Chapitre : Série numérique

Définition

Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite numérique

* On pose $\boxed{S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k}$

* $(S_n)_n$ est dite la somme partielle d'ordre n.

Exemple

$$S_3 = \sum_{k=1}^{3} \underbrace{\frac{1}{k}}_{u_k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}$$

(S_3) est la somme partielle de $\left(u_k = \frac{1}{k}\right)_{k=1,2,3}$

* On dit une série numérique de terme général u_n notée par

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n \quad \left(\text{c'est une somme infinie des suites}\right)$$

* On dit que $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge si et seulement si

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = S \text{ (finie)}$$

$$\sum_{n\geq 0} u_n \text{ CV ssi } \lim_{n\to+\infty} S_n = S \text{ (finie)}$$

$$\text{ssi } \lim_{n\to+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} u_k\right) \text{ finie}$$

Proposition

$$\boxed{\text{Si } \sum_n u_n \text{ converge} \Longrightarrow \lim_{n\to+\infty} u_n = 0}$$

$$\big[(P)\Rightarrow(Q)\big] \Leftrightarrow \big[\text{non}(Q)\Rightarrow \text{non}(P)\big]$$

Exemple

Montrer que $\sum_{n\geq 1} \overset{u_n}{\frac{n}{n+2}}$ diverge ?

En effet

on a $\lim_{n\to+\infty} \frac{n}{n+2} = 1 \neq 0$ donc $\sum_{n\geq 1} \frac{n}{n+2}$ D.V

Propriétés: Soit $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ deux suites numériques

1) Si $\sum_n u_n$ converge et $\sum_n v_n$ diverge alors

$$\sum_n (u_n+v_n) \text{ diverge}$$

2) Si $\sum_n u_n$ et $\sum_n v_n$ diverge, alors ne peut rien dire à propos de la convergence de $\sum_n (u_n+v_n)$

3) Si $\sum_n u_n$ et $\sum_n v_n$ convergent alors $\forall \lambda \in \mathbb{R}$

$\sum_n (\lambda u_n + v_n)$ converge, et on a

$$\sum_n (\lambda u_n + v_n) = \lambda \sum_n u_n + \sum_n v_n$$

* Convergence absolue.

Définition: On dit que $\sum_n u_n$ est absolument convergente si

$$\boxed{\sum_n |u_n| \text{ converge.}}$$

Proposition: Si $\sum_n u_n$ est absolument convergente alors elle est convergente.

* Comparaison d'une série et d'une intégrale.

Théorème: Soit $a \in \mathbb{R}$,

$f : [a, +\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction

continue, positive et décroissante

alors on a :

$\sum_n f(n)$ et $\int_a^{+\infty} f(t)\,dt$ ont même nature.

Exemple (Série de Riemann).

on a $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}\,dt$ converge $\left(f(t) = \frac{1}{t^2},\ t \in [1, +\infty[\ \ f \searrow \quad f(n) = \frac{1}{n^2},\ n \geq 1 \right)$

alors $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$ C.V (c'est une série de Riemann)

Remarque: La série de Riemann s'écrit $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$

converge ssi $\alpha > 1$ et diverge ssi $\alpha \leq 1$.

* **Les critères de convergence**

1) **Critère de comparaison**:

Proposition. Soit $\sum_n u_n$ et $\sum_n v_n$ deux séries numériques telque $|u_n| \leq v_n,\ \forall n$.

Si $\sum_n v_n$ converge alors $\sum_n u_n$ converge.

Exemple: Mq

$$\sum_{n\geq 1} e^{-2n}\sin(n^2) \text{ est C.V}$$

En effet $|e^{-2n}\sin(n^2)| \leq e^{-2n}$

et comme $\sum_{n\geq 1} e^{-2n} = \sum_{n\geq 1}(e^{-2})^n = \sum_{n\geq 1}\left(\frac{1}{e^2}\right)^n = \sum_{n\geq 1} q^n$

$\sum_{n\geq 1}\left(\frac{1}{e^2}\right)^n$ converge car $\left(\frac{1}{e^2} < 1\right)$.

$\left(\left(\frac{1}{e^2}\right)^n \text{ suite géométrique}\right)$

Donc d'après le critère de comparaison la série

$$\sum_{n\geq 1} e^{-2n}\sin(n^2) \text{ converge.}$$

2) Critère d'Alembert:

Proposition: Soit $\sum_n u_n$ tel que $u_n \neq 0$ $\forall n$.

$$\boxed{\text{Si } \lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = l} \in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}.$$

1er cas: Si $0 \leq l < 1$: alors $\sum_n u_n$ converge

2ième cas: Si $l > 1$: alors $\sum_n u_n$ diverge

3ième cas: Si $l = 1$: On ne peut rien conclure

Exemple

Etudier la convergence de la série $\sum_{n\geq 1} \frac{n^3}{n!}$

Solution : On a $u_n = \frac{n^3}{n!}$, $n \geq 1$

$$u_{n+1} = \frac{(n+1)^3}{(n+1)!}$$

$$\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \left|\frac{\frac{(n+1)^3}{(n+1)n!}}{\frac{n^3}{n!}}\right|$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n+1} = 0 < 1$$

D'après le critère d'Alembert $\sum_{n\geq 1} \frac{n^3}{n!}$ converge.

3) Critère d'Abel :

Proposition : Soit $(\varepsilon_n)_n$ et $(u_n)_n$ deux suites réelles vérifiant :

* $(\varepsilon_n)_n$ est une suite positive, décroissante et $\lim_{n\to+\infty} \varepsilon_n = 0$.
* il existe $M > 0$ (M un réel ne dépend pas de n) tel que, $|u_0 + u_1 + \dots + u_n| \leq M$.

Alors la série $\sum_{n\geq 0} \varepsilon_n u_n$ converge

Exemple.

Montrer que la série $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n}$ est convergente ?

Solution Soit $\varepsilon_n = \frac{1}{n}, \forall n \geq 1$

La suite $(\varepsilon_n)_{n\geq 1}$ est positive

car : $n \geq 1 \Rightarrow 0 < \frac{1}{n} \leq 1$ donc $(\varepsilon_n)_n$ est positive

* $(\varepsilon_n)_n$ est décroissant, en effet :

$$\left(\varepsilon_{n+1} - \varepsilon_n\right) = \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n}\right)$$

on a bien

$$n+1 \geq n$$

$$\Rightarrow \frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{n} \Rightarrow \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} < 0$$

donc $\varepsilon_{n+1} - \varepsilon_n < 0$ d'où $(\varepsilon_n)_n$ est $\searrow$

* $\lim_{n\to+\infty} \varepsilon_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$

$$\Big|\underbrace{(-1) + (-1)^2 + \dots + (-1)^n}_{(= 0 \text{ ou bien } 1)}\Big| \leq 1$$

D'après le critère d'Abel $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n}$ converge