

**Práctico 4**  
**Matemática Discreta I – Año 2023/1**  
**FAMAF**

- (1) *a)* Calcular el resto de la división de 1599 por 39 sin tener que hacer la división. (Ayuda:  $1599 = 1600 - 1 = 40^2 - 1$ ).  
*b)* Lo mismo con el resto de 914 al dividirlo por 31.
- (2) Sea  $n \in \mathbb{N}$ . Probar que todo número de la forma  $4^n - 1$  es divisible por 3.
- (3) Probar que el resto de dividir  $n^2$  por 4 es igual a 0 si  $n$  es par y 1 si  $n$  es impar.
- (4) *a)* Probar las reglas de divisibilidad por 2, 3, 4, 5, 8, 9 y 11.  
*b)* Decir por cuáles de los números del 2 al 11 son divisibles los siguientes números:  
12342                      5176                      314573                      899.
- (5) Sean  $a, b, c$  números enteros, ninguno divisible por 3. Probar que  
$$a^2 + b^2 + c^2 \equiv 0 \pmod{3}.$$
- (6) Hallar la cifra de las unidades y la de las decenas del número  $7^{15}$ .
- (7) Hallar el resto en la división de  $x$  por 5 y por 7 para:  
*a)*  $x = 1^8 + 2^8 + 3^8 + 4^8 + 5^8 + 6^8 + 7^8 + 8^8$ ;  
*b)*  $x = 3 \cdot 11 \cdot 17 \cdot 71 \cdot 101$ .
- (8) Hallar todos los  $x$  que satisfacen:  
*a)*  $x^2 \equiv 1 \pmod{4}$                       *b)*  $x^2 \equiv x \pmod{12}$                       *c)*  $x^2 \equiv 2 \pmod{3}$   
*d)*  $x^2 \equiv 0 \pmod{12}$                       *e)*  $x^4 \equiv 1 \pmod{16}$                       *f)*  $3x \equiv 1 \pmod{5}$
- (9) Sean  $a, b, m \in \mathbb{Z}$ ,  $d > 0$  tales que  $d \mid a$ ,  $d \mid b$  y  $d \mid m$ . Probar que la ecuación  $a \cdot x \equiv b \pmod{m}$  tiene solución si y solo si la ecuación  
$$\frac{a}{d} \cdot x \equiv \frac{b}{d} \pmod{\frac{m}{d}}$$
tiene solución.
- (10) Resolver las siguientes ecuaciones:  
*a)*  $2x \equiv -21 \pmod{8}$                       *b)*  $2x \equiv -12 \pmod{7}$                       *c)*  $3x \equiv 5 \pmod{4}$ .

(11) Resolver la ecuación  $221x \equiv 85 \pmod{340}$ . Hallar todas las soluciones  $x$  tales que  $0 \leq x < 340$ .

(12) a) Encontrar todas las soluciones de la ecuación en congruencia

$$36x \equiv 8 \pmod{20}$$

usando el método visto en clase.

b) Dar todas las soluciones  $x$  de la ecuación anterior tales que  $-8 < x < 30$ .

(13) a) Encontrar todas las soluciones de la ecuación en congruencia

$$21x \equiv 6 \pmod{30}$$

usando el método visto en clase.

b) Dar todas las soluciones  $x$  de la ecuación anterior tales que  $0 < x < 35$ .

(14) Encontrar todas las soluciones de los siguientes sistemas de ecuaciones en congruencia

a) 
$$\begin{aligned} 4x &\equiv 7 \pmod{11} \\ 7x &\equiv 8 \pmod{12} \end{aligned}$$

b) 
$$\begin{aligned} x &\equiv -1 \pmod{7} \\ x &\equiv 3 \pmod{10} \\ x &\equiv -2 \pmod{11}. \end{aligned}$$

c) 
$$\begin{aligned} x &\equiv -1 \pmod{2} \\ x &\equiv 5 \pmod{9} \\ x &\equiv -3 \pmod{7}. \end{aligned}$$

(15) Dado  $t \in \mathbb{Z}$ , decimos que  $t$  es *invertible módulo  $m$*  si existe  $h \in \mathbb{Z}$  tal que  $th \equiv 1 \pmod{m}$ .

a) ¿Es 5 invertible módulo 17?

b) Probar que  $t$  es invertible módulo  $m$ , si y sólo si  $(t, m) = 1$ .

c) Determinar los invertibles módulo  $m$ , para  $m = 11, 12, 16$ .

(16) Encontrar los enteros cuyos cuadrados divididos por 19 dan resto 9.

(17) Probar que todo número impar  $a$  satisface:  $a^4 \equiv 1 \pmod{16}$ ,  $a^8 \equiv 1 \pmod{32}$ ,  $a^{16} \equiv 1 \pmod{64}$ .

¿Se puede asegurar que  $a^{2^n} \equiv 1 \pmod{2^{n+2}}$ ?

(18) Encontrar el resto en la división de  $a$  por  $b$  en los siguientes casos:

a)  $a = 11^{13} \cdot 13^8$ ;  $b = 12$ ;      b)  $a = 4^{1000}$ ;  $b = 7$ ;

c)  $a = 123^{456}$ ;  $b = 31$ ;      d)  $a = 7^{83}$ ;  $b = 10$ .

(19) Obtener el resto en la división de  $2^{21}$  por 13; de  $3^8$  por 5 y de  $8^{25}$  por 127.

- (20) a) Probar que no existen enteros no nulos tales que  $x^2 + y^2 = 3z^2$ .  
 b) Probar que no existen números racionales no nulos  $a, b, r$  tales que  $3(a^2 + b^2) = 7r^2$ .
- (21) Probar que si  $(a, 1001) = 1$  entonces 1001 divide a  $a^{720} - 1$ .
- (22) Sea  $p$  primo impar.
- a) Probar que las únicas raíces cuadradas de 1 módulo  $p$ , son 1 y  $-1$  módulo  $p$ . Es decir, probar que  $x^2 \equiv 1 \pmod{p}$ , entonces  $x \equiv \pm 1 \pmod{p}$ .
  - b) Probar que  $p = 2^s \cdot d + 1$  con  $d$  impar.
  - c) Probar que  $a^{2^{s-1} \cdot d} \equiv \pm 1 \pmod{p}$
  - d) Dado  $a$  entero tal que  $0 < a < p$ , probar que
    - $a^d \equiv 1 \pmod{p}$ , o
    - $a^{2^r \cdot d} \equiv -1 \pmod{p}$  para algún  $r$  tal que  $0 \leq r < s$ .

§ **Ejercicios de repaso.** Los ejercicios marcados con (\*) son de mayor dificultad.

- (23) Dada la ecuación de congruencia

$$14x \equiv 10 \pmod{26},$$

hallar todas las soluciones en el intervalo  $[-20, 10]$ . Hacerlo con el método usado en la teórica.

- (24) Dada la ecuación de congruencia

$$21x \equiv 15 \pmod{39},$$

hallar todas las soluciones en el intervalo  $[-10, 30]$ . Hacerlo con el método usado en la teórica.

- (25) Hallar todos los enteros que satisfacen simultáneamente:

$$x \equiv 1 \pmod{3}; \quad x \equiv 1 \pmod{5}; \quad x \equiv 1 \pmod{7}.$$

- (26) (\*) ¿Para qué valores de  $n$  es  $10^n - 1$  divisible por 11?

- (27) (\*) Probar que para ningún  $n \in \mathbb{N}$  se puede partir el conjunto  $\{n, n+1, \dots, n+5\}$  en dos partes disjuntas no vacías tales que los productos de los elementos que las integran sean iguales.

- (28) (\*) El número  $2^{29}$  tiene nueve cifras y todas distintas. ¿Cuál dígito falta? (No está permitido el uso de calculadora).

(29) (\*) Sea  $p = d \cdot 2^s + 1$  donde  $d$  es impar. Dado  $a$  entero tal que  $0 < a < p$ , probar que

o  $a^d \equiv 1 \pmod{p}$ , o

o  $a^{2^r \cdot d} \equiv -1 \pmod{p}$  para algún  $r$  tal que  $0 \leq r < s$ .

Dicho de otra forma: probar que

$$a^d \equiv 1 \pmod{p} \text{ o } a^d \equiv -1 \pmod{p} \text{ o } a^{2^d} \equiv -1 \pmod{p} \text{ o } \dots$$

$$a^{2^{s-2}d} \equiv -1 \pmod{p} \text{ o } a^{2^{s-1}d} \equiv -1 \pmod{p}.$$

(Ayuda: observar  $a^{2^i d}$  es el cuadrado de  $a^{2^{i-1}d}$  y por el Teorema de Fermat  $a^{2^s \cdot d} = a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$ ). Utilizar el resultado del ejercicio (22)).

(30) (\*) Cinco hombres recogieron en una isla un cierto número de cocos y resolvieron repartirlos al día siguiente. Durante la noche uno de ellos decidió separar su parte y para ello dividió el total en cinco partes y dió un coco que sobraba a un mono y se fue a dormir. Enseguida otro de los hombres hizo lo mismo, dividiendo lo que había quedado por cinco, dando un coco que sobraba a un mono y retirando su parte, se fue a dormir. Uno tras otro los tres restantes hicieron lo mismo, dándole a un mono el coco que sobraba. A la mañana siguiente repartieron los cocos restantes, dándole a un mono el coco sobrante. ¿Cuál es el número mínimo de cocos que se recogieron?

(31) (\*) La producción diaria de huevos en una granja es inferior a 75. Cierta día el recolector informó que la cantidad de huevos recogida era tal que contando de a 3 sobraban 2, contando de a 5 sobraban 4 y contando de a 7 sobraban 5. El capataz, dijo que eso era imposible. ¿Quién tenía razón? Justificar.