

# Matemática Discreta I

## Clase 11 - Máximo común divisor (1)

FAMAF / UNC

27 de abril de 2023

# Definición de MCD

## Definición

Si  $a$  y  $b$  son enteros algunos de ellos no nulo, decimos que un entero positivo  $d$  es un *máximo común divisor*, o *mcd*, de  $a$  y  $b$  si

- a)  $d|a$  y  $d|b$ ;
- b) si  $c|a$  y  $c|b$  entonces  $c \leq d$ .

- La condición (a) nos dice que  $d$  es un común divisor de  $a$  y  $b$ .
- La condición (b) nos dice que cualquier divisor común de  $a$  y  $b$  es mayor o igual a  $d$ .

## Ejemplo

¿Cuál es el mcd entre 60 y 84?

## Solución

- 6 es un divisor común de 60 y 84, pero no es el mayor divisor común, porque  $12|60$  y  $12|84$  pero  $12 < 6$ .
- Los divisores positivos comunes de 60 y 84 son 1, 2, 3, 6 y 12, luego aunque 6 es un divisor común, no satisface (2) de la definición.
- En este caso, 12 claramente es el **máximo común divisor**.

## Ejemplo

Hallar  $\text{mcd}(174, 72)$ .

## Solución

Divisores de 174: 1, 2, 3, 6, 29, 58, 87, 174

Divisores de 72: 1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 12, 18, 24, 36, 72

Luego, 6 es divisor común de 174 y 72, y todos los demás divisores comunes (1, 2 y 3) dividen a 6.

Por lo tanto  $\text{mcd}(174, 72) = 6$ .



## Proposición

Sean  $a, b$  enteros con  $a \neq 0$ , entonces

1.  $\text{mcd}(b, a) = \text{mcd}(a, b) = \text{mcd}(\pm a, \pm b)$ ,
2. si  $a > 0$ ,  $\text{mcd}(a, 0) = a$  y  $\text{mcd}(a, a) = a$ ,
3.  $\text{mcd}(1, b) = 1$ .

## Demostración

Estas propiedades son de demostración casi trivial, por ejemplo para demostrar que  $\text{mcd}(1, b) = 1$  comprobamos que 1 cumple con la definición:

(a)  $1|1$  y  $1|b$ ;

(b) si  $c|1$  y  $c|b$  entonces  $c|1$ ,

propiedades que son obviamente verdaderas.

1. y 2. se dejan a cargo del lector.



La siguiente propiedad no es tan obvia y resulta muy importante.

### Propiedad

Si  $a \neq 0, b \in \mathbb{Z}$ , entonces  $\text{mcd}(a, b) = \text{mcd}(a, b - a)$ .

### Demostración

Sea  $d = \text{mcd}(a, b)$ , luego

(a)  $d|a$  y  $d|b$       y      (b) si  $c|a$  y  $c|b$  entonces  $c|d$ .

Debemos probar que

(a')  $d|a$  y  $d|b - a$       y      (b') si  $c|a$  y  $c|b - a$  entonces  $c|d$ .

Por (a),  $d|a$  y  $d|b \Rightarrow d|b - a \Rightarrow (a')$ .


Si  $c|a$  y  $c|b - a \Rightarrow c|a + (b - a) = b \stackrel{(b)}{\Rightarrow} c|d \Rightarrow (b')$ .



## Ejemplo

Encontrar el mcd entre 174 y 72.

Solución:

$$\begin{aligned}(174, 72) &= (72, 174) = (72, 174 - 72) = (72, 102) \\&= (72, 102 - 72) = (72, 30) \\&= (30, 72) = (30, 72 - 30) = (42, 30) \\&= (30, 42) = (30, 42 - 30) = (30, 12) \\&= (12, 30) = (12, 30 - 12) \\&= (12, 18) = (12, 18 - 12) = (12, 6) \\&= (6, 12) = (6, 12 - 6) \\&= (6, 6) = (6, 6 - 6) \\&= (6, 0) \\&= 6.\end{aligned}$$


- En general no es sencillo encontrar todos los divisores de un número entero grande.
- No es factible calcular el mcd de números grandes revisando todos los divisores comunes.
- El algoritmo anterior nos da un método práctico y relativamente eficiente para calcular el mcd.

La próxima proposición nos provee una herramienta aún mejor para calcular el mcd.

### Proposición

*Sean  $a, b$  enteros no negativos con  $b \neq 0$ , entonces*

$$a = bq + r \quad \Rightarrow \quad \text{mcd}(a, b) = \text{mcd}(b, r). \quad (1)$$



## Ejemplo

Encuentre el mcd de 174 y 72.

## Solución

Con el uso repetido de la proposición anterior, obtenemos

$$174 = 72 \cdot 2 + 30, \quad \text{entonces} \quad (174, 72) = (72, 30)$$

$$72 = 30 \cdot 2 + 12, \quad \text{entonces} \quad (72, 30) = (30, 12)$$

$$30 = 12 \cdot 2 + 6, \quad \text{entonces} \quad (30, 12) = (12, 6)$$

$$12 = 6 \cdot 2 + 0, \quad \text{entonces} \quad (12, 6) = (6, 0) = 6.$$

Por lo tanto  $(174, 72) = 6$ .



## Algoritmo de Euclides

Para calcular el mcd de enteros  $a$  y  $b$ , con  $b > 0$ , definimos  $q_i$  y  $r_i$  recursivamente de la siguiente manera:  $r_0 = a$ ,  $r_1 = b$ , y

$$(e_1) \quad r_0 = r_1 q_1 + r_2 \quad (0 < r_2 < r_1)$$

$$(e_2) \quad r_1 = r_2 q_2 + r_3 \quad (0 < r_3 < r_2)$$

$$(e_3) \quad r_2 = r_3 q_3 + r_4 \quad (0 < r_4 < r_3)$$

...

$$(e_i) \quad r_{i-1} = r_i q_i + r_{i+1} \quad (0 < r_{i+1} < r_i)$$

...

$$(e_{k-1}) \quad r_{k-2} = r_{k-1} q_{k-1} + r_k \quad (0 < r_k < r_{k-1})$$

$$(e_k) \quad r_{k-1} = r_k q_k + 0,$$

Entonces  $r_k = \text{mcd}(a, b)$ .

- El proceso se detiene en el primer resto  $r_i$  igual a 0.
- El proceso debe detenerse, porque cada resto no nulo es positivo y estrictamente menor que el anterior.
- Este procedimiento es conocido como el *algoritmo de Euclides*.

## Teorema

*Sean  $a$  y  $b$  enteros con  $b > 0$ , entonces el máximo común divisor es el último resto no nulo obtenido en el algoritmo de Euclides ( $r_k$  de la filmina anterior).*

## Idea de la demostración

$r_{i-1} = r_i q_i + r_{i+1} \Rightarrow \text{mcd}(r_{i-1}, r_i) = \text{mcd}(r_i, r_{i+1})$ . Luego,

$$\text{mcd}(a, b) = \text{mcd}(r_0, r_1) = \text{mcd}(r_1, r_2) = \dots$$

$$\dots = \text{mcd}(r_{k-1}, r_k) = \text{mcd}(r_k, 0) = r_k. \quad \square$$

Ejemplifiquemos el algoritmo de Euclides.

### Ejemplo

Encuentre el mcd de 2406 y 654.

### Solución

Tenemos

$$2406 = 654 \cdot 3 + 444, \quad \text{entonces} \quad (2406, 654) = (654, 444)$$

$$654 = 444 \cdot 1 + 210, \quad \text{entonces} \quad (654, 444) = (444, 210)$$

$$444 = 210 \cdot 2 + 24, \quad \text{entonces} \quad (444, 210) = (210, 24)$$

$$210 = 24 \cdot 8 + 18, \quad \text{entonces} \quad (210, 24) = (24, 18)$$

$$24 = 18 \cdot 1 + 6, \quad \text{entonces} \quad (24, 18) = (18, 6)$$

$$18 = 6 \cdot 3 + 0 \quad \text{entonces} \quad (18, 6) = (6, 0) = 6$$

Por lo tanto  $(2406, 654) = 6$ .