

# Matemática Discreta I

## Clase 19 - Isomorfismo de grafos / Valencia

FAMAF / UNC

1 de junio de 2023

# Isomorfismo de grafos

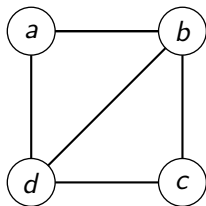
¿Cuándo debemos considerar a dos grafos “iguales”?

- No importa el nombre de los vértices.
- Un grafo se puede dibujar de muchas maneras.
- La propiedad característica de un grafo es la manera en que los vértices están conectados por aristas.

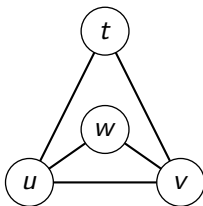
Dicho en forma directa: vamos a considerar que dos grafos  $G_1$  y  $G_2$  son “iguales” si cambiando el nombre de los vértices de  $G_2$  por el de los vértices de  $G_1$ , en cierto orden, obtenemos  $G_1$ .

## Ejemplo

Tenemos dos grafos:



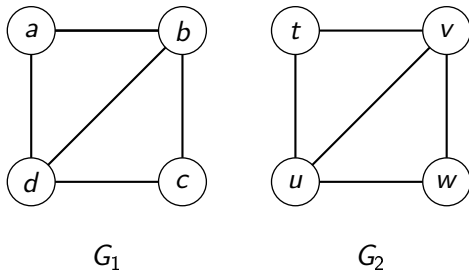
$G_1$



$G_2$

Parecen ser distintos.

Sin embargo, si dibujamos  $G_2$  diferente (“dando vuelta  $w$  alrededor del eje  $uv$ ” y rotando), obtenemos:



Los cuales claramente describen el mismo grafo, pero con los nombres de los vértices cambiados.

# Isomorfismo de grafos: preliminares

## Definición

Dado dos conjuntos  $X, Y$  diremos que una aplicación  $f : X \rightarrow Y$  es *biyectiva* si para cada  $y \in Y$  existe un único  $x \in X$  tal que  $f(x) = y$ .

Una propiedad importante, de las funciones biyectivas es:

## Teorema

*$f$  es biyectiva si y sólo si  $f$  tiene inversa, es decir existe  $f^{-1} : Y \rightarrow X$ , tal que*

$$f(f^{-1}(y)) = y \quad \forall y \in Y \quad \wedge \quad f^{-1}(f(x)) = x, \quad \forall x \in X.$$

## Ejemplo

La función

$$f : \{1, 2, 3\} \rightarrow \{a, b, c\} \quad \text{definida } f(1) = c, f(2) = b, f(3) = a$$

es biyectiva y su inversa es

$$f^{-1}(a) = 3, f^{-1}(b) = 2, f^{-1}(c) = 1.$$

# Isomorfismos de grafos: definición

## Definición

Dos grafos  $G_1$  y  $G_2$  se dicen que son *isomorfos* cuando existe una biyección  $\alpha$  entre el conjunto de vértices de  $G_1$  y el conjunto de vértices de  $G_2$  tal que

- si  $\{x, y\}$  es una arista de  $G_1$  entonces  $\{\alpha(x), \alpha(y)\}$  es una arista de  $G_2$  y, recíprocamente,
- si  $\{z, w\}$  es una arista de  $G_2$  entonces  $\{\alpha^{-1}(z), \alpha^{-1}(w)\}$  es una arista de  $G_1$ .

Equivalentemente, diremos que  $\alpha$  es un *isomorfismo* si es una biyección entre el conjunto de vértices de  $G_1$  y el conjunto de vértices de  $G_2$  tal que por cada  $\{z, w\}$  arista de  $G_2$ , existe una y solo una  $\{x, y\}$  arista de  $G_1$  tal que  $\{\alpha(x), \alpha(y)\} = \{z, w\}$ .

## Ejemplo

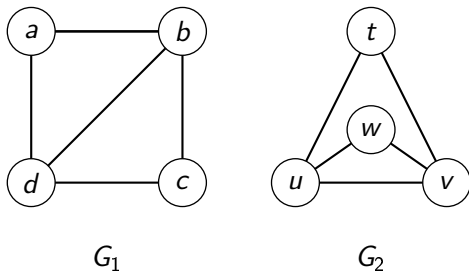


Figura:  $G_1$  y  $G_2$  son isomorfos

Una biyección es dada por

$$\alpha(a) = t, \quad \alpha(b) = v, \quad \alpha(c) = w, \quad \alpha(d) = u.$$

Podemos comprobar que a cada arista de  $G_1$  le corresponde una arista de  $G_2$  y viceversa.



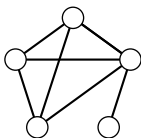
- Para mostrar que dos grafos no son isomorfos, nosotros debemos demostrar que no hay una biyección entre el conjunto de vértices de uno con el conjunto de vértices de otro, que lleve las aristas de uno en las aristas del otro.
- Si dos grafos tienen diferente número de vértices, entonces no es posible ninguna biyección, y los grafos no pueden ser isomorfos.
- Si los grafos tienen el mismo número de vértices, pero diferente número de aristas, entonces hay biyecciones de vértices pero ninguna de ellas puede ser un isomorfismo.

## Definición

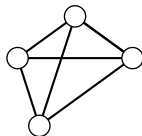
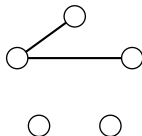
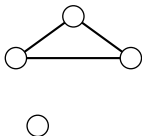
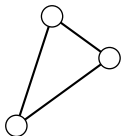
Sea  $G = (V, E)$  un grafo. Se dice que  $G' = (V', E')$  es *subgrafo* de  $G = (V, E)$  si

(1)  $G'$  es un grafo, y (2)  $V' \subset V$ ,  $E' \subset E$ .

Algunos subgrafos de



son:



Es claro, pero no lo demostraremos aquí, que un isomorfismo lleva un subgrafo a un subgrafo isomorfo. Este resultado es una herramienta que puede ser útil para ver si dos grafos no son isomorfos.

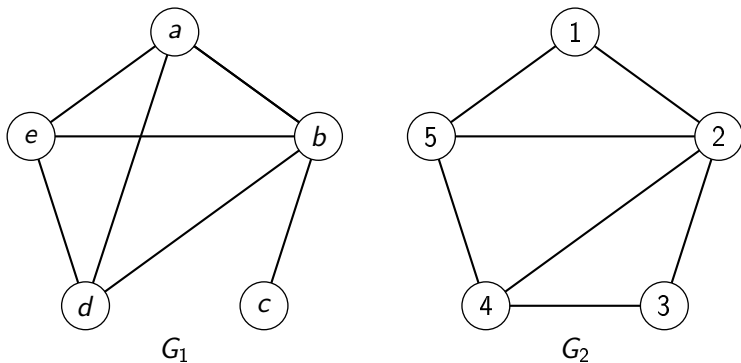


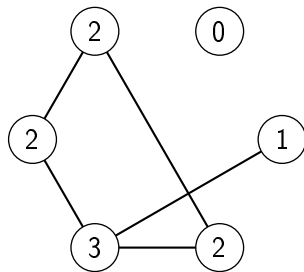
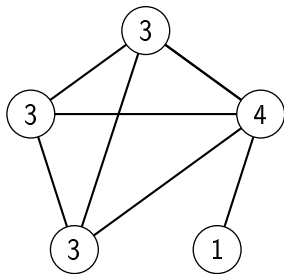
Figura:  $G_1$  y  $G_2$  no son isomorfos pues  $K_4 \subset G_1$  y  $K_4 \not\subset G_2$

# Valencias

La *valencia* de un vértice  $v$  en un grafo  $G = (V, E)$  es el número de aristas de  $G$  que contienen a  $v$ . Usaremos la notación  $\delta(v)$  para la valencia de  $v$ , formalmente

$$\delta(v) = |D_v|, \quad \text{donde} \quad D_v = \{e \in E \mid v \in e\}.$$

## Ejemplo



En una lista de adyacencia la valencia de un vértice es exactamente la cantidad de elementos que tiene la columna correspondiente al vértice.

### Ejemplo

Vimos el  $G = (V, E)$  es dado por

$$V = \{a, b, c, d, z\}, \quad E = \{\{a, b\}, \{a, d\}, \{b, z\}, \{c, d\}, \{d, z\}\}.$$

Su lista de adyacencia es

<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>	<i>d</i>	<i>z</i>
<i>b</i>	<i>a</i>	<i>d</i>	<i>a</i>	<i>b</i>
<i>d</i>	<i>z</i>		<i>c</i>	<i>d</i>
			<i>z</i>	

Luego  $\delta(a) = 2$ ,  $\delta(b) = 2$ ,  $\delta(c) = 1$ ,  $\delta(d) = 3$ ,  $\delta(z) = 2$ .

## Teorema

*La suma de los valores de las valencias  $\delta(v)$ , tomados sobre todos los vértices  $v$  del grafo  $G = (V, E)$ , es igual a dos veces el número de aristas:*

$$\sum_{v \in V} \delta(v) = 2|E|.$$

## Demostración

La valencia de un vértice  $v$  indica la cantidad de “extremos” de aristas que “tocan” a  $v$ . Es claro que hay  $2|E|$  extremos de aristas, luego la suma total de las valencias de los vértices es  $2|E|$ .



Diremos que un vértice de  $G$  es *impar* si su valencia es impar, y *par* si su valencia es par.

Denotemos  $V_i$  y  $V_p$  los conjuntos de vértices impares y pares respectivamente, luego  $V = V_i \cup V_p$  es una partición de  $V$ . Luego

$$\sum_{v \in V_i} \delta(v) + \sum_{v \in V_p} \delta(v) = 2|E|.$$

y entonces

$$\sum_{v \in V_i} \delta(v) = \underbrace{2|E|}_{\text{par}} - \underbrace{\sum_{v \in V_p} \delta(v)}_{\text{par}}.$$

Luego, la suma de las valencias de los vértices impares es par  $\Rightarrow$

**Teorema**

*El número de vértices impares es par.*

Este resultado es a veces llamado el “handshaking lemma”: dado un conjunto de personas, el número de personas que le ha dado la mano a un número impar de miembros del conjunto es par.

Un grafo en el cual todos los vértices tienen la misma valencia  $r$  se llama *regular* (con valencia  $r$ ), o  *$r$ -valente*. Luego,

$$r|V| = 2|E|.$$

- $K_n$  regular  $(n - 1)$ -valente.
- $C_n$ , el polígono de  $n$ -lados. Si  $n \geq 3$ ,  $C_n$  es regular de valencia 2.

$C_n$  es llamado el *grafo cíclico* de  $n$  vértices. Formalmente  $C_n = (V, E)$ , con

$$V = \{1, 2, \dots, n\}, \quad E = \{\{1, 2\}, \{2, 3\}, \dots, \{n - 1, n\}, \{n, 1\}\}.$$