Espaces Vectoriels :

Dans tout ce qui suit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$

I) Définitions - Propriétés :

Def : Soit E un ensemble muni d'une loi de composition interne notée $+$ et d'une loi de composition externe notée

$$+ : E \times E \longrightarrow E$$
$$(u, v) \longmapsto u + v$$

et

$$\cdot : \mathbb{K} \times E \longrightarrow E$$
$$(\alpha, u) \longmapsto \alpha u$$

On dit que $(E, +, \cdot)$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ ou E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel si on a :

1) $\forall u, v \in E$, $u + v = v + u$

2) $\forall u, v, w \in E$, $u + (v + w) = (u + v) + w$

3) Il existe un élément de E noté 0_E appelé élément neutre tq : $x + 0_E = x$

4) $\forall x \in E, \exists x' \in E$; $x + x' = 0_E$ (x' appelé élément symétrique de x noté $-x$)

5) $\forall x \in E$, $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}$, $(\alpha + \beta) x = \alpha x + \beta x$

6) $\forall x \in E$, $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}$, $\alpha(\beta \cdot x) = (\alpha\beta) x$

7) $\forall x, y \in E$, $\forall \alpha \in \mathbb{K}$, $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$

8) $\forall x \in E$ $1 \cdot x = x$

Rq : Les éléments de E sont appelés vecteurs.
Les éléments de $\mathbb{K}$ sont appelés les scalaires.

Ex :

1) $E = \mathbb{R}^2 = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}\}$

Soit $u \in E \Rightarrow u = (x_1, y_1)$
$v \in E \qquad v = (x_2, y_2)$

$$(u + v) = (x_1, y_1) + (x_2, y_2)$$
$$= (x_1 x_2, y_1 y_2)$$

$\forall \alpha \in \mathbb{R}$, $\forall u = (x_1, y_1) \in E$

$$\alpha u = \alpha(x_1, y_1) = (\alpha x_1, \alpha y_1)$$

$u = (x_1, y_1)$; $v = (x_2, y_2)$ et $w = (x_3, y_3)$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

1)
$$u + v = (x_1, y_1) + (x_2, y_2)$$
$$= (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$$
$$= (x_2, y_2) + (x_1, y_1)$$
$$= v + u$$

2)
$$u + (v + w) = (x_1, y_1) + ((x_2, y_2) + (x_3, y_3))$$
$$= (x_1, y_1) + (x_2 + x_3, y_2 + y_3)$$
$$= (x_1 + (x_2 + x_3), y_1 + (y_2 + y_3))$$
$$= ((x_1 + x_2) + x_3, (y_1 + y_2) + y_3)$$
$$= ((x_1 + x_2), (y_1 + y_2)) + (x_3, y_3)$$
$$= ((x_1, y_1) + (x_2, y_2)) + (x_3, y_3)$$
$$= (u + v) + w$$

3)

$u = (x_1, y_1)$

$\exists\ ?\ 0_E\,(a,b)\ /\ u + 0_E = u$

$(x_1, y_1) + (a,b) = (x_1, y_1)$

$(x_1 + a, y_1 + b) = (x_1, y_1)$

$\iff \begin{cases} x_1 + a = x_1 \\ y_1 + b = y_1 \end{cases} \iff a = b = 0$

$\Rightarrow 0_E = (0,0)$

Soit $0_E = (0,0)$ on a :

$u + 0_E = (x_1, y_1) + (0,0)$

$= (x_1 + 0, y_1 + 0)$

$= (x_1, y_1)$

$= u.$

4) $u + u' = 0_E$

$(x_1, y_1) + (a,b) = (0,0)$

$(x_1 + a, y_1 + b) = (0,0)$

$\iff \begin{cases} x_1 + a = 0 \\ y_1 + b = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x_1 = -a \\ y_1 = -b \end{cases}$

$\Rightarrow u' = (-x_1, -y_1)$

5) $(\alpha + \beta)\, u = (\alpha + \beta)(x_1, y_1)$

$= ((\alpha+\beta) x_1, (\alpha+\beta) y_1)$

$= (\alpha x_1 + \beta x_1, \alpha y_1 + \beta y_1)$

$= (\alpha x_1, \alpha y_1) + (\beta x_1, \beta y_1)$

$= \cancel{(\alpha x_1 + \alpha y_1) +}$

$= \alpha (x_1, y_1) + \beta (x_1, y_1)$

$= \alpha u + \beta u$

6) $\alpha(\beta u) = \alpha(\beta(x_1, y_1))$

$= \alpha(\beta x_1, \beta y_1)$

$= (\alpha\beta x_1, \alpha\beta y_1)$

$= \alpha\beta (x_1, y_1)$

$= (\alpha\beta)\, u.$

7) $\alpha(u + v) = \alpha((x_1, y_1) + (x_2, y_2))$

$= \alpha(x_1 + x_2, y_1 + y_2)$

$= (\alpha(x_1 + x_2), \alpha(y_1 + y_2))$

$= (\alpha x_1 + \alpha x_2, \alpha y_1 + \alpha y_2)$

$= (\alpha x_1, \alpha y_1) + (\alpha x_2, \alpha y_2)$

$= \alpha(x_1, y_1) + \alpha(x_2, y_2)$

$= \alpha u + \alpha v.$

8) $\forall\ 1.u = 1(x_1, y_1)$

$= (1.x_1, 1 y_1)$

$= (x_1, y_1) = u.$

Conclusion :

$(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

Plus généralement :

* $(\mathbb{R}^n, +, \cdot)$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

2) $E = \left\{ \begin{array}{l} f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto f(x) \end{array} \right\}$

Alors E est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ avec les lois suivantes

$\forall\ f, g \in E,\ (f+g)(x) = f(x) + g(x)$

$\forall\ \lambda \in \mathbb{R},\ \forall f \in E,$

$(\lambda f)(x) = \lambda f(x)$

3) $E = \mathbb{R}[x]$

$E = \mathbb{C}[x]$

Propriétés:

Soit $(E, +, \cdot)$ un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$

Alors on a:

$\forall\, u, v \in E, \forall\, \alpha, \beta \in \mathbb{K}$:

1) $0 \cdot u = 0_E$

2) $(-1) \cdot u = -u$

3) $\alpha \cdot 0_E = 0_E$

4) $(-\alpha) u = \alpha(-u) = -(\alpha u)$

5) $(\alpha - \beta) u = \alpha u - \beta u$.

6) $\alpha(u - v) = \alpha u - \alpha v$.

7) $\alpha u = 0_E \iff \alpha = 0$ ou $u = 0_E$

II) Sous-espaces Vectoriels:

Dans toute la suite $(E, +, \cdot)$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$.

Définition:

Une partie F de E est dite un sous espace vectoriel de E si seulement si on a:

1) $F \neq \emptyset$

2) $\alpha u \in F, \forall\, \alpha \in \mathbb{K}, \forall\, u \in F$

3) $u + v \in F, \forall\, u, v \in F$.

(2) et (3) $\iff$ $\alpha u + v \in F$, $\forall\, \alpha \in \mathbb{K}$, $\forall\, u, v \in F$

Remarque:

1) tout sous espace vectoriel F de E contient le vecteur nul 0_E

Ex:

$F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ x + y = 0\}$

1) $0_E = 0_{\mathbb{R}^2} = (0, 0) \in F$

car $0 + 0 = 0$

2) Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et $u \in F$

$u = (x_1, y_1)$; $x_1 + y_1 = 0$

$\alpha u = \alpha(x_1, y_1) = (\alpha x_1, \alpha y_1)$

On a: $\alpha x_1 + \alpha y_1 = \alpha(x_1 + y_1)$

$= \alpha \cdot 0 = 0$

$(\alpha x_1 ; \alpha y_1) \in F$

$\iff \alpha(x_1, y_1) \in F$

$\iff$ ~~$\alpha \times u$~~ $\alpha \cdot u \in F$

3) Soit $u, v \in F$

$u = (x_1, y_1)$; $x_1 + y_1 = 0$

$v = (x_2, y_2)$; $x_2 + y_2 = 0$

$u + v = (x_1, y_1) + (x_2, y_2)$

$= (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$

On a:

$x_1 + x_2 + y_1 + y_2 = \underbrace{x_1 + y_1}_{0} + \underbrace{x_2 + y_2}_{0}$

$= 0 + 0 = 0$

$\Rightarrow u + v \in F$

cc: F est un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$.

Remarque: ① Tout sous espace vectoriel F de E contient l'élément neutre 0_E.
② Si F est un sous-espace vectoriel de E alors $(F,+,\cdot)$ est lui même est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$.
Ainsi: pour montrer qu'un ensemble F est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$, il suffit de montrer que F est un sous-espace vectoriel de E.

Définition- proposition:

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $V_1, V_2, \dots, V_n$ des vecteurs de E.
On appelle combinaison linéaire de $V_1, \dots, V_n$ tout vecteur u de E qui s'écrit $u = \lambda_1 V_1 + \lambda_2 V_2 + \dots + \lambda_n V_n$

$$= \sum_{k=1}^{n} \lambda_k V_k .$$

Remarque: ① Tout sous espace vectoriel F de E contient l'élément neutre 0_E.
② Si F est un sous-espace vectoriel de E alors $(F, +, \cdot)$ est lui même est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$.
Ainsi: pour montrer qu'un ensemble F est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$, il suffit de montrer que F est un sous-espace vectoriel de E.

Définition - proposition:
Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $V_1, V_2, \dots, V_n$ des vecteurs de E.
On appelle combinaison linéaire de $V_1, \dots, V_n$ tout vecteur u de E qui s'écrit $u = \lambda_1 V_1 + \lambda_2 V_2 + \dots + \lambda_n V_n$

$$= \sum_{k=1}^{n} \lambda_k V_k.$$

On note $\text{Vect}(V_1, V_2, \dots, V_n)$ l'ensemble formé par toutes les combinaisons linéaires finies des vecteurs $V_1, \dots, V_n$

$\text{vect}(V_1, V_2 \dots V_n) = \{ u = \lambda_1 V_1 + \lambda_2 V_2 + \dots + \lambda_n V_n \}$

Alors $\text{Vect}(V_1, V_2, \dots, V_n)$ est un sous espace vectoriel de E appelé le sous-espace vectoriel de E engendré par $V_1, \dots, V_n$

Remarque: Pour montrer que F est un sous-espace-vectoriel de E, il suffit de l'écrire sous forme d'un vect.

Proposition - Définition:
Soient F et G 2 sous-espaces vectoriels de E. On note

$$F + G = \{ u + v, \ u \in F \text{ et } v \in G \}$$

Alors F + G est un sous-espace vectoriel de E appelé somme de F et G.

F + G contient F et G.

Définition: On dit que les sous-espace vectoriels F et G sont une somme directe ou que la somme F + G est directe si $F \cap G = \{0_E\}$

On note dans ce cas cette somme que $F \oplus G$

Ex: $E = \mathbb{R}^2$

$$F = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ x + y = 0 \}$$
$$G = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2, \ x - y = 0 \}$$

1) Montrer que F et G sont 2 sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^2$.
2) Calculer $F \cap G$
3) Déduire.

Solution:

1) $F = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2, \ x = -y \}$
$= \{ y(-1, 1), y \in \mathbb{R} \} = \text{Vect}\{(-1, 1)\}$

3) $E = \mathbb{R}[x]$

$E = \mathbb{C}[x]$

Propriétés:

Soit $(E, +, \cdot)$ un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$

Alors on a:

$\forall u, v \in E, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}$:

1) $0 \cdot u = 0_E$

2) $(-1) \cdot u = -u$

3) $\alpha \cdot 0_E = 0_E$

4) $(-\alpha) u = \alpha(-u) = -(\alpha u)$

5) $(\alpha - \beta) u = \alpha u - \beta u$.

6) $\alpha(u - v) = \alpha u - \alpha v$.

7) $\alpha u = 0_E \iff \alpha = 0$ ou $u = 0_E$

II) Sous-espaces Vectoriels:

Dans toute la suite $(E, +, \cdot)$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$.

Définition:

Une partie F de E est dite un sous espace vectoriel de E si seulement si on a:

1) $F \neq \emptyset$

2) $\alpha u \in F, \forall \alpha \in \mathbb{K}, \forall u \in F$

3) $u + v \in F, \forall u, v \in F$.

(2) et (3) $\iff$ $\alpha u + v \in F$, $\forall \alpha \in \mathbb{K}$ $\forall u, v \in F$

Remarque:

1) tout sous espace vectoriel F de E contient le vecteur nul 0_E

Ex:

$F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x + y = 0\}$

1) $0_E = 0_{\mathbb{R}^2} = (0, 0) \in F$

car $0 + 0 = 0$

2) Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et $u \in F$

$u = (x_1, y_1)$; $x_1 + y_1 = 0$

$\alpha u = \alpha(x_1, y_1) = (\alpha x_1, \alpha y_1)$

On a: $\alpha x_1 + \alpha y_1 = \alpha(x_1 + y_1)$

$= \alpha \cdot 0 = 0$

$(\alpha x_1 ; \alpha y_1) \in F$

$\iff \alpha(x_1, y_1) \in F$

$\iff$ ~~$\alpha x u$~~ $\alpha \cdot u \in F$

3) Soit $u, v \in F$

$u = (x_1, y_1)$; $x_1 + y_1 = 0$

$v = (x_2, y_2)$; $x_2 + y_2 = 0$

$u + v = (x_1, y_1) + (x_2, y_2)$

$= (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$

On a:

$x_1 + x_2 + y_1 + y_2 = \underbrace{x_1 + y_1}_{0} + \underbrace{x_2 + y_2}_{0}$

$= 0 + 0 = 0$

$\Rightarrow u + v \in F$

cl: F est un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$.

$\Rightarrow$ F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$.

$G = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, x = y\}$

$= \{(x,x) \in \mathbb{R}^2, x \in \mathbb{R}\}$

$= Vect\{(1,1)\}$

$\Rightarrow$ G est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$.

2) $F \cap G = \{z \in F \text{ et } z \in G\}$

$= \{z = (x,y), x+y=0 \text{ et } x-y=0\}$

$\begin{cases} x+y=0 \\ x-y=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x=0 \\ 2y=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=y=0$

$\Rightarrow F \cap G = \{0_E\}$

3) F et G sont une somme directe.

Définition : 2 sous-espace vectoriels F et G de E sont dites supplémentaires dans E si :

1) $F \cap G = \{0_E\}$

2) $F + G = E$

Dans ce cas on écrit $F \oplus G = E$

Exemple : $E = \mathbb{C}$

$F = \mathbb{R}$

$G = i\mathbb{R}$

1) $F \cap G = \{0\}$

2) soit $z \in \mathbb{C}$, $z = \underset{\in F}{a} + \underset{\in G}{ib}$

$\Rightarrow E \subset G + F$

D'autre $F + G \subset E$

$\Rightarrow F \oplus G = E$

III - Famille libre - Famille liée

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$.

Définition : Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $V_1, V_2 \cdots V_n$ des vecteurs de E.

1) On dit que la famille $(V_1, V_2 \cdots V_n)$ est libre ou que $V_1, \ldots, V_n$ sont linéairement indépendantes si :

Pour tous scalaires $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{K}$

$\alpha_1 V_1 + \alpha_2 V_2 + \cdots + \alpha_n V_n = 0_E$

$\Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \cdots = \alpha_n = 0$

2) On dit que la famille $(V_1, \cdots, V_n)$ est liée s'il existe des scalaires $\alpha_1, \cdots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ non tous nuls tque

$\alpha_1 V_1 + \alpha_2 V_2 + \cdots + \alpha_n V_n = 0_E$

Ex : $E = \mathbb{R}^2$

$H = \{(1,0), (0,1)\}$

Montrer que H est libre :

Soient $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ tque :

$\alpha_1 V_1 + \alpha_2 V_2 = 0_{\mathbb{R}^2}$

$\Leftrightarrow \alpha_1(1,0) + \alpha_2(0,1) = (0,0)$

$\Leftrightarrow (\alpha_1, \alpha_2) = (0,0)$

$\Leftrightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = 0 \Rightarrow$ H est libre

2) $F = \{(1,0), (0,1), (1,1)\}$

Montrer que F est liée :

En effet, soient $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$ tque : $\alpha_1 V_1 + \alpha_2 V_2 + \alpha_3 V_3 = (0,0)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 = 0 \\ \alpha_2 + \alpha_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 = -\alpha_3 \\ \alpha_2 = -\alpha_3 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ F n'est pas libre
donc elle est liée.

Définition :
Soient $V_1, \dots, V_n$ des vecteurs de E
on dit que la famille $(V_1, \dots, V_n)$ est génératrice.
dans E si pour tout $u \in E$, il existe $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ tque

$$u = \alpha_1 V_1 + \alpha_2 V_2 + \dots + \alpha_n V_n$$
$$\cancel{= 0_E}.$$

~~Exemple : $E = \mathbb{R}^2$~~

~~① $F = \{(1,0), (0,1)\}$~~

Exemple : $E = \mathbb{R}^2$

$$F = \{\underbrace{(1,0)}_{V_1}, \underbrace{(0,1)}_{V_2}\}$$

Soit $u = (x,y) \in E$, on a :

$$u = (x,y) = (x,0) + (0,y) =$$
$$\cancel{x(a,}\ x(1,0) + y(0,1)$$
$$\Rightarrow u = \alpha_1 V_1 + \alpha_2 V_2$$

$\Rightarrow$ F est une famille génératrice dans E.

Définition :
Soit $B = \{V_1, V_2, \dots, V_n)$ une famille de vecteurs de E.
On dit que B est une base si B est une famille libre et génératrice :

Exemple : $E = \mathbb{R}^2$

$$F = \{(1,0), (0,1)\}$$

D'après les exemples précédents on a montré que F est une famille libre & génératrice donc F est une base de $\mathbb{R}^2$.
Cette base appelée base canonique de $\mathbb{R}^2$.