ISIM Monastir — Département de Mathématiques

Examen d'Analyse 2

les calculatrices, les notes de cours et de TD ne sont pas autorisées

la rigueur des raisonnements ainsi que la clarté et la qualité de la rédaction sont prises en compte dans l'évaluation

Section : *L1 INFO et TIC* — *Durée: 1h30min*

Exercice 1.

Soit $I = \int_0^{+\infty} \frac{\ln(t)}{t^2+a^2}dt$ avec $a > 0$.
Pour tout $\epsilon > 0$ et pour tout $X > 0$ on définit:

$$I_{\epsilon,X} = \int_{\epsilon}^{X} \frac{\ln(t)}{t^2+a^2}dt$$

1. Montrer que I est une intégrale convergente.
2. A l'aide du changement de variable $t = \frac{a^2}{x}$, (avec x est un réel strictement positif), montrer que :
$$I_{\epsilon,X} = -\frac{2\ln(a)}{a}\arctan(\frac{a}{X}) + \frac{2\ln(a)}{a}\arctan(\frac{a}{\epsilon}) + \int_{\frac{a^2}{\epsilon}}^{\frac{a^2}{X}} \frac{\ln(t)}{t^2+a^2}dt.$$
3. En faisant tendre ϵ vers 0 et X vers $+\infty$ dans l'équation ci-dessus , en éduire une relation vérifiée par I, puis la valeur de I.

Exercice 2.

Montrer que les séries suivantes sont convergentes:

$$(1)\ \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{n(n+1)(n+2)}$$

$$(2)\ \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n+1}{3^n}.$$