Matemática Discreta I
Clase 8 - Conteo (4° parte)

FAMAF / UNC

13 de abril de 2023

El teorema del binomio

En álgebra elemental aprendemos las fórmulas

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2, \qquad (a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3.$$

El teorema del binomio

En álgebra elemental aprendemos las fórmulas

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2, \qquad (a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3.$$

A veces nos piden desarrollar la formula para $(a+b)^4$ y potencias mayores de $a+b$.

El teorema del binomio

En álgebra elemental aprendemos las fórmulas

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2, \qquad (a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3.$$

A veces nos piden desarrollar la formula para $(a+b)^4$ y potencias mayores de $a+b$.

El resultado general que da una formula para $(a+b)^n$ es conocido como el *teorema del binomio* o *binomio de Newton*.

El teorema del binomio

Teorema

Sea n un entero positivo. El coeficiente del termino $a^{n-r}b^r$ en el desarrollo de $(a+b)^n$ es el número binomial $\binom{n}{r}$.

El teorema del binomio

Teorema

Sea n un entero positivo. El coeficiente del termino $a^{n-r}b^r$ en el desarrollo de $(a+b)^n$ es el número binomial $\binom{n}{r}$.Explícitamente, tenemos

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \cdots + \binom{n}{n}b^n.$$

El teorema del binomio

Teorema

Sea n un entero positivo. El coeficiente del termino $a^{n-r}b^r$ en el desarrollo de $(a+b)^n$ es el número binomial $\binom{n}{r}$.Explícitamente, tenemos

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \cdots + \binom{n}{n}b^n.$$

Escrito de otra forma:

Si $n > 0$,

$$(a+b)^n = \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}a^{n-i}b^i.$$

Observación

Los coeficientes binomiales que intervienen en la fórmula de $(a+b)^n$ forman una fila del triángulo de Pascal:

Observación

Los coeficientes binomiales que intervienen en la fórmula de $(a+b)^n$ forman una fila del triángulo de Pascal:

$$\binom{n}{0} \quad \binom{n}{1} \quad \binom{n}{2} \quad \cdots \quad \binom{n}{n-2} \quad \binom{n}{n-1} \quad \binom{n}{n}$$

Observación

Los coeficientes binomiales que intervienen en la fórmula de $(a+b)^n$ forman una fila del triángulo de Pascal:

$$\binom{n}{0} \quad \binom{n}{1} \quad \binom{n}{2} \quad \cdots \quad \binom{n}{n-2} \quad \binom{n}{n-1} \quad \binom{n}{n}$$

Ejemplo

$$(a+b)^4 = \binom{4}{0}a^4 + \binom{4}{1}a^3b + \binom{4}{2}a^2b^2 + \binom{4}{3}ab^3 + \binom{4}{4}b^4$$

$$= a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4.$$

El teorema del binomio puede usarse para deducir identidades en que estén involucrados los números binomiales.

El teorema del binomio puede usarse para deducir identidades en que estén involucrados los números binomiales.

Ejemplo

Probemos que

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \cdots + \binom{n}{n} = 2^n.$$

El teorema del binomio puede usarse para deducir identidades en que estén involucrados los números binomiales.

Ejemplo

Probemos que

$$\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\cdots+\binom{n}{n}=2^n.$$

Demostración.

El teorema del binomio puede usarse para deducir identidades en que estén involucrados los números binomiales.

Ejemplo

Probemos que

$$\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\cdots+\binom{n}{n}=2^n.$$

Demostración.

Observemos que $2^n=(1+1)^n$. Por el teorema del binomio sabemos que

$$\begin{aligned}(1+1)^n&=\binom{n}{0}1^n+\binom{n}{1}1^{n-1}1+\binom{n}{2}1^{n-2}1^2+\cdots+\binom{n}{n}1^n\\&=\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\cdots+\binom{n}{n}. \qquad \square\end{aligned}$$

Observación

La fórmula

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \cdots + \binom{n}{n} = 2^n. \qquad (*)$$

tiene una interpretación combinatoria: nos permite calcular nuevamente la cantidad de subconjuntos de un conjuntos de n elementos.

Observación

La fórmula

$$\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\cdots+\binom{n}{n}=2^n. \qquad (*)$$

tiene una interpretación combinatoria: nos permite calcular nuevamente la cantidad de subconjuntos de un conjuntos de n elementos.

1. Es claro que la cantidad de subconjuntos de k elementos de un conjunto de n elementos es $\binom{n}{k}$.

Observación

La fórmula

$$\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\cdots+\binom{n}{n}=2^n. \qquad (*)$$

tiene una interpretación combinatoria: nos permite calcular nuevamente la cantidad de subconjuntos de un conjuntos de n elementos.

1. Es claro que la cantidad de subconjuntos de k elementos de un conjunto de n elementos es $\binom{n}{k}$.

2. Los subconjuntos de un conjunto son los subconjuntos de 0 elementos, unión los subconjuntos de 1 elemento, unión los subconjuntos de 2 elementos, unión los subconjuntos de 3 elementos, etc.

Observación

La fórmula

$$\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\cdots+\binom{n}{n}=2^n. \qquad (*)$$

tiene una interpretación combinatoria: nos permite calcular nuevamente la cantidad de subconjuntos de un conjuntos de n elementos.

1. Es claro que la cantidad de subconjuntos de k elementos de un conjunto de n elementos es $\binom{n}{k}$.

2. Los subconjuntos de un conjunto son los subconjuntos de 0 elementos, unión los subconjuntos de 1 elemento, unión los subconjuntos de 2 elementos, unión los subconjuntos de 3 elementos, etc.

3 . Por el principio de adición y la fórmula $(*)$ obtenemos que la cantidad de subconjuntos de un conjuntos de n elementos es 2^n.

Ejercicios de conteo

Ejercicio

¿Cuántos números naturales existen menores que 10^5, cuyos dígitos sean todos distintos?

Ejercicios de conteo

Ejercicio

¿Cuántos números naturales existen menores que 10^5, cuyos dígitos sean todos distintos?

Solución.

Ejercicios de conteo

Ejercicio

¿Cuántos números naturales existen menores que 10^5, cuyos dígitos sean todos distintos?

Solución.

Los números naturales menores de 10^5 son todos aquellos que tienen como máximo 5 dígitos.

Ejercicios de conteo

Ejercicio

¿Cuántos números naturales existen menores que 10^5, cuyos dígitos sean todos distintos?

Solución.

Los números naturales menores de 10^5 son todos aquellos que tienen como máximo 5 dígitos.

1. 1 dígito $\rightarrow$ 9 posibilidades,
2. 2 dígitos $\rightarrow 9 \times 9$ posibilidades (81),
3. 3 dígitos $\rightarrow 9 \times 9 \times 8$ posibilidades (648),
4. 4 dígitos $\rightarrow 9 \times 9 \times 8 \times 7$ posibilidades (4536),
5. 5 dígitos $\rightarrow 9 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6$ posibilidades (27216),

Total: $9 + 81 + 648 + 4536 + 27216 = 32490$. $\square$

Ejercicio

¿De cuántas formas distintas se pueden escoger 5 cartas de una baraja de 52 cartas?

(1) Si no hay restricciones.

(2) Si debe haber tres picas y dos corazones.

(3) Si debe haber al menos una carta de cada palo.

Ejercicio

¿De cuántas formas distintas se pueden escoger 5 cartas de una baraja de 52 cartas?

(1) Si no hay restricciones.

(2) Si debe haber tres picas y dos corazones.

(3) Si debe haber al menos una carta de cada palo.

Solución.

Ejercicio

¿De cuántas formas distintas se pueden escoger 5 cartas de una baraja de 52 cartas?

(1) Si no hay restricciones.

(2) Si debe haber tres picas y dos corazones.

(3) Si debe haber al menos una carta de cada palo.

Solución.

(1) Como no nos imponen ninguna condición especial entonces solo debemos determinar cuántos subconjuntos hay con 5 elementos de un conjunto de 52 objetos, es decir, debemos hacer una ***selección sin orden de 5 cartas entre 52 cartas***, esto es:

$$\binom{52}{5} = \frac{52!}{(52-5)!5!} = \frac{52!}{47!5!} = \frac{52 \cdot 51 \cdot 50 \cdot 49 \cdot 48 \cdot 47!}{47!5!}$$

$$= \frac{52 \cdot 51 \cdot 50 \cdot 49 \cdot 48}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2} = 52 \cdot 51 \cdot 49 \cdot 20.$$

$$\binom{52}{5} = \frac{52!}{(52-5)!5!} = \frac{52!}{47!5!} = \frac{52 \cdot 51 \cdot 50 \cdot 49 \cdot 48 \cdot 47!}{47!5!}$$

$$= \frac{52 \cdot 51 \cdot 50 \cdot 49 \cdot 48}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2} = 52 \cdot 51 \cdot 49 \cdot 20.$$

(2) En este caso, debemos elegir 3 cartas entre 13 (para las picas), y la cantidad de elecciones posibles es $\binom{13}{3}$.

$$\binom{52}{5} = \frac{52!}{(52-5)!5!} = \frac{52!}{47!5!} = \frac{52 \cdot 51 \cdot 50 \cdot 49 \cdot 48 \cdot 47!}{47!5!}$$

$$= \frac{52 \cdot 51 \cdot 50 \cdot 49 \cdot 48}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2} = 52 \cdot 51 \cdot 49 \cdot 20.$$

(2) En este caso, debemos elegir 3 cartas entre 13 (para las picas), y la cantidad de elecciones posibles es $\binom{13}{3}$.

Por otro lado, para el palo de corazones, hay $\binom{13}{2}$ formas de elegir 2 cartas entre 13.

$$\binom{52}{5} = \frac{52!}{(52-5)!5!} = \frac{52!}{47!5!} = \frac{52 \cdot 51 \cdot 50 \cdot 49 \cdot 48 \cdot 47!}{47!5!}$$

$$= \frac{52 \cdot 51 \cdot 50 \cdot 49 \cdot 48}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2} = 52 \cdot 51 \cdot 49 \cdot 20.$$

(2) En este caso, debemos elegir 3 cartas entre 13 (para las picas), y la cantidad de elecciones posibles es $\binom{13}{3}$.

Por otro lado, para el palo de corazones, hay $\binom{13}{2}$ formas de elegir 2 cartas entre 13.

Luego, por el principio de multiplicación, el resultado es:

$$\binom{13}{3} \cdot \binom{13}{2} = \frac{13!}{10!3!} \cdot \frac{13!}{11!2!} = \frac{13 \cdot 12 \cdot 11}{6} \cdot \frac{13 \cdot 12}{2} = 13^2 \cdot 12 \cdot 11.$$

(3) Como debe haber al menos una carta de cada palo, y hay 4 palos, entonces en cada elección de 5 cartas **ineludiblemente tiene que haber dos del mismo palo**. Ahora bien, si fijamos el palo que se repite, hay

$$\binom{13}{2} \cdot \binom{13}{1} \cdot \binom{13}{1} \cdot \binom{13}{1}$$

formas de elegir las 5 cartas. Como hay 4 palos, tenemos un total de:

$$4 \cdot \binom{13}{2} \cdot \binom{13}{1} \cdot \binom{13}{1} \cdot \binom{13}{1} = 4 \cdot 13 \cdot 6 \cdot 13 \cdot 13 \cdot 13 = 24 \cdot 13^4.$$

$\square$

Ejercicio

¿De cuántas formas diferentes pueden repartirse 5 bolas blancas, 3 rojas y 2 negras en 10 urnas distintas (etiquetadas) de forma que cada urna contenga una bola?

Ejercicio

¿De cuántas formas diferentes pueden repartirse 5 bolas blancas, 3 rojas y 2 negras en 10 urnas distintas (etiquetadas) de forma que cada urna contenga una bola?

Solución.

Observar que como hay 10 bolas y 10 urnas, cada urna debe contener una bola.

Ejercicio

¿De cuántas formas diferentes pueden repartirse 5 bolas blancas, 3 rojas y 2 negras en 10 urnas distintas (etiquetadas) de forma que cada urna contenga una bola?

Solución.

Observar que como hay 10 bolas y 10 urnas, cada urna debe contener una bola.

Primero nos preguntamos ¿de cuántas forma puedo poner las 5 bolas blancas en las 10 urnas?

Ejercicio

¿De cuántas formas diferentes pueden repartirse 5 bolas blancas, 3 rojas y 2 negras en 10 urnas distintas (etiquetadas) de forma que cada urna contenga una bola?

Solución.

Observar que como hay 10 bolas y 10 urnas, cada urna debe contener una bola.

Primero nos preguntamos ¿de cuántas forma puedo poner las 5 bolas blancas en las 10 urnas?

Este problema es equivalente a elegir 5 urnas entre 10 (las urnas donde pondremos las bolas blancas) y sabemos que las posibilidades son $\binom{10}{5}$.

Ejercicio

¿De cuántas formas diferentes pueden repartirse 5 bolas blancas, 3 rojas y 2 negras en 10 urnas distintas (etiquetadas) de forma que cada urna contenga una bola?

Solución.

Observar que como hay 10 bolas y 10 urnas, cada urna debe contener una bola.

Primero nos preguntamos ¿de cuántas forma puedo poner las 5 bolas blancas en las 10 urnas?

Este problema es equivalente a elegir 5 urnas entre 10 (las urnas donde pondremos las bolas blancas) y sabemos que las posibilidades son $\binom{10}{5}$.

Ahora quedan 5 lugares y queremos ver de cuántas formas ponemos 3 bolas rojas en 5 urnas y la respuesta es $\binom{5}{3}$

Finalmente, hay dos lugares para las dos bolas negras y hay una sola forma de ponerlas.

Finalmente, hay dos lugares para las dos bolas negras y hay una sola forma de ponerlas.

El resultado es entonces

$$\binom{10}{5}\binom{5}{3} = \frac{10!}{5!5!}\frac{5!}{2!3!} = \frac{10!}{5!2!3!}.$$

$\square$

Observación Este problema es equivalente a "cuantas permutaciones hay de 5 bolas blancas, 3 rojas y 2 negras".

Finalmente, hay dos lugares para las dos bolas negras y hay una sola forma de ponerlas.

El resultado es entonces

$$\binom{10}{5}\binom{5}{3} = \frac{10!}{5!5!}\frac{5!}{2!3!} = \frac{10!}{5!2!3!}.$$

$\square$

Observación Este problema es equivalente a "cuantas permutaciones hay de 5 bolas blancas, 3 rojas y 2 negras".

Podemos pensar primero que toda las bolas tienen distinto color, con lo cual tenemos 10! permutaciones.

Finalmente, hay dos lugares para las dos bolas negras y hay una sola forma de ponerlas.

El resultado es entonces

$$\binom{10}{5}\binom{5}{3} = \frac{10!}{5!5!}\frac{5!}{2!3!} = \frac{10!}{5!2!3!}.$$

$\square$

Observación Este problema es equivalente a "cuantas permutaciones hay de 5 bolas blancas, 3 rojas y 2 negras".

Podemos pensar primero que toda las bolas tienen distinto color, con lo cual tenemos 10! permutaciones.

Luego, hay que dividir por las permutaciones de 2 bolas blancas, 3 rojas y 2 negras, y el resultado es

$$\frac{10!}{5!2!3!}.$$

Ejercicio

Un ascensor de un centro comercial parte del sótano con 5 pasajeros y se detiene en 7 pisos. ¿De cuántas maneras distintas pueden descender los pasajeros? ¿Y con la condición de que dos pasajeros no bajen en el mismo piso?

Ejercicio

Un ascensor de un centro comercial parte del sótano con 5 pasajeros y se detiene en 7 pisos. ¿De cuántas maneras distintas pueden descender los pasajeros? ¿Y con la condición de que dos pasajeros no bajen en el mismo piso?

Solución.

Ejercicio

Un ascensor de un centro comercial parte del sótano con 5 pasajeros y se detiene en 7 pisos. ¿De cuántas maneras distintas pueden descender los pasajeros? ¿Y con la condición de que dos pasajeros no bajen en el mismo piso?

Solución.

Hagamos un poco de abstracción del problema y pensemos las posibilidades que tiene 5 personas para ubicarse en 7 lugares: la primera persona tiene 7 posibilidades, la segunda también y así sucesivamente, luego el total de posibilidades es

$$7 \times 7 \times 7 \times 7 \times 7 = 7^5.$$

Si no estás convencido del razonamiento, lo podemos ver de la siguiente manera: supongamos que tenemos 5 posiciones (que representan los 5 pasajeros) y en cada posición podemos poner un número del 1 al 7 (el piso en que baja), entonces la pregunta se reduce a ¿cuántos números de 5 dígitos se pueden formar con los dígitos del 1 al 7?

Si no estás convencido del razonamiento, lo podemos ver de la siguiente manera: supongamos que tenemos 5 posiciones (que representan los 5 pasajeros) y en cada posición podemos poner un número del 1 al 7 (el piso en que baja), entonces la pregunta se reduce a ¿cuántos números de 5 dígitos se pueden formar con los dígitos del 1 al 7?

Claramente, la respuesta es también 7^5.

Si no estás convencido del razonamiento, lo podemos ver de la siguiente manera: supongamos que tenemos 5 posiciones (que representan los 5 pasajeros) y en cada posición podemos poner un número del 1 al 7 (el piso en que baja), entonces la pregunta se reduce a ¿cuántos números de 5 dígitos se pueden formar con los dígitos del 1 al 7?

Claramente, la respuesta es también 7^5.

Para la segunda pregunta, simplemente hay que modificar la pregunta anterior ¿cuántos números de 5 dígitos con todos los dígitos diferentes se pueden formar con los dígitos del 1 al 7?

La respuesta es:

$$7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 = \frac{7!}{(7-5)!} = \frac{7!}{2!}.$$

Ejercicio

Para participar en un torneo de tenis de dobles mixtos, es necesario presentar un equipo de 3 parejas, debiéndose elegir los jugadores entre los integrantes de un grupo constituido por 6 hombres y 3 mujeres.

¿De cuántas maneras puede seleccionarse el equipo?

Ejercicio

Para participar en un torneo de tenis de dobles mixtos, es necesario presentar un equipo de 3 parejas, debiéndose elegir los jugadores entre los integrantes de un grupo constituido por 6 hombres y 3 mujeres.

¿De cuántas maneras puede seleccionarse el equipo?

Solución.

Ejercicio

Para participar en un torneo de tenis de dobles mixtos, es necesario presentar un equipo de 3 parejas, debiéndose elegir los jugadores entre los integrantes de un grupo constituido por 6 hombres y 3 mujeres.

¿De cuántas maneras puede seleccionarse el equipo?

Solución.

1) Nos piden que armemos 3 parejas, sin que importe el orden de las parejas.

Ejercicio

Para participar en un torneo de tenis de dobles mixtos, es necesario presentar un equipo de 3 parejas, debiéndose elegir los jugadores entre los integrantes de un grupo constituido por 6 hombres y 3 mujeres.

¿De cuántas maneras puede seleccionarse el equipo?

Solución.

1) Nos piden que armemos 3 parejas, sin que importe el orden de las parejas.

2) Observar **todas** las mujeres deben formar parte del equipo, ya que requerimos de 3 mujeres para formar las 3 parejas. De donde, el problema lo podemos replantear como:

¿De cuántas maneras le podemos asignar un compañero (hombre) de juego a cada mujer?

3) Para resolver esto, representamos al problema en un esquema de la siguiente manera: Por comodidad, y sin perdida de generalidad, digamos que las mujeres las numeramos 1, 2 y 3. Entonces asignarle un compañero a cada una equivale a completar las siguientes casillas

$$\underline{1}\ \ \sqcup\!\sqcup \qquad \underline{2}\ \ \sqcup\!\sqcup \qquad \underline{2}\ \ \sqcup\!\sqcup$$

3) Para resolver esto, representamos al problema en un esquema de la siguiente manera: Por comodidad, y sin perdida de generalidad, digamos que las mujeres las numeramos 1, 2 y 3. Entonces asignarle un compañero a cada una equivale a completar las siguientes casillas

$$\underline{1}\ \ ␣␣ \qquad \underline{2}\ \ ␣␣ \qquad \underline{2}\ \ ␣␣$$

- 1º casilla: 6 posibilidades (los 6 hombres).
- 2º casilla: 5 posibilidades (5 hombres).
- 3º casilla: 4 posibilidades (4 hombres).

3) Para resolver esto, representamos al problema en un esquema de la siguiente manera: Por comodidad, y sin perdida de generalidad, digamos que las mujeres las numeramos 1, 2 y 3. Entonces asignarle un compañero a cada una equivale a completar las siguientes casillas

$$\underline{1} \; \sqcup \qquad \underline{2} \; \sqcup \qquad \underline{2} \; \sqcup$$

- 1º casilla: 6 posibilidades (los 6 hombres).
- 2º casilla: 5 posibilidades (5 hombres).
- 3º casilla: 4 posibilidades (4 hombres).

Así, por el principio de multiplicación, las maneras de seleccionar al equipo son:

$$6 \cdot 5 \cdot 4 = 120.$$

$\square$

Ejercicio

Tenemos tres cajas numeradas y 10 bolitas indistinguibles ¿De cuántas formas puedo distribuir las bolitas en las cajas?

Ejercicio

Tenemos tres cajas numeradas y 10 bolitas indistinguibles ¿De cuántas formas puedo distribuir las bolitas en las cajas?

Solución.

Ejercicio

Tenemos tres cajas numeradas y 10 bolitas indistinguibles ¿De cuántas formas puedo distribuir las bolitas en las cajas?

Solución.

1) Pensemos en el problema equivalente: tengo 10 bolitas alineadas, ¿de cuántas maneras puedo poner dos paredes que separen las bolitas en tres grupos?

Ejercicio

Tenemos tres cajas numeradas y 10 bolitas indistinguibles ¿De cuántas formas puedo distribuir las bolitas en las cajas?

Solución.

1) Pensemos en el problema equivalente: tengo 10 bolitas alineadas, ¿de cuántas maneras puedo poner dos paredes que separen las bolitas en tres grupos?

2) Ahora bien, si pensamos que las bolitas son 0's y las paredes son 1's, entonces el problema se reduce a: ¿cuántas permutaciones hay de la palabra?

$$1\,1\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0$$

3) Lo resolvemos como siempre: primero consideramos que todos los caracteres son distintos y obtenemos 12! permutaciones, luego dividimos por 10! y 2! para eliminar las permutaciones de 0's seguidos y de 1's seguidos, respectivamente. Luego el resultado es

$$\frac{12!}{10!2!} = \frac{12 \cdot 11 \cdot 10!}{10!2} = \frac{12 \cdot 11}{2} = 66.$$

$\square$

Ejercicio

Tenemos m cajas numeradas y n bolitas indistinguibles. Probar que hay

$$\binom{m+n-1}{m-1}$$

formas de distribuir las bolitas en las cajas.

3) Lo resolvemos como siempre: primero consideramos que todos los caracteres son distintos y obtenemos 12! permutaciones, luego dividimos por 10! y 2! para eliminar las permutaciones de 0's seguidos y de 1's seguidos, respectivamente. Luego el resultado es

$$\frac{12!}{10!2!} = \frac{12 \cdot 11 \cdot 10!}{10!2} = \frac{12 \cdot 11}{2} = 66.$$

□

Ejercicio

Tenemos m cajas numeradas y n bolitas indistinguibles. Probar que hay

$$\binom{m+n-1}{m-1}$$

formas de distribuir las bolitas en las cajas.

(Selecciones no ordenadas con repetición)