

Matemática Discreta I

Clase 19 - Isomorfismo / Caminatas, caminos y ciclos

FAMAF / UNC

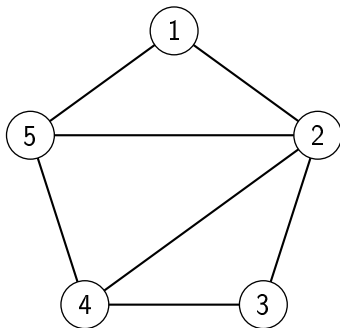
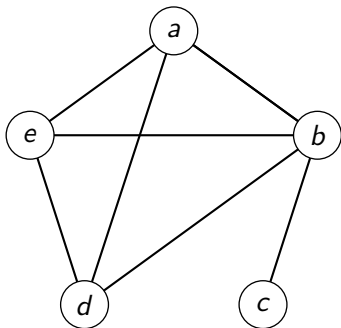
6 de junio de 2023

Una aplicación importante de la noción de valencia es en el problema de determinar si dos grafos son o no isomorfos.

Si $\alpha : V_1 \rightarrow V_2$ es un isomorfismo entre G_1 y G_2 , y $\alpha(v) = w$, entonces cada arista que contiene a v se transforma en una arista que contiene a w .

En consecuencia $\delta(v) = \delta(w)$. Por otro lado, si G_1 tiene un vértice x , con valencia $\delta(x) = \delta_0$, y G_2 no tiene vértices con valencia δ_0 , entonces G_1 y G_2 no pueden ser isomorfos.

Esto nos da otra manera de ver que no son isomorfos los siguientes grafos:



Puesto que el primer grafo tiene un vértice de valencia 1 y el segundo no.

Una extensión de esta idea se da en la siguiente proposición.

Proposición

Sean G_1 y G_2 grafos isomorfos. Para cada $k \geq 0$ sea $n_i(k)$ el número de vértices de G_i que tienen valencia k ($i = 1, 2$). Entonces $n_1(k) = n_2(k)$.

Demostración

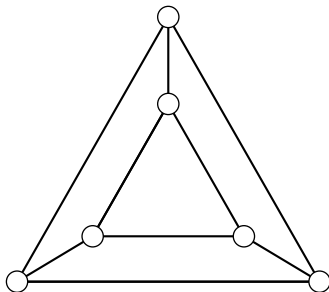
Hemos visto más arriba que si $\alpha : V_1 \rightarrow V_2$ es un isomorfismo entre G_1 y G_2 y $v \in V_1$, entonces $\delta(v) = \delta(\alpha(v))$. Luego la cantidad de vértices con valencia k en G_1 es igual a la cantidad de vértices con valencia k en G_2 .



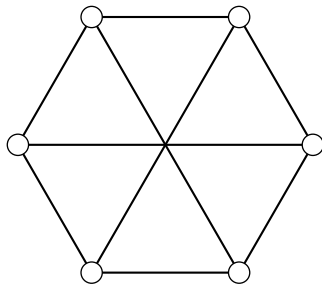
No hay ningún criterio general eficiente para determinar si dos grafos son isomorfos o no. En el siguiente ejemplo, no se aplica el criterio anterior.

Ejemplo

Probar que los siguientes grafos no son isomorfos.



G_1



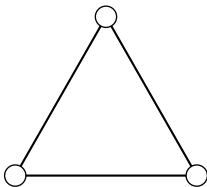
G_2

Solución

Ambos tienen 6 vértices, 9 aristas y todos los vértices son de valencia 3.

Por lo tanto no podemos utilizar los criterios anteriores para decir que no son isomorfos.

Sin embargo, observar que G_1 tiene un subgrafo K_3 :



Mientras que G_2 no lo tiene. Por lo tanto, G_1 y G_2 no son isomorfos.



Caminatas, caminos y ciclos

Definición

Una *caminata* en un grafo G es una secuencia de vértices

$$v_1, v_2, \dots, v_k,$$

tal que v_i y v_{i+1} son adyacentes ($1 \leq i \leq k-1$).

Si todos los vértices son distintos, una caminata es llamada un *camino*.

Un *recorrido* es una caminata donde todas las aristas $\{v_i, v_{i+1}\}$ con $1 \leq i \leq k-1$ son distintas.

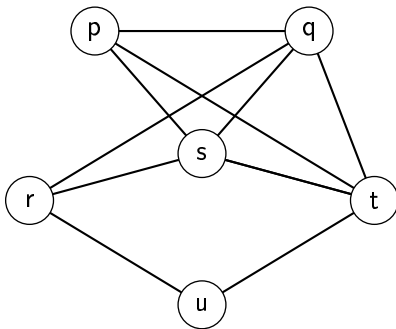
Un *ciclo* a una caminata $v_1, v_2, \dots, v_k, v_1$ con v_1, v_2, \dots, v_k camino y $k \geq 3$. A menudo diremos que es un *k-ciclo*, o un ciclo de *longitud k* en G .

Observación

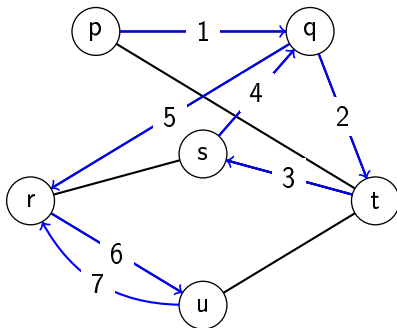
- Por definición de caminata $k \geq 2$, es decir una caminata tiene al menos una arista ($\{v_1, v_2\}$).
- Por definición de ciclo $v_1, v_2, \dots, v_k, v_1$, $k \geq 3$; un ciclo tiene al menos 3 aristas (claramente, no hay 2-ciclos.).

Ejemplo

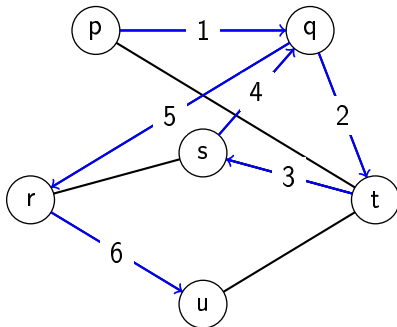
Dibujemos caminatas, caminos, recorridos y ciclos en el siguiente grafo:



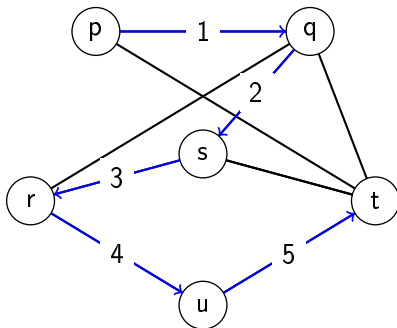
Caminata: p,q,t,s,q,r,u,r



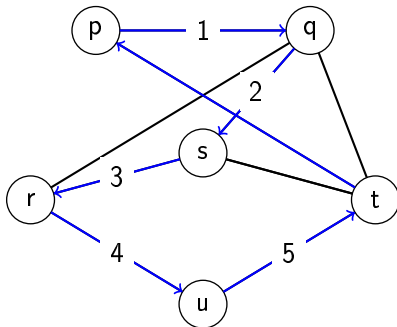
Recorrido: p,q,t,s,q,r,u



Camino: p,q,s,r,u,t



Ciclo: p,q,s,r,u,t,p



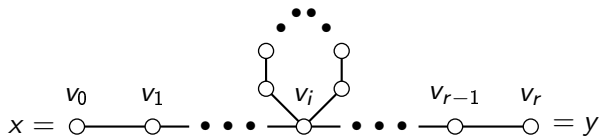
Lema

Sea G un grafo. Entonces, x e y pueden ser unidos por una caminata si y sólo si x e y pueden ser unidos por un camino.

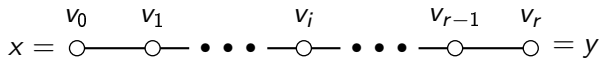
Idea de la demostración

(\Leftarrow) es trivial (un camino es una caminata).

(\Rightarrow) Eliminar "bucles".



Se transforma en



Escribamos $x \sim y$ siempre y cuando los vértices x e y de G puedan ser unidos por un camino en G o $x = y$: hablando en forma rigurosa, esto significa que si $x \neq y$ hay un camino v_1, v_2, \dots, v_k en G con $x = v_1$ e $y = v_k$.

Definición

Sea G grafo, diremos que es conexo si para $x \sim y$ para cualesquiera x, y vértices en G .

El lema de la página anterior implica que \sim es una relación de equivalencia.

Proposición

Sea G grafo y x, y, z vértices de G . Entonces,

- (1) $x \sim x$ (reflexividad de \sim).
- (2) $x \sim y$, entonces $y \sim x$ (simetría de \sim).
- (3) $x \sim y, y \sim z$, entonces $x \sim z$ (transitividad de \sim).

Demostración

(1) Por definición $x \sim x$.

(2) Si $x = x_1, x_2, \dots, x_k = y$ es un camino de x a y , entonces $y = x_k, \dots, x_2, x_1 = x$ es un camino de y a x .

(3)

$x \sim y \Rightarrow$ un camino de x a y .

$y \sim z \Rightarrow$ un camino de y a z .

Pegando los caminos en y , obtenemos una caminata de x a z (que se reduce a un camino por el lema).

