Matemática Discreta I
Clase 20 - Isomorfismo / Caminatas, caminos y ciclos

FAMAF / UNC

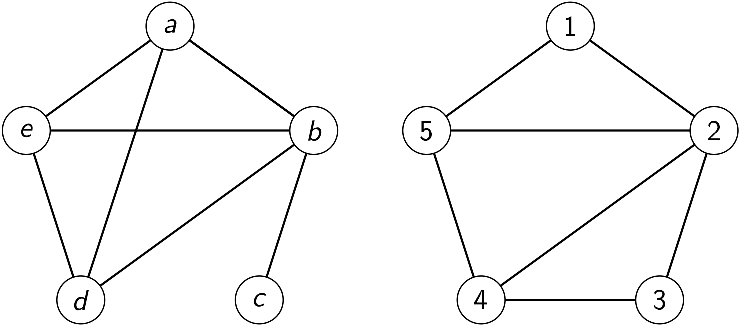
6 de junio de 2023

Una aplicación importante de la noción de valencia es en el problema de determinar si dos grafos son o no isomorfos.

Si $\alpha : V_1 \to V_2$ es un isomorfismo entre G_1 y G_2, y $\alpha(v) = w$, entonces cada arista que contiene a v se transforma en una arista que contiene a w.

En consecuencia $\delta(v) = \delta(w)$. Por otro lado, si G_1 tiene un vértice x, con valencia $\delta(x) = \delta_0$, y G_2 no tiene vértices con valencia δ_0, entonces G_1 y G_2 no pueden ser isomorfos.

Esto nos da otra manera de ver que no son isomorfos los siguientes grafos:



Puesto que el primer grafo tiene un vértice de valencia 1 y el segundo no.

Una extensión de esta idea se da en la siguiente proposición.

Proposición

Sean G_1 y G_2 grafos isomorfos. Para cada $k \geq 0$ sea $n_i(k)$ el número de vértices de G_i que tienen valencia k ($i = 1, 2$). Entonces $n_1(k) = n_2(k)$.

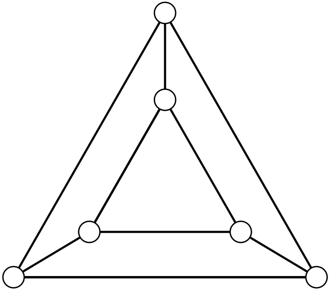
Demostración

Hemos visto más arriba que si $\alpha : V_1 \to V_2$ es un isomorfismo entre G_1 y G_2 y $v \in V_1$, entonces $\delta(v) = \delta(\alpha(v))$. Luego la cantidad de vértices con valencia k en G_1 es igual a la cantidad de vértices con valencia k en G_2. $\square$

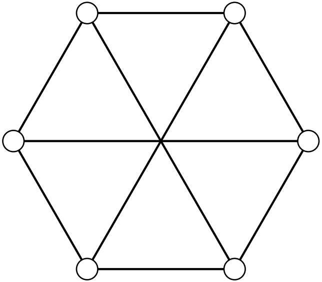
No hay ningún criterio general eficiente para determinar si dos grafos son isomorfos o no. En el siguiente ejemplo, no se aplica el criterio anterior.

Ejemplo

Probar que los siguientes grafos no son isomorfos.



G_1



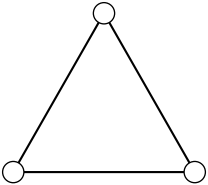
G_2

Solución

Ambos tienen 6 vértices, 9 aristas y todos los vértices son de valencia 3.

Por lo tanto no podemos utilizar los criterios anteriores para decir que no son isomorfos.

Sin embargo, observar que G_1 tiene un subgrafo K_3:



Mientras que G_2 no lo tiene. Por lo tanto, G_1 y G_2 no son isomorfos. □

Caminatas, caminos y ciclos

Definición

Una *caminata* en un grafo G es una secuencia de vértices

$$v_1, v_2, \ldots, v_k,$$

tal que v_i y v_{i+1} son adyacentes $(1 \leq i \leq k-1)$.

Si todos los vértices son distintos, una caminata es llamada un *camino*.

Un *recorrido* es una caminata donde todas las aristas $\{v_i, v_{i+1}\}$ con $1 \leq i \leq k-1$ son distintas.

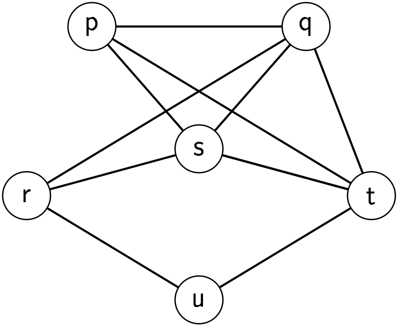
Un *ciclo* a una caminata $v_1, v_2, \ldots, v_k, v_1$ con $v_1, v_2, \ldots, v_k$ camino y $k \geq 3$. A menudo diremos que es un k-*ciclo*, o un ciclo de *longitud* k en G.

Observación

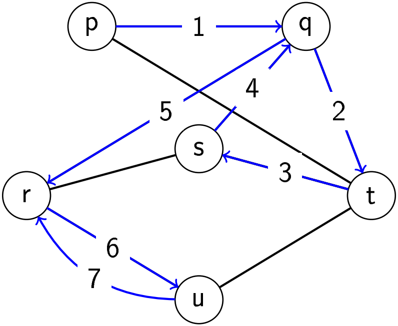
- Por definición de caminata $k \geq 2$, es decir una caminata tiene al menos una arista ($\{v_1, v_2\}$).
- Por definición de ciclo $v_1, v_2, \ldots, v_k, v_1$, $k \geq 3$; un ciclo tiene al menos 3 aristas (claramente, no hay 2-ciclos.).

Ejemplo

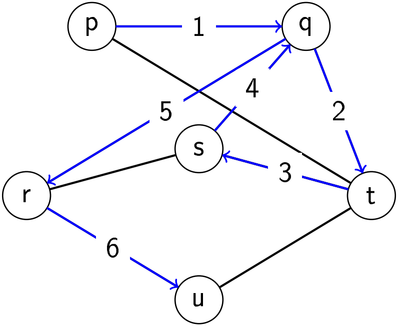
Dibujemos caminatas, caminos, recorridos y ciclos en el siguiente grafo:



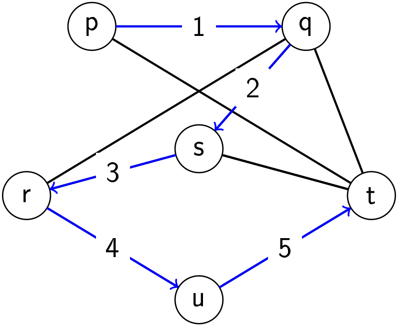
Caminata: p,q,t,s,q,r,u,r



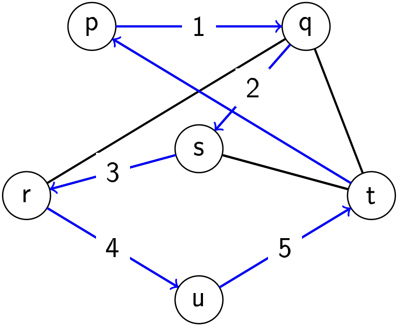
Recorrido: p,q,t,s,q,r,u



Camino: p,q,s,r,u,t



Ciclo: p,q,s,r,u,t,p



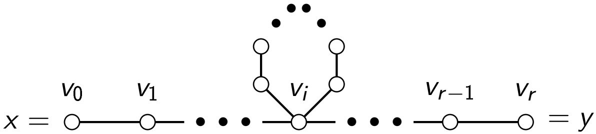
Lema

Sea G un grafo. Entonces, x e y pueden ser unidos por una caminata si y sólo si x e y pueden ser unidos por un camino.

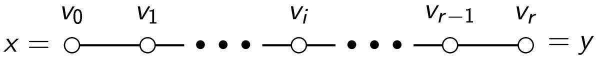
Idea de la demostración

($\Leftarrow$) es trivial (un camino es una caminata).

($\Rightarrow$) Eliminar "bucles".



Se transforma en



□

Escribamos $x \sim y$ siempre y cuando los vértices x e y de G puedan ser unidos por un camino en G o $x = y$: hablando en forma rigurosa, esto significa que si $x \neq y$ hay un camino $v_1, v_2, \ldots, v_k$ en G con $x = v_1$ e $y = v_k$.

Definición

Sea G grafo, diremos que es conexo si para $x \sim y$ para cualesquiera x, y vértices en G.

El lema de la página anterior implica que $\sim$ es una relación de equivalencia.

Proposición

Sea G grafo y x, y, z vértices de G. Entonces,

(1) $x \sim x$ (reflexividad de $\sim$).

(2) $x \sim y$, entonces $y \sim x$ (simetría de $\sim$).

(3) $x \sim y$, $y \sim z$, entonces $x \sim z$ (transitividad de $\sim$).

Demostración

(1) Por definición $x \sim x$.

(2) Si $x = x_1, x_2, \ldots, x_k = y$ es un camino de x a y, entonces $y = x_k, \ldots, x_2, x_1 = x$ es un camino de y a x.

(3)
$x \sim y \Rightarrow$ un camino de x a y.
$y \sim z \Rightarrow$ un camino de y a z.
Pegando los caminos en y, obtenemos una caminata de x a z (que se reduce a un camino por el lema). $\square$