Matemática Discreta I
Clase 5 - Ejercicios de inducción

FAMAF / UNC

30 de marzo de 2021

Ejercicio (Serie aritmética)

Probar que

$$1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2},$$

para $n \in \mathbb{N}$.

Demostración

(*Caso base*) El resultado es verdadero cuando $n = 1$ pues $1 = \frac{1\cdot(1+1)}{2}$.

Demostración

(*Paso inductivo*) Supongamos que el resultado verdadero cuando $n = k$, o sea, que

$$\sum_{i=0}^{k} i = \frac{k(k+1)}{2} \quad \text{hipótesis inductiva (HI).}$$

En el paso inductivo queremos probar que

$$\sum_{i=0}^{k} i = \frac{k(k+1)}{2} \Rightarrow \sum_{i=0}^{k+1} i = \frac{(k+1)(k+2)}{2}.$$

Entonces

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{k+1} i &= \sum_{i=0}^{k} i + (k+1) && \text{(por la definición recursiva)} \\
&= \frac{k(k+1)}{2} + (k+1) && \text{(por hipótesis inductiva)} \\
&= (k+1)(\frac{k}{2}+1)) && \text{((}k+1\text{) factor común)} \\
&= (k+1)\frac{(k+2)}{2}. \\
&= \frac{(k+1)(k+2)}{2}.
\end{aligned}$$

Luego el resultado es verdadero cuando $n = k+1$ y por el principio de inducción, es verdadero para todos los enteros positivos n. $\square$

Ejercicio (Serie geométrica)

Probar que

$$1 + q + q^2 + \cdots + q^n = \sum_{i=0}^{n} q^i = \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1},$$

para $n \in \mathbb{N}_0$, $q > 0$ y $q \neq 1$.

Demostración

(*Caso base*) El resultado es verdadero cuando $n = 0$ pues

$$q^0 = 1 = \frac{q^{0+1} - 1}{q - 1}.$$

Demostración

(*Paso inductivo*) Supongamos que el resultado verdadero cuando $n = k$, o sea, que

$$\sum_{i=0}^{k} q^i = \frac{q^{k+1} - 1}{q - 1}, \quad \text{hipótesis inductiva (HI).}$$

En el paso inductivo queremos probar que

$$\sum_{i=0}^{k} q^i = \frac{q^{k+1} - 1}{q - 1} \quad \Rightarrow \quad \sum_{i=0}^{k+1} q^i = \frac{q^{k+2} - 1}{q - 1}.$$

Entonces

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{k+1} q^i &= \sum_{i=0}^{k} q^i + q^{k+1} && \text{(por la definición recursiva)}\\
&= \frac{q^{k+1}-1}{q-1} + q^{k+1} && \text{(por hipótesis inductiva)}\\
&= \frac{q^{k+1}-1+(q-1)q^{k+1}}{q-1}\\
&= \frac{q^{k+1}-1+q\cdot q^{k+1}-q^{k+1}}{q-1}\\
&= \frac{q^{k+2}-1}{q-1}
\end{aligned}$$

Luego el resultado es verdadero cuando $n = k+1$ y por el principio de inducción, es verdadero para todos los enteros positivos n. $\square$

Ejercicio

Probar que

$$(1+2+3+\cdots+n)^2 = 1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3,$$

para $n \in \mathbb{N}$.

Demostración

Para probar esto primero debemos usar el resultado de la página 2 que nos dice que

$$(1+2+3+\cdots+n)^2 = \left(\sum_{i=1}^{n} i\right)^2 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}.$$

Luego debemos probar que

$$\sum_{i=1}^{n} i^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}.$$

Demostración

(*Caso base*) El resultado es verdadero cuando $n = 1$ pues

$$\sum_{i=1}^{1} i^3 = 1 \quad \text{y} \quad \frac{1^2(1+1)^2}{4} = \frac{4}{4} = 1.$$

(*Paso inductivo*) Debemos probar que si $k \geq 1$,

$$\sum_{i=0}^{k} i^3 = \frac{k^2(k+1)^2}{4} \quad \text{(HI)} \qquad \Rightarrow \qquad \sum_{i=0}^{k+1} i^3 = \frac{(k+1)^2(k+2)^2}{4}.$$

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{k+1} i^3 &= \sum_{i=0}^{k} i^3 + (k+1)^3 && \text{(por la definición recursiva de } \textstyle\sum\text{)} \\
&= \frac{k^2(k+1)^2}{4} + (k+1)^3 && \text{(por hipótesis inductiva)} \\
&= (k+1)^2\left(\frac{k^2}{4} + (k+1)\right) && \text{((}k+1)^2 \text{ factor común)} \\
&= (k+1)^2 \frac{(k^2+4k+4)}{4}. \\
&= \frac{(k+1)^2(k+2)^2}{4}.
\end{aligned}
$$

Luego el resultado es verdadero cuando $n = k+1$ y por el principio de inducción, es verdadero para todos los enteros positivos n. $\square$