République Tunisienne
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Institut Supérieur d'Informatique et des Mathématiques de Monastir
Université de Monastir

Cours:
Systèmes Logiques et Architecture des Ordinateurs

Dr. Safa Teboulbi

Année universitaire : 2024-2025

Chapitre 3

Représentation Et Simplification des fonctions Logiques

Représentation d'une fonction logique

- Une *fonction logique* est une *combinaison* de *variables binaires* reliées par les opérateurs *ET*, *OU* et *NON*.
- Elle peut être représentée par une *écriture algébrique* ou une *table de vérité* ou un *logigramme* ou un *tableau de KARNAUGH*.

Représentation algébrique

- Une fonction logique peut être représentée sous deux formes :

S. D. P : $\Sigma(\prod)$ Somme Des Produits.

P. D. S : $\prod(\Sigma)$ Produit Des Sommes.

Forme somme des produits (Forme disjonctive)

- Elle correspond à une somme de produits logiques :
  F= $\Sigma(\prod(e_i))$, ou e_i représente une variable logique ou son complément.

Exemple

$F_{1(A,B,C)} = \bar{A}\,\bar{B} + B\,\bar{C}$

- Si chacun des produits contient toutes les variables d'entrée sous une forme directe ou complémentée, alors la forme est appelée : « *Première forme canonique* » ou forme « *canonique disjonctive* ».
- Chacun des produits est appelé *Minterme*.

Exemples

$F_{2(A,B,C,D)} = A\,B\,\bar{C}\,D + A\,B\,C\,\bar{D} + \bar{A}\,\bar{B}\,C\,D + A\,\bar{B}\,\bar{C}\,D$ SDP Standard

$F_{3(A,B,C,D)} = A\,\bar{B}\,C + A\,B\,C\,D + \bar{A}\,\bar{B}\,C$

Forme Produit de Sommes (Forme Conjonctive)

- Elle correspond à produit de sommes logiques :
  $F=\prod(\sum(e_i))$, ou e_i représente une variable logique ou son complément.

Exemple

$$F_{1(A,B,C)} = (A+\bar{B}).(A+B+\bar{C})$$

- Si chacune des sommes contient toutes les variables d'entrée sous une forme directe ou complémentée, alors la forme est appelée : « *deuxième forme canonique* » ou forme « *canonique conjonctive* ».
- Chacun des produits est appelé *Maxterme*.

Exemples

$F_{2(A,B,C,D)} = (A+B+\bar{C}+\bar{D})(\bar{A}+B+\bar{C}+D)$ PDS Standard

$F_{3(A,B,C,D)} = (A+B+\bar{C})(A+\bar{D})(\bar{A}+B+\bar{C}+D)$ PDS Non Standard

Table de vérité

- Une fonction logique peut être représentée par une table de vérité qui donne les valeurs que peut prendre la fonction pour chaque combinaison de variables d'entrées.

Fonction Complètement Définie

- C'est une fonction logique dont la valeur est connue pour toutes les combinaisons possibles des variables.

Exemple
> La fonction « Majorité de 3 variables » : MAJ(A, B, C).
> La fonction MAJ vaut 1 si la majorité (2 ou 3) des variables sont à l'état 1.

Table de vérité

Combinaison	A	B	C	S = MAJ(A, B, C)
0	0	0	0	0
1	0	0	1	0
2	0	1	0	0
3	0	1	1	1
4	1	0	0	0
5	1	0	1	1
6	1	1	0	1
7	1	1	1	1

Fonction Incomplètement Définie

Exemple

- Soit un *clavier* qui comporte *3 boutons poussoirs* P_1, P_2 et P_3 qui commandent une machine et qui possèdent un verrouillage mécanique tel que *2 boutons adjacents* ne peuvent pas être enfoncés *simultanément* :

P_1	P_2	P_3
Marche manuelle	Arrêt	Augmenter la vitesse

- On suppose que Pi appuyé vaut 1 et relâché vaut 0. D'où la table de vérité de la fonction « clavier » qui détecte *au moins* un poussoir déclenché :

Table de vérité

Combinaison	P_1	P_2	P_3	Clavier
0	0	0	0	0
1	0	0	1	1
2	0	1	0	1
3	0	1	1	•
4	1	0	0	1
5	1	0	1	1
6	1	1	0	•
7	1	1	1	•

Equivalence entre la table de vérité et les formes canoniques

La somme canonique

- Pour établir l'expression canonique disjonctive (la somme canonique) de la fonction : il suffit d'effectuer la somme logique (ou réunion) des mintermes associées aux états pour lesquels la fonction vaut « 1 ».

Exemple ☐ La fonction « Majorité de 3 variables » : MAJ(A, B, C)

Table de vérité

Combinaison	A	B	C	S=MAJ(A,B,C)	Minterme
0	0	0	0	0	$\bar{A}\bar{B}\bar{C}$
1	0	0	1	0	$\bar{A}\bar{B}C$
2	0	1	0	0	$\bar{A}B\bar{C}$
3	0	1	1	1	$\bar{A}BC$
4	1	0	0	0	$A\bar{B}\bar{C}$
5	1	0	1	1	$A\bar{B}C$
6	1	1	0	1	$AB\bar{C}$
	1	1	1	1	ABC

> On remarque que MAJ(A,B,C)=1 pour les combinaisons 3, 5, 6, 7. On écrit la fonction ainsi spécifiée sous une forme dite numérique : MAJ= R(3,5,6,7), *Réunion* des états 3, 5, 6, 7.
> La première forme canonique de la fonction MAJ s'en déduit directement :

$$MAJ_{(A,B,C)} = \bar{A}BC + A\bar{B}C + AB\bar{C} + ABC$$

Le produit canonique

- Pour établir l'expression canonique conjonctive (le produit canonique) de la fonction : il suffit d'effectuer le produit logique (ou intersection) des maxtermes associées aux états pour lesquels la fonction vaut « 0 ».

Exemple ❑ La fonction « Majorité de 3 variables » : MAJ(A, B, C)

Table de vérité					
Combinaison	A	B	C	S=MAJ(A,B,C)	Maxterme
0	0	0	0	0	$A+B+C$
1	0	0	1	0	$A+B+\bar{C}$
2	0	1	0	0	$A+\bar{B}+C$
3	0	1	1	1	$A+\bar{B}+\bar{C}$
4	1	0	0	0	$\bar{A}+B+C$
5	1	0	1	1	$\bar{A}+B+\bar{C}$
6	1	1	0	1	$\bar{A}+\bar{B}+C$
7	1	1	1	1	$\bar{A}+\bar{B}+\bar{C}$

- On remarque que MAJ(A,B,C)=0 pour les combinaisons 0, 1, 2, 4. On écrit la fonction ainsi spécifiée sous une forme dite numérique : MAJ= Π(0,1,2,4), *Intersection* des états 0, 1, 2, 4.
- La deuxième forme canonique de la fonction MAJ s'en déduit directement :

$$MAJ_{(A,B,C)} = (A+B+C).(A+B+\bar{C}).(A+\bar{B}+C).(\bar{A}+B+C)$$

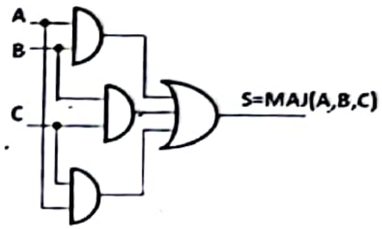
Remarque — On s'intéresse généralement à la représentation d'une fonction sous la forme d'une somme ou somme canonique (forme disjonctive).

Logigramme

- C'est une méthode graphique basée sur les symboles ou les portes.

Exemple

$MAJ_{(A,B,C)} = AB + BC + AC$



Le Tableau de KARNAUGH (TK)

Adjacence de cases

- Deux mots binaires sont dits adjacents s'ils ne diffèrent que par la complémentaire d'une et d'une seule variable.
  - Les mots ABC et $AB\bar{C}$ sont adjacents puisqu'ils ne diffèrent que par la *complémentarité* de la variable *C*.

Construction du tableau

- Le tableau de KARNAUGH a été construit de façon à faire ressortir l'adjacence logique visuelle.
  - Chaque case représente une combinaison des variables (*minterme*).
  - La table de vérité est transportée dans le tableau en mettant dans chaque case la valeur de la fonction correspondante.

> La fonction représentée par un tableau de KARNAUGH s'écrit comme la somme des produits associés aux différentes cases contenant la valeur 1

Règles à suivre pour un problème à n variables : (n>2)

- Le tableau de KARNAUGH comporte 2^n cases ou combinaisons. L'ordre des variables n'est pas important mais il fait que respecter *la règle suivante* :
  - Les monômes repérant les lignes et les colonnes sont attribués de telle manière que 2 monômes consécutifs ne diffèrent que de l'état d'une variable, il en résulte que 2 cases consécutives en ligne ou en colonne repèrent des combinaisons adjacentes, on utilise donc le *code* GRAY.

Exemples

n=2

A \ B	0	1
0	00	01
1	10	11

A \ B	0	1
0	$\bar{A}\bar{B}$	$\bar{A}B$
1	$A\bar{B}$	AB

Traitement des problèmes à 5 variables

- Pour résoudre ce problème on va le décomposer en 2 problèmes à 4 variables en appliquant le théorème d'expansion (SHANNON).

On a: $F_{(A,B,C,D,E)} = \overline{E}\, F_{(A,B,C,D,0)} + E\, F_{(A,B,C,D,1)}$

Le théorème d'expansion de SHANNON reste applicable quelque soit le nombre de variables on a :

$$F_{(A,B,C,\dots,Z)} = \overline{Z}\, F_{(A,B,C,\dots,0)} + Z\, F_{(A,B,C,\dots,1)}$$

Exemple Simplifier la fonction $F_{(A,B,C,D,E)} = \sum(4, 5, 6, 7, 24, 25, 26, 27)$

$F_{(A,B,C,D,0)}$

AB \ CD	00	01	11	10
00	0	0	0	1
01	0	0	0	1
11	0	0	0	1
10	0	0	0	1

$F_{(A,B,C,D,0)} = C\overline{D}$

$F_{(A,B,C,D,1)}$

AB \ CD	00	01	11	10
00	0	1	0	0
01	0	1	0	0
11	0	1	0	0
10	0	1	0	0

$F_{(A,B,C,D,0)} = \overline{C}D$

$\longrightarrow$ $F_{(A,B,C,D,E)} = \overline{E}C\overline{D} + E\overline{C}D$

Les valeurs indifférentes ou indéfinies

- Le symbole ø (ou X) peut prendre indifféremment la valeur 0 ou 1 : on remplace donc par 1 uniquement ceux qui permettent d'augmenter le nombre des case d'un regroupement et ceux qui réduit le nombre de regroupement.

Exemple

Table de vérité

Combinaison	A	B	C	F(A,B,C)
0	0	0	0	ø
1	0	0	1	0
2	0	1	0	1
3	0	1	1	ø
4	1	0	0	0
5	1	0	1	0
6	1	1	0	ø
7	1	1	1	1

Tableau de KARNAUGH

AB \ C	0	1
00	ø	0
01	1	ø
11	ø	1
10	0	0

$F_{(A,B,C)} = B$

n=3

AB \ C	0	1
00	000	001
01	010	011
11	110	111
10	100	101

AB \ C	0	1
00	$\bar{A}\bar{B}\bar{C}$	$\bar{A}\bar{B}C$
01	$\bar{A}B\bar{C}$	$\bar{A}BC$
11	$AB\bar{C}$	ABC
10	$A\bar{B}\bar{C}$	$A\bar{B}C$

n=4

AB \ CD	00	01	11	10
00	0000	0001	0011	0010
01	0100	0101	0111	0110
11	1100	1101	1111	1110
10	1000	1001	1011	1010

AB \ CD	00	01	11	10
00	$\bar{A}\bar{B}\bar{C}\bar{D}$	$\bar{A}\bar{B}\bar{C}D$	$\bar{A}\bar{B}CD$	$\bar{A}\bar{B}C\bar{D}$
01	$\bar{A}B\bar{C}\bar{D}$	$\bar{A}BC\bar{D}$	$\bar{A}BCD$	$\bar{A}BC\bar{D}$
11	$AB\bar{C}\bar{D}$	$AB\bar{C}D$	$ABCD$	$ABC\bar{D}$
10	$A\bar{B}\bar{C}\bar{D}$	$A\bar{B}\bar{C}D$	$A\bar{B}CD$	$A\bar{B}\bar{C}D$

Exemple de remplissage du tableau de KARNAUGH à partir de la table de vérité

Table de vérité

Combinaison	A	B	C	$F_{(A,B,C)}$
0	0	0	0	1
1	0	0	1	1
2	0	1	0	0
3	0	1	1	0
4	1	0	0	1
5	1	0	1	1
6	1	1	0	0
7	1	1	1	1

Tableau de KARNAUGH

AB \ C	0	1
00	1	1
01	0	0
11	0	1
10	1	1

Problématique

- Soit l'équation d'un circuit logique $S = \overline{x.\overline{y}.+\overline{y}.z}$ (1)
  - À l'aide des théorèmes de l'algèbre de boule, on peut écrire

$S = x.y\,(y+\bar{z})$

$S = x.y + x.y.\bar{z}$ (2)

$S = x.y$ (3)

→ Le même système qui fournit une sortie S en fonction des valeurs des entrées x, y, z peut être réalisé de trois manières différentes :

(1) —> a pour coût :
- deux portes ET à deux entrées
- trois inverseurs
- une porte OU

(2) —> a pour coût :
- trois portes ET à deux entées
- une porte OU à deux entrées
- un inverseur

(3) —> a pour coût :
- une porte ET à deux entrées

D'où la nécessité de simplifier au maximum la fonction logique d'un circuit afin de minimiser son coût.

Simplification des Fonctions Logiques

Simplification algébrique des expressions logiques

- Pour obtenir une expression plus simple de la fonction par cette méthode, il faut utiliser :
  - Les théorèmes et les propriétés de l'algèbre de Boole

Exemple Simplification de La fonction « Majorité » : MAJ(A,B,C)

$$MAJ_{(A,B,C)} = \bar{A}BC + A\bar{B}C + AB\bar{C} + ABC$$

$$MAJ_{(A,B,C)} = \bar{A}BC + A\bar{B}C + AB\bar{C} + ABC + ABC + ABC$$

$$MAJ_{(A,B,C)} = BC(\bar{A} + A) + AB(C + \bar{C}) + AC(B + \bar{B})$$

$$MAJ_{(A,B,C)} = BC + AB + AC$$

Les règles et propriétés de l'algèbre de Boole permettent de *simplifier* les fonctions *mais* reste une méthode *relativement lourde*.
Elle *ne permet jamais de savoir si l'on aboutit ou pas* à une expression minimale de la fonction.

Simplification graphique des expressions logiques (par tableau de KARNAUGH)

❖ Le tableau de KARNAUGH permet de visualiser une fonction et d'en tirer intuitivement une fonction simplifiée

Regroupement des cases adjacentes

❖ La méthode consiste à réaliser des groupements des cases adjacentes. Ces groupements des cases doivent être de taille maximale égale au nombre max de cases.

❖ On cesse d'effectuer les groupements lorsque tous les uns appartiennent au moins à l'un d'eux.

__Remarque__ ❖ Avant de tirer les équations du tableau de KARNAUGH il faut respecter les __règles suivantes__ :

- ➢ Grouper tous les uns.
- ➢ Grouper le maximum des uns dans un seul groupement.
- ➢ Un groupement a une forme un rectangulaire.
- ➢ Le nombre des uns dans un groupement est une puissance de 2.
- ➢ Un 1 peut figurer dans plus qu'un groupement.
- ➢ Un groupement doit respecter les axes de symétries du T. K.

Regroupement des 2 cases adjacentes

__Exemple__ Simplification de La fonction « Majorité » : MAJ(A,B,C)

A \ BC	00	01	11	10
0	0	0	1	0
1	0	1	1	1

$G1 = A\bar{B}C + ABC = AC$

$G2 = \bar{A}BC + ABC = BC$

$G3 = AB\bar{C} + ABC = AB$

$$\boxed{MAJ_{(A,B,C)} = G1 + G2 + G3 = AC + BC + AB}$$

__Règle :__ La réunion de deux cases adjacentes contenant 1 chacune élimine une seule variable celle qui change d'état en passant d'une case à l'autre.

Regroupement des 4 cases adjacentes

AB \ CD	00	01	11	10
00	0	0	0	1
01	1	1	0	1
11	1	1	0	1
10	0	0	0	1

$F_{1(A,B,C,D)} = B\bar{C} + C\bar{D}$

AB \ CD	00	01	11	10
00	1	0	1	1
01	1	0	0	0
11	1	1	1	1
10	1	0	1	1

$F_{3(A,B,C,D)} = \bar{C}\bar{D} + AB + \bar{B}C$

AB \ CD	00	01	11	10
00	1	0	0	1
01	0	0	0	0
11	1	0	0	1
10	1	0	0	1

$F_{2(A,B,C,D)} = A\bar{D} + \bar{B}\bar{D}$

__Règle :__

2 variables disparaissent quand on regroupe 4 cases adjacentes, on peut alors remplacer la somme des 4 cases par un seul terme qui comporte que 2 variables uniquement.

Regroupement des 8 cases adjacentes

AB \ CD	00	01	11	10
00	1	0	0	1
01	1	0	0	1
11	1	0	0	1
10	1	0	0	1

$F_{4(A,B,C,D)} = \bar{D}$

__Règle :__

2 variables disparaissent quand on regroupe 8 cases adjacentes, on peut alors remplacer la somme des 8 cases par un seul terme qui comporte que 1 variable uniquement.

__Remarque__

On se limitera à des tableaux de 4 variables, pour résoudre par exemple des problèmes à 5 variables, on les décompose chacun à deux problèmes à 4 variables.