Université de Monastir
Institut Supérieur D'Informatique
et de Mathématiques de Monastir
Dépt. de Mathématiques

A.U: 2022-2023
L1 INFO
Algèbre 2
25-5-2023

Examen Final - Session Principale

- **NOTE : L'usage de la calculatrice est interdit.**

On considère m un paramètre réel et A_m la matrice carrée

$$A_m = \begin{pmatrix} m & -2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}.$$

1. Calculer P_m, le polynôme caractéristique de A_m, et donner une condition nécéssaire et suffisante sur m pour que A_m soit diagonalisable sur $\mathbb{R}$.
   Dans la suite On prend $m = 2$ et on note $A = A_2$.
2. (a) Diagonaliser la matrice A.
   (b) Vérifier que A est inversible et sans calculer A^{-1}, montrer que A^{-1} est diagonalisable, donner ses valeurs propres et les sous espaces propres associés.
   (c) Calculer A^n, pour tout $n \in \mathbb{N}$.
3. Soit $(x_n)_n$ et $(y_n)_n$ deux suites réelles définies par:
$$x_0 = 2,\ y_0 = -1 \quad et \quad \forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} x_{n+1} = 2x_n - 2y_n \\ y_{n+1} = 2x_n - 3y_n \end{cases}$$
   Déterminer les expressions de x_n et y_n en fonction de n.
4. On considère u l'endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ défini par:
$$\forall M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}),\ u(M) = MA.$$
   (a) Ecrire R la matrice de u relativement à B_c la base canonique de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
   (b) Calculer le polynôme caractéritique de R et déduire les valeurs propres de u.
   (c) Montrer que u est diagonalisable et donner une base B' de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ formée par des vecteurs propres de u.
   (d) Déduire que R est diagonalisable et donner une matrice diagonale D et une matrice inversible P tel que $R = P.D.P^{-1}$.
   (e) Vérifier que R est inversible et montrer que la matrice $N = 4R^{-1} + R - 2I_4$ est diagonalisable en précisant ses valeurs propres.
5. On considère (S) le système linéaire d'inconnues x , y , z , $t \in \mathbb{R}$ défini par:
$$(S) : (R + kI_4)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \\ 1 \\ \lambda \\ 1 \end{pmatrix},\quad k, \lambda \in \mathbb{R}.$$
   (a) Pour quelles valeurs de k, (S) est-il un système de Cramer?
   (b) Pour $k = 0$, résoudre (S) par les formules de Cramer.
   (c) Pour $k = 2$, résoudre (S) par la méthode des pivots de Gauss.

Corrigé Examen Algèbre 2 - L_1 INFO - 2023

$\boxed{1}$ $P_m(x) = \det(A_m - x I_2) = \begin{vmatrix} m-x & -2 \\ 2 & -3-x \end{vmatrix}$

$= (m-x)(-3-x)+4 = x^2+(3-m)x+4-3m.$

$P_m(x) = x^2+(3-m)x+(4-3m)$ est un poly de degré 2.

$\Delta = (3-m)^2 - 4(4-3m).$

$= m^2-6m+9-16+12m = m^2+6m-7 = (m-1)(m+7)$

	$-\infty$	-7		1	$+\infty$
$m-1$	$-$		$-$	0	$+$
$m+7$	$-$	0	$+$		$+$
Δ	$+$	0	$-$	0	$+$

si $m \in]-\infty,-7[\cup]1,+\infty[$ alors $\Delta > 0$, P_m admet deux racines distincts d'où A_m admet deux v.p distincts

cl : A_m est diag$\underline{\text{ble}}$.

si $m \in]-7,1[$, $\Delta < 0$, P_m n'est pas scindé sur $\mathbb{R}$ d'où A_m n'est pas diag$\underline{\text{ble}}$.

si $m \in \{-7,1\}$ alors P_m admet une racine double d'où A_m admet une seule v.p, comme A_m n'est pas colinéaire à I_2 alors A_m n'est pas diag$\underline{\text{ble}}$.

cl : A_m est diag$\underline{\text{ble}}$ $\Longleftrightarrow$ $m \in]-\infty,-7[\cup]1,+\infty[$.

$\boxed{2}$ $m=2$, $A = A_2 = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$.

(a) $P(x) = x^2+x-2 = (x-1)(x+2)$.

1 et (-2) sont les v.p de A, ce sont des v.p simples.

$E_1(A) = \{X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ tq $AX = X\}$.

$X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in E_1(A) \Leftrightarrow AX = X \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-2y = x \\ 2x-3y = y \end{cases} \Leftrightarrow \{ x = 2y \Leftrightarrow X = \begin{pmatrix} 2y \\ y \end{pmatrix}$.

$E_1(A) = \text{vect}\left(v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$.

$E_{-2}(A) = \{ X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \text{ tq } AX = -2X \}$.

$X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in E_{-2}(A) \Leftrightarrow AX = -2X \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 2y = -2x \\ 2x - 3y = -2y \end{cases}$

$\Leftrightarrow \{ y = 2x \Leftrightarrow X = \begin{pmatrix} x \\ 2x \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

$E_{-2}(A) = \text{Vect}\left(V_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right)$.

Ainsi $A = P \cdot D \cdot P^{-1}$ avec $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

(b) 0 n'est pas valeur propre de A d'où A est inversible.

on a : $A = P \cdot D \cdot P^{-1} \Rightarrow A^{-1} = (P \cdot D \cdot P^{-1})^{-1} = P \cdot D^{-1} \cdot P^{-1}$

$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$, $D^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1/2 \end{pmatrix}$.

ainsi $A^{-1} = P \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1/2 \end{pmatrix} \cdot P^{-1}$.

avec $P = \text{pass}(BC, B)$, $B = (V_1, V_2)$; BC : base canoni de $\mathbb{R}^2$

on conclut que $Sp(A^{-1}) = \{1, -1/2\}$.

$E_1(A^{-1}) = E_1(A)$. et $E_{-1/2}(A^{-1}) = E_{-2}(A) = \text{Vect}(V_2)$

$= \text{Vect}(V_1)$.

(c) on a : $A = P \cdot D \cdot P^{-1}$ d'où $\forall n \in \mathbb{N}$, $A^n = P \cdot D^n \cdot P^{-1}$

$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow D^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (-2)^n \end{pmatrix}$.

$P = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $P^{-1} = \frac{1}{\det P} {}^t(\text{com} P) = \frac{1}{3} {}^t\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

$P^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$.

Ainsi $A^n = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (-2)^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$.

$= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -(-2)^n & 2(-2)^n \end{pmatrix}$.

$= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 4 - (-2)^n & -2 + 2(-2)^n \\ 2 + (-2)^{n+1} & -1 + 4(-2)^n \end{pmatrix}$.

3] on pose $X_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$.

Alors $X_{n+1} = \begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = A . X_n$.

$X_{n+1} = A . X_n$ d'où $X_n = A^n . X_0$ avec $X_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$.

$$X_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 4 - (-2)^n & -2 + 2(-2)^n \\ 2 + (-2)^{n+1} & -1 + 4(-2)^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

d'où $\begin{cases} x_n = \frac{1}{3}\left[8 + (-2)^{n+1} + 2 + (-2)^{n+1}\right] = \frac{1}{3}\left(10 + 2(-2)^{n+1}\right) \\ y_n = \frac{1}{3}\left[4 + 2(-2)^{n+1} + 1 - 4(-2)^n\right] = \frac{1}{3}\left(5 + 4(-2)^{n+1}\right). \end{cases}$

4] $B_c = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ la BC de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$
avec $e_1 = E_{11}$, $e_2 = E_{12}$, $e_3 = E_{21}$, $e_4 = E_{22}$.

(a) $R = \text{mat}(u, B_c) = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} u(e_1) & u(e_2) & u(e_3) & u(e_4) \end{array} \\ \begin{pmatrix} \square & \square & \square & \square \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ e_4 \end{array}$

$u(e_1) = u(E_{11}) = E_{11} . A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$
$= 2e_1 - 2e_2$.

$u(e_2) = u(E_{12}) = E_{12} . A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$
$= 2e_1 - 3e_2$.

$u(e_3) = u(E_{21}) = E_{21} . A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$
$= 2e_3 - 2e_4$.

$u(e_4) = u(E_{22}) = E_{22} . A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$
$= 2e_3 - 3e_4$.

Cl : $\boxed{R = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 & 0 \\ -2 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & -3 \end{pmatrix}}$.

(b) $P_R(x) = \det(R - xI_4) = \begin{vmatrix} 2-x & 2 & 0 & 0 \\ -2 & -3-x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2-x & 2 \\ 0 & 0 & -2 & -3-x \end{vmatrix}$

$= \begin{vmatrix} 2-x & 2 \\ -2 & -3-x \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 2-x & 2 \\ -2 & -3-x \end{vmatrix}$

$= \left((2-x)(-3-x) + 4 \right)^2 = (x^2 + x - 2)^2$

$= (x-1)^2 (x+2)^2.$

1 et (-2) sont les v.p de u et ce sont des v.p doubles.

(c) $E_1(u) = \{ M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$ tq $u(M) = M \}$.

$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in E_1(u) \Leftrightarrow u(M) = M \Leftrightarrow MA = M.$

$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a + 2b = a \\ -2a - 3b = b \\ 2c + 2d = c \\ -2c - 3d = d \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a = -2b \\ c = -2d \end{cases} \Leftrightarrow M = \begin{pmatrix} -2b & b \\ -2d & d \end{pmatrix} = b \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + d \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$

$= b M_1 + d M_2$ avec $M_1 = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}.$

d: $E_1(u) = \mathrm{Vect}(M_1, M_2)$

$\dim E_1(u) = 2.$

$E_{-2}(u) = \{ M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$ tq $u(M) = -2M \}$.

$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in E_{-2}(u) \Leftrightarrow u(M) = -2M \Leftrightarrow MA = -2M$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 2a + 2b = -2a \\ -2a - 3b = -2b \\ 2c + 2d = -2c \\ -2c - 3d = -2d \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -2a \\ d = -2c \end{cases} \Leftrightarrow M = \begin{pmatrix} a & -2a \\ c & -2c \end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow M = a \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$

$= a M_3 + c M_4$

$E_{-2}(u) = \mathrm{Vect}(M_3, M_4)$, $M_3 = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $M_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}.$

ona : $\dim E_1(u) + \dim E_{-2}(u) = 2+2 = 4 = \dim M_2(\mathbb{R})$.

cl : u est diag$_{ble}$, $B' = (M_1, M_2, M_3, M_4)$ est une base de $M_2(\mathbb{R})$ formée par des vecteurs propres de u.

(d) $\left.\begin{array}{l} R = mat(u, Bc) \\ u \text{ est diag}_{ble} \end{array}\right\} \Rightarrow R$ est diag$_{ble}$.

Soit $D = mat(u, B') = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$

Alors $R = P D P^{-1}$ avec $P = pass(Bc, B')$

$$P = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

(e) 0 n'est pas valeur propre de u alors u est inversible d'où R est inversible.

$R = PDP^{-1} \Rightarrow R^{-1} = (PDP^{-1})^{-1} = PD^{-1}P^{-1}$

$N = 4R^{-1} + R - 2I_4 = 4PD^{-1}P^{-1} + PDP^{-1} - 2PP^{-1}$

$= P(4D^{-1} + D - 2I_4)P^{-1}$

Soit $\Delta = 4D^{-1} + D - 2I_4$, $N = P\Delta P^{-1}$.

$$\Delta = 4\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1/2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} + $$

$$-2\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -6 \end{pmatrix}.$$

Δ est diagonale d'où N est diagonalisable.

$Sp(N) = \{3, -6\}$. 3 et (-6) sont des v.p double de N.

5 (a) (S) est un système de Cramer $\iff \det(R+kI_4)\neq 0$

$\iff -k \notin sp(R)=\{1,-2\}$

$\iff k\notin\{-1,2\}$.

$\iff k\in \mathbb{R}\setminus\{-1,2\}$.

(b) $\underline{k=0}$: (S) est un système de Cramer, il admet une unique solution (x,y,z,t) donnée par :

$$x=\frac{1}{\det R}\begin{vmatrix}\lambda & 2 & 0 & 0\\ 1 & -3 & 0 & 0\\ \lambda & 0 & 2 & 2\\ 1 & 0 & -2 & -3\end{vmatrix}=\frac{1}{4}(-3\lambda-2)(-2)=\left(\frac{3\lambda+2}{2}\right).$$

$$y=\frac{1}{\det R}\begin{vmatrix}2 & \lambda & 0 & 0\\ -2 & 1 & 0 & 0\\ 0 & \lambda & 2 & 2\\ 0 & 1 & -2 & -3\end{vmatrix}=\frac{1}{4}(2+2\lambda)(-2)=-(\lambda+1)$$

$$z=\frac{1}{\det R}\begin{vmatrix}2 & 2 & \lambda & 0\\ -2 & -3 & 1 & 0\\ 0 & 0 & \lambda & 2\\ 0 & 0 & 1 & -3\end{vmatrix}=\frac{1}{4}(-2)(-3\lambda-2)=\left(\frac{3\lambda+2}{2}\right).$$

$$t=\frac{1}{\det R}\begin{vmatrix}2 & 2 & 0 & \lambda\\ -2 & -3 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 2 & \lambda\\ 0 & 0 & -2 & 1\end{vmatrix}=\frac{1}{4}(-2)(2+2\lambda)=-(\lambda+1).$$

L'unique sol$^{\underline{o}}$ de (S) est :

$$\left(\frac{(3\lambda+2)}{2},-(\lambda+1),\frac{(3\lambda+2)}{2},-(\lambda+1)\right).$$

(c) $\underline{k=2}$:

$$(S)\iff\begin{cases}4x+2y=\lambda\\ -2x-y=1\\ 4z+2t=\lambda\\ -2z-t=1\end{cases}\qquad \begin{matrix}L_1\leftrightarrow L_2\\ L_3\leftrightarrow L_4\end{matrix}$$

$$(S) \Longleftrightarrow \begin{cases} -2x-y=1 \\ 4x+2y=\lambda \\ -2z-t=1 \\ 4z+2t=\lambda \end{cases} \qquad \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2+2L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4+2L_3 \end{array}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} -2x-y=1 \\ 0=\lambda+2 \\ -2z-t=1 \\ 0=\lambda+2. \end{cases}$$

si $\lambda+2 \neq 0$ i-e : $\lambda \neq -2$ alors (S) est un système incompatible, il n'admet pas de solutions.

si $\lambda+2=0$ i-e : $\lambda=-2$ alors

$$(S) \Longleftrightarrow \begin{cases} -2x-y=1 \\ -2z-t=1 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} y=-2x-1 \\ t=-2z-1. \end{cases}$$

(S) admet une infinité de sol°

$(x,y,z,t)=(x,-2x-1,z,-2z-1)$, $x,z\in\mathbb{R}$.