Université de Monastir
Institut Supérieur d'Informatique
et de Mathématiques de Monastir

Année Universitaire: 2024/2025
Matière: Algèbre, S1
Niveaux: L1 Info

Série 3

Exercice 1: Décomposer en éléments simples dans $\mathbb{R}(X)$ et $\mathbb{C}(X)$ les fractions rationnelles suivantes:

$$\frac{X^3-3X^2+X-4}{X-1}, \quad \frac{2X^3+X^2-X+1}{X^2-2X+1}, \quad \frac{X+1}{(X^2-1)(X+2)}, \quad \frac{X-1}{X^2(X^2+1)},$$

$$\frac{X^5+X^4+1}{X(X-1)^4}, \quad \frac{X^5+X^4+1}{(X-1)^3(X+1)^2}, \quad \frac{6X+5}{(3X^2+5X+2)^2}.$$

Exercice 2: En utilisant la division suivant les puissances croissantes, décomposer en éléments simples les fractions rationnelles suivantes:

$$\frac{X}{(X-1)^3(X+2)}, \quad \frac{X^2-3}{(X+3)^2(X-3)}, \quad \frac{5X-4}{X(X-1)^2}.$$

Exercice 3: Décomposer en éléments simples, pour tout entier $n \geq 2$, les fractions rationnelles suivantes:

$$\frac{1}{X^n-1}, \quad \frac{X^{n-1}}{X^n-1}.$$

Exercice 4:
On donne le polynôme: $P = -X^6 + X^4(3-X) - 2 + (X^3-4)^2 + 9X^2(X-1) - 2(X-3)^2$.
-1

1. Donner le degré, le coefficient dominant et le terme constant de P.
2. Montrer que 1 est une racine triple de P.
3. Décomposer le polynôme P en facteurs irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$.
4. Ecrire la formule de Taylor pour P au point 1.
5. En déduire le quotient et le reste de la division euclidienne de P par $(X-1)^4$.
6. Soit $Q = X^4 + X^3 + aX^2 + X - 2, \ a \in \mathbb{C}$.
   - (a) Détreminer a pour que i soit racine de Q.
   - (b) Décomposer le polynôme Q en facteurs irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$ et dans $\mathbb{C}[X]$.
   - (c) Donner un diviseur commun à P et à Q de degré strictement positif.
7. Préciser le degré, la partie entière et les pôles de la fraction: $F_1 = \frac{Q}{P}$.
8. En utilisant une division suivant les puissances croissantes, décomposer la fraction: $F = \frac{(X-1)^2Q}{X^3P}$ en éléments simples dans $\mathbb{R}(X)$.

Quelques méthodes de calcul..

* simplification par symétrie, parité et imparité.

$$F = E + \frac{R}{Q} \quad \text{avec} \left[\deg R < \deg Q\right].$$

i/ R paire $\Rightarrow R(-X) = R(X)$

exemple : $R = \dfrac{1}{(X-1)^2 (X+1)^2}$ est paire

$$R = \frac{a}{X-1} + \frac{b}{(X-1)^2} + \frac{c}{(X+1)} + \frac{d}{(X+1)^2}; \quad a,b,c,d \in \mathbb{R}$$

Co $R(-X) = R(X)$

$$\Rightarrow \frac{-a}{X+1} + \frac{b}{(X+1)^2} + \frac{-c}{X-1} + \frac{d}{(X-1)^2}$$

$$= \frac{a}{X-1} + \frac{b}{(X-1)^2} + \frac{c}{X+1} + \frac{d}{(X+1)^2}; \quad \underline{a,b,c,d \in \mathbb{R}}$$

$\Rightarrow$ Par unicité des coefficients de la décomposition en éléments simples,

$-a = c$; $b = d$; $-c = a$, $d = b$

$\Rightarrow \boxed{\begin{matrix} a = -c \\ b = d \end{matrix}} \Rightarrow$ le calcul de a et b suffit donc.

de même si R impaire

2/ types de symétries :

exple : $F = \dfrac{1}{X(X-1)}$; les pôles 0 et 1 sont symétrique par rapport à $\frac{1}{2}$

$\Rightarrow F(X) = F(1-X) \Rightarrow \left. \begin{matrix} F = \frac{\alpha}{X} + \frac{\beta}{X-1} \\ F(1-X) = \frac{-\beta}{X} - \frac{\alpha}{X-1} \end{matrix} \right) \Rightarrow \boxed{\alpha = -\beta}$

Ex 1 :

Série 3 :

(1)

1°/ $F = \dfrac{x^3 - 3x^2 + x - 4}{x - 1} = \dfrac{P}{Q}$.

- F est une forme irréductible unitaire.

$\deg(F) = 2 \Rightarrow$ on effectue la division euclidienne de P par Q pour trouver la partie entière E :

$$\begin{array}{r|l} x^3 - 3x^2 + x - 4 & x - 1 \\ \cline{2-2} x^3 - x^2 & \underbrace{x^2 - 2x - 1}_{E} \\ \cline{1-1} -2x^2 + x - 4 & \\ -2x^2 + 2x & \\ \cline{1-1} -x - 4 & \\ -x + 1 & \\ \cline{1-1} R = -5 & \end{array}$$

$\Rightarrow F = E + \dfrac{R}{Q} = x^2 - 2x - 1 + \dfrac{-5}{x - 1}$.

2°/ $F = \dfrac{2x^3 + x^2 - x + 1}{x^2 - 2x + 1} = \dfrac{P}{Q}$

- F est une forme irréd. unitaire

$\deg(F) = 1 \Rightarrow$ On effectue la div. euclidienne de P par Q :

$$\begin{array}{r|l} 2x^3 + x^2 - x + 1 & x^2 - 2x + 1 \\ \cline{2-2} 2x^3 - 4x^2 + 2x & \underbrace{2x + 5}_{E} \\ \cline{1-1} 5x^2 - 3x + 1 & \\ 5x^2 - 10x + 5 & \\ \cline{1-1} \underbrace{7x - 4}_{R} & \end{array}$$

$\Rightarrow F = E + \dfrac{R}{Q} = 2x + 5 + \dfrac{7x - 4}{x^2 - 2x + 1}$

- $x^2 - 2x + 1 = 0 \Rightarrow$ 1 racine double de Q

$\Rightarrow F = 2x + 5 + \dfrac{7x - 4}{(x - 1)^2}$

Les pôles de F : 1 pôle double.

$$\Rightarrow F = 2x+5 + \frac{\lambda_1}{x-1} + \frac{\lambda_2}{(x-1)^2} ; \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$$

- $\lambda_2 = (x-1)^2 F \Big|_{x=1} = 3.$

- $F(0) = 5 - \lambda_1 + 3 = 1 \Rightarrow \boxed{\lambda_1 = 7}$

cl : $F = 2x+5 + \frac{7}{x-1} + \frac{\cancel{ka}\ 3}{(x-1)^2}.$

3°/ $F = \frac{x+1}{(x^2-1)(x+2)} = \frac{P}{Q}$ n'est pas irréductible car -1 racine commune pour P et Q

$$\Rightarrow F = \frac{\cancel{x+1}}{(x-1)\cancel{(x+1)}(x+2)} = \frac{1}{(x-1)(x+2)}$$ irréd, unitaire

$\deg(F) < 0 \Rightarrow E = 0$ (partie entière).

$\Rightarrow$ Les pôles de F : 1 pôle simple

-2 pôle simple

$$\Rightarrow F = \frac{\lambda}{x-1} + \frac{\beta}{x+2} \text{ avec } \begin{cases} \lambda = (x-1)F\Big|_{x=1} = \frac{1}{3} \\ \beta = (x+2)F\Big|_{x=-2} = -\frac{1}{3}. \end{cases}$$

4°/ $F = \dfrac{x-1}{x^2(x^2+1)}$ irréductible, unitaire.

$\deg F = -3 < 0 \Rightarrow$ partie entière $E = 0$.

- Les pôles de F : • Dans $\mathbb{R}$: 0 pôle double
  • Dans $\mathbb{C}$: $\begin{cases} 0 \text{ pôle double} \\ i \text{ pôle simple} \\ -i \text{ pôle simple} \end{cases}$

- Décomposition dans $\mathbb{R}$:

$$F = \frac{\lambda_1}{x} + \frac{\lambda_2}{x^2} + \frac{ax+b}{\underbrace{x^2+1}_{\Delta<0}} \; ; \; \lambda_1, \lambda_2, a, b \in \mathbb{R}$$

- $\lambda_2 = x^2 F \Big]_{x=0} = \dfrac{x-1}{x^2+1}\Big]_{x=0} = -1$

- $\lambda_1 = (x^2 F)' \Big]_{x=0} = \left(\dfrac{x-1}{x^2+1}\right)' \Big]_{x=0} = \dfrac{(x^2+1)-2x(x-1)}{(x^2+1)^2}\Big]_{x=0} = 1$

- $\lim\limits_{x\to+\infty} xF(x) = \lambda_1 + 0 + a = 0 \Rightarrow \boxed{a = -\lambda_1 = -1}$

- Pour $x = 1$: $F(1) = \overset{=1}{\lambda_1} + \overset{=-1}{\lambda_2} + \dfrac{a+b}{2} = 0 \Leftrightarrow \boxed{b = -a = 1}$

$\Rightarrow F = \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{-x+1}{x^2+1}$.

- Décomposition dans $\mathbb{C}$:

$$F = \frac{\lambda_1}{X} + \frac{\lambda_2}{X^2} + \frac{\alpha}{X-i} + \frac{\bar{\alpha}}{X+i} ; \quad \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}, \ \alpha, \bar{\alpha} \in \mathbb{C}.$$

- $\lambda_2 = X^2 F \Big]_{X=0} = -1.$
- $\lambda_1 = (X^2 F)' \Big]_{X=0} = 1.$
- $\alpha = (X-i)F \Big]_{X=i} = \frac{X-1}{X^2(X+i)} \Big]_{X=i} = \frac{i-1}{i^2(i+i)}$

$$= \frac{(i-1)\times(+i)}{-2i \times (i)}$$

$$= \frac{-1-i}{2}.$$

$$\Rightarrow \bar{\alpha} = \frac{-1+i}{2}.$$

cl : $F = +\frac{1}{X} - \frac{1}{X^2} + \frac{\frac{-1-i}{2}}{X-i} + \frac{\frac{-1+i}{2}}{X+i}.$

5) $F = \frac{X^5 + X^4 + 1}{X(X-1)^4}$ irréductible, unitaire.

- $\deg(F) = 0 \Rightarrow E = \lim_{x \to +\infty} F(x) = 1.$
- Les pôles de F : 0 pôle simple
  1 pôle d'ordre 4.

Décomposition ds $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$:

$$\Rightarrow F = 1 + \frac{\alpha}{X} + \frac{\lambda_1}{X-1} + \frac{\lambda_2}{(X-1)^2} + \frac{\lambda_3}{(X-1)^3} + \frac{\lambda_4}{(X-1)^4} ; \quad \alpha \in \mathbb{R}, \ \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4 \in \mathbb{R}.$$

(5

- $\alpha = xF\big]_{x=0} = \dfrac{x^5+x^4+1}{(x-1)^4}\Big]_{x=0} = 1.$

- $\lambda_4 = (x-1)^4 F\big]_{x=1} = \dfrac{x^5+x^4+1}{x}\Big]_{x=1} = 3.$

- $\lambda_3 = \left(\dfrac{(x-1)^4 F}{1!}\right)'\Big]_{x=1} = \left(\dfrac{x^5+x^4+1}{x}\right)'\Big]_{x=1} = \left(x^4+x^3+\dfrac{1}{x}\right)'\Big]_{x=1}$

$= 4x^3+3x^2-\dfrac{1}{x^2}\Big]_{x=1} = 6.$

- $\lambda_2 = \dfrac{\left((x-1)^4 F\right)''}{2!}\Big]_{x=1} = \dfrac{12x^2+6x+\frac{2}{x^3}}{2}\Big]_{x=1} = 10.$

- $\lambda_1 = \dfrac{\left((x-1)^4 F\right)^{(3)}}{3!}\Big]_{x=1} = \dfrac{24x+6-\frac{6}{x^4}}{6}\Big]_{x=1} = 4.$

cl: $F = 1 + \dfrac{1}{x} + \dfrac{4}{x-1} + \dfrac{10}{(x-1)^2} + \dfrac{6}{(x-1)^3} + \dfrac{3}{(x-1)^4}.$

6°] $F = \dfrac{x^5+x^4+1}{(x-1)^3(x+1)^2}$ irréd, unitaire.

- $\deg(F) = 0 \Rightarrow E = \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 1$

- les pôles de F : 1 pôle triple
  -1 pôle double.

$\Rightarrow F = 1 + \dfrac{\lambda_1}{x-1} + \dfrac{\lambda_2}{(x-1)^2} + \dfrac{\lambda_3}{(x-1)^3} + \dfrac{\alpha_1}{(x+1)} + \dfrac{\alpha_2}{(x+1)^2}$; $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$

- $\lambda_3 = (x-1)^3 F \Big]_{x=1} = \text{—}$
- $\lambda_2 = \left((x-1)^3 F\right)' \Big]_{x=1} = \text{—}$
- $\lambda_3 = \left(\dfrac{(x-1)^3 F}{2!}\right)'' \Big]_{x=1} = 1$

- $\alpha_2 = (x+1)^2 F \Big]_{x=-1} = \text{—}$
- $\alpha_1 = \left(\dfrac{(x+1)^2 F}{1!}\right)' \Big]_{x=-1} = \text{—}$

7°] $F = \dfrac{6x+5}{(3x^2+5x+2)^2}$ irréductible, non unitaire.

- $\deg(F) < 0 \Rightarrow E = 0.$
- Les pôles de F :

$3x^2+5x+2=0$

$\Delta = 25 - 4\times 3\times 2$
$= 25 - 24$
$= 1$

$\Rightarrow x = \dfrac{-5-1}{6} = -1$ ou $x = \dfrac{-5+1}{6} = -\dfrac{2}{3}$

$\Rightarrow$ • -1 pôle double.
• $-\dfrac{2}{3}$ pôle double.

$\Rightarrow (3x^2+5x+2)^2 = 3(x+1)^2\left(x+\dfrac{2}{3}\right)^2$

$$\Rightarrow F = \frac{6x+5}{3(x+1)^2\left(x+\frac{2}{3}\right)^2} = \frac{\lambda_1}{x+1} + \frac{\lambda_2}{(x+1)^2} + \frac{\alpha_1}{x+\frac{2}{3}} + \frac{\alpha_2}{\left(x+\frac{2}{3}\right)^2};$$

$\lambda_1, \lambda_2, \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$.

Ex 2 :

1°/ $F = \dfrac{X}{(X-1)^3 (X+2)}$ irréductible, unitaire.

- $\deg(F) = -3 < 0 \Rightarrow E = 0$
- Les pôles de F sont : 1 pôle triple, -2 pôle simple

$\Rightarrow F = \dfrac{\lambda}{X+2} + \dfrac{a}{X-1} + \dfrac{b}{(X-1)^2} + \dfrac{c}{(X-1)^3}$; $\lambda, a, b, c \in \mathbb{R}$.

$$\lambda = (X+2)F\Big]_{X=-2} = \dfrac{X}{(X-1)^3}\Big]_{X=-2} = \dfrac{2}{27}.$$

Pour calculer a, b et c, on pose $h = X - 1$
$\Leftrightarrow X = h+1$

$$\Rightarrow F(h+1) = \dfrac{h+1}{h^3(h+3)}.$$

Effectuons la division suivant les puissances croissantes de $(h+1)$ par $(h+3)$ à l'ordre 2.

$$\begin{array}{r|l} 1+h & 3+h \\ \hline 1+\frac{1}{3}h & \frac{1}{3}+\frac{2}{9}h-\frac{2}{27}h^2 \\ \hline +\frac{2}{3}h & \\ \frac{2}{3}h+\frac{2}{9}h^2 & \\ \hline -\frac{2}{9}h^2 & \\ -\frac{2}{9}h^2-\frac{2}{27}h^3 & \\ \hline \frac{2}{27}h^3 & \end{array}$$

ainsi $(1+h) = (3+h)\left(\frac{1}{3}+\frac{2}{9}h-\frac{2}{27}h^2\right)+\frac{2}{27}h^3$

$\Leftrightarrow \dfrac{1+h}{3+h} = \dfrac{1}{3}+\dfrac{2}{9}h-\dfrac{2}{27}h^2+\dfrac{2}{27}\dfrac{h^3}{3+h}$

$\Leftrightarrow F(1+h) = \dfrac{1}{3h^3}+\dfrac{2}{9h^2}-\dfrac{2}{27h}+\dfrac{2}{27(3+h)}$

$\Leftrightarrow F(X) = \dfrac{\frac{2}{27}}{X+2}+\dfrac{-\frac{2}{27}}{X-1}+\dfrac{\frac{2}{9}}{(X-1)^2}+\dfrac{\frac{1}{3}}{(X-1)^3}.$

On a trouvé les valeurs des scalaires a, b et c mais aussi on a retrouvé la valeur de λ.

2°/ $F = \dfrac{X^2 - 3}{(X+3)^2(X-3)}$ irréd. unitaire.   (8

- $\deg(F) = -1 < 0 \Rightarrow E = 0$.
- Les pôles de F : -3 pôle ~~triple~~ double, 3 pôle simple

$\Rightarrow F = \dfrac{\lambda}{X-3} + \dfrac{a}{X+3} + \dfrac{b}{(X+3)^2}$; $\lambda, a, b \in \mathbb{R}$.

$$\lambda = (X-3)F\Big]_{X=3} = \frac{X^2-3}{(X+3)^2}\Big]_{X=3} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}.$$

Pour calculer a, b et c, on pose $h = X+3$
$\Leftrightarrow X = h-3$

$$\Rightarrow F(h-3) = \frac{(h-3)^2-3}{h^2(h-6)} = \frac{h^2-6h+6}{h^2(h-6)}.$$

Effectuons la division suivant les puissances croissantes de $(6-6h+h^2)$ par $(-6+h)$ à l'ordre 1.

$$\begin{array}{l|l}
6 - 6h + h^2 & -6+h \\ \hline
+6 - h & -1 + \frac{5}{6}h \\ \hline
-5h + h^2 & \\
-5h + \frac{5}{6}h^2 & \\ \hline
\frac{1}{6}h^2 &
\end{array}$$

ainsi $6 - 6h + h^2 = (-6+h)\left(-1+\frac{5}{6}h\right) + \frac{1}{6}h^2$

$\Rightarrow F(h-3) = -\dfrac{1}{h^2} + \dfrac{5}{6h} + \dfrac{1}{6(h-6)}$

$\Leftrightarrow F(X) = \dfrac{\frac{1}{6}}{X-3} + \dfrac{5/6}{X+3} + \dfrac{-1}{(X+3)^2}$.

On a trouvé les valeurs des scalaires a et b mais on a retrouvé la valeur de λ.

(9

3°/ $F = \dfrac{5x - 4}{x(x-1)^2}$ irréd, unitaire.

- $\deg(F) < 0 \Rightarrow E = 0$.
- Les pôles de F sont : 0 pôle simple, 1 pôle double.

$\Rightarrow F = \dfrac{\lambda}{x} + \dfrac{a}{x-1} + \dfrac{b}{(x-1)^2}$; $\lambda, a, b \in \mathbb{R}$.

$$\lambda = xF\Big]_{x=0} = \frac{5x-4}{(x-1)^2}\Big]_{x=0} = -4.$$

Pour calculer a et b, on pose $h = x - 1$
$\Leftrightarrow x = h+1$

$$\Rightarrow F(h+1) = \frac{5(h+1)-4}{(h+1)\,h^2} = \frac{5h+1}{(h+1)\,h^2}.$$

Effectuons la division suivant les puissances croissantes de $(1+5h)$ par $(1+h)$ à l'ordre 1.

$$\begin{array}{r|l} 1+5h & 1+h \\ \hline 1+h & 1+4h \\ \hline 4h & \\ 4h+4h^2 & \\ \hline -4h^2 & \end{array}$$

ainsi $(1+5h) = (1+h)(1+4h) - 4h^2$

$\Rightarrow F(h+1) = \dfrac{1}{h^2} + \dfrac{4}{h} - \dfrac{4}{h+1}$

$\Rightarrow F(x) = \dfrac{-4}{x} + \dfrac{4}{x-1} + \dfrac{1}{(x-1)^2}$.

On a trouvé les valeurs des scalaires a et b mais aussi on a retrouvé la valeur de λ.

Ex 3 :

1°/ $F = \dfrac{1}{X^n - 1} = \dfrac{P}{\varphi}$; $n \geq 2$.

- $\deg(F) < 0 \Rightarrow E = 0$
- Les pôles de F sont les racines n-ièmes de l'unité, c.à.d les complexes $x_k = e^{\frac{2ik\pi}{n}}$, $k \in [\![0, n-1]\!]$. Chaque pôle est simple.

$$\Rightarrow F = \frac{\alpha_0}{X - x_0} + \frac{\alpha_1}{X - x_1} + \dots + \frac{\alpha_{n-1}}{X - x_{n-1}}$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\alpha_k}{X - x_k} \text{ ;}$$

$$\alpha_k = \frac{P(\cancel{X})}{\varphi'(\cancel{X})}\Bigg]_{X = x_k} = \frac{1}{n X^{n-1}}\Bigg]_{X = x_k} = \frac{1}{n x_k^{n-1}} \text{ ; } n \geq 2.$$

$$= \frac{e^{\frac{2ik\pi}{n}}}{n}.$$

$$\Rightarrow F = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\frac{1}{n} e^{\frac{2ik\pi}{n}}}{X - x_k}.$$

2°/ $F = \dfrac{X^{n-1}}{X^n - 1}$; $n \geq 2$

- $\deg(F) < 0 \Rightarrow E = 0$.
- Les pôles de F : $x_k = e^{\frac{2ik\pi}{n}}$, $k \in [\![0, n-1]\!]$. (pôles simples)

$\Rightarrow F = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \frac{\alpha_k}{X - x_k}$; $\alpha_k = \dfrac{P(X)}{\varphi'(X)}\Bigg]_{X = x_k} = \dfrac{\cancel{X^{n-1}}}{n \cancel{X^{n-1}}}\Bigg]_{X = x_k} = \dfrac{1}{n}$; $n \geq 2$.

$$\Rightarrow \boxed{F = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\frac{1}{n}}{X - x_k}}.$$

EX4: $P = -x^6 + x^4(3-x) - 2 + (x^3-4)^2 + 9x^2(x-1) - 2(x-3)^2$ 4/1

$= \cancel{-x^6} + 3x^4 - x^5 - 2 + \cancel{x^6} - 8x^3 + 16 + 9x^3 - 9x^2 - 2x^2 + 12x - 18$

$= -x^5 + 3x^4 + x^3 - 11x^2 + 12x - 4.$

1°/ • $\deg(P) = 5$

• coefficient dominant $= -1$.

• terme constant $= -4$.

2°/ • $P = -x^5 + 3x^4 + x^3 - 11x^2 + 12x - 4$.

Co $P(1) = -1 + 3 + 1 - 11 + 12 - 4$

$= (-1 - 11 - 4) + (3 + 1 + 12)$

$= -16 + 16$

$= 0.$

• $P' = -5x^4 + 12x^3 + 3x^2 - 22x + 12$.

Co $P'(1) = -5 + 12 + 3 - 22 + 12$

$= (-5 - 22) + (12 + 3 + 12)$

$= -27 + 27$

$= 0$

• $P'' = -20x^3 + 36x^2 + 6x - 22$

Co $P''(1) = -20 + 36 + 6 - 22$

$= (-20 - 22) + (36 + 6)$

$= -42 + 42$

$= 0$

• $P^{(3)} = -60x^2 + 72x + 6$

Co $P^{(3)}(1) = -60 + 72 + 6$

$= -60 + (72 + 6)$

$= -60 + 78$

$= 18 \neq 0$

$\Longrightarrow \begin{cases} \bullet\ P(1) = P'(1) = P''(1) = 0 \\ \quad \text{et} \\ P^{(3)}(1) \neq 0 \end{cases}$

$\Longrightarrow$ 1 racine triple de P.

3°/ • 1 racine triple de P

$\Rightarrow P = (X-1)^3 Q$ avec $Q \in \mathbb{R}[X]$ et $\deg Q = 2$.

Pour déterminer Q, on effectue P par $(X-1)^3 = X^3 - 3X^2 + 3X - 1$.

$$\begin{array}{r|l}
-X^5+3X^4+X^3-11X^2+12X-4 & X^3-3X^2+3X-1 \\
\cline{2-2}
-X^5+3X^4-3X^3+X^2 & -X^2+4 \\
\cline{1-1}
4X^3-12X^2+12X-4 & \\
4X^3-12X^2+12X-4 & \\
\cline{1-1}
0 &
\end{array}$$

$$\Rightarrow P = (X-1)^3(-X^2+4)$$
$$= -(X-1)^3(X^2-4)$$

• $X^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow X = 2$ ou $X = -2$

Décomposition en facteurs irréd. dans $\mathbb{R}[X]$:

$\Rightarrow P = -(X-1)^3(X-2)(X+2)$.

4°/ Formule de Taylor pour P au point 1 :

$$P = P(1) + \frac{P'(1)}{1!}(X-1) + \frac{P''(1)}{2!}(X-1)^2 + \frac{P^{(3)}(1)}{3!}(X-1)^3$$
$$+ \frac{P^{(4)}(1)}{4!}(X-1)^4 + \frac{P^{(5)}(1)}{5!}(X-1)^5.$$

Or $P(1) = P'(1) = P''(1) = 0$ et $P^{(3)}(1) = 18$.

donc reste à calculer $P^{(4)}(1)$ et $P^{(5)}(1)$

- $P^{(4)} = -120X + 72$

$\Rightarrow P^{(4)}(1) = -120 + 72$

$= -48.$

- $P^{(5)} = -120$

$\Rightarrow P^{(5)}(1) = -120$

de plus $3! = 3 \times 2 = 6$

$4! = 4 \times 3 \times 2 = 24$

$5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 = 120.$

c.l: F. Taylor pour P en 1.

$$\Rightarrow P = \frac{P^{(3)}(1)}{3!}(X-1)^3 + \frac{P^{(4)}(1)}{4!}(X-1)^4 + \frac{P^{(5)}(1)}{5!}(X-1)^5$$

$$= 3(X-1)^3 - 2(X-1)^4 - (X-1)^5.$$

5°/

On a $P = 3(X-1)^3 - 2(X-1)^4 - (X-1)^5$

$$= (X-1)^4\left[-2-(X-1)\right] + 3(X-1)^3$$

$$= (X-1)^4(-X-1) + 3(X-1)^3.$$

div. eucl de P par $(X-1)^4$: $\Rightarrow \begin{cases} \text{Quotient: } -X-1. \\ \text{Reste: } 3(X-1)^3. \end{cases}$

6° Soit $\varphi = X^4 + X^3 + aX^2 + X - 2$; $a \in \mathbb{C}$.

a° $P(i) = 1 \cancel{-i} - a \cancel{+i} - 2 = 0$

$\Leftrightarrow -a - 1 = 0$

$\Leftrightarrow \boxed{a = -1}$.

b° $\varphi = X^4 + X^3 - X^2 + X - 2$

$$\begin{cases} \varphi \in \mathbb{R}[X] \\ \text{et} \\ i \text{ racine de } \varphi \end{cases} \Rightarrow \bar{i} = -i \text{ racine de } \varphi$$

$\Rightarrow \varphi = (X - i)(X + i)\,\varphi_1$; $\varphi_1 \in \mathbb{R}[X]$ et $\deg \varphi_1 = 2$.

$= (X^2 + 1)\,\varphi_1$

Pour déterminer φ_1, on effectue la div. eucl. de φ par (X^2+1).

$$\begin{array}{r|l} X^4 + X^3 - X^2 + X - 2 & X^2 + 1 \\ \cline{2-2} X^4 + X^2 & X^2 + X - 2 \\ \cline{1-1} X^3 - 2X^2 + X - 2 & \\ X^3 + X & \\ \cline{1-1} -2X^2 - 2 & \\ -2X^2 - 2 & \\ \cline{1-1} 0 & \end{array}$$

$\Rightarrow \varphi = (X^2+1)(X^2+X-2)$

- $X^2 + 1 = 0$: $\Delta < 0 \Rightarrow$ irréd dans $\mathbb{R}[X]$.
- $X^2 + X - 2 = 0 \Rightarrow X = 1$ ou $X = -2$

$\Rightarrow \varphi = (X^2+1)(X-1)(X+2)$ dans $\mathbb{R}[X] \Rightarrow \varphi = (X-i)(X+i)(X-1)(X+2)$ dans $\mathbb{C}$.

$\boxed{6°}$ • $P = -(X-1)^3(X-2)(X+2)$

• $Q = (X-1)(X+2)(X^2+1)$

On remarque $(X-1)(X+2)$ divise P et divise Q.

$\Rightarrow (X-1)(X+2)$ est un diviseur commun à P et à Q.

$\boxed{7°}$ $F_1 = \dfrac{Q}{P} = \dfrac{\cancel{(X-1)}\cancel{(X+2)}(X^2+1)}{-(X-1)^3(X-2)\cancel{(X+2)}} = \dfrac{X^2+1}{-(X-1)^2(X-2)}$

• $\deg(F_1) = -1 < 0 \Rightarrow E = 0$ (partie entière)

• Les pôles de F_1 : 1 pôle double, 2 pôle simple.

$\boxed{8°}$ $F = \dfrac{(X-1)^2 Q}{X^3 P} = \dfrac{X^2+1}{+X^3(-X+2)}$, irréductible,

• $\deg(F) < 0 \Rightarrow E = 0$

• Les pôles de F : 0 pôle triple, 2 pôle simple

$\Rightarrow F = \dfrac{\lambda}{-X+2} + \dfrac{a}{X} + \dfrac{b}{X^2} + \dfrac{c}{X^3}$; $\lambda, a, b, c \in \mathbb{R}$.

Pour calculer λ, a, b et c, effectuons la division suivant les puiss. croissantes de $(1+X^2)$ par $(2-X)$ à l'ordre 2.

$$\begin{array}{l|l} 1+X^2 & 2-X \\ \hline 1-\frac{1}{2}X & \frac{1}{2}+\frac{1}{4}X+\frac{5}{8}X^2 \\ \hline \frac{1}{2}X+X^2 & \\ \frac{1}{2}X-\frac{1}{4}X^2 & \\ \hline \frac{5}{4}X^2 & \\ \frac{5}{4}X^2-\frac{5}{8}X^3 & \\ \hline \frac{5}{8}X^3 & \end{array}$$

ainsi $1+X^2 = (2-X)\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}X+\frac{5}{8}X^2\right) + \frac{5}{8}X^3$

$\Rightarrow F = \dfrac{\frac{5}{8}}{X} + \dfrac{\frac{1}{4}}{X^2} + \dfrac{\frac{1}{2}}{X^3} + \dfrac{\frac{5}{8}}{-X+2}$.

donc on a trouvé les valeurs des scalaires λ, a, b et c.