Chapitre : Suites et séries numériques

I. Suites numériques

Définition et propriétés

Définition : Une suite numérique à valeur réelle est une application

$$U : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$$
$$n \mapsto U(n) = U_n$$

La suite réelle est notée $(U_n)_n$

Remarque : Une suite réelle peut être définie à partir d'un certain rang n_0

c'àd $\forall n \geq n_0$ et on note $(U_n)_{n \geq n_0}$

Exemples

1) Soit $(U_n)_n$ définie $U_n = \sqrt{n^2+1}$

2) Soit $(U_n)_n$ définie : $U_n = \frac{\sqrt{n^2+1}}{n-1}$, $\forall n \geq 2$

3) Soit $(U_n)_n$ définie par : $\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = 3U_n^2 + 4, \end{cases}$ $\forall n \geq$

* Suite arithmétique :

Définition : Une suite $(U_n)_n$ est dite arithmétique s'il existe $r \in \mathbb{R}$ tel que : $\boxed{U_{n+1} - U_n = r}$

et on appelle r la raison de la suite arithmétique

Proposition : Si $(U_n)_{n \geq 0}$ est une suite arithmétique de raison $r \in \mathbb{R}$ alors $\forall n \in \mathbb{N}$ on a $\boxed{U_n = U_0 + nr}$

Proposition : Si (U_n) est une suite arithmétique de raison $r \in \mathbb{R}$ alors

$\forall m \geq n \in \mathbb{N}$. on a $\boxed{U_m = U_n + (m-n)r}$

Proposition : Si $(U_n)_n$ est une suite arithmétique de raison $r \in \mathbb{R}$, alors $\forall\ m \leq n$ on a

$$\sum_{k=m}^{n} U_k = \underbrace{(n-m+1)}_{\text{nombre de terme}} \frac{(\overbrace{U_m}^{\text{Premier terme}} + \underbrace{U_n}_{\text{dernier terme}})}{2}$$

Application

Montrer que $\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$?

Solution. Soit $(U_n)_{n\geq 0}$ une suite définie par $U_n = n, \forall n \geq 0$

* $(U_n)_{n\geq 0}$ est une suite arithmétique.

En effet :

$U_{n+1} - U_n = (n+1) - n = 1 = r$

donc $(U_n)_{n\geq 0}$ est une suite arithmétique de raison $r = 1$.

* $\sum_{k=0}^{n} k = \sum_{k=0}^{n} U_k = \frac{(n+1)n}{2}$

* Suite géométrique

Définition : Une suite $(U_n)_n$ est dite une suite géométrique s'il existe $q \in \mathbb{R}$ tel que

$\forall n \in \mathbb{N}$ $\boxed{U_{n+1} = q U_n}$

* Le réel q est appelé la raison de la suite.

Proposition : Si $(U_n)_{n\geq 0}$ est une suite géométrique de raison $q \in \mathbb{R}$ alors on a $\forall n \in \mathbb{N}$

$$\boxed{U_n = q^n U_0}$$

Proposition : Si $(U_n)_{n\geq 0}$ une suite géométrique de raison $q \in \mathbb{R}$, alors $\forall\ m \leq n \in \mathbb{N}$

on a : $$\sum_{k=m}^{n} U_k = \begin{cases} \underbrace{(n-m+1)}_{\text{Nb de terme}} U_0, & \text{si } q = 1 \\ \dfrac{1-q^{n-m+1}}{1-q} U_m & \text{si } q \neq 1 \end{cases}$$

* Suite minorée - Suite majorée - bornée :

Définition : Soit $(U_n)_{n\geq 0}$ une suite réelle

* La suite $(U_n)_{n\geq 0}$ est dite minorée s'il existe un réel $m \in \mathbb{R}$ / $\forall\ n \geq 0$ on a $U_n \geq m$. (m ne dépen[d] pas de n)

* La suite $(U_n)_{n\geq 0}$ est dite majorée s'il existe un ré[el] $M \in \mathbb{R} / \forall\ n \geq 0$ on a $U_n \leq M$ (M ne dépend pas de n

* Une suite $(u_n)_{n\geq 0}$ est dite bornée s'elle est majorée et minorée à la fois

c.à.d. $\forall n \geq 0, \exists m, M \in \mathbb{R}$ tel que

$$\boxed{m \leq u_n \leq M}$$

(M, m, ne dépendent pas de n)

Remarque

La suite $(U_n)_n$ est bornée c'est equivalent qu'à la suite $(|U_n|)_n$ est majorée

c.à.d $|U_n| \leq M \Longleftrightarrow -M \leq U_n \leq M$

Exemples

1) Soit $(U_n)_{n\geq 0}$ définie par: $u_n = 4 + 2n^2 \geq 4$

donc $(U_n)_{n\geq 0}$ est minorée par 4

2) $(U_n)_{n\geq 0}$ définie : $u_n = \dfrac{n^2}{n^2+1}$

$$\left.\begin{array}{l} \text{On a } n^2+1 \geq n^2 \\ \Leftrightarrow 1 \geq \dfrac{n^2}{n^2+1} \end{array}\right\} \text{Donc } (U_n)_n \text{ est majorée par } 1$$

3) La suite $(u_n)_n$ définie par

$$u_n = (-1)^n \cos(n).$$

Mq que $(u_n)_n$ est bornée ?

Solution

$$|u_n| = |(-1)^n \cos(n)| \leq 1.$$

Donc $-1 \leq u_n \leq 1$ d'où $(u_n)_n$ est bornée

* Suite monotone et strictement monotone :

Définition. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle

* On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante ssi

$$u_{n+1} \geq u_n \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

* On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante ssi

$$u_{n+1} > u_n, \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

* On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante ssi

$$u_{n+1} \leq u_n, \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

* On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement décroissante ssi $u_{n+1} < u_n, \ \forall n \in \mathbb{N}$.

* On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est monotone s'elle est croissante ou bien décroissante.

* On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{R}}$ st monotone ssi st $\nearrow$ ou bien st $\searrow$

* Limite d'une suite réelle - Convergence / divergence :

Limite d'une suite réelle :

Définition : Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle, soit $l \in \mathbb{R}$, on dit que $(u_n)_n$ admet une limite finie l ssi

$\forall \varepsilon > 0 \; \exists N \geq 0$ tel que $\forall n \geq N$

on a $|u_n - l| < \varepsilon$.

et on note $\boxed{\lim_{n \to +\infty} u_n = l}$

* On dit que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ n'admet pas de limite

c-à-d : $\lim_{n \to +\infty} u_n = \pm\infty$ ou bien n'existe pas

* Convergence Divergence

Définition : Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle

- On dit que $(u_n)_n$ converge s'elle admet une limite finie
- On dit que $(u_n)_n$ diverge s'elle n'est pas convergente.

Proposition : Toute suite réelle convergente est bornée

* Monotonie et convergence

1) Toute suite croissante et majorée est convergente

2) Toute suite décroissante et minorée est convergente

* Suites adjacentes

Définition : Soient $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ deux suites réelles vérifiant :

* $\forall n \in \mathbb{N}, \; u_n \leq v_n$
* $(u_n)_n$ est croissante et $(v_n)_n$ est décroissante
* $\lim_{n \to +\infty} u_n - v_n = 0$.

Alors $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ sont deux suites adjacentes

Théorème :

Deux suites adjacentes convergent vers la même limite.

* Suites équivalentes

Définition : Soit $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ deux suites

On dit qu'elles sont équivalentes ssi $\lim_{n \to +\infty} \frac{u_n}{v_n} = 1$

et on note $u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n$

Proposition:

Deux suites équivalentes ont la même limite.

Exemple. Soit $(u_n)_{n\geq 1}$ une suite réelle définie par $u_n = \sqrt{n}\,\sin\left(\frac{1}{n}\right)$

Montrer que $(u_n)_{n\geq 1}$ est convergente ?

Solution

On a $\sin(x) \underset{0}{\sim} x$

Prenons $x = \frac{1}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

donc $\sin\left(\frac{1}{n}\right) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{n}$

donc $\sqrt{n}\,\sin\left(\frac{1}{n}\right) \underset{+\infty}{\sim} \frac{\sqrt{n}}{n} = \frac{1}{\sqrt{n}}$

D'où $\left(\sqrt{n}\,\sin\left(\frac{1}{n}\right)\right)_{n\geq 1}$ est équivalente $\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)_{n\geq 1}$

Par suite $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n}\,\sin\left(\frac{1}{n}\right) = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$ (finie)

D'où la suite $\left(\sqrt{n}\,\sin\left(\frac{1}{n}\right)\right)_{n\geq 1}$ est convergente et converge vers 0.