impaires et la fct ch est paire.

9) $(ch(x))' = sh(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$

10) $(sh(x))' = ch(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$

11) $(th(x))' = \left(\frac{sh(x)}{ch(x)}\right)'$

$$= \frac{1}{ch^2(x)}$$

$$= 1 - th^2(x), \forall x \in \mathbb{R}$$

Chapitre : Développement limités :

I- Formule de Taylor-Young :

théorème :

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^n$ sur I et soit $a \in I$. Alors, pour tout $x \in I$ on a :

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots + \frac{f^n(x)}{n!}(x-a)^n + (x-a)^n \mathcal{E}(x)$$

avec $\mathcal{E} : I \to \mathbb{R}$ telque $\lim\limits_{x \to a} \mathcal{E}(x) = 0$

Remarque :

si $a = 0$, la formule de Taylor-Young s'écrit

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f^3(0)}{3!}x^3 + \dots + \frac{f^n(0)}{n!}x^n + x^n \mathcal{E}(x)$$

avec $\mathcal{E}(x) \underset{x \to 0}{\longrightarrow} 0$

Ex :

si $f(x) = e^x$, en appliquant la formule de Taylor-Young à f en 0 on obtient

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} x^n \mathcal{E}(x)$$

avec $\mathcal{E}(x) \underset{x \to 0}{=} 0$

II- Développement limité

Définition :

Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$. et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction. Pour $a \in I$ et $n \in \mathbb{N}$, on dit que f admet un développement limité d'ordre n au point a ($DL_n(a)$) s'il existe $C_0, C_1, C_2, \dots, C_n \in \mathbb{R}$ et $\mathcal{E} : I \to \mathbb{R}$ tque $\lim\limits_{x \to a} \mathcal{E}(x) = 0$ de sorte que.

$$f(x) = C_0 + C_1(x-a) + C_2(x-a)^2 + C_3(x-a)^3 + C_n(x-a)^n \mathcal{E}(x)$$

avec $\mathcal{E}(x) \underset{x \to 0}{\longrightarrow} 0$

- On appelle les termes $C_0 + C_1(x-a) + C_2(x-a)^2 + C_3(x-a)^3 + \dots + C_n(x-a)^n$ la partie polynomiale de $DL_n(a)$
- On appelle $(x-a)^n \mathcal{E}(x)$ le reste de la $DL_n(a)$.

On peut écrire le reste de la manière suivante au lieu de d'écrire

$(x-a)^n \varepsilon(x)$, on écrit

$\theta((x-a)^n)$

Remarque :

par identification avec la formule de Taylor-Young on a :

$C_0 = f(a)$

$C_1 = f'(a)$

$C_2 = \frac{f''(a)}{2!}$

$C_3 = \frac{f'''(a)}{3!}$

$\vdots$

$C_n = \frac{f^n(a)}{n!}$

2) $DL_n(a)$ de f

$f(x) = \cancel{f(a)}\ C_0 + C_1 x + C_2 x^2 + C_3 x^3 + \dots + C_n x^n + x^n \varepsilon(x)$

Par identification avec la formule de Taylor Young en 0 on a :

$C_0 = f(0)$, $C_1 = f'(0)$, $C_2 = \frac{f''(0)}{2!}$

$C_3 = \frac{f'''(0)}{3!}$, $C_n = \frac{f^n(0)}{n!}$

Proposition :

1) si f de classe $\mathcal{C}^n$ alors d'après Taylor-Young, f admet un $DL_n(a)$

- Si f admet un DL alors il est unique.
- Si f est paire (~~ag~~ resp impaire) alors le DL de f contient seulement des exposants paires (resp impaires), les puiss

6

Ex : (En appliquant la formule de Taylor) : $\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} + x^{2n+1}\varepsilon(x)$.

~~$C_0 = f(0)$~~

$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots + \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} + x^{2n}\varepsilon(x)$.

Proposition :

On suppose que f et g admettent des $DL_n(0)$

$f(x) = C_0 + C_1 x + C_2 x^2 + C_3 x^3 + \dots + C_n x^n + \theta_1(x^n)$

$g(x) = d_0 + d_1 x + d_2 x^2 + d_3 x^3 + \dots + d_n x^n + \theta_2(x^n)$

alors :

1) $f+g$ admet un $DL_n(0)$ et on a :

$f(x) + g(x) = (C_0 + d_0) + (C_1 + d_1)x + (C_2 + d_2)x^2 + \dots + (C_n + d_n)x^n + \theta(x^n)$

2) fg admet un $DL_n(0)$ et on a :

$f(x) \cdot g(x) = (C_0 + C_1 x + C_2 x^2 + \dots + C_n x^n) \cdot (d_0 + d_1 x + d_2 x^2 + \dots + d_n x^n) + \theta(x^n)$

Ex :

$DL_2(0) : \sin(x) \cdot \cos(x)$

avec $\varepsilon_1(x) \to 0$ quand $x \to 0$, $\varepsilon_2(x)$,, ,,

$DL_2(0) : \sin(x) = x + x^2 \varepsilon_1(x)$

$DL_2(0) : \cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + x^2 \varepsilon_2(x)$

$DL_2(0) : \sin(x) \cdot \cos(x) =$

$DL_2(0) : \sin(x)\cos(x) =$

$= x\left(1 - \frac{x^2}{2!}\right) + x^2 \varepsilon(x)$

$= x + x^2 \varepsilon(x) \qquad \varepsilon(x) \underset{x \to 0}{\longrightarrow} 0$

Proposition:

On suppose que f et g deux fonctions admettent $DL_n(0)$ respectivement :

$f(x) = \underbrace{C_0 + C_1 x + \dots + C_n x^n}_{C(x)} + x^n \varepsilon_1(x)$ & $\varepsilon_1(x) \underset{x \to 0}{\longrightarrow} 0$

$g(x) = \underbrace{d_0 + d_1 x + \dots + d_n x^n}_{D(x)} + x^n \varepsilon_2(x) \qquad \varepsilon_2(x) \underset{x \to 0}{\longrightarrow} 0$

Si $g(0) = 0$ alors la fonction $f \circ g$ admet un $DL_n(a)$ dont la partie polynômiale $(C \circ D)(x)$ ~~tronqe~~ tronqué à n.

Exemple: donner $DL_3(0)$ de $f(x) = e^{\sin(x)}$?

Solution:

$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \theta_1(x^3)$

$\sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + \theta_2(x^3)$

$e^{\sin(x)} = 1 + x - \frac{x^3}{6} + \frac{1}{2}\left(x - \frac{x^3}{6}\right)^2 + \frac{1}{6}\left(x - \frac{x^3}{6}\right)^3 + \theta(x^3)$

* $\left(x - \frac{x^3}{6}\right)^2 = \dots$
* $\left(x - \frac{x^3}{6}\right)^3 = \dots$

$e^{\sin(x)} = \underbrace{1 + \frac{x^2}{2}}_{\text{partie polynomiale}} + \theta(x^3)$

$(C \circ D)$

Proposition:

Soit $f \in C^n(J, \mathbb{R})$ dont le $DL_n(0)$ est $f(x) = C_0 + C_1 x + \dots + C_n x^n + \theta(x^n)$

Notons F une primitive de f alors le $DL_{n+1}(0)$ est

$$F(x) = F(0) + C_0 x + C_1 \frac{x^2}{2} + C_2 \frac{x^3}{3} + \dots + C_n \frac{x^{n+1}}{n+1} + o(x^{n+1})$$

Ex:

Donner le $DL_4(0)$ de $\ln(1+x)$

Solution: on a :

$DL_3(0)$ de $\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + o(x^3)$

on sait que $\int \frac{1}{1+x} dx = \ln(1+x)$

donc $DL_4(0)$ de, $\ln(1+0) = \ln(1) = 0$

$\ln(1+x) = \int 1 - x^2 + x^3 - x^4 dx + o(x^4)$

$= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + o(x^4)$

Proposition:

Soient f et g 2 fcts admettent un $DL_n(0)$ de parties régulières P et Q respectivement.

si $g(0) \neq 0$ alors $\frac{f}{g}$ admet un $DL_n(0)$ de partie régulière $\frac{P}{Q}$

Si $\deg P > \deg Q$: c'est une

division euclidienne

* Si $\deg P < \deg Q$: c'est une division suivant les puissances croissantes.

Exemples d'utilisation de développement limités:

Le développement limité peut nous aider à calculer les limites qui se représentent comme forme indeterminée.

Exemple: $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1-\cos(x)}{x^2} = \frac{1}{2}$?

on a : $DL_2(0)$ de

$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$

$-\cos(x) = -1 + \frac{x^2}{2} + o(x^2)$

$1-\cos(x) = \cancel{1} - \cancel{1} + \frac{x^2}{2} + o(x^2)$

$$\frac{1-\cos(x)}{x^2} = \frac{\frac{x^2}{2} + o(x^2)}{x^2}$$

$$= \frac{\frac{x^2}{2}}{x^2} + o(1) = \frac{1}{2} + \underbrace{o(1)}_{\text{négligeable}}$$

Donc: $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1-\cos(x)}{x^2} = \frac{1}{2}$.

une autre utilité pour le dével limité c'est l'étude des fcts.

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction

1) Si f admet un $DL_0(0)$ alors f est continue en 0.

$\left(\begin{array}{l} DL_0(0) \text{ de } f. \\ f(x) = C_0 + o(1),\ C_0 = f(0) \text{ finie} \end{array} \right)$

2) Si f admet un $DL_1(0)$ donc f est dériv en 0.

$\left(\begin{array}{l} f(x) = C_0 + C_1 x + o(x) \\ \text{avec } C_1 = f'(0) \end{array} \right.$

3) Si f admet un $DL_n(0)$, $n \geq 2$

$f(x) = \underbrace{C_0 + C_1 x} + C_2 x^2 + \dots + C_n x^n + o(x^n)$

$T_0 : y = C_0 + C_1 x$ $\left(\begin{array}{l} \text{car } C_0 = f(0) \\ C_1 = f'(0) \end{array} \right)$

T_0 c'est l'éq de la tgt de f en 0.

Si $a \neq 0$, $DL_n(a)$ de f

$f(x) = C_0 + C_1(x-a) + \dots + C_n(x-a)^n + o((x-a)^n)$.

$T_a : y = C_0 + C_1(x-a)$ c'est l'éq de la tge au $V(a)$

La position de la courbe par rapport à la tangente:

on a $DL_n(0)$ de f.

$f(x) = C_0 + C_1 x + C_2 x^2 + \dots + C_n x^n + o(x^n)$

$T_0 : y = C_0 + C_1 x$: l'éq de la tge en 0.

$f(x) - y = f(x) - (C_0 + C_1 x)$

$= \underbrace{C_2 x^2}_{\text{en } 0} + \dots + C_n x^n + o(x^n)$

* Si $f(x) - y = C_p x^p + o(x^p)$

Si p est paire : → Si $C_p > 0$ $C_p x^p > 0$
→ Si $C_p < 0$ $C_p x^p < 0$

Si p est impaire → $C_p > 0$ ~~$C_p x^p > 0$~~
→ $C_p < 0$ ~~$C_p x^p < 0$~~

$C_p > 0$ < $x > 0$ f dessus T_0 ; $x < 0$ dessous

$C_p < 0$ < $x > 0$ dessous ; $x < 0$ dessus

Exercice:

Soit $f(x) = e^{\sin(x)} + \cos(x)$

1) Déterminer le $DL_3(0)$ de f

2) En déduire l'éq de la tge & ~~lot~~ sa position par rapport à la Courbe de f.

Solution: on a: $DL_3(0)$ de

$\sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)$

$e^{\sin(x)}$

$e^X = 1 + X + \frac{X^2}{2!} + \frac{X^3}{3!} + o(X^3)$

Puis on remplace:

$X = x - \frac{x^3}{6}$.

on trouve le $DL_3(0)$ de

$e^{\sin(x)} = 1 + \left(x - \frac{x^3}{6}\right) - \frac{1}{2}\left(x - \frac{x^3}{6}\right)$

$+ \frac{1}{6}\left(x - \frac{x^3}{6}\right) + o(x^3)$.

$= 1 + x - \cancel{\frac{x^3}{6}} + \frac{1}{2}[x^2] + \frac{1}{6}[\cancel{x^3}] + o(x^3)$

$\left(x - \frac{x}{6}\right)^3 = \left(x - \frac{x^3}{6}\right)^2\left(x - \frac{x^3}{6}\right)$

$= x^2\left(x - \frac{x^3}{6}\right) + o(x^3)$

$= x^3 + o(x^3)$

$= 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + o(x^3)$

on a: $DL_3(0)$ de:

$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3)$

$e^{\sin(x)} + \cos(x) = 1 + x + \frac{1}{2}\cancel{x^2} + 1 - \frac{\cancel{x^2}}{2} + o(x^3)$

$= 2 + x + o(x^3)$

D'après la question 1 on a:

$T_0: y = 2 + x$ c'est l'éq de la tge ~~par rappor~~ en 0.

Exercice:

$f(x) = e^{\sin(x)}$

1) Déterminer $DL_3(0)$

2) Déterminer l'éq de la tge en 0 et en déduire la position de la C_f % T_0

Solution.

D'après l'ex précédent

$DL_3(0)$ de

$f(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^3)$

2) $T_0: y = 1 + x$ c'est l'éq de la tge de f en $x = 0$.

$f(x) - (1 + x) = \frac{x^2}{2} > 0$

$\forall x \in \mathbb{R}$.

alors: C_f est au dessus de T_0.