

Matemática Discreta I

Clase 7 - Conteo (3° parte)

FAMAF / UNC

11 de abril de 2023

Selecciones sin orden

X finito de n elementos.

¿Cuántos subconjuntos de m elementos hay en X ?

Ejemplo

Por ejemplo, sea $\mathbb{I}_5 = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ y nos interesan los subconjuntos de tres elementos. ¿Cuántos habrá?

Solución.

Contemos directamente:

$\{1, 2, 3\}, \{1, 2, 4\}, \{1, 2, 5\}, \{1, 3, 4\}, \{1, 3, 5\}, \{1, 4, 5\},$
 $\{2, 3, 4\}, \{2, 3, 5\}, \{2, 4, 5\},$
 $\{3, 4, 5\}.$

La respuesta, entonces, es 10.

¿Cómo podemos calcular este número sin contar caso por caso?

Una forma de individualizar un subconjunto de tres elementos en \mathbb{I}_5 , consiste en, primero, seleccionar ordenadamente 3 elementos.

Habría, a priori, $5 \cdot 4 \cdot 3$ subconjuntos pues ese es el número de selecciones ordenadas y sin repetición de 3 elementos de \mathbb{I}_5 .

Es claro que algunas de las selecciones ordenadas pueden determinar el mismo subconjunto. En efecto, por ejemplo, cualesquiera de las selecciones

123, 132, 213, 231, 312, 321

determina el subconjunto $\{1, 2, 3\}$.

Es decir las permutaciones de $\{1, 2, 3\}$ determinan el mismo subconjunto.

Veamos todos los casos:

| | | | | | | | |
|-----|-----|-----|-----|-----|-----|---|-----------|
| 123 | 132 | 213 | 231 | 312 | 321 | → | {1, 2, 3} |
| 124 | 142 | 214 | 241 | 412 | 421 | → | {1, 2, 4} |
| 125 | 152 | 215 | 251 | 312 | 521 | → | {1, 2, 5} |
| 134 | 143 | 314 | 341 | 413 | 431 | → | {1, 3, 4} |
| 135 | 153 | 315 | 351 | 513 | 531 | → | {1, 3, 5} |
| 145 | 154 | 415 | 451 | 514 | 541 | → | {1, 4, 5} |
| 234 | 243 | 324 | 342 | 423 | 432 | → | {2, 3, 4} |
| 235 | 253 | 325 | 352 | 523 | 532 | → | {2, 3, 5} |
| 245 | 254 | 425 | 452 | 524 | 542 | → | {2, 4, 5} |
| 345 | 354 | 435 | 453 | 534 | 543 | → | {3, 4, 5} |

Es decir $3! = 6$ selecciones ordenadas nos determinan un subconjunto de tres elementos. Por lo tanto, el número total de subconjuntos de 3 elementos es

$$\frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{3!} = \frac{5!}{3!(5-3)!}$$

Podemos hacer el mismo razonamiento, si tuviéramos que elegir subconjuntos de 2 elementos:

- Tenemos $5 \cdot 4 = \frac{5!}{3!}$ selecciones ordenadas de 2 elementos.
- La cantidad de permutaciones de dos elementos es $2!$, luego,
- hay $\frac{5!}{3!2!} = 10$ subconjuntos de 2 elementos.

En el caso general de subconjuntos de m elementos de un conjunto de n elementos ($m \leq n$) podemos razonar en forma análoga.

- Tenemos $\frac{n!}{(n-m)!}$ selecciones ordenadas de m elementos entre n .
- La cantidad de permutaciones de m elementos es $m!$, luego,
- hay $\frac{n!}{(n-m)!m!}$ subconjuntos de m elementos.

Teorema

Sea X un conjunto de n elementos. Entonces el número total de subconjuntos de m elementos de X es

$$\frac{n!}{(n-m)! m!}$$

Número combinatorio

Sean $n, m \in \mathbb{N}_0$, $m \leq n$. Definimos

$$\binom{n}{m} = \frac{n!}{(n-m)! m!}$$

el *número combinatorio* asociado al par n, m o *número combinatorio* n, m .

Por razones que se verán más adelante se denomina también el *coeficiente binomial* asociado al par n, m con $m \leq n$.

Definimos también

$$\binom{n}{m} = 0, \quad \text{si } m > n.$$

Hay unos pocos números combinatorios que son fácilmente calculables:

$$\binom{n}{0} = \binom{0}{0} = 1 \quad y \quad \binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n.$$

Estos resultados se obtienen por aplicación directa de la definición (recordar que $0! = 1$).

Con el número combinatorio podemos reescribir el resultado visto más arriba:

Teorema

Sean $n, m \in \mathbb{N}_0$, $m \leq n$, y supongamos que el conjunto X tiene n elementos. Entonces la cantidad de subconjuntos de X con m elementos es $\binom{n}{m}$.

Ejemplo

¿Cuántos comités pueden formarse de un conjunto de 6 mujeres y 4 hombres, si el comité debe estar compuesto por 4 mujeres y 2 hombres?

Solución

Debemos elegir 4 mujeres entre 6, y la cantidad de elecciones posibles es $\binom{6}{4}$. Por otro lado, hay $\binom{4}{2}$ formas de elegir 2 hombres entre 4. Luego, por el principio de multiplicación, el resultado es

$$\begin{aligned}\binom{6}{4} \cdot \binom{4}{2} &= \frac{6!}{(6-4)!4!} \cdot \frac{4!}{(4-2)!2!} = \frac{6!}{2!4!} \cdot \frac{4!}{2!2!} = \frac{6 \cdot 5}{2} \cdot \frac{4 \cdot 3}{2} \\ &= 15 \cdot 6 = 90.\end{aligned}$$



Simetría del número combinatorio

Proposición

Sean $m, n \in \mathbb{N}_0$, tal que $m \leq n$. Entonces

$$\binom{n}{m} = \binom{n}{n-m}.$$

Demostración.

$$\begin{aligned}\binom{n}{n-m} &= \frac{n!}{(n - (n-m))! (n-m)!} \\ &= \frac{n!}{m! (n-m)!} \\ &= \frac{n!}{(n-m)! m!} = \binom{n}{m}.\end{aligned}$$



El hecho de que

$$\binom{n}{m} = \binom{n}{n-m}.$$

se puede interpretar en términos de conteo: $\binom{n}{m}$ es el número de subconjuntos de m elementos de un conjunto de n elementos.

Puesto que con cada subconjunto de m elementos hay unívocamente asociado un subconjunto de $n - m$ elementos, su complemento en X , es claro que

$$\binom{n}{m} = \binom{n}{n-m}.$$

Triángulo de Pascal

Teorema

Sean $m, n \in \mathbb{N}$, tal que $m \leq n$. Entonces

$$\binom{n}{m-1} + \binom{n}{m} = \binom{n+1}{m}$$

Demostración.

El enunciado nos dice que debemos demostrar que

$$\frac{n!}{(n-m+1)!(m-1)!} + \frac{n!}{(n-m)!m!} = \frac{(n+1)!}{(n-m+1)!m!}$$

y lo dejamos como ejercicio. □

Veamos unos pocos ejemplos de la fórmula $\binom{n}{m-1} + \binom{n}{m} = \binom{n+1}{m}$ o equivalentemente (dando vuelta la igualdad).

$$\binom{n+1}{m} = \binom{n}{m-1} + \binom{n}{m}.$$

Nota

Ejemplos

$$\binom{4}{2} = \binom{3}{1} + \binom{3}{2} = 3 + 3 = 6.$$

$$\binom{5}{2} = \binom{4}{1} + \binom{4}{2} = 4 + 6 = 10,$$

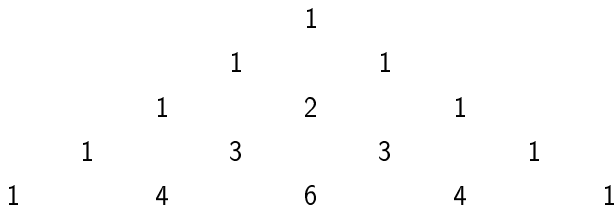
$$\binom{5}{3} = \binom{4}{2} + \binom{4}{3} = 6 + 4 = 10.$$

El teorema precedente permite calcular los coeficientes binomiales:

$$\begin{array}{ccccccc} & & & \binom{0}{0} & & & \\ & & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} & & \\ & \binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} & \\ & \binom{3}{0} & & \binom{3}{1} & & \binom{3}{2} & \binom{3}{3} \\ \binom{4}{0} & & \binom{4}{1} & & \binom{4}{2} & & \binom{4}{3} & \binom{4}{4} \end{array}$$

Cada término interior es suma de los dos términos inmediatos superiores.
Los elementos en los lados valen 1.

Escribamos los valores de cada fila:



El triángulo es denominado *triángulo de Pascal*.

Entre las propiedades que cuenta el triángulo de Pascal está la de ser simétrico respecto al eje vertical central, como consecuencia de la simetría de los números combinatorios.