ISIM Monastir
Département de Mathématiques

L1 INF, TIC et EEA

Série d'exercices n°2

Exercice n°1 :

(1) En utilisant la définition du nombre dérivé, déterminer les limites suivantes :

(i) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^{3x+2}-e^2}{x}$, (ii) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\cos(x)-1}{x}$, et (iii) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{\ln(2-x)}{x-1}$.

(2) Calculer la dérivée n-ième du fonction $f(x) = xe^x$.

Exercice n°2 :

Soit a et b deux nombres réels. On définit la fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ par

$$f(x) = \begin{cases} ax+b & \text{si } x \leq 0 \\ \frac{1}{1+x} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

(1) Donner une condition sur b pour que f soit continue sur $\mathbb{R}$.

(2) Déterminer a et b tels que f soit dérivable sur $\mathbb{R}$ et dans ce cas calculer $f'(0)$.

Exercice n°3 :

Soit $f :]0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ l'application définie par $f(x) = \frac{e^x}{x^e}$.

(1) Etudier les variations de f.

(2) Comparer les réels e^π et π^e.

Exercice n°4 :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

(1) Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.

(2) Pour tout $x \neq 0$ calculer $f'(x)$.

(3) Calculer : $\lim\limits_{x\to 0^\pm} f'(x)$. Que peut-on en déduire ?

Exercice n°5 :

(1) A l'aide du théorème des accroissements finis montrer que :

$$\forall\, x, y \in \mathbb{R},\ |\sin(x) - \sin(y)| \leq |x - y|.$$

(2) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose : $u_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \cdots + \frac{1}{2n}$.

(a) En appliquant le théorème des accroissements finis à la fonction ln sur l'intervalle $[n, n+1]$ où $n \in \mathbb{N}^*$, montrer que :

$$\frac{1}{n+1} < \ln(n+1) - \ln(n) < \frac{1}{n}.$$

(b) Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente et déterminer sa limite.