ISIM Monastir
Département de Mathématiques

L1 INF, TIC et EEA

Série d'exercices n°2

Exercice n°1 :

(1) En utilisant la définition du nombre dérivé, déterminer les limites suivantes :

$(i)\ \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{3x+2}-e^2}{x}$, $(ii)\ \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos(x)-1}{x}$, et $(iii)\ \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\ln(2-x)}{x-1}$.

(2) Calculer la dérivée n-ième du fonction $f(x) = xe^x$.

Exercice n°2 :

Soit a et b deux nombres réels. On définit la fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ par

$$f(x) = \begin{cases} ax+b & \text{si } x \leq 0 \\ \dfrac{1}{1+x} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

(1) Donner une condition sur b pour que f soit continue sur $\mathbb{R}$.

(2) Déterminer a et b tels que f soit dérivable sur $\mathbb{R}$ et dans ce cas calculer $f'(0)$.

Exercice n°3 :

Soit $f :]0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ l'application définie par $f(x) = \dfrac{e^x}{x^e}$.

(1) Etudier les variations de f.

(2) Comparer les réels e^π et π^e.

Exercice n°4 :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

(1) Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.

(2) Pour tout $x \neq 0$ calculer $f'(x)$.

(3) Calculer : $\lim\limits_{x\to 0^\pm} f'(x)$. Que peut-on en déduire ?

Exercice n°5 :

(1) A l'aide du théorème des accroissements finis montrer que :

$$\forall\, x, y \in \mathbb{R},\ |\sin(x) - \sin(y)| \leq |x - y|.$$

(2) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose : $u_n = \dfrac{1}{n+1} + \dfrac{1}{n+2} + \dfrac{1}{n+3} + \cdots + \dfrac{1}{2n}$.

(a) En appliquant le théorème des accroissements finis à la fonction ln sur l'intervalle $[n, n+1]$ où $n \in \mathbb{N}^*$, montrer que :

$$\frac{1}{n+1} < \ln(n+1) - \ln(n) < \frac{1}{n}.$$

(b) Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente et déterminer sa limite.

Correction Série 2

Analyse

Ex1 :

Rappel : Le nombre dérivée en x_0 de f :

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0).$$

Ex1 :

1) $$\lim_{x \to 0} \frac{e^{3x+2} - e^2}{x}$$

- $f(x) = e^{3x+2}$; $f(0) = e^2$; $x_0 = 0$
- $f'(x) = 3e^{3x+2}$ $\forall x \in \mathbb{R}$.
- $f'(0) = 3e^2$.

D'où on a $\lim_{x \to 0} \frac{e^{3x+2} - e^2}{x} = f'(0) = 3e^2$.

2) $$\lim_{x \to 0} \frac{\cos(x) - 1}{x}.$$

- $f(x) = \cos(x)$; $x_0 = 0$; $f(0) = \cos(0) = 1$.
- $f'(x) = \sin(x)$; $f'(0) = \sin(0) = 0$

Donc $\lim_{x \to 0} \frac{\cos(x) - 1}{x} = f'(0) = 0$

$f(x) = \ln(2-x)$

$f(x) = \ln(2-x)$; $x_0 = 1$.

$f(1) = \ln(2-1) = \ln(1) = 0$

$f'(x) = \left(\ln(2-x)\right)' = \dfrac{(2-x)'}{2-x} = -\dfrac{1}{2-x}$

Rq $(\ln(u))' = \dfrac{u'}{\ln(u)}$; $u > 0$

$f'(1) = -\dfrac{1}{2-1} = -1$

On a $\lim \dfrac{\ln(2-x)}{x-1} = f'(1) = 1$.

Ex2 :

$$f(x) = \begin{cases} ax+b & \text{si } x \leq 0 \\ \dfrac{1}{1+x} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Continuité en 0 :

- On a $f(0) = a.0 + b = b$
- $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = 1$.
- $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} ax + b = b$

Pour que f est $\mathcal{C}$ en 0 il faut que
$$\lim_{0^+} f(x) = \lim_{0^-} f(x) = f(0) \iff b = 1.$$

* pour $x > 0$ on a $f(x) = \frac{1}{1+x}$ est continue sur 0

$\forall x \in]0,+\infty[$ (car $x \longmapsto x+1$ est $\mathcal{C}$ sur $\mathbb{R}$ en particulier sur $]0,+\infty[$ et comme $x \longmapsto x+1$ ne s'annulle pas sur $]0,+\infty[$ alors $x \longmapsto \frac{1}{x+1}$ est continue sur $]0,+\infty[$.

* pour $x < 0$; on a $f(x) = ax+b$ est $\mathcal{C}$ sur $\mathbb{R}$ car c'est un polynôme en particulier f est $\mathcal{C}$ sur $]-\infty,0[$

<u>On a</u>
$$\left.\begin{array}{l} \cdot\ f \text{ est continue sur }]-\infty,0[\\ \cdot\ f \text{ est } \mathcal{C} \text{ sur }]0,+\infty[\\ \cdot\ f \text{ est } \mathcal{C} \text{ en } 0 \text{ ssi } b=1 \end{array}\right\} \Rightarrow f \text{ est continue sur } \mathbb{R} \text{ ssi } \boxed{b=1}$$

2). $f : x \longmapsto ax+b$ est derivable sur $\mathbb{R}$ en particulier sur $]-\infty,0]$ (fonction polynôme) et $f'(x) = a$; $f'_g(0) = a$.

- $f : x \longmapsto \frac{1}{1+x}$ est derivable sur $]0,+\infty[$ et
$$f'(x) = -\frac{1}{(1+x)^2}.$$

- $$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{1+x}-1}{x}$$
$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{-x}{x(1+x)} = -1$$

2

pour que f soit derivable en 0 il faut que.

$$f'_g(0) = f'_d(0) \Leftrightarrow a = -1$$

$$\left.\begin{array}{l} f \text{ st derivable sur }]-\infty, 0[\\ f \text{ st derivable sur }]0, +\infty[\\ f \text{ st derivable en } 0 \text{ ssi } a=-1 \end{array}\right\} \begin{array}{l} f \text{ st derivable} \\ \text{sur } \mathbb{R} \text{ ssi } b=1 \\ \text{et } a=-1 \\ \text{et } f'(0) = -1. \end{array}$$

Ex3 :

1) $f(x) = \dfrac{e^x}{x^e} = x^{-e} e^x$.

$f'(x) = (x^{-e} e^x)' = -e\, x^{-e-1} e^x + e^x x^{-e}$

$= e^x x^{-e-1} (-e + x)$ $\forall x \in \mathbb{R}^*_+$ $(e^x x^{-e-1} > 0)$

x	0		e		$+\infty$
$f'(x)$	||	$-$	|	$+$	
$f(x)$	||	$\searrow$	$f(e)$	$\nearrow$	

$\forall x \in]0, e[$: $f'(x) < 0$ et f est décroissante et

$\forall x \in]e, +\infty[$: $f'(x) > 0$ et f est croissante.

2) on a $\pi > e$

OR f est croissante sur $]e, +\infty[$ donc

$f(\pi) > f(e)$. $\left(f(e) = \dfrac{e^e}{e^e} = 1\right)$

$\Rightarrow f(\pi) > 1$ $\quad f(\pi) = \dfrac{e^\pi}{\pi^e}$

$\Rightarrow \dfrac{e^\pi}{\pi^e} > 1$

$\Rightarrow \boxed{e^\pi > \pi^e}$

EX4 :

1) pour $x \neq 0$; $x \longmapsto -\frac{1}{x^2}$ est continue sur $\mathbb{R}^*$

$x \longmapsto e^x$ est continue sur $\mathbb{R}$

donc $f : x \longmapsto e^{-1/x^2}$ est continue sur $\mathbb{R}^*$.

continuité en 0 :

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x \neq 0}} e^{-\frac{1}{x^2}} = 0 = f(0).$$

Donc f est continue en 0.

cl f est continue sur $\mathbb{R}$.

$\boxed{\Delta \ (e^u)' = u'e^u}$

2) $x \neq 0 \quad f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$

$$f'(x) = \left(e^{-\frac{1}{x^2}}\right)' = \left(-\frac{1}{x^2}\right)' e^{-\frac{1}{x^2}}$$

$$= \frac{2}{x^3} e^{-\frac{1}{x^2}}.$$

3) $\lim_{x \to 0^\pm} f(x) = ?$

on pose $t = \frac{1}{x}$.

$$f'(t) = 2t^3 e^{-t^2}$$

$\lim_{t \to \pm\infty} 2t^3 e^{-t^2} = 0$ (l'exponentielle l'emporte sur les fonctions polynômes !)

(x) admet une limite en 0 et f est continue en 0

donc f est de classe C^1 en 0, signifie que f est dérivable

en 0 et $f'(0) = 0$

EX5 :

1) la fonction sin est continue dérivable sur $\mathbb{R}$,

on peut appliquer le théorème des accroissements finis

sur $[x,y]$ si $x<y$ (ou sur (y,x) si $y<x$).

il existe $c \in]y,x[$ tq

$$\sin(x) - \sin(y) = \cos(c)(x-y)$$

$f(x) = \sin(x)$
$f'(x) = \cos(x)$
$f'(c) = \cos(c)$

$$|\sin(x) - \sin(y)| = |\cos(c)(x-y)|$$

Soy $|\sin(x) - \sin(y)| = |\cos(c)|\,|x-y|$.

OR $|\cos(c)| \leq 1$. on obtient

$$|\sin(x) - \sin(y)| \leq |x-y|.$$

Rappel : Théorème des accroissements finis :

soit $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ $(a<b)$

$$\left.\begin{array}{l}\bullet\ f \text{ continue sur } [a,b] \\ \bullet\ f \text{ dérivable sur }]a,b[\end{array}\right\} \Rightarrow \exists\, c \in]a,b[\text{ tq } f(b) - f(a) = f'(c)(b-a).$$

a) on a $x \mapsto \ln(x)$ est continue dérivable sur $]0,+\infty[$. En appliquant théorème des accroissement finies sur $[n, n+1]$, il existe $c \in]n, n+1[$ tq.

$$\underline{\ln(n+1) - \ln(n)} = (n+1-n) \times \frac{1}{c} = \frac{1}{c}$$

$f(x) = \ln(x)$
$f'(x) = \frac{1}{x}$
$f'(c) = \frac{1}{c}$

Or $n \geq 1$ et $n < c < n+1$

$$\frac{1}{n+1} < \boxed{\frac{1}{c}} < \frac{1}{n}.$$

donc $$\frac{1}{n+1} < \ln(n+1) - \ln(n) < \frac{1}{n}.$$

b) $$\frac{1}{n+1} < \ln(n+1) - \ln(n) < \frac{1}{n}.$$

$$\frac{1}{n+2} < \ln(n+2) - \ln(n+1) < \frac{1}{n+1}$$

$$\vdots$$

$$\frac{1}{2n} = \frac{1}{n+(n-1)+1} < \ln(n+(n-1)+1) - \ln(n+(n-1)) < \frac{1}{n+(n-1)}$$

On fait maintenant la sommes de ces n inégalités

$$\underbrace{\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n}}_{} < \ln(2n) - \ln(n) < \frac{1}{n} + \underbrace{\frac{1}{n+1} + \cdots \frac{1}{2n-1}}_{}$$

$$u_n < \ln\left(\frac{2n}{n}\right) < \frac{1}{n} + u_n - \frac{1}{2n}$$

on a $U_n < \ln(2)$

$$\ln(2) - \frac{1}{2n} < U_n < \ln(2)$$

$\Rightarrow \ln(2) - \frac{1}{2n} < U_n < \ln(2)$

D'après le thm de Gendarmes on a

$$\lim_{n \to +\infty} U_n = \ln(2)$$