MATTEOBLIG.

TIRIL MATHIASSEN

1

$f(x) = e^x \qquad f'(x) \approx \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$

Gjentar eksperimentet med mindre og mindre h h h h h h h...

h = 0,01:

$$f'(1{,}5) \approx \frac{e^{1{,}51} - e^{1{,}5}}{0{,}01} = 4{,}5042$$

h = 0,001:

$$f'(1{,}5) = \frac{e^{1{,}501} - e^{1{,}5}}{0{,}001} = 4{,}4839$$

h = 0,0001:

$$f'(1{,}5) = \frac{e^{1{,}5001} - e^{1{,}5}}{0{,}0001} = 4{,}4819$$

h = 0,00001:

$$f'(1{,}5) = \frac{e^{1{,}50001} - e^{1{,}5}}{0{,}00001} \approx 4{,}4817$$

h = 0,000001:

$$f'(1{,}5) = \frac{e^{1{,}500001} - e^{1{,}5}}{0{,}000001} \approx 4{,}4817$$

$h = 10^{-7} \rightarrow f'(1{,}5) \approx 4{,}4817$

$h = 10^{-8} \rightarrow f'(1{,}5) \approx 4{,}4817$

$h = 10^{-9} \rightarrow f'(1{,}5) \approx 4{,}4817$

$h = 10^{-10} \rightarrow f'(1{,}5) = 4{,}4817$ → nøyaktig 4,4817

$h = 10^{-11} \rightarrow f'(1{,}5) = 4{,}482$ → avvik

$h = 10^{-12} \rightarrow f'(1{,}5) = 4{,}48$ → enda litt mer avvik

$h = 10^{-13} \rightarrow f'(1{,}5) = 0$ her går det fullstendig åt skogen!!

2

Gjentar eksperimentet i forrige oppgave, men med formelen:

$$\frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} = f'(x)$$

$h = 0{,}1: \rightarrow f'(1{,}5) = \dfrac{e^{1{,}6} - e^{1{,}4}}{0{,}2} = 4{,}4892$

$h = 0{,}01 \rightarrow f'(1{,}5) = 4{,}4818$

$h = 0{,}001 \rightarrow f'(1{,}5) \approx 4{,}4817$

Ser at denne formelen nærmer seg 4,4817 raskere enn den forrige (mer nøyaktig)

$h = 4 \cdot 10^{-1} \rightarrow f'(1{,}5) \approx 4{,}4817$

$h = 10^{-5} \rightarrow f'(1{,}5) \approx 4{,}4817$

⋮

$h = 10^{-10} \rightarrow f'(1{,}5) = 4{,}4817$ → nøyaktig

blir nøyaktig 4,4817 når $h = 10^{-10}$ slik som i forrige oppgave

$h = 10^{-11} \rightarrow f'(1{,}5) = 4{,}482$

$h = 10^{-12} \rightarrow f'(1{,}5) = 4{,}48$

$h = 10^{-13} \rightarrow f'(1{,}5) = 0$ går åt skogen igjen for samme verdi for h som forrige

BRUKER TAYLORREKKER TIL Å FORKLARE OPPFØRSEL:

Taylorutvikler $f(x+h)$ og $f(x-h)$ rundt x:

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2}f''(x) + \frac{h^3}{6}f'''(x) + O(h^4)$$

$$f(x-h) = f(x) - hf'(x) + \frac{h^2}{2}f''(x) - \frac{h^3}{6}f'''(x) + O(h^4)$$

$$f(x+h) - f(x-h) = 2hf'(x) + \frac{h^3}{3}f'''(x) + O(h^5) \qquad \Big| : 2h$$

$$\frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} = f'(x) + \frac{h^2}{6}f'''(x) + O(h^4)$$

Vi får at feilen til den nye formelen er $O(h^2)$, altså proporsjonal med kvadratet til h.
Det betyr at den nye formelen er mer nøyaktig enn den forrige, men den bryter også sammen når h blir liten nok.

3 Jeg ønsker å slå på startrommen så jeg gjentar eksperimentet enda en gang, men nå med formelen:

$$f'(x) = \frac{f(x-2h) - 8f(x-h) + 8f(x+h) - f(x+2h)}{12h}$$

$h = 0{,}1 \rightarrow f'(1{,}5) = \dfrac{e^{1{,}3} - 8e^{1{,}4} + 8e^{1{,}6} - e^{1{,}7}}{1{,}2} = 4{,}48167$ vi er veldig nærme den riktige verdien allerede ved første h
→ denne formelen er enda mer nøyaktig enn de to forrige

$h = 0{,}01 \rightarrow f'(1{,}5) = 4{,}48169$

$h = 0{,}001 \rightarrow f'(1{,}5) = 4{,}48169$

⋮

$h = 10^{-9} \rightarrow f'(1{,}5) = 4{,}481698$

$h = 10^{-10} \rightarrow f'(1{,}5) = 4{,}48176$

$h = 10^{-11} \rightarrow f'(1{,}5) = 4{,}4827$

$h = 10^{-12} \rightarrow f'(1{,}5) = 4{,}4825$ går lengre og lengre bort fra verdien vi ønsker når h blir mindre

$h = 10^{-13} \rightarrow f'(1{,}5) = 4{,}5417$

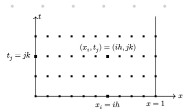
$h = 10^{-14} \rightarrow f'(1{,}5) = 0$ → går åt skogen ett hakk senere enn for de tidligere formlene

Dersom vi taylorutvikler denne formelen vil vi se at feilen til formelen er $O(h^4)$.

Varmelikningen: $\boxed{\dot{u}(x,t) = u''(x,t)}$

Randkrav: $u(0,t) = u(1,t) = 0$

Initialkrav: $u(x,0) = f(x)$

Gitrer opp: 

i = tellevariabel (ikke imaginære enheten)

Tenker at vi erstatter $u(x,t)$ med $n+1$ envariable funksjoner $u_i(t)$ som approksimerer temperaturendringen i hvert sitt punkt x_i på stangen:

$$\boxed{u_i(t) \approx u(x_i, t)} \quad (1)$$

2. ordens differanseformel for x:

$$\boxed{u''(x,t) \approx \frac{u(x+h,t) - 2u(x,t) + u(x-h,t)}{h^2}} \quad (2)$$

Setter (1) og (2) inn i varmelikningen → følgende ODE-system:

$$\boxed{\dot{u}_i(t) \approx \dot{u}(x_i, t) \approx \frac{u_{i+1}(t) - 2u_i(t) + u_{i-1}(t)}{h^2}}$$

har $n+1$ ligninger pga. $n+1$ punkter på gitter på x-akse og har at $\underbrace{u_0 = 0 \text{ og } u_n = 0}_{\text{gitt av randbetingelsene}}$

Approksimerer punktet (x_i, t_j):

$$u(x_i, t_j) \approx u_{ij}$$

3 vanlige metoder:

EULERS EKSPLISITT: $$\frac{u_{i,j+1} - u_{ij}}{k} = \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h^2}$$

EULERS IMPLISITT: $$\frac{u_{i,j+1} - u_{ij}}{k} = \frac{u_{i+1,j+1} - 2u_{i,j+1} + u_{i-1,j+1}}{h^2}$$

CRANK-NICOLSON:
(trapesmetoden) $$\frac{u_{i,j+1} - u_{ij}}{k} = \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{2h^2} + \frac{u_{i+1,j+1} - 2u_{i,j+1} + u_{i-1,j+1}}{2h^2}$$

midt i mellom de 2 andre metodene

Løser oppgave 4-6 med python (kode i github).

Den analytiske løsningen er: $u(x,t) = e^{-\pi^2 t} \cdot \sin(\pi x)$

Eksplisitt metode er kun stabil når $\frac{k}{h^2} \leq 0{,}5$, de andre to er alltid stabile.

Implisitt metode gir oss et lineært likningssystem for hvert tidssteg.

Crank-Nicolson kombinerer de andre 2 metodene, er alltid stabil og mer nøyaktig.

La også til en kode som sammenligner de 3 metodene med den analytiske løsningen.

Der kan vi observere at eksplisitt metode plutselig blir ustabil og at de andre følger den analytiske løsningen.