ISIM Monastir — Département de Mathématiques

Examen d'Analyse 2

les calculatrices, les notes de cours et de TD ne sont pas autorisées
la rigueur des raisonnements ainsi que la clarté et la qualité de la rédaction sont prises en compte dans l'évaluation

Section : *L1 INFO et TIC* — *Durée: 1h30min*

Exercice 1. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels positifs.

1. Démontrez le résultat suivant: s'il existe un réel $\alpha > 1$ tel que la suite $(n^\alpha u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ soit bornée alors la série $\sum u_n$, $n \in \mathbb{N}$ converge.

2. Que peut-on dire si on n'a pas l'hypotèse que $u_n > 0$?

   Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ une fonction continue, son intégrale sur $[0, +\infty)$ est convergent, décroissante telle que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

3. On pose $u_n = f(n)$. Que pouvez-vous dire de la nature de $\sum u_n$, $n \in \mathbb{N}$?

4. Donner un majorant et un minorant de reste d'ordre $N \in \mathbb{N}^*$ de cette série.

5. On pose $u_n = \frac{1}{n^3}$. Donner un majorant du reste d'ordre $N \in \mathbb{N}^*$.

6. Etudier la nature des séries suivantes pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$\sum\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n(n+1)},\ \sum(-1)^n\sin\left(\frac{1}{n}\right),\ \sum\exp(a\exp(n)),\ \sum\left(\frac{(-1)^n}{(-1)^n+\sqrt{n}}\right)$$

avec $a \in \{-1, 1\}$.

Exercice 2.
Etudier la convergence de l'intégrale, selon les valeurs de $x \in \mathbb{R}$

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{t^x + t^{2-x}}{t^3 + \sqrt{t}}dt$$