Séries entières

- Une série entière est une série de fonctions où le terme $a_n z^n$ avec (a_n) est une suite des nombres complexes et $z \in \mathbb{C}$.

$$\text{On note } \sum_{n\geq 0} a_n z^n.$$

- $D = \left\{ z \in \mathbb{C} \text{ tq } \sum a_n z^n \text{ converge} \right\}$: domaine de convergence.

- La fonction somme est l'application :

$$S : D \longrightarrow \mathbb{C}$$
$$z \longmapsto S(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n.$$

Rayon de Convergence

- Soit $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ une série entière telle que pour $z_0 \in \mathbb{C}^*$, $(a_n z_n)_n$ est bornée alors $\forall z \in \mathbb{C} / |z| < |z_0|$:

$$\text{La série } \sum_{n\geq 0} a_n z^n \text{ converge.}$$

- rayon de convergence : $R = \sup \left\{ r \geq 0 \text{ tq } (a_n r^n)_{n\geq 0} \text{ est bornée} \right\}$

Exp : 1/ $\sum_{n\geq 0} z^n$: $a_n = 1$.

- Pour $r = 1$: $|a_n z r| = |1 . 1| = 1 \leq 1 \Rightarrow (a_n r)$ bornée.
- Pour $r > 1$: $(a_n r)$ n'est pas bornée.

$\Rightarrow R = \sup \{ r \geq 0 \text{ tq } (a_n r^n)_{n\geq 0} \text{ bornée} \} = 1.$

2/ $\sum_{n\geq 0} \frac{z^n}{n!}$; $a_n = \frac{1}{n!}$, $n \geq 0$.

$\forall n \geq 0 \cdot a_n r^n = \frac{r^n}{n!} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0 \Rightarrow (a_n r^n)$ bornée $\forall r \geq 0$.

$\Rightarrow R = \sup\{r \geq 0 \mid (a_n r^n) \text{ bornée}\}$

$= +\infty$.

- $\sum a_n z^n$ série entière de rayon de convergence R :

1/ si $|z| < R \Rightarrow \sum_{n\geq 0} a_n z^n$ converge absolument.

2/ si $|z| > R \Rightarrow \sum_{n\geq 0} a_n z^n$ diverge.

3/ si $|z| = R \Rightarrow$ on peut rien dire.

- Calcul de rayon de convergence :

Règle d'Alembert

- $\sum a_n z^n$; $a_n \neq 0$.
- $\lim_{n\to+\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \ell \in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$.

1/ si $\ell < 1 \Rightarrow R = \frac{1}{\ell}$ et $\sum_{n\geq 0}$ cv.abs

2/ si $1 < \ell < +\infty \Rightarrow R = \frac{1}{\ell}$ et $\sum$ div.

3/ si $\ell = 0 \Rightarrow R = +\infty$ et $\sum$ cv.abs.

4/ si $\ell = +\infty \Rightarrow R = 0$ et $\sum$ div.

Règle de Cauchy

$\lim \sqrt[n]{|a_n|} = \ell$.

$\Rightarrow$
- si $\ell = 0 \Rightarrow R = +\infty$
- si $\ell = +\infty \Rightarrow R = 0$
- sinon $R = \frac{1}{\ell}$.

- si $\ell = 1 \Rightarrow R = 1$ mais on peut rien dire pour la convergence.

Ex: Déterminer les rayons de convergences des séries entières:

1°/ $\sum_{n\geq 0} z^n$: $\left.\begin{array}{l} a_n = 1 \\ a_{n+1} = 1 \end{array}\right) \Rightarrow \lim \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim 1 = 1 = \ell$

R. Alembert $\Rightarrow \boxed{R = \frac{1}{\ell} = 1}$

2°/ $\sum_{n\geq 0} \frac{z^n}{n!}$; $\left.\begin{array}{l} a_n = \frac{1}{n!} \\ a_{n+1} = \frac{1}{(n+1)!} = \frac{1}{(n+1)n!} \end{array}\right) \Rightarrow \lim \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim \left|\frac{\frac{1}{(n+1)n!}}{\frac{1}{n!}}\right|$

$= \lim \left|\frac{\cancel{n!}}{(n+1)\cancel{n!}}\right|$

$= \lim \frac{1}{n+1}$

$= 0 = \ell$.

R. Alembert

$\cdot\ \ell = 0 \Rightarrow \boxed{R = +\infty}$.

3°/ $\sum_{n\geq 0} n^2 z^n$; $\left.\begin{array}{l} a_n = n^2 \\ a_{n+1} = (n+1)^2 \end{array}\right) \Rightarrow \lim \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim \left|\frac{(n+1)^2}{n^2}\right|$

$= \lim \left|\left(\frac{n+1}{n}\right)^2\right| \to 1$

$= 1 = \ell$

R. Alembert $\Rightarrow \boxed{R = \frac{1}{\ell} = 1}$

4°/ $\sum_{n\geq 1} \frac{e^n}{n} z^n$; $\left.\begin{array}{l} a_n = \frac{e^n}{n} \\ a_{n+1} = \frac{e^{n+1}}{n+1} \end{array}\right) \Rightarrow \lim \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim \left|\frac{n}{n+1} \cdot e^{-n+(n+1)}\right| \to 1$

$= e^{+1} = \ell$.

R. Alembert $\Rightarrow \boxed{R = \frac{1}{\ell} = \frac{1}{e}}$.

5/ $\sum_{n\geq 0} \ln(n+1) z^{2n}$; $\left.\begin{array}{l} a_n = \ln(n+1) \\ a_{n+1} = \ln(n+2) \end{array}\right) \Rightarrow \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\ln(n+2)}{\ln(n+1)}$

$\parallel$

$\sum \ln(n+1) (z^n)^2$

$$= \frac{\ln(n+1+1)}{\ln(n+1)}$$

$$= \frac{\ln\left((n+1)\left(1+\frac{1}{n+1}\right)\right)}{\ln(n+1)}$$

$$= \frac{\ln(n+1) + \ln\left(1+\frac{1}{n+1}\right)}{\ln(n+1)}$$

$$= 1 + \frac{\ln\left(1+\frac{1}{n+1}\right)}{\ln(n+1)}$$

$$\Rightarrow \lim \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim \left(1 + \frac{\ln\left(1+\frac{1}{n+1}\right)}{\ln(n+1)}\right) \to 0$$

$+\infty$

$$= \cancel{\lim(1+} 1 = \ell^2.$$

$$\Rightarrow R^2 = \frac{1}{\ell^2} = 1 \Rightarrow \boxed{R = \sqrt{\frac{1}{\ell^2}} = 1}$$

6/ $\sum_{n\geq 0} z^{n!} = \sum_{n\geq 0} \left(z^{(n-1)!}\right)^n$; $\left.\begin{array}{l} a_n = 1 \\ a_{n+1} = 1 \end{array}\right) \Rightarrow \ell^{(n-1)!} = 1$

$$\Rightarrow R^{(n-1)!} = \frac{1}{\ell^{(n-1)!}}$$

$$\Rightarrow R = \sqrt[(n-1)]{\frac{1}{\ell^{(n-1)!}}}$$

$$= 1.$$

7/ $\sum_{n\geq 1} \frac{z^n}{n^n}$; $a_n = \frac{1}{n^n} \Rightarrow \sqrt[n]{|a_n|} = \frac{1}{n}$

$\Rightarrow \lim \sqrt[n]{|a_n|} = \lim \frac{1}{n} = 0 = \ell$

$\ell = 0 \overset{\text{Cauchy}}{\Rightarrow} \boxed{R = +\infty}$

8/ $\sum_{n\geq 1} \left(\frac{1}{27} - \frac{1}{2n}\right)^n z^{3n}$; $a_n = \left(\frac{1}{27} - \frac{1}{2n}\right)^n$

$\Rightarrow \sqrt[n]{|a_n|} = \left|\frac{1}{27} - \frac{1}{2n}\right|$

$\lim \sqrt[n]{|a_n|} = \frac{1}{27} = \ell^3$.

Cauchy.

$\Rightarrow R^3 = \frac{1}{\ell^3} \Rightarrow R^3 = \frac{1}{\frac{1}{27}}$

$= 27$

$\Rightarrow R = \sqrt[3]{27}$

$= \sqrt[3]{3^3}$

$= 3.$

Rq : $\sum a_n z^n$ de Rayon de CV : R_a

$\sum b_n z^n$ de rayon de CV : R_b.

si $a_n \underset{+\infty}{\sim} b_n \Rightarrow R_a = R_b$.

Ex : 1°/ $\sum \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) z^n$.

$$a_n = \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \underset{+\infty}{\sim} \underbrace{\frac{1}{n} = b_n}$$

$b_n = \frac{1}{n}$

$b_{n+1} = \frac{1}{n+1}$

$\Rightarrow \left|\frac{b_{n+1}}{b_n}\right| = \left|\frac{n+1}{n}\right| \to 1$

A'lembert

$\Rightarrow \boxed{R_b = \frac{1}{1} = 1}$

2°/ $\sum (\ln n)^n z^n$; $a_n = (\ln n)^n$

$\sqrt[n]{|a_n|} = \ln n$

$\lim \sqrt[n]{|a_n|} = +\infty = \ell$

$\Rightarrow \boxed{R = 0}$

Rq: $\sum (a_n + b_n) z^n$.

R_a rayon de CV de $\sum a_n z^n$

R_b rayon de CV de $\sum b_n z^n$.

$\Rightarrow R = \min(R_a, R_b)$ rayon de CV de $\sum (a_n + b_n) z^n$.

Exp: $\sum_{n\geq 1} \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n!}\right) z^n = \sum_{n\geq 1} (a_n + b_n) z^n$.

- $\left.\begin{array}{l} a_n = \frac{1}{n} \\ a_{n+1} = \frac{1}{n+1} \end{array}\right) \Rightarrow \ell = \lim \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = 1$

  $\Rightarrow \boxed{R_a = \frac{1}{\ell} = 1}$

- $\left.\begin{array}{l} b_n = \frac{1}{n!} \\ b_{n+1} = \frac{1}{(n+1)!} = \frac{1}{(n+1)n!} \end{array}\right) \Rightarrow \frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{\cancel{n!}}{(n+1)\cancel{n!}} = \frac{1}{n+1}$

  $\Rightarrow \ell = \lim \left|\frac{b_{n+1}}{b_n}\right| = 0$

  $\Rightarrow R_b = +\infty$.

$\Rightarrow R = \min(R_a, R_b) = 1$.

- Série entière d'une variable réelle :

$$\sum a_n x^n \ ; \ (a_n) \subset \mathbb{C}$$
$$x \in \mathbb{R}.$$

- soit f une fonction de classe C^{∞} sur I.

série de Taylor de f : la série entière

$$\sum_{n \geq 0} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n.$$

- La somme : $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n \ ; \ x \in]-r, r[.$

Exp : 1/ • $x \mapsto e^x$ est D.S.E sur $\mathbb{R}$.

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$$

2/ • $x \mapsto \ln(1+x)$ est D.S.E sur $]-1,1[$:

$$\forall x \in]-1,1[: \ln(1+x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n.$$

3/ • $x \mapsto \frac{1}{1-x}$ est D.S.E sur $]-1,1[$:

$$\forall x \in]-1,1[: \frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n.$$

4/ • $\arctan(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^n$; $\forall x \in]-1,1[.$

5°/ $$\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^n \ ; \ x \in]-1,1[.$$

6°/ $$\ln(1-x) = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}$$

7°/ $$(1+x)^{\alpha} = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-(n-1))}{n!} x^n .$$

Séries entières

Ex 1 : Déterminer le rayon de convergence :

1°/ $\sum_{n\geq 1} \ln(n) z^n$

2°/ $\sum_{n\geq 1} \frac{n^n}{n!} z^n$

3°/ $\sum_{n\geq 0} \frac{n^2+n+1}{n^4+n+2} x^n$.

4°/ $\sum_{n\geq 2} \ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right) x^n$.

Ex 2 : Calculer sur $]-R,R[$, la somme :

1°/ $\sum_{n=1}^{+\infty} n^3 x^n$

2°/ $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n(n+1)}$

3°/ $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{(2n)!}$

Ex 3 : On considère la série entière $\sum_{n\geq 0} \frac{x^{3n}}{(3n)!}$.

1°/ Déterminer le rayon de CV.

On note f sa somme.

2°/ Mq f vérifier une équation différentielle du second ordre.

3°/ En déduire l'expression de f.

Ex4 : Développer en série entière au $\mathcal{V}(0)$:

1°/ $f(x) = \ln(1+2x^2)$

2°/ $f(x) = \dfrac{1}{x^2+2x-3}$

3°/ $f(x) = \ln(x^2-5x+6)$

4°/ $f(x) = \ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)$

5°/ $f(x) = \dfrac{e^x}{x-1}$.

Ex5 : 1°/ Donner le développement en série entière de la fonction $x \mapsto \ln(1-x)$ sur $]-1,1[$.

2°/ Déduire que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n} = -\ln(2)$.

Ex 1 :

1°/ $\sum_{n\geq 1} \ln(n) z^n$; $a_n = \ln(n)$; $n \geq 1$

$a_{n+1} = \ln(n+1)$

$$\Rightarrow \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\ln(n+1)}{\ln(n)} = \frac{\ln\left(n\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)}{\ln(n)}$$

$$= \frac{\ln(n) + \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\ln(n)}$$

$$= 1 + \frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\ln(n)} \; ; n \geq 2$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to+\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim \; 1 + \underbrace{\frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\ln(n)}}_{0} = 1 = \ell.$$

R. Alembert $\Rightarrow \boxed{R = \frac{1}{\ell} = 1}$.

2°/ $\sum_{n\geq 1} \frac{n^n}{n!} z^n$; $a_n = \frac{n^n}{n!}$; $n \geq 1$

$$a_{n+1} = \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!} = \frac{\cancel{(n+1)}.(n+1)^n}{\cancel{(n+1)}.\, n!}$$

$$\Rightarrow \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{(n+1)^n}{\cancel{n!}}}{\frac{n^n}{\cancel{n!}}} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e^{n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)} \underset{+\infty}{\sim} e.$$

$$\Rightarrow \lim \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = e = \ell \overset{\text{Alembert}}{\Rightarrow} R = \frac{1}{\ell} = \frac{1}{e}.$$

3°/ $\sum_{n\geq 0} \frac{n^2+n+1}{n^4+n+2} z^n$; $a_n = \frac{n^2+n+1}{n^4+n+2} \underset{+\infty}{\sim} \frac{n^2}{n^4} = \frac{1}{n^2} = b_n$.

$\sum b_n z^n$.

$\sum a_n z^n$; $\sum b_n z^n$

Si $a_n \underset{+\infty}{\sim} b_n$

$\Rightarrow R_a = R_b$

$\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{n^2}{(n+1)^2} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^2$

$\lim \left|\frac{b_{n+1}}{b_n}\right| = 1$

$\Rightarrow \boxed{R_b = 1}$

équi

$\Rightarrow \boxed{R_a = 1}$.

4°/ $\sum_{n\geq 2} \ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right) x^n$.

$$\ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{n^2}$$

$$\Rightarrow \boxed{R = 1}$$

Ex2:

1°/ $\sum_{n\geq 1} n^3 x^n$. $\left.\begin{array}{l} a_n = n^3 \; ; n\geq 1 \\ a_{n+1} = (n+1)^3 \end{array}\right\} \Rightarrow \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\left(\frac{n+1}{n}\right)^3\right| = \left(1+\frac{1}{n}\right)^3 = 1$

$\underset{\text{d'Alembert}}{\overset{\text{Règle}}{\Rightarrow}} R = 1.$

$\Rightarrow$ On a $\sum_{n\geq 1} n^3 x^n \; ; x \in]-1,1[$.

- $\sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x} \; ; x \in]-1,1[$.

On dérive

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n x^{n-1} \times x = \frac{1}{(1-x)^2} \times x \; ; x \in]-1,1[$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} n x^n = \frac{x}{(1-x)^2} \; ; x \in]-1,1[.$$

On dérive encore :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n^2 x^{n-1} \times x = \frac{(1+x)\cdot x}{(1-x)^3} \; ; x \in]-1,1[.$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} n^2 x^n = \frac{x+x^2}{(1-x)^3} \; ; x \in]-1,1[.$$

On dérive :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n^3 x^{n-1} \cdot x = \frac{(x^2+4x+1)}{(1-x)^4} \cdot x \; ; x \in]-1,1[.$$

$$\Rightarrow \boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} n^3 x^n = \frac{x^3+4x^2+x}{(1-x)^4} \; ; x \in]-1,1[.}$$

2°/ $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n(n+1)}$; $\left.\begin{array}{l} a_n = \dfrac{1}{n(n+1)} \; ; n \geq 1 \\ a_{n+1} = \dfrac{1}{(n+1)(n+2)} \end{array}\right) \Rightarrow \left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \dfrac{\frac{1}{(n+1)(n+2)}}{\frac{1}{n(n+1)}} = \dfrac{n\cancel{(n+1)}}{\cancel{(n+1)}(n+2)}$

$$\Rightarrow \lim \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim \frac{n}{n+2} = 1.$$

$$\xRightarrow{\text{R. Alembert}} \boxed{R = \frac{1}{1} = 1}$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n(n+1)} \; ; x \in]-1,1[.$$

$$\frac{1_{+n-n}}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \; ; n \geq 1.$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{x^n}{n} - \frac{x^n}{n+1}\right) \; ; \; x \in]-1,1[.$$

On a $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} = -\mathrm{Ln}(1-x) \; ; x \in]-1,1[.$

D'autre part, on a :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n+1} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n+1} \cdot x \cdot \frac{1}{x} \quad ; x \neq 0$$

$$= \frac{1}{x} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

$$= \frac{1}{x} \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{x^n}{n}$$

$$= \frac{1}{x}\left(\left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}\right) - x\right)$$

$$= \frac{1}{x}\left(-\mathrm{Ln}(1-x) - x\right)$$

$$= -\frac{\mathrm{Ln}(1-x)}{x} - 1 \; ; \; x \in]-1,1[\setminus \{0\}.$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n(n+1)} = -\mathrm{Ln}(1-x) + \frac{\mathrm{Ln}(1-x)}{x} + 1 = 1 + \left(\frac{1}{x} - 1\right)\mathrm{Ln}(1-x) \; ; \; x \in]-1,1[\setminus\{0\}$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n(n+1)} = \begin{cases} 1 + \left(\frac{1}{x} - 1\right) \ln(1-x) & \text{si } x \in]-1,1[\setminus \{0\} \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

3°/ $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{(2n)!}$; $a_n = \frac{1}{(2n)!}$; $n \geq 0$.

$$a_{n+1} = \frac{1}{(2(n+1))!} = \frac{1}{(2n+2)!} = \frac{1}{(2n+2)(2n+1)(2n)!}$$

$$\Rightarrow \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{(2n)!}{(2n+2)(2n+1)(2n)!} \Rightarrow \lim \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = 0$$

$$\xRightarrow{\text{d'Alembert}} \boxed{R = +\infty}$$

$$\Rightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{(2n)!} \ ; x \in \mathbb{R}.$$

. si $x \in [0, +\infty[$: $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{(2n)!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\sqrt{x}^{2n}}{(2n)!} = ch(\sqrt{x})$.

. si $x \in]-\infty, 0]$: $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{(2n)!} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{(-x)^n}{(2n)!}$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{\sqrt{-x}^{2n}}{(2n)!}$$

$$= \cos(-\sqrt{x}).$$

$\underline{\underline{cl}}$: $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{(2n)!} = \begin{cases} ch(\sqrt{x}) & \text{si } x \geq 0 \\ \cos(-\sqrt{x}) & \text{si } x \leq 0. \end{cases}$

$\underline{\text{Rpp}}$: $ch(t) = \frac{e^t + e^{-t}}{2}$.

$\underline{\underline{\text{DS.E}}}$ $\quad ch(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^{2n}}{(2n)!}$; $t \in \mathbb{R}$.

Ex3 : $\sum_{n\geq 0} \frac{x^{3n}}{(3n)!}$

1°/ $a_n = \frac{1}{(3n)!}$; $n \geq 0$

$a_{n+1} = \frac{1}{(3(n+1))!} = \frac{1}{(3n+3)!} = \frac{1}{(3n+3)(3n+2)(3n+1)(3n)!}$; $n \geq 0$.

$\Rightarrow \lim \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim \frac{\cancel{(3n)!}}{(3n+3)(3n+2)(3n+1)\cancel{(3n)!}} = 0$

Règle ALembert $\Rightarrow$ $\boxed{R = +\infty}$

$\Rightarrow \sum_{n\geq 0} \frac{x^{3n}}{(3n)!}$ converge $\forall x \in \mathbb{R}$.

2°/ $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{3n}}{(3n)!}$; $x \in \mathbb{R}$.

$f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3n\, x^{3n-1}}{(3n)!}$

$= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{3n-1}}{(3n-1)!}$; $x \in \mathbb{R}$.

$f''(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(3n-1)\, x^{3n-2}}{(3n-1)!}$

$= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{3n-2}}{(3n-2)!}$; $x \in \mathbb{R}$.

$\Rightarrow f(x) + f'(x) + f''(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{3n}}{(3n)!} + \sum_{n=1}^{+\infty} \cancel{\frac{x^{3n-1}}{(3n-1)!}} + \sum_{n=1}^{+\infty} \cancel{\frac{x^{3n-2}}{(3n-2)!}}$

$= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} - \sum_{n=1}^{+\infty} \cancel{\frac{x^{3n+1}}{(3n+1)!}} - \sum_{n=1}^{+\infty} \cancel{\frac{x^{3n+2}}{(3n+2)!}} + \cdots$

$= e^x$.

Rq : $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_{2n} x^{2n} + \sum_{n=0}^{+\infty} a_{2n+1} x^{2n+1}$ | $\sum a_n x^n = \sum a_{3n} x^{3n} + \sum a_{3n-2} x^{3n-1} + \sum a_{3n-2} x^{3n-2}$

Exi.

3°/ (E_c): $r^2 + r + 1 = 0$

$D = 1 - 4 = -3 = (i\sqrt{3})^2$

$\Rightarrow r_1 = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$

$r_2 = -\frac{1-i\sqrt{3}}{2}$

$\Rightarrow y_H(x) = \left(A\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + B\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)\right)e^{-\frac{x}{2}}$; $A, B \in \mathbb{R}$.

. on remarque $y(x) = \frac{1}{3}e^x$ est une sol° de (E).

$\underline{\underline{\text{cl}}}$: $y(x) = \frac{1}{3}e^x + e^{-\frac{x}{2}}\left(A\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + B\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)\right)$; $A, B \in \mathbb{R}$.

$\Rightarrow f(x) = \frac{1}{3}e^x + e^{-\frac{x}{2}}\left(A\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + B\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)\right)$

$f(0) = 1 \Rightarrow \frac{1}{3} + A = 1 \Rightarrow \boxed{A = \frac{2}{3}}$

$f'(0) = 0$

$f'(0) = \frac{1}{3} + B\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}A = 0 \Rightarrow \boxed{B = 0}$.

D'où $f(x) = \frac{1}{3}e^x + \frac{2}{3}e^{-\frac{x}{2}}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)$; $x \in \mathbb{R}$.

Ex4:

1°/ • $\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}$; $x \in]-1,1[$.

on $|2x^2| < 1 \iff x^2 < \frac{1}{2} \iff |x| < \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

$$\Rightarrow \ln(1+2x^2) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{(2x^2)^n}{n} \; ; \; x \in \left]-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right[$$

$$\Rightarrow \ln(1+2x^2) = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-2)^n}{n} \cdot x^{2n} \; ; \; x \in \left]-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right[.$$

2°/ • $\frac{1}{x^2+2x-3} = \frac{1}{(x-1)(x+3)} = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x+3}$; $a, b \in \mathbb{R}$.

$$a = \left.\frac{1}{x+3}\right]_{x=1} = \frac{1}{4}$$

$$b = \left.\frac{1}{x-1}\right]_{x=-3} = -\frac{1}{4}.$$

$$\Rightarrow \frac{1}{x^2+2x-3} = \frac{1}{4}\left[\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+3}\right]$$

$$= \frac{1}{4}\left[\frac{1}{x-1} - \frac{1}{3(1+\frac{x}{3})}\right].$$

• $\frac{1}{x-1} = -\frac{1}{1-x} = -\sum_{n=0}^{+\infty} x^n$; $x \in]-1,1[$.

• $\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^n$; $x \in]-1,1[$.

$$\Rightarrow \frac{1}{1+\frac{x}{3}} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \cdot \left(\frac{x}{3}\right)^n \; ; \; x \in]-3,3[.$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \left(-\frac{1}{3}\right)^n \cdot x^n \; ; \; x \in]-3,3[.$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{1}{4}\left[\frac{1}{x-1} - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1+\frac{x}{3}}\right] = \frac{1}{4}\left[-\sum_{n=0}^{+\infty} x^n - \frac{1}{3}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(-\frac{1}{3}\right)^n x^n\right]$$

$$= \frac{1}{4}\left[-\sum_{n=0}^{+\infty} x^n + \sum_{n=0}^{+\infty}\left(-\frac{1}{3}\right)^{n+1} x^n\right]$$

$$= \frac{1}{4}\left[\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\left(-\frac{1}{3}\right)^{n+1} - 1\right) x^n\right] ; x \in]-1,1[\cap]-3,3[$$

$$=]-1,1[.$$

Exi :

1°/ $\ln(1-x) = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}$; $\forall x \in]-1,1[$.

$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}$ converge $\forall x \in]-1,1[$

Pour $x=1$: $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ diverge (Série de Riemann $\alpha = 1 \leq 1$).

Pour $x=-1$: $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ converge (Série de Riemann alternée $\alpha = 1 > 0$).

Rpp : $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ cv ssi $\alpha > 1$: Série de Riemann

$\sum \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$ cv ssi $\alpha > 0$: Série de Riemann alternée.

2°/ Pour $x = -1$: $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}$ converge.

$$\Rightarrow \lim_{x \to (-1)^+} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} = \sum_{n=1}^{+\infty} \lim_{(-1)^+} \frac{x^n}{n} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n}$$

d'autre part $\lim_{x \to (-1)^+} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} = \lim_{x \to (-1)^+} -\ln(1-x)$

$= -\ln(2)$

cl : $\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n} = -\ln(2)}$.