

Espaces Vectoriels

Dans tout ce qui suit $k = \mathbb{R}$
ou \mathbb{C}

I) Definitions - Propriétés

Def: Soit E un ensemble muni d'une loi de composition interne notée $+$ et d'une loi de composition externe notée

$$+: E \times E \rightarrow E$$

$$(u, v) \mapsto u + v$$

$$\text{et } \circ : \mathbb{K} \times E \rightarrow E$$

$$(d, u) \mapsto du$$

On dit que $(E, +, \circ)$ est un espace vectoriel sur \mathbb{K} si E est un \mathbb{K} -espace vectoriel si on a:

1) $\forall u, v \in E, u + v = v + u$

2) $\forall u, v, w \in E, u + (v + w) = (u + v) + w$

3) Il existe un élément de E noté 0_E appelé élément neutre telle que $x + 0_E = x$

4) $\forall x \in E, \exists x' \in E ; x + x' = 0_E$
(x' appelé élément symétrique de x noté $-x$)

5) $\forall x \in E, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}, (\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$

6) $\forall x \in E, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}, \alpha(\beta \cdot x) = (\alpha\beta)x$

7) $\forall x, y \in E, \forall \alpha \in \mathbb{K}, \alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$

8) $\forall x \in E \quad 1 \cdot x = x$

Rq: les éléments de E sont appelés vecteurs.

Les éléments de \mathbb{K} sont appelés les scalaires.

Ex:

1) $E = \mathbb{R}^2 = \{(x_1, y_1) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}\}$

Sont $u \in E \Rightarrow u = (x_1, y_1)$
 $v \in E \Rightarrow v = (x_2, y_2)$

$$(u + v) = (x_1, y_1) + (x_2, y_2)$$

$$= (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$$

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall u = (x_1, y_1) \in E$$

$$\lambda u = \lambda(x_1, y_1) = (\lambda x_1, y_1)$$

$\star u = (x_1, y_1) ; v = (x_2, y_2) ; w = (x_3, y_3)$
et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

1) $u + v = (x_1, y_1) + (x_2, y_2)$
 $= (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$
 $= (x_2, y_2) + (x_1, y_1)$
 $= v + u$

2) $u + (v + w) =$
 $(x_1, y_1) + ((x_2, y_2) + (x_3, y_3))$

$$= (x_1, y_1) + (x_2 + x_3, y_2 + y_3)$$

$$= (x_1 + (x_2 + x_3), y_1 + (y_2 + y_3))$$

$$= ((x_1 + x_2) + x_3, y_1 + (y_2 + y_3))$$

$$= ((x_1 + x_2), (y_1 + y_2)) + (x_3, y_3)$$

$$= ((x_1, y_1) + (x_2, y_2)) + (x_3, y_3)$$

$$= (u + v) + w$$

$$u = (x_1, y_1)$$

$$\exists ? \quad 0_E (0,0) \quad / \quad u + 0_E = u$$

$$(x_1, y_1) + (0,0) = (x_1, y_1)$$

$$(x_1+a, y_1+b) = (x_1, y_1)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1+a=x_1 \\ y_1+b=y_1 \end{cases} \Leftrightarrow a=b=0$$

$$\text{Seit } \Rightarrow 0_E = (0,0)$$

$$\text{Seit } 0_E = (0,0) \text{ auf a:}$$

$$u + 0_E = (x_1, y_1) + (0,0)$$

$$= (x_1+0, y_1+0)$$

$$= (x_1, y_1)$$

$$= u.$$

$$4) \quad u + u' = 0_E$$

$$(x_1, y_1) + (a, b) = (0,0)$$

$$(x_1+a, y_1+b) = (0,0)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1+a=0 \\ y_1+b=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1=-a \\ y_1=-b \end{cases}$$

$$\Rightarrow u' = (-x_1 - y_1)$$

$$5) \quad (\alpha + \beta) u = (\alpha + \beta)(x_1, y_1)$$

$$= ((\alpha + \beta)x_1, (\alpha + \beta)y_1)$$

$$= (\alpha x_1 + \beta x_1, \alpha y_1 + \beta y_1)$$

$$= (\alpha x_1, \alpha y_1) + (\beta x_1, \beta y_1)$$

$$= (\alpha x_1 + \beta x_1, \alpha y_1 + \beta y_1)$$

$$= \alpha(x_1, y_1) + \beta(x_1, y_1)$$

$$= \alpha u + \beta u$$

$$6) \quad \alpha(\beta u) = \alpha(\beta(x_1, y_1))$$

$$= \alpha(\beta x_1, \beta y_1)$$

$$= (\alpha \beta x_1, \alpha \beta y_1)$$

$$= \alpha \beta (x_1, y_1)$$

$$= (\alpha \beta) u.$$

$$7) \quad \alpha(u+v) = \alpha((x_1, y_1) + (x_2, y_2))$$

$$= \alpha(x_1 + x_2, y_1 + y_2)$$

$$= (\alpha(x_1 + x_2), \alpha(y_1 + y_2))$$

$$= (\alpha x_1 + \alpha x_2, \alpha y_1 + \alpha y_2)$$

$$= (\alpha x_1, \alpha y_1) + (\alpha x_2, \alpha y_2)$$

$$= \alpha(x_1, y_1) + \alpha(x_2, y_2)$$

$$= \alpha u + \alpha v.$$

$$8) \quad \forall 1 \cdot u = 1(x_1, y_1)$$

$$= (1 \cdot x_1, 1 \cdot y_1)$$

$$= (x_1, y_1) = u.$$

Conclusion:

$(\mathbb{R}^2, +, \circ)$ est un espace vectoriel sur \mathbb{R} .

Plus généralement:

* $(\mathbb{R}^n, +, \circ)$ est un espace vectoriel sur \mathbb{R} .

$$E = \{ f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \}$$

Alors E est un espace vectoriel sur \mathbb{R} avec les lois suivantes

$$\forall f, g \in E, (f+g)(x) = f(x) + g(x)$$

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall f \in E,$$

$$(\lambda f)(x) = \lambda f(x)$$

$$3) E = \mathbb{R}[x]$$

$$E = \mathbb{C}[x]$$

Propriétés:

Soit $(E, +, \circ)$ un espace vectoriel sur \mathbb{R}

Alors on a:

$$\forall u, v \in E, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{K} :$$

$$1) 0 \cdot u = 0_E$$

$$2) (-1) \cdot u = -u$$

$$3) \alpha \cdot 0_E = 0_E$$

$$4) (-\alpha) u = \alpha(-u) = -(\alpha u)$$

$$5) (\alpha - \beta) u = \alpha u - \beta u.$$

$$6) \alpha(u + v) = \alpha u + \alpha v.$$

$$7) \alpha u = 0_E \iff \alpha = 0 \text{ ou } u = 0_E$$

II) Sous-espaces Vectoriels:

Dans toute la suite $(E, +, \circ)$ est un espace vectoriel sur \mathbb{K} .

Définition:

Une partie F de E est dite un sous espace vectoriel de E si seulement si on a:

$$1) F \neq \emptyset$$

$$2) \alpha u \in F, \forall \alpha \in \mathbb{K}, \forall u \in F$$

$$3) u + v \in F, \forall u, v \in F.$$

$$(2) \text{ et } (3) \Rightarrow u + v \in F,$$

$$v \in \mathbb{K}$$

$$\forall u, v \in F$$

Remarque:

1) tout sous espace vectoriel F de E contient le vecteur nul 0_E

Ex:

$$F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x+y=0\}$$

$$1) 0_E = 0_{\mathbb{R}^2} = (0, 0) \in F$$

car $0+0=0$

2) Soit $u, v \in F$

$$u = (x_1, y_1) \mid x_1 + y_1 = 0$$

$$\alpha u = \alpha(x_1, y_1) = (\alpha x_1, \alpha y_1)$$

$$\text{on a: } \alpha x_1 + \alpha y_1 = \alpha(x_1 + y_1) = \alpha \cdot 0 = 0$$

$$(\alpha x_1, \alpha y_1) \in F$$

$$\Rightarrow \alpha(x_1, y_1) \in F$$

$$\Rightarrow \alpha u \in F$$

$$3) \text{ Soit } u, v \in F$$

$$u = (x_1, y_1); x_1 + y_1 = 0$$

$$v = (x_2, y_2); x_2 + y_2 = 0$$

$$u + v = (x_1, y_1) + (x_2, y_2)$$

$$= (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$$

On a:

$$x_1 + x_2 + y_1 + y_2 = \underbrace{x_1}_{0} + \underbrace{y_1}_{0} + \underbrace{x_2}_{0} + \underbrace{y_2}_{0} = 0 + 0 = 0$$

$$\Rightarrow u + v \in F$$

Cl: F est un sous espace vectoriel de \mathbb{R}^2 .

Remarque ① Tout sous espace vectoriel F de E contient l'élément neutre de E .

② Si f est un sous-espace vectoriel de E alors

$(F, +, \cdot)$ est lui-même est un espace vectoriel sur \mathbb{K} . Ainsi: pour montrer qu'un ensemble F est un espace vectoriel sur \mathbb{K} , il suffit de montrer que F est un sous-espace vectoriel de E .

Définition - proposition:

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, v_1, v_2, \dots, v_n des vecteurs de E .

On appelle combinaison linéaire de v_1, \dots, v_n tout vecteur u de E qui s'écrit $u = d_1 v_1 + d_2 v_2 + \dots + d_n v_n$

$$= \sum_{k=1}^n d_k v_k.$$

On note $\text{Vect}(v_1, v_2, \dots, v_n)$ l'ensemble formé par toutes les combinaisons linéaires finies des vecteurs v_1, \dots, v_n

$$\text{Vect}(v_1, v_2, \dots, v_n) = \{ u = d_1 v_1 + d_2 v_2 + \dots + d_n v_n \}$$

Alors $\text{Vect}(v_1, v_2, \dots, v_n)$ est un sous-espace vectoriel de E appelé le sous-espace vectoriel de E engendré par v_1, v_n

Remarque: Pour montrer que F est un sous-espace vectoriel de E , il suffit de l'écrire sous forme d'un vect.

Proposition - Définition:

Soient F et G 2 sous-espaces vectoriels de E . On note

$$F+G = \{ u+v, u \in F \text{ et } v \in G \}$$

Alors $F+G$ est un sous-espace vectoriel de E appelé somme de F et G .

$F+G$ contient F et G .

Définition: On dit que les sous-espaces vectoriels F et G ont une somme directe ou que la somme $F+G$ est directe si $F \cap G = \{0\}$

On note dans ce cas cette somme que $F \oplus G$

$$\text{Ex: } E = \mathbb{R}^2$$

$$F = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x+y=0 \}$$

$$G = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x-y=0 \}$$

1) Montrer que F et G sont 2 sous-espaces vectoriels de \mathbb{R}^2 .

2) Calculer $F \cap G$

3) Démontrer.

Solution:

$$1) F = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x=-y \}$$

$$= \{ (y, -y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \in \mathbb{R} \} = \text{Vect}\{(1, -1)\}$$

$\Rightarrow F$ est un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^2 .

$$G = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x=y\}$$

$$= \{(x, x) \in \mathbb{R}^2, x \in \mathbb{R}\}$$

$$= \text{Vect}\{(1, 1)\}$$

$\Rightarrow G$ est un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^2 .

2) $F \cap G = \{0_E\}$ et $F + G = E$

$$= \{z = (x, y), x+y=0 \text{ et } x-y=0\}$$

$$\begin{cases} x+y=0 \\ x-y=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x=0 \\ 2y=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=y=0$$

$$\Rightarrow F \cap G = \{0_E\}$$

3) F et G sont une somme directe.

Définition: 2 sous-espaces vectoriels F et G de E sont dites supplémentaires dans E si :

1) $F \cap G = \{0_E\}$

2) $F + G = E$

Dans ce cas on écrit $F \oplus G = E$

Exemple: $E = \mathbb{C}$

$$F = \mathbb{R}$$

$$G = i\mathbb{R}$$

1) $F \cap G = \{0\}$

2) Soit $z \in \mathbb{C}, z = a+ib$ $\in F + G$

$$\Rightarrow E \subset F + G$$

D'autre $F + G \subset E$

$$\Rightarrow F \oplus G = E$$

III - Famille libre - Famille liée 15

Soit E un espace vectoriel sur \mathbb{K} .

Définition: Soit $n \in \mathbb{N}^*$,

v_1, v_2, \dots, v_n des vecteurs de E .

1) On dit que la famille (v_1, v_2, \dots, v_n) est libre ou que v_1, v_2, \dots, v_n sont linéairement indépendantes si:

Pour tous scalaires $d_1, \dots, d_n \in \mathbb{K}$

$$d_1 v_1 + d_2 v_2 + \dots + d_n v_n = 0_E$$

$$\Rightarrow d_1 = d_2 = d_3 = \dots = d_n = 0$$

2) On dit que la famille (v_1, \dots, v_n) est liée s'il existe des scalaires $d_1, \dots, d_n \in \mathbb{K}$ non tous nuls tels que

$$d_1 v_1 + d_2 v_2 + \dots + d_n v_n = 0_E$$

Ex: $E = \mathbb{R}^2$

$$H = \{(1, 0), (0, 1)\}$$

$\Rightarrow F \cap G$

Montrer que H est libre:

Soient $d_1, d_2 \in \mathbb{R}$ tels que:

$$d_1 v_1 + d_2 v_2 = 0_{\mathbb{R}^2}$$

$$\Leftrightarrow d_1(1, 0) + d_2(0, 1) = (0, 0)$$

$$\Leftrightarrow (d_1, d_2) = (0, 0)$$

$$\Leftrightarrow d_1 = d_2 = 0 \Rightarrow H \text{ est libre}$$

2) $F = \{(1, 0), (0, 1), (1, 1)\}$

Montrer que F est lié.

En effet, soient $d_1, d_2, d_3 \in \mathbb{R}$ tels que:

$$d_1 v_1 + d_2 v_2 + d_3 v_3 = (0, 0)$$

Si ℓ est dite aussi un monome.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 = 0 \\ \alpha_2 + \alpha_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 = -\alpha_3 \\ \alpha_2 = -\alpha_3 \end{cases}$$

\Rightarrow F n'est pas libre
donc elle est liée.

Définition:

Soient v_1, \dots, v_n des vecteurs de E

on dit que la famille

(v_1, \dots, v_n) est génératrice.

dans E si pour tout $u \in E$, il existe $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in k$ tels que

$$u = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n$$

$$= u \in E.$$

Exemple: $E = \mathbb{R}^2$

$$\textcircled{1} \quad F = \{(1,0), (0,1)\}$$

Exemple: $E = \mathbb{R}^2$

$$F = \left\{ \underbrace{(1,0)}, \underbrace{(0,1)} \right\}$$

$$v_1 \quad v_2$$

Soit $u = (x,y) \in E$. On a :

$$u = (x,y) = (x,0) + (0,y) \in$$

$$x(1,0) + y(0,1)$$

$$\Rightarrow u = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2$$

$\Rightarrow F$ est une famille génératrice dans E .

Définition:

Soit $B = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$
une famille de vecteurs de E .

On dit que B est une base si B est une famille libre et génératrice.

Ex:

$$\text{Exemple: } E = \mathbb{R}^2$$

$$F = \{(1,0), (0,1)\}$$

D'après les exemples précédents on a montré que F est une famille libre & génératrice.

Donc F est une base de \mathbb{R}^2 .

Cette base appelée base canonique de \mathbb{R}^2 .

Plus généralement,

$$F = \{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\}$$

est appelée base canonique de \mathbb{R}^3 .

:

$$F = \{(1,0, \dots, 0), (0,1,0, \dots, 0), \dots$$

$(0,0,0, \dots, 1)\}$ est appelée

base canonique de \mathbb{R}^n .

Ex:

$$E = \mathbb{R}_2[x] = \{a_0 + a_1 x + a_2 x^2, a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}\}$$

$F = \{1, x, x^2\}$ est une base.

F est libre car : Soit $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$,

$$\alpha_1 \cdot 1 + \alpha_2 x + \alpha_3 x^2 = 0 \cdot 1 + 0 \cdot x + 0 \cdot x^2$$

$$\Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$$

F est génératrice. En effet,

Soit $P \in \mathbb{R}_2[x]$

$$P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$$

$$= a_0 \cdot 1 + a_1 x + a_2 x^2$$

$$= a_0 v_1 + a_1 v_2 + a_2 v_3.$$

Ex:

$$E = \mathbb{R}^2$$

$$F = \{(0,1), (0,2)\}$$

2 bases de

$$F = \{(1,0), (0,1)\} \quad \mathbb{R}^2$$

Définition: Soit E un espace vectoriel sur \mathbb{K} .

On dit que E est de dimension finie si E possède une base de cardinal fini, c'est à dire le nombres de vecteurs qui forment la base est finie.

Ex: $E = \mathbb{R}^2$ est de dimension finie.

Théorème: Soit E un espace vectoriel de dimension finie.

Alors toutes les bases de E ont le même cardinal.

On le note $\dim E$.

Ex: ① $E = \mathbb{R}^2$

$$B = \{(1,0), (0,1)\}$$

$$\dim E = \# B = 2.$$

② $E = \mathbb{R}_3[x]$

$$B = \{1, x, x^2\}, \dim E = \# B = 3$$

Proposition: Si $\dim E = n$

Alors :

- 1) Toute famille libre contient au plus n vecteurs
- 2) Toute famille génératrice contient au moins n vecteurs
- 3) Toute famille libre et contenant exactement n vecteurs est une base.

4) Toute famille génératrice qui contient exactement n vecteurs est une base. (7)

Théorème: Soit E un espace vectoriel avec $\dim E = n$ alors :

1) Si F est un sous-espace vectoriel de E alors : $\dim F \leq \dim E$.

En particulier, si $\dim F = \dim E$ alors $F = E$.

2) Si f et g des espaces vectoriel alors :

$$\dim (F + G) = \dim F + \dim G - \dim (F \cap G).$$

$$F \cap G = \{0_E\}$$

$$\dim F \cap G = 0.$$

$$F \oplus G \iff \dim F \cap G = 0$$

Remarque: Soit E un espace vectoriel. Si F et G sont 2 sous de dimension n . espaces vect de E

1) $F \cap G = \{0_E\} \iff \dim F \cap G = 0$

2) $F \oplus G = E \iff \dim F \cap G = 0$ et

$$\dim F + G = \dim E.$$

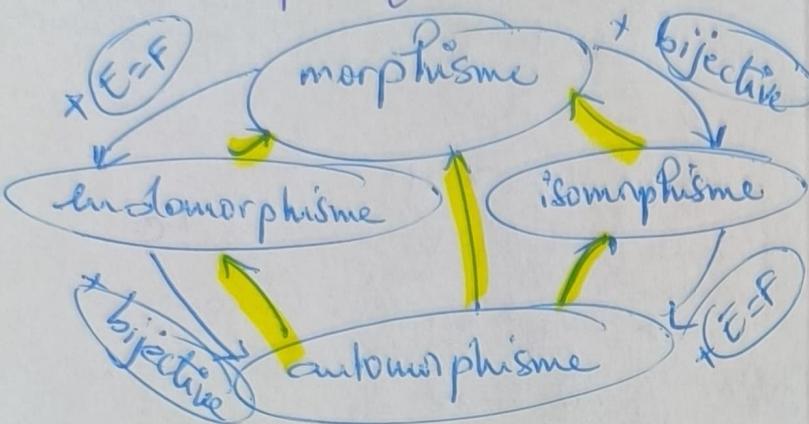
- 1) f est dite aussi un **morphisme**
 2) Si de plus, $E=F$, on dit que f est un **endomorphisme**.
 3) Si f est bijective, on dit que f est un **isomorphisme**.
 4) Si $E=F$ et f est bijective, on dit que f est **automorphisme**.

$$\text{Im}(f) = f(E) = \{y \in F, \exists x \in E\}$$

$$y = f(x)\}$$

On appelle noyau de f et on note $\text{Ker}(f)$ le sous-espace vectoriel de E défini par:

$$\text{Ker}(f) = f^{-1}(\{0_F\})$$



Notation:

L'ensemble des applications linéaires de E dans F est noté par $\mathcal{L}(E, F)$

Proposition: Soit $f: E \rightarrow F$ une

application linéaire, alors :

1) L'image d'un sous-espace vectoriel de E par f est un sous-espace
 II-Image & noyau: vecteuriel de F

2) L'image réciproque d'un sous-espace vectoriel de F par f est un sous-espace vectoriel de E .

II-Image & noyau:

1) Définition:

1) On appelle l'image de f et on note $\text{Im}(f)$ le sous-espace vectoriel de F défini par :

Chapitre 3: Applications linéaires

I → Définition et propriétés:

Soyons E et F un sous espace vectoriel sur \mathbb{K}

Définition: On appelle application linéaire, une application $f: E \rightarrow F$ telle que

$$\forall u, v \in E, f(u+v) = f(u) + f(v)$$

$$\forall u \in E, \forall \lambda \in \mathbb{K}, f(\lambda u) = \lambda f(u)$$

$$\text{Ex: } f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(x, y) \mapsto x+y$$

f est linéaire. En effet,

$$\begin{aligned} \forall \text{ soit } u &= (x_1, y_1) \in \mathbb{R}^2 \\ v &= (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(u+v) &= f((x_1, y_1) + (x_2, y_2)) \\ &= f(x_1 + x_2, y_1 + y_2) \\ &= x_1 + x_2 + y_1 + y_2 \\ &= x_1 + y_1 + x_2 + y_2 \\ &= f(x_1, y_1) + f(x_2, y_2) \\ &= f(u) + f(v) \end{aligned}$$

$$\forall \text{ soit } \alpha \in \mathbb{K} \text{ et } u = (x_1, y_1)$$

$$\begin{aligned} f(\alpha u) &= f(\alpha(x_1, y_1)) \\ &= f(\alpha x_1, \alpha y_1) \\ &= \alpha x_1 + \alpha y_1 = \alpha(x_1 + y_1) \\ &= \alpha f(x_1, y_1) \\ &= \alpha f(u) \end{aligned}$$

$\Rightarrow f$ est bien une application linéaire.

Remarque:

(Si f est linéaire alors $f(0_E) = 0_F$)

Si $f(0_E) \neq 0_F \Rightarrow f$ n'est pas linéaire

$$\text{Ex: } f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(x, y) \mapsto x+y+1$$

$$\text{on a: } f(0_E) = 0+0+1 \neq 0$$

$\Rightarrow f$ n'est pas linéaire.

Ex 2:

$$\begin{aligned} f: \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto x^2 \end{aligned}$$

$$\text{on a } f(0) = 0^2 = 0$$

$$f(\lambda u) = \lambda f(u) = (\lambda u)^2 = \lambda^2 u^2$$

$$\begin{aligned} \lambda f(u) & \text{ alors que} \\ \lambda u^2 & \end{aligned}$$

$\Rightarrow f$ n'est pas linéaire.

Démonstration:

$$f(0_E) = 0_F$$

$$\begin{aligned} 0_F \neq f(0_E) &= f(0_E - 0_E) \\ &= f(0_E) + f(0_E) \end{aligned}$$

$$f(0_E) = 0 f(u)$$

$$f(0) = 0$$

morphisme : l'app linéaire

Remarque:

Sit $f: E \rightarrow F$ une application linéaire.