Université de Monastir
Institut Supérieur D'Informatique
et de Mathématiques de Monastir
Dépt. de Mathématiques

A.U: 2023-2024
L1 INFO
Algèbre 2
14 Mars 2024

Devoir Surveillé

Exercice 1:

1. Ecrire la matrice $A = (a_{ij})$ dans les deux cas suivants:
   (a) A de type (4,2) et $a_{ij} = j - i$.
   (b) A est triangulaire supérieure d'ordre 3 et $\begin{cases} a_{ij} = -3i & si\ \ j \neq i \\ a_{ij} = i+1 & sinon \end{cases}$
2. Répondre par vrai ou faux en justifiant dans les deux cas.
   (a) La trace d'une matrice antisymétrique est nulle.
   (b) Soit A et M deux matrices carrées telle que A.M = 0 alors A=0 ou M = 0 .
   (c) Soit A et M deux matrices carrées telle que A est inversible et A.M = 0 alors M = 0 .
   (d) Soit $A \in \mathcal{M}_{3,5}(K)$ et $M \in \mathcal{M}_{4,5}(K)$. Alors $M.\,{}^tA$ est une matrice carrée.

Exercice 2:

On considère $B_1 = (e_1,e_2,e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et $B_2 = (u_1,u_2)$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$.
Soit f l'application linéaire définie de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$ par:

$$\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ \ f(x,y,z) = (x - y + 2z\ ,\ -2y + z).$$

1. Ecrire $A = mat(f,B_1,B_2)$.
2. Effectuer, lorsque cela est possible, les opérations suivantes:
   $(A + 5I_2)$, $\ {}^tA\,.A$, $A.({}^tA - 2I_3)$, $A.\,{}^tA$, $tr({}^tA\,.A)$, $tr(A\,.{}^tA - 2I_3)$.
3. Soit $S = A.\,{}^tA - 6I_2$.
   (a) Calculer $S^2 + S - 10I_2$.
   (b) En déduire que S est inversible et donner son inverse S^{-1}.
4. Soit $N = {}^tA\,.A - 5I_3$.
   On considère g l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice relativement à la base canonique B_1 est N. (c-à-d: $N = mat(g, B_1)$).
   (a) Donner l'expression de $g(x,y,z)$, pour tout $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$.
   On considère les vecteurs: $e'_1 = e_2,\ e'_2 = e_3,\ e'_3 = e_1$.
   (b) Vérifier que $B'_1 = (e'_1,e'_2,e'_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
   (c) Ecrire la matrice de passage $P = pass(B_1, B'_1)$.
   (d) Déterminer $M = mat(g, B'_1)$ la matrice de g relativement à la base B'_1 .
   (e) Ecrire la relation entre M et N à l'aide de la matrice de passage P.

Bon Travail