ISIM Monastir **L1 INF, TIC et EEA**
Département de Mathématiques

Serie 3

EXERCICE 1

Soit
$$f(x) = \arccos\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)$$

1. Déterminer le domaine de définition de f et la parité de f.
2. Calculer $f(0)$, $f(1)$; et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.
3. Déterminer le domaine de dérivabilité de f et calculer $f'(x)$.
4. En déduire une expression simplifiée de f.
5. Montrer que f réalise une bijection de $]0,+\infty[$ sur un intervalle que l'on précisera.
6. Déterminer la fonction réciproque de f sur l'intervalle $[0,+\infty[$.

EXERCICE 2

En calculant leurs dérivées, simplifier les fonctions suivantes

1. $$f(x) = \arccos(x) + \arcsin(x)$$
2. $$f(x) = \arctan(x) + \arctan\frac{1}{x}$$

- Série 3 -

Ex1 :

1) on pose $g : x \mapsto \dfrac{1-x^2}{1+x^2}$ dérivable sur $\mathbb{R}$.

et $g'(x) = \dfrac{-2x(1+x^2) - 2x(1-x^2)}{(1+x^2)^2}$

$= \dfrac{-4x}{1+x^2}$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
g	-1	$\nearrow$	$g(0)=1$	$\searrow$	-1

$\forall x \in \mathbb{R}\ g(x) \in]-1, 1] \subset [-1,1]$: vrai

d'ou $D_f = \mathbb{R}$.

2) $f(0) = \arccos\left(\dfrac{1-0}{1+0}\right)$

$= \arccos(1)$ $\quad \cos(?) = 1$, $? = 0 \in [0,\pi]$

$= 0$

$f(1) = \arccos\left(\dfrac{1-1}{1+1}\right)$

$= \arccos(0)$ $\quad \cos(?) = 0$, $? = \frac{\pi}{2} \in [0,\pi]$

$= \dfrac{\pi}{2}$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \arccos\left(\dfrac{1-x^2}{1+x^2}\right) = \pi$

car $\begin{cases} \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1-x^2}{1+x^2} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{-x^2}{x^2} = -1 \\ \lim\limits_{X \to -1} \arccos(X) = \pi \end{cases}$

3) on a f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$

$\left[\begin{array}{l} \text{car } g(x) = 1 \text{ ssi } x = 0 \\ \text{et } \forall x \in \mathbb{R}\ g(x) \neq -1 \end{array}\right.$

(car arccos est dérivable sur $]-1, 1[$

C-à-d $\arccos(g(x))$ est dérivable

ssi $g \in]-1, 1[$

et on a $g(x) \neq -1$ et $g(x) \neq 1$

$\forall x \in \mathbb{R}^*$)

$f'(x) = \left(\arccos\left(\dfrac{1-x^2}{1+x^2}\right)\right)'$

$= \dfrac{4x}{(1+x^2)^2 \sqrt{\dfrac{4x^2}{(1+x^2)^2}}}$

$= \dfrac{4x}{\dfrac{(1+x^2)^2}{(1+x^2)} \times 2|x|}$

$= \dfrac{4x}{(1+x^2)\, 2|x|}$

$= \dfrac{2x}{(1+x^2)|x|}$

4) . si $x > 0$ $f'(x) = \dfrac{2}{1+x^2} = 2\arctan'(x)$

. si $x < 0$ $f'(x) = \dfrac{-2}{1+x^2} = -2\arctan'(x)$

on a $\forall x \in \mathbb{R}$

$(\arctan(x))' = \dfrac{1}{1+x^2}$

4) on a

$$\begin{cases} f'(x) = 2\arctan'(x) \text{ si } x>0 \\ f'(x) = -2\arctan'(x) \text{ si } x<0 \end{cases} \quad x\in\mathbb{R}^*$$

$$\Rightarrow \begin{cases} f(x) = 2\arctan(x) + C_1 \text{ si } x \geq 0 \ (1) \\ f(x) = -2\arctan(x) + C_2 \text{ si } x \leq 0 \ (2) \end{cases} \quad x\in\mathbb{R}$$

et comme f est continue sur $\mathbb{R}$

$f(1) = 2\arctan(1) + C_1 = \frac{\pi}{2}$

$= 2 \times \frac{\pi}{4} + C_1 = \frac{\pi}{2}$

$\Rightarrow C_1 = 0$
de m̂ $C_2 = 0$

et on a f paire $\begin{cases} \text{si } x>0 \Rightarrow -x<0 \\ \text{si } x<0 \Rightarrow -x>0 \end{cases}$

$\Rightarrow f(x) = f(-x)$ $\Rightarrow (1) = (2)$

et $\Rightarrow 2\arctan(x) = 2\arctan(-x)$

Conclusion :

$f(x) = 2\arctan(|x|)$
$\forall x \in \mathbb{R}$.

Ex2 :

1) $f(x) = \arccos(x) + \arcsin(x)$

f est définie continue sur $[-1, 1]$
dérivable sur $]-1, 1[$

$f'(x) = (\arccos(x) + \arcsin(x))'$

$= (\arccos(x))' + (\arcsin(x))'$

$= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$

$= 0$

$\Rightarrow$ f est cte sur $[-1, 1]$

$f(0) = \arccos(0) + \arcsin(0)$

$= \frac{\pi}{2} + 0$

$= \frac{\pi}{2}$

donc $f(x) = \frac{\pi}{2}$ $\forall x \in [-1, 1]$

2) $f(x) = \arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right)$

f est définie continue et dérivable sur $\mathbb{R}^* =]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$

$f'(x) = \left(\arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right)\right)'$

$= (\arctan(x))' + \left(\underbrace{\arctan}_{f}\left(\underbrace{\frac{1}{x}}_{U}\right)\right)'$

$= \frac{1}{x^2+1} + \underbrace{\left(\frac{-1}{x^2}\right)}_{U'} \cdot \underbrace{\frac{1}{1+\left(\frac{1}{x^2}\right)}}_{f'(U)}$

$$\boxed{(f \circ U)'(x) = (f(U))' = U' \cdot f'(U)}$$

$= \frac{1}{x^2+1} + \frac{-1}{x^2+1} = 0$

donc f est constante sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$

et on a

, $f(1) = \arctan(1) + \arctan\left(\frac{1}{1}\right)$

$= \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$

, $f(-1) = \arctan(-1) + \arctan\left(\frac{1}{-1}\right)$

$= \frac{-\pi}{4} + \frac{-\pi}{4} = \frac{-\pi}{2}$

$$\Rightarrow f(x) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} \text{ si } x>0 \\ \frac{-\pi}{2} \text{ si } x<0 \end{cases}$$