Université de Monastir
Institut Supérieur D'Informatique
et de Mathématiques de Monastir
Dépt. de Mathématiques

A.U: 2024-2025
L1 INFO.
Algébre 2
Série No.3

Systèmes Linéaires

Exercice 1: Soit $a,\, b \in \mathbb{R}$. Résoudre, par la méthode des pivots de Gauss, les systèmes suivants:

$$S_1 : \begin{cases} x + 2y = 1 \\ 2x + 3y = -1 \end{cases}, \qquad S_2 : \begin{cases} x + 2y + 3z = 4 \\ x + y + 2z = 1 \\ 2x - y + z = 2 \end{cases}, \qquad S_3 : \begin{cases} -2x + 3y + z = 6 \\ x + 2y + 3z = 4 \end{cases}$$

$$S_4 : \begin{cases} y - z + t = 1 \\ x + 3y + z - 2t = 1 \\ x + 4y + 6z - 7t = 14 \\ -x - 5y + 4z - 3t = a - 5 \end{cases}, \; S_5 : \begin{cases} 2y - z - 4t = a \\ x + y - 2t = 0 \\ x - y + 2z + 4t = 1 \end{cases}, \; S_6 : \begin{cases} ax + by + 2z = 1 \\ ax + (2b-1)y + 3z = 1 \\ ax + by + (b+3)z = 2b - 1 \end{cases}$$

Exercice 2: Pour $m \in \mathbb{R}$, on considère le système d'équations linéaires suivant:

$$(S) : \begin{cases} mx + y + z = 1 \\ x + my + z = m \\ x + y + mz = m^2 \end{cases}$$

1. Pour quelles valeurs de m, le système (S) est-il de Cramer?
2. Pour $m \in \mathbb{R} \backslash \{1,\, -2\}$, résoudre (S) par les formules de Cramer.
3. Pour $m \in \{1,\, -2\}$, résoudre (S) par la méthode des pivots de Gauss.

Exercice 3: Soit la matrice

$$A = \begin{pmatrix} -\lambda & -2 & 1 \\ -3 & -\lambda + 1 & 3 \\ -2 & -2 & 3 - \lambda \end{pmatrix}, \; \lambda \in \mathbb{R}.$$

1. Pour quelles valeurs de λ, la matrice A est-elle inversible.
2. Déterminer le rang de A suivant les valeurs de λ .
3. Dans le cas où A est inversible, calculer $det\left(\frac{1}{4}A.\,{}^tA^{-1}\right)$.
4. Pour $\lambda = 0$, déterminer A^{-1}.
5. Pour $\lambda = 0$, résoudre le système: $M\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad M = {}^tA.$
6. Pour $\lambda = 1$, résoudre par la méthode du pivot de Gauss dans $\mathbb{R}^3$ le système:
$A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -m \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad m \in \mathbb{R}.$