Chapitre : Intégrale généralisée

Le but de ce chapitre est de généraliser la notion d'intégration à un intervalle autre qu'un segment c.à.d à une fonction continue par morceaux sur un intervalle non borné ou semi-ouvert.

1. Définition et exemples :

Définition : Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$, continue, on dit que f admet une intégrale généralisée (aussi on dit impropre) si l'un des conditions est vérifié :

i) $I = [a, b[$ où $-\infty < a < b \leq +\infty$ et

$$\boxed{\lim_{x \to b^-} \int_a^x f(t)\, dt} \text{ est finie.}$$

ii) $I =]a, b]$ où $-\infty \leq a < b < +\infty$ et

$$\boxed{\lim_{x \to a^+} \int_x^b f(t)\, dt} \text{ est finie}$$

Les Critères de convergence

a) Critère de Comparaison :

Proposition : Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ d'extrémités $-\infty \leq a < b \leq +\infty$, f et g deux fonctions continues sur I tel que $\boxed{0 \leq f \leq g}$ on a :

1) Si $\int_a^b g(t)\,dt$ converge alors $\int_a^b f(t)\,dt$ converge.

2) Si $\int_a^b f(t)\,dt$ diverge alors $\int_a^b g(t)\,dt$ diverge.

Exemple : Déterminer la nature de

$$\int_1^{+\infty} \frac{dt}{\sqrt{t}\,(1+t)}$$

on a au $\mathcal{V}(+\infty)$ et $\forall\, t \geq 1$:

$$0 \leq \frac{1}{\sqrt{t}\,(1+t)} = \frac{1}{t^{\frac{1}{2}} + t^{\frac{3}{2}}} \leq \frac{1}{t^{\frac{3}{2}}}$$

et comme $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^{\frac{3}{2}}}\,dt$ converge (car c'est une intégrale de Riemann au $\mathcal{V}(+\infty)$ avec $\alpha = \frac{3}{2} > 1$)

Alors d'après le critère de comparaison $\int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{t}\,(1+t)}\,dt$ converge.

Exemples

* $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^{+\infty} \frac{1}{t}\,dt$ est divergente

car c'est une intégrale de Riemann au $\mathcal{V}(+\infty)$ avec $\alpha = 1$

* $\displaystyle\int_{0}^{2} \frac{1}{t^2}\,dt$ divergente car c'est une intégrale de Riemann au $\mathcal{V}(0)$ et $\alpha = 2 > 1$

b) Intégrale de Bertrand

1) Soit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ et $0 < a < 1$

$$\int_0^a \frac{dt}{t^\alpha \ln^\beta(t)} \text{ : Converge ssi } \begin{cases} \alpha < 1 \text{ et } \forall \beta \in \mathbb{R} \\ \text{ou} \\ \alpha = 1 \text{ et } \beta > 1 \end{cases}$$

2) Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ et $a > 1$

$$\int_a^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha \ln^\beta(t)} \text{ : Converge ssi } \begin{cases} \alpha > 1 \text{ et } \beta \in \mathbb{R} \\ \text{ou} \\ \alpha = 1 \text{ et } \beta > 1 \end{cases}$$

Exemples

$\displaystyle\int_4^{+\infty} \frac{dt}{t^2 \ln^{\frac{1}{2}}(t)}$ c'est une intégrale de Bertrand au $\mathcal{V}(+\infty)$ avec $\alpha = 2$ et $\beta = \frac{1}{2}$ donc convergente.

$\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{dt}{t \ln^2(t)}$, $\alpha = 1$ et $\beta = 2 > 1$ donc c'est une intégrale de Bertrand convergente.

2) $I_2 = \int_1^{+\infty} e^{-t}\, dt = \lim_{x \to +\infty} \int_1^x e^{-t}\, dt$

$= \lim_{x \to +\infty} \left[-e^{-t} \right]_1^x = \lim_{x \to +\infty} \left(-e^{-x} + e^{-1} \right) = \frac{1}{e}$ (finie)

Donc I_2 est une intégrale généralisée convergente.

3) $I_3 = \int_0^1 \frac{2t}{t^2-1}\, dt$, on a problème au borne 1.

$I_3 = \lim_{x \to 1^-} \int_0^x \frac{2t}{t^2-1}\, dt$

$= \lim_{x \to 1^-} \left[\ln|t^2-1| \right]_0^x$

$= \lim_{x \to 1^-} \left(\ln|x^2-1| \right) = -\infty$

Alors, I_3 est une intégrale généralisée divergente.

Les intégrales de références

a) Intégrale de Riemann.

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$, $a > 0$

$$\boxed{\begin{array}{l} * \int_a^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha}\, dt \text{ converge ssi } \alpha > 1 \\ * \int_0^a \frac{1}{t^\alpha}\, dt \text{ converge ssi } \alpha < 1 \quad (a > 0) \end{array}}$$

iii) $I =]a, b[$ où $-\infty \leq a < b \leq +\infty$:

il existe $c \in]a, b[$ tel que

$$\boxed{\lim_{x \to a^+} \int_x^c f(t)\,dt \text{ et } \lim_{x \to b^-} \int_c^x f(t)\,dt} \text{ sont finie}$$

* Dans ces trois cas, On dit que l'intégrale généralisé

$\int_a^b f(t)\,dt$ est <u>Convergente</u>

et <u>divergente dans le cas contraire</u>.

<u>Exemples</u> : Déterminer la nature des intégrales généralisées suivantes.

1) $I_1 = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t}}$

On a problème au borne 1, I_1 est une intégrale généralisé

$$\int_0^x (1-t)^{-\frac{1}{2}}$$

$$\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t}} = \lim_{x \to 1^-} \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t}} =$$

$$= \lim_{x \to 1^-} - \left[\frac{(1-t)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} \right]_0^x = \lim_{x \to 1^-} -2\left(\sqrt{1-x} - 1\right) = 2.$$

b) Critère de Riemann

i) Critère de Riemann au $\mathcal{V}(+\infty)$:

Soit $a \in \mathbb{R}$ et $f : [a, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$, continue

1) S'il existe $\boxed{\alpha > 1}$ tel que $\boxed{\lim\limits_{t \to +\infty} t^\alpha f(t) = 0}$ alors $\boxed{\int_a^{+\infty} f(t)\, dt \text{ converge}}$.

2) S'il existe $\boxed{\alpha \leq 1}$ tel que $\boxed{\lim\limits_{t \to +\infty} t^\alpha f(t) = +\infty}$ alors $\boxed{\int_a^{+\infty} f(t)\, dt \text{ diverge}}$

ii) Critère de Riemann au $\mathcal{V}(0)$:

Soit $a > 0$ et $f :]0, a] \longrightarrow \mathbb{R}$, continue

1) S'il existe $\boxed{\alpha < 1}$ tel que $\boxed{\lim\limits_{t \to 0^+} t^\alpha f(t) = 0}$ alors $\boxed{\int_0^{a} f(t)\, dt \text{ converge}}$.

2) S'il existe $\boxed{\alpha \geq 1}$ tel que $\boxed{\lim\limits_{t \to 0^+} t^\alpha f(t) = +\infty}$ alors $\boxed{\int_0^{a} f(t)\, dt \text{ diverge}}$.

<u>Exemple</u> : Déterminer la nature

de $\int_0^1 \frac{\sin(t)}{\sqrt{t}}\,dt$ c'est une intégrale

généralisée, le problème c'est en 0

$\frac{\sin(t)}{\sqrt{t}} \xrightarrow[t\to 0^+]{} 0$, D'après le critère de Riemann

$t^{\frac{1}{2}}$ $\alpha = \frac{1}{2} < 1$

$\int_0^1 \frac{\sin(t)}{\sqrt{t}}\,dt$ converge

<u>Remarques</u>

1) Si $a > 0$, et $f :]0, a] \to \mathbb{R}$ continue

tel que $\lim_{t\to 0^+} f(t) = 0$, alors

$\int_0^a f(t)\,dt$ converge

2) Si $a \in \mathbb{R}$, $f : [a, +\infty[\to \mathbb{R}$, continue

tel que $\lim_{t\to +\infty} f(t) = +\infty$ alors $\int_a^{+\infty} f(t)\,dt$ diverge.

Intégrale généralisée absolument convergente :

Proposition : Soit $f : [a,b[\to \mathbb{R}$, une fonction continue.

1) Si $\int_a^b |f(x)|\,dx$ est convergente alors $\int_a^b f(x)\,dx$ est convergente.

Et, en plus

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx.$$

2) Soit $g : [a,b[\to \mathbb{R}^+$ continue tel que

$\forall x \in [a,b[\,/\, |f(x)| \leq g(x)$.

Alors, si $\int_a^b g(x)\,dx$ converge alors $\int_a^b |f(x)|\,dx$ converge.

Remarque

Si $\int_a^b |f(x)|\,dx$ converge alors on dit $\int_a^b f(x)\,dx$ est absolument convergente.

Exemple : Déterminer la nature

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x^2}\,dx.$$

Rappel (de la proposition précédente).

On a si $\int_a^b f(x)\,dx$ est absolument convergente

$$\Longrightarrow \int_a^b f(x)\,dx \text{ est convergente.}$$

Solution

On a $\left|\frac{\sin(x)}{x^2}\right| \leq \frac{1}{x^2}$ donc $\int_1^{+\infty}\left|\frac{\sin(x)}{x^2}\right|dx \leq \int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^2}$

et comme $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^2}$ est convergente

(car c'est une intégrale de Riemann au $\mathcal{V}(+\infty)$ avec $\alpha = 2 > 1$)

Donc $\int_1^{+\infty}\left|\frac{\sin(x)}{x^2}\right|dx$ est convergente

d'où $\int_1^{+\infty}\frac{\sin(x)}{x^2}\,dx$ est absolument convergente par suite elle est convergente.

Critère de convergence local :

a) **Négligeance et équivalence.**

Soient f et g deux fonctions définies au $\mathcal{V}(x_0)$, $x_0 \in I$

1) On dit que f est négligeable devant g au $\mathcal{V}(x_0)$ si $\lim_{x \to x_0}\frac{f(x)}{g(x)} = 0$. On note $\boxed{f \underset{x_0}{=} o(g)}$

ii) On dit que f et g sont équivalentes au $\mathcal{V}(x_0)$ ssi $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$ (On note $f \underset{x_0}{\sim} g$)

b) Le critère de comparaison local:

Proposition

Soit f une fonction continue et positive sur $[a, b[$.

1) S'il existe une fonction g continue et positive sur $[a, b[$ telle que:

i) $f \underset{b}{=} o(g)$

ii) $\int_a^b g(t)\,dt$ converge

Alors $\int_a^b f(t)\,dt$ converge

2) S'il existe une fonction g continue et positive sur $[a, b[$ tell que:

i) $g \underset{b}{=} o(f)$

ii) $\int_a^b g(t)\,dt$ diverge

Alors $\int_a^b f(t)\,dt$ diverge

3) S'il existe une fonction g continue et positive sur $[a, b[$ telle que $f \underset{b}{\sim} g$

Alors $\int_a^b f(t)\,dt$ et $\int_a^b g(t)\,dt$ sont de même nature.

Exemple Déterminer la nature

de $I = \int_0^1 \frac{1 - \cos(t)}{t^{\frac{5}{2}}} dt$.

Solution

Problème en 0

On a $\cos(t) = 1 - \frac{t^2}{2} + t^2 \varepsilon(t)$, $\varepsilon(t) \underset{t \to 0}{\longrightarrow} 0$

donc $\cos(t) \underset{0}{\sim} 1 - \frac{t^2}{2}$

On a $\cos(t) = 1 - \frac{t^2}{2} + t^2 \varepsilon(t)$

$1 - \cos(t) = \frac{t^2}{2} + t^2 \varepsilon(t)$.

$\frac{1 - \cos(t)}{t^{\frac{5}{2}}} = \frac{1}{2\sqrt{t}} + \varepsilon_1(t)$

Donc $\frac{1 - \cos(t)}{t^{\frac{5}{2}}} \underset{0}{\sim} \frac{1}{2\sqrt{t}}$

Or $\int_0^1 \frac{dt}{2\sqrt{t}}$ converge (car c'est une intégrale de Riemann en (0) avec $\alpha = \frac{1}{2} < 1$).

Alors, d'après le critère de convergence locale

$\int_0^1 \frac{1 - \cos(t)}{t^{\frac{5}{2}}} dt$ converge.