

Matemática Discreta I

Clase 12 - Máximo común divisor (1)

FAMAF / UNC

3 de mayo de 2022

Definición de MCD

Definición

Si a y b son enteros algunos de ellos no nulo, decimos que un entero positivo d es un *máximo común divisor*, o *mcd*, de a y b si

- a) $d|a$ y $d|b$;
- b) si $c|a$ y $c|b$ entonces $c|d$.

- La condición (a) nos dice que d es un común divisor de a y b .
- La condición (b) nos dice que cualquier divisor común de a y b es también divisor de d .

Ejemplo

¿Cuál es el mcd entre 60 y 84?

Solución

- 6 es un divisor común de 60 y 84, pero no es el mayor divisor común, porque $12|60$ y $12|84$ pero $12 \nmid 6$.
- Los divisores positivos comunes de 60 y 84 son 1, 2, 3, 6 y 12, luego aunque 6 es un divisor común, no satisface (2) de la definición.
- En este caso, 12 claramente es el **máximo común divisor**.

Preguntas

- Dados $a, b \in \mathbb{Z}$ arbitrarios, alguno de ellos no nulo ¿existe el máximo común divisor?

Rta: Sí.

- Si existe, ¿hay una forma eficiente de calcularlo?

Rta: Sí.

- ¿Cuántos máximos común divisores puede tener un par de enteros?

Rta: 1.

La primera y tercera pregunta son respondidas por el siguiente:

Teorema

Dados $a, b \in \mathbb{Z}$, alguno de ellos no nulo, existe un único $d \in \mathbb{Z}$ que es el máximo común divisor.

Idea de la demostración

$$S = \{ma + nb : m, n \in \mathbb{Z}, ma + nb > 0\} \subset \mathbb{N}.$$

El mínimo de S es el mcd.



Notación

Sean $a, b \in \mathbb{Z}$, alguno de ellos no nulo, denotamos $\text{mcd}(a, b)$ o (a, b) al máximo común divisor entre a y b .

Ejemplo

Hallar $\text{mcd}(174, 72)$.

Solución

Divisores de 174: 1, 2, 3, 6, 29, 58, 87, 174

Divisores de 72: 1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 12, 18, 24, 36, 72

Luego, 6 es divisor común de 174 y 72, y todos los demás divisores comunes (1, 2 y 3) dividen a 6.

Por lo tanto $\text{mcd}(174, 72) = 6$.



Proposición

Sean $a, b \in \mathbb{Z}$, alguno de ellos no nulo. Entonces existen $s, t \in \mathbb{Z}$ tal que

$$(a, b) = sa + tb.$$

Demostración

Es consecuencia inmediata de la demostración del teorema de la p. 5. □

Corolario

Sean a y b enteros, b no nulo, entonces

$$(a, b) = 1 \Leftrightarrow \text{existen } s, t \in \mathbb{Z} \text{ tales que } 1 = sa + tb.$$

Definición

Si $(a, b) = 1$ entonces decimos que a y b son *coprimos*.

Observación

Por el corolario de la página anterior

$$a, b \text{ coprimos} \quad \Leftrightarrow \quad \text{existen } s, t \in \mathbb{Z} \text{ tales que } 1 = sa + tb.$$

Observación

NO es cierto que si existen $s, t \in \mathbb{Z}$ tales que $d = sa + tb \Rightarrow d = (a, b)$.

Por ejemplo, $4 = 2 \cdot 6 + (-2) \cdot 4$ y $(6, 4) = 2$.

Proposición

Sean a, b enteros con $a \neq 0$, entonces

1. $\text{mcd}(b, a) = \text{mcd}(a, b) = \text{mcd}(\pm a, \pm b)$,
2. si $a > 0$, $\text{mcd}(a, 0) = a$ y $\text{mcd}(a, a) = a$,
3. $\text{mcd}(1, b) = 1$.

Demostración

Estas propiedades son de demostración casi trivial, por ejemplo para demostrar que $\text{mcd}(1, b) = 1$ comprobamos que 1 cumple con la definición:

(a) $1|1$ y $1|b$;

(b) si $c|1$ y $c|b$ entonces $c|1$,

propiedades que son obviamente verdaderas.

1. y 2. se dejan a cargo del lector.



La siguiente propiedad no es tan obvia y resulta muy importante.

Propiedad

Si $a \neq 0, b \in \mathbb{Z}$, entonces $\text{mcd}(a, b) = \text{mcd}(a, b - a)$.

Demostración

Sea $d = \text{mcd}(a, b)$, luego

(a) $d|a$ y $d|b$ y (b) si $c|a$ y $c|b$ entonces $c|d$.

Debemos probar que

(a') $d|a$ y $d|b - a$ y (b') si $c|a$ y $c|b - a$ entonces $c|d$.

Por (a), $d|a$ y $d|b \Rightarrow d|b - a \Rightarrow (a')$.

Si $c|a$ y $c|b - a \Rightarrow c|a + (b - a) = b \stackrel{(b)}{\Rightarrow} c|d \Rightarrow (b')$.



Ejemplo

Encontrar el mcd entre 72 y 174.

Solución:

$$\begin{aligned}(72, 174) &= (72, 174 - 72) = (72, 102) \\&= (72, 102 - 72) = (72, 30) \\&= (30, 72) \\&= (30, 72 - 30) = (42, 30) \\&= (30, 42) \\&= (30, 42 - 30) = (30, 12) \\&= (12, 30) \\&= (12, 30 - 12) = (12, 18) \\&= (12, 18 - 12) = (12, 6) \\&= (6, 12) \\&= (6, 12 - 6) = (6, 6) \\&= (6, 6 - 6) = (6, 0) = 6.\end{aligned}$$

- En general no es sencillo encontrar todos los divisores de un número entero grande.
- No es factible calcular el mcd de números grandes revisando todos los divisores comunes.
- El algoritmo anterior nos da un método práctico y relativamente eficiente para calcular el mcd.

La próxima proposición nos provee una herramienta aún mejor para calcular el mcd.

Proposición

Sean a, b enteros no negativos con $b \neq 0$, entonces

$$a = bq + r \quad \Rightarrow \quad \text{mcd}(a, b) = \text{mcd}(b, r). \quad (1)$$

Ejemplo

Encuentre el mcd de 174 y 72.

Solución

Con el uso repetido de la proposición anterior, obtenemos

$$174 = 72 \cdot 2 + 30, \quad \text{entonces} \quad (174, 72) = (72, 30)$$

$$72 = 30 \cdot 2 + 12, \quad \text{entonces} \quad (72, 30) = (30, 12)$$

$$30 = 12 \cdot 2 + 6, \quad \text{entonces} \quad (30, 12) = (12, 6)$$

$$12 = 6 \cdot 2 + 0, \quad \text{entonces} \quad (12, 6) = (6, 0) = 6.$$

Por lo tanto $(174, 72) = 6$.

