Université de Monastir
Institut Supérieur d'Informatique
et de Mathématiques de Monastir

Année Universitaire : 2024/2025
Matière : Algèbre, S1
Niveau : L1 Info

Feuille d'exercices 4

Exercice 1
Parmi les ensembles suivants reconnaitre ceux qui sont des $\mathbb{R}-$espaces vectoriels.

1. $E_1 = (\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}, +, .)$ où la loi $(+)$ est définie, pour tous $(x,y),(a,b) \in \mathbb{R}^2$, par
$$(x,y)+(a,b) = (xa, y+b)$$
et la loi $(.)$ est définie, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ et pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, par
$$\lambda.(x,y) = (x^\lambda, \lambda y).$$
2. $E_2 = (\mathbb{R}^2, +, *)$ où la loi $(+)$ désigne l'addition sur $\mathbb{R}^2$, i.e.,
$$(x,y)+(a,b) = (a+x, y+b)$$
et la loi $(*)$ est définie, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ et pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$,
$$\lambda * (x,y) = (\lambda x, 0).$$

Exercice 2
Soit E l'ensemble des suites réelles. Montrer que E, muni des opérations naturelles : addition des suites et multiplication d'une suite par un réel, est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

Exercice 3
a. Les sous-ensembles suivants sont-ils des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^2$?
1. $F = \mathbb{Z}^2$.
2. $G = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; |x| = |y|\}$.
3. $H = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; x+2y = 0\}$.
4. $I = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; x+xy \geq 0\}$.

b. Déterminer si les ensembles suivants sont des sous espaces vectoriels de $\mathbb{R}_3[X]$:
1. $M = \{P \in \mathbb{R}_3[X];\ P(0) = 1\}$.
2. $N = \{P \in \mathbb{R}_3[X];\ P(0) = 0\}$.
3. $G = \{P \in \mathbb{R}_3[X];\ P(1) = 0\}$.

c. Soient E un espace vectoriel et F un sous-espace vectorie de E. Le complémentaire de F dans E peut-il être un sous-espace vectoriel de E?

Exercice 4
Vérifier si les familles suivantes sont libres ou liées ?
1. Dans $\mathbb{R}^2$, $A = \{(2,5), (-4,1), (1,0)\}$.
2. Dans $\mathbb{R}^3$, $B = \{(-1,1,1), (0,1,a), (3,-1,0)\}$; $a \in \mathbb{R}$.
3. Dans $\mathbb{C}^3$, $C = \{(2,1,i), (0,1,0), (1+i,1,0)\}$.

Exercice 5

On considère l'ensemble

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, 2x - y + z = 0\}.$$

1. Montrer que S est un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.
2. Donner une famille génératrice de S.
3. Déterminer la dimension et donner une base de S.
4. Soit $T = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, -x + y + z = 0\}$. A-t-on $\mathbb{R}^3 = S \oplus T$?
5. Donner un supplément de S dans $\mathbb{R}^3$.

Exercice 6

On considère la famille de vecteurs $B = \{(0, 1, 1), (1, 0, 1), (1, 1, 0)\}$.

1. Montrer que B est une base de $\mathbb{R}^3$.
2. Calculer les coordonnées du vecteur $v = (2, -5, 3)$ dans B.

Exercice 7

Soient $P_0 = \frac{1}{2}(X-1)(X-2), P_1 = -X(X-2)$, et $P_2 = \frac{1}{2}X(X-1)$, trois polynmes de $\mathbb{R}_2[X]$.

1. Montrer que (P_0, P_1, P_2) est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.
2. Soit $P = aX^2 + bX + c \in \mathbb{R}_2[X]$, exprimer P dans la base (P_0, P_1, P_2).
3. Soit $Q = \alpha P_0 + \beta P_1 + \gamma P_2 \in \mathbb{R}_2[X]$, exprimer Q dans la base $(1, X, X^2)$.
4. Pour tout A, B et C réels montrer qu'il existe un unique polynme $R \in \mathbb{R}_2[X]$. tel que : $R(0) = A, R(1) = B$ et $R(2) = C$.

Exercice 8

Dans $\mathbb{R}^3$, on considère les vecteurs $a = (-2, 1, 0), b = (3, 0, 1), u = (0, 3, 2), v = (1, 1, 1)$, et les ensembles $F = vect\,\{a, b\}$ et $G = vect\,\{u, v\}$.

1. Montrer que $a, b \in G$. En déduire que $F \subset G$.
2. Montrer que $F = G$.
3. Déterminer H sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ vérifiant $\mathbb{R}^3 = F \oplus H$.
4. Donner une base de $\mathbb{R}^3$ adaptée la décomposition précédente.

Série 4

Ex3:

a/ s.e.v de $\mathbb{R}^2$:

$\boxed{1°}$ $F = \mathbb{Z}^2$

F n'est pas stable par multiplication scalaire

(Par exemple: si $u = (1,2) \in F$ et $\lambda = \frac{1}{2} \in \mathbb{R} \Rightarrow \lambda u = (\frac{1}{2}, 1)$

$\Rightarrow \lambda u \notin F$ car $\frac{1}{2} \notin \mathbb{Z}$)

$\Rightarrow$ F n'est pas un s.e.v de $\mathbb{R}^2$.

$\boxed{2°}$ $G = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 ;\ |x| = |y|\}$

G n'est pas stable par addition

(Par exemple: si $u = (1,1) \in G$, $v = (1,-1) \in G$

mais $u + v = (2,0) \notin G$ car $|2| \neq |0|$)

$\Rightarrow$ G n'est pas un s.e.v de $\mathbb{R}^2$.

$\boxed{3°}$ $H = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 ;\ x + 2y = 0\}$

méth 1

- $0_{\mathbb{R}^2} = (0,0) \in H$ car $0 + 2\times 0 = 0$

$\Rightarrow H \neq \emptyset$

- $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\forall u = (x,y) \in H$

$\forall v = (a,b) \in H$

montrons que $\lambda u + v \overset{?}{\in} H$

- $\lambda u + v = \lambda(x,y) + (a,b)$

$= (\lambda x, \lambda y) + (a,b)$

$= (\lambda x + a, \lambda y + b)$.

- $\lambda x + a + 2(\lambda y + b)$

$= (\lambda x + 2\lambda y) + (a + 2b)$

$= \lambda(\underbrace{x + 2y}_{0}) + (\underbrace{a + 2b}_{0}) = 0$

$\Rightarrow \lambda u + v \overset{o}{\in} H \Rightarrow$ H est s.e.v de $\mathbb{R}^2$

méth 2

$H = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 ;\ x + 2y = 0\}$

$= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 ;\ x = -2y\}$

$= \{(-2y, y) \in \mathbb{R}^2\}$

$= \{y(-2,1) ;\ y \in \mathbb{R}\}$

$= \text{Vect}\{(-2,1)\}$

$\Rightarrow$ H est un s.e.v de $\mathbb{R}^2$.

$\boxed{4°}$ $I = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / \ x + 2y \geq 0\}$

I n'est pas stable par multiplication scalaire

(Par exemple : si $u = (2,-1) \Rightarrow u \in I$ car $2 + 2\times(-1) = 0 \geq 0$

et si $\lambda = -1$

$\Rightarrow \lambda u = (-2, 1) \notin I$ car $-2 + (-2)\times 1 = -4 < 0$)

$\Rightarrow$ I n'est pas un s.e.v de $\mathbb{R}^2$.

b/ S.e.v de $\mathbb{R}_3[X] = \{P \in \mathbb{R}[X] / \ \deg P \leq 3\}$.

$\boxed{1°}$ $M = \{P \in \mathbb{R}_3[X] / \ P(0) = 1\}$.

- 0_E = polynôme nul $\notin M$

$\Rightarrow$ M n'est pas un s.e.v de $\mathbb{R}_3[X]$.

$\boxed{2°}$ $N = \{P \in \mathbb{R}_3[X] / \ P(0) = 0\}$

- polynôme nul $\in N$
- $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \ \forall P, Q \in N$

montrons que $\lambda P + Q \overset{?}{\in} N$

$(\lambda P + Q)(0) = \lambda P(0) + Q(0)$

or $P \in N \Rightarrow P(0) = 0$

$Q \in N \Rightarrow Q(0) = 0$

$\Rightarrow (\lambda P + Q)(0) = 0$

$\Rightarrow \lambda P + Q \in N$

cl : N est un s.e.v de $\mathbb{R}_3[X]$

$\boxed{3°}$ $G = \{P \in \mathbb{R}_3[X] / P(1) = 0\}$

- pol. nul $\in G$
- $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall P, Q \in G \Rightarrow \lambda P + Q \in G$) $\Rightarrow$ G est un s.e.v de $\mathbb{R}_3[X]$.

$(\lambda P + Q)(1) = \lambda P(1) + Q(1) = 0$

c/ Le complémentaire d'un s.e.v F dans un e.v E n'est pas en général un s.e.v de E.

Sauf si $F = E$ ou $F = \{0_E\}$

Ex 4:

Rpp: $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ est libre si $\forall \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$:
$$\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \dots + \lambda_n e_n = 0_E \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0$$
on dit aussi, $e_1, \dots, e_n$ sont linéairement indépendants.

1/ Dans $\mathbb{R}^2 = E$; $A = \{ \underbrace{(2,5)}_{e_1}, \underbrace{(-4,1)}_{e_2}, \underbrace{(1,0)}_{e_3} \}$

méth 1

On remarque que $e_1 - 5e_2 = 22 e_3$

$$\Leftrightarrow e_1 - 5e_2 - 22 e_3 = 0_{\mathbb{R}^2}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 1 \neq 0 \\ \lambda_2 = -5 \neq 0 \\ \lambda_3 = -22 \neq 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow A$ est lié.

méth 2

On remarque que $\operatorname{card}(A) = 3 > \dim \mathbb{R}^2 = 2$

$\Rightarrow A$ liée

2/ $E = \mathbb{R}^3$, $B = \{ \underbrace{(-1,1,1)}_{e_1}, \underbrace{(0,1,a)}_{e_2}, \underbrace{(3,-1,0)}_{e_3} \}$; $a \in \mathbb{R}$.

soit $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ / $\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \lambda_3 e_3 = 0_{\mathbb{R}^3}$

$$\Leftrightarrow (-\lambda_1, \lambda_1, \lambda_1) + (0, \lambda_2, \lambda_2 a) + (3\lambda_3, -\lambda_3, 0) = (0,0,0)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -\lambda_1 + 3\lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 + a\lambda_2 = 0 \end{cases} \overset{\lambda_1 = 3\lambda_3}{\Leftrightarrow} \begin{cases} \lambda_1 = 3\lambda_3 \\ \lambda_2 = -2\lambda_3 \\ 3\lambda_3 + a(-2\lambda_3) = 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow \lambda_3(3 - 2a) = 0 \Rightarrow \lambda_3 = 0$ ou $a = \frac{3}{2}$. $\boxed{2}$

- si $a \neq \frac{3}{2} \Rightarrow \lambda_3 = 0 \Rightarrow \lambda_2 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 0 \Rightarrow \mathcal{B}$ est libre
- si $a = \frac{3}{2} \Rightarrow \mathcal{B}$ est liée.

3°/ $E = \mathbb{C}^3$, $C = \{\underbrace{(2,1,i)}_{e_1}, \underbrace{(0,1,0)}_{e_2}, \underbrace{(1+i,1,0)}_{e_3}\}$.

soit $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{C} \,/\, \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \lambda_3 e_3 = 0_{\mathbb{C}^3}$

$\Leftrightarrow (2\lambda_1, \lambda_1, i\lambda_1) + (0, \lambda_2, 0) + (\lambda_3 + i\lambda_3, \lambda_3, 0) = (0,0,0)$

$$(S)\begin{cases} 2\lambda_1 + \lambda_3 + i\lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ i\lambda_1 = 0 \Rightarrow \boxed{\lambda_1 = 0} \end{cases}$$

$$(S)\begin{cases} \lambda_3 + i\lambda_3 = 0 \\ \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_3(1+i) = 0 \\ \lambda_2 = -\lambda_3 \\ \lambda_1 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_3 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \\ \lambda_1 = 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow C$ libre.

Ex 5°/

1°/ $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, 2x - y + z = 0\}$

méth ①

- $0_{\mathbb{R}^3} \in S$ car $2 \times 0 - 0 + 0 = 0$
- soit $\lambda \in \mathbb{R}$, soit $X = (x,y,z) \in S$, $X' = (x',y',z') \in S$

montrons que $\boxed{\lambda X + X' \in S}$.

- $\lambda X + X' = (\lambda x, \lambda y, \lambda z) + (x', y', z') = (\lambda x + x', \lambda y + y', \lambda z + z')$
- $2(\lambda x + x') - (\lambda y + y') + (\lambda z + z') = \lambda(\underbrace{2x - y + z}_{0}) + (\underbrace{2x' - y' + z'}_{0}) = 0$

$\Rightarrow \lambda X + X' \in S \Rightarrow S$ est un sev de $\mathbb{R}^3$.

méth ②

$S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x - y + z = 0\}$

$= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid y = 2x + z\}$

$= \{(x, 2x+z, z) \in \mathbb{R}^3\}$

$= \{(x, 2x, 0) + (0, z, z);\ x, z \in \mathbb{R}\}$

$= \{x(1,2,0) + z(0,1,1);\ x, z \in \mathbb{R}\}$

$= \text{Vect}\{(1,2,0), (0,1,1)\} \Rightarrow S$ sev de $\mathbb{R}^3$

2°/ $S = \text{vect}\{(1,2,0),(0,1,1)\}$

Donc $\{(1,2,0),(0,1,1)\}$ est une famille génératrice de S.

3°/ • $\{(\underbrace{1,2,0}_{v_1}),(\underbrace{0,1,1}_{v_2})\}$ est libre car les vecteurs v_1 et v_2 ne sont pas colinéaires (v_1 et v_2 sont linéairement indépendants)

$\Rightarrow$ La famille $\{v_1, v_2\}$ est génératrice, libre donc elle forme une base de S

• $\dim S = \text{card}(\{v_1, v_2\}) = 2$.

3°/ Pour que $\mathbb{R}^3 = S \oplus T$, il faut que $\begin{cases} \cdot\ S \cap T = \{0_{\mathbb{R}^3}\} \\ \cdot\ \underbrace{\dim S}_{2} + \dim T = \underbrace{\dim \mathbb{R}^3}_{=3} \end{cases}$

• $X = (x,y,z) \in S \cap T \Leftrightarrow \begin{cases} (x,y,z) \in S \\ \text{et} \\ (x,y,z) \in S \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x - y + z = 0 & (1) \\ -x + y + z = 0 & (2) \end{cases}$

$(1) + (2) \Rightarrow x + 2z = 0 \Leftrightarrow \boxed{x = -2z} \Leftrightarrow z = -\frac{1}{2}x$

$(1) - (2) \Rightarrow 3x - 2y = 0 \Leftrightarrow x = \frac{2}{3}y \Leftrightarrow y = \frac{3}{2}x$

$\Rightarrow X = (x,y,z) = (x, \frac{3}{2}x, -\frac{1}{2}x) = x(1, \frac{3}{2}, -\frac{1}{2})$; $x \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow S \cap T = \{(1, \frac{3}{2}, -\frac{1}{2})\} \neq \{0_{\mathbb{R}^3}\}$

Donc $\mathbb{R}^3 \neq S \oplus T$.

(11)

5°/ Un supplément de S dans $\mathbb{R}^3$ est un s.e.v T' tel que $\mathbb{R}^3 = S \oplus T'$.

On peut choisir un vecteur qui n'est pas dans S, par exemple $(1,0,0)$.

$$T' = \text{vect}\{(1,0,0)\}$$

vérification :
- $(1,0,0) \neq 0_{\mathbb{R}^3} \Rightarrow \dim(T') = 1$

$\Rightarrow \dim S' + \dim T' = 2 + 1 = 3 = \dim \mathbb{R}^3$

de plus
$$S \cap T' = \{0_{\mathbb{R}^3}\}.$$
$\Rightarrow S \oplus T' = \mathbb{R}^3$

cl : Un supplément de S est le s.e.v engendré par $(1,0,0)$.

Ex6°/ $B = \{\underbrace{(0,1,1)}_{v_1}, \underbrace{(1,0,1)}_{v_2}, \underbrace{(1,1,0)}_{v_3}\}$

Rq :
- F sev de $\mathbb{R}^n$
- ~~Card F~~
- $\text{Card} F = n = \dim \mathbb{R}^n$

$\Rightarrow$ pour mq F est base de $\mathbb{R}^n$ il suffit de mq F est libre ou génératrice

- Dans la pratique, il est plus simple de mq B est libre.

(11)
(9)
(4)

1°/ comme $Card(B) = 3 = \dim \mathbb{R}^3$,
alors pour montrer que B est une base de $\mathbb{R}^3$
il suffit de montrer que $B = \{V_1, V_2, V_3\}$ est libre.

soit $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R} / \lambda_1 V_1 + \lambda_2 V_2 + \lambda_3 V_3 = 0_{\mathbb{R}^3}$
et mq $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$.

- $\lambda_1 V_1 + \lambda_2 V_2 + \lambda_3 V_3 = 0_{\mathbb{R}^3}$

$\Leftrightarrow \lambda_1(0,1,1) + \lambda_2(1,0,1) + \lambda_3(1,1,0) = (0,0,0)$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_2 + \lambda_3 = 0 & (1) \\ \lambda_1 + \lambda_3 = 0 & (2) \\ \lambda_1 + \lambda_2 = 0 & (3) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (2)-(1): \lambda_1 - \lambda_2 = 0 & (1') \\ (3): \lambda_1 + \lambda_2 = 0 & (2') \\ (1): \lambda_3 = -\lambda_2 & (1) \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} (1')+(2'): \lambda_1 = 0 \\ (2'): \lambda_2 = 0 \\ (1): \lambda_3 = 0 \end{cases}$

$\Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$

$\Rightarrow B$ libre.

D'où B est une base de $\mathbb{R}^3$.

2°/ $v = (2,-5,3) \in \mathbb{R}^3 \Rightarrow \exists! (\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3 / v = \alpha V_1 + \beta V_2 + \gamma V_3$

$\alpha V_1 + \beta V_2 + \gamma V_3 = (\beta+\gamma, \alpha+\gamma, \alpha+\beta) = (2,-5,3)$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \beta+\gamma = 2 & (1) \\ \alpha+\gamma = -5 & (2) \\ \alpha+\beta = 3 & (3) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (1)-(2): \beta - \alpha = 7 & (1') \\ (3): \alpha + \beta = 3 & (2') \\ (2): \gamma = -5 - \alpha & (3') \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} (1')+(2'): 2\beta = 10 \Rightarrow \boxed{\beta = 5} \\ (2'): \alpha = 3 - \beta = -2 \Rightarrow \boxed{\alpha = -2} \\ (3'): \gamma = -5+2 \Rightarrow \boxed{\gamma = -3} \end{cases}$

$\Rightarrow V = (-2, 5, -3)_{/B}$

Ex7/ $P_0 = \frac{1}{2}(X-1)(X-2)$

$P_1 = -X(X-2)$

$P_2 = \frac{1}{2}X(X-1)$

1°/ • $\mathrm{Card}(P_0, P_1, P_2) = 3 = \dim \mathbb{R}_2[X]$

donc pour mq (P_0, P_1, P_2) est une base, il suffit de mq (P_0, P_1, P_2) est libre.

soit $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R} / \lambda_1 P_0 + \lambda_2 P_1 + \lambda_3 P_2 = 0_{\mathbb{R}_2[X]}$

$$\Leftrightarrow \frac{\lambda_1}{2}(X-1)(X-2) - \lambda_2(X)(X-2) + \frac{\lambda_3}{2}X(X-1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{\lambda_1}{2}(X^2 - 3X + 2) - \lambda_2(X^2 - 2X) + \frac{\lambda_3}{2}(X^2 - X) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{\lambda_1}{2} - \lambda_2 + \frac{\lambda_3}{2}\right)X^2 + \left(-\frac{3}{2}\lambda_1 + 2\lambda_2 - \frac{\lambda_3}{2}\right)X + \lambda_1 = \underset{\text{poly nul}}{0}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\lambda_1}{2} - \lambda_2 + \frac{\lambda_3}{2} = 0 \\ -\frac{3}{2}\lambda_1 + 2\lambda_2 - \frac{\lambda_3}{2} = 0 \\ \lambda_1 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = \frac{\lambda_3}{2} \\ \lambda_3 - \frac{\lambda_3}{2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = \frac{\lambda_3}{2} \\ \frac{1}{2}\lambda_3 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \\ \lambda_3 = 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow (P_0, P_1, P_2)$ est libre

$\Rightarrow (P_0, P_1, P_2)$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.

2°/ $P = aX^2 + bX + c \in \mathbb{R}_2[X]$

$\Rightarrow P = \alpha P_1 + \beta P_2 + \gamma P_3$

On cherche α, β et γ en fct de a, b et c :

D'après question 1/ : $\begin{cases} \frac{\alpha}{2} - \beta + \frac{\gamma}{2} = a \\ -\frac{3}{2}\alpha + 2\beta - \frac{\gamma}{2} = b \\ \alpha = c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = c \\ \beta = a + b + c \\ \gamma = 4a + 2b + c \end{cases}$

3°/ $Q = \alpha P_0 + \beta P_1 + \gamma P_2 \in \mathbb{R}_2[X]$.

$\Rightarrow Q = a \cdot x^2 + b \cdot x + c \cdot 1$
$= a x^2 + b x + c$

on cherche a, b et c en fcts de α, β et γ

Déja fait : $\begin{cases} a = \frac{\alpha}{2} - \beta + \frac{\gamma}{2} \\ b = -\frac{3}{2}\alpha + 2\beta - \frac{\gamma}{2} \\ c = \alpha. \end{cases}$

4°/ on va cherche un polynôme $R \in \mathbb{R}_2[X]$ / $\begin{cases} R(0) = A \\ R(1) = B \\ R(2) = C \end{cases}$

- $R \in \mathbb{R}_2[X] \Rightarrow R = \alpha P_0 + \beta P_1 + \gamma P_2$

- $R(0) = \alpha P_0(0) + \beta P_1(0) + \gamma P_2(0) = A$
$\Leftrightarrow \alpha + 0 + 0 = A$
$\Leftrightarrow \boxed{A = \alpha}$.

- $R(1) = \alpha P_0(1) + \beta P_1(1) + \gamma P_2(1) = B$
$\Leftrightarrow 0 + \beta + 0 = B$
$\Leftrightarrow \boxed{B = \beta}$.

- $R(2) = \alpha P_0(2) + \beta P_1(2) + \gamma P_2(2) = C$
$\Leftrightarrow 0 + 0 + \gamma = C$
$\Leftrightarrow \boxed{C = \gamma}$.

$\Rightarrow$ il n'y a qu'un polynôme $R = A P_0 + B P_1 + C P_2$.

Ex 8 :

$F = \text{vect}\{a, b\}$
$G = \text{vect}\{u, v\}$; $a = (-2,1,0)$, $b = (3,0,1)$, $u = (0,3,2)$
et $v = (1,1,1)$.

1°/ • Mq $a, b \in G$.

On remarque que : $\left.\begin{array}{l} a = u - 2v \Rightarrow a \in G \\ b = -u + 3v \Rightarrow b \in G \end{array}\right) \Rightarrow a, b \in G$

Rpp $\left(x \in \text{vect}\{u_1, \dots, u_n\} \Leftrightarrow \exists \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K} / x = \alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_n u_n \right)$

• En déduire que $F \subset G$.

On a $a, b \in G \Rightarrow \{a, b\} \subset G$
$\Rightarrow \text{vect}\{a, b\} \subset G$
$\Rightarrow F \subset G$.

2°/ Rpp $\left(\text{En dim finie : } \left.\begin{array}{l} \cdot A \subset B \\ \cdot \dim A = \dim B \end{array}\right) \Rightarrow A = B \right)$

• Mq $F = G$.

• On a $F \subset G$.

$F = \text{vect}\{a, b\}$; $\{a, b\}$ famille libre car a et b ne sont pas colinéaire
$\Rightarrow \{a, b\}$ base de F
$\Rightarrow \dim F = 2$.

$G = \text{vect}\{u, v\}$; $\{u, v\}$ libre car a et b ne sont pas colinéaire
$\Rightarrow \{u, v\}$ est une base de G
$\Rightarrow \dim G = 2$

cl : $\left.\begin{array}{l} \cdot F \subset G \\ \cdot \dim F = \dim G \end{array}\right) \Rightarrow F = G$.

3°/ Dét H s.e.v de $\mathbb{R}^3$ / $\underbrace{\mathbb{R}^3 = F \oplus H}$.

$\Updownarrow$

$$\begin{cases} \bullet\ F \cap H = \{0_{\mathbb{R}^3}\} \\ \bullet\ \underbrace{\dim F}_{=2} + \dim H = \underbrace{\dim \mathbb{R}^3}_{=3} \end{cases}$$

$\Downarrow$

$\dim H = 1$

$\Rightarrow$ un supplément de F dans $\mathbb{R}^3$ est un s.e.v H de dim $= 1$

$\Rightarrow$ on choisit un vecteur $e_1 \notin F$ / $e_1 = (1,0,0)$.

$H = \text{vect}\{e_1\}$.

4°/ • base de $\mathbb{R}^3$ adaptée à $\mathbb{R}^3 = F \oplus H$.

Rpp (En dim finie : si $\left(E = F \oplus H \text{ et } B_1 \text{ base de } F,\ B_2 \text{ base de } H \right) \Rightarrow B_1 \cup B_2$ base de E)

On a • $\{a,b\}$ base de F (déjà montré dans question 2°/)

• $H = \text{vect}\{e_1\}$; $\{e_1\}$ génératrice de H

de plus $e_1 \neq 0_{\mathbb{R}^3} \Rightarrow \{e_1\}$ libre

$\Rightarrow \{e_1\}$ base H

et on a $\mathbb{R}^3 = F \oplus H$

$\Rightarrow \underbrace{\{a,b\} \cup \{e_1\}}_{= \{a,b,e_1\}}$ base de $\mathbb{R}^3$.