
Devoir Surveillé

Exercice :

Soit le polynôme $P(X) = X^4 + 2X^3 + 2X^2 + 2X + 1$.

1. Montrer que -1 est une racine double de P .
2. Effectuer la division euclidienne de P par $X - i$.
3. Sans faire la division euclidienne de P par $X + i$, justifier pourquoi le reste est forcément nul.
4. Déterminer les racines de P dans \mathbb{C} .
5. En déduire la factorisation de P dans $\mathbb{C}[X]$ et dans $\mathbb{R}[X]$.
6. On considère la fraction rationnelle :

$$F(X) = \frac{X^4 + 1}{P(X)}.$$

Décomposer en éléments simples la fraction F dans $\mathbb{C}[X]$ et dans $\mathbb{R}[X]$.