Chapitre : Primitive & Integrale :

I - Primitive :

Def: Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, on dit que la fct der $F : I \to \mathbb{R}$ est une primitive de la fct $f : I \to \mathbb{R}$ ssi :

$$F'(x) = f(x).$$

exp: $F(x) = \frac{x^2}{2}$; $f(x) = x$

théorème: Supposons que F_0 est une primitive de f, alors F est une autre primitive de f ssi $F(x) = F_0(x) + cte$

Notation: On note par

$F(x) = \int f(x)dx$: la primitive de f.

théorème:

Soient f et g 2 fcts

$f : I \to \mathbb{R}$, $g : I \to \mathbb{R}$

alors on a

1) $\int (f+g)(x)\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx$

2) $\int (\alpha f)(x)\,dx = \alpha \int f(x)\,dx$; $\alpha \in \mathbb{R}^*$

Exp: Calculer

$$\int (x - 3x^2 - 2\sin(x))\,dx$$

en effet :

$$\int (x - 3x^2 - 2\sin(x))\,dx = \int x\,dx - 3\int x^2\,dx - 2\int \sin(x)\,dx$$

$$= \frac{x^2}{2} - 3\frac{x^3}{3} + 2\cos(x) + cste$$

(cste : constante de $\mathbb{R}$)

théorème : (Integration par parties)

Soient f et g 2 fcts de classe C^1 sur un intervalle I de $\mathbb{R}$

$$\int f(x)\,g'(x)\,dx = f(x)\,g(x) \int f'(x)\,g(x)\,dx$$

Exp: Déterminer

$$\int x\ln(x)\,dx$$

en effet :

on pose $\begin{cases} f(x) = \ln(x) \\ g'(x) = x \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} f'(x) = \frac{1}{x} \\ g(x) = \frac{x^2}{2} \end{cases}$

en appliquant ~~la~~ le théorème Ipp on a :

$$\int x\ln(x)\,dx = \ln x \cdot \frac{x^2}{2} - \int \left(\frac{1}{x}\cdot\frac{x^2}{2}\right)dx$$

$$= \frac{x^2 \ln x}{2} - \frac{1}{2}\int x\,dx$$

Exp des primitives usuelles :

1) $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + cte$

2) $\int e^x\,dx = e^x + cte$

3) $\int \cos(x)\,dx = \sin(x) + cte$

4) $\int \sin(x)\,dx = -\cos(x) + cte$

5) $\int x^\alpha\,dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + cte$; $\alpha \in \mathbb{R}\setminus\{-1\}$

6) $\int \frac{1}{\cos^2 x}\,dx = tg(x) + cte$.

7) $\int tg(x)\,dx = \ln|\cos(x)| + cte$

8) $\int ch(x)\,dx = sh(x) + cte$

9) $\int sh(x)dx = ch(x) + cte$

10) $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin(x) + cte$

11) $\int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan(x) + cte$

Théorème : (changement des variables)

Soient I, J 2 intervalles dans $\mathbb{R}$, f une fct définie et cont sur J et $\varphi : I \to J$ une fct de classe C^1 sur I et $\varphi(I) \subset J$.

Si on pose $x = \varphi(t)$, $dx = \varphi'(t)dt$

alors : $\int f(x)dx = \int f(\varphi(t))\, \varphi'(t)dt$

$(\forall\ x \in J$ et $t \in I)$

exp :

Déterminer en utilisant un changement des variables la primitive

$I = \int \sin^2(t)\cos(t)\, dt$

Si on prend

$x = \sin(t)$

$dx = \cos(t)\, dt$

alors $I = \int x^2 dx$

$= \frac{x^3}{3} + cte$

$= \frac{\sin^3(t)}{3} + cte$

Exp de calcul des primitives :

A) $\int f(\cos(x)\ \sin(x))\, dx$

on pose $t = tg\left(\frac{x}{2}\right)$

$\cos(x) = \frac{1-t^2}{1+t^2}$

$\sin(x) = \frac{2t}{1+t^2}$

et $dx = \frac{2dt}{1+t^2}$, $tg(x) = \frac{2t}{1-t^2}$

Exp : Déterminer la primitive suivante.

$I_1 = \int \frac{dx}{2+\cos(x)}$

en effet :

on pose $t = tg\left(\frac{x}{2}\right)$ donc

$dx = \frac{2}{1+t^2}dt$ et

$\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$

en appliquant ce changement de variable on trouve :

$$I_1 = \int \frac{\frac{2}{1+t^2}}{2+\frac{1-t^2}{1+t^2}}dt$$

$$= \int \frac{2}{\cancel{(1+t^2)}\ \frac{1-t^2+2t^2+2}{\cancel{(1+t^2)}}}dt$$

$$= \int \frac{2}{3+t^2}dt$$

$$= 2\int \frac{1}{3+t^2}dt$$

$$= 2\int \frac{1}{3\left(1+\frac{t^2}{3}\right)}dt$$

$$= \frac{2}{3}\int \frac{dt}{1+\left(\frac{t}{\sqrt{3}}\right)^2}$$

$\int \frac{1}{1+y^2}dy$ on pose $y = \frac{t}{\sqrt{3}}$

$\Rightarrow t = \sqrt{3}y \Rightarrow dt = \sqrt{3}\, dy$

Donc $I_1 = \frac{2}{\cancel{3}}\int \frac{\sqrt{3}}{1+y^2}dy$

$= \frac{2}{\sqrt{3}}\int \frac{1}{1+y^2}dy$

$= \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan(y) + cte$

$= \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan\left(\frac{t}{\sqrt{3}}\right) + cte$

$I_1 = \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan\left(\frac{tg\left(\frac{x}{2}\right)}{\sqrt{3}}\right) + cte$

B) $\int f\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right) dx$

on pose $t = \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}$

$= \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{1}{n}}$

donc $t^n = \frac{ax+b}{cx+d}$

donc:

$x = \frac{b - t^n d}{t^n c - a}$

$dx = \left(\frac{b - t^n d}{t^n c - a}\right)' dt$

Exp:

$\int \frac{1}{x} \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}\, dx$

$a = 1,\ b = -1,\ x = 2,\ c = 1$

$d = 1$

on pose $t = \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$ donc

$x = \frac{1-t^2}{t^2-1} = \frac{1+t^2}{1-t^2} = x$

et $dx = \left(\frac{1+t^2}{1-t^2}\right)' dt$

$= \frac{4t}{(1-t^2)^2} dx$

alors on a:

$I_2 = \int \left(\frac{\cancel{1-t^2}}{1+t^2}\right) \cdot t \cdot \frac{4t}{(1-t^2)^{\cancel{2}}} dt$

$= \frac{4t^2}{(1+t^2)(1-t^2)} dt$

Indication: On peut utiliser

$\frac{4t^2}{(1+t^2)(1-t^2)} = \frac{-1}{t-1} + \frac{1}{t+1} - \frac{2}{1+t^2}$

Donc:

$I_2 = \int \frac{-1}{t-1} dt + \int \frac{dt}{t+1} - 2 \int \frac{dt}{1+t^2}$

$= -\ln|t-1| + \ln|t+1| - 2 \arctg(t) + cte$

alors:

$I_2 = -\ln\left|\sqrt{\frac{x-1}{x+1}} - 1\right| + \ln\left|\sqrt{\frac{x-1}{x+1}} + 1\right|$

$- 2 \arctan\left(\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}\right) + cte$

$\forall\ x > 1 \quad cte \in \mathbb{R}.$

Intégrale

On considère une fonction f continue sur $[a, b]$.

Théorème: Soit f une fonction continue sur un intervalle I, $a, b \in I$. On pose

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$

Alors, F est une primitive de f tel que $F(a) = 0$.

Théorème: Soit f une fonction continue sur un intervalle I, G est une primitive quelconque de f alors

$$\int_a^b f(x)\,dx = \left[G(x)\right]_a^b = G(b) - G(a)$$

Exemple

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \left[\arcsin(x)\right]_0^{\frac{1}{2}} = \arcsin(\tfrac{1}{2}) - \arcsin(0)$$
$$= \frac{\pi}{6} - 0 = \frac{\pi}{6}.$$

Propriétés de l'intégrale

Soient f et g deux fonctions continues sur $[a,b]$. On a :

1) $\int_a^b (f+g)(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx.$

2) $\int_a^b (\lambda f)(x)\,dx = \lambda \int_a^b f(x)\,dx, \quad (\lambda \in \mathbb{R}^*)$

3) $\forall x \in [a,b], f(x) \geq 0$ alors $\int_a^b f(x)\,dx \geq 0$

4) Si $0 \leq f(x) \leq g(x), \forall x \in [a,b]$ alors

$0 \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx, \ \forall x \in [a,b]$

5) $\left| \int_a^b f(x)\,dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx.$

6) Si f est continue sur $[a,b]$,

$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$

7) $\int_a^a f(x)\,dx = 0.$

8) $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$

$(c \in]a,b[)$, (relation de Chasles)

Exercice :

Déterminer :

a) $I_1 = \int_0^1 \arctan(x)\,dx$

b) $I_2 = \int \cos(x)\, sh(x)\,dx$

c) $I_3 = \int \frac{x+1}{x^2+2x+3}\,dx$

d) $I_4 = \int \frac{1}{x^2+2x+3}\,dx$

Solution :

a) $I_1 = \int_0^1 \arctan(x)\,dx.$

on pose $\begin{cases} U(x) = \arctan(x) \\ V'(x) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} U'(x) = \frac{1}{1+x^2} \\ V(x) = x \end{cases}$

En appliquant l'integration par partie

on a : $I_1 = \left[x\arctan(x)\right]_0^1 - \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{2x}{1+x^2}\,dx$

$= \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\left[\ln|1+x^2|\right]_0^1$

$= \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\left(\ln(2)\right)$

$= \frac{\pi}{4} - \frac{\ln(2)}{2}$

b) $I_2 = \int \cos(x)\, sh(x)\,dx$

on pose $\begin{cases} U(x) = sh(x) \\ V'(x) = \cos(x) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} U'(x) = ch(x) \\ V(x) = \sin(x) \end{cases}$

En appliquant l'intégration par partie

on a.

$$I_2 = sh(x)\sin(x) - \underbrace{\int ch(x)\sin(x)\,dx}_{J_2} + \underline{\underline{cte}}$$

on pose $J_2 = \int ch(x)\sin(x)\,dx$

on pose $\begin{cases} U(x) = ch(x) \\ V'(x) = \sin(x) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} U'(x) = sh(x) \\ V(x) = -\cos(x) \end{cases}$

En appliquant l'intégration par partie

on a :

$$J_2 = -ch(x)\cos(x) + \int sh(x)\cos(x)\,dx + \underline{\underline{cte}}$$

(on remplace l'expression de J_2 dans I_2)

$$I_2 = sh(x)\sin(x) + ch(x)\cos(x) - \underbrace{\int sh(x)\cos(x)\,dx}_{I_2} + \underline{\underline{cte}}$$

Donc $2I_2 = sh(x)\sin(x) + ch(x)\cos(x) + \underline{\underline{cte}}$

$$I_2 = \frac{1}{2}\left(sh(x)\sin(x) + ch(x)\cos(x)\right) + \underline{\underline{cte}}$$

6) $I_3 = \int \frac{x+1}{x^2+2x+3}\,dx$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{2x+2}{x^2+2x+3}\,dx = \frac{1}{2}\ln\left|x^2+2x+3\right| + \underline{\underline{c}}$$

$$I_4 = \int \frac{dx}{x^2+2x+3} = \int \frac{dx}{(x+1)^2+2}$$

$$= \int \frac{dx}{2\left(\frac{(x+1)^2}{2}+1\right)}$$

$$I_4 = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{\left(\frac{(x+1)^2}{2}+1\right)} = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{\left(\frac{x+1}{\sqrt{2}}\right)^2+1}$$

on pose $\boxed{Y = \frac{x+1}{\sqrt{2}}} \Rightarrow x = \sqrt{2}\,Y - 1$

$\Rightarrow \boxed{dx = \sqrt{2}\,dY}$

Donc $I_4 = \frac{1}{2}\int \frac{\sqrt{2}\,dY}{Y^2+1} = \frac{1}{\sqrt{2}}\arctan(Y) + \underline{\underline{cte}}$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\left(\frac{x+1}{\sqrt{2}}\right) + \underline{\underline{cte}}$$

$$= \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\left[\ln|1+x^2|\right]_0^1$$

$$= \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\left(\ln(2)\right)$$

$$= \frac{\pi}{4} - \frac{\ln(2)}{2}$$

b) $I_2 = \int \cos(x)\,\mathrm{sh}(x)\,dx$

on pose $\begin{cases} u(x) = \mathrm{sh}(x) \\ v'(x) = \cos(x) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u'(x) = \mathrm{ch}(x) \\ v(x) = \sin(x) \end{cases}$