

---

## Devoir Surveillé

---

### Exercice 1

Soit  $A(X) = X^5 - 2X^4 + \alpha X^3 + \beta X^2 + \gamma X - 1$  avec  $\alpha, \beta$  et  $\gamma \in \mathbb{R}$ .

1. Déterminer les réels  $\alpha, \beta, \gamma$  pour que 1 soit une racine triple de  $A$ .
2. Factoriser, dans ce cas, le polynôme  $A$  dans  $\mathbb{R}[X]$  et dans  $\mathbb{C}[X]$ .

### Exercice 2

Soit  $P(X) = X^4 + 2X^3 + 2X^2 + 2X + 1$ .

1. Montrer que  $-1$  est une racine double de  $P$ .
2. Effectuer la division euclidienne de  $P$  par  $X - i$ .
3. Sans faire la division euclidienne de  $P$  par  $X + i$ , justifier pourquoi le reste est forcément nul.
4. En déduire la factorisation de  $P$  dans  $\mathbb{C}[X]$  et dans  $\mathbb{R}[X]$ .
5. On considère la fraction rationnelle :

$$F(X) = \frac{X^4 + 1}{P(X)}.$$

Décomposer en éléments simples la fraction  $F$  dans  $\mathbb{C}(X)$  et dans  $\mathbb{R}(X)$ .