

Práctico 3 - Repaso
Matemática Discreta I – Año 2021/1
FAMAF

- (1) Sea p primo positivo. Probar que $(p, (p-1)!) = 1$.
- (2) Demostrar que $\forall n \in \mathbb{Z}, n > 2$, existe p primo tal que $n < p < n!$. (Ayuda: pensar qué primos dividen a $n! - 1$.)
- (3) Dado un entero $a > 0$ fijo, caracterizar aquellos números que al dividirlos por a tienen cociente igual al resto.
- (4) Probar que si $(a, 4) = 2$ y $(b, 4) = 2$ entonces $(a + b, 4) = 4$.
- (5) Probar que si a, b son coprimos entonces $(a + b, a - b) = 1$ ó 2 .
- (6) Completar y demostrar:
- a) Si $a \in \mathbb{Z}$, entonces $[a, a] = \dots$
 - b) Si $a, b \in \mathbb{Z}$, $[a, b] = b$ si y sólo si \dots
 - c) $(a, b) = [a, b]$ si y sólo si \dots
- (7) Probar que si d es un divisor común de a y b , entonces $\frac{[a, b]}{d} = \left[\frac{a}{d}, \frac{b}{d} \right]$.
- (8) Probar que $(a + b, [a, b]) = (a, b)$.
- (9) Probar que si $(a, b) = 1$ y $n + 2$ es un número primo, entonces $(a + b, a^2 + b^2 - nab) = 1$ ó $n + 2$.
- (10) Si $a \cdot b$ es un cuadrado y a y b son coprimos, probar que a y b son cuadrados.
- (11) Probar que $\sqrt{6}$ es irracional.
- (12) Hallar el menor múltiplo de 168 que es un cuadrado.
- (13) Probar que el producto de dos enteros consecutivos no nulos no es un cuadrado. (Ayuda: usar el Teorema Fundamental de la Aritmética).
- (14) ¿Existen enteros m y n tales que:
- a) $m^4 = 27$?
 - b) $m^2 = 12n^2$?
 - c) $m^3 = 47n^3$?

(15) Sean a y b enteros coprimos. Probar que

- a) $(a \cdot c, b) = (b, c)$, para todo entero c .
- b) a^m y b^n son coprimos, para todo $m, n \in \mathbb{N}$.
- c) $a + b$ y $a \cdot b$ son coprimos.

(16) ¿Cuál es la mayor potencia de 3 que divide a $100!$? ¿En cuántos ceros termina el desarrollo decimal de $100!$?

(17) Determinar todos los $p \in \mathbb{N}$ tales que

$$p, p + 2, p + 6, p + 8, p + 12, p + 14$$

sean todos primos.

(18) Sea $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ la sucesión de Fibonacci, definida recursivamente por: $f_1 = 1$, $f_2 = 1$, $f_{n+1} = f_n + f_{n-1}$, $n \geq 2$. Probar que:

- a) f_{3n} es par $\forall n \in \mathbb{N}$.
- b) f_{3n+1} y f_{3n+2} son impares $\forall n \in \mathbb{N}$.
- c) $f_{n+m} = f_m f_{n+1} + f_{m-1} f_n \forall n, m \in \mathbb{N}, m \geq 2$.
- d) $f_n \mid f_{nk} \forall k \in \mathbb{N}$.
- e) $f_{n+1} f_{n-1} - f_n^2 = (-1)^n \forall n \geq 2$.
- f) $(f_{n+1}, f_n) = 1 \forall n \in \mathbb{N}$.