Matemática Discreta I
Clase 22 - Algoritmos greedy en grafos

FAMAF / UNC

15 de junio de 2023

Algoritmo greedy para coloración de vértices

- No se conoce ningún algoritmo general para encontrar el número cromático de un grafo que trabaje en "tiempo polinomial"

Algoritmo greedy para coloración de vértices

- No se conoce ningún algoritmo general para encontrar el número cromático de un grafo que trabaje en "tiempo polinomial"
- Sin embargo hay un método simple de hacer una coloración usando un "razonable" número de colores.

Algoritmo greedy para coloración de vértices

- No se conoce ningún algoritmo general para encontrar el número cromático de un grafo que trabaje en "tiempo polinomial"
- Sin embargo hay un método simple de hacer una coloración usando un "razonable" número de colores.

El algoritmo es muy sencillo y se puede describir en una sola línea.

Algoritmo greedy para coloración de vértices

- No se conoce ningún algoritmo general para encontrar el número cromático de un grafo que trabaje en "tiempo polinomial"
- Sin embargo hay un método simple de hacer una coloración usando un "razonable" número de colores.

El algoritmo es muy sencillo y se puede describir en una sola línea.

- Si hay vértices no coloreados, elegimos un vértice no coloreado y le otorgamos un color que no tengan sus vecinos.

Algoritmo greedy para coloración de vértices

- No se conoce ningún algoritmo general para encontrar el número cromático de un grafo que trabaje en "tiempo polinomial"
- Sin embargo hay un método simple de hacer una coloración usando un "razonable" número de colores.

El algoritmo es muy sencillo y se puede describir en una sola línea.

- Si hay vértices no coloreados, elegimos un vértice no coloreado y le otorgamos un color que no tengan sus vecinos.

En este algoritmo insistimos en hacer la mejor elección que podemos en cada paso, sin mirar más allá para ver si esta elección nos traerá problemas luego.

Algoritmo greedy para coloración de vértices

- No se conoce ningún algoritmo general para encontrar el número cromático de un grafo que trabaje en "tiempo polinomial"
- Sin embargo hay un método simple de hacer una coloración usando un "razonable" número de colores.

El algoritmo es muy sencillo y se puede describir en una sola línea.

- Si hay vértices no coloreados, elegimos un vértice no coloreado y le otorgamos un color que no tengan sus vecinos.

En este algoritmo insistimos en hacer la mejor elección que podemos en cada paso, sin mirar más allá para ver si esta elección nos traerá problemas luego.

Un algoritmo de esta clase se llama a menudo un *algoritmo greedy (goloso)*.

El algoritmo greedy para coloración de vértices es fácil de programar.

El algoritmo greedy para coloración de vértices es fácil de programar.

Supóngase que hemos dado a los vértices algún orden $v_0, v_1, \ldots, v_n$.

El algoritmo greedy para coloración de vértices es fácil de programar.

Supóngase que hemos dado a los vértices algún orden $v_0, v_1, \ldots, v_n$.

- Asignemos el color 0 a v_0.

El algoritmo greedy para coloración de vértices es fácil de programar.

Supóngase que hemos dado a los vértices algún orden $v_0, v_1, \ldots, v_n$.

- Asignemos el color 0 a v_0.
- Tomamos v_i el siguiente vértice de la lista y
  - $S =$ el conjunto de colores asignados a los vértices v_j $(0 \leq j < i)$ que son adyacentes a v_i.
  - Le damos a v_i el primer color que no está en S.

El algoritmo greedy para coloración de vértices es fácil de programar.

Supóngase que hemos dado a los vértices algún orden $v_0, v_1, \ldots, v_n$.

- Asignemos el color 0 a v_0.
- Tomamos v_i el siguiente vértice de la lista y
  - $S =$ el conjunto de colores asignados a los vértices v_j $(0 \leq j < i)$ que son adyacentes a v_i.
  - Le damos a v_i el primer color que no está en S.
- si $i < n$ volvemos hacemos el procedimiento del paso anterior para $i = i + 1$.

Mostramos en pseudocódigo del algoritmo greedy para coloración de vértices.

Mostramos en pseudocódigo del algoritmo greedy para coloración de vértices.

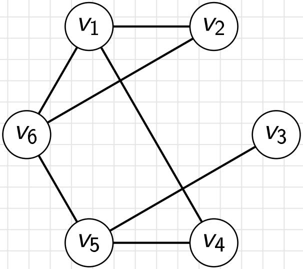
```
# pre: 0,...,n los vértices de un grafo G
# post: devuelve v[0],...,v[n] una coloración de G
color = []  #  color[j] = c dirá que el color de j es c.
for i = 0 to n:
    S = []  # S conjunto de colores asignados a los vértices j
            # (1 <= j <i) que son adyacentes a i (comienza vacío)
    for j = 0 to i-1:
        if j es adyacente a i:
            S.append(color[j])  # agrega el color de j a  S
    k = 0
    while k in S:
        k = k + 1
    color.append(k) # Asigna el color k a i, donde k es el primer
                    # color que no esta en S.
```

Debido a que la estrategia greedy es corta de vista, el número de colores que usará será normalmente más grande que le mínimo posible.

Debido a que la estrategia greedy es corta de vista, el número de colores que usará será normalmente más grande que le mínimo posible.

Ejemplo

Aplicar el algoritmo greedy a



Solución

El orden de los vértices es v_1, v_2, v_3, v_4, v_5 y v_6.

El orden de los vértices es v_1, v_2, v_3, v_4, v_5 y v_6.

El algoritmo es:

- **Paso 1.** v_1 tiene colores vecinos $S = \emptyset \Rightarrow v_1$ color 0.

El orden de los vértices es v_1, v_2, v_3, v_4, v_5 y v_6.

El algoritmo es:

- **Paso 1.** v_1 tiene colores vecinos $S = \emptyset \Rightarrow v_1$ color 0.
- **Paso 2.** v_2 tiene colores vecinos $S = \{0\} \Rightarrow v_2$ color 1.

El orden de los vértices es v_1, v_2, v_3, v_4, v_5 y v_6.

El algoritmo es:

- **Paso 1.** v_1 tiene colores vecinos $S = \emptyset \Rightarrow v_1$ color 0.
- **Paso 2.** v_2 tiene colores vecinos $S = \{0\} \Rightarrow v_2$ color 1.
- **Paso 3.** v_3 tiene colores vecinos $S = \emptyset \Rightarrow v_3$ color 0.

El orden de los vértices es v_1, v_2, v_3, v_4, v_5 y v_6.

El algoritmo es:

- **Paso 1.** v_1 tiene colores vecinos $S = \emptyset \Rightarrow v_1$ color 0.
- **Paso 2.** v_2 tiene colores vecinos $S = \{0\} \Rightarrow v_2$ color 1.
- **Paso 3.** v_3 tiene colores vecinos $S = \emptyset \Rightarrow v_3$ color 0.
- **Paso 4.** v_4 tiene colores vecinos $S = \{0\} \Rightarrow v_4$ color 1.

El orden de los vértices es v_1, v_2, v_3, v_4, v_5 y v_6.

El algoritmo es:

- **Paso 1.** v_1 tiene colores vecinos $S = \emptyset \Rightarrow v_1$ color 0.
- **Paso 2.** v_2 tiene colores vecinos $S = \{0\} \Rightarrow v_2$ color 1.
- **Paso 3.** v_3 tiene colores vecinos $S = \emptyset \Rightarrow v_3$ color 0.
- **Paso 4.** v_4 tiene colores vecinos $S = \{0\} \Rightarrow v_4$ color 1.
- **Paso 5.** v_5 tiene colores vecinos $S = \{0, 1\} \Rightarrow v_5$ color 2.

El orden de los vértices es v_1, v_2, v_3, v_4, v_5 y v_6.

El algoritmo es:

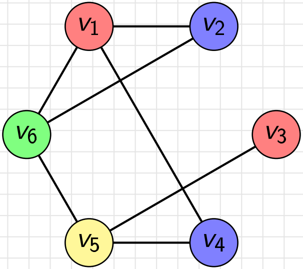
- **Paso 1.** v_1 tiene colores vecinos $S = \emptyset \Rightarrow v_1$ color 0.
- **Paso 2.** v_2 tiene colores vecinos $S = \{0\} \Rightarrow v_2$ color 1.
- **Paso 3.** v_3 tiene colores vecinos $S = \emptyset \Rightarrow v_3$ color 0.
- **Paso 4.** v_4 tiene colores vecinos $S = \{0\} \Rightarrow v_4$ color 1.
- **Paso 5.** v_5 tiene colores vecinos $S = \{0, 1\} \Rightarrow v_5$ color 2.
- **Paso 6.** v_6 tiene colores vecinos $S = \{0, 1, 2\} \Rightarrow v_6$ color 3.

El orden de los vértices es v_1, v_2, v_3, v_4, v_5 y v_6.

El algoritmo es:

- **Paso 1.** v_1 tiene colores vecinos $S = \emptyset \Rightarrow v_1$ color 0.
- **Paso 2.** v_2 tiene colores vecinos $S = \{0\} \Rightarrow v_2$ color 1.
- **Paso 3.** v_3 tiene colores vecinos $S = \emptyset \Rightarrow v_3$ color 0.
- **Paso 4.** v_4 tiene colores vecinos $S = \{0\} \Rightarrow v_4$ color 1.
- **Paso 5.** v_5 tiene colores vecinos $S = \{0, 1\} \Rightarrow v_5$ color 2.
- **Paso 6.** v_6 tiene colores vecinos $S = \{0, 1, 2\} \Rightarrow v_6$ color 3.

Es decir el coloreo queda:



El orden que se elige inicialmente para los vértices es fundamental para establecer la coloración.

El orden que se elige inicialmente para los vértices es fundamental para establecer la coloración.

Es bastante fácil ver que si se elige el orden correcto, entonces el algoritmo greedy nos da la mejor coloración posible (ejercicio en el apunte).

El orden que se elige inicialmente para los vértices es fundamental para establecer la coloración.

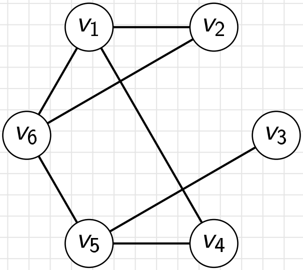
Es bastante fácil ver que si se elige el orden correcto, entonces el algoritmo greedy nos da la mejor coloración posible (ejercicio en el apunte).

Pero hay $n!$ órdenes posibles, y si tuviéramos que controlar cada uno de ellos, el algoritmo requeriría “tiempo factorial” (peor aún que tiempo exponencial).

Ejemplo

Aplicar el algorimo greedy al siguiente grafo donde el orden de los vértices es

$$v_3, v_4, v_6, v_2, v_5, v_1.$$



Solución

El algoritmo es:

El algoritmo es:

- **Paso 1.** v_3 tiene colores vecinos $S = \emptyset \Rightarrow v_3$ color 0.

El algoritmo es:

- **Paso 1.** v_3 tiene colores vecinos $S = \emptyset \Rightarrow v_3$ color 0.
- **Paso 2.** v_4 tiene colores vecinos $S = \emptyset \Rightarrow v_4$ color 0.

El algoritmo es:

- **Paso 1.** v_3 tiene colores vecinos $S = \emptyset \Rightarrow v_3$ color 0.
- **Paso 2.** v_4 tiene colores vecinos $S = \emptyset \Rightarrow v_4$ color 0.
- **Paso 3.** v_6 tiene colores vecinos $S = \emptyset \Rightarrow v_6$ color 0.

El algoritmo es:

- **Paso 1.** v_3 tiene colores vecinos $S = \emptyset \Rightarrow v_3$ color 0.
- **Paso 2.** v_4 tiene colores vecinos $S = \emptyset \Rightarrow v_4$ color 0.
- **Paso 3.** v_6 tiene colores vecinos $S = \emptyset \Rightarrow v_6$ color 0.
- **Paso 4.** v_2 tiene colores vecinos $S = \{0\} \Rightarrow v_2$ color 1.

El algoritmo es:

- **Paso 1.** v_3 tiene colores vecinos $S = \emptyset \Rightarrow v_3$ color 0.
- **Paso 2.** v_4 tiene colores vecinos $S = \emptyset \Rightarrow v_4$ color 0.
- **Paso 3.** v_6 tiene colores vecinos $S = \emptyset \Rightarrow v_6$ color 0.
- **Paso 4.** v_2 tiene colores vecinos $S = \{0\} \Rightarrow v_2$ color 1.
- **Paso 5.** v_5 tiene colores vecinos $S = \{0\} \Rightarrow v_5$ color 1.

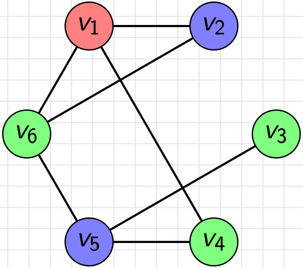
El algoritmo es:

- **Paso 1.** v_3 tiene colores vecinos $S = \emptyset \Rightarrow v_3$ color 0.
- **Paso 2.** v_4 tiene colores vecinos $S = \emptyset \Rightarrow v_4$ color 0.
- **Paso 3.** v_6 tiene colores vecinos $S = \emptyset \Rightarrow v_6$ color 0.
- **Paso 4.** v_2 tiene colores vecinos $S = \{0\} \Rightarrow v_2$ color 1.
- **Paso 5.** v_5 tiene colores vecinos $S = \{0\} \Rightarrow v_5$ color 1.
- **Paso 6.** v_1 tiene colores vecinos $S = \{0, 1\} \Rightarrow v_1$ color 2.

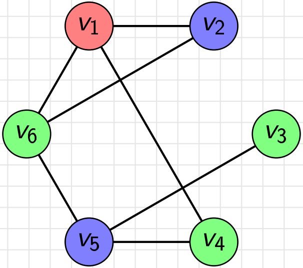
El algoritmo es:

- **Paso 1.** v_3 tiene colores vecinos $S = \emptyset \Rightarrow v_3$ color 0.
- **Paso 2.** v_4 tiene colores vecinos $S = \emptyset \Rightarrow v_4$ color 0.
- **Paso 3.** v_6 tiene colores vecinos $S = \emptyset \Rightarrow v_6$ color 0.
- **Paso 4.** v_2 tiene colores vecinos $S = \{0\} \Rightarrow v_2$ color 1.
- **Paso 5.** v_5 tiene colores vecinos $S = \{0\} \Rightarrow v_5$ color 1.
- **Paso 6.** v_1 tiene colores vecinos $S = \{0, 1\} \Rightarrow v_1$ color 2.

Podemos representar en el grafo la coloración:



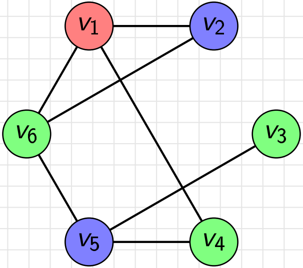
Podemos representar en el grafo la coloración:



□

El coloreo queda igual que en la clase pasada.

Podemos representar en el grafo la coloración:



El coloreo queda igual que en la clase pasada.

El orden fue elegido de la siguiente forma: dado el coloreo con colores $\chi(G)$, se elije, en el orden, primero los vértices de un solo color que haya mayor cantidad, luego de otro color que haya mayor cantidad, etc.

Más allá que el algoritmo greedy no soluciona el problema, el algoritmo es útil tanto en la teoría como en la práctica.

Más allá que el algoritmo greedy no soluciona el problema, el algoritmo es útil tanto en la teoría como en la práctica.

Probaremos ahora algunos resultados por medio de la estrategia greedy.

Más allá que el algoritmo greedy no soluciona el problema, el algoritmo es útil tanto en la teoría como en la práctica.

Probaremos ahora algunos resultados por medio de la estrategia greedy.

Teorema

Si G es un grafo con valencia máxima k, entonces

a) $\chi(G) \leq k + 1$,

b) *Si G es conexo y no regular* , $\chi(G) \leq k$.

Demostración

Demostración

a) Sea $v_1, v_2, \ldots, v_n$ un ordenamiento cualquiera de los vértices de G.

Demostración

a) Sea $v_1, v_2, \ldots, v_n$ un ordenamiento cualquiera de los vértices de G.

Para cada vértice v, si S son los colores de los vecinos a $v \Rightarrow |S| \leq k$.

Demostración

a) Sea $v_1, v_2, \ldots, v_n$ un ordenamiento cualquiera de los vértices de G.

Para cada vértice v, si S son los colores de los vecinos a $v \Rightarrow |S| \leq k$.

b)

(1) Sea v_n un vértice con $\delta(v_n) < k$.

Demostración

a) Sea $v_1, v_2, \ldots, v_n$ un ordenamiento cualquiera de los vértices de G.

Para cada vértice v, si S son los colores de los vecinos a $v \Rightarrow |S| \leq k$.

b)

(1) Sea v_n un vértice con $\delta(v_n) < k$.

(2) Sean $v_{n-1}, v_{n-2}, \ldots, v_{n-r}$ los adyacentes a v_n. Hay a lo más $k-1$ de ellos.

Demostración

a) Sea $v_1, v_2, \ldots, v_n$ un ordenamiento cualquiera de los vértices de G.

Para cada vértice v, si S son los colores de los vecinos a $v \Rightarrow |S| \leq k$.

b)

(1) Sea v_n un vértice con $\delta(v_n) < k$.

(2) Sean $v_{n-1}, v_{n-2}, \ldots, v_{n-r}$ los adyacentes a v_n. Hay a lo más $k-1$ de ellos.

(3) Luego se van eligiendo los adyacentes a v_i que no están listados antes $(n > i \geq 1)$.

Demostración

a) Sea $v_1, v_2, \ldots, v_n$ un ordenamiento cualquiera de los vértices de G.

Para cada vértice v, si S son los colores de los vecinos a $v \Rightarrow |S| \leq k$.

b)

(1) Sea v_n un vértice con $\delta(v_n) < k$.

(2) Sean $v_{n-1}, v_{n-2}, \ldots, v_{n-r}$ los adyacentes a v_n. Hay a lo más $k-1$ de ellos.

(3) Luego se van eligiendo los adyacentes a v_i que no están listados antes $(n > i \geq 1)$.

(4) Si $i < n$ el vértice v_i tiene un adyacente a nivel superior $\Rightarrow v_i$ tiene a lo más $k-1$ adyacentes a nivel inferior.

Demostración

a) Sea $v_1, v_2, \ldots, v_n$ un ordenamiento cualquiera de los vértices de G.

Para cada vértice v, si S son los colores de los vecinos a $v \Rightarrow |S| \leq k$.

b)

(1) Sea v_n un vértice con $\delta(v_n) < k$.

(2) Sean $v_{n-1}, v_{n-2}, \ldots, v_{n-r}$ los adyacentes a v_n. Hay a lo más $k-1$ de ellos.

(3) Luego se van eligiendo los adyacentes a v_i que no están listados antes $(n > i \geq 1)$.

(4) Si $i < n$ el vértice v_i tiene un adyacente a nivel superior $\Rightarrow v_i$ tiene a lo más $k-1$ adyacentes a nivel inferior.

(5) Si $i < n$, usando greedy y por (4), se puede colorear v_i con un color en $\{1, \ldots, k\}$.

Demostración

a) Sea $v_1, v_2, \ldots, v_n$ un ordenamiento cualquiera de los vértices de G.

Para cada vértice v, si S son los colores de los vecinos a $v \Rightarrow |S| \leq k$.

b)

(1) Sea v_n un vértice con $\delta(v_n) < k$.

(2) Sean $v_{n-1}, v_{n-2}, \ldots, v_{n-r}$ los adyacentes a v_n. Hay a lo más $k-1$ de ellos.

(3) Luego se van eligiendo los adyacentes a v_i que no están listados antes $(n > i \geq 1)$.

(4) Si $i < n$ el vértice v_i tiene un adyacente a nivel superior $\Rightarrow$ v_i tiene a lo más $k-1$ adyacentes a nivel inferior.

(5) Si $i < n$, usando greedy y por (4), se puede colorear v_i con un color en $\{1, \ldots, k\}$.

(6) Por (2) se puede colorear v_n on un color en $\{1, \ldots, k\}$. $\square$

Grafos bipartitos

Definición

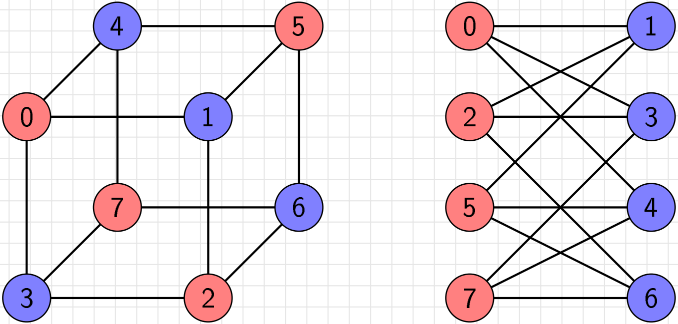
Sea G grafo. Diremos que G es *bipartito* si $\chi(G) = 2$. Es decir, si se puede colorear con dos colores.

Grafos bipartitos

Definición

Sea G grafo. Diremos que G es *bipartito* si $\chi(G) = 2$. Es decir, si se puede colorear con dos colores.

Ejemplo



Una consecuencia importante del algoritmo greedy es el siguiente teorema.

Una consecuencia importante del algoritmo greedy es el siguiente teorema.

Teorema

Un grafo es bipartito si y sólo si no contiene ciclos de longitud impar.

Una consecuencia importante del algoritmo greedy es el siguiente teorema.

Teorema

Un grafo es bipartito si y sólo si no contiene ciclos de longitud impar.

Demostración

Una consecuencia importante del algoritmo greedy es el siguiente teorema.

Teorema

Un grafo es bipartito si y sólo si no contiene ciclos de longitud impar.

Demostración

($\Rightarrow$) El contrarrecíproco:

Una consecuencia importante del algoritmo greedy es el siguiente teorema.

Teorema

Un grafo es bipartito si y sólo si no contiene ciclos de longitud impar.

Demostración

($\Rightarrow$) El contrarrecíproco: si G tiene un ciclo de longitud impar $\Rightarrow$ no es bipartito.

Una consecuencia importante del algoritmo greedy es el siguiente teorema.

Teorema

Un grafo es bipartito si y sólo si no contiene ciclos de longitud impar.

Demostración

($\Rightarrow$) El contrarrecíproco: si G tiene un ciclo de longitud impar $\Rightarrow$ no es bipartito.

Esto es cierto, pues un ciclo de longitud impar requiere 3 colores.

($\Leftarrow$) Supongamos que G es un grafo sin ciclos de longitud impar y conexo.

Una consecuencia importante del algoritmo greedy es el siguiente teorema.

Teorema

Un grafo es bipartito si y sólo si no contiene ciclos de longitud impar.

Demostración

($\Rightarrow$) El contrarrecíproco: si G tiene un ciclo de longitud impar $\Rightarrow$ no es bipartito.

Esto es cierto, pues un ciclo de longitud impar requiere 3 colores.

($\Leftarrow$) Supongamos que G es un grafo sin ciclos de longitud impar y conexo.

Construiremos un orden de G para el cual el algoritmo greedy producirá una coloración de vértices con dos colores.

- Elijamos cualquier vértice y llamémoslo v_1; diremos que v_1 esta en el *nivel* 0.

- Elijamos cualquier vértice y llamémoslo v_1; diremos que v_1 esta en el *nivel* 0.
- A continuación, listemos la lista de vecinos de v_1, llamémoslos $v_2, v_3, \ldots, v_r$; diremos que estos vértices están en el *nivel 1*.

- Elijamos cualquier vértice y llamémoslo v_1; diremos que v_1 esta en el *nivel* 0.
- A continuación, listemos la lista de vecinos de v_1, llamémoslos $v_2, v_3, \ldots, v_r$; diremos que estos vértices están en el *nivel 1*.
- Continuando de esta manera, definimos el *nivel* i como todos aquellos vértices adyacentes a los del nivel $i-1$, exceptuando aquellos previamente listados en el nivel $i-2$.

- Elijamos cualquier vértice y llamémoslo v_1; diremos que v_1 esta en el *nivel* 0.
- A continuación, listemos la lista de vecinos de v_1, llamémoslos $v_2, v_3, \ldots, v_r$; diremos que estos vértices están en el *nivel 1*.
- Continuando de esta manera, definimos el *nivel* i como todos aquellos vértices adyacentes a los del nivel $i - 1$, exceptuando aquellos previamente listados en el nivel $i - 2$.

Cuando ningún nuevo vértice puede ser agregado de esta forma, obtenemos G (pues es conexo).

- Elijamos cualquier vértice y llamémoslo v_1; diremos que v_1 esta en el *nivel* 0.
- A continuación, listemos la lista de vecinos de v_1, llamémoslos $v_2, v_3, \ldots, v_r$; diremos que estos vértices están en el *nivel 1*.
- Continuando de esta manera, definimos el *nivel* i como todos aquellos vértices adyacentes a los del nivel $i-1$, exceptuando aquellos previamente listados en el nivel $i-2$.

Cuando ningún nuevo vértice puede ser agregado de esta forma, obtenemos G (pues es conexo).

El hecho crucial producido por este orden es que un vértice del nivel i solo puede ser adyacente a vértices de los niveles $i-1$ y $i+1$, y no a vértices del mismo nivel. Probemos esto.

Supongamos que x e y son vértices en el mismo nivel i.

Supongamos que x e y son vértices en el mismo nivel i.

Entonces x e y son adyacentes a vértices x_{i-1}, y_{i-1}, respectivamente, del nivel $i-1$.

Supongamos que x e y son vértices en el mismo nivel i.

Entonces x e y son adyacentes a vértices x_{i-1}, y_{i-1}, respectivamente, del nivel $i-1$.

A su vez, estos vértices del nivel $i-1$ son adyacentes a vértices x_{i-2}, y_{i-2}, respectivamente, del nivel $i-2$.

Supongamos que x e y son vértices en el mismo nivel i.

Entonces x e y son adyacentes a vértices x_{i-1}, y_{i-1}, respectivamente, del nivel $i-1$.

A su vez, estos vértices del nivel $i-1$ son adyacentes a vértices x_{i-2}, y_{i-2}, respectivamente, del nivel $i-2$.

Así bajamos de nivel hasta que esta sucesión de adyacencias termina en el vértice v_1 del nivel 0.

Supongamos que x e y son vértices en el mismo nivel i.

Entonces x e y son adyacentes a vértices x_{i-1}, y_{i-1}, respectivamente, del nivel $i - 1$.

A su vez, estos vértices del nivel $i - 1$ son adyacentes a vértices x_{i-2}, y_{i-2}, respectivamente, del nivel $i - 2$.

Así bajamos de nivel hasta que esta sucesión de adyacencias termina en el vértice v_1 del nivel 0.

Sea z el primer vértice común en esta sucesión de adyacencias y sea m el nivel donde se encuentra z.

Supongamos que x e y son vértices en el mismo nivel i.

Entonces x e y son adyacentes a vértices x_{i-1}, y_{i-1}, respectivamente, del nivel $i-1$.

A su vez, estos vértices del nivel $i-1$ son adyacentes a vértices x_{i-2}, y_{i-2}, respectivamente, del nivel $i-2$.

Así bajamos de nivel hasta que esta sucesión de adyacencias termina en el vértice v_1 del nivel 0.

Sea z el primer vértice común en esta sucesión de adyacencias y sea m el nivel donde se encuentra z.

Entonces, los vértices x, y son unidos por caminos longitud m al vértice z.

Supongamos que x e y son vértices en el mismo nivel i.

Entonces x e y son adyacentes a vértices x_{i-1}, y_{i-1}, respectivamente, del nivel $i-1$.

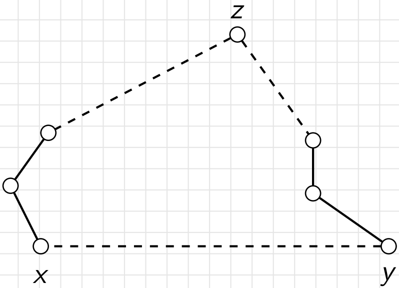
A su vez, estos vértices del nivel $i-1$ son adyacentes a vértices x_{i-2}, y_{i-2}, respectivamente, del nivel $i-2$.

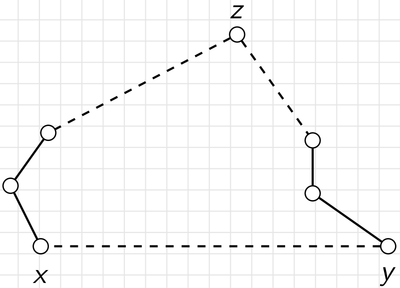
Así bajamos de nivel hasta que esta sucesión de adyacencias termina en el vértice v_1 del nivel 0.

Sea z el primer vértice común en esta sucesión de adyacencias y sea m el nivel donde se encuentra z.

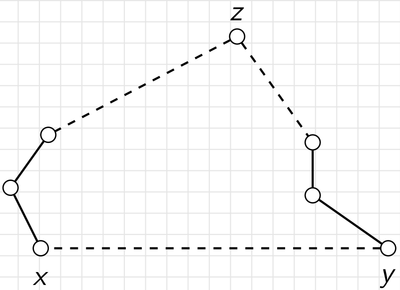
Entonces, los vértices x, y son unidos por caminos longitud m al vértice z.

Si x e y fueran adyacentes, habría un ciclo de longitud $2m+1$, lo cual contradice la hipótesis.


z
x
y

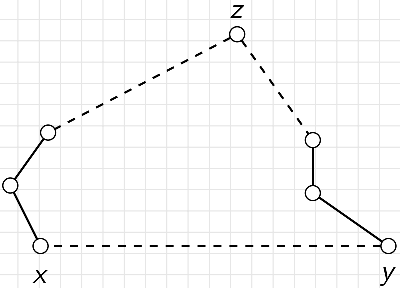


Se deduce entonces que el algoritmo greedy asigna:



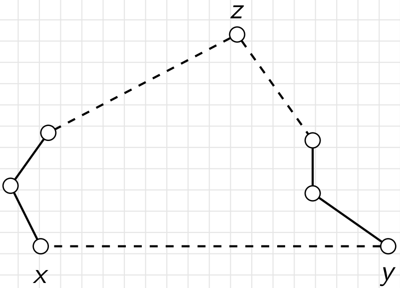
Se deduce entonces que el algoritmo greedy asigna:

- el color 1 a los vértices en el nivel $0, 2, 4, \ldots,$



Se deduce entonces que el algoritmo greedy asigna:

- el color 1 a los vértices en el nivel $0, 2, 4, \ldots$,
- el color 2 a los vértices en los niveles $1, 3, 5, \ldots$.



Se deduce entonces que el algoritmo greedy asigna:

- el color 1 a los vértices en el nivel $0, 2, 4, \ldots$,
- el color 2 a los vértices en los niveles $1, 3, 5, \ldots$.

Por consiguiente $\chi(G_0) = 2$. $\square$