Université de Monastir
Institut Supérieur D'Informatique
et de Mathématiques de Monastir
Dépt. de Mathématiques

A.U: 2024-2025
L1 INFO
Algèbre2
Série No.4

Réduction des endomorphismes et des matrices carrées

Exercice 1:

Dans les exemples suivants, u est un endomorphisme de E, déterminer son polynôme caractéristique, ses valeurs propres, ses sous espaces propres puis donner une base B de E formée par des vecteurs propres de u et écrire la matrice de u relativement à cette base.

1. $E=\mathbb{R}^2$ et pour tout $a=(x,\,y)\in E$, $u(a)=(4x-3y,\,2x-y)$.
2. $E=\mathbb{R}^3$ et pour tout $a=(x,\,y,\,z)\in E$, $u(a)=(x+3y,\,3x-2y-z;\;-y+z)$.
3. $E=\mathbb{R}^4$ et pour tout $a=(x,\,y,\,z,\,t)\in E$, $u(a)=(5y\;,\,3x+2z\;,\,2y+3t\;,\,5z)$.
4. $E=\mathbb{R}_2[X]$ et pour tout $P\in E$, $u(P)=-P+(1+X)P'$.
5. $E=\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et pour tout $A\in E$, $u(A)=A+\,{}^tA$.

Exercice 2:

1. Montrer que la matrice $A=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&2\\0&-1&-1\end{pmatrix}$ n'est pas diagonalisable sur $\mathbb{R}$ mais qu'elle l'est sur $\mathbb{C}$ et effectuer la diagonalisation.
2. Déterminer des conditions nécessaires et suffisantes sur les scalaires a,b,c pour que la matrice A soit diagonalisable dans les cas suivant :

$$A=\begin{pmatrix}2&a&b\\0&2&c\\0&0&2\end{pmatrix}\;,\quad A=\begin{pmatrix}2&0&0\\a&1&0\\b&c&1\end{pmatrix}\;,\quad A=\begin{pmatrix}2&0&0\\1&a&0\\-1&2&-1\end{pmatrix}\;,\quad A=\begin{pmatrix}2&0&0&0\\-1&1&0&0\\1&0&2&0\\a&b&c&2\end{pmatrix}$$

Exercice 3:

Soit $A_m=\begin{pmatrix}3&4&4\\m&-m&-1\\-m&2&3-m\end{pmatrix}$, $m\in\mathbb{R}$.

1. Calculer le polynôme caractéristique de A_m et en déduire le spectre de A_m.
2. Pour quelles valeurs de m, la matrice A_m est-elle inversible.
3. Montrer que pour tout $m\in\mathbb{R}\backslash\{-1,\,-2\}$, la matrice A_m est diagonalisable.
4. On prend $m=1$ et on note $A=A_1$.
   (a) Déterminer D une matrice diagonale et P une matrice inversible vérifiant : $A=PDP^{-1}$.
   (b) Vérifier que A est inversible et préciser les valeurs propres et les sous espaces propres de A^{-1}.
   (c) Montrer que la matrice $N=2A+A^{-1}+3I_3$ est diagonalisable et préciser ses valeurs propres.
   (d) Calculer A^n, $\forall n\in\mathbb{N}$.
5. Soient (x_n),(y_n),(z_n) des suites réelles vérifiant: $x_0=y_0=z_0=1$ et pour tout $n\in\mathbb{N}$,

$$\begin{cases}x_{n+1}=3x_n+4y_n+4z_n\\y_{n+1}=x_n-y_n-z_n\\z_{n+1}=-x_n+2y_n+2z_n\end{cases}$$

   Déterminer les expressions de x_n, y_n, z_n en fonction de n.

6. On prend $m = -1$ et on note $M = A_{-1}$.
   (a) Vérifier que M est inversible et en utilisant le théorème de Cayley-Hamilton, exprimer M^{-1} en fonction de M et I_3.
   (b) Montrer que la matrice M n'est pas diagonalisable mais qu'elle est trigonalisable sur $\mathbb{R}$.

   On considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à la matrice M.

   (c) Déterminer une base $B = (v_1, v_2, v_3)$ de $\mathbb{R}^3$ vérifiant: $f(v_1) = 2v_1,\ f(v_2) = 3v_2,\ f(v_3) = v_2 + 3v_3$.
   (d) En déduire une matrice T triangulaire supérieure semblable à M.