Université de Monastir
Institut Supérieur d'Informatique
et de Mathématiques de Monastir

Année Universitaire : 2024/2025
Matière : Algèbre, S1
Niveaux : L1 INFO

Feuille d'exercices 1

Exercice 1: Dans les exemples suivants, vérifier si l'expression P représente un polynôme, dans un tel cas, donner son degré, son coefficient dominant et son terme constant.

1. $P = X^3 - (X-1)^{\frac{3}{2}}$.
2. $P = (5X^2+3)(X+1)^3 - 3X^5 - X - 3$.
3. $P = \sum_{k=3}^{6}(k-X)^{k-3}$.
4. $P = X^5 - cos(X - \frac{\pi}{4})$.
5. $P = \sum_{j=0}^{n}(3X)^{j-1}$.
6. $P = \prod_{j=-2}^{2}(\frac{j}{3} - X)$.

Exercice 2:

1. Effectuer la division euclidienne de
   (a) $P = X^3 + X^2 + 1$ par $Q = X^2 + X + 1$.
   (b) $P = X^3 + X^2 - X - 3$ par $Q = X - 2$.
   (c) $P = X^5 - X^4 + 2X^3 + X^2 + 4$ par $Q = X^2 - 1$.
   (d) $P = X^2 - 3iX - 5(1+i)$ par $Q = X - 1 + i$.
2. Soit P un polynôme dont le reste de la division euclidienne par $X-1$ est -4 et par $X-2$ est 3. Quel est le reste de la division euclidienne de P par $(X-1)(X-2)$?
3. Déterminer le reste de la division euclidienne de $A = (X-2)^{2n} + (X-1)^n + 1$ par $B = (X-1)^2(X-2), n \in \mathbb{N}$.

Exercice 3:

1. Soit le polynôme $P(x) = X^4 - 5X^3 + 13X^2 - 19 + 10$. Calculer $P(1)$ puis $P(2)$. En déduire la factorisation du polynôme dans $\mathbb{R}[X]$ puis dans $\mathbb{C}[X]$.
2. Montrer que le polynôme $P(x) = X^4 + 2X^2 - 8X + 5$ admet une racine double. En déduire la décomposition en produit de polynômes irreductibles dans $\mathbb{R}[X]$.
3. Déterminer l'ordre de multiplicité de la racine 1 du polynôme P de $\mathbb{R}[X]$.

$$P(x) = X^5 - 5X^4 + 14X^3 - 22X^2 + 17X - 5.$$

Exercice 4: Effectuer les divisions suivant les puissances croissantes de :

1. $P = 1$ par $Q = -X + 1$, à l'ordre 6.
2. $P = X + 1$ par $Q = X^2 + 1$, à l'ordre 5.
3. $P = 4$ par $Q = (X - 2)^2$, à l'ordre 4.
4. $P = -2X^2 + 3X + 2$ par $Q = -2X^3 + X^2 + 1$, à l'ordre 3.
5. $P = X^4 + X^3 - 2X + 1$ par $Q = X^2 + X + 1$, à l'ordre 2.

Exercice 5: Soit le polynôme à coefficients complexes :

$$P = X^3 + 3X - 12i.$$

On note x_1, x_2, x_3 ses racines.

1. Que vaut $x_1 + x_2 + x_3$?
2. Montrer que $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = -6$.
3. Effectuer la division euclidienne de X^7 par P.
4. En déduire la valeur de $x_1^7 + x_2^7 + x_3^7$.

Exercice 6:

Déterminer le degré et coeff dominant des polynomes suivants

1) $P_1 = X^3 - (X - 2 + i)^2$
2) $P_2 = X^3 - X(X - 2 + i)^2$
3) $P_3 = (X+1)^n - (X-1)^n$ $n \in \mathbb{N}$
4) $P_4 = \prod_{k=1}^{n} (2X^k - k)$ $n \in \mathbb{N}^*$
5) $P_5 = (X+1)^{2024} - (4X^2 + aX)^{1012}$ $a \in \mathbb{R}$

EX7:

On considère la suite de polynômes définie par

$P_0 = 1$

$P_1 = -2X$

$\forall n \in \mathbb{N}$ $P_{n+2} = -2X P_{n+1} - 2(n+1) P_n$

1) Mq pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\deg(P_n) = n$ et $a_n = (-2)^n$
2) Déterminer le coefficient constant de P_n