Institut Supérieur d'Informatique et de Mathématiques de Monastir

Cours : Logique Formelle

Chapitre 1: Initiation à La Logique Formelle

Enseignante: Dr. Aljia BOUZIDI

aljia.bouzidi95@gmail.com

1ère Licence en Sciences d'Informatique

Année Universitaire :2024-2025

Objectifs

- Avoir une généralité sur la « Logique Formelle ».
- Comprendre la notion de la logique, les types des logiques les plus connues, les modes de raisonnements, etc.
- Connaitre l'utilité des langages formelle
- Savoir la différence entre un langue naturelle et langage formel

Contenu du chapitre1

1. Partie 1: La logique
2. Partie 2 : Le Langage Symbolique
3. Annexes

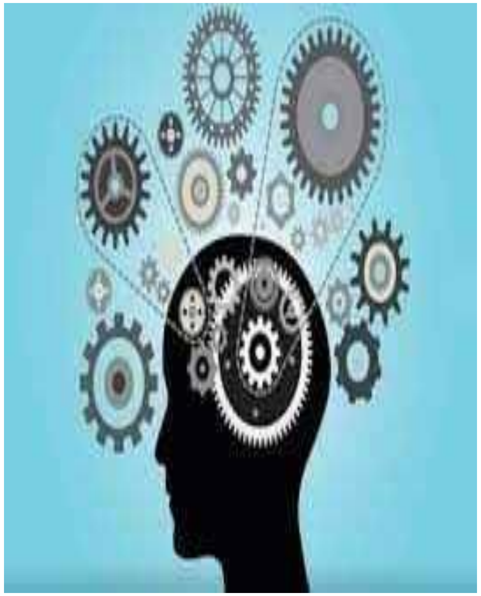
Institut Supérieur d'Informatique et de Mathématiques de Monastir

Partie 1: La Logique

Contenu de la Partie 1

1. C'est Quoi la Logique
2. Catégories des Logiques
3. Logiques Inductives
4. Raisonnements Déductifs
5. La Logique de l'Aristote
6. Les 3 Principes d'Artistote
7. Que Fait La Logique ?
8. Modes de Raisonnement déductifs

C’est Quoi la Logique



La **logique** est un mot vient du grecque « **logos** » qui signifie «**étudie le discours** », et par extension «**rationalité/raisonnement**, la logique est donc la **science de la raison**.

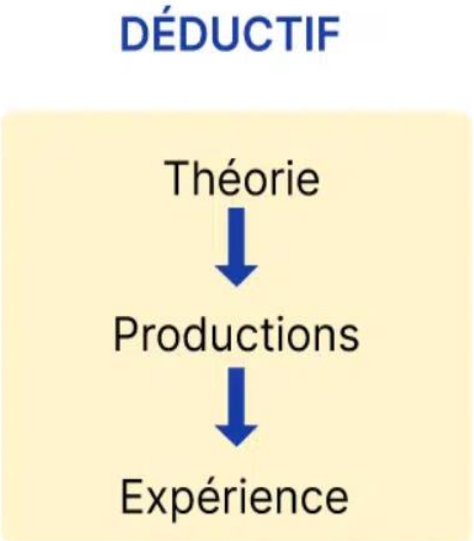
Catégories des Logiques

- La Logique est la discipline qui s'attaque à la notion de **validité** des **raisonnements**, toutefois, la manière de traiter cette notion, les fondements, le formalisme utilisé, etc., changent d'une *logique* à une autre.

- Nous avons une sorte d'arbre d'héritage entre ces différentes logiques :

- **Logique**
  - **Logiques inductives**
  - **Logiques déductives**
    - **Logiques classiques**
      - **Logique des propositions**
      - **Logiques des prédicats**
    - **Logiques non classiques**

Raisonnements Déductifs (1/3)



- **Raisonnement déductif** **fonctionne dans la direction opposée du raisonnement inductif.**
- C'est un processus de réflexion logique qui utilise l'approche descendante pour aller du plus général au plus spécifique.
- Cela implique l'utilisation d'**hypothèses** générales et de **prémisses** logiques pour arriver à une **conclusion** logique.
- **Approche du Raisonnement Déductif :**
  1. Commencer par une Théorie Existante
  2. Formuler une Hypothèse basée sur la Théorie Existante
  3. Recueillir des Données pour Tester l'Hypothèse
  4. Analyser les résultats pour voir si les Données Soutiennent ou Rejettent l'Hypothèse

Raisonnements Déductifs (2/3)

- **Exemple**

Commencer par une Théorie Existante	Formuler une Hypothèse	Tester l'Hypothèse	Analyser les résultats
Toutes les applications d'édition à faible coût rencontrent des problèmes	Si les utilisateurs sélectionnent une application d'édition à faible coût, ils rencontreront des problèmes	Recueillir des données sur les applications d'édition à faible coût	20 des 50 applications d'édition à faible coût ne rencontrent pas de problèmes = **Rejeter l'hypothèse**

Raisonnement déductif = raisonnement dont les prémisses impliquent nécessairement la conclusion =+- math

Raisonnement déductif est en grande partie associé au philosophe grec Aristote (384-322 av. J.-C.). Aristote est largement reconnu comme l'un des fondateurs de la logique formelle et du raisonnement déductif.

La Logique de l'Aristote

- Aristote: le fondateur de la logique formelle: Il à proposé un mode de raisonnement appelé syllogisme est un raisonnement logique mettant en relations trois propositions : deux d'entre elles, appelées «**prémisses**», conduisent à une «**conclusion**».

Le syllogisme introduit l'idée de **quantification** : on parle de choses qui existent, ou vraies pour certains individus et pas d'autres.

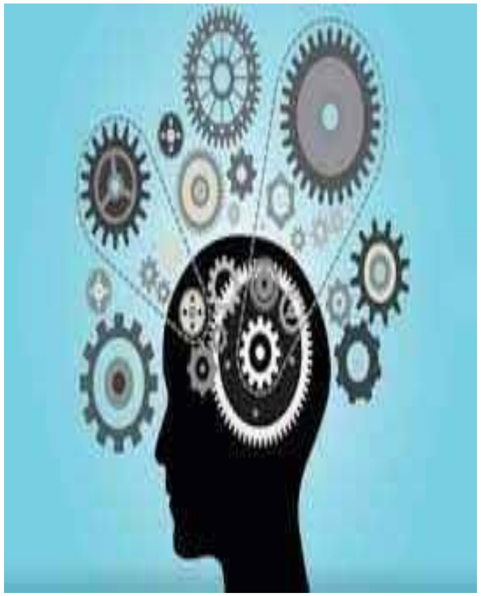
  - **Exemple:** A→ B et B→ C donne A→ C

- Buridan (XIV ème Siècle): Généralisation de la logique d'Aristote

- Boole (XIX ème Siècle): détachent la logique de la philosophie et la rattachent aux mathématiques

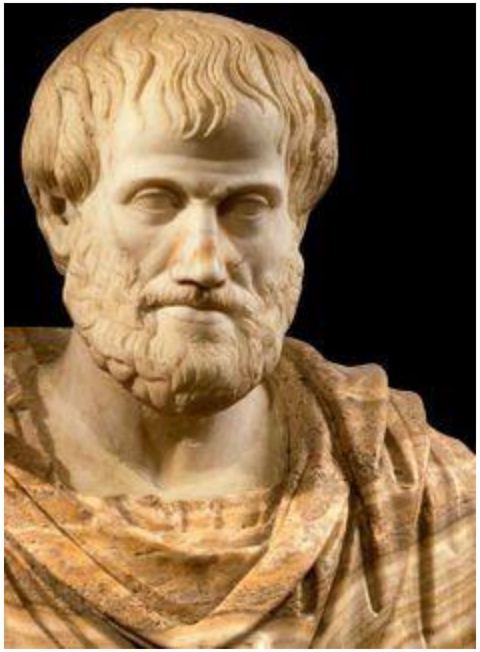
passage de l'implicite à l'explicite.

La Logique de l'Aristote



- **Prémisses** : propositions dont on admet la vérité
- **Conclusions** : propositions qui doivent être admises comme vraies si les prémisses le sont.
- Parfois des **inférences** des prémisses sont nécessaires
- **La logique** = la science qui étudie le caractère **correct** ou **non** des **raisonnements**.

Les 3 Principes d'Artistote



1. **Le principe de non-contradiction:**

   Une proposition A ne peut être à la fois vraie et fausse

2. **Le principe de tiers exclu:**

   Une proposition A est forcément vraie ou fausse

3. **Le principe de d'identité:**

   La chose A s'explique (ou se vérifie) par elle-même

Que Fait La Logique ? (1/3)

- La **logique** est la «science» qui étudie la **relation** entre **propositions**.
- Elle est **l'exercice de la raison** (= ratio en latin) dont le mot signifie *calcul, jugement, pensée.*
- Elle calcule **la justesse** de leur relation.

- On utilise donc les syllogismes, du grec
  συν λογικον = « sun logicon » = lier ensemble.
- L'**objectif** étant de démontrer la véracité ou la fausseté d'une proposition énoncée.
- L'exemple donné le plus souvent :
  - « Tout homme est mortel » et « Socrate est un homme » donc... « Socrate est mortel ».

Que Fait La Logique ? (2/3)

- L'exemple donné le plus souvent :
  - « Tout homme est mortel » et « Socrate est un homme » donc… « Socrate est mortel ».
- En termes de logique, on peut dire que si je sais que « B est A » et « C est B » alors je peux conclure que « **C est A** ».

j'ai ainsi dégagé une règle générale de raisonnement.

Logique =Déduction

- Le **calcul des propositions** constitue la **première étape** vers la **formalisation des démonstrations** (pour étudier la validité d'un raisonnement, on ne regarde pas son contenu, mais la relation entre les propositions - donc la forme du raisonnement).
- Il permet de **s'assurer sans risque d'erreur** que **des déductions complexes sont valides**.
- On utilise les « 5 connecteurs logiques »

NON, ET, OU , IMPLIQUE , EQUIVALENCE

Modes de Raisonnement déductif (1/6)

- **Modes de raisonnement logique** :
  - *Logique de Boole,*
  - *Logique des propositions,*
  - *Logique des prédicats,*
  - *etc.*

Mode de Raisonnement Déductif (2/6) : Logique de Boole

- Appelé aussi l'algèbre de Boole, ou calcul booléen.

- Initiée en 1854 par le mathématicien britannique George Boole.

- C'est la partie des mathématiques, de la logique et de l'électronique qui s'intéresse aux **opérations** et aux **fonctions** sur les **variables logiques**.

- Elle permet d'utiliser les techniques algébriques pour traiter des expressions **à deux valeurs du calcul des propositions**. Résultat: ***Vrai*** ou ***Faux***

Mode de Raisonnement Déductif (3/6) : Logique Propositionnelle

- La **logique propositionnelle** ou **raisonnement propositionnel** ou **calcul propositionnel** est une partie de la logique déductive qui traite des **propositions.**
- Le raisonnement propositionnel est largement utilisé en logique formelle, en mathématiques et en informatique pour modéliser et évaluer des arguments et des systèmes basés sur des propositions logiques.
- Il permet de manipuler formellement les propositions et d'effectuer des déductions valides en utilisant des règles logiques bien définies.

C'est quoi une proposition?

- c'est simplement un énoncé qui est soit **vrai,** soit **faux**, sans **ambiguïté**
- Dans la logique des propositions, les opérations qui lient les propositions pour en former d'autres plus complexes sont appelées des *connecteurs logiques (¬, ⋁, ⋀, ..)*. ,
- Un connecteur binaire permet de composer deux propositions pour en obtenir une troisième,
- un connecteur unaire permet d'obtenir une proposition à partir d'une autre
- **Exemple:**
  - p1 :="Toronto est la capitale du Canada" (faux)
  - p2 := "le chat est un animal" (vrai)
  - p3 :="1 + 1 = 3" (faux)

Proposition = phrase déclarative pouvant être vraie ou fausse

- **Attention**: certaines affirmations peuvent ne pas être des propositions.

Mode de Raisonnement Déductif (5/6): Logique Propositionnelle (suite)

- **Exemples d'affirmations qui sont des proposition**
  - **P1**: «5 plus 4 font 9»
  - **P2**: «7,4 est compris entre 4 et 5»
  - **P3:** «Le train numéro 51 arrive en retard»
  - **P4:** «il pleut»
  - **P5**: «10 est divisible par 5».

Mode de Raisonnement Déductif (6/6):
Logique Propositionnelle (suite)

- **Exemples d'affirmations qui ne sont pas des proposition**

  - **Q1:** «la présente affirmation est fausse»
    - elle serait vraie si l'affirmation est fausse
    - elle serait fausse si l'affirmation est vraie

    Le résultat pourrait être aussi bien V que F

  - **Q2:** «tout nombre strictement négatif n'est pas un carré»
    - elle serait vraie si on raisonne dans $\mathbb{R}$
    - elle serait fausse si on raisonne dans $\mathbb{C}$

    Le résultat pourrait être aussi bien V que F

Institut Supérieur d'Informatique et de Mathématiques de Monastir

Partie 2: Le Langage Symbolique

Contenu de la Partie 2

1. Introduction
2. Langage formel et langage naturel
3. Définition
4. Langages Formels vs. Langues Naturelles :
5. Exercices Applicatifs

Introduction

L'idée d'utiliser un **langage symbolique** permet de **simplifier** beaucoup de choses en mathématique.

Langage formel et langage naturel

Le **langage naturel** est le **langage que nous utilisons dans la vie** de tous les jours, qui a deux inconvénients majeurs quand on l'utilise en mathématique :

- la complexité des phrases,
- le fait que les ambigüités du langage courant peuvent conduire à des erreurs,

Définition d'un langage formel

Lorsque l'on définit un langage formel, on doit définir deux choses qui caractérisent ce langage :

- un **alphabet** c.à.d. un **ensemble de symboles** (comme dans le cas des langages naturels),
- une **syntaxe** c.à.d. un **ensemble de règles** qui définit quels mots appartiennent au **langage formel**.
- Nous pouvons donc définir ce qu'est un langage formel :

> Un langage formel est un **ensemble de mots de longueur finie** défini par un **alphabet** et **une syntaxe**.

Langages Formels vs. Langues Naturelles :

- **Utilité :**
  - **Langages formels** : Ils sont construits de manière explicite, sans exceptions. Le vocabulaire, les significations des expressions primitives et les règles de formation des expressions complexes sont déterminés de manière univoque.
  - **Langues naturelles** : Elles sont plus complexes, influencées par les significations des mots et les règles grammaticales. Les règles ne dépendent pas seulement de la catégorie grammaticale, mais aussi de la signification des expressions.
- **Expressivité et Ambiguïté :**
  - **Langages formels :** Ils sont moins expressifs que les langues naturelles et ne permettent pas l'ironie, les métaphores ou le double sens. Leur vocabulaire et leurs règles sont limités.
  - **Langues naturelles** : Elles sont riches en ambigüités, par exemple, l'ordre des mots peut donner lieu à différentes analyses syntaxiques, conduisant à des significations différentes

Symboles des connecteurs usuels

- Les symboles des connecteurs les plus usuels sont:
  - **Négation** : *Non* (**Notation :** $\neg$)
  - **Conjonction** : *Et* (**Notation :** $\wedge$)
  - **Disjonction** : *Ou* (**Notation :** $\vee$)
  - **Conditionnel :** *implique (si…alors)* (**Notation :** $\longrightarrow$ *ou* $\Rightarrow$)
  - **Equivalence :** *Si et Seulement Si* (**Notation :** $\leftrightarrow$ *ou* $\Leftrightarrow$)

Exercices Applicatifs (1/5)

Exercice 1 :

considérons la situation décrite par les affirmations suivantes :

1. Si le train arrive en retard et s’il n’y a pas de taxis à la gare, alors l’invité arrive en retard.
2. L’invité n’est pas en retard.
3. Le train est arrivé en retard

Déduction : Donc, il y avait des taxis à la gare;

Question : Pourquoi peut-on déduire qu’il y avait des taxis à la gare ?

Exercices Applicatifs (2/5)

Correction d’exercice 1 :

Pour répondre à cette question, on procède comme suit:

1. si on combine les affirmations 1 et 3, on peut affirmer que s’il n’y avait pas eu de taxis à la gare, alors l’invité serait arrivé en retard.

1. cette dernière affirmation n’est compatible avec le fait 2 que s’il y avait des taxis à la gare.

1. donc, il est consistant de déduire qu’il y avait des taxis à la gare.

Exercices Applicatifs (3/5)

Exercice 2 :

Dans chacun des cas ci-dessous dire si le affirmations sont des propositions

1. "La présente affirmation est vraie" **Non (explication : c'est une affirmation paradoxale).**
2. "π est compris entre 3 et 4" **Oui.**
3. "15 plus 13 font 34" **Oui.**
4. "Le nombre complexe i a pour module 3" **Oui.**
5. "Quel temps fait-il ?" **Non (explication : c'est une question, pas une affirmation).**
6. "L'affirmation qui suit est vraie" **Non (explication : c'est une affirmation paradoxale).**

1. "L'affirmation qui précède est fausse" **Non (explication : c'est une affirmation paradoxale).**

1. "Le nombre complexe z a pour module 3" **Oui.**
2. "Le triangle T est isocèle" **Oui.**
3. "30 est divisible par 7" **Oui.**

Exercices Applicatifs (4/5)

Exercice 3 : *Forme symbolique*

Soient p et q les deux affirmations suivantes :

- p: « Ali est fort en physique »
- q: « Ali est fort en Chimie »

Question : représenter les affirmations qui suivent sous forme symbolique, à l'aide des variables p et q et des connecteurs usuels.

1. « Ali est fort en physique mais faible en chimie » $p \wedge \neg q$
2. « Ali n'est fort ni en physique ni en chimie » $\neg p \wedge \neg q$
3. « Ali est fort en physique ou il est a la fois fort en chimie et faible en physique » $p \vee (q \wedge \neg p)$
4. « Ali est fort en physique s'il est fort en chimie » $q \rightarrow p$
5. « Ali est fort en chimie et en physique ou il est fort en chimie et faible en physique » $(q \wedge p) \vee (q \wedge \neg p)$

Exercices Applicatifs (5/5)

Exercice 4 : *Forme symbolique*

Soient p , c et a les trois affirmations suivantes :

- p : « karim fait de la physique »
- c : « karim fait de la chimie »
- a : « karim fait de l’allemand»»

Question : représenter les affirmations qui suivent sous forme symbolique, à l’aide des variables p, c et a, et des connecteurs usuels.

1. karim fait de la physique et de l’allemand mais pas de la chimie.
2. karim fait de la physique et de la chimie mais pas à la fois de la chimie et de l’allemand.
3. Il est faux que karim fasse de l’allemand sans faire de la physique.
4. Il est faux que karim ne fasse pas de la physique et fasse quand même de la chimie.
5. Il est faux que karim fasse de l’allemand ou de la chimie sans faire de la physique

6. karim ne fait ni allemand ni chimie mais il fait de la physique

Institut Supérieur d'Informatique et de Mathématiques de Monastir

Annexes

Concepts de Théorie en Mathématique (1/6)

La théorie de la logique mathématique fait appel à un vocabulaire et des symboles particuliers, dont les principaux, ceux dont nous nous servirons plus tard

1. Concept :

- Un concept est une **idée abstraite** ou **une classe d'objets** qui partagent **des caractéristiques ou des propriétés communes**. Les concepts sont **utilisés pour regrouper des objets similaires** sous une catégorie ou un ensemble
- Exemple: "triangle" est un concept qui permet de regrouper des objets géométriques spécifiques sous une catégorie définie par leurs caractéristiques communes.

Concepts de Théorie en Mathématique (2/6)

2. Terme:

- Un terme est une **expression** ou un **symbole** qui **représente** un **objet** ou **une entité spécifique** dans le domaine de la logique formelle. Ces objets peuvent être des nombres, des variables, des constantes ou d'autres entités du même genre.
- Les termes sont souvent **utilisés pour décrire les éléments** de base d'une proposition ou d'une expression logique.
- Exemple: , dans l'expression "x + 2 = 5", "x," "2," et "5" sont tous des termes qui représentent des nombres ou des valeurs spécifiques.

3.Les définitions

- Un élément important d'une théorie sont ***les définitions***.
- Formellement, une définition est un énoncé qui introduit un nouveau symbole appelé **terme** à partir d'une **suite de symboles** déjà connus, appelée assemblage.

Concepts de Théorie en Mathématique (3/6)

4.Proposition atomique:

- une **proposition atomique** ou **variable** est une affirmation simple soit vraie, soit fausse**.**

5. Proposition :

- **Une proposition** est **composée** de **propositions atomiques, reliées** entre-elles par des **connecteurs logiques (⊃, ¬, ∨, ∧).** On va revenir sur ce qu'est les connecteurs logiques tout de suite
- **Une proposition** est un **énoncé abstrait** sur lequel **on ne fait aucune hypothèse à priori** sur la véracité ou la fausseté
- La logique des **propositions** est une branche de la **Logique** et plus précisément de la logique classique**.**
- Dans la logique des propositions, les opérations qui lient les propositions pour en former d'autres plus complexes sont appelées des *connecteurs*,
- Un **connecteur binaire** permet de **composer** deux propositions pour en obtenir une troisième,
- un **connecteur unaire** permet d'obtenir une proposition à partir d'une autre .
- Exemple:
  - Il pleut
  - Tout homme est mortel
  - La fille est jolie

6. Les théorèmes

- A partir de **ces axiomes**, on peut **en tirer des théorèmes**.
- Un théorème **est une assertion vraie** qui est démontré à partir des axiomes (ou à partir d'autres théorèmes eux mêmes démontré par des axiomes mais cela revient au même).
- Un **théorème nécessite** donc une **démonstration**.
- En plus de la notion de théorème, on a les notions suivantes (moins
- souvent utilisées) :
  - **Lemme** : un lemme est **une assertion** que l'on **démontre** qui sert à la démonstration d'un théorème plus important.
  - **Conjecture** : proposition mathématique que l'on suppose vrai mais sans avoir être démontré, **une conjecture démontrée devient un théorème**
  - **Corollaire** : un corollaire est **une conséquence immédiate d'un théorème démontré.**

Concepts de Théorie en Mathématique (5/6)

7. Table de vérité:

- Une table de vérité est un **tableau donnant** la vérité d'une proposition (**vraie V** ou **fausse F**). Elle peut faire office de démonstration.

8. Un modèle:

- Un **modèle M** attribue à des **propositions atomiques un état**, vrai ou faux
- Exemple : A = V , B = V , C = F est un modèle dans lequel les propositions A et B sont vraies, et C est fausse.

9. Les axiomes

- Un axiome est une **proposition** que l'on admet, et sur laquelle on base tous **nos raisonnements logiques**.
- Ce qui forme la base d'une théorie (**le point de départ**), sont les axiomes.
- C'est simplement **une affirmation** que l'on tient **pour vrai**.
- **L'ensemble des axiomes** d'une théorie s'appelle **axiomatique**.

Concepts de Théorie en Mathématique (6/6)

10. Règle d'inférence:

- Une **règle d'inférence** est une **règle qui permet de déduire** (ou
- 'dériver') des propositions, à partir d'autres propositions. On notera alors $A \rightarrow B$ si l'on peut déduire B de A.
- En logique: un raisonnement **valide** utilise des **règles d'inférence** valides.
- Une règle d'inférence permet le passage d'un certain nombre de prémisses à une conclusion.

11. Proposition prouvable:

- Une proposition est dite prouvable ou dérivable, et elle sera précédée de ($\vdash$**)**, lorsque que **l'on peut la dériver**, à l'aide de **règles d'inférences**, à partir d'un ou de **plusieurs axiomes**.

12. Proposition prouvable:

- Une **tautologie**, qui sera **précédée** par ($\vDash$), est une proposition qui est **toujours vraie**, quelque soit le modèle.

Fin

aljia.bouzidi95@gmail.com