

Examen d'Analyse I

les calculatrices, les notes de cours et de TD ne sont pas autorisées

la rigueur des raisonnements ainsi que la clarté et la qualité de la rédaction sont prises en compte dans l'évaluation

Section : *L1 INFO, TIC et EEA*

Durée: 1h.30min

Exercice 1. Soit la fonction définie par

$$f(x) = \arctan(x + 1)$$

1. Calculer le développement limité à l'ordre 3 de la fonction dérivée f' au voisinage de 0.
2. En déduire le développement limité à l'ordre 4 de f au voisinage de 0.

Exercice 2.

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie pour tout $x \in \mathbb{R}$, par $f(x) = xe^{x^2}$.

1. Justifier que f est de classe C^∞ sur \mathbb{R} puis déterminer le développement limité à l'ordre 5 en 0 de f .
2. En déduire l'équation de la tangente de f au point d'abscisse 0 et sa position par rapport à la courbe de f .
3. Montrer que f est bijective de \mathbb{R} sur \mathbb{R} .
4. On admet que f^{-1} est aussi de classe C^∞ sur \mathbb{R} . Montrer que f^{-1} admet un développement limité à l'ordre 5 en 0 de la forme

$$f^{-1}(x) = ax + bx^3 + cx^5 + O(x^5)$$

où a , b et c sont des réels.

5. A partir de l'identité $f(f^{-1})(x) = x$ valable pour tout $x \in \mathbb{R}$, déterminer a , b et c .