ISIM Monastir **Département de Mathématiques**

Devoir surveillé d'Analyse I

les calculatrices, les notes de cours et de TD ne sont pas autorisées

la rigueur des raisonnements ainsi que la clarté et la qualité de la rédaction sont prises en compte dans l'évaluation

Section : *L1 INFO, TIC et EEA* *Durée: 1h*

Exercice 1. Etudier la dérivabilité en 0 des fonctions suivantes

1. $$f(x) = x\,|x|$$

2. $$g(x) = x^{\frac{3}{5}}$$

3. $$h(x) = \cos\left(\sqrt{|x|}\right)$$

Exercice 2.

Soit $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie pour tout $n \in \mathbb{N}$, par: $f_n(x) = \ln(1 + x^n) + x - 1$.

1. Montrer qu'il existe $c_n \in [0, 1]$ tel que $f_n(c_n) = 0$.
2. Montrer que f_n est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$, en déduire que c_n est unique.

Exercice 3.

Soient a et b deux nombres réels tels que $a < b$ et f une fonction de $[a, b]$ dans $[a, b]$. On suppose que pour tout $x, y \in [a, b]$ on a:

$$|f(x) - f(y)| \leq |x - y|$$

Montrer que f est continue sur $[a, b]$. En déduire qu'il existe $x \in [a, b]$ tel que $f(x) = x$.