Institut Supérieur d'Informatique et de Mathématiques de Monastir

Cours : Logique Formelle

Chapitre 3:
La Logique des Prédicats du Premier Ordre

Enseignante: Dr. Aljia BOUZIDI
aljia.bouzidi95@gmail.com

1ère Licence en Sciences d'Informatique
Année Universitaire :2024-2025

Objectifs

- Comprendre la logique des prédicats
- Savoir différencier entre le calcul propositionnel et le calcul des prédicats
- Connaitre les quantificateurs logiques
- Savoir les formule normales les plus usuelles
- Savoir normaliser des formules bien formées

Contenu du chapitre 3

1. **Partie 1**: Introduction à La Logique des Prédicats
2. **Partie 2:** Formalisation du Langage Naturel
3. **Partie 3:** Syntaxe du Calcul des Prédicats Formalisation du Langage Naturel
4. **Partie 4:** Sémantique du Calcul des Prédicats
5. **Partie 5:** Normalisation Des Formules

Institut Supérieur d'Informatique et de Mathématiques de Monastir

Partie 1: Introduction à La Logique des Prédicats

Contenu de la Partie 1

1. Limites de la Logique Propositionnelle
2. Prédicat
3. La Logique des Prédicats
4. Poids d'un Prédicat

Limites de la Logique Propositionnelle (1/4)

- La logique propositionnelle qui nous a permis de mettre au point une première théorie de raisonnement mais elle ne permet pas de formuler tous les raisonnements .

- Il faut aller alors plus loin que le simple calcul des propositions.

- Le calcul propositionnel **se limite** à **fournir** la structure générale ou **le squelette** des raisonnements déductifs.

- **Cependant, il ne donne aucune information sur les entités ou les objets spécifiques qui sont utilisés dans ces déductions.**

Limites de la Logique Propositionnelle (2/4)

Exemple 1:

- {n est un entier naturel pair} n’est pas une proposition
- par contre {5 est un entier naturel pair} est une proposition fausse.

➔À Chaque fois qu’on remplace n par un entier particulier on obtient une proposition

- {n est un entier naturel pair} est un prédicat.

Limites de la Logique Propositionnelle (3/4)

- **Exemple 2**:

Tous les hommes sont mortels
Socrate est un homme
Donc, Socrate est mortel

- Nous avons déjà traduit des énoncés en logique des propositions. Supposons la traduction suivante :

  - Tout homme est mortel est traduit par la proposition **a**.
  - Socrate est un homme est traduit par la proposition **b**.
  - Donc, Socrate est mortel est traduit par la proposition **c**.

- Le problème s'écrit alors, en logique des propositions, $\mathbf{a \land b \to c}$.
- Cette traduction est correcte. Mais elle est de piètre qualité.

Limites de la Logique Propositionnelle (4/4)

Exemple2 (suite)

- Le problème précédent peut être traduit de manière adéquate en logique des prédicats :
  - **Hypothèse 1** : Quelque soit x appartenant au domaine D, si x est un homme, alors x est mortel ($\forall x\ (H(x) \rightarrow M(x))$) ;
  - **Hypothèse 2** : Socrate à la propriété d'être un homme (H(Socrate)) ;
  - **Conclusion :** Socrate à la propriété d'être mortel (M(Socrate)).
- Dans cet exemple, nous avons utilisé
  - deux prédicats (**H et M**),
  - une constante (Socrate),
  - une variable (x)
  - et le quantificateur universel ($\forall$).
- Comme nous le plus tard, ce raisonnement, ainsi formalisé en logique des prédicats, sera valide.

Prédicat (1/3) : Définition

- C'est une **formule logique** qui **dépend d'une variable libre**.
- un prédicat c'est une affirmation **qui porte sur des symboles représentant des éléments variables d'un ensemble fixe**.

  - Puisqu'un prédicat dépend d'une variable x, nous les noterons souvent **P(x)**;
  - C'est une application qui associe une proposition P(x) à chaque élément d'un ensemble **E**, cette ensemble s'appelle l'**univers** du prédicat
  - Dans le cas de l'exemple1 **E = n**

Prédicat (2/3)

Exemples:

- L'énonce suivant: **P(n)= « n est un multiple de 2 »** est un prédicat car il devient une assertion quand on donne une valeur à **n**.
    - P (**10**)= « **10** est un multiple de 2 » est une assertion vraie
    - P(**11**)= « **11** est un multiple de 2 » est une assertion fausse

- L'énoncé suivant : **P(x, A)= « x ∈ A »** est un prédicat à **deux variables**.
    - P (1, $\mathbb{N}$) est une assertion vraie
    - P$\sqrt{2}$, $\mathbb{Q}$) est une assertion fausse

Remarque: Une assertion peut s'interpréter comme un prédicat sans variable, c'est-à-dire comme un prédicat toujours vrai ou toujours faux

La Logique des Prédicats: Objectifs

- La logique des prédicats a pour but **de généraliser la logique des propositions**. On peut considérer un **prédicat** comme un **énoncé général** où **apparaissent des variables**.
- **Par exemple**:

  (1) « X est la sœur de Y »

  (2) « si X est le père de Y et Y le père de Z alors X est le grand père de Z »

  Si l'on remplace toutes les variables d'un prédicat par des valeurs définies on obtient une proposition à la quelle on pourra associer une interprétation (vrais, faux),

  Par exemple :

  X= Rim et Y = Ali

  dans (1) donne « Rim est la sœur de Ali »

Un prédicat représente donc potentiellement une classe de propositions.

Dans la logique du prédicat, on s'intéresse aux quantificateurs

Poids d'un Prédicat (1/3)

- Le **nombre des variables** d'un prédicat s'appelle **poids du prédicat**.
  - **Exemple** : p (a, b) = { le couple d'entiers naturels (a, b) tel que a+b=10}
    - si l'univers du prédicat est N^2 alors **son poids** est égal à 2
    - si l'univers du prédicat est N alors son poids est égal à 1

- Dans un prédicat de poids ***n***, si l'on affecte une valeur à l'une des variables, on obtient un prédicat de poids ***n-1***.

- Par conséquent, un **prédicat** de **poids *0*** est une **proposition**.

- Les **prédicats** qui portent sur le **même univers** peuvent être **combinés** entre eux à l'aide des connecteurs logiques ($\neg, \vee, \wedge, \rightarrow$ et $\leftrightarrow$) pour former de nouveau prédicat.

Poids d’un Prédicat (2/3)

- Le prédicat **¬ p (x)** associe à **x** la **négation du prédicat p(x)**
- Le prédicat **p ∧ q (x)** associe à x la **conjonction des prédicats p(x) et q(x)**

  on notera aussi (p ∧ q) (x)
- Le prédicat **p ∨ q (x)** associe à x la **disjonction des prédicats p(x) et q(x)**

  on notera aussi (p ∨ q) (x)

  - **Exemple** : même univers N

    p(n) = {l’entier naturel n est pair}; q(m) = {l’entier naturel m est divisible pas 5}

    - ¬ p(n) = {l’entier naturel n est impair}
    - p ∧ q (n) = {l’entier naturel n est pair, et il est divisible par 5}   (poids 1)
    - p ∨q (n) = {l’entier naturel n est pair, ou il est divisible par 5}   (poids 1)

Attention : si l’univers est N^2 (poids 2), il ne faut pas confondre p ∧ q (n) avec S (n,m) = {l’entier naturel n est pair et l’entier naturel m est divisible par 5}

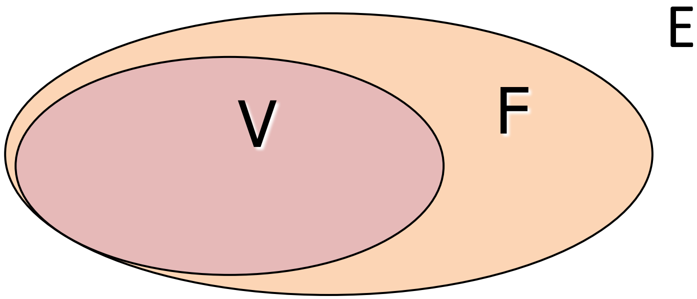
Institut Supérieur d'Informatique et de Mathématiques de Monastir

Partie 3: Formalisation du Langage Naturel

Contenu de la Partie 2

1. Introduction
2. Quantificateurs Logiques

- Soit P un prédicat de poids 1 sur l'univers E. Comme ce prédicat associe une proposition P(x) à tout élément x de E, on peut trier les élément de E en deux sous ensembles, ceux pour lesquelles P(x) est vraie et ceux pour qui elle est fausse.



  - Donc soit l'application v : E $\longrightarrow$ {V , F }
  - X $\longrightarrow$ P(x)
  - Ce tri revient à regrouper les éléments de E pour qui v (x) = V et ceux pour qui v (x) = F

<u>**Exemple**</u> **:**

- Soit le prédicat P(n) = { l'entier naturel n est pair }
  - ∀n P(n) est une proposition fausse car on lit : « tout entier naturel est pair »
  - ∃n P(n) est une proposition vraie car on lit : « il existe un entier naturel pair »

Quantificateurs Logiques (1/7)

- **Selon Aristote:**
  - les jugements attributifs peuvent varier en quantité:
  - **Exemple**:
    - tous les hommes sont mortels (= **jugement universel**)
    - certains hommes sont chauves (=**quantité différente**)

Les jugements varient par la quantité.

- Les différents connecteurs vus dans le chapitre précédant ne peuvent pas représenter la **quantification.**

C'est pour cette raison que deux nouveaux symboles sont introduits dans la logique des Prédicats: **ce sont des quantificateurs logiques**.

Quantificateurs Logiques (2/7)

- L'affirmation « l'ensemble des x pour lesquels P(x) est vraie est E tout entier » est une proposition ; on la note ∀x P(x)

➡ on lit : quelque soit x la proposition P(x) est vrai

∀ : **quantificateur universel**

- L'affirmation « l'ensemble des x pour lesquels P(x) est vraie n'est pas vide » est une proposition ; on la note ∃x P(x)

➡ on lit : il existe x tel que P(x) est vraie

∃ : **quantificateur existentiel**

Quantificateurs Logiques (3/7) :
Le quantificateur existentiel

- Un quantificateur **existentiel** ou **particulier** signifie : « **il existe** » ou plus précisément : « **il existe au moins un** » et est noté ∃.
- On peut écrire : **$\exists x P(x)$**
- Et on doit comprendre :
  - « il existe **au moins un x** tel que P(x) soit « vrai » (ou faux). revient à considérer que P(a1) ∨· · · ∨P(an) est vrai (ou faux), si {a1, . . . , an} est le domaine de x
- On peut écrire aussi : **$\exists ! x P(x)$**
- Et on doit comprendre :
  - « il existe **un et un seul** x tel que P(x) soit « vrai » ou « faux ».
- **Exemples**:
  - « **il existe** un élève de classe qui est une fille »
  - « **il existe** un élève de la classe qui n'est pas une fille »
  - Le prédicat quantifié : « $\exists\ x \in \mathbb{R}\ x^2=4$ » est vraie
  - Le prédicat quantifié : « $\exists\ !x \in \mathbb{R}\ \ln(x) = 1=4$ » est vraie

Quantificateurs Logiques (4/7) :
Le quantificateur universel

- Un quantificateur **universel** signifie : «**quelque soit**» et est noté ∀.
- On écrit : **∀xP(x)**
- Et on doit comprendre :
  - « quelque soit **x**, P(x) soit « vrai » (ou faux). revient à considérer que P(a1)∧· · · ∧P(an) est vrai (ou faux), si {a1, . . . , an} est le domaine de x
- **Exemples**:
  - « **tous** les élèves de baccalauréat passent un examen principal »
  - « **aucun** lapin ne porte de lunettes »
  - « ∀ x∈ $[-3,1]$ x^2 +2x-3≥0 » est vraie
  - « ∀ x∈ ℕ (x-3) n>0» est fausse

Remarque : si «∃ x ∈P(x) » est vrai alors «∃x ∈P(x) » est vrai

Quantificateurs Logiques (5/7)

Exercice d'application

Soit les prédicats : $H(x) = \{ x \text{ est un homme} \}$

$M(x) = \{ x \text{ est méchant} \}$

Formuler les affirmation suivantes:

- «C'est faux que tout les hommes sont méchants »:

  $\neg(\forall x\ (H(x) \rightarrow M(x)))$

- «Seulement les hommes sont méchants » :

  $\forall x\ (M(x) \rightarrow H(x))$

- « Il existe un homme méchant » :

  $\exists x\ \ (H(x) \wedge M(x))$

- « Il n'existe pas d'homme méchant » :

  $\neg\ (\exists x\ \ (H(x) \wedge M(x)))$

Quantificateurs Logiques (6/7)

Remarques

- Soit P un prédicat dont l'univers est E = { $e_1, e_2 , e_3,\ldots.., e_n$}
  - La proposition **∀xP(x)** est **vraie quand** les propositions **P(e_1) , P(e_2),……., P(e_n)** sont **toutes vraies**.

➡ ∀ x P(x) se confond avec la proposition P(e_1) ∧P(e_2) ∧ …… ∧ P(e_n)

  - La proposition **∃ xP(x)** est **vraie** si l'une **au moins** des propositions **P(e_1) , P(e_2),……., P(e_n)** est **vraie**.

➡ ∃xP(x) se confond avec la proposition P(e_1) ∨P(e_2)∨…… ∨ P(e_n)

Quantificateurs Logiques (7/7)

Remarques (suite)

- Soit **P(x,y,z)** un prédicat de **poids 3**
  - **Q(x,z)** = $\exists$y P(x,y,z) est un prédicat de **poids 2**
  - **R(z)** = $\forall$x Q(x,z) = $\forall$x $\exists$ y P(x,y,z) est prédicat de **poids 1**