Institut Supérieur d'Informatique et de Mathématiques de Monastir

Cours : Logique Formelle

Chapitre 2:
La Logique Propositionnelle

Enseignante: Dr. Aljia BOUZIDI
aljia.bouzidi95@gmail.com

$1^{ère}$ Licence en Sciences d'Informatique
Année Universitaire :2024-2025

Objectifs

- Le but de ce chapitre est d'inculquer à l'étudiant la notion de la logique propositionnelle. Plus précisément :
  - Connaître les principaux opérateurs logiques et leurs propriétés : NON, ET, OU,... ;
  - Comprendre les notions d'implication et d'équivalence ;
  - Modéliser un énoncé afin de tester sa validité ;
  - Structurer proprement un raisonnement ;

Contenu du chapitre 2

1. **Partie 1:** Introduction à La Logique Propositionnelle
2. **Partie 2:** Syntaxe du Calcul Propositionnel
3. **Partie 3:** Sémantique du Calcul Propositionnel

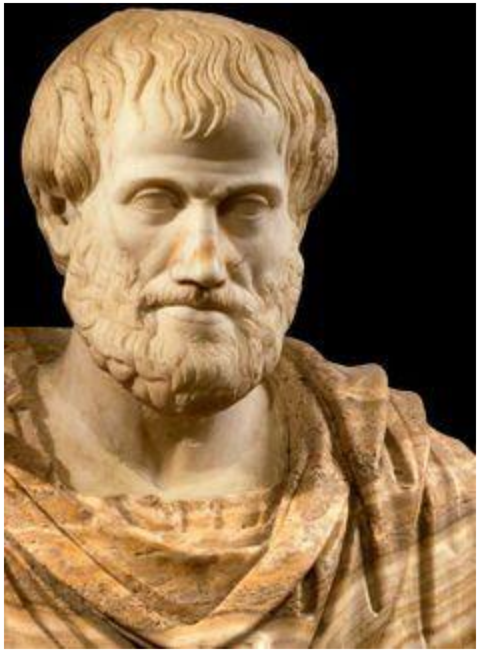
Institut Supérieur d'Informatique et de Mathématiques de Monastir

Partie 1: Introduction à La Logique Propositionnelle

Contenu de la Partie 1

1. Les 3 Principes d'Artistote: Rappel
2. Définition d'une Proposition
3. Exemples de Propositions
4. Calcul/Raisonnement Propositionnel
5. Récapitulons

Les 3 Principes d'Artistote: Rappel



1. **Le principe de non-contradiction:**

   Une proposition A ne peut être à la fois vraie et fausse

2. **Le principe de tiers exclu:**

   Une proposition A est forcément vraie ou fausse

3. **Le principe de d'identité:**

   La chose A s'explique (ou se vérifie) par elle-même

La notion de **« proposition »** est fondamentale en logique et déjà présente dans la logique d'Aristote.

Définition d'une Proposition

- Selon le principe du **tiers exclu** :
  - une proposition est **soit vraie soit fausse** mais **pas autre chose**.

Une proposition est une expression qui est soit **vraie**, soit **fausse.**

On dit que la « valeur de vérité » d'une proposition est « vraie » ou « fausse ».

Exemples de Propositions

« Une proposition est une affirmation vraie ou fausses »

- L'énoncé « 24 est un multiple de 2 » est vrai (V)
- L'énoncé « 19 est un multiple de 2 » est faux (F)
- L'énoncé « Tunis est la capitale de la Tunisie » est vrai (V)

Calcul/Raisonnement Propositionnel (1/2)

- **Raisonner** c'est **déterminer** la **valeur** de **vérité** de **proposition** construites en combinant entre des propositions dont les valeurs de vérité sont déjà connues.
- **Le calcul proportionnel s'intéresse uniquement à la façon** dont les propositions sont liées entre elles, et aux conséquences qu'on peut en tirer quant à leur valeur de vérité.

c'est la **forme d'un argument** qui compte, et **non son contenu c-à-d il ne *s'intéresse pas du tout à leur signification***

Calcul/Raisonnement Propositionnel (2/2)

- Une **argumentation logique** utilise un **certain nombre de prémisses** pour prouver la validité d'une **assertion** (ou conclusion)
- Pour être **convaincu de l'assertion**, on doit être **convaincu des prémisses**.

> - Le calcul propositionnel **ne permet pas** de **découvrir de nouvelles réalités** sur le monde.
> - Elle **permet** simplement **d'effectuer un raisonnement correct** qui assure que, si les **prémisses sont vraies, alors la conclusion est vraie**.

Récapitulons

Dans la logique propositionnelle :

- On étudie les relations entre des énoncés appelés propositions ou formules.
- Ces relations sont exprimées via des connecteurs logiques.
- Les connecteurs logiques permettent de construire des formules syntaxiquement correctes.

Principe du **tiers exclu** :

- Ce principe affirme : "De deux propositions contradictoires, l'une est vraie, l'autre est fausse."
- Il n'y a pas de moyen terme ou de troisième hypothèse dans ce contexte.

Institut Supérieur d'Informatique et de Mathématiques de Monastir

Partie 2: Syntaxe du Calcul Propositionnel

Contenu de la Partie 2

1. Langage de la logique propositionnelle
2. Exercice Applicatif
3. Correction de l’Exercice Applicatif
4. Connecteurs Logiques
5. Forme Propositionnelle
6. Propriétés des Formes Propositionnelles
7. Classe Propositionnelle
8. Expressions Equivalentes

Langage de la logique propositionnelle

- S'intéresser à la syntaxe de la logique propositionnelle, c'est considérer les formules qui sont "**bien écrites**".

- Les **formules** sont définies comme **des chaînes de caractères sur un alphabet.**
- Pour cela, on se donne **un alphabet**, i.e. **un ensemble de symboles**, avec :
  - **deux constantes**, Vrai, Faux, pour lesquelles on utilise aussi les notations **1, 0** et **V, F** ;
  - Un ensemble **V={p,q,r,…}** dénombrable de lettres appelées **variables propositionnelles**. Il s'agit des propositions atomiques
  - Un ensemble (fini) de **connecteurs logiques** (**ou**, **et**, **non**, **implique**, **équivalence**)
  - Les **parenthèses** (,)

Exercice Applicatif

- **Exercice:**

Plaçons-nous dans le contexte suivant : « Il aime les fraises et la chantilly ».
Dites si les propositions suivantes sont vraies ou fausses.

1. « Il aime les fraises et il aime la chantilly ». **Vrai.**
2. « Il aime les fraises et il n'aime pas la chantilly ».. **Faux**
3. « Il aime les fraises ou il aime la chantilly ». **Vrai.**
4. « Il aime les fraises ou il n'aime pas la chantilly ». **Vrai.**
5. « Il aime les fraises donc il aime la chantilly ». **Vrai.**
6. « Il aime les fraises donc il n'aime pas la chantilly ». **Faux**
7. « Il n'aime pas les fraises donc il aime la chantilly ». **Vrai.**
8. « Il n'aime pas les fraises donc il n'aime pas la chantilly ». **Vrai.**

- **Correction:**

1. « Il aime les fraises et il aime la chantilly » : **Vrai.** Cette proposition est vraie, car elle correspond au contexte initial.
2. « Il aime les fraises et il n'aime pas la chantilly » : **Faux**. Cette proposition est fausse, car elle contredit le contexte initial où il est dit qu'il aime la chantilly.
3. « Il aime les fraises ou il aime la chantilly » : **Vrai.** Cette proposition est vraie, car elle est satisfaite si au moins une des deux conditions est vraie.
4. « Il aime les fraises ou il n'aime pas la chantilly » : **Vrai.** Cette proposition est vraie, car elle est également satisfaite si au moins l'une des deux conditions est vraie.
5. « Il aime les fraises donc il aime la chantilly » : **Vrai**. Cette proposition est vraie, car si quelqu'un aime les fraises et que la chantilly est incluse dans le contexte initial, il aime donc la chantilly.
6. « Il aime les fraises donc il n'aime pas la chantilly » **: Faux**. Cette proposition est fausse, car elle contredit le contexte initial où il est dit qu'il aime la chantilly.
7. « Il n'aime pas les fraises donc il aime la chantilly » : **Vrai.** Cette proposition est vraie, car elle n'entre pas en conflit avec le contexte initial. Si quelqu'un n'aime pas les fraises mais que l'on ne dit rien de sa préférence pour la chantilly, il peut tout à fait aimer la chantilly.
8. « Il n'aime pas les fraises donc il n'aime pas la chantilly » : **Vrai.** Cette proposition est vraie, car elle ne contredit pas le contexte initial. Si quelqu'un n'aime ni les fraises ni la chantilly, cela correspond toujours au contexte initial.

Connecteurs Logiques (1/19)

- En logique formelle, les **connecteurs logiques**, également appelés **opérateurs logiques**, sont des **symboles** ou des **mots** qui permettent de **combiner** des **propositions** **pour former de nouvelles propositions plus complexes**.
- Les connecteurs logiques sont utilisés pour exprimer des relations logiques entre des propositions et pour effectuer des opérations sur ces propositions.
- Les connecteurs les plus usuels sont:
  - **Négation** : *Non* (**Notation :** $\neg$)
  - **Conjonction** : *Et* (**Notation :** $\wedge$)
  - **Disjonction** : *Ou* (**Notation :** $\vee$)
  - **Conditionnel :** *Si… Alors* (**Notation :** $\longrightarrow$ *ou* $\Rightarrow$)
  - **Equivalence :** *Si et Seulement Si* (**Notation :** $\leftrightarrow$ *ou* $\Leftrightarrow$)

Connecteurs Logiques (2/19) :
Priorités de opérations

- Les connecteurs logiques ont une priorité d'opération qui diminue selon l'ordre du tableau précédent (dans la diapositive précédente) :
  - la **négation** a la plus **haute priorité**,
  - et l'**équivalence** la **plus basse priorité**.

- Ainsi, la proposition :

$$\neg p \wedge q \vee r \leftrightarrow q \longrightarrow p \wedge r$$

Est équivalente à :

$$(((\neg p) \wedge q) \vee r) \leftrightarrow (q \longrightarrow (p \wedge r))$$

Connecteurs Logiques (3/19):

La Négation (non)

- Soit **p une proposition**. **La négation de p**, est la proposition **non p**.
- **Notation : ¬**
- **Table de vérité de ¬:**

p	¬ p
V	F
F	V

- Si **p** est une proposition alors **non(p)/ ¬p** est une autre qui est **vraie si p est fausse**, et **fausse si p est vraie**.
- ¬ est un opérateur **unaire**.

- **Exemple** :
  - p : « 5 plus 4 font 9 »
    - ¬p : « il est faux que 5 plus 4 font 9 »
    - ¬ p : « 5 plus 4 ne font pas 9 »

Connecteurs Logiques (4/19):
La Négation (non) (suite)

- **Exemple**:
  - Soit une Proposition **A:** « ma voiture est blanche » alors **¬ A ?**

- **Correction** :
  - Si **A** : « ma voiture **est blanche** »

    alors **¬ A** : **« ma voiture n’est pas blanche »**

Table de vérité de ¬A :

A	¬ A
V	F
F	V

Connecteurs Logiques (5/19):

La Négation (non) (suite)

- **Autres exemples**
  - La proposition P= « 24 est un multiple de 2 » est une proposition vraie (V).
  - La proposition ¬P est définie par :
    - P= « 24 n'est pas un multiple de 2 »

      C'est une proposition fausse (F)
  - La proposition «1/2 n'est pas un entier naturel» est vraie car la proposition « ½ est un entier naturel » est fausse.

Connecteurs Logiques (6/19):
La Conjonction: ET

- Si **p** et **q** sont des propositions, alors :
  - La **conjonction** de p et q est la proposition **p ET q**
  - P **ET** q:
    - **vraie** si **p et q** sont **vraies en même temps**,
    - **Faux** dans **tous** les **autres cas**.
- **Notation :** $\wedge$
- **Table de vérité de** $\wedge$

p	q	$p \wedge q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

- **Exemple :**
  - p : « 10 est divisible par 2 »
  - q : « 10 est divisible par 5 »
  - $p \wedge q$:«10 est divisible par 2 **et** 10 est divisible par 5 »

Connecteurs Logiques (7/19):
La Conjonction: ET(suite)

- **Autre exemple :**
  - Si A : « j'ai une voiture » et B : « j'ai le permis » Alors A et B : ?

- **Correction :**
  - Si A : « j'ai une voiture » et B : « j'ai le permis »
    Alors A ∧ B :
    - **« j'ai une voiture et j'ai le permis »**
      ou
    - **« j'ai une voiture et le permis**
  - A et B est vraie si A et B sont vraies toutes les deux, sinon elle est fausse.

Table de vérité de A ∧ B :

A	B	A∧ B
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Connecteurs Logiques (8/19):

La Disjonction: OU

- Si **p** et **q** sont des propositions, alors :
  - La **disjonction** de p et q est la proposition **p OU q**
  - P **OU** q:
    - Si **p et q** sont **deux propositions** alors **p OU q :**
    - est **fausse** lorsque **p et q** sont **fausses en même temps,**
    - est **vraie** lorsque l'**une au moins des deux est vraie**.
- **Notation** : ∨
- **Table de vérité de** ∨

p	q	$p \vee q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

- **Exemple** :
  - p : « 10 est divisible par 2 »
  - q : « 10 est divisible par 5 »
  - p ∨ q :« 10 est divisible par 2 **ou** 10 est divisible par 5 »

La Disjonction: OU (suite)

- **Autre exemple :**
  - Si A : « j'ai une voiture » et B : « j'ai le permis » Alors A ou B : ?

- **Correction :**
  - Si A : « j'ai une voiture » et B : « j'ai le permis » Alors **A ou B : « j'ai une voiture ou le permis »** A ou B est vraie si l'une au moins des propositions A et B est vraie.

Table de vérité de A $\vee$ B :

A	B	A $\vee$ B
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Connecteurs Logiques (10/19):
Conjonction et disjonction

Exemple de disjonction et conjonction:

- Considérons les deux propositions p et q suivantes:
  - P= « 10 est divisible par 2 »
  - Q= « 10 est divisible par 3 ».
  - On déduit les deux propositions

Correction:

- La proposition P est vraie tandis que la proposition Q est fausses
  - $P \wedge Q$= « 10 est divisible par 2 et 10 est divisible par 3 »,
  - $P \vee Q$ « 10 est divisible par 2 ou 10 est divisible par 3 »

- La proposition « $P \wedge Q$ » est une proposition fausse.
- En revanche, la proposition « $P \vee Q$ est une assertion vraie

Connecteurs Logiques (11/19):
Le Conditionnel: Implication: si… alors…

- Soient **p** et **q** deux propositions. La proposition « **p** ⇒ q » appelée **implication p vers q** ou « p entraîne q » , « p implique q » , « si p alors q » qui:
  - Est fausse lorsque **p** est **vraie** et **q fausses**
  - Est vrai **dans tous les autres cas**
- **Notation :→/⇒**
- **Table de vérité de → :**

p	q	p → q
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

- On dit que p est une **condition suffisante** pour q **mais pas nécessaire**
- **q** ⇒ p s'appelle l'implication réciproque de **p** ⇒ q
- (**p** ⇒ q) et (q ⇒ r) se note : **p** ⇒ q ⇒ r

Dans la formule **p ⇒ q**, on appelle **p l'antécédent**, **la condition suffisante** ou **la prémisse**, tandis que **q** est le **conséquent** ou la **conclusion**.

Connecteurs Logiques (12/19) :

Le Conditionnel: Implication: si… alors… (suite)

- ***Un conditionnel n' est faux que dans un et un seul cas :***
  - ***si son antécédent est vrai et son conséquent faux***
- **Démonstration : cas où p est vraie**
  - **Exemple1 :**
    - « s'il pleut, le sol est mouillé »
      - ✓ p : « il pleut »
      - ✓ q : « le sol est mouillé »
    - on suppose que p est vraie et on essaye de prouver que q est vraie
    - si la conséquence q est vraie, donc p → q est vraie
    - si la conséquence q est fausse, donc p → q est fausse

Connecteurs Logiques (13/19) :

Le Conditionnel: Implication: si… alors… (suite)

- **Démonstration : cas où p et q sont fausses**

- **Exemple 2 :**
  - p= « 2 est égal à 1 »
  - q = « Napoléon et Jules César sont une seul et même personne.»
  - On obtient « Si 2 est égal à 1 alors Napoléon et Jules César sont une seul et même personne»
    - ✓ « P entraîne Q» est vraie
  - **Preuve** : Napoléon et Jules César sont deux personnes : mais deux personnes n'en font qu'une si 2 est égal à 1. Par conséquent, si 2 est égal à 1 alors Napoléon et Jules César sont une seule et même personne

Connecteurs Logiques (14/19):

Le Conditionnel: Implication: si… alors… (suite)

- **Exemple :**
  - Montrer que la proposition suivante est vraie «si 1/2 est un nombre entier alors 1/2 n'est pas un nombre entier»

- **Réponse:**
  - P = «si 1/2 est un nombre entier» **est fausse**
  - Q = «1/2 n'est pas un nombre entier» **est vraie**

Donc $P \rightarrow Q$ est **vraie**

Connecteurs Logiques (15/19) :
Le Conditionnel: Implication: si… alors… (suite)

- **Théorème :** $p \to q = (\neg p) \vee q$

- **Démonstration :**

p	q	p→q	¬ p	(¬ p) ∨ q
V	V			
V	F			
F	V			
F	F			

Connecteur Logiques (16/19) :

Le conditionnel: Implication: si… alors… (suite)

- ***Exercice:***

  - Quelles sont les valeurs de vérité des propositions suivantes ?

    1. « la somme des angles d'un triangle vaut 180° **V** implique que la somme des angles d'un rectangle vaut 360° **V** » **Vrai**
    2. « π vaut 3.14 **V** implique que la somme des angles d'un triangle vaut 182° **F** » **Faux**
    3. « si 7 est plus grand que 8 **F** alors l'eau bout à 100°C **V** » **Vrai**
    4. « si 3 est plus petit que 4 **V** alors 4 est plus petit que 3 **F** » **Faux**
    5. « si 4 est plus petit que 3 **F** alors 3 est plus petit que 4 **V** » **Vrai**
    6. « 82 est divisible par 7 **F** implique que π vaut 3.14 **V** » **Vrai**
    7. « si $330^{33}+5$ est divisible par 2 **F** alors $330^{33}+5$ est plus grand que 5 **V** » **Vrai**

Connecteur Logiques (17/19) :

Equivalence: biconditionnel:.. si seulement si..

- Soient **p** et **q** deux propositions. La proposition « **p** ⇔ q » appelée **équivalence de p et de q** est une proposition qui:
  - Est vrai lorsque p et q sont simultanément vrai ou faux
  - Est faux dans tous les autres cas

- **Notation** : ↔ *ou* ⇔
- **Table de vérité de ↔ :**

p	q	p ↔ q
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

- (**p** ⇔ q) et (**q**⇔ **r**) se note : **p** ⇔ q ⇔ **r**

- **Théorème** : p ↔q = (p→q) ∧(q → p)
- **Démonstration**:

p	q	p ↔ q	p → q	q → p	(p→q) ∧(q → p)
V	V				
V	F				
F	V				
F	F				

Dans la formule p ⇔ q, on dit que **q** est une **condition nécessaire** et **suffisante pour p**.

Connecteur Logiques (18/19):

Equivalence: biconditionnel: …si seulement si… (suite)

- **Exemple :**
  - x= je suis heureux **si et seulement si** tu m'aimes
  - **Réponse:**
    - P = je suis heureux ,q= tu m'aimes

p	q	$p \leftrightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

- **Exercice:**

Traduire les énoncés suivants en formules.

  - Quand il fait beau, Jean est heureux ;
  - Il fait soleil ; donc, Jean est heureux.

- **Correction:**

En logique propositionnelle, vous pouvez traduire les énoncés donnés en utilisant des propositions simples et des connecteurs logiques. Voici comment vous pouvez les formuler :

1. **Quand il fait beau, Jean est heureux ;**
   - Vous pouvez représenter cette phrase par une implication (→), où "p" représente "Il fait beau" et "q" représente "Jean est heureux". La formule serait donc :

     "$p \to q$".

2. **Il fait soleil ; donc, Jean est heureux;**
   - Cette phrase peut être traduite en une implication également. En utilisant les mêmes propositions "p" et "q" que précédemment, vous obtenez : "$p \to q$".

Ainsi, les deux énoncés peuvent être traduits en logique propositionnelle comme suit :

1. "$p \to q$" (Quand il fait beau, Jean est heureux), "p" représente "Il fait beau" et "q" représente "Jean est heureux".
2. "$p \to q$" (Il fait soleil ; donc, Jean est heureux)., "p" représente "Il fait soleil" et "q" représente "Jean est heureux".

Forme Propositionnelle (1/6) : Définition

Une **forme propositionnelle** (ou **formule propositionnelle**) est une **suite de symboles** construite selon des règles, où l'on retrouve des **connecteurs**, des **parenthèses**, et des symboles de **variables propositionnelles**.

- Parmi les mots que l'on peut écrire avec cet alphabet, on va regarder ceux qui correspondent à des **e**xpressions logiques **b**ien **f**ormées **EBF** (ou **f**ormules **b**ien **f**ormées : **FBF**), et que l'on définit (inductivement).
- Ainsi**:**
  - Toute **proposition** (atomique ou non) , i.e, p, q, r,…, est **une forme propositionnelle** (expression bien formée)
  - Si p est une variable alors p écrit tout seul est une forme propositionnelle
  - Si **A** et **B** sont deux **expressions bien formées**, alors **$(A \wedge B)$**, **$(A \vee B)$**, **$(A \longrightarrow B)$** et **$(A \longleftrightarrow B)$** sont des **expressions bien formées**
  - Si p est une forme propositionnelle, alors $\neg p$ est une forme propositionnelle

Forme Propositionnelle (2/6) :
Table de vérité

Dans une **forme propositionnelle**, quand on remplace les **variables par des propositions**, on obtient **une proposition**. La valeur de vérité de cette proposition ne dépend que des valeurs de vérité des propositions qui ont été substituées.

- **Exercice:**
  - Évaluer les valeurs de vérité de l'expression : $(\neg(p \rightarrow q) \wedge r)$

p	q	r	$p \rightarrow q$	$\neg(p \rightarrow q)$	$\neg(p \rightarrow q) \wedge r$
V	V	V			
V	V	F			
V	F	V			
V	F	F			
F	V	V			
F	V	F			
F	F	V			
F	F	F			

Note :si on a n variables il faut prévoir une table contenant 2^n lignes

Forme Propositionnelle (3/6):
Table de vérité (suite)

- Certaines expressions peuvent assembler plusieurs propositions simples (propositions atomiques) pour en faire des propositions complexes (proposition composée) qui permettent de calculer la valeur de vérité des propositions complexes si on connait la valeur de vérité des fonctions simples.
- **Exemple :** Soient $f(p, q) = p \wedge q$ et $g(p, r) = p \wedge (\neg r)$. déterminer la table de vérité de $f \vee g$

p	q	r	$\neg r$	$f = p \wedge q$	$g = p \wedge (\neg r)$	$f \vee g = (p \wedge q) \vee (p \wedge (\neg r))$
V	V	V				
V	V	F				
V	F	V				
V	F	F				
F	V	V				
F	V	F				
F	F	V				
F	F	F				

Forme Propositionnelle (4/6) :
Table de vérité (suite)

- **Exercie 1:**
  1. Combien de lignes contient la table de vérité d'une forme propositionnelle qui dépend de n variables ?
  2. A l'aide de deux propositions p et q on peut construire une autre, notée p↓q, bâtie sur le modèle : « ni p , ni q ». Cette opération est elle une connexion ? Si oui quelle est sa table de vérité ?

Réponse

1. 2^n

2. Cette connexion est dite« double exclusion » noté ↓

p	q	p ↓ q
V	V	f
V	F	F
F	V	F
F	F	V

Forme Propositionnelle (5/6) :
Table de vérité (suite)

- **<u>Exercice 2:</u>**

représenter la table de vérité de chaque forme propositionnelle :

1. $(\neg p) \vee q$
2. $(p \vee q) \longrightarrow (p \wedge q)$
3. $(p \wedge q) \longrightarrow (p \vee q)$
4. $(p \longrightarrow q) \longrightarrow (q \longrightarrow p)$
5. $(p \longrightarrow (\neg q)) \wedge (q \longrightarrow (\neg p))$
6. $p \longrightarrow ((\neg p) \vee p)$
7. $(p \longrightarrow q) \leftrightarrow ((p \longrightarrow r) \wedge (r \longrightarrow q))$

Forme Propositionnelle (6/ 6):
Modèle

Définition:

- Un choix des valeurs de vérité des variables qui donne une proposition **vraie** s'appelle **un modèle** de la forme propositionnelle.
  - Exemple: le choix de **V** pour **p**, **F** pour **q** est un modèle pour la forme propositionnelle W avec W= $p \vee q$.
  - On dit que des **formes propositionnelles sont compatibles** si elles ont au **moins un modèle en commun**.
  - On dit que des formes propositionnelles sont **contradictoires** quand elles n'ont **aucun modèle en commun**.
  - ....

Propriétés des Formes Propositionnelles (1/18): Satisfiable

○ Définition:

- On dit qu'une formule A est **consistante, ou satisfiable**, s'il existe **au moins** une interprétation de ses variables propositionnelles qui la rende vraie.
- **Exemple: p v q.**

Dans ce exemple ,on a 3 interprétation V

p	q	$p \vee q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Propriétés des Formes Propositionnelles (2/18): Tautologie/validité

Définition:

- Une Tautologie est une formule qui est vraie dans toutes les interprétations possibles.
  - Sa colonne de la formule complexe dans sa table ne contient que de **V**.
  - En tant que forme propositionnelle, une proposition vraie est une tautologie.

> - **Définition**
>
> Une proposition R qui est vraie quelles que soient les valeurs de p (la proposition qui la composent), est appelée **une tautologie**

- **Notation**: $\vDash$**A.**

Propriétés des Formes Propositionnelles(3/18): Tautologie/validité (suite)

- **Exemple**

- Considérons une proposition p. Cette proposition peut prendre la valeur (de vérité) vrai ou faux. Considérons la proposition composée R telle que:

$$\mathbf{R = p \lor \neg p}$$

p	¬ p	p ∨ ¬ p
F	V	V
V	F	V

La proposition R est alors qualifiée **de tautologie**

Se note **⊨R**

Propriétés des Formes Propositionnelles(4/18): Tautologie/validité (suite)

Définition:

- Une Antilogie est une formule qui n'est vraie dans aucune interprétation possible.
  - Sa colonne de la formule complexe dans sa table ne comporte que des **F**.
  - En tant que forme propositionnelle, une proposition fausse est une antilogie.
  - on dit aussi une **contradiction**.

Propriétés des Formes Propositionnelles (5/18): Tautologie

Exemples:

$(\neg\, p\,) \vee p$

Tautologie

p	$\neg$p	$(\neg\, p\,) \vee p$
V	F	V
F	V	V

$((\neg\, p\,) \wedge p$

Antilogie

p	$\neg$p	$(\neg p\,) \wedge p$
V	F	F
F	V	F

Propriétés des Formes Propositionnelles(6/18): Tautologie (suite)

- **Exercie :**

montrer que les formules suivantes sont ou non des tautologies ?

1. $(p \vee q) \longrightarrow (p \wedge q)$
2. $(p \wedge q) \longrightarrow (p \vee q)$
3. $p \longrightarrow ((\neg p) \vee p)$
4. $p \longrightarrow ((\neg p) \wedge p)$
5. $(p \longrightarrow ((\neg p) \vee p)$
6. $(p \wedge (\neg p)) \vee (p \wedge q)$
7. $(p \longrightarrow q) \leftrightarrow ((p \longrightarrow r) \wedge (r \longrightarrow q))$

Propriétés des Formes Propositionnelles (7/18):
Conséquence Logique

Définition:

- Si f et g deux formes propositionnelles, on dit que **g est un conséquence de f**, ou encore **g est déduit de f** si:

$f \rightarrow g$ est une tautologie

- On écrit alors : $\mathbf{f} \vDash \mathbf{g}$
- **Le symbole $\vDash$ n'est pas un connecteur**
- $\vDash$ est un symbole d'une relation (g est un conséquence de f)

Propriétés des Formes Propositionnelles (8/18):
Conséquence Logique (suite)

- **Définition :**

1. Soient les formules A1,A2 ,…,An, B. B est une conséquence sémantique de A1,A2 ,…,An ssi pour **chaque interprétation I**, A1, A2 ,…,An **sont vrais alors B est aussi vrai**.

$$A1,A2,\ldots,An \models B$$

Remarque : Si il existe une interprétation où v(A1) = T, v(A2)= T,… et v(B)=F alors A1, A2,…$\not\models$B.

Propriétés des Formes Propositionnelles (9/18):
Conséquence Logique (suite)

- **Exemple1 :**

1. Vérifier à l'aide de la table de vérité si A -> B, B ->C $\models$ A ->C
2. Quelles sont les conséquences valides que vous pouvez déduire de cette table de vérité ?

Correction :

A	B	C	A->B	B->C	A->C
T	T	T	**T**	**T**	**T**
T	T	F	T	F	F
T	F	T	F	T	T
T	F	F	F	T	F
F	T	T	**T**	**T**	**T**
F	T	F	T	F	T
F	F	T	**T**	**T**	**T**
F	F	F	**T**	**T**	**T**

Propriétés des Formes Propositionnelles (10/18):
Conséquence Logique (suite)

Théorème:

- La **forme propositionnelle** g **est une conséquence de la forme propositionnelle** de f **si tout modèle** de **f** est **aussi un modèle** de **g**
- En effet, si f⟶ g prend toujours la valeur V cela signifie que f ne prend pas la valeur V quand g prend la valeur F

Théorème:
La forme propositionnelle g est une conséquence de la forme propositionnelle de f si tout modèle de f est aussi un modèle de g
En effet, si f⟶ g prend toujours la valeur V cela signifie que f ne prend pas la valeur V quand g prend la valeur F

Propriétés des Formes Propositionnelles (11/18): Conséquence Logique (suite)

Exemple 1:

- Montrer que q est une conséquence logique de $(p \wedge (p \longrightarrow q))$

p	q	$p \rightarrow q$	$p \wedge (p \rightarrow q)$	$(p \wedge (p \rightarrow q)) \rightarrow q$
V	V			
V	F			
F	V			
F	F			

Conclusion: Modus ponens : $(p \wedge (p \longrightarrow q)) \vDash q$

Propriétés des Formes Propositionnelles (12/18): Conséquence Logique (suite)

Exemple 2:

- Montrer que $\neg p$ est une conséquence de $(\neg q) \wedge (p \rightarrow q)$

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$p \rightarrow q$	$\neg q \wedge (p \rightarrow q)$	$(\neg q \wedge (p \rightarrow q)) \rightarrow \neg p$
V	V					
V	F					
F	V					
F	F					

Conclusion: **Modus tollens** : $(\neg q) \wedge (p \rightarrow q) \vDash \neg p$

Propriétés des Formes Propositionnelles (13/18) : Conséquence Logique (suite)

Exercice:

- Soient : $f(p,q,r)= (p\longrightarrow q) \land (q\longrightarrow r)$ et $g(p,r)= p\longrightarrow r$

Montrer que $f \vDash g$

p	q	r	$p \to q$	$q \to r$	$f = (p \to q) \land (q \to r)$	$g = (p \to r)$	$f \to g$
V	V	V					
V	V	F					
V	F	V					
V	F	F					
F	V	V					
F	V	F					
F	F	V					
F	F	F					

Propriétés des Formes Propositionnelles (14/18) : Conséquence logique (suite)

En récapitulant les **règles d'inférences**, nous avons les suivantes:

1. **Règle de Modus Ponens** :
   - La règle d'inférence appelée **Modus Ponens,** à partir de deux FBF respectivement de la forme **G** et (**G**→**H**), dérive la FBF **H**.
2. **Règle de Modus Tollens :**
   - La règle d'inférence appelée **Modus Tollens**, à partir de deux FBF respectivement de la forme (**¬H**) et (**G**→**H**), dérive la FBF **(¬G**).

- Les FBF choisies initialement sont appelées **axiomes**. Les FBF obtenues par application des règles d'inférence sont appelées **théorèmes**.

- Une **chaîne d'applications de règles d'inférence** conduisant, depuis les axiomes, à un théorème, constitue une **preuve du théorème**.

Propriétés des Formes Propositionnelles(15/18):
Conséquence logique (suite)

- **Exercice:**
  - Dans chacun des cas ci-dessous déterminer si la première forme propositionnelle est une conséquence de la forme propositionnelle qui est sur la même ligne :

1.	$(p \wedge q)$	p
2.	q	$(p \rightarrow q)$
3.	$\neg (p \rightarrow q)$	p
4.	$(p \wedge q) \vee r$	$p \wedge (q \vee r)$
5.	$(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r)$	$p \rightarrow (q \rightarrow r)$
6.	$p \rightarrow (q \rightarrow r)$	$p \rightarrow r$
7.	$p \rightarrow (q \wedge r)$	$p \rightarrow q$
8.	$(p \wedge q) \rightarrow r$	$(p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow r)$
9.	$p \rightarrow (q \vee r)$	$(p \rightarrow q) \vee (p \rightarrow r)$

Propriétés des Formes Propositionnelles (16/18): Equivalentes

- **Définition:**
  - Soient p et q deux propositions. Si :
    - P est vraie lorsque q est vraie
    - P est fausse lorsque q est fausse

    Alors on dit que deux formes propositionnelles **sont synonymes ou équivalentes** quand elles **ont la même table de vérité**
- **Notation $p \equiv q$**
  - **Exemple:**
    - Soit p une proposition . Non(non(p)) ≡p
    - Soit x et y deux propositions :
      - ✓ $x \vee (x \wedge y) \equiv x$.
      - ✓ $x \wedge (x \vee y) \equiv x$.

Propriétés des Formes Propositionnelles (17/18): Equivalentes (suite)

- **Exemple:**
  - $(p \longrightarrow q)$ et $((\neg q) \longrightarrow (\neg p))$ sont **équivalentes**

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$p \rightarrow q$	$(\neg q) \rightarrow (\neg p)$
V	V	f	f	v	v
V	F	f	v	f	f
F	V	v	f	v	v
F	F	v	v	v	v

- **Remarque:** La proposition $(\neg q) \longrightarrow (\neg p)$ s'appelle la **contraposée** $(p \longrightarrow q)$

Propriétés des Formes Propositionnelles (18/18): Equivalentes (suite)

- **Exercice:**
  - Dans chacun des cas suivants dire si les deux formes propositionnelles sont équivalentes.

1.	$p \rightarrow q$	$(\neg p) \vee (p \wedge q)$
2.	$p \rightarrow q$	$(\neg p) \rightarrow (\neg q)$
3.	$p \rightarrow (q \rightarrow r)$	$(p \rightarrow q) \rightarrow r$
4.	$(p \wedge q) \vee (q \wedge r) \vee (r \wedge p)$	$(p \vee q) \wedge (q \vee r) \wedge (r \vee p)$

Classe Propositionnelle

- Il est possible de ranger les formes propositionnelles en classes d'équivalence constituées de formes propositionnelles synonymes. Chaque classe est caractérisée par la table de vérité commune à toute les formes de la classe.
  - Toutes forme synonyme d'une tautologie est une tautologie. **Notée : V**
  - Toutes forme synonyme d'une antilogie est une antilogie **Notée : F**

$\square$: Dénote une formule **toujours fausse**

$\blacksquare$: Dénote une formule **toujours vraie**

- **Propriétés de la négation :**
  1. $A \wedge \neg A \equiv \square$
  2. $A \vee \neg A \equiv \blacksquare$
  3. $\neg(\neg A) \equiv A$
  4. $A \vee \square \equiv A$
  5. $A \wedge \square \equiv \square$
  6. $A \vee \blacksquare \equiv \blacksquare$
  7. $A \wedge \blacksquare \equiv A$

Expressions Equivalentes (1/4)

- Si la proposition **$p \Leftrightarrow q$ est vraie**, alors on dit que **p et q** sont deux propositions **équivalentes**, et on note **$p \equiv q$**
- **Première loi de De Morgan :**
  - $\neg(p \vee q) \equiv \neg p \wedge \neg q$
  - $\neg(p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q$
- **Théorème 1:**
  - Si p et q sont deux propositions :
    1. $p \leftrightarrow q \equiv (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$;
    2. $\neg(p \rightarrow q) \equiv p \wedge \neg q$
    3. $p \rightarrow q \equiv \neg q \rightarrow \neg p$;

Expressions Equivalentes (2/4)

Commutativité

- $\models [(A \wedge B) \equiv (B \wedge A)]$
- $\models [(A \vee B) \equiv (B \vee A)]$
- $\models [(A \equiv B) \equiv (B \equiv A)]$

Associativité :

- $\models [((A \wedge B) \wedge C) \equiv ((A \wedge (B \wedge C))]$
- $\models [((A \vee B) \vee C) \equiv (A \vee (B \vee C))]$
- $\models [((A \equiv B) \equiv C) \equiv (A \equiv (B \equiv C))]$

lois de Morgan:

- $\neg (C1 \wedge C2) = (\neg C1) \vee (\neg C2)$
- $\neg (C1 \vee C2) = (\neg C1) \wedge (\neg C2)$

Distributivité

- $C1 \vee (C2 \wedge C3) = (C1 \vee C2) \wedge (C1 \vee C3)$
- $C1 \wedge (C2 \vee C3) = (C1 \wedge C2) \vee (C1 \wedge C3)$
- $C1 \wedge (C5 \text{ v } C8 \text{ v } C1 \vee C2) = C1$
- $C1 \vee (C5 \wedge C8 \wedge C1 \wedge C2) = C1$

Absorption :

- $[(A \wedge (A \vee B)) \equiv A]$
- $\models [(A \vee (A \wedge B)) \equiv A]$

idempotence :

- $C1 \vee V = V$
- $C1 \wedge V = C1$
- $C1 \vee F = C1$
- $C1 \wedge F = F$
- $C1 \vee C1 = C1$
- $C1 \wedge C1 = C1$

Expressions Equivalentes (3/4)

○ Implication:

- $\models [(A \rightarrow B) \equiv (\neg A \vee B)]$
- $\models [(A \rightarrow B) \equiv \neg(A \wedge \neg B)]$
- . . .

○ Equivalence:

- $\models [(A \equiv B) \equiv ((A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A))]$
- $\models [(A \equiv B) \equiv ((A \wedge B) \vee (\neg A \wedge \neg B))]$
- . . .

○ Contraposition:

- $\models [(A \rightarrow B) \equiv (\neg B \rightarrow \neg A)]$

○ Auto-distributivité:

- $\models [(A \rightarrow (B \rightarrow C)) \equiv ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C))]$

○ Import-export

$\models [(A \rightarrow (B \rightarrow C)) \equiv (B \rightarrow (A \rightarrow C))]$

○ Transitivité

- $\models [((A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow C)) \equiv (A \rightarrow C)]$

Expressions Equivalentes (4/4):

- **Exemple:**
- Soit Q une formule avec $Q=(p \wedge (\neg q \wedge r)) \vee (p \wedge \neg q)$.
  montrer que Q est équivalente à une formule plus simple

- **Réponse:**
  1. On commence avec $Q = (p \wedge \neg q \wedge r) \vee (p \wedge \neg q)$.
  2. Par **la propriété de négation (vrai est neutre pour et)** que Q est équivalent à $(p \wedge \neg q \wedge r) \vee ((p \wedge \neg q) \wedge \text{vrai})$.
  3. On applique **l'associativité et** pour déplacer une paire de parenthèses : $((p \wedge \neg q) \wedge r) \vee ((p \wedge \neg q) \wedge \text{vrai})$.
  4. On utilise **la distributivité-et-sur-ou** pour factoriser : $(p \wedge \neg q) \wedge (r \vee \text{vrai})$.
  5. Par **vrai est absorbant** , le terme de droite se simplifie : $(p \wedge \neg q) \wedge \text{vrai}$.
  6. On se sert de **vrai est neutre pour et** pour le faire disparaître : $p \wedge \neg q$.

Les formules écrites à chacune des étapes sont équivalentes les unes aux autres, donc en particulier à Q. **On peut donc conclure qu'on a $Q \Leftrightarrow p \wedge \neg q$.**

Institut Supérieur d'Informatique et de Mathématiques de Monastir

Partie 3: Sémantique du Calcul Propositionnel

Contenu de la Partie 3

1. Introduction
2. Sémantique Propositionnelle
3. Règles sémantiques
4. Les formes Normales
5. Méthodes de Normalisation
6. Table de Vérité
7. Tableaux de Karnaugh
8. Arbres de Beth
9. Arbres de Beth et Tautologie
10. Arbres de Beth et validité des arguments

Introduction

- S'intéresser à la **sémantique** de la logique propositionnelle, **c'est déterminer la valeur de vérité d'un énoncé**, **c'est-à-dire d'une formule**, dans le cadre d'un de ses mondes possibles. On parle de **l'interprétation** d'une formule.
  - **Valuation** : On appelle valuation, ou L-Modèle, d'un ensemble de variables propositionnelles $v \subseteq v(L)$, une fonction m de v(L) dans {T, F} ($m : v(L) \rightarrow \{T, F\}$).
  - **Interprétation** : Une valuation appliquée à une formule dans laquelle est dite interprétation. soit la formule $F = (a \wedge b) \vee \neg b \rightarrow \neg a$, $\{m(a) = T, m(b) = F\}$ est une interprétation de F.
  - **Modèle d'une formule** : Une interprétation I est un modèle d'une formule A si elle est vraie (si elle vaut T).

Sémantique Propositionnelle (1/3):

Règles sémantiques

- Les règles syntaxiques nous donnaient la grammaire des énoncés, elles nous donnaient les conditions pour la bonne formation des formules.

- Les règles sémantiques nous donnent les conditions dans lesquelles un énoncé du langage propositionnel est vrai.

- Les tables de vérité nous permettent d'observer ces conditions de vérité. Mais au lieu d'utiliser des tableaux, on pourrait formuler ces conditions de vérité sous formes de règles.

Sémantique Propositionnelle (2/3) :

Règles sémantiques (suite)

- ¬ **P** est **vrai** si et seulement **P** est **faux**.
- **p** ∧ **q** est **vrai** si et seulement si **p** est **vrai** **et** **q** est **vrai**.
- **p** ∨ **q** est **vrai** si et seulement si **p** est **vrai** ou **q** est **vrai** **ou** les **deux** sont **vrais**.
- **p** ⟶ **q** est **vrai** si et seulement si **p** est **faux** ou **q** est **vrai**.
- **p** ⟷ **q** est **vrai** **soit** quand **p** et **q** sont tous les deux **vrais** soit **quand** **p** et **q** sont tous les deux **faux**.

Sémantique Propositionnelle (3/3)

Définitions:

- On appelle **littéral** une formule réduite à une variable ou à la négation d'une variable. Par exemple :
  - p ; ¬p sont des littéraux.
  - À partir des variables p, q et r, on peut définir six littéraux : p, ¬p, q, ¬q, r, ¬r.
- **Clause** : Une clause est une **disjonction** de littéraux ($p_1 \vee p_2 \vee \ldots \vee p_n$), les littéraux pouvant être positifs ou négatifs.
- **Exemple** : L'expression $\boldsymbol{p \vee q \vee \neg r}$ est une clause

- Un **minterm** est une conjonction de littéraux, ou un littéral seul. Par exemple $p \wedge \neg q \wedge r$ est un minterm.

Les formes Normales (1/5)

- La combinaison des connecteurs logiques peut aboutir à des formules complexes , difficiles à interpréter
- On peut normaliser les formuler en les récrire sous forme des formules normales
- **Toute formule** du calcul propositionnel est équivalente à une formule **sous forme normale disjonctive** et aussi à une formule **sous forme normale conjonctive**.
- Les deux formes normales les plus courantes sont :
  - **la Forme Normale Conjonctive (FNC)**
  - **et la Forme Normale Disjonctive (FND).**

Les Formes Normales (2/5) :
FND et FNC

1. Forme normale conjonctive (FNC):

- La formule F est **sous forme normale conjonctive** ssi elle **est sous la forme $F \equiv F_1 \wedge F_2 \wedge \ldots \wedge F_n$** où **chaque Fi** est **disjonction des littéraux (est une clause)**.
- Exemple : $Q = (p \vee \neg q \vee r) \wedge (t \vee r)$

2. Forme normale disjonctive (FND):

- La formule F est **sous forme normale disjonctive** ssi elle **est sous la forme $F \equiv F_1 \vee F_2 \vee \ldots \vee F_n$** où **chaque Fi** est **conjonction des littéraux (est un minterm)**.
- Exemple : $Q = (p \wedge \neg q \wedge r) \vee (t \wedge r)$

Les Formes Normales (3/5) :
FND et FNC (suite)

Exemples :

- La formule $(p \wedge \neg q \wedge r) \vee (p \wedge \neg q)$ est en **forme normale disjonctive** (deux clauses conjonctives, respectivement de trois et deux littéraux) ; il en est de même pour $p \wedge \neg q \wedge r$ (une clause avec trois littéraux).

- La formule $(p \vee \neg q) \wedge (r \vee \neg p \vee q) \wedge \neg r$ est en **forme normale conjonctive** (trois clauses disjonctives) ; il en est de même pour $p \wedge \neg q \wedge r$ (trois clauses avec un littéral chacune).

- Les formules $(p \vee \neg q) \wedge (r \vee \neg(p \vee q))$ et $(p \vee \neg q) \wedge (r \vee (\neg p \wedge q))$ **ne sont dans aucune des deux formes normales**.

Les formes Normales (4/5)

- **Toute formule du calcul propositionnel est équivalente à une formule sous forme normale disjonctive et aussi à une formule sous forme normale conjonctive.**
- Pour convertir une formule en forme normale, on utilise les lois de De Morgan, la distributivité des opérations ∨ et ∧, l'une par rapport à l'autre, et l'idempotence de ¬ .
- L'écriture sous forme normale peut agrandir la formule de manière exponentielle.
- **Exemple** : (p1 ∨ q1) ∧ (p2 ∨ q2) est sous FNC et il y a 2 termes. Sa FND comporte 2^2 termes :

$$(p1 \wedge p2) \vee (p1 \wedge p2) \vee (q1 \wedge p2) \vee (q1 \wedge q2)$$

Les formes Normales (5/5)

- Voici les étapes à suivre :

1. On utilise les lois suivantes pour éliminer les connecteurs logiques ⇒ et ⇔ :

$$X \Leftrightarrow Y \equiv (X \Rightarrow Y) \wedge (Y \Rightarrow X)$$
$$(X \Rightarrow Y) \equiv \neg X \vee Y$$

2. On utilise **l'annulation de la double négation** ainsi que les règles de réécriture

dérivées des lois de Morgan :

– remplacement de $\neg\neg X$ par X ;
– remplacement de $\neg(X \wedge Y)$ par $(\neg X \vee \neg Y)$;
– remplacement de $\neg(X \vee Y)$ par $(\neg X \wedge \neg Y)$.

3. Des deux étapes précédentes, on **obtient une expression ne contenant plus que des ∧ et des ∨ imbriqués**. On applique autant de fois que nécessaire les lois de distribution :

- $(X \vee (Y \wedge Z)) \equiv ((X \vee Y) \wedge (X \vee Z))$
- et $(X \wedge (Y \vee Z)) \equiv ((X \wedge Y) \vee (X \wedge Z))$.

Méthodes de Normalisation

- Toute formule de la logique propositionnelle est équivalente à une formule en forme normale disjonctive et une formule en forme normale conjonctive
- La **simplification des FBFs en FND** et **FNC** n'est pas toujours facile, on utilise des méthodes spécifiques. comme:
  - **table de vérité**
  - **tableaux de Karnaugh**
  - **méthode des arbres**
  - **….**

Table de Vérité (1/4)

Déduction de FND:

Etapes :

1. On se donne la formule F grâce à sa table de vérité.
2. On cherche les distributions de vérité qui sont un modèle pour F, c'est-à-dire les lignes où l'on trouve un "1".
3. Pour chaque modèle de F, on écrit la conjonction des littéraux tels que l'on obtient "1".
4. Exemple : Si $\delta(a) = 0$ et $\delta(b) = 1$ est un modèle, alors la **conjonction** qui est vraie pour cette distribution s'écrit $(\neg a) \wedge b$.
5. On écrit ensuite la **disjonction** de toutes les conjonctions.
6. Cette méthode garantit la construction d'une formule, sous **forme normale disjonctive**, équivalente à F.

Table de Vérité (2/4)

Déduction de FNC:

Etapes:

1. On se donne la formule F grâce à sa table de vérité.
2. On cherche les distributions de vérité δ qui ne sont pas un modèle pour F, c'est-à-dire les lignes où l'on trouve un “0”.
3. Pour chaque telle distribution, on écrit la **disjonction** des littéraux tels que l'on obtient “0”.
4. Exemple : Si $\delta(a) = 0$ et $\delta(b) = 1$, alors la disjonction qui est fausse pour cette distribution s'écrit $a \vee (\neg b)$.
5. On écrit ensuite la **conjonction** de toutes les disjonctions.
6. Cette méthode garantit la construction d'une formule, sous **forme normale conjonctive**, équivalente à F.

Exemple:

- En utilisant la table de vérité déterminer une formule en forme normale disjonctive équivalente à $((p \lor q) \longrightarrow r) \land (p \leftrightarrow r)$

p	q	r	$p \lor q$	$((p \lor q) \rightarrow r)$	$p \leftrightarrow r$	$((p \lor q) \rightarrow r) \land (p \leftrightarrow r)$
V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	V	F	F	F
V	F	V	V	V	V	V
V	F	F	V	F	F	F
F	V	V	V	V	F	F
F	V	F	V	F	V	F
F	F	V	F	V	F	F
F	F	F	F	V	V	V

Conclusion: $(p \land q \land r) \lor (p \land (\neg q) \land r) \lor ((\neg p) \land (\neg q) \land (\neg r))$ est une formule en forme normale disjonctive équivalente à $((p \lor q) \longrightarrow r) \land (p \leftrightarrow r)$

Table de Vérité (4/4)

Exercice:

- En utilisant la **table de vérité** déterminer une formule en forme normale disjonctive et conjonctive équivalente à :
  1. $(p \longrightarrow (\neg r)) \wedge (q \wedge (\neg r))$
  2. $q \wedge ((p \wedge r) \vee \neg (p \vee r))$
  3. Les formules sont-t-elles équivalentes

Note: Deux formules équivalentes ont la même FND/FNC

Tableaux de Karnaugh (1/10)

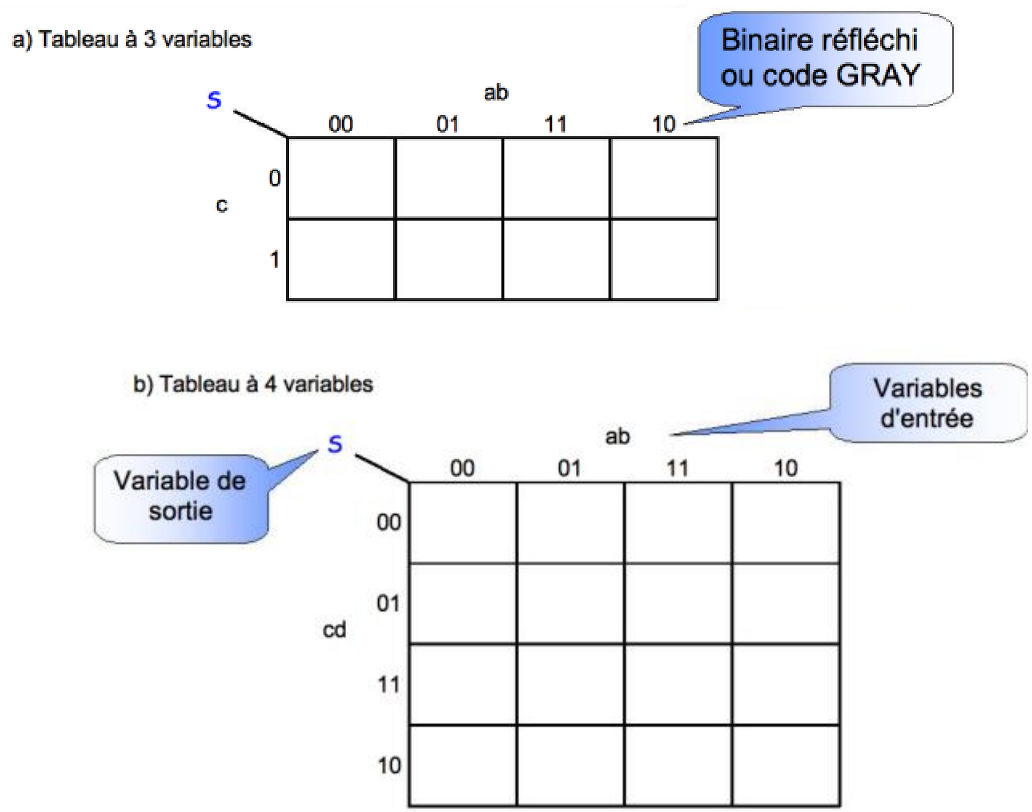
- La simplification d'une expression logique par le **tableau de Karnaugh** est une méthode développé en 1953 par Maurice Karnaugh, ingénieur en télécommunications au laboratoires Bell.

- La méthode de Karnaugh consiste à présenter les états d'une fonction logique, non pas sous la forme d'une table de vérité, mais en utilisant **un tableau à double entrée**.

- Chaque case du tableau correspond à une combinaison des variables d'entrées, donc à une ligne de la table de vérité.
- Le tableau de Karnaugh aura autant de cases que la table de vérité possède de lignes.

- Les lignes et les colonnes du tableau sont numérotées selon le code binaire réfléchi (code de Gray) :
  - **à chaque passage d'une case à l'autre, une seule variable change d'état**

Tableaux de Karnaugh (2/10)



On remplit le tableau grâce à la fonction booléenne S = f(a, b, c, d).

Tableaux de Karnaugh (3/10)

Déduction de FND:

Etapes:

1. **Regrouper** les cases adjacentes de **"1"** par paquets de taille des puissance de 2.
2. Pour minimiser le nombre de paquets, prendre les rectangles le plus grand possible : 2^n, . . . , 16, 8, 4, 2,1.
3. Une même case peut faire partie de plusieurs regroupements.
4. Les regroupements peuvent se faire au delà des bords : les côtés/coins ont des codes Gray voisins.
5. Toute case contenant **"1"** doit faire partie d'au moins un regroupement, mais aucun **"0"** ne doit y être.
6. Pour chaque rectangle, on **élimine** les variables qui changent d'état, l'on ne conserve que celles qui restent fixes.
7. On **multiplie** les variables fixes par "$\wedge$" afin d'obtenir des **mintermes** de S.
8. Les produits obtenus sont ensuite **sommés** avec **"$\vee$"**
9. et l'on obtient une **FND** de S.

Tableaux de Karnaugh (4/10)

Déduction de FNC:

Etapes:

1. **Regrouper** les cases adjacentes de **“0”** par paquets de taille des
2. puissance de 2.
3. Pour minimiser le nombre de paquets, prendre les rectangles le plus grand possible : 2^n , . . . , 16, 8, 4, 2,1.
4. Une même case peut faire partie de plusieurs regroupements.
5. Les regroupements peuvent se faire au delà les bords : les côtés/coins ont des codes Gray voisins.
6. Toute case contenant **“0”** doit faire partie d’au moins un regroupement, mais **aucun “1”** ne doit y être.
7. Pour chaque rectangle, on **élimine** les variables qui changent d’état, l’on ne conserve que celles qui restent fixes.
8. On somme les variables fixes avec **“∨”** afin d’obtenir des **maxtermes (clauses)** de S.
9. Les sommes obtenus sont ensuite multipliées avec “∧” et l’on obtient une **FNC** de S.

Tableaux de Karnaugh (5/10):
Exemple

- Le **code binaire Gray**, contrairement au code binaire naturel, permet de ne faire **évoluer qu'un bit** lorsque l'on passe d'un code à son suivant ou son précédent.

- À partir de 6 variables, le tableau de Karnaugh devient de plus en plus imposant. Pour le moment, on va se limiter à 4 variables.

- Les variables se répartissent sur les 2 côtés.

F		ab			
		00	01	11	10
cd	00				
	01				
	11				
	10				

Tableaux de Karnaugh (6/10):

Exemple (suite)

- **Exemple 1 :** parton du table 1 on peut faire ces 4 rassemblements :

F		ab			
		00	01	11	10
cd	00	0	0	1	1
	01	1	1	1	1
	11	0	0	0	1
	10	0	0	1	1

F		ab			
		00	01	11	10
cd	00	0	0	1	1
	01	1	1	1	1
	11	0	0	0	1
	10	0	0	1	1

F		ab			
		00	01	11	10
cd	00	0	0	1	1
	01	1	1	1	1
	11	0	0	0	1
	10	0	0	1	1

Note: Le dernier tableaux est inutile puisqu'il peut être fait par les 2 de gauche au dessus

F		ab			
		00	01	11	10
cd	00	0	0	1	1
	01	1	1	1	1
	11	0	0	0	1
	10	0	0	1	1

F		ab			
		00	01	11	10
cd	00	0	0	1	1
	01	1	1	1	1
	11	0	0	0	1
	10	0	0	1	1

Tableaux de Karnaugh(7/10):
Exemple (suite)

- **Exemple 1 (suite):** Maintenant on essaie de résoudre les rassemblements. Pour cela, il faut que les variables participant au rassemblement concerné **ne changent pas**.

Exemple avec le rassemblement bleu :
Dans les 4 cas possibles, la variable ***a*** est toujours à ***1*** et la variable ***d*** est toujours à **0**

La solution bleue donne : a ∧ ¬ d

F		ab			
		00	01	11	10
cd	00	0	0	1	1
	01	1	1	1	1
	11	0	0	0	1
	10	0	0	1	1

Tableaux de Karnaugh(8/10):
Exemple (suite)

- **Exemple 1 (suite)**

F		ab			
		00	01	11	10
cd	00	0	0	1	1
	01	1	1	1	1
	11	0	0	0	1
	10	0	0	1	1

$a \wedge \neg d$

F		ab			
		00	01	11	10
cd	00	0	0	1	1
	01	1	1	1	1
	11	0	0	0	1
	10	0	0	1	1

$\neg c \wedge d$

F		ab			
		00	01	11	10
cd	00	0	0	1	1
	01	1	1	1	1
	11	0	0	0	1
	10	0	0	1	1

$a \wedge \neg b$

Conclusion :$F= (a \wedge \neg d) \vee (\neg c \wedge d) \vee (a \wedge \neg b)$

Tableaux de Karnaugh(9/10):
Exemple (suite)

- **Exemple 2 (suite):**en utilisant les **tableaux de Karnaugh**, déterminer une formule en **FND équivalente** à la forme R suivante

R		ab			
		00	01	11	10
cd	00	0	0	1	0
	01	1	0	1	1
	11	1	1	1	1
	10	0	0	1	0

R		ab			
		00	01	11	10
cd	00	0	0	1	0
	01	1	0	1	1
	11	1	1	1	1
	10	0	0	1	0

R		ab			
		00	01	11	10
cd	00	0	0	1	0
	01	1	0	1	1
	11	1	1	1	1
	10	0	0	1	0

R		ab			
		00	01	11	10
cd	00	0	0	1	0
	01	1	0	1	1
	11	1	1	1	1
	10	0	0	1	0

- **Rassemblement vert : $a \wedge b$**
- **Rassemblement bleu : $c \wedge d$**
- **Rassemblement orange : $\neg b \wedge d$**

Conclusion: $R = (a \wedge b) \vee (c \wedge d) \vee (\neg b \wedge d)$

Tableaux de Karnaugh (10/10)

- **Exercice:** en utilisant les tableaux de Karnaugh, déterminer une formule en FND équivalente à $p \rightarrow (q \vee r)$

Conclusion:

Méthode des arbres(1/14)

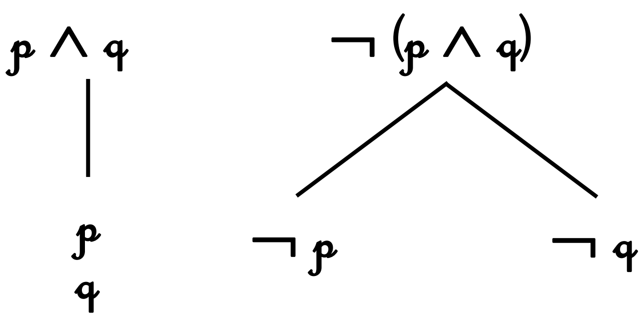
- Ce sont **des arbres** qui peuvent **remplacer les tables de vérité** ou **tables de Karnaugh**, lorsqu'on recherche des distributions de vérité qui rendent une ou plusieurs formules vraies.

- L'appellation «arbres de Beth» est en honneur du logicien néerlandais Evert Willem Beth (1908-1964).

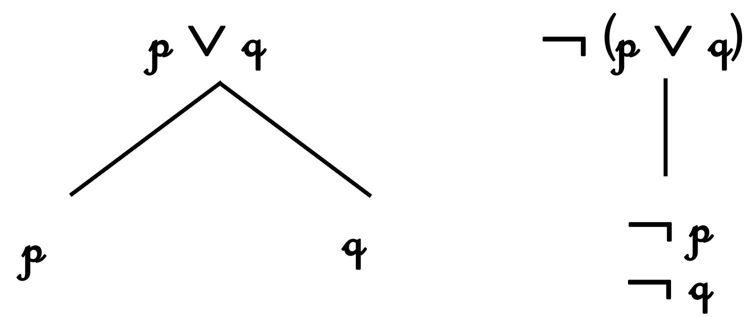
- De **ces arbres on peut également déduire des FND ou FNC** souvent simplifiées par rapport à la méthode des tables de vérité.
- **Etapes**:
  1. on commence l'arbre en plaçant toutes les formules à vérifier sur une branche ;
  2. de façon inductive, on décompose chaque formule grâce aux arbres associés aux opérations de base du calcul des propositions ;
  3. lorsque seul les atomes ou leur négation restent, on a terminé.

Méthode des arbres (2/14)

- **Conjonction et sa négation**
  - **p ∧ q**
  - **¬ (p ∧ q) = (¬p) ∨ (¬ q)**

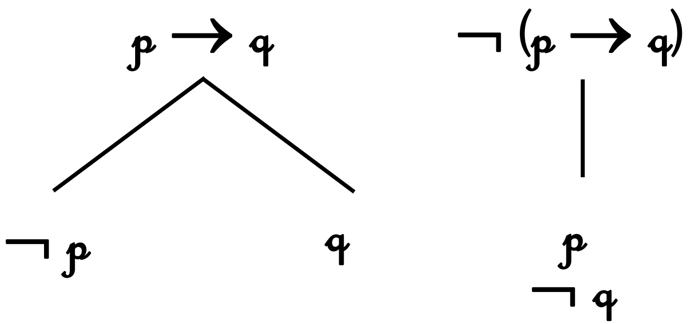


- **Disjonction et sa négation**
  - **p ∨ q**
  - **¬ (p ∨ q) = (¬p) ∧ (¬ q)**

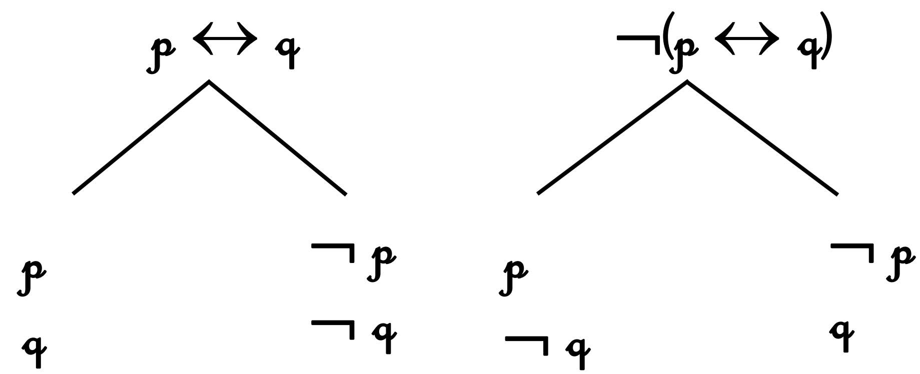


Méthode des arbres(3/14)

- **Implication et sa négation**
  - $p \rightarrow q$
  - $\neg (p \rightarrow q) = \neg((\neg p) \vee q)$
    $= (\neg \neg p) \wedge (\neg q)$
    $= p \wedge (\neg q)$



- **Equivalence et sa négation**
  - $p \leftrightarrow q = (p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q)$
  - $\neg (p \leftrightarrow q) = \neg ((p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p))$
    $= \neg((\neg p) \vee q) \wedge (\neg q) \vee p))$
    $= p \wedge (\neg q)) \vee q \wedge (\neg p)$



Méthode des arbres(4/14)

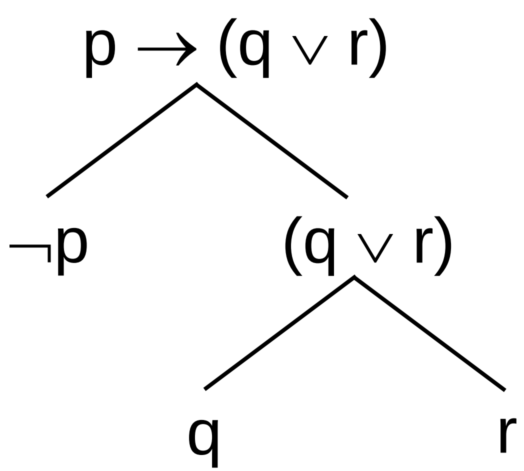
- **Récapitulatif des règles**

Conjonction	Disjonction	Implication	Equivalence
$p \wedge q$ p q	$p \vee q$ p q	$p \rightarrow q$ $\neg p$ q	$p \leftrightarrow q$ p $\neg p$ q $\neg q$
NON Conjonction	**NON Disjonction**	**NON Implication**	**NON Equivalence**
$\neg(p \wedge q)$ $\neg p$ $\neg q$	$\neg(p \vee q)$ $\neg p$ $\neg q$	$\neg(p \rightarrow q)$ p $\neg q$	$\neg(p \leftrightarrow q)$ p $\neg p$ $\neg q$ q

Méthode des arbres(6/14):

Exemples

- **Exemple 1:**
  - En utilisant **la méthode des arbres** déterminer une formule en forme normale disjonctive équivalente à $p \rightarrow (q \vee r)$;
- **Correction**



Note: L'arbre est fini quand on ne trouve plus aux extrémités inférieures des branches que des formules atomiques ou des négations de formules atomiques.

- **forme normale disjonctive :** $\neg p \vee q \vee r$
  - $p \rightarrow (q \vee r)$ est vrai lorsque $\neg p$ est vrai **ou** q est vrai **ou** r est vrai;

Méthode des arbres(8/14):
Exemples (suite)

- **Exemple 2:**
  - En utilisant **la méthode des arbres** déterminer une formule en FND équivalente à $p \wedge (\neg p \leftrightarrow q)$;
- **Correction**
  - **Etape 1:** Cet énoncé est vrai si et seulement si p est vrai **et** ($\neg$ p $\neg$ q) est vrai.

$$p \wedge (\neg p \leftrightarrow q)$$

$$|$$

$$p$$

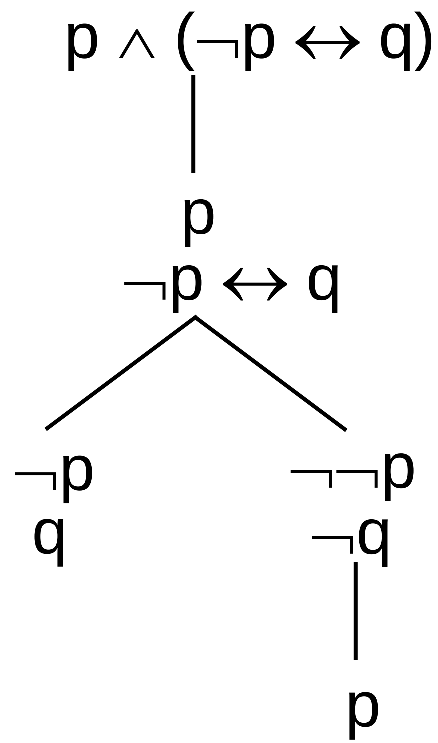
$$\neg p \leftrightarrow q$$

Méthode des arbres(9/14):
Exemples (suite)

- **Exemple 2 (suite):**
- **Correction**
  - **Etape 1:**
  - **Etape 2:** (¬ p ↔ q) est vrai si et seulement si (¬ p est vrai **et** q est vrai **ou** ¬ p est faux q est faux.

Note: ¬p est faux et q est faux si et seulement si ¬¬p est vrai et ¬q est vrai

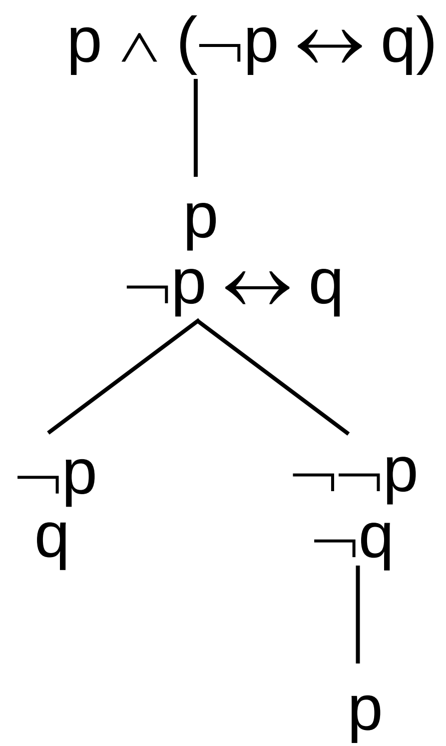
- **Etape 3:** ¬¬p est vrai si et seulement si p est vrai.



Méthode des arbres(10/14):

Exemples (suite)

- **Exemple 2 (suite):**
- **Correction**
  - Quand on regarde cet arbre-là, on peut le lire comme étant la disjonction de deux conjonctions : $(p \wedge \neg p \wedge q)$ **avec** $(p \wedge \neg q \wedge p)$

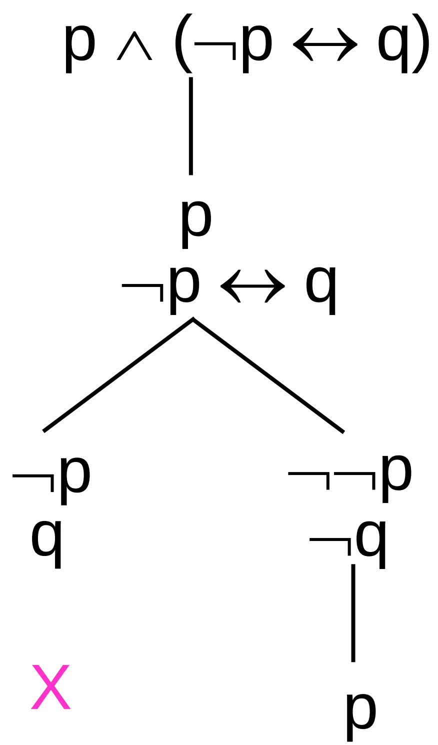


- **Conclusion 1:** $(p \wedge \neg p \wedge q) \vee (p \wedge \neg q \wedge p)$ est une FND de $p \wedge (\neg p \leftrightarrow q)$

Méthode des arbres (11/14):
Exemples (suite)

- **Exemple 2 (suite):**
- **Correction**

Quand il y a une **contradiction** sur une branche **($p \land \neg p \land q$)** on marque une 'X' au bout de la branche et on dit aussi que cette **branche est fermée**.



- **Conclusion 2:** ($p \land \neg q \land p$) est une FND de $p \land (\neg p \leftrightarrow q)$

Méthode des arbres(12/14):

Exemples (suite)

Note: Si un énoncé est une contradiction, alors toutes ces branches seront fermées.

$$(p \vee q) \wedge (\neg p) \wedge (\neg q)$$

$$\neg p$$

$$\neg q$$

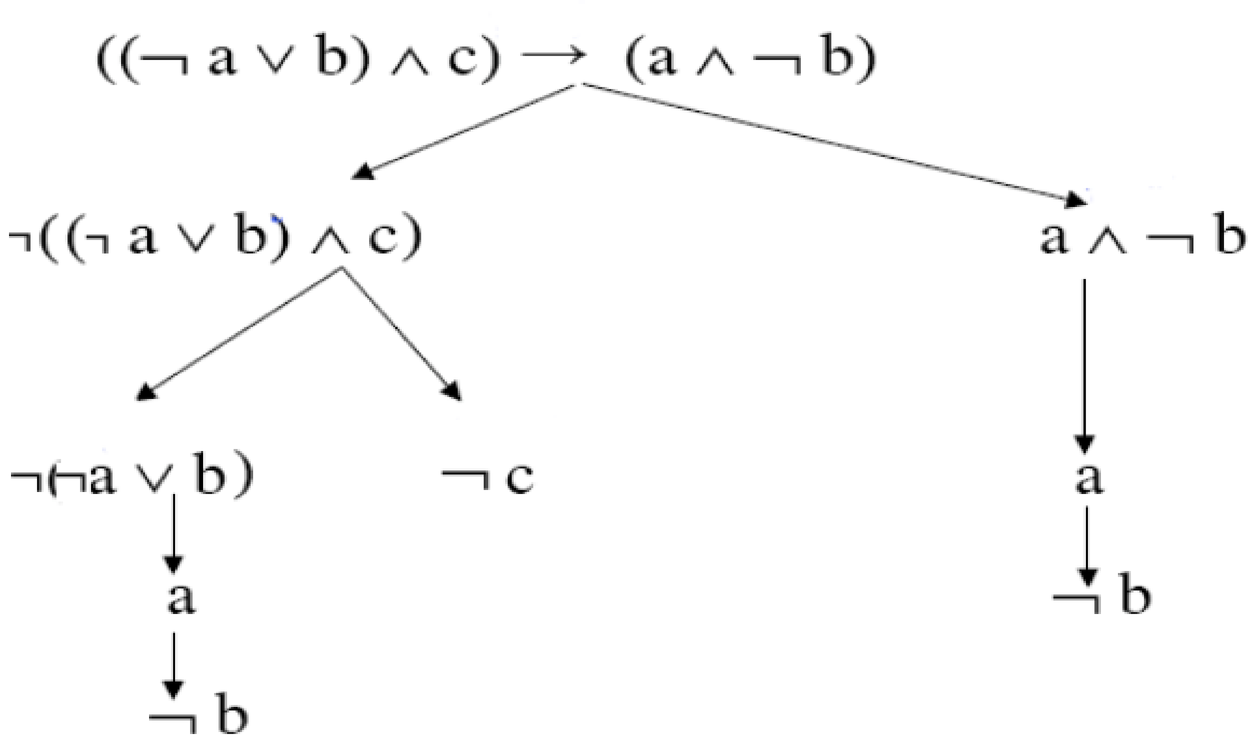
$$(p \vee q)$$

p X q X

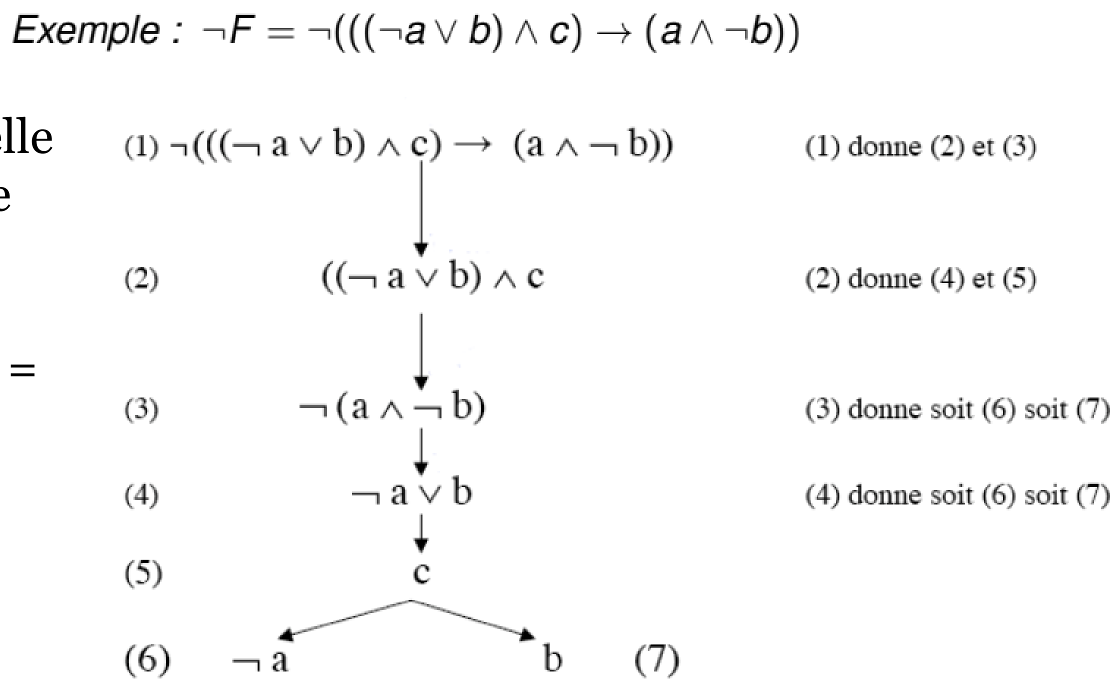
Méthode des arbres(5/14)

Note: On obtient une FNC d'une formule F à partir de la FND de ¬F :

Exemple : $F = ((\neg a \vee b) \wedge c) \rightarrow (a \wedge \neg b)$



Méthode des arbres(7/14):
Exemples (suite)



- **Exemple :**
- On a deux branches : celle de gauche $c \wedge \neg a$ et celle de droite $c \wedge b$.
- D'où la FND de $\neg F$: $\neg F = (c \wedge \neg a) \vee (c \wedge b)$

- On obtient une FNC de la formule F à partir de la FND de ¬F :
  $F = \neg((c \wedge \neg a) \vee (c \wedge b)) = (\neg c \vee a) \wedge (\neg c \vee \neg b)$

Méthode des arbres(13/14)

<u>Exercice :</u>

en utilisant les **la méthode des arbres**, déterminer une formule en FND et une FNC équivalentes à $p \rightarrow (q \wedge r)$

Conclusion:

Méthode des arbres(14/14)

Branches fermées, arbres fermés

- Si une branche comporte une variable propositionnelle **et** sa négation, on dit que l'on a une **branche fermée**.

- Si **toutes** les branches d'un arbre sont fermées, on dit que l'on a un **arbre fermé**.
  - Dans ce cas la formule d'origine **n'est pas satisfaisable** .

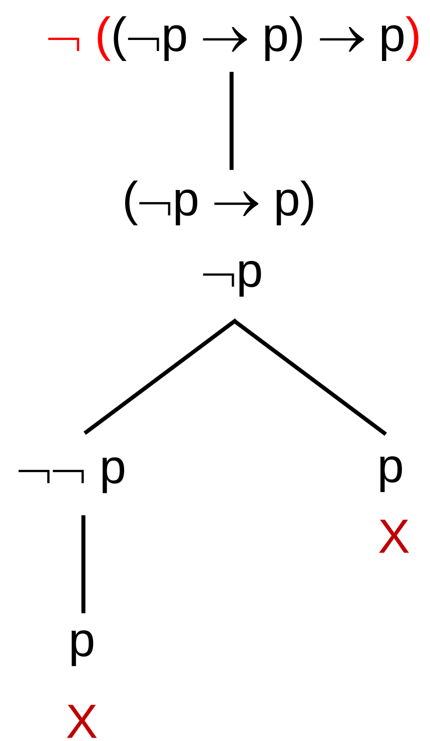
- Ainsi pour montrer qu'une formule F est **tautologique**, il suffit de former un arbre dont l'origine est la formule ¬F : si l'arbre de ¬F est fermé, F est tautologique puisque ¬F n'est pas satisfaisable.

Méthode des arbres et Tautologie (1/3)

- Un énoncé est une **tautologie** quand **sa négation** est une **contradiction**

- **Exemple :** montrer que $(\neg p \rightarrow p) \rightarrow p$ est une tautologie ?

- **Correction**
  - La négation de cet énoncé est bien **une contradiction** car toutes les branches sont fermées. Donc : $(\neg p \rightarrow p) \rightarrow p$ est une **tautologie**.



Méthode des arbres et Tautologie (2/3)

Exercice : pour chaque formule, utiliser la méthode des arbres pour déterminer une **FND et une FNC équivalentes à elle**.

1. $(p \vee q) \to (p \wedge q)$
2. $p \to (p \vee q)$
3. $p \to (p \to q)$
4. $(p \to (\neg p)) \to (\neg p)$
5. $(p \vee q) \leftrightarrow ((p \to q) \to q)$
6. $(p \to q) \to ((q \to r) \to (p \to r))$

Méthode des arbres et Tautologie (3/3)

Exercice : Utiliser la méthode des arbres pour montrer que les formules suivantes sont ou non des tautologies ?

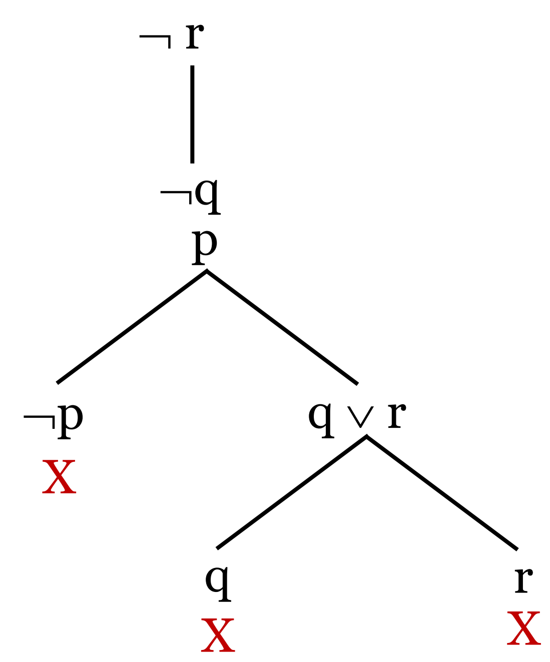
1. $(p \wedge q) \rightarrow p$
2. $(p \wedge q) \rightarrow (p \vee q)$
3. $p \rightarrow ((\neg p) \rightarrow p)$
4. $p \rightarrow (q \rightarrow p)$
5. $p \rightarrow (p \rightarrow p)$
6. $(p \wedge (\neg q)) \vee (p \wedge q)$

Méthode des arbres et Validité des Arguments (1/4)

Remarque: Les arbres nous permettent de **tester la validité des arguments**.

- **Exemple 1 : $p \rightarrow (q \vee r), \neg q \wedge p \vDash r$**

- Pour savoir si cet argument est valide ou non:
  - **Etape 1**: On écrit la negation de la conclusion de l'argument et les prémisses dans l'ordre suivant :
    1. $\neg r$
    2. $\neg q \wedge p$
    3. $p \rightarrow (q \vee r)$
  - **Etape 2:** On vérifie **si toutes les branches** de l'arbre **sont fermées** ou non
- **Conclusion :** L'argument est valide

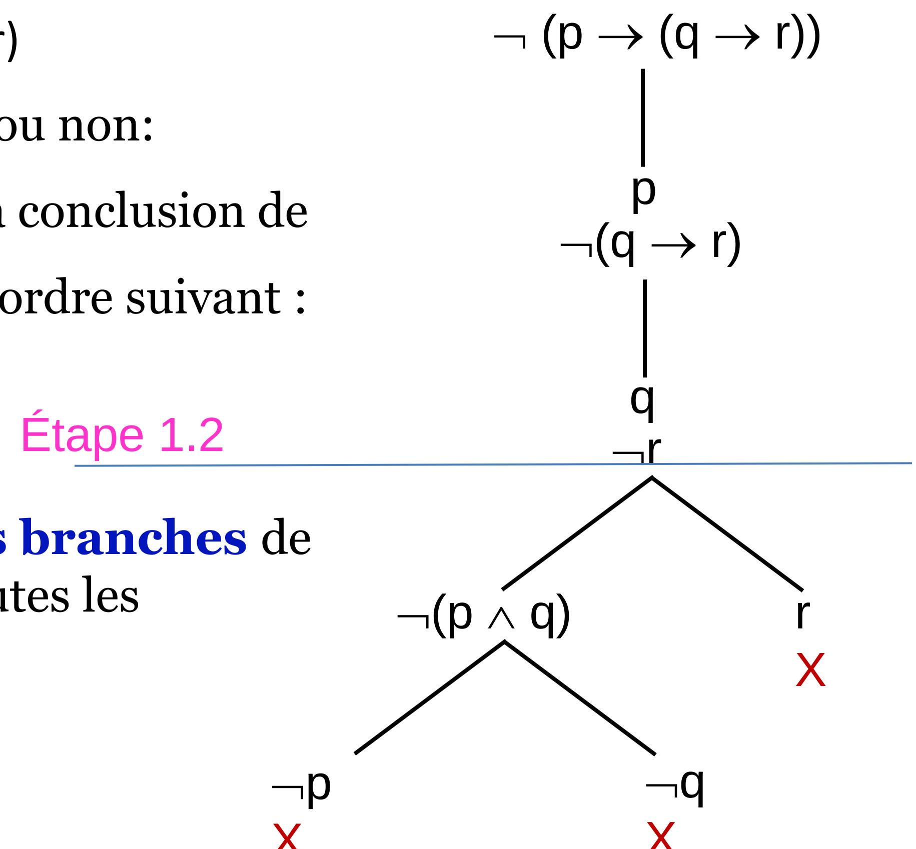


Méthode des arbres et Validité des Arguments (2/4)

Remarque: Les arbres nous permettent de **tester la validité des arguments**.

- **Exemple 2 :** $(p \wedge q) \rightarrow r \models p \rightarrow (q \rightarrow r)$

- Pour savoir si cet argument est valide ou non:
  - **Etape 1**: On écrit la negation de la conclusion de l'argument et les prémisses dans l'ordre suivant :
    1. $\neg (p \rightarrow (q \rightarrow r))$
    2. $(p \wedge q) \rightarrow r$
  - **Etape 2:** On vérifie **si toutes les branches** de l'arbre **sont fermées** ou non. Toutes les branches d'arbres sont fermée
- **Conclusion :** L'argument est valide

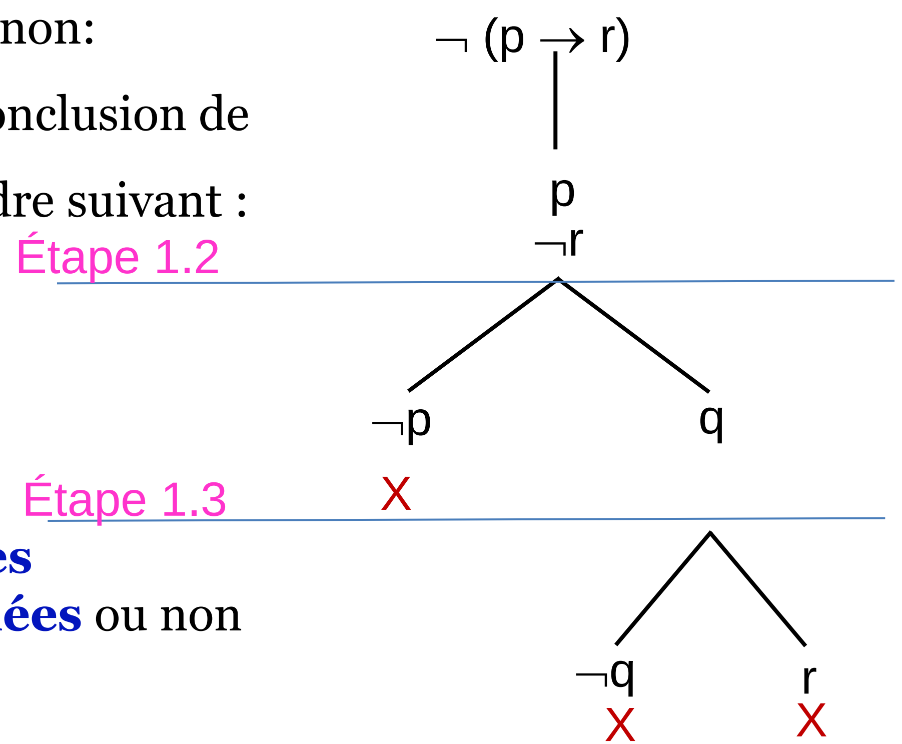


Méthode des arbres et Validité des Arguments (3/4)

Remarque: Les arbres nous permettent de **tester la validité des arguments**.

- **Exemple 3 :**$(q \to r), (p \to q) \vDash p \to r$

- Pour savoir si cet argument est valide ou non:
  - **Etape 1**: On écrit la negation de la conclusion de l'argument et les prémisses dans l'ordre suivant :
    1. $\neg(p \to r)$
    2. $p \to q$
    3. $q \to r$



  - **Etape 2:** On vérifie **si toutes les branches** de l'arbre **sont fermées** ou non
- **Conclusion :** L'argument est valide

Méthode des arbres et Validité des Arguments (4/4)

Exercice **:** Dans chacun des cas suivants déterminer, par la méthode des arbres, si les arguments sont valides.

1. $p \rightarrow q,\ p \rightarrow \neg q \vDash (\neg p)$
2. $p \leftrightarrow (q \vee r) \vDash ((p \wedge (\neg q)) \rightarrow r)$
3. $p \rightarrow r,\ q \rightarrow r \vDash (p \rightarrow q)$
4. $p \rightarrow (\ q \rightarrow r\ ),\ r \vee (\neg q) \vDash (\neg p)$
5. $p \rightarrow (\ q \rightarrow r\ ),\ q \rightarrow (\ r \rightarrow p\ ) \vDash (p \rightarrow r)$
6. $(p \wedge q) \rightarrow (p \vee q) \vDash p \rightarrow ((\neg p) \rightarrow p)$
7. $(p \rightarrow (\neg q)) \vee (q \rightarrow (\neg p)),\ (p \vee (\neg q)) \wedge ((\neg p) \vee q) \vDash (\neg p) \rightarrow p)$
8. $p \vee (\ \neg (q \wedge r)),\ (\neg p) \rightarrow ((\neg q) \vee r) \vDash (p \vee r) \rightarrow (r \vee (\neg p))$
9. $(p \rightarrow (\neg q)) \vee (q \wedge r) \vDash (p \vee (\neg q)) \rightarrow ((\neg p) \vee r)$
10. $(p \rightarrow (\neg r)) \vee (q \wedge (\neg r)) \vDash (p \rightarrow q) \rightarrow ((q \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow r))$

Fin

aljia.bouzidi95@gmail.com