

# Matemática Discreta I

## Clase 19 - Isomorfismo / Caminatas, caminos y ciclos

FAMAF / UNC

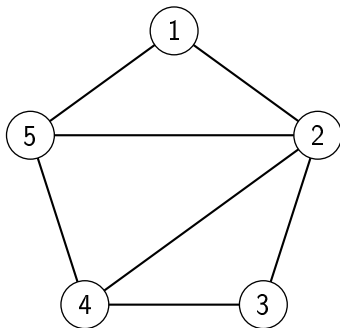
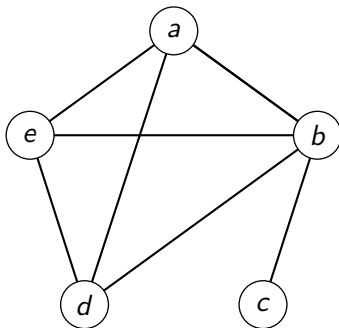
6 de junio de 2023

Una aplicación importante de la noción de valencia es en el problema de determinar si dos grafos son o no isomorfos.

Si  $\alpha : V_1 \rightarrow V_2$  es un isomorfismo entre  $G_1$  y  $G_2$ , y  $\alpha(v) = w$ , entonces cada arista que contiene a  $v$  se transforma en una arista que contiene a  $w$ .

En consecuencia  $\delta(v) = \delta(w)$ . Por otro lado, si  $G_1$  tiene un vértice  $x$ , con valencia  $\delta(x) = \delta_0$ , y  $G_2$  no tiene vértices con valencia  $\delta_0$ , entonces  $G_1$  y  $G_2$  no pueden ser isomorfos.

Esto nos da otra manera de ver que no son isomorfos los siguientes grafos:



Puesto que el primer grafo tiene un vértice de valencia 1 y el segundo no.

Una extensión de esta idea se da en la siguiente proposición.

### Proposición

*Sean  $G_1$  y  $G_2$  grafos isomorfos. Para cada  $k \geq 0$  sea  $n_i(k)$  el número de vértices de  $G_i$  que tienen valencia  $k$  ( $i = 1, 2$ ). Entonces  $n_1(k) = n_2(k)$ .*

### Demostración

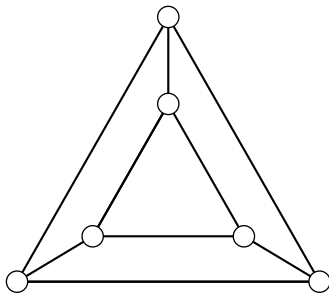
Hemos visto más arriba que si  $\alpha : V_1 \rightarrow V_2$  es un isomorfismo entre  $G_1$  y  $G_2$  y  $v \in V_1$ , entonces  $\delta(v) = \delta(\alpha(v))$ . Luego la cantidad de vértices con valencia  $k$  en  $G_1$  es igual a la cantidad de vértices con valencia  $k$  en  $G_2$ .



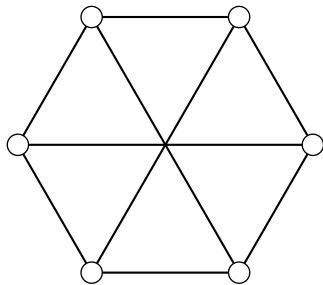
No hay ningún criterio general eficiente para determinar si dos grafos son isomorfos o no. En el siguiente ejemplo, no se aplica el criterio anterior.

### Ejemplo

Probar que los siguientes grafos no son isomorfos.



$G_1$



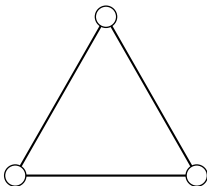
$G_2$

## Solución

Ambos tienen 6 vértices, 9 aristas y todos los vértices son de valencia 3.

Por lo tanto no podemos utilizar los criterios anteriores para decir que no son isomorfos.

Sin embargo, observar que  $G_1$  tiene un subgrafo  $K_3$ :



Mientras que  $G_2$  no lo tiene. Por lo tanto,  $G_1$  y  $G_2$  no son isomorfos.



# Caminatas, caminos y ciclos

## Definición

Una *caminata* en un grafo  $G$  es una secuencia de vértices

$$v_1, v_2, \dots, v_k,$$

tal que  $v_i$  y  $v_{i+1}$  son adyacentes ( $1 \leq i \leq k-1$ ).

Si todos los vértices son distintos, una caminata es llamada un *camino*.

Un *recorrido* es una caminata donde todas las aristas  $\{v_i, v_{i+1}\}$  con  $1 \leq i \leq k-1$  son distintas.

Un *ciclo* a una caminata  $v_1, v_2, \dots, v_k, v_1$  con  $v_1, v_2, \dots, v_k$  camino y  $k \geq 3$ . A menudo diremos que es un *k-ciclo*, o un ciclo de *longitud k* en  $G$ .

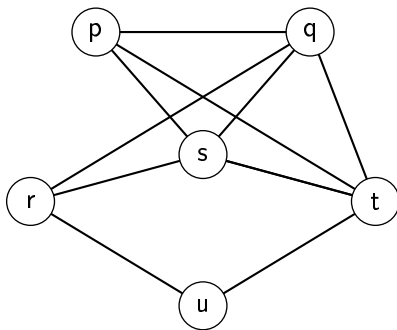
## Observación

- Por definición de caminata  $k \geq 2$ , es decir una caminata tiene al menos una arista ( $\{v_1, v_2\}$ ).
- Por definición de ciclo  $v_1, v_2, \dots, v_k, v_1$ ,  $k \geq 3$ ; un ciclo tiene al menos 3 aristas (claramente, no hay 2-ciclos.).

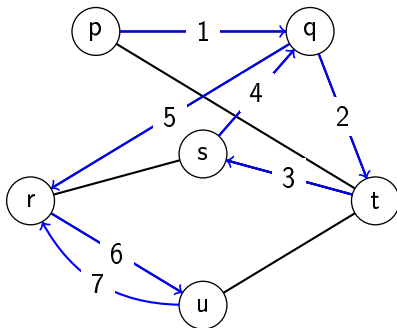


## Ejemplo

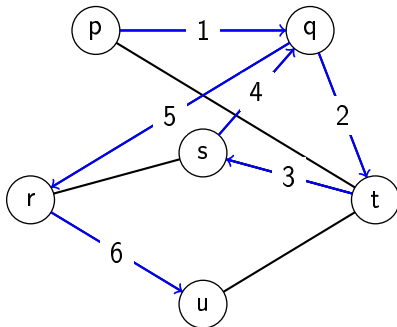
Dibujemos caminatas, caminos, recorridos y ciclos en el siguiente grafo:



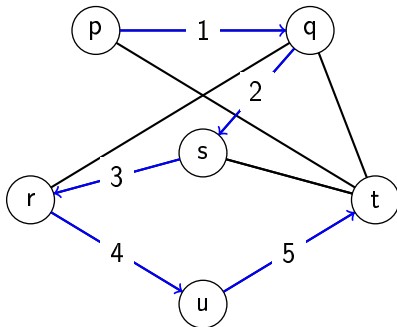
Caminata: p,q,t,s,q,r,u,r



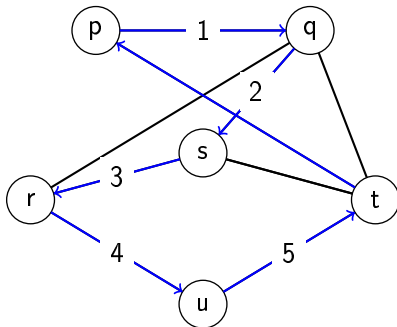
Recorrido: p,q,t,s,q,r,u



Camino: p,q,s,r,u,t



Ciclo: p,q,s,r,u,t,p



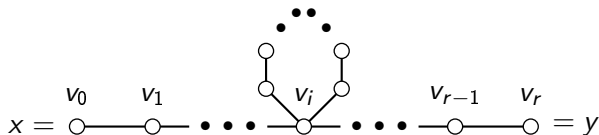
## Lema

Sea  $G$  un grafo. Entonces,  $x$  e  $y$  pueden ser unidos por una caminata si y sólo si  $x$  e  $y$  pueden ser unidos por un camino.

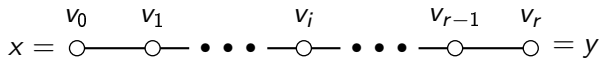
### Idea de la demostración

$(\Leftarrow)$  es trivial (un camino es una caminata).

$(\Rightarrow)$  Eliminar "bucles".



Se transforma en



Escribamos  $x \sim y$  siempre y cuando los vértices  $x$  e  $y$  de  $G$  puedan ser unidos por un camino en  $G$  o  $x = y$ : hablando en forma rigurosa, esto significa que si  $x \neq y$  hay un camino  $v_1, v_2, \dots, v_k$  en  $G$  con  $x = v_1$  e  $y = v_k$ .

### Definición

Sea  $G$  grafo, diremos que es conexo si para  $x \sim y$  para cualesquiera  $x, y$  vértices en  $G$ .

El lema de la página anterior implica que  $\sim$  es una relación de equivalencia.

## Proposición

Sea  $G$  grafo y  $x, y, z$  vértices de  $G$ . Entonces,

- (1)  $x \sim x$  (reflexividad de  $\sim$ ).
- (2)  $x \sim y$ , entonces  $y \sim x$  (simetría de  $\sim$ ).
- (3)  $x \sim y, y \sim z$ , entonces  $x \sim z$  (transitividad de  $\sim$ ).

## Demostración

(1) Por definición  $x \sim x$ .

(2) Si  $x = x_1, x_2, \dots, x_k = y$  es un camino de  $x$  a  $y$ , entonces  $y = x_k, \dots, x_2, x_1 = x$  es un camino de  $y$  a  $x$ .

(3)

$x \sim y \Rightarrow$  un camino de  $x$  a  $y$ .

$y \sim z \Rightarrow$  un camino de  $y$  a  $z$ .

Pegando los caminos en  $y$ , obtenemos una caminata de  $x$  a  $z$  (que se reduce a un camino por el lema).

