Chap IV Réduction des endom et des matrices carrées :

$K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Dans tte la suite E est un K.e.v

$\dim E = n \geq 1$.

I Polynôme Caractéristique

Déf 1 : Soit $A = (a_{ij}) \in M_n(K)$

On appelle poly caract de A, noté P_A ou χ_A,

Le poly $P_A(x) = \det(A - x I_n)$, $x \in K$

$$A - x I_n = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} - x \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11}-x & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-x & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & & & a_{nn}-x \end{pmatrix}$$

$$P_A(x) = \begin{vmatrix} a_{11}-x & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-x & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & & & a_{nn}-x \end{vmatrix}$$

Exp :

1) $A = 0$ la matrice nulle

$$P_A(x) = \det(0 - x I_n) = \begin{vmatrix} -x & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & -x \end{vmatrix}$$

$$= (-x)^n.$$

2) $A = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 6 & 7 \end{pmatrix}$

$$P_A(x) = \det(A - x I_2)$$

$$= \begin{vmatrix} 4-x & 5 \\ 6 & 7-x \end{vmatrix}$$

$$= (4-x)(7-x) - 30$$

$$= x^2 - 11x - 2$$

$\deg P_A = 2.$

$\operatorname{tr} A = 4+7 = 11.$

$\det A = -2.$

$P_A(x) = x^2 - 11x - 2$

$= x^2 - \operatorname{tr} A \cdot x + \det A.$

3) $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(K)$

$P_A(x) = \det(A - x I_2)$

$= \begin{vmatrix} a-x & b \\ c & d-x \end{vmatrix}$

$= (a-x)(d-x) - bc$

$= x^2 - \underbrace{(a+d)}_{\operatorname{tr} A} x + \underbrace{ad-bc}_{\det A.}$

$\forall A \in M_2(K)$

$P_A(x) = x^2 - \operatorname{tr} A \cdot x + \det A$

$\boxed{4}$ $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & -7 \end{pmatrix}$

$P_A(x) = \det(A - x I_3)$

$= \begin{vmatrix} \overset{+}{-1-x} & \overset{-}{1} & \overset{+}{0} \\ 2 & 3-x & 4 \\ 5 & 6 & -7-x \end{vmatrix}$

dev% ă L_1.

$P_A(x) = (-1-x) \begin{vmatrix} 3-x & 4 \\ 6 & -7-x \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 5 & -7-x \end{vmatrix}$

$= (-1-x)\left[(3-x)(-7-x) - 24\right] - \left(2(-7-x) - 20\right)$

$= (-1-x)\left(x^2 + 4x - 45\right) + 34 + 2x$

$= -x^3 - 5x^2 + 43x + 79.$

deg $P_A = 3$.

coeff dominant de P_A est (-1)

Théo : $\forall A \in M_n(K)$

deg $P_A = n$

coeff dominant de P_A est $(-1)^n$.

coeff de x^{n-1} dans P_A est $(-1)^{n-1}\,\mathrm{tr}\,A$

terme cst est $\det A$.

$$P_A(x) = (-1)^n x^n + (-1)^{n-1} \cdot \mathrm{tr}\,A \cdot x^{n-1} + \dots + \det A.$$

Prop :

1) une matrice et sa transposée ont m̂ poly caract.

2) Deux matrices semblables ont m̂ poly caract.

Dém :

1) Soit $A \in M_n(K)$.

$$P_{{}^tA}(x) = \det({}^tA - x I_n)$$
$$= \det\left({}^t({}^tA - x I_n)\right)$$
$$= \det(A - x I_n)$$
$$= P_A(x).$$

2) Soit $A, M \in M_n(K)$ deux matrices semblables.

Alors $\exists P \in M_n(K)$ une matrice inversible tq $M = P^{-1}.A.P$.

$$P_M(x) = \det(M - x I_n)$$
$$= \det(P^{-1}.A.P - x I_n)$$
$$= \det\left(P^{-1}(AP - xP)\right)$$
$$= \det\left(P^{-1}(A - x I_n)P\right)$$

$P_M(x) = \det P^{-1} \cdot \det(A - x I_n) \cdot \det P$

$= \det(A - x I_n)$

$= P_A(x)$.

Déf : Soit $u \in \mathcal{L}(E)$.

On appelle poly caract de u

$P_u(x) = \det(u - x\, id)$

$= \det(A - x I_n) = P_A(x)$

avec $A = \operatorname{mat}_B u$, B base de E.

Exp :

$u : \mathbb{R}_n[X] \longrightarrow \mathbb{R}_n[X]$

$P \longmapsto u(P) = P'$.

calculer le poly caract de u.

$B_c = (1, X, X^2, \dots, X^n)$.

Soit $A = \operatorname{mat}_{B_c}(u)$

$$
\begin{array}{ccccccc}
 & u(1) & u(X) & u(X^2) & \dots & u(X^n) & \\
A = & \left(\begin{matrix} 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \end{matrix}\right. & \begin{matrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \end{matrix} & \begin{matrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{matrix} & \dots & \left.\begin{matrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ n \\ 0 \end{matrix}\right) & \begin{matrix} 1 \\ X \\ X^2 \\ \vdots \\ X^n \end{matrix}
\end{array}
$$

$u(1) = 0$, $u(X^2) = 2X$

$u(X) = 1$, $u(X^n) = n X^{n-1}$

$$
P_u(x) = P_A(x) = \begin{vmatrix} -x & 1 & & & \\ 0 & -x & 2 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & n \\ 0 & & & 0 & -x \end{vmatrix}
$$

$= (-x)^{n+1}$

2] Valeurs propres - Vecteurs propres

Def 1 : Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. $u : E \to E$

(i) Un scalaire $\lambda \in K$ est dit valeur propre de u (λ v.p de u) s'il existe un vect $a \in E$, $a \neq 0$ tq $u(a) = \lambda a$

(ii) Un vect b de E est dit Vecteur propre de u ssi $b \neq 0$ et il existe $\lambda \in K$ tq $u(b) = \lambda b$.

On dit que b est un vect propre de u associé à la v.p λ.

(iii) Soit λ une v.p de u.

Alors le s.e.v $Ker(u - \lambda id) = \{x \in E \text{ tq } (u - \lambda id)(x) = 0\}$

$= \{x \in E \text{ tq } u(x) = \lambda x\}$

est non réduit à $\{0\}$, il est appelé sous espace propre de u associé à la v.p λ et noté $E_\lambda(u)$.

$E_\lambda(u) = Ker(u - \lambda id)$

$= \{x \in E,\ u(x) = \lambda x\}$

ss esp propre de u.

(iv) On appelle spectre de u l'ens de ses v.p.

$Sp(u) = \{\lambda \in K \text{ tq } \lambda \text{ v.p de } u\}$

Exp :

$u : \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}_n[X]$

$P \longmapsto P'$.

Cherchons les v.p de u.

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$, λ v.p de u

alors $\exists P \in \mathbb{R}_n[X]$, $P \neq 0$ tq $u(P) = \lambda P$.

$u(P) = \lambda P \Longleftrightarrow P' = \lambda P$

$\Longrightarrow \deg P' = \deg(\lambda P)$

$\Longrightarrow \deg P - 1 = \deg(\lambda P)$

Si $\lambda \neq 0$

alors $\deg P - 1 = \deg P$

$\Longrightarrow -1 = 0$ imp.

u n'admet pas de v.p non nulles.

Si $\lambda = 0$

$u(P) = \lambda P \Longleftrightarrow P' = 0$

$\Longleftrightarrow P = \underline{cte}$

on prend $P = 1$

$P \neq 0$, $u(P) = P' = 0 = 0.1$

cl : 0 est v.p de u.

cl : $Sp(u) = \{0\}$.

$E_0(u) = \operatorname{Ker}(u - 0\, id)$

$= \operatorname{Ker} u$

$= \left\{ P \in \mathbb{R}_n[X] \text{ tq } u(P) = 0 \right\}$

$= \left\{ P \in \mathbb{R}_n[X] \text{ tq } P' = 0 \right\}$

$= \left\{ P = cte \in \mathbb{R} \right\}$

$= \mathbb{R}$.

Théo : soit $u \in \mathcal{L}(E)$

Les valeurs propres de u sont les racines de son poly caractéristique.

λ v.p de $u \Longleftrightarrow P_u(\lambda) = 0$.

Exp : $u : \mathbb{R}_n[X] \longrightarrow \mathbb{R}_n[X]$

$P \longmapsto P'$.

$A = \underset{Bc}{mat}(u) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & \cdots & n \\ 0 & \ddots & & & \\ \vdots & & \ddots & & \\ 0 & \cdots & & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $P_u(x) = P_A(x) = (-x)^{n+1}$.

λ v.p de u $\Longleftrightarrow P_u(\lambda) = 0$

$\Longleftrightarrow (-\lambda)^{n+1} = 0$

$\Longleftrightarrow \lambda = 0$

$Sp(u) = \{0\}$.

Déf : Soit $A \in M_n(K)$

(i) Un scalaire $\lambda \in K$ est dit valeur propre de A (λ v.p de A) s'il existe un vect colonne $X \in M_{n,1}(K)$, $X \neq 0$ tq

$A.X = \lambda X$

(ii) Un vect colonne $X \in M_{n,1}(K)$ est dit vecteur propre de A ssi $X \neq 0$ et $\exists \lambda \in K$ tq $AX = \lambda X$.

(iii) Soit $\lambda \in K$ une v.p de A, le sous esp propre de A associé à la v.p λ est $E_\lambda(A) = \ker(A - \lambda I_n)$

$= \{X \in M_{n,1}(K)$ tq $AX = \lambda X\}$

(iv) spectre de A est l'ens de ses v.p.

$Sp_K(A) = \{\lambda \in K$ tq λ v.p de $A\}$.

Théo : les v.p de A sont les racines de son poly caract.

λ v.p de $A \Longleftrightarrow P_A(\lambda) = 0$.

Exp : $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

$P_A(x) = \det(A - x I_2)$

$= \begin{vmatrix} -x & -1 \\ 1 & -x \end{vmatrix}$

$= x^2 + 1$.

$Sp_{\mathbb{R}}(A) = \{\lambda \in \mathbb{R}$ tq λ v.p de $A\}$

$= \emptyset$.

$Sp_{\mathbb{C}}(A) = \{-i, i\}$.

<u>Exp</u>: $u : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$.

$(x, y, z) \longrightarrow (x+y+z, x+y+z, x+y+z)$

$B_c = (e_1, e_2, e_3)$.

$$A = mat(u, B_c) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$P_u(x) = P_A(x) = \det(A - x I_3)$

$$= \begin{vmatrix} 1-x & 1 & 1 \\ 1 & 1-x & 1 \\ 1 & 1 & 1-x \end{vmatrix}$$

$C_1 \longleftarrow C_1 + C_2 + C_3$

$$P_u(x) = \begin{vmatrix} 3-x & 1 & 1 \\ 3-x & 1-x & 1 \\ 3-x & 1 & 1-x \end{vmatrix} = (3-x) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-x & 1 \\ 1 & 1 & 1-x \end{vmatrix}$$

$L_2 \leftarrow L_2 - L_1$

$L_3 \leftarrow L_3 - L_1$

$$P_u(x) = (3-x) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -x & 0 \\ 0 & 0 & -x \end{vmatrix}$$

$$= x^2(3-x).$$

0 est racine double de $P_u \Rightarrow$ 0 est v.p double de u

3 est racine simple de $P_u \Rightarrow$ 3 est v.p simple de u.

$Sp(u) = \{0, 3\}$

$E_\lambda(u) = \mathrm{Ker}(u - \lambda\, id)$

$E_0(u) = \mathrm{Ker}\, u$

$= \{ a = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \text{ tq } u(a) = 0 \}$

$a = (x,y,z) \in E_0(u) \iff u(a) = 0$

$\iff u(x,y,z) = 0$

$\iff \begin{cases} x+y+z=0 \\ x+y+z=0 \\ x+y+z=0 \end{cases} \iff x+y+z=0$

$\iff x = -y-z$

$\iff a = (x,y,z) = (-y-z, y, z)$

$\iff a = y\underbrace{(-1,1,0)}_{v_1} + z\underbrace{(-1,0,1)}_{v_2}$

Cl : $E_0(u) = \mathrm{Vect}(v_1, v_2)$.

*/ $E_3(u) = \mathrm{Ker}(u - 3\, id)$

$= \{ a = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \text{ tq } u(a) = 3a \}$

$a = (x,y,z) \in E_3(u) \iff u(a) = 3a$

$\iff u(x,y,z) = 3(x,y,z)$

$\iff \begin{cases} x+y+z = 3x \\ x+y+z = 3y \\ x+y+z = 3z \end{cases} \iff x = y = z$

$\iff a = (x,y,z) = (x,x,x) = x\underbrace{(1,1,1)}_{v_3}$

$E_3(u) = \mathrm{Vect}(v_3)$.

$B' = (v_1, v_2, v_3)$

$\det_{Bc}(B') = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} v_1 & v_2 & v_3 \end{array} \\ \begin{vmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}_{Bc} \end{array}$

$L_2 \leftarrow L_2 + L_1$

$= \begin{vmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$ dev % à C_1

$= -1(-1-2) = 3 \neq 0$.

d : B' est une base de $\mathbb{R}^3$.

$$\mathrm{mat}(u, B') = \begin{array}{cc} \begin{array}{ccc} u(V_1) & u(V_2) & u(V_3) \end{array} & \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{array} \end{array} = D$$

$V_1 \in E_0(u) \Rightarrow u(V_1) = 0 V_1 = 0$

$V_2 \in E_0(u) \Rightarrow u(V_2) = 0 . V_2 = 0$

$V_3 \in E_3(u) \Rightarrow u(V_3) = 3 V_3$

on a trouvé une base B' de $\mathbb{R}^3$ où $\mathrm{mat}(u, B') = D$ diagonale

on dit u est diagonalisable.

Rque : Sur la diagonale de D figurent les v.p de u.

$L_2 \leftarrow L_2 - L_1$

$L_3 \leftarrow L_3 - L_1$

$$P_u(x) = (3-x) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -x & 0 \\ 0 & 0 & -x \end{vmatrix}$$

$$= x^2 (3-x).$$

0 est racine double de $P_u \Rightarrow$ 0 est v.p double de u

3 est racine simple de $P_u \Rightarrow$ 3 est v.p simple de u.

$Sp(u) = \{0, 3\}$