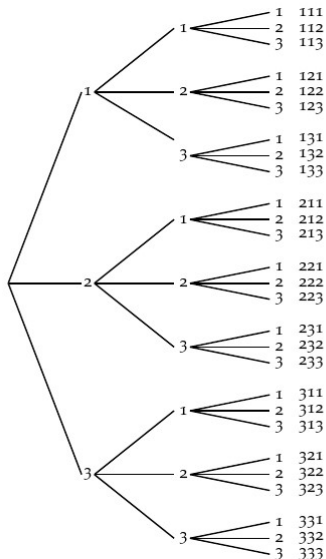
Es decir, hay $9 = 3^2$ formas posibles.

Avancemos un poco más y ahora elijamos en forma ordenada 3 elementos de 1, 2, 3, es claro que estas elecciones son

111	211	311
112	212	312
113	213	313
121	221	321
122	222	322
123	223	323
131	231	331
132	232	332
133	233	333.

El total de elecciones posibles $27 = 3^3$.

Un diagrama arbolado ayuda a pensar.



De los dos ejemplos anteriores se podría inferir que hay 3^4 formas posibles de elegir en forma ordenada 4 elementos del conjunto 1, 2, 3. También, que cuando elijamos 5 habrá 3^5 posibilidades y así sucesivamente para enteros más grandes.

¿Cómo justificamos esto? Por el principio de multiplicación

Hemos visto en las páginas anteriores que hay 3^3 formas posibles de elegir 3 números entre 1, 2, 3.

Ahora, para elegir el cuarto número hay 3 posibilidades, por lo tanto, por el principio de multiplicación, el número de posibilidades con cuatro elecciones es

$$3^3 \times 3 = 3^4.$$

El razonamiento anterior se puede extender:

Proposición

Sean $m, n \in \mathbb{N}$. Hay n^m formas posibles de elegir ordenadamente m elementos de un conjunto de n elementos.

Idea de la prueba.

La prueba de esta proposición se basa en aplicar el principio de multiplicación $m - 1$ veces,

A nivel formal, debemos hacer inducción sobre m y usar el principio de multiplicación en el paso inductivo.



Ejemplo

¿Cuántos números de cuatro dígitos pueden formarse con los dígitos 1, 2, 3, 4, 5, 6?

Por la proposición anterior es claro que hay 6^4 números posibles.

Ejemplo

¿Cuántos números de 5 dígitos y capicúas pueden formarse con los dígitos 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8?

Un número capicúa de cinco dígitos es de la forma

$$xyzyx$$

Se reduce a ver cuántos números de tres dígitos pueden formarse con aquéllos dígitos. Exactamente 8^3 .

Ejemplo

Sea X un conjunto de n elementos. ¿Cuántos subconjuntos tiene este conjunto?

Por ejemplo, si $X = \{a, b, c\}$ los subconjuntos de X son:

$$\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}.$$

Es decir, si X es un conjunto de 3 elementos, entonces tiene 8 subconjuntos.

$$\begin{aligned} \text{Sea } A \subseteq X &\rightarrow a \in A \text{ o } a \notin A \text{ (2 posibilidades)} \\ &\rightarrow b \in A \text{ o } b \notin A \text{ (2 posibilidades)} \\ &\rightarrow c \in A \text{ o } c \notin A \text{ (2 posibilidades)} \end{aligned}$$

Luego hay

$$2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^3 = 8$$

posibles subconjuntos de X .

Razonando de manera análoga obtenemos nuestro primer resultado “no sencillo” de conteo.

Proposición

La cantidad de subconjuntos de un conjunto de n elementos es 2^n .

Dado X un conjunto, denotamos $\mathcal{P}(X)$, *partes de X* , al conjunto formado por todos los subconjuntos de X , por ejemplo

$$\mathcal{P}(\{1, 2\}) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}.$$

Si X es un conjunto finito la proposición anterior nos dice que

$$|\mathcal{P}(X)| = 2^{|X|}$$

Selecciones ordenadas sin repetición

Sea X un conjunto finito de n elementos.

¿De cuántas formas podemos elegir m de X en forma ordenada?

Ejemplo

Elegir en forma ordenada y sin repetición 2 elementos del conjunto $X = \{a, b, c\}$, tenemos ab , ac , ba , bc , ca , cb , 6 elecciones.

Es decir si el conjunto es $X = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$, las selecciones deben ser del tipo

$$a_{i_1} a_{i_2} \cdots a_{i_m}$$

donde $a_{i_j} \neq a_{i_k}$ si $i \neq k$.

Por ejemplo, las selecciones de 3 elementos en forma ordenada y sin repetición de $\{1, 2, 3\}$ son exactamente

123, 132, 213, 231, 312, 321

(son las ternas donde los tres números son distintos).

O sea hay 6 selecciones ordenadas y sin repetición de elementos de $\{1, 2, 3\}$.

Notemos que:

1° elemento \rightarrow 3 posibilidades: 1, 2, 3

2° elemento \rightarrow 2 posibilidades: distinto al elegido en 1°

3° elemento \rightarrow 1 posibilidades: distinto a los elegidos en 1° y 2°

Tenemos entonces $3 \cdot 2 \cdot 1 = 3!$ selecciones posibles.

Pensemos ahora que queremos elegir en forma ordenada y sin repetición 3 elementos entre 5. Entonces para la primera elección tenemos 5 posibilidades, para la segunda 4 posibilidades y para la tercera 3 posibilidades haciendo un total de

$$5 \cdot 4 \cdot 3$$

selecciones posibles.

Proposición

Si $n \geq m$ entonces existen

$$n \cdot (n - 1) \cdots (n - m + 1), \quad (m - \text{factores})$$

selecciones ordenadas y sin repetición de m elementos de un conjunto de n elementos.

Ejemplo

Si hay 10 personas ¿De cuántas formas puedo hacer una fila de 7 personas?

Solución.

Razonando,

1° puesto	→	10	posibilidades
2° puesto	→	9	posibilidades
3° puesto	→	8	posibilidades
4° puesto	→	7	posibilidades
5° puesto	→	6	posibilidades
6° puesto	→	5	posibilidades
7° puesto	→	4	posibilidades

La solución es entonces $10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4$.



Ejemplo (repetido)

Si hay 10 personas ¿De cuántas formas puedo hacer una fila de 7 personas?

Solución (aplicando la proposición de p. 12).

Cantidad de elementos: $\rightarrow n = 10$

Cantidad de elecciones: $\rightarrow m = 7$

Por lo tanto, $n - m + 1 = 10 - 7 + 1 = 4$.

La solución es entonces: $10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4$.

Observar que

$$\begin{aligned} 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 &= \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{3 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{10!}{3!} \\ &= \frac{10!}{(10 - 7)!}. \end{aligned}$$



Ejemplo

¿Cómo elegir 4 elementos entre n ?

Solución.

Razonando,

1° puesto \rightarrow $n-1$ posibilidades

2° puesto \rightarrow $n-2$ posibilidades

3° puesto \rightarrow $n-3$ posibilidades

4° puesto \rightarrow $n-4$ posibilidades

La solución es entonces

$$\begin{aligned}(n-1)(n-2)(n-3)(n-4) &= \frac{(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)!}{(n-5)!} \\ &= \frac{n!}{(n-5)!}\end{aligned}$$



En general

$$n \cdot (n-1) \cdots (n-m+1) = \frac{n \cdot (n-1) \cdots (n-m+1) \cdot (n-m) \cdots 2 \cdot 1}{(n-m) \cdots 2 \cdot 1}.$$

Es decir

$$n \cdot (n-1) \cdots (n-m+1) = \frac{n!}{(n-m)!}.$$

Por lo tanto podemos reescribir la proposición en forma mas compacta:

Proposición

Si $n \geq m$ entonces existen

$$\frac{n!}{(n-m)!}$$

selecciones ordenadas y sin repetición de m elementos de un conjunto de n elementos.

Ejemplo

Si en un colectivo hay 9 asientos vacíos.

¿De cuántas formas se pueden distribuir 3 pasajeros?

Lo que se está preguntando es cuantas posibles distribuciones de 3 asientos existen (no importa quien se sienta en cada asiento).

Solución

Se trata de ver cuantas selecciones ordenadas y sin repetición hay de 3 asientos entre 9.

Primero hagámoslo usando el principio de multiplicación:

- 1° persona: 9 lugares posibles. Total: 9
- 2° persona: 8 lugares posibles. Total: 9×8
- 3° persona: 7 lugares posibles. Total: $9 \times 8 \times 7$.

Este número es

$$9 \cdot 8 \cdot 7, \quad 3 \text{ - factores.}$$

Podríamos haberlo hecho directamente por la proposición de la p. 17: elegir 3 elementos entre 9 son

$$\begin{aligned} \frac{9!}{(9-3)!} &= \frac{9!}{6!} \\ &= \frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} \\ &= 9 \cdot 8 \cdot 7 \end{aligned}$$

posibilidades.



Permutaciones

Hay

$$\frac{n!}{0!} = n!$$

selecciones ordenadas y sin repetición de n elementos en un conjunto con n elementos.

Las selecciones ordenadas y sin repetición de n elementos en un conjunto con n elementos se denominan *permutaciones* de grado n .

Hay, pues, $n!$ permutaciones de grado n .

Permutaciones

Respondamos la siguiente pregunta:

¿De cuantas formas puedo ordenar n objetos?

Observemos que, ordenar n objetos es equivalente a seleccionar ordenadamente y sin repetición los n objetos (de un conjunto con n objetos).

Por lo tanto, la respuesta es $n!$.

Ejemplo.

Dado el conjunto $\mathbb{I}_4 = \{1, 2, 3, 4\}$ ¿cuántas permutaciones de los elementos de \mathbb{I}_4 hay?

Solución. $4!$.



Ejemplo

¿Cuántas permutaciones pueden formarse con las letras de *silvia*?

Solución

Afirmamos que se pueden formar $\frac{6!}{2!}$ palabras usando las letras de *silvia*.

Si escribo en lugar de *silvia*,

s i l v i' a

Es decir si cambio la segunda *i* por *i'*, todas las letras son distintas, luego hay $6!$ permutaciones, pero cada par de permutaciones del tipo

$\dots i \dots i' \dots$

$\dots i' \dots i \dots$

coinciden, por lo tanto tengo que dividir por 2 el número total de permutaciones: $6!/2! = 360$.



Tomemos la palabra

ramanathan

el número total de permutaciones es

$$\frac{10!}{4!2!}.$$

En efecto, escribiendo el nombre anterior así

$r_1 \ a_1 \ m_1 \ a_2 \ n_1 \ a_3 \ t_1 \ h_1 \ a_4 \ n_2$

el número total de permutaciones es $10!$ Pero permutando las a_i y las n_i sin mover las otras letras obtenemos la misma permutación de *ramanathan*.

Como hay $4!$ permutaciones de las letras a_1, a_2, a_3, a_4 , y $2!$ de n_1, n_2 el número buscado es

$$\frac{10!}{4!2!}.$$