Matemática Discreta I
Clase 6 - Conteo

FAMAF / UNC

6 de abril de 2021

Cardinal de un conjunto

Un conjunto A es finito si podemos contar la cantidad de elementos que tiene. En ese caso denotaremos $|A|$ la cantidad de elementos de A y la llamaremos el *cardinal de A*

Por ejemplo, los conjuntos

$$A = \{a, b, z, x, 1\}, \qquad B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

tienen 5 elementos cada uno. Es decir $|A| = 5$ y $|B| = 5$.

Conjuntos como $\mathbb{Z}$, $\mathbb{N}$ o $\mathbb{R}$ son infinitos y por lo tanto no tiene sentido hablar de la cantidad de elementos de estos conjuntos.

El principio de adición

Dadas dos actividades X e Y, si se puede realizar X de n formas distintas o, alternativamente, se puede realizar Y de m formas distintas. Entonces el número de formas de realizar "X o Y" es $n + m$.

Ejemplo

Supongamos que una persona va a salir a pasear y puede ir al cine donde hay 3 películas en cartel o al teatro donde hay 4 obras posibles. Entonces, tendrá un total de $3 + 4 = 7$ formas distintas de elegir el paseo.

Este principio, el *principio de adición*, es el más básico del conteo y más formalmente dice que si A y B son conjuntos finitos disjuntos, entonces

$$|A \cup B| = |A| + |B|.$$

Se generaliza fácilmente: Sean $A_1, \ldots, A_n$ conjuntos finitos tal que $A_i \cap A_j = \emptyset$ cuando $i \neq j$, entonces

$$|A_1 \cup \cdots \cup A_n| = |A_1| + \cdots + |A_n|.$$

Remarcamos que para aplicar el principio de adición es necesario que los eventos se **excluyan mutuamente**. El caso general es

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|.$$

El principio de multiplicación

Suponga que una actividad consiste de 2 etapas y la primera etapa puede ser realizada de n_1 maneras y la etapa 2 puede realizarse de n_2 maneras, independientemente de como se ha hecho la etapa 1.

Principio de multiplicación: la actividad puede ser realizada de $n_1 \cdot n_2$ formas distintas.

Ejemplo

Supongamos que la persona del ejemplo anterior tiene suficiente tiempo y dinero para ir primero al cine (3 posibilidades) y luego al teatro (4 posibilidades).

Entonces tendrá $3 \cdot 4 = 12$ formas distintas de hacer el paseo.

Formalmente, si A, B conjuntos y definimos el *producto cartesiano* entre A y B por

$$A \times B = \{(a, b) : a \in A, b \in B\}.$$

Entonces si A y B son conjuntos finitos se cumple que

$$|A \times B| = |A| \cdot |B|.$$

Caso especial: $A = B$.

Ejemplo

¿Cuántas palabras de dos letras hay? (26 letras, no importa si tienen significado)

Respuesta: $26 \cdot 26$.

Selecciones ordenadas con repetición

Ejemplo

Sea $X = \{1, 2, 3\}$.

¿De cuántas formas se pueden elegir dos de estos números en forma ordenada?

Notación: si elegimos a y b en forma ordenada, denotamos ab.

Entonces, las posibilidades son

$$\begin{array}{ccc} 11 & 12 & 13 \\ 21 & 22 & 23 \\ 31 & 32 & 33 \end{array}$$

Es decir, hay $9 = 3^2$ formas posibles.

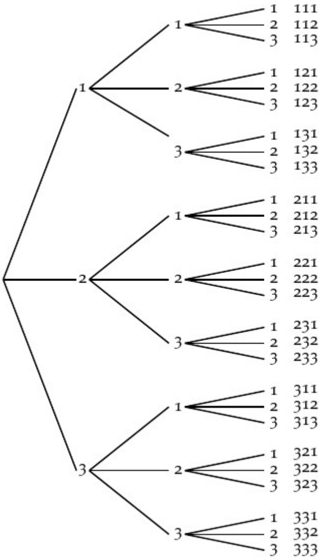
¿Cómo justificamos esto? Por el principio de multiplicación

Avancemos un poco más y ahora elijamos en forma ordenada 3 elementos de $1, 2, 3$, es claro que estas elecciones son

$$\begin{array}{ccc}
111 & 211 & 311 \\
112 & 212 & 312 \\
113 & 213 & 313 \\
121 & 221 & 321 \\
122 & 222 & 322 \\
123 & 223 & 323 \\
131 & 231 & 331 \\
132 & 232 & 332 \\
133 & 233 & 333.
\end{array}$$

El total de elecciones posibles $27 = 3^3$.

Un diagrama arbolado ayuda a pensar.



El razonamiento anterior se puede extender:

Proposición

Sean $m, n \in \mathbb{N}$. Hay n^m formas posibles de elegir ordenadamente m elementos de un conjunto de n elementos.

Idea de la prueba.

La prueba de esta proposición se basa en aplicar el principio de multiplicación $m - 1$ veces,

A nivel formal, debemos hacer inducción sobre m y usar el principio de multiplicación en el paso inductivo.

Ejemplo

¿Cuántos números de cuatro dígitos pueden formarse con los dígitos $1, 2, 3, 4, 5, 6$?

Por la proposición anterior es claro que hay 6^4 números posibles.

Ejemplo

¿Cuántos números de 5 dígitos y capicúas pueden formarse con los dígitos $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$?

Un número capicúa de cinco dígitos es de la forma

$$xyzyx$$

Se reduce a ver cuántos números de tres dígitos pueden formarse con aquéllos dígitos. Exactamente 8^3.

Ejemplo

Sea X un conjunto de n elementos. ¿Cuántos subconjuntos tiene este conjunto?

Por ejemplo, si $X = \{a, b, c\}$ los subconjuntos de X son:

$$\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}.$$

Es decir, si X es un conjunto de 3 elementos, entonces tiene 8 subconjuntos.

$$\begin{aligned} \text{Sea } A \subseteq X \quad & \rightarrow \quad a \in A \text{ o } a \notin A \text{ (2 posibilidades)} \\ & \rightarrow \quad b \in A \text{ o } b \notin A \text{ (2 posibilidades)} \\ & \rightarrow \quad c \in A \text{ o } c \notin A \text{ (2 posibilidades)} \end{aligned}$$

Luego hay

$$2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^3 = 8$$

posibles subconjuntos de X.

Razonando de manera análoga obtenemos nuestro primer resultado “no sencillo” de conteo.

Proposición

La cantidad de subconjuntos de un conjunto de n elementos es 2^n.

Dado X un conjunto, denotamos $\mathcal{P}(X)$ el conjunto formado por todos los subconjuntos de X, por ejemplo

$$\mathcal{P}(\{1,2\}) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1,2\}\}.$$

Si X es un conjunto finito la proposición anterior nos dice que

$$|P(X)| = 2^{|X|}$$