Université de Monastir
Institut Supérieur D'Informatique
et de Mathématiques de Monastir
Dépt. de Mathématiques

A.U: 2023-2024
L1 INFO
Algèbre 2
6 - Juin -2023

Examen Final - Session De Rattrapage

- NOTE : L'usage de la calculatrice est interdit.
- L'épreuve comporte deux exercices indépendants.

Exercice 1:

On considère $\mathbb{R}_2[X]$ muni de sa base canonique B et $\mathbb{R}_3[X]$ muni de sa base canonique B'. On donne les polynômes:

$$P_1 = X^2 + 1, P_2 = X + 1 \ \ et \ \ P_3 = 2X^2 - X.$$

Soit u l'application linéaire définie de $\mathbb{R}_2[X]$ dans $\mathbb{R}_3[X]$ par:

$$u(P) = (X + \lambda)P \ \text{ où } \lambda \text{ est un paramètre réel fixé.}$$

1. Déterminer la matrice $A = mat(u, B, B')$.
2. Montrer que $B_1 = (P_1, P_2, P_3)$ forme une base de $\mathbb{R}_2[X]$.
3. Ecrire M la matrice de passage de B à B_1 et donner son inverse.
4. Ecrire N la matrice de passage de B' à $B_1' = (X^3, X^2, X, 1)$ et donner son inverse.
5. Déterminer la matrice $S = mat(u, B_1, B_1')$.
6. Ecrire la relation entre S et A à l'aide des matrices de passage M et N.
7. Effectuer, lorsque cela est possible, les opérations suivantes :
   $(i)\ (A+5I_3)$, $(ii)\ {}^tA\,.A$, $(iii)\ S.({}^tA-2N)$, $(iv)\ A.\,S$, $(v)\ tr({}^tA\,.A)$, $(vi)\ det(2\,.{}^tMM^{-1})$.

Exercice 2:

On considère le système

$$(S) : \begin{cases} ax + by + z = 1 \\ x + by + z = b \\ x + by + az = 1 \end{cases} \quad , \ a,b \in \mathbb{R}$$

1. Ecrire la matrice A du système.
2. Déterminer le rang de A suivant les valeurs de a et b.
3. Pour quelles valeurs de a et b, le système (S) est-il de Cramer?
4. On prend $a = -1$, résoudre (S) par la méthode des pivots de Gauss.
5. On prend $a = 2, b = -1$.
   (a) Vérifier que A est inversible et calculer A^{-1}.
   (b) Résoudre le système : $M \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$, $M = {}^tA$.