... tique de u

... $t_n)$

$$P_A(x) = \det(A - x I_n)$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11}-x & & & a_{ij} \\ & a_{22}-x & & \\ a_{ij} & & \ddots & \\ & & & a_{nn}-x \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^n x^n + (-1)^{n-1} \operatorname{tr} A \, x^{n-1} + \dots + \det A$$

*/ λ valeur propre de u (λ v.p de u) s'$\exists\, a \in E$, $a \neq 0$ tq $u(a) = \lambda a$.

*/ λ v.p de $u \iff P_u(\lambda) = 0$.

*/ λ v.p de u, $E_\lambda(u) = \operatorname{Ker}(u - \lambda \operatorname{id})$

$= \{x \in E \text{ tq } u(x) = \lambda x\}$

<u>Déf</u> : $u \in \mathcal{L}(E)$ est dit diagonalisable s'il existe une base $B' = (v_1, \dots, v_n)$ de E tq $\operatorname{mat}(u, B') = D$ diagonale.

$$= \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Déf : $A \in \mathcal{M}_n(K)$ est dite diagonalisable si elle est semblable à une matrice diagonale

i.e : $\exists D$ diagonale, $\exists P$ inversible tq

$$A = P \cdot D \cdot P^{-1}.$$

Rque : $u \in \mathcal{L}(E)$ un endom diagble, d'où $\exists B' = (v_1, \dots, v_n)$ base de E tq

$$mat(u, B') = D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

$$D = mat(u, B') = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} u(v_1) & u(v_2) & \cdots & u(v_n) \end{array} \\ \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & & 0 \\ 0 & \lambda_2 & & \vdots \\ \vdots & 0 & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & 0 \\ 0 & 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ v_n \end{array}$$

Ainsi

$$\left. \begin{array}{l} u(v_1) = \lambda_1 v_1 \\ v_1 \neq 0 \end{array} \right\} \Rightarrow v_1 \text{ est un vect propre de } u \text{ associé à la v.p } \lambda_1.$$

Théo: $u \in \mathcal{L}(E)$

u est diagonalisable $\Longleftrightarrow$
$\exists$ une base B' de E formée par des vect propres de u.

Théo: u est diag^{ble} $\Longleftrightarrow$
$n = \dim E =$ Somme des dimensions des sous espaces propres.

$$n = \sum_{\lambda\ v.p\ de\ u} \dim E_\lambda(u)$$

Théo: u est diag^{ble} $\Longleftrightarrow$ le poly caract P_u de u est Scindé sur K et $\forall \lambda$ v.p de u de multi m_λ on a: $\dim E_\lambda(u) = m_\lambda$

Rque: $P \in K[X]$, $\deg P = n \geq 1$

P est Scindé sur K s'il s'écrit:

$$P = (\lambda_1 - X)(\lambda_2 - X)\cdots(\lambda_n - X)$$

avec $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in K$ (non necessairement distincts)

Exp: X^n est Scindé sur $\mathbb{R}$

$X^n = X.X\cdots X$ (n fois).

Exp: Série 4:

EX 1:

1] $u : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$(x, y) \longmapsto (4x - 3y, 2x - y)$.

$u \in \mathcal{L}(E)$, $E = \mathbb{R}^2$.

$Bc = (e_1, e_2)$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$.

$$A = mat(u, Bc) = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

$$P_u(x) = P_A(x) = \det(A - x I_2) = \begin{vmatrix} 4-x & -3 \\ 2 & -1-x \end{vmatrix}$$

$$= (4-x)(-1-x) + 6.$$

$$= x^2 - 3x + 2.$$

$$= \det u$$

$\det u \neq 0 \Rightarrow u$ est inversible.

$$P_u(x) = (x-1)(x-2).$$

$Sp(u) = \{1, 2\}$, 1 v.p simple de u, 2 v.p simple de u.

<u>Prop</u> : si λ est v.p de u de mult m alors $1 \leq \dim E_\lambda(u) \leq m$

Ainsi si λ est v.p simple de u $(m = 1)$ d'où $\dim E_\lambda(u) = 1$.

$P_u(x) = (x-1)(x-2)$ est scindé sur $\mathbb{R}$.

1 est v.p simple de $u \Rightarrow \dim E_1(u) = 1 = m_1$

2 est v.p simple de $u \Rightarrow \dim E_2(u) = 1 = m_2$

d'après le Théo 3, u est diag<u>ble</u>.

Déterminons les sous espaces propres :

$$E_1(u) = \ker(u - id) = \{a = (x,y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tq } u(a) = a\}$$

$$a = (x,y) \in E_1(u) \Leftrightarrow u(a) = a \Leftrightarrow u(x,y) = (x,y)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4x - 3y = x \\ 2x - y = y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ x = y \end{cases} \Leftrightarrow a = (x,y) = (x,x) = x\underbrace{(1,1)}_{V_1}$$

Cl : $E_1(u) = \mathrm{Vect}(V_1)$, $V_1 = (1,1)$.

$$E_2(u) = \mathrm{Ker}(u - 2\,id)$$
$$= \{ a = (x,y) \text{ tq } u(a) = 2 \cdot a \}$$

$a = (x,y) \in E_2(u) \iff u(a) = 2 \cdot a$

$\iff u(x,y) = 2(x,y)$

$\iff (4x-3y,\ 2x-y) = (2x,\ 2y)$

$$\iff \begin{cases} 4x-3y = 2x \\ 2x-y = 2y \end{cases} \iff \begin{cases} 2x = 3y \\ 2x = 3y \end{cases}$$

$\iff a = (x,y) = \left(\frac{3}{2}y,\ y\right)$

$= y\left(\frac{3}{2},\ 1\right)$

$= \frac{1}{2}y\,\underbrace{(3,\ 2)}_{V_2}$

cl : $E_2(u) = \mathrm{Vect}(V_2)$ avec $V_2 = (3,2)$

$B' = (V_1, V_2)$ est une base de $\mathbb{R}^2$ formée par des vect propres de u.

$$\mathrm{mat}(u, B') = \begin{array}{cc} u(V_1) & u(V_2) \\ \left(\begin{array}{c} 1 \\ 0 \end{array}\right. & \left.\begin{array}{c} 0 \\ 2 \end{array}\right) \end{array} \begin{array}{l} V_1 \\ V_2 \end{array} = D$$

$V_1 \in E_1(u) \Rightarrow u(V_1) = V_1$

$V_2 \in E_2(u) \Rightarrow u(V_2) = 2V_2$

on a : $\left.\begin{array}{l} \mathrm{mat}(u, BC) = A \\ \mathrm{mat}(u, B') = D \end{array}\right\} \Rightarrow$

$A = P \cdot D \cdot P^{-1}$

avec $P = \mathrm{pass}(BC, B')$

$$= \begin{array}{cc} V_1 & V_2 \\ \left(\begin{array}{c} 1 \\ 1 \end{array}\right. & \left.\begin{array}{c} 3 \\ 2 \end{array}\right)_{BC} \end{array}$$

A est semblable à D diagonale donc A est diagble.

Exp :

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Diagonaliser A sur $\mathbb{R}$.

$$P_A(x) = \det(A - x I_2) = \begin{vmatrix} 4-x & -3 \\ 2 & 1-x \end{vmatrix}$$

$$= x^2 - 3x + 2$$

$= (x-1)(x-2)$ est Scindé sur $\mathbb{R}$.

1 est v.p simple de $A \Rightarrow \dim E_1(A) = 1 = m_1$

2 est v.p simple de $A \Rightarrow \dim E_2(A) = 1 = m_2$

d'après Théo 3, A est diag^ble sur $\mathbb{R}$.

Déterminons les sous espaces propr's de A.

$$E_1(A) = \mathrm{Ker}(A - I_2)$$

$$= \left\{ X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in M_{2,1}(\mathbb{R}) \text{ tq } A \cdot X = X \right\}$$

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in E_1(A) \Leftrightarrow AX = X \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4x - 3y = x \\ 2x - y = y \end{cases} \Leftrightarrow x = y \Leftrightarrow X = \begin{pmatrix} x \\ x \end{pmatrix} = x \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{w_1}$$

d'où : $E_1(A) = \mathrm{Vect}(w_1)$, $w_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$$E_2(A) = \mathrm{Ker}(A - 2I_2) = \left\{ X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in M_{2,1}(\mathbb{R}) \text{ tq } AX = 2X \right\}$$

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in E_2(A) \Leftrightarrow AX = 2X \Leftrightarrow \begin{cases} 4x - 3y = 2x \\ 2x - y = 2y \end{cases} \Leftrightarrow 2x = 3y$$

$$\Leftrightarrow X = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} y \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{2} y \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} y w_2,$$

$E_2(A) = \mathrm{Vect}(w_2)$, $w_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$.

$$A = P \cdot D \cdot P^{-1}$$

avec $D = \begin{array}{cc|c} AW_1 & AW_2 & \\ \hline \multicolumn{2}{c|}{\begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix}1\\0\end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix}0\\2\end{matrix}} \end{pmatrix}} & \begin{matrix}W_1\\W_2\end{matrix} \end{array}$

et $P = \begin{array}{cc} W_1 & W_2 \\ \multicolumn{2}{c}{\begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix}1\\1\end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix}3\\2\end{matrix}} \end{pmatrix}_{B_c}} \end{array}$

$W_1 \in E_1(A) \Leftrightarrow AW_1 = W_1$

$W_2 \in E_2(A) \Leftrightarrow AW_2 = 2W_2$

Rque :

$$A = P \cdot D \cdot P^{-1}$$

$D = \begin{array}{cc|c} AW_2 & AW_1 & \\ \hline \multicolumn{2}{c|}{\begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix}2\\0\end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix}0\\1\end{matrix}} \end{pmatrix}} & \begin{matrix}W_2\\W_1\end{matrix} \end{array}$

Ainsi $P = \begin{array}{cc} W_2 & W_1 \\ \multicolumn{2}{c}{\begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix}3\\2\end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix}1\\1\end{matrix}} \end{pmatrix}_{B_c}} \end{array}$

Exp : $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

$$P_A(x) = \det(A - x I_2) = \begin{vmatrix} -x & -1 \\ 1 & -x \end{vmatrix} = x^2 + 1$$

P_A n'est pas scindé sur $\mathbb{R}$

$\Longrightarrow A$ n'est pas diag^{ble} sur $\mathbb{R}$.

P_A est scindé sur $\mathbb{C}$

$P_A = (x - i)(x + i)$

i et $-i$ sont les v.p de A et ce sont des v.p simples.

A est diag^{ble} sur $\mathbb{C}$.

Prop : Condition suffisante de diag^ble

Soit $A \in \mathcal{M}_n(K)$

Si A admet n v.p 2 à 2 distincts $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in K$

$P_A(x) = (\lambda_1 - x)(\lambda_2 - x)\dots(\lambda_n - x)$

P_A est Scindé sur K.

$\forall i$, λ_i est v.p simple

$\Rightarrow \dim E_{\lambda_i}(A) = 1 = m_{\lambda_i}$

d'après le Théo 3, A est diag^ble sur K.

C.exp :

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$$

$$P_{I_n}(x) = \begin{vmatrix} 1-x & & & 0 \\ & 1-x & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & 1-x \end{vmatrix} = (1-x)^n.$$

$Sp(I_n) = \{1\}$.

I_n n'admet pas n v.p distincts alors que I_n est diag^ble.

Déf : Trigonalisation ;

i) un endom $u \in \mathcal{L}(E)$ est dit trigonalisable s'il $\exists B'$ base de E tq $mat(u, B') = T$ triang supérieure.

ii) Une matrice $A \in M_n(K)$ est trigonalisable s'elle est semblable à une matrice triang sup.

i.e : $\exists T$ triang sup, $\exists P$ inversible tq $A = P.T.P^{-1}$.

Théo :

- u est trig$^{\underline{ble}}$ $\iff$ P_u est Scindé sur K.
- $A \in \mathcal{M}_n(K)$ est trig$\underline{ble}$ $\iff$ P_A est Scindé sur K.

En particulier

$\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, A est trig$\underline{ble}$.

Rque :
Sur La diagonale de T figurent les v.p de u (ou de A).

Exp :

$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

$P_A(x) = \det(A - x I_2)$

$= \begin{vmatrix} 3-x & -2 \\ 2 & -1-x \end{vmatrix}$

$= (3-x)(-1-x) + 4$

$= x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2$.

$Sp(A) = \{1\}$

1 est v.p double de A.

A n'est pas diag$\underline{ble}$ car

si elle était diag$\underline{ble}$

alors $A = P \cdot D \cdot P^{-1}$

avec $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$

$A = P \cdot I_2 \cdot P^{-1} = I_2$ imp.

A n'est pas diag$\underline{ble}$.

$P_A(x) = (x-1)^2$ est Scindé sur $\mathbb{R}$

A est trig$\underline{ble}$ sur $\mathbb{R}$.

Déterminons $E_1(A) = \ker(A - I_2)$

$E_1(A) = \left\{ X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R}) \text{ tq } AX = X \right\}$

$X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in E_1(A) \iff AX = X \iff \begin{cases} 3x - 2y = x \\ 2x - y = y \end{cases}$

$\iff x = y \iff X = \begin{pmatrix} x \\ x \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.