Chapitre 3 : Equations différentielles

I. Equations différentielles linéaires du 1er ordre

I.1. Définition

On appelle équation différentielle linéaire du 1er ordre l'équation de la forme

$$\boxed{(E) : y' = A(x)y + B(x)}$$

avec A et B sont deux fonctions continues sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.

* On appelle solution de l'équation différentielle (E) toute fonction

$$y : I \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto y(x)$$ dérivable sur I

vérifiant :

$$\forall x \in I, \quad y'(x) = A(x)\,y(x) + B(x).$$

* Résoudre ou Intégrer l'équation (E) c'à.d trouver les solutions de (E).

Exemple.

$$y' = y \qquad \left(\begin{array}{c} A(x) = 1, \; B(x) = 0 \\ I = \mathbb{R} \end{array} \right)$$

$y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$x \mapsto e^x$ est une solution de (E)

On remarque aussi $\forall C \in \mathbb{R}$ (constante)
$y(x) = Ce^x$ est une solution

* Soit (E) : $y' = A(x)y + B(x)$: une équation différentielle linéaire du 1er ordre

* Soit (E_H) : $y' = A(x)y$ est dite l'équation homogène associée à (E).

* Résolution de l'équation homogène (E_H) :

Proposition : Soit l'équation homogène (E_H) : $y' = A(x)y$

Si $F(x)$ désigne la primitive de $A(x)$ sur l'intervalle I.
$\left(F(x) = \int A(x)\,dx\right)$. Alors, les solutions de (E_H) sont de la forme suivante :

$$\boxed{y_H(x) = C\,e^{F(x)} = C\,e^{\int A(x)\,dx}}$$

C c'est une constante de $\mathbb{R}$.

Exemple

Soit (E) : $y' - \left(\frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{x}\right) y = 0$; $x \in]0, +\infty[$

on a $y' = A(x) y + B(x)$ avec

$A(x) = \frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{x}$

et $B(x) = 0$

Donc (E) c'est une équation différentielle linéaire du 1^{er} ordre

Donc les solutions de (E) sont

$$\boxed{y(x) = C\, e^{\int A(x)\,dx}}$$, C constante de $\mathbb{R}$

$* \int A(x)\,dx = \int \frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{x}\,dx$

$= \arctan(x) + \ln(x) + c^{te}$

Donc

$$\boxed{y(x) = C\, e^{(\arctan(x) + \ln(x))}} \quad \forall x \in]0, +\infty[$$

Résolution de l'équation différentielle linéaire du 1^{er} ordre (E)

Proposition. Soit (E) : $y' = A(x) y + B(x)$

Si y_0 est une solution particulière

de (E) sur l'intervalle I. Alors, Toutes les solutions de (E) sont de la forme :

$$\boxed{y(x) = y_0(x) + y_H(x)}$$

$$\boxed{y(x) = y_0(x) + C e^{\int A(x)dx}}$$

* y_H : c'est la solution homogène de (E).
* y_0 : c'est la solution particulière de (E).

Exemple : Résoudre l'équation

(E) : $y' + y = 2e^{x}$

(E) est une équation différentielle linéaire du 1er ordre.

(E) s'écrit $y' = A(x)y + B(x)$

avec $A(x) = -1$ et $B(x) = 2e^{x}$

(E) : $y' = -y + 2e^{x}$

Les solutions de (E) sont

$$\boxed{y(x) = y_0(x) + y_H(x)}$$

avec $\boxed{y_0(x) = e^{x}}$ c'est une solution particulière de (E)

car $(e^{x})' = e^{x}$ et

$(e^{x})' = -e^{x} + 2e^{x}$ mai

Et y_H c'est la solution homogène de (E_H) : $y' = A(x)\,y$

$$y' = -y \quad , \quad A(x) = -1$$

Donc $y_H(x) = C e^{\int A(x)\,dx}$

$$\boxed{y_H(x) = C e^{\int -dx} = C e^{-x}}$$

C : constante de $\mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}$.

Donc les solution de (E) sont

$$\boxed{\begin{aligned} y(x) &= y_0(x) + y_H(x) \\ &= e^{x} + C e^{-x}, \quad \forall x \in \mathbb{R} \end{aligned}}$$

et C constante de $\mathbb{R}$.

Donc

$$\boxed{y(x) = C\, e^{(\arctan(x) + \ln(x))}} \quad \forall x \in]0, +\infty[$$

<u>Résolution de l'équation differentielle linéaire du 1er ordre (E).</u>

<u>Proposition</u>. Soit (E) : $y' = A(x)y + B(x)$

Si y_0 est une solution particulière