Chapitre 3 : Equations différentielles

I. Equations différentielles linéaires 1er ordre

I. 1. Définition : on appelle équation différentielle linéaire de 1er ordre l'équation de la forme

$$\boxed{(E) : y' = A(x)y + B(x)}$$

avec A et B sont deux fonctions continues sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.

* On appelle solution de l'équation différentielle (E) toute fonction

$$y : \begin{array}{l} I \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto y(x) \end{array} \quad \text{dérivable sur } I$$

vérifiant :

$$\forall x \in I, \; y'(x) = A(x)\, y(x) + B(x).$$

* Résoudre ou Intégrer l'équation (E) c'à d trouver les solutions de (E).

Exemple.

$$y' = y \qquad \left(\begin{array}{c} A(x) = 1, \; B(x) = 0 \\ I = \mathbb{R} \end{array} \right)$$

$y : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$
$x \longmapsto e^{x}$ est une solution de (E)

On remarque aussi $\forall C \in \mathbb{R}$ (constante)
$y(x) = Ce^{x}$ est une solution

* Soit (E) : $y' = A(x)y + B(x)$: une équation différentielle linéaire du 1er ordre

* Soit (E_H) : $y' = A(x)y$ est dite l'équation homogène associée à (E).

* Résolution de l'équation homogène (E_H) :

Proposition : Soit l'équation homogène (E_H) : $y' = A(x)y$

Si $F(x)$ désigne la primitive de $A(x)$ sur l'intervalle I.
$\left(F(x) = \int A(x)\,dx \right)$. Alors, les solutions de (E_H) sont de la forme suivante :

$$\boxed{y_H(x) = C e^{F(x)} = C e^{\int A(x)\,dx}}$$

C c'est une constante de $\mathbb{R}$.

Exemple

Soit (E) : $y' - \left(\frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{x}\right) y = 0$; $x \in]0, +\infty[$

on a $y' = A(x)\, y + B(x)$ avec

$A(x) = \frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{x}$

et $B(x) = 0$

Donc (E) c'est une équation différentielle linéaire du 1^{er} ordre

Donc les solutions de (E) sont

$$\boxed{y(x) = C\, e^{\int A(x)\,dx}}$$, C constante de $\mathbb{R}$

$*$ $\int A(x)\,dx = \int \frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{x}\,dx$

$= \arctan(x) + \ln(x) + c^{te}$

Donc

$$\boxed{y(x) = C\, e^{(\arctan(x) + \ln(x))}} \quad \forall x \in]0, +\infty[$$

Résolution de l'équation différentielle linéaire du 1^{er} ordre (E)

Proposition. Soit (E) : $y' = A(x)y + B(x)$

Si y_0 est une solution particulière

de (E) sur l'intervalle I. Alors, Toutes les solutions de (E) sont de la forme

$$\boxed{y(x) = y_0(x) + y_H(x)}$$

$$\boxed{y(x) = y_0(x) + C e^{\int A(x)dx}}$$

* y_H : c'est la solution homogène de (E).
* y_0 : c'est la solution particulière de (E).

<u>Exemple:</u> Résoudre l'équation

(E) : $y' + y = 2e^x$

(E) est une équation différentielle linéaire du 1er ordre.

(E) s'écrit $y' = A(x)y + B(x)$

avec $A(x) = -1$ et $B(x) = 2e^x$.

(E) : $y' = -y + 2e^x$

Les solutions de (E) sont

$$\boxed{y(x) = y_0(x) + y_H(x)}$$

avec $\boxed{y_0(x) = e^x}$ c'est une solution particulière de (E)

car $(e^x)' = e^x$ et

$(e^x)' = -e^x + 2e^x$ mai

et y_H c'est la solution homogène de (E_H) : $y' = A(x)\,y$

$y' = -y$, $A(x) = -1$

Donc $y_H(x) = C e^{\int A(x)\,dx}$

$$\boxed{y_H(x) = C e^{\int -dx} = C e^{-x}}$$

C : constante de $\mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}$.

Donc les solution de (E) sont

$$\boxed{\begin{aligned} y(x) &= y_0(x) + y_H(x) \\ &= e^{x} + C e^{-x}, \ \forall x \in \mathbb{R} \end{aligned}}$$

et C constante de $\mathbb{R}$.

Donc

$$\boxed{y(x) = C\, e^{(\arctan(x) + \ln(x))} \ \forall x \in]0, +\infty[}$$

Résolution de l'équation différentielle linéaire du 1er ordre (E).

Proposition : Soit (E) : $y' = A(x)y + B$

Si y_0 est une solution particulière

Recherche de la solution particulière.

En général on ne connaît pas les solutions particulières et dans ce cas on applique la méthode suivante dite méthode de la variation de la constante

Méthode de la variation de la constante

* Soit (E) : $y' = A(x)y + B(x)$ une équation linéaire du 1er ordre
* on associe l'équation homogène

$$(E_H) : y' = A(x)y$$

* Les solutions de (E_H) sont :

$$y_H(x) = C \cdot e^{\int A(x)\,dx}$$

* Pour chercher une solution particulière on cherche alors une solution de la forme :

$$y_0(x) = C(x)\, e^{\int A(x)\,dx}$$

avec $C(x)$ est une fonction inconnue

$$C : I \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto C(x)$$

Il suffit de remplacer $y_0(x) = C(x)\, e^{\int A(x)\,dx}$ dans (E) par identification on trouve

$$\boxed{C(x) = \int B(x)\, e^{-\int A(x)\,dx}\, dx}$$

$$\boxed{y_0(x) = \left(\int B(x)\, e^{-\int A(x)\,dx}\right) \times e^{\int A(x)\,dx}}$$

Exemple : Résoudre l'équation

$(E) : y' - \frac{1}{x} y = 3x^3 + x$, $x > 0$.

Solution

on a (E) : $y' = \frac{1}{x} y + 3x^3 + x$

$= A(x) y + B(x)$

avec $A(x) = \frac{1}{x}$, $x > 0$, et $B(x) = 3x^3 + x$

(E) c'est une équation différentielle linéaire du 1er ordre donc les solutions de (E) sont

$$y(x) = y_H(x) + y_0(x)$$

avec y_H sont les solutions de l'équation homogène.

$(E_H) : y' = \frac{1}{x} y$, $x > 0$.

Donc $y_H(x) = C\, e^{\int A(x)\,dx}$

$= C\, e^{\int \frac{1}{x}\,dx}, \quad \forall x>0$

$= C\, e^{\ln(x)} \quad \forall x>0$

$= Cx, \ \forall x>0$

$$\boxed{y_H(x) = Cx, \ \forall x \in]0,+\infty[}$$

* Détermination de la solution particulière par la méthode de la variation de la constante :

__En effet__ ; Soit y_0 la solution particulière

donc $y_0(x) = C(x)\, e^{\int A(x)\,dx}$

avec $C(x) = \int B(x)\, e^{-\int A(x)\,dx}\, dx$

$y_0(x) = C(x)\, e^{\ln(x)}$

$= C(x) \cdot x, \ \forall x>0$

avec

$C(x) = \int (3x^3+x)\, e^{-\int \frac{1}{x}\,dx}\, dx.$

$= \int (3x^3+x)\, e^{-\ln(x)}\, dx$

$= \int (3x^3+x)\, \frac{1}{x}\, dx = \int (3x^2+1)\,dx$

$$\boxed{C(x) = x^3 + x}$$

Donc $\boxed{y_0(x) = (x^3 + x) \cdot x = x^4 + x^2}$

Les solutions générales de (E) sont :

$$y(x) = y_H(x) + y_0(x)$$

$$\boxed{y(x) = Cx + x^4 + x^2, \ \forall x > 0, \ \forall C \in \mathbb{R}}$$

II- Équation différentielle linéaire du second ordre :

Définition :

On appelle équation différentielle linéaire du second ordre toute équation de la forme

$$\boxed{(E) : ay'' + by' + cy = f(x)}$$

avec a, b, c sont des réels avec $a \neq 0$ et f une fonction continue sur l'intervalle I vers $\mathbb{R}$.

* On définit l'équation homogène (E_H) associée à l'équation (E)

$$\boxed{(E_H) : ay'' + by' + cy = 0}$$

* Résolution de l'équation homogène :

Théorème : La solution de l'équation homogène (E_H)

$(E_H) : ay'' + by' + cy = 0$ est donnée en fonction

des racines r_1 et r_2 de l'équation caractéristique suivante :

$$\boxed{ar^2 + br + c = 0}$$

(E_H) $ay'' + by' + cy = 0$

$\to ar^2 + br + c = 0$

$\Delta = b^2 - 4ac$

- Si $\Delta > 0$: 2 solutions r_1 et r_2
- Si $\Delta = 0$: une racine double r
- Si $\Delta < 0$: 2 solutions complexes conjugués.

Les solutions de (E_H) sont données par le tableau suivant :

Δ	Solution de (E_H)
$\Delta > 0$: $r_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$, $r_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$	$y_H(x) = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}$ C_1 et C_2 sont des constantes de $\mathbb{R}$
$\Delta = 0$, $r = -\frac{b}{2a}$	$y_H(x) = (C_1 + C_2 x)\, e^{rx}$ C_1 et C_2 deux constantes de $\mathbb{R}$
$\Delta < 0$: $r = \alpha + i\beta$, $\bar{r} = \alpha - i\beta$	$y_H(x) = e^{\alpha x}\left(C_1 \cos(\beta x) + C_2 \sin(\beta x)\right)$ C_1 et C_2 sont des constantes de $\mathbb{R}$

Résolution de l'éq (E) nq :

$(E) : ay'' + by' + cy = f(x)$

Théorème : Les solutions générales de (E) est la somme de la solution homogène avec une solution particulière : $y(x) = y_H(x) + y_p(x)$ avec $y_H(x)$ la solution homogène et $y_p(x)$ est une solution particulière

Recherche d'une solution particulière :

Proposition :

Si $(E) : ay'' + by' + cy = f_1(x) + f_2(x)$ ou $a, b, c \in \mathbb{R}^*$, f_1 et f_2 sont 2 fcts continues sur I.

on note :

$(E_1) : ay'' + by' + cy = f_1(x)$

$(E_2) : ay'' + by' + cy = f_2(x)$

Si f_{p_1} et f_{p_2} sont 2 sols particulières de (E_1) et (E_2) respectivement alors :

$y_p(x) = y_{p_1}(x) + y_{p_2}(x)$ est une sol particulière de (E).

Exp :

Soit $(E) : y'' + y' + y = e^x + \cos(x)$ et on note

$(E_H) : y'' + y' + y = 0$

$(E_c) : r^2 + r + 1 = 0$

$\Delta = 1 - 4 = -3 = (\sqrt{3}i)^2 < 0$

$\sqrt{\Delta} = \sqrt{3}i$

$r = \dfrac{-1 - \sqrt{3}i}{2} = -\dfrac{1}{2} - \dfrac{i\sqrt{3}}{2}$

$\bar{r} = -\dfrac{1}{2} + \dfrac{i\sqrt{3}}{2}$

Donc : $y_H(x) = e^{-x/2}\left(C_1 \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)x + C_2 \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)x\right)$

Recherche d'une sol particulière.

Soit $(E_1) : y'' + y' + y = e^x$ et

$(E_2) : y'' + y' + y = \cos x$

donc : $y_{p_1} = \dfrac{e^x}{3}$ et $y_{p_2} = \sin(x)$

donc : $y_p(x) = y_{p_1}(x) + y_{p_2}(x)$

$= \dfrac{e^x}{3} + \sin(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$

Alors la sol générale de E est

$y(x) = y_H(x) + y_p(x)$

$$\boxed{y(x) = e^{-x/2}\left(C_1 \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)x + C_2 \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)x\right) + \frac{e^x}{3} + \sin x}$$

Cas particulier linéaire pour $f(x) = e^{\lambda x} P(x)$ avec P est polynôme à coeff réel

Théorème :

Soit $(E) : ay'' + by' + cy = e^{\lambda x} f(x)$

la sol particulière de (E) est donnée par $y_p(x) = e^{\lambda x} Q(x)$ avec Q est un polynome à coeff réel tq

1. $\deg Q = \deg P$ si λ n'est pas une sol de l'éq caractéristique associé à E
2. $\deg Q = \deg P + 1$ si λ est une racine simple de l'éq caractéristique associé à E.
3. $\deg Q = \deg P + 2$. Si λ est une racine double de l'éq caractéristique associée à E.

Exp : Résoudre l'éq

$(E) : y'' + 2y' + y = x^2 - x + 1$

$(E_H) : y'' + 2y' + y = 0$

$(E_C): r^2+2r+1=0$

$\Delta = 4-4=0 \Rightarrow r=-1$

$\Rightarrow y_H(x) = (C_1+C_2)e^{-x} \quad \forall x \in \mathbb{R}$

C_1, C_2 2ctes de $\mathbb{R}$

Sol particulière:

On a: $f(x) = e^{\alpha}P(x)$ avec $\alpha=0$

et $P(x) = x^2-x+1$ ($\deg P=2$)

$y_p(x) = Q(x)$ (polynôme à coeff réel) avec $\deg(Q) = \deg P = 2$

Car $\alpha=0$ n'est pas une sol de (E_C))

donc $Q(x) = ax^2+bx+c$

Pour trouver les coeff de Q: il suffit de remplacer

$y_p(x) = Q(x) = ax^2+bx+c$

$y'_p(x) = 2ax+b$, $y''_p(x) = 2a$

dans (E)

En effet: $y''_p+y'_p+y_p = x^2+1-x$

$2a+2(2ax+b)+ax^2+bx+c = x^2-x+1$

$\Rightarrow \cancel{2a}+ax^2+(4a+b)x+2a+2b+c = x^2-x+1$

par identification:

$$\begin{cases} a=1 \\ 4a+b=-1 \\ 2a+2b+c=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=-5 \\ c=9 \end{cases}$$

Donc $y_p(x) = Q(x) = x^2-5x+9$

Alors: la sol generale de (E):

$y(x) = y_p(x)+y_H(x)$

$= (C_1+C_2)e^{-x}+x^2-5x+9, \ \forall x \in \mathbb{R}$

C_1, C_2 2 ctes de $\mathbb{R}$.

si vous avez une condition initiale il faut trouver C_1 et C_2

$y(0)=0$

$y(0)=1$

Cas où $f(x) = e^{\alpha x}\cos(\beta(x))$ ou bien $f(x) = e^{\alpha x}\sin(\beta(x))$

Théorème: Soit $(E): ay''+by'+cy=f(x)$

. Si $\alpha+i\beta$ n'est pas une racine de l'éq caractéristique alors:

$y_p(x) = e^{\alpha x}(A\cos(\beta x)+B\sin(\beta x))$

. si $\alpha+i\beta$ est une racine de l'éq caractéristique $y_p(x) = xe^{\alpha x}(A\cos(\beta x)+B\sin(\beta x))$

Exp: résoudre:

$(E): y''+y'+y = \cos(2a)$

$\alpha=0$

$\beta=2$

$E_C: r^2+r+1$

$\Delta = 1-4=-3=(i\sqrt{3})^2$

$$\left.\begin{array}{l} r = -\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \bar{r} = -\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow y_H(x) = e^{-x/2}\left(C_1\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)+C_2\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)\right)$$

$\forall x \in \mathbb{R}$

C_1 et C_2 ctes de $\mathbb{R}$

$\alpha+i\beta$: n'est pas une sol de l (E_C) alors $y_p(x) = A\cos(2a)+B\sin(2a)$

Il faut chercher A et B, Il suffit de remplacer y_p dans E

En effet: $y''_p(x)+y'_p(x)+y_p(x) = \cos(2x)$

$y'_p(x) = -2A\sin(2x)+2B\cos(2x)$

$y''_p(x) = -4A\cos(2x)+4B\sin(2x)$

$y_p(x) = y_p.$

$$\cos(2x)\left(-3A+2B\right)+\sin(2x)\left(-3B-2A\right)=\cos(2x)$$

<u>par identification:</u>

$$\begin{cases} -3A+2B=1 \\ -3B-2A=0 \end{cases} \Rightarrow \quad 2B = 3A+1$$

$$B = \frac{3}{2}A+\frac{1}{2}$$

$$-3\left(\frac{3}{2}A+\frac{1}{2}\right)-2A=0$$

$$-\frac{9}{2}A-\frac{3}{2}-2A=0$$

$$-\frac{9-4}{2}A-\frac{3}{2}=0$$

$$-\frac{13}{2}A=\frac{3}{2}$$

$$A=\frac{3}{\cancel{2}}\cdot-\frac{\cancel{2}}{13}=\frac{-3}{13}$$

$$B=\frac{3}{2}\cdot\frac{-3}{13}+\frac{1}{2}$$

$$=\frac{2}{13}$$

$$\Rightarrow y_p(x)=-\frac{3}{13}\cos(2x)+\frac{2}{13}\sin(2x).$$