Université de Monastir
Institut Supérieur d'Informatique
et de Mathématiques de Monastir

Année Universitaire : 2024/2025
Matière : Algèbre, S1
Niveau : L1 Info

Examen

Durée : 1h30

Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Exercice 1 *(6 pts)*

On pose $E_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, x - y - z = 0\}$ *et* $E_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, x = -y = -z\}$.

1. *Montrer que* E_1 *et* E_2 *sont deux sous espaces vectoriels de* $\mathbb{R}^3$.
2. *Donner une base* B_1 *de* E_1 *et une base* B_2 *de* E_2. *En déduire* $\dim(E_1)$ *et* $\dim(E_2)$.
3. *Montrer que* $\mathbb{R}^3 = E_1 \oplus E_2$. *Déduire que* $B = B_1 \cup B_2$ *est une base de* $\mathbb{R}^3$.
4. *Exprimer le vecteur* $X = (x,y,z)$ *dans la base* B.

Exercice 2 *(6 pts)*

Soit l'application :

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x,y) &\longmapsto (x, 2x+y, y)\,. \end{aligned}$$

1. *Montrer que* f *est une application linéaire de* $\mathbb{R}^2$ *vers* $\mathbb{R}^3$.
2. *Montrer que* f *est injective.*
3. *En déduire le rang de* f. *L'application* f *est-elle un isomorphisme ?*
4. *Donner une famille génératrice de* $Im\, f$. *En déduire une base de* $Im\, f$.

Exercice 3 *(8 pts)*

On pose $P = X^3 + 3X^2 + 2X, \quad Q = X^5 + 2X^4 - 2X^3 - 4X^2 + X + 2$ *et* $F = \frac{P}{Q}$.

1. *Quelle est la multiplicité de* 1 *comme racine de* Q *?*
2. *Quelle est la multiplicité de* -1 *comme racine de* Q *?*
3. *Pourquoi la racine de* Q*, qui manque, doit être réelle ? Déterminer cette racine.*
4. *En déduire la décomposition de* Q *en facteurs irréductibles dans* $\mathbb{R}[X]$.
5. *Vérifier que* $\frac{X}{(X-1)^2(X+1)}$ *est la forme réduite de* F.
6. *En utilisant une division suivant les puissances croissantes, décomposer la fraction* F *en éléments simples dans* $\mathbb{R}(X)$.