Chapitre : Série Entière

Définition

On appelle série entière, toute série de la forme $\sum_n a_n z^n$ avec $(a_n)_n$ est une suite dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et $z \in \mathbb{C}$.

Exemple

$\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n} z^n$, $\sum_{n\geq 0} z^n$ sont des séries entière.

Rayon de Convergence

Théorème

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière il existe un réel $R \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ tel que :

1) $\sum_n a_n z^n$ converge absolument si $|z| < R$

2) La série $\sum_n a_n z^n$ diverge si $|z| > R$

$z = x+iy \in \mathbb{C}$

$\sum_n a_n z^n$

Remarques

* Si $|z| = R$ on ne peut rien dire.
* $D(0,R) = \{ z \in \mathbb{C} \,/\, |z| < R \}$ est appelé le disque convergence.
* Technique de calcul :

Proposition :

Soit $\sum_n a_n z^n$ une série entière

Si $\lim_{n \to +\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \ell$ alors $R = \frac{1}{\ell}$

(avec la convention $\frac{1}{0^+} = +\infty$ et $\frac{1}{+\infty} = 0$)

Exemple : Déterminer le rayon de convergence de

$$\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2} z^n \quad (z \in \mathbb{C})$$

Solution : on a $a_n = \frac{1}{n^2}$, $\forall n \geq 1$

$$\lim_{n \to +\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \to +\infty} \frac{\frac{1}{(n+1)^2}}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n \to +\infty} \frac{n^2}{n^2} \cdot \frac{1}{(\ldots)}$$

Donc le rayon de convergence

$$R = \frac{1}{\ell} = \frac{1}{1} = 1$$

Proposition 2 : (règle de Cauchy).

Soit $\sum_n a_n z^n$ une série entière.

$$\boxed{\text{Si } \lim_{n \to +\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \ell \text{ alors } R = \frac{1}{\ell}}$$

Exemple : Déterminer le rayon de convergence de $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^{3n}} z^n$.

Solution : on a $a_n = \frac{1}{n^{3n}}$

$$\lim_{n \to +\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n \to +\infty} |a_n|^{\frac{1}{n}} = \lim_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{n^{3n}} \right)^{\frac{1}{n}} = \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n^{\ldots}} = 0$$

Donc $R = +\infty \left(\frac{1}{0} \right)$

Théorème :

Soit $\sum_n a_n z^n$ et $\sum_n b_n z^n$ deux séries entières de rayon de convergence R_a et R_b respectivement.

1) Soit $\lambda \in \mathbb{R}^*$ (ou bien $\mathbb{C}^*$) le rayon de convergence de $\sum_n \lambda a_n z^n$ est égale à R_a.

2) Le rayon de convergence de $\sum_n (a_n + b_n) z^n$ noté R_{a+b} est égale à :

$$R_{a+b} = \begin{cases} \min(R_a, R_b) ; & \text{si } R_a \neq R_b \\ \text{supérieur strictement à } R_a ; & \text{si } R_a = R_b \end{cases}$$

Exemple : Déterminer le rayon de convergence de $\sum_{n \geq 1} \left(\frac{\sqrt{n}}{n!} + \frac{1}{2^n} \right) z^n$.

Solution : $a_n = \frac{\sqrt{n}}{n!}$, $b_n = \frac{1}{2^n}$, $n \geq 1$

$$\lim_{n \to +\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \sqrt{\frac{n+1}{n}} = 0$$

donc $R_a = \frac{1}{0} = +\infty$ (le rayon de convergence de $\sum a_n z^n$

$b_n = \frac{1}{2^n}$

$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|b_n|} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{2^n}\right)^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{2}$

Donc $R_b = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$ (le rayon de convergence de $\sum_n b_n z^n$)

Donc le rayon de convergence ($R_a \neq R_b$) de $\sum_n \left(\frac{\sqrt{n}}{n!} + \frac{1}{2^n}\right) z^n = \min(+\infty, 2) = 2$.

* **Developpement d'une fonction sous forme d'une série entière:**

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ (I est un intervalle centré en 0)

* On dit que f est developpable en somme d'une série entière ssi

$f(x) = \sum_n a_n x^n, \ \forall x \in I \cap]-R, R[$

avec R est le rayon de convergence de $\sum_n a_n x^n$.

Proposition: Si $f(x) = \sum_n a_n x^n$ alors

$a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$

Proposition: le developpement en série entière de f s'il existe est unique.

Developpement usuelles

$$e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\cos(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\sin(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n, \quad \forall |x| < 1 \ (\text{car } R = 1)$$

$$\ln(1+x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1}, \quad \forall |x| < 1$$

Proposition

Soit la fonction $f(x) = \sum_{n \geq 0} a_n x^n$

et la série $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$ est une série entière

de rayon de Convergence R. Alors,

* Si R est fini alors $D_f =]-R, R[$.
* est $R = +\infty$ alors $D_f = \mathbb{R} =]-\infty, +\infty[$

Proposition : (Dérivabilité).

Soit f de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-R, R[$

et $f(x) = \sum_{n \geq 0} a_n x^n$ (série entière)

alors $f'(x) = \sum_{n \geq 1} a_n n x^{n-1}$

et $f^{(p)}(x) = \sum_{n \geq p} n(n-1) \dots (n-p-1) a_n x^{n-p}$.

sont des séries entières ont le même rayon de convergence que f.

Proposition : (Primitive) :

Soit $f(t) = \sum_{n\geq 0} a_n t^n$, $\forall t \in]-R, R[$ (R = rayon de convergence)

alors, $\forall x \in]-R, R[$, $\int_0^x f(t)\,dt = \sum_{n\geq 0} a_n \frac{x^{n+1}}{n+1}$

est une série entière de rayon de convergence R.

Remarque :

* Si R le rayon de convergence de $f(t) = \sum_{n\geq 0} a_n t^n$

alors on appelle $]-R, R[$ l'intervalle de convergence de f.

Exercice.

1) Calculer le rayon de convergence R de la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{z^{2n+1}}{2n+1}$.

2) La série converge-t-elle pour $z = R$.

Solution

On remarque que notre série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{z^{2n+1}}{2n+1}$ est une primitive de la série entière $\displaystyle\sum_{n\geq 0} z^{2n}$

+ $|z| < R$ $\Rightarrow$ $\sum a_n z^n$ C.V

+ $|z| > R$ $\Rightarrow$ $\sum a_n z^n$ D.V

Donc Elles ont même rayon de convergence.

* Pour un z fixe on a la série $\displaystyle\sum_{n\geq 0} z^{2n} = \sum_{n\geq 0} (z^2)^n$

C'est une série géométrique de raison $q = z^2$ converge ssi $|z|^2$ [illegible]

donc $|z| < 1$.

et diverge lorsque $|z| > 1$.

Donc le rayon de convergence de $\sum_{n\geq 0} z^{2n}$ est $R = 1$ celui aussi de la série

$$\sum_{n\geq 1} \frac{z^{2n+1}}{2n+1}.$$

2) Pour $z = R = 1$ on a $\sum_{n\geq 1} \frac{z^{2n+1}}{2n+1} = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{2n+1}$

On a $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{2n+1} \underset{+\infty}{\sim} \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}$

et comme $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}$ diverge (car c'est une série de Riemann avec $\alpha = 1$)

Par suite $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{2n+1}$ diverge

Exercice: Déterminer le rayon de convergence de $\sum_{n\geq 0} \frac{3^n - 2^n}{5^n} z^n$.

Solution Soit z fixé

alors $\frac{3^n - 2^n}{5^n} z^n = \frac{3^n\left(1 - \frac{2^n}{3^n}\right)}{5^n} z^n \underset{+\infty}{\sim} \frac{3^n}{5^n} z^n$

Donc $\sum_{n\geq 0} \frac{3^n - 2^n}{5^n} z^n \sim \sum_{n\geq 0} \frac{3^n}{5^n} z^n$

Soit z fixé, la série $\sum \frac{3^n}{5^n} z^n$ est une série numérique géométrique de raison $q = \frac{3}{5} z$ converge ssi $\left|\frac{3}{5} z\right| < 1$ ou $|z| < \frac{5}{3}$ et diverge ssi $|z| > \frac{5}{3}$. Donc $R = \frac{5}{3}$

d'après le critère de l'équivalence

Exercice: Déterminer le rayon de convergence de $\sum_{n\geq 1} \frac{Ln(n)}{\sqrt{n}} z^n$

Solution $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{Ln(n+1)}{\sqrt{n+1}} \frac{\sqrt{n}}{Ln(n)}\right|$

$= \left|\frac{Ln\left(n\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)}{Ln(n)} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n}\sqrt{1+\frac{1}{n}}}\right|$

$= \left|\frac{Ln(n) + Ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{Ln(n)} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}}\right|$

$= \left|\left(1 + \frac{Ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{Ln(n)}\right) \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}}\right|$

on a $Ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{n}$

donc $\frac{Ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{Ln(n)} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{nLn(n)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

Donc $\lim_{n\to+\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}} = 1$

D'où $R = 1$. (rayon de convergence)