Espaces Vectoriels :

Dans tout ce qui suit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$

I) Définitions - Propriétés :

Def : Soit E un ensemble muni d'une loi de composition interne notée $+$ et d'une loi de composition externe notée $\cdot$

$+ : E \times E \longrightarrow E$
$(u, v) \longmapsto u + v$

et $\cdot : \mathbb{K} \times E \longrightarrow E$
$(\alpha, u) \longmapsto \alpha u$

On dit que $(E, +, \cdot)$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ ou E est un $\mathbb{K}$ - espace vectoriel si on a :

1) $\forall u, v \in E$, $u + v = v + u$
2) $\forall u, v, w \in E$, $u + (v + w) = (u + v) + w$
3) Il existe un élément de E noté 0_E appelé élément neutre tque : $x + 0_E = x$
4) $\forall x \in E, \exists x' \in E$; $x + x' = 0_E$
(x' appelé élément symétrique de x noté $-x$)
5) $\forall x \in E$, $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}$, $(\alpha + \beta) x = \alpha x + \beta x$
6) $\forall x \in E$, $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}$, $\alpha (\beta \cdot x) = (\alpha\beta) x$
7) $\forall x, y \in E$, $\forall \alpha \in \mathbb{K}$, $\alpha (x + y) = \alpha x + \alpha y$
8) $\forall x \in E$ $1 \cdot x = x$

Rq : Les éléments de E sont appelés vecteurs.
Les éléments de $\mathbb{K}$ sont appelés les scalaires.

Ex :

1) $E = \mathbb{R}^2 = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}\}$

Soit $u \in E \Rightarrow u = (x_1, y_1)$
$v \in E \qquad v = (x_2, y_2)$

$(u + v) = (x_1, y_1) + (x_2, y_2)$
$= (x_1 x_2, y_1 y_2)$

$\forall \alpha \in \mathbb{R}$, $\forall u = (x_1, y_1) \in E$
$\alpha u = \alpha (x_1, y_1) = (\alpha x_1, \alpha y_1)$

$u = (x_1, y_1)$; $v = (x_2, y_2)$ et $w = (x_3, y_3)$
et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

1) $u + v = (x_1, y_1) + (x_2, y_2)$
$= (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$
$= (x_2, y_2) + (x_1, y_1)$
$= v + u$

2) $u + (v + w) =$
$(x_1, y_1) + ((x_2, y_2) + (x_3, y_3))$
$= (x_1, y_1) + (x_2 + x_3, y_2 + y_3)$
$= (x_1 + (x_2 + x_3), y_1 + (y_2 + y_3))$
$= ((x_1 + x_2) + x_3, (y_1 + y_2) + y_3)$
$= ((x_1 + x_2), (y_1 + y_2)) + (x_3, y_3)$
$= ((x_1, y_1) + (x_2, y_2)) + (x_3, y_3)$
$= (u + v) + w$

3)

$u = (x_1, y_1)$

$\exists\ ?\ O_E (a,b) \ / \ u + O_E = u$

$(x_1, y_1) + (a,b) = (x_1, y_1)$

$(x_1 + a, y_1 + b) = (x_1, y_1)$

$\iff \begin{cases} x_1 + a = x_1 \\ y_1 + b = y_1 \end{cases} \iff a = b = 0$

$\Rightarrow O_E = (0,0)$

Soit $O_E = (0,0)$ on a :

$u + O_E = (x_1, y_1) + (0,0)$

$= (x_1 + 0, y_1 + 0)$

$= (x_1, y_1)$

$= u$.

4) $u + u' = O_E$

$(x_1, y_1) + (a,b) = (0,0)$

$(x_1 + a, y_1 + b) = (0,0)$

$\iff \begin{cases} x_1 + a = 0 \\ y_1 + b = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x_1 = -a \\ y_1 = -b \end{cases}$

$\Rightarrow u' = (-x_1, -y_1)$

5) $(\alpha+\beta) u = (\alpha+\beta)(x_1, y_1)$

$= ((\alpha+\beta)x_1, (\alpha+\beta) y_1)$

$= (\alpha x_1 + \beta x_1, \alpha y_1 + \beta y_1)$

$= (\alpha x_1, \alpha y_1) + (\beta x_1, \beta y_1)$

$= \cancel{(\alpha x_1 + \alpha y_1) +}$

$= \alpha(x_1, y_1) + \beta(x_1, y_1)$

$= \alpha u + \beta u$

6) $\alpha(\beta u) = \alpha(\beta(x_1, y_1))$

$= \alpha(\beta x_1, \beta y_1)$

$= (\alpha\beta x_1, \alpha\beta y_1)$

$= \alpha\beta(x_1, y_1)$

$= (\alpha\beta) u$.

7) $\alpha(u+v) = \alpha((x_1, y_1) + (x_2, y_2))$

$= \alpha(x_1 + x_2, y_1 + y_2)$

$= (\alpha(x_1 + x_2), \alpha(y_1 + y_2))$

$= (\alpha x_1 + \alpha x_2, \alpha y_1 + \alpha y_2)$

$= (\alpha x_1, \alpha y_1) + (\alpha x_2, \alpha y_2)$

$= \alpha(x_1, y_1) + \alpha(x_2, y_2)$

$= \alpha u + \alpha v$.

8) $\forall\ 1.u = 1(x_1, y_1)$

$= (1.x_1, 1 y_1)$

$= (x_1, y_1) = u$.

Conclusion :

$(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

Plus généralement :

* $(\mathbb{R}^n, +, \cdot)$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

2) $E = \left\{ \begin{array}{l} f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto f(x) \end{array} \right\}$

Alors E est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ avec les lois suivantes

$\forall f, g \in E, \ (f+g)(x) = f(x) + g(x)$

$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall f \in E,$

$(\lambda f)(x) = \lambda f(x)$

3) $E = \mathbb{R}[x]$

$E = \mathbb{C}[x]$

Propriétés:

Soit $(E,+,\cdot)$ un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$

Alors on a:

$\forall u,v \in E, \forall \alpha,\beta \in \mathbb{K}$:

1) $0 \cdot u = 0_E$
2) $(-1)\cdot u = -u$
3) $\alpha \cdot 0_E = 0_E$
4) $(-\alpha) u = \alpha(-u) = -(\alpha u)$
5) $(\alpha-\beta) u = \alpha u - \beta u$.
6) $\alpha(u-v) = \alpha u - \alpha v$.
7) $\alpha u = 0_E \iff \alpha = 0$ ou $u = 0_E$

II) Sous-espaces Vectoriels:

Dans toute la suite $(E,+,\cdot)$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$.

Définition:

Une partie F de E est dite un sous espace vectoriel de E si seulement si on a:

1) $F \neq \emptyset$
2) $\alpha u \in F, \forall \alpha \in \mathbb{K}, \forall u \in F$
3) $u+v \in F, \forall u,v \in F$.

(2) et (3) $\iff \alpha u + v \in F$,

$\forall \alpha \in \mathbb{K}$

$\forall u,v \in F$

Remarque:

1) tout sous espace vectoriel F de E contient le vecteur nul 0_E

Ex:

$F = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, \ x+y=0\}$

1) $0_E = 0_{\mathbb{R}^2} = (0,0) \in F$

car $0+0=0$

2) Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et $u \in F$

$u = (x_1, y_1), \ x_1+y_1 = 0$

$\alpha u = \alpha(x_1, y_1) = (\alpha x_1, \alpha y_1)$

On a: $\alpha x_1 + \alpha y_1 = \alpha(x_1+y_1)$

$= \alpha . 0 = 0$

$(\alpha x_1 ; \alpha y_1) \in F$

$\iff \alpha(x_1, y_1) \in F$

$\iff \cancel{\alpha \times u} \ \alpha \cdot u \in F$

3) Soit $u, v \in F$

$u = (x_1, y_1); \ x_1+y_1 = 0$

$v = (x_2, y_2); \ x_2+y_2 = 0$

$u+v = (x_1, y_1) + (x_2, y_2)$

$= (x_1+x_2, y_1+y_2)$

On a:

$$x_1+x_2+y_1+y_2 = \underbrace{x_1+y_1}_{0} + \underbrace{x_2+y_2}_{0}$$

$= 0+0 = 0$

$\Rightarrow u+v \in F$

cc: F est un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$.

Remarque: ① Tout sous espace vectoriel F de E contient l'élément neutre 0_E.

② Si F est un sous-espace vectoriel de E alors $(F, +, \cdot)$ est lui même est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$.

Ainsi: pour montrer qu'un ensemble F est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$, il suffit de montrer que F est un sous-espace vectoriel de E.

Définition- proposition:

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $V_1, V_2, ..., V_n$ des vecteurs de E.

On appelle combinaison linéaire de $V_1, ..., V_n$ tout vecteur u de E qui s'écrit $u = \lambda_1 V_1 + \lambda_2 V_2 + \cdots + \lambda_n V_n$

$= \sum_{k=1}^{n} \lambda_k V_k$.

Remarque: ① Tout sous espace vectoriel F de E contient l'élément neutre 0_E.
② Si F est un sous-espace vectoriel de E alors $(F, +, \cdot)$ est lui même est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$.
Ainsi: pour montrer qu'un ensemble F est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$, il suffit de montrer que F est un sous-espace vectoriel de E.

Définition - proposition:

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $V_1, V_2, \dots, V_n$ des vecteurs de E.
On appelle combinaison linéaire de $V_1, \dots, V_n$ tout vecteur u de E qui s'écrit $u = \alpha_1 V_1 + \alpha_2 V_2 + \dots + \alpha_n V_n$

$$= \sum_{k=1}^{n} \alpha_k V_k.$$

On note $\text{Vect}(V_1, V_2, \dots, V_n)$ l'ensemble formé par toutes les combinaisons linéaires finies des vecteurs $V_1, \dots, V_n$

$$\text{vect}(V_1, V_2, \dots V_n) = \{u = \alpha_1 V_1 + \alpha_2 V_2 + \dots + \alpha_n V_n\}$$

Alors $\text{Vect}(V_1, V_2, \dots, V_n)$ est un sous espace vectoriel de E appelé le sous-espace vectoriel de E engendré par $V_1, \dots, V_n$

Remarque: Pour montrer que F est un sous-espace vectoriel de E, il suffit de l'écrire sous forme d'un vect.

Proposition - Définition:

Soient F et G 2 sous-espaces vectoriels de E. On note

$$F + G = \{u + v,\ u \in F \text{ et } v \in G\}$$

Alors $F + G$ est un sous-espace vectoriel de E appelé somme de F et G.

$F + G$ contient F et G.

Définition: On dit que les sous-espace vectoriels F et G sont une somme directe ou que la somme $F+G$ est directe si $F \cap G = \{0_E\}$
On note dans ce cas cette somme que $F \oplus G$

__Ex:__ $E = \mathbb{R}^2$

$$F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y = 0\}$$
$$G = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ x - y = 0\}$$

1) Montrer que F et G sont 2 sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^2$.
2) Calculer $F \cap G$
3) Déduire.

__Solution:__

1) $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ x = -y\}$
$= \{y(-1, 1), y \in \mathbb{R}\} = \text{Vect}\{(-1, 1)\}$

$\Rightarrow F$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$.

$G = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, x = y\}$

$= \{(x,x) \cancel{\in \mathbb{R}^2}, x \in \mathbb{R}\}$

$= \text{Vect}\{(1,1)\}$

$\Rightarrow G$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$.

2) $F \cap G = \{z \in F \text{ et } z \in G\}$

$= \{z = (x,y), x+y=0 \text{ et } x-y=0\}$

$\begin{cases} x+y=0 \\ x-y=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x=0 \\ 2y=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=y=0$

$\Rightarrow F \cap G = \{0_E\}$

3) F et G sont une somme directe.

Définition : 2 sous-espace vectoriels F et G de E sont dites supplémentaires dans E si :

1) $F \cap G = \{0_E\}$

2) $F + G = E$

Dans ce cas on écrit $F \oplus G = E$

Exemple : $E = \mathbb{C}$

$F = \mathbb{R}$

$G = i\mathbb{R}$

1) $F \cap G = \{0\}$

2) Soit $z \in \mathbb{C}$, $z = \underset{\in F}{a} + \underset{\in G}{ib}$

$\Rightarrow E \subset G + F$

D'autre $F + G \subset E$

$\Rightarrow F \oplus G = E$

III - Famille libre - Famille liée

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$.

Définition : Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $V_1, V_2 \cdots V_n$ des vecteurs de E.

1) On dit que la famille $(V_1, V_2 \cdots V_n)$ est libre ou que $V_1, \ldots, V_n$ sont linéairement indépendantes si :

Pour tous scalaires $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{K}$

$\alpha_1 V_1 + \alpha_2 V_2 + \cdots + \alpha_n V_n = 0_E$

$\Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \cdots = \alpha_n = 0$

2) On dit que la famille $(V_1, \cdots, V_n)$ est liée s'il existe des scalaires $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ non tous nuls tque

$\alpha_1 V_1 + \alpha_2 V_2 + \cdots + \alpha_n V_n = 0_E$

Ex : $E = \mathbb{R}^2$

$H = \{(1,0), (0,1)\}$

~~$\Rightarrow F \oplus G$~~

Montrer que H est libre :

Soient $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ tque :

$\alpha_1 V_1 + \alpha_2 V_2 = 0_{\mathbb{R}^2}$

$\Leftrightarrow \alpha_1(1,0) + \alpha_2(0,1) = (0,0)$

$\Leftrightarrow (\alpha_1, \alpha_2) = (0,0)$

$\Leftrightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = 0 \Rightarrow H$ est libre

2) $F = \{(1,0), (0,1), (1,1)\}$

Montrer que F est liée :

En effet, soient $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$ tque : $\alpha_1 V_1 + \alpha_2 V_2 + \alpha_3 V_3 = (0,0)$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 = 0 \\ \alpha_2 + \alpha_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 = -\alpha_3 \\ \alpha_2 = -\alpha_3 \end{cases}$

$\Rightarrow$ F n'est pas libre
donc elle est liée.

Définition :
Soient $V_1, \dots, V_n$ des vecteurs de E
on dit que la famille $(V_1, \dots, V_n)$ est génératrice dans E si pour tout $u \in E$, il existe $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ tq que

$$u = \alpha_1 V_1 + \alpha_2 V_2 + \dots + \alpha_n V_n$$
$$\cancel{= 0_E}.$$

~~Exemple : $E = \mathbb{R}^2$~~

~~① $F = \{(1,0),(0,1)\}$~~

Exemple : $E = \mathbb{R}^2$

$$F = \{\underbrace{(1,0)}_{V_1}, \underbrace{(0,1)}_{V_2}\}$$

Soit $u = (x,y) \in E$, on a :

$u = (x,y) = (x,0) + (0,y)$

$= x(1,0) + y(0,1)$

$\Rightarrow u = \alpha_1 V_1 + \alpha_2 V_2$

$\Rightarrow$ F est une famille génératrice dans E.

Définition :
Soit $B = \{V_1, V_2, \dots, V_n\}$ une famille de vecteurs de E.
On dit que B est une base si B est une famille libre et génératrice :

Exemple : $E = \mathbb{R}^2$

$$F = \{(1,0),(0,1)\}$$

D'après les exemples précédents on a montré que F est une famille libre & génératrice donc F est une base de $\mathbb{R}^2$.
Cette base appelée base canonique de $\mathbb{R}^2$.