Matemática Discreta I
Clase 22 - Grafos 4

FAMAF / UNC

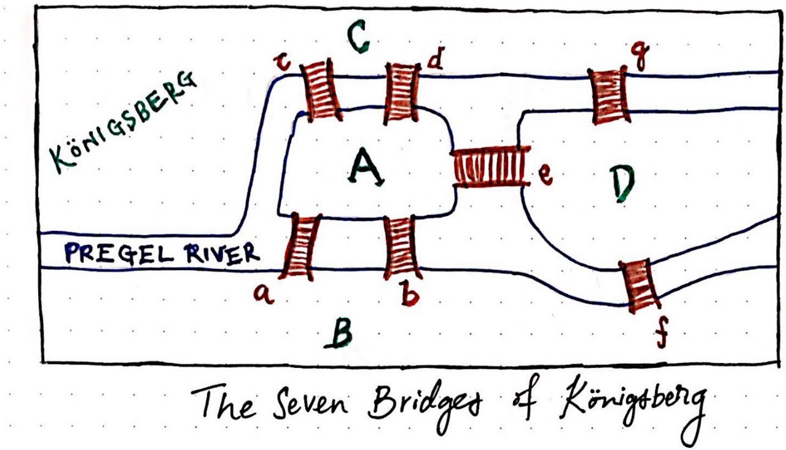
2 de junio de 2020

Los puentes de Könisberg

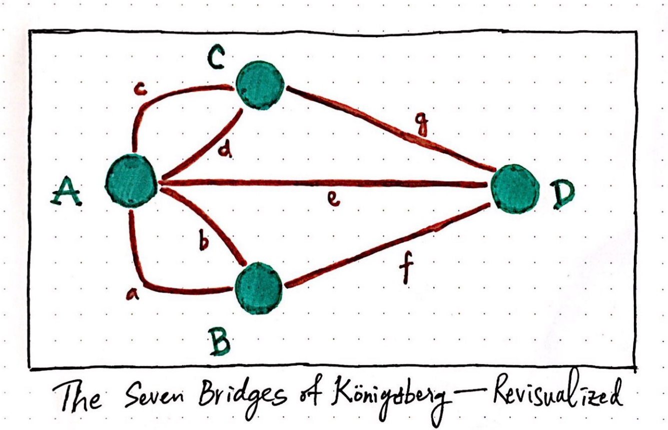
Pregunta

¿Es posible cruzar todos los puentes pasando una y solo una vez por cada uno? Leonhard Euler (1707-1783).

Los puentes de Könisberg - versión 2



Los puentes de Könisberg - versión 3



Ahora el problema se reduce a encontrar una caminata que use cada arista (o puente) una y solo una vez.

Observación

$\delta(A) = 5$, $\delta(B) = 3$, $\delta(C) = 3$, $\delta(D) = 3$.

Euler, abstrayéndose del problema concreto, razonó de la siguiente manera:

- Supongamos que el vértice de partida es x y el de llegada es y. Todos los demás los llamo intermedios.
- En un vértice intermedio cada vez que entro por un puente salgo por otro. Eso me "aporta" 2 a la valencia.
- Terminado el proceso usé todos los puentes, por lo tanto en cada vértice intermedio la cantidad de entradas más la cantidad de salidas es la valencia. Como la cantidad de entradas es igual a la cantidad de salidas, la valencia es par.

Concluyendo

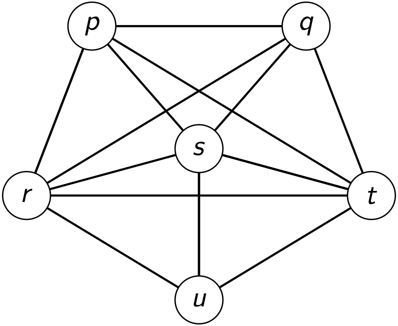
- Si hay una caminata que pasa por cada puente una y solo una vez, la cantidad de vértices con valencia impar es a lo sumo 2.
- Como todos los vértices en el problema tienen valencia impar, el problema no tiene solución.

Como veremos más adelante el problema de los puentes de Könisberg puede ser generalizado y también vale la recíproca.

Cita: Euler, Leonhard (1736). Solutio problematis ad geometriam situs pertinentis. Comment. Acad. Sci. U. Petrop 8, 128-40 (en latín)

Ejemplo

¿Es posible recorrer el siguiente gráfo con una caminata que pase por cada vértice una sola vez y volver al de partida? ¿Es posible hacer una caminata que pasa por cada arista una sola vez?



Solución

Para la primera pregunta una posibilidad es el ciclo p, q, t, s, u, r, p.

La segunda pregunta tiene respuesta negativa:
Las valencias son

$$\delta(p) = 4, \quad \delta(q) = 4, \quad \delta(s) = 5, \quad \delta(r) = 5, \quad \delta(u) = 3, \quad \delta(t) = 5.$$

Como en los puentes de Königsberg, al haber más de 2 vértices de valencia impar, no es posible recorrer todas las aristas una sola vez.

$\square$

Definición

Un *ciclo hamiltoniano* en un grafo G es un ciclo que contiene a todos los vértices del grafo.

Una *caminata euleriana* en un grafo G es un caminata que usa todas las aristas de G exactamente una vez. Una caminata euleriana que comienza y termina en un mismo vértice se llama también *circuito euleriano*.

Teorema

Un grafo conexo con más de un vértice posee una caminata euleriana de v a w, con $v \neq w$ si y sólo si v y w son los únicos vértices de grado impar.
Un grafo conexo con más de un vértice tiene un circuito euleriano si y sólo si todos los vértices tienen grado par.

Algoritmo para encontrar caminatas eulerianas de v a w, con $v \neq w$:

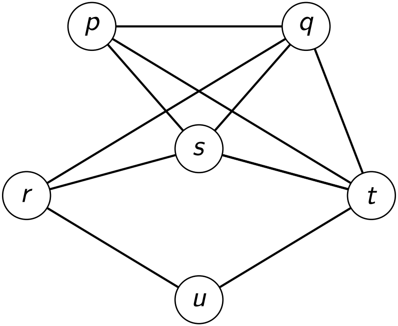
"Parta del vértice v y recorra el grafo sin pasar dos veces por la misma arista. Cuando no pueda avanzar más se encontrará en w y habrá hecho una caminata euleriana."

El caso de un grafo donde todas las valencias son pares se puede reducir al anterior: si deseamos una caminata euleriana que empiece y termine en v

- eliminamos una arista $\{v, w\}$ del grafo que contenga a v,
- el nuevo grafo tiene solo dos vértices, v y w, de valencia impar,
- aplicamos el caso anterior, con lo cual hacemos una caminata euleriana que termina en w,
- terminamos la caminata agregando la arista $\{v, w\}$.

Ejemplo

Encontremos una caminata euleriana con origen en p y final en r del siguiente grafo.



Solución

Debemos primero observar que la caminata euleriana debe existir pues $\delta(p) = 3$, $\delta(q) = 4$, $\delta(r) = 3$, $\delta(s) = 4$, $\delta(t) = 4$, y $\delta(u) = 2$.

Como fue mencionado más arriba, el algoritmo más sencillo es en este caso el que sirve: debemos partir de p y recorrer el grafo sin repetir aristas. Cuando no podamos avanzar más (bajo estas condiciones) habremos obtenido la caminata euleriana. Una posible solución es, por ejemplo,

$$p, s, q, p, t, u, r, s, t, q, r$$

Existen muchas posibles caminatas eulerianas de p a r, por ejemplo le proponemos que encuentre una cuya primera arista sea $\{p, t\}$.