Séries numériques

Exercice 1.

Déterminer la nature des séries suivantes

$$(1) \sum_{n\geq 1} \frac{n+1}{n^3} \qquad (2) \sum_{n\geq 1} \frac{\cos(n)}{n^2} \qquad (3) \sum_{n\geq 1} \frac{(n+3)\sin(n)}{n(n+1)^2}$$

$$(4) \sum_{n\geq 1} \frac{n+5}{n!(n+4)} \qquad (5) \sum_{n\geq 1} \frac{n^5}{n!} \qquad (6) \sum_{n\geq 1} \frac{(n+2)^5}{n!}$$

$$(7) \sum_{n\geq 1} \frac{\ln(n)}{n^3} \qquad (8) \sum_{n\geq 1} \frac{2-\cos(n)}{\sqrt{n}} \qquad (9) \sum_{n\geq 1} (e^{-n}+1)$$

$$(10) \sum_{n\geq 1} \frac{1}{1+2^n} \qquad (11) \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n} \tan\left(\frac{1}{n}\right) \qquad (12) \sum_{n\geq 1} \ln\left(\left|\cos(\frac{2}{n})\right|\right)$$

$$(13) \sum_{n\geq 1} \frac{2^{-n}}{3^n+2} \qquad (14) \sum_{n\geq 1} \frac{1}{\log(n^2+n+1)} \qquad (15) \sum_{n\geq 1} (\ln(n))^{-n}$$

Correction

1. On a une série à termes positifs. Un équivalent du terme général est $\frac{n+1}{n^3} \sim \frac{n}{n^3} = \frac{1}{n^2}$. Or la série $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$ est une série de Riemann convergente car son paramètre $\alpha = 2 > 1$. Donc d'après le critère par équivalent $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{n+1}{n^3}$ converge.
2. Le terme général de cette série n'est plus toujours positif, mais on peut étudier la convergence absolue. Or
$$\left|\frac{\cos(n)}{n^2}\right| \leq \frac{1}{n^2}.$$
La série $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$ est une série de Riemann convergente car son paramètre $\alpha = 2 > 1$.
Donc d'après le critère par comparaison $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{\cos(n)}{n^2}$ est absolument convergente donc convergente.
3. de même que précedemment on étudie l'absolue convergence de la série.
$$\left|\frac{(n+3)\sin(n)}{n(n+1)^2}\right| \leq \frac{n+3}{n(n+1)^2} \tag{1}$$

Or $\sum \frac{n+3}{n(n+1)^2}$ est une série à termes positifs et son terme général vérifie $\frac{n+3}{n(n+1)^2} \sim \frac{n}{n.n^2} = \frac{1}{n^2}$ Or la série $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$ est une série de Riemann convergente car son paramètre $\alpha = 2 > 1$. Donc d'après le critère par équivalent $\sum \frac{n+3}{n(n+1)^2}$ converge.

Par le critère par comparaison, du fait que la série de terme général $\frac{n+3}{n(n+1)^2}$ converge, $\sum\limits_{n\geq 1} \dfrac{(n+3)\sin(n)}{n(n+1)^2}$ converge absolument, donc converge.

4. On a une série à terme positif. Du fait de la présence de la factorielle, on choisit d'appliquer le critère de d'Alembert pour les séries numériques. On note $u_n = \frac{n+5}{n!(n+4)}$et on calcule

$$\begin{aligned} \frac{u_{n+1}}{u_n} &= \frac{n+1+5}{(n+1)!(n+1+4)} \times \frac{n!(n+4)}{n+5} \\ &= \frac{(n+6)(n+4)}{(n+1)(n+5)^2} \end{aligned}$$

On voit que $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{n^2(1+\frac{6}{n})(1+\frac{4}{n})}{n^3(1+\frac{1}{n})(1+\frac{5}{n})^2} = \dfrac{(1+\frac{6}{n})(1+\frac{4}{n})}{n(1+\frac{1}{n})(1+\frac{5}{n})^2}$. Donc $\frac{u_{n+1}}{u_n} \to 0 < 1$. Donc d'après le critère de d'Alembert $\sum u_n$ converge.

5. On a une série à terme positif. Du fait de la présence de la factorielle, on choisit d'appliquer le critère de d'Alembert pour les séries numériques. On note $u_n = \frac{n^5}{n!}$et on calcule

$$\begin{aligned} \frac{u_{n+1}}{u_n} &= \frac{(n+1)^5}{(n+1)!}\frac{n!}{n^5} = \frac{(n+1)^5}{n^5(n+1)} \\ &= \frac{(1+\frac{1}{n})^5}{n+1} \end{aligned}$$

On voit que $\frac{u_{n+1}}{u_n} =\to 0 < 1$. Donc d'après le critère de d'Alembert $\sum u_n$ converge.

6. On applique une nouvelle fois le critère de d'Alembert en posant $u_n = \frac{(n+2)^5}{n!}$ on calcule

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n+1+2)^5}{(n+1)!}\frac{n!}{(n+2)^5} = \frac{(n+3)^5}{(n+2)^5}\frac{1}{n+1}$$

Or comme précédemment on a $\frac{(n+3)^5}{(n+2)^5} \to 1$ et donc $\frac{u_{n+1}}{u_n} \to 0 < 1$.

Par le le critère de d'Alembert pour les séries numériques $\sum u_n$ converge.

7. On a $\ln(n) \leq n$ et donc pour tout $n \geq 1$ $\frac{\ln(n)}{n^3} \leq \frac{n}{n^3} = \frac{1}{n^2}$. Or la série $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$ est une série de Riemann de paramètre $\alpha = 2 > 1$, donc elle converge.

Donc par le critère par comparaison $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{\ln(n)}{n^3}$ converge.

8. On a

$$\begin{array}{rll} -1 & \leq \cos(n) & \leq 1 \\ -1 & \leq -\cos(n) & \leq 1 \\ 2-1 & \leq 2-\cos(n) & \leq 1+2 \\ 1 & \leq 2-\cos(n) & \leq 3 \\ \dfrac{1}{\sqrt{n}} & \leq \frac{2-\cos(n)}{\sqrt{n}} & \leq \dfrac{3}{\sqrt{n}} \end{array}$$

On a donc le terme général de la série qu'on étudie qui est positif d'une part.

D'autre part $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{1}{\sqrt{n}}$ est une série de Riemann de paramètre $\alpha = \frac{1}{2} < 1$, donc elle diverge.

Donc par le critère par comparaison des séries à terme positif la série $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{2-\cos(n)}{\sqrt{n}}$ diverge.

9. Pour $n \to +\infty$ $e^{-n} + 1 \to 1$ car $e^{-n} \to 0$.

Donc le terme général de cette série ne tend pas vers 0. Donc la série diverge.

10. On a pour tout n $0 \leq \frac{1}{1+2^n} \leq \frac{1}{2^n} = 2^{-n}$. La série $\sum\limits_{n\geq 0} 2^{-n}$ est une série géométrique de paramètre $r = 2^{-1} = \frac{1}{2} < 1$, donc elle converge.
Par le critère par comparaison des séries à terme général positif, $\sum\limits_{n\geq 0} \frac{1}{1+2^n}$ converge.

11. pour x au voisinage de 0 on a $\tan(x) \sim x$, donc $\tan\left(\frac{1}{n}\right) \sim \frac{1}{n}$ et donc $\frac{1}{n}\tan\left(\frac{1}{n}\right) \sim \frac{1}{n^2}$.

Or la série $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$ est une série de Riemann de paramètre $\alpha = 2 > 1$, donc elle converge.
Par le critère par équivalent des séries à terme général positif, $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{1}{n}\tan\left(\frac{1}{n}\right)$ converge.

12. pour x proche de 0 on a $\cos(x) - 1 \sim \frac{-x^2}{2}$ et on a aussi $\ln(f(x)+1) \sim f(x)$ si $f(x)$ est proche de 0.

Or on peut écrire $\ln\left|\cos(\frac{2}{n})\right| = \ln\left|\cos(\frac{2}{n}) - 1 + 1\right|$. Comme $\frac{2}{n} \to 0$ on a donc $\cos(\frac{2}{n}) - 1 \sim \frac{-2}{n^2}$.

Pour n assez grand $\cos(\frac{2}{n}) - 1 + 1 \sim 1 - \frac{2}{n^2} > 0$, donc on peut enlever les valeurs absolues.

Donc vu que $\frac{-2}{n^2} \to 0$ on a

$$\begin{array}{rcl} \ln\left|\cos(\dfrac{2}{n})\right| & = & \ln\left|\cos(\dfrac{2}{n}) - 1 + 1\right| \\ & \sim & \cos(\dfrac{2}{n}) - 1 \sim -\dfrac{2}{n^2} \end{array}$$

Or la série $-2\sum\limits_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$ est une série de Riemann de paramètre $\alpha = 2 > 1$, donc elle converge.

Par le critère par équivalent des séries à terme général de signe constant (ici le terme général est négatif), $\sum_{n\geq 1} \ln\left|\cos(\frac{2}{n}) - 1 + 1\right|$ converge.

13. On peut majorer $\frac{2^{-n}}{3^n+2} < \frac{2^{-n}}{3^n} = 2^{-n}3^{-n} = 6^{-n}$. Or la série $\sum_{n\geq 0} 6^{-n}$ est une série géométrique de paramètre $r = 6^{-1} = \frac{1}{6} < 1$. Donc elle converge.

    Par le critère par comparaison des séries à terme général positif la série $\sum_{n\geq 0} \frac{2^{-n}}{3^n+1}$ converge.

14. Remarquons que pour n assez grand on a $\ln(n^2+n+1) \leq n$. En effet on a $\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln(n^2+n+1)}{n} = 0$ car la puissance de n l'emporte sur ln.

    Donc on a $\frac{1}{\ln(n^2+n+1)} \geq \frac{1}{n}$.
    Or $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}$ diverge car c'est une série de Riemann de paramètre $\alpha = 1$, donc par le critère par comparaison des séries à terme général positif, $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{\ln(n^2+n+1)}$ diverge.

15. On utilise ici le critère de Cauchy. En effet en posant $u_n = (\ln(n)^{-n}$ on a $u_n^{1/n} = \ln(n)^{-1} \to 0$.

    Donc le critère de Cauchy pour les séries à terme général positif donne que $\sum_{n\geq 2} \ln(n)^{-n}$ converge.

Exercice 2.

On fixe $\alpha \in \mathbb{R}$.

Indiquer en fonction de α si les séries suivantes convergent absolument en distinguant selon les valeurs du paramètre α.

$$(1) \sum_{n\geq 0} 2^{-n}e^{in\alpha} \qquad (2) \sum_{n\geq 1} \frac{2^n}{n^2\sin^{2n}(\alpha)} \qquad (3) \sum_{n\geq 1} \frac{n}{1+n^3\alpha}$$

$$(4) \sum_{n\geq 1} e^{n(\alpha-n)} \qquad (5) \sum_{n\geq 1} ne^{-n\alpha} \qquad (6) \sum_{n\geq 1} \frac{\alpha^2+n}{n^2}$$

1. On regarde la convergence absolue de la série. On a $|2^{-n}e^{in\alpha}| = 2^{-n}$. C'est le terme général d'une série géométrique de paramètre $r = 2^{-1} = \frac{1}{2} < 1$, et donc elle converge. Donc $\sum_{n\geq 0} 2^{-n}e^{in\alpha}$ converge absolument.

    Donc $\sum_{n\geq 0} 2^{-n}e^{in\alpha}$ converge pour toute valeur de α.

2. Si $\sin(\alpha) = 0$ alors le terme général de la série n'est pas défini, donc si $\alpha = k\pi$ pour $k \in \mathbb{Z}$ le terme général n'est pas défini.

    D'autre part appliquons maintenant le critère de Cauchy et calculons en posant $u_n = \frac{2^n}{n^2\sin^{2n}(\alpha)} > 0$ la limite de $u_n^{1/n}$.

ici le

On a $u_n^{1/n} = \frac{2}{n^{2/n}\sin^2(\alpha)}$. Or $n^{2/n} = e^{2\frac{\ln(n)}{n}} \to e^0 = 1$.

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n^{1/n} = \frac{2}{\sin^2(\alpha)}$. Or comme $0 \leq \sin^2(\alpha) \leq 1$ on a $\frac{2}{\sin^2(\alpha)} \geq 2 > 1$.

Par le critère de Cauchy la série diverge donc pour toute valeur de α.

3. — Pour $\alpha = 0$ on a le terme général qui vaut $\frac{n}{1+n^3\alpha} = n \to +\infty$. Donc le terme général ne tend pas vers 0 et la série diverge.
   — Pour $\alpha \neq 0$ on a $\frac{n}{1+n^3\alpha} \sim \frac{n}{\alpha n^3} = \frac{1}{\alpha}\frac{1}{n^2}$.

   Or la série $\frac{1}{\alpha}\sum\limits_{n\geq 1}\frac{1}{n^2}$ est une série du type Riemann de paramètre $\alpha = 2 > 1$, donc elle converge.

   Donc par le critère par équivalent la série $\sum\limits_{n\geq 1}\frac{n}{1+n^3\alpha}$ converge.

4. On applique le critère de Cauchy sur le terme général de cette série en notant $u_n = e^{n(\alpha-n)}$.

   On obtient $u_n^{1/n} = e^{\alpha-n} \to 0$ car $\alpha - n \to -\infty$.

   Donc par le critère de Cauchy $\sum u_n$ converge quelle que soit la valeur de α.

5. De même on applique le critère de Cauchy cette fois sur $u_n = ne^{-n\alpha}$. On a $u_n^{1/n} = n^{1/n}e^{-\alpha}$. Or vu que $n^{1/n} = e^{\frac{\ln(n)}{n}} \to e^0 = 1$ on a $u_n^{1/n} \to e^{-\alpha}$.
   On a donc
   — Pour $\alpha < 0$ alors $e^{-\alpha} > 1$ et la série diverge d'après le critère de Cauchy.
   — Pour $\alpha > 0$ alors $e^{-\alpha} > 1$ et la série converge d'après le critère de Cauchy.
   — Pour $\alpha = 0$ alors $e^{-\alpha} = 1$ et on ne peut pas conclure avec le critère de Cauchy. Cependant on remarque que dans ce cas $u_n = ne^{-n\alpha} = n \to +\infty$, donc la série diverge vu que son terme général ne tend pas vers 0.

6. On a l'équivalent $\frac{\alpha^2+n}{n^2} \sim \frac{n}{n^2} = \frac{1}{n}$. Or la série $\sum\limits_{n\geq 1}\frac{1}{n}$ diverge car c'est une série de Riemann de paramètre $\alpha = 1$.

   Donc par le critère par équivalent $\sum\limits_{n\geq 1}\frac{\alpha^2+n}{n^2}$ diverge.

Séries entières

Exercice 3.

Déterminer le rayon de convergence des séries entières suivantes

$$(1)\sum_{n\geq 1}\frac{z^n}{n^2} \qquad (2)\sum_{n\geq 1} n^n z^n \qquad (3)\sum_{n\geq 1} z^{2n}$$

$$(4)\sum_{n\geq 1}\frac{\ln(n)}{\sqrt{n}}z^n \qquad (5)\sum_{n\geq 1} n(n-1)z^n \qquad (6)\sum_{n\geq 0}\frac{2^n-3^n}{5^n}z^n$$

Correction :

(1) La série est du type $\sum\limits_{n\geq 0} a_n z^n$ avec $a_n = \frac{1}{n^2}$ pour $n \geq 1$ et $a_0 = 0$. Appliquons le critère de d'Alembert pour le calcul du rayon de convergence.

Cela donne

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{1}{(n+1)^2} \times \frac{n^2}{1} = \frac{n^2}{(n+1)^2} = \frac{n^2}{n^2\left(\frac{1}{n}+1\right)^2} = \frac{1}{\left(\frac{1}{n}+1\right)^2}$$

On a $\frac{1}{\left(\frac{1}{n}+1\right)^2} \to 1$ quand $n \to +\infty$.

Donc $\frac{a_{n+1}}{a_n} \to 1$ et $R = 1$.

(2) La série est du type $\sum\limits_{n\geq 0} a_n z^n$ avec $a_n = n^n$ pour $n \geq 1$ et $a_0 = 0$. Appliquons le critère de Cauchy pour le calcul du rayon de convergence.

$$|a_n|^{1/n} = n$$

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} |a_n|^{1/n} = +\infty$ et donc $R = 0$.

(3) La série est du type $\sum\limits_{k\geq 0} a_k z^k$ avec $a_k = 1$ si $k = 2n$ est pair et 0 sinon. Revenons à la définition du rayon de convergence et calculons R tel que si $|z| < R$ alors $\sum\limits_{k\geq 0} a_k z^k$ converge et tel que si $|z| > R$ la série diverge.

Remarquons que à z fixé la série est du type $\sum\limits_{n\geq 1} (z^2)^n$. Il s'agit donc d'une série géométrique de paramètre z^2. Elle converge si et seulement si $|z|^2 < 1$ c'est à dire si et seulement si $|z| < 1$.

Donc si $|z| < 1$ la série converge et si $|z| > 1$ la série diverge. Donc $R = 1$.

(4) La série est du type $\sum\limits_{n\geq 0} a_n z^n$ avec $a_n = \frac{\ln(n)}{\sqrt{n}}$ pour $n \geq 1$ et $a_0 = 0$. Appliquons le critère de d'Alembert pour le calcul du rayon de convergence.

$$\begin{aligned}
\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| &= \frac{\ln(n+1)}{\sqrt{n+1}} \frac{\sqrt{n}}{\ln(n)} \\
&= \frac{\ln(n+1)}{\ln(n)} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}} = \frac{\ln(n(1+\frac{1}{n+1}))}{\ln(n)} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n}\sqrt{1+\frac{1}{n}}} \\
&= \frac{\ln(n) + \ln\left(1+\frac{1}{n+1}\right)}{\ln(n)} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}} \\
&= \left(1 + \frac{\ln\left(1+\frac{1}{n+1}\right)}{\ln(n)}\right) \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}}
\end{aligned}$$

Or $\frac{\ln\left(1+\frac{1}{n+1}\right)}{\ln(n)} \to 0$ quand $n \to +\infty$. Donc $\frac{a_{n+1}}{a_n} \to 1$ quand $n \to +\infty$. Donc $R = 1$.

(5) La série est du type $\sum\limits_{n\geq 0} a_n z^n$ avec $a_n = n(n-1)$ pour $n \geq 1$ et $a_0 = 0$. Appliquons

le critère de d'Alembert pour le calcul du rayon de convergence.

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{(n+1)n}{n(n-1)} = \frac{n+1}{n-1} = \frac{n\left(1+\frac{1}{n}\right)}{n\left(1-\frac{1}{n}\right)} = \frac{1+\frac{1}{n}}{1-\frac{1}{n}}$$

Or $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1+\frac{1}{n}}{1-\frac{1}{n}} = 1$. Donc $R = 1$.

(6) Ici le plus simple est de revenir à la définition. Soit $z \in \mathbb{C}$. Examinons à quelle condition sur $|z|$ la série converge.

On a $\left|\frac{2^n-3^n}{5^n}z^n\right| = \frac{3^n(1-\frac{2^n}{3^n}}{5^n}|z|^n \sim \frac{3^n}{5^n}|z|^n$ quand $n \to +\infty$.

La série $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{3^n}{5^n}|z|^n = \sum\limits_{n\geq 1} \left(\frac{3}{5}|z|\right)^n$ est une série géométrique de paramètre $\frac{3}{5}|z|$ qui converge si et seulement si $\frac{3}{5}|z| < 1$ c'est à dire si et seulement si $|z| < \frac{5}{3}$. Donc $R = \frac{5}{3}$.

Exercice 4.

Calculer le rayon de convergence R de la série $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{z^{2n+1}}{2n+1}$. La série converge-t-elle pour $z = R$?

Correction :

On remarque que la série qu'on examine est en fait la série primitive de $\sum\limits_{n\geq 0} z^{2n}$. Cette série s'écrit aussi $\sum\limits_{n\geq 0} (z^2)^n$. On reconnait une série géométrique de paramètre z^2. Elle converge si et seulement si $|z^2| < 1$, c'est à dire $|z| < 1$. Donc $R = 1$.

Comme les séries dérivée et séries primitives dans le cas des séries entières ont même rayon de convergence on a donc $R = 1$.

Pour $z = R = 1$ on examine donc $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{1}{2n+1}$. C'est une série numérique du type $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$ avec $u_n = \frac{1}{2n+1}$. En particulier le terme général de la série est positif et toujours non nul.

On voit bien que cette série ressemble à une série de Riemann de paramètre $\alpha = 1$, donc surement divergente...

D'après le critère par équivalent on a pour $n \to +\infty$ $\frac{1}{2n+1} \sim \frac{1}{2n}$.

Or $\sum \frac{1}{n}$ diverge car c'est une série de Riemann de paramètre $\alpha = 1$, et donc $\sum \frac{1}{2n}$ diverge, et par le critère par équivalent des séries à terme positif, $\sum \frac{1}{2n+1}$ diverge.

Donc pour $z = R$ la série diverge.