Université de Monastir
Institut Supérieur d'Informatique
et de Mathématiques de Monastir

Année Universitaire: 2024/2025
Matière: Algèbre, S1
Niveaux: L1 Info

Série 5

Exercice 1: Dans chacun des cas suivants, montrer que f est une application linéaire puis déterminer $\ker(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$:

- $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $(x,y) \mapsto (y, 0)$.
- $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $(x,y) \mapsto (2x+y, y-x, x+y)$.
- $f : \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}[X]$, $P \mapsto P'$.
- $f : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$, $z \mapsto \mathrm{Re}(z)$.
- $f : \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \to \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$, $u \mapsto (x \mapsto u(x) - u(1))$.
- $f : E \to \mathbb{R}$, $(u_n) \mapsto \lim_{n\to+\infty} u_n$ (où E est l'ensemble des suites convergentes).

Exercice 2:
Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et l'application linéaire définie par

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \quad (x,y,z) \mapsto (x + 2\lambda y - z, 3x + \lambda z, 6x + 2z).$$

Déterminer le rang de f en fonction de λ.

X **Exercice 3:**

1. On considère l'application f définie par:

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, \quad (x,y) \mapsto (x, 2x+y, y).$$

   (a) Montrer que f est linéaire.

   (b) Montrer que f est injective.

   (c) En déduire la dimension de $\mathrm{Im}\, f$. L'application f est-elle un isomorphisme?

   (d) Donner une famille génératrice de $\mathrm{Im}\, f$. En déduire une base de $\mathrm{Im}\, f$.

2. On considère l'application g définie par:

$$g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2, \quad (x,y,z) \mapsto (x+y, 5x-2y+z).$$

   (a) Montrer que g est linéaire.

   (b) Déterminer $\ker g$. En donner une base et la dimension.

   (c) En déduire que l'application g est surjective.

3. Montrer que l'application $g \circ f$ est un automorphisme de $\mathbb{R}^2$.

Exercice 4:
Soit f l'application définie par:

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad (x,y) \mapsto (x-y, -3x+3y).$$

Ex4: $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ (1)

$(x,y) \longmapsto (x-y, -3x+3y)$.

1) Mq f est un endomorphisme :

- Mq f est linéaire :

soit $\lambda \in \mathbb{R}$, $X=(x,y)$, $Y=(x',y') \in \mathbb{R}^2$

$$\lambda X + Y = \lambda(x,y) + (x',y') = (\lambda x, \lambda y) + (x', y') = (\lambda x + x', \lambda y + y').$$

$$\Rightarrow f(\lambda X + Y) = f(\lambda x + x', \lambda y + y')$$
$$= \big((\lambda x + x') - (\lambda y + y'), -3(\lambda x + x') + 3(\lambda y + y')\big)$$
$$= \big(\lambda(x-y) + (x'-y'), \lambda(-3x+3y) + (-3x'+3y')\big)$$
$$= \big(\lambda(x-y), \lambda(-3x+3y)\big) + (x'-y', -3x'+3y')$$
$$= \lambda(x-y, -3x+3y) + (x'-y', -3x'+3y')$$
$$= \lambda f(x,y) + f(x',y')$$
$$= \lambda f(X) + f(Y)$$

$\Rightarrow f$ est linéaire

de plus f est une application définie sur $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$.

$\Rightarrow f$ est un endomorphisme.

2) • $f(1,1) = (1-1, -3+3) = (0,0)$

• $f(0,0) = (0,0)$

3°/ En déduire que f n'est pas injective :

On a $f(1,1) = f(0,0)$

mais $(1,1) \neq (0,0)$

$\Rightarrow f$ n'est pas injective.

$f : E \to F$

f est injective si

$\forall x, y \in E : f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$

Rq : si $\ker(f) = \{0_E\}$

$\Leftrightarrow f$ est injective

4°/ Dét $\ker(f)$:

$$\ker(f) = \{X = (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid f(X) = 0_{\mathbb{R}^2}\}$$

$$= \{X = (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x-y, -3x+3y) = (0,0)\}$$

$$= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x - y = 0 \text{ et } -3x + 3y = 0\}$$

$$= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = x\}$$

$$= \{(x,x) \mid x \in \mathbb{R}\}$$

$$= \{x(1,1) \mid x \in \mathbb{R}\}$$

$$= \text{vect}\{(1,1)\}$$

5°/ base de $\ker(f)$.

On a $\ker(f) = \text{vect}\{(1,1)\}$

$(1,1) \neq (0,0) \Rightarrow \{(1,1)\}$ libre, de plus $\{(1,1)\}$ génératrice de $\ker(f)$

$\Rightarrow \{(1,1)\}$ base de $\ker(f)$

6°/ f n'est pas injective donc n'est pas bijective.

Ex 5 :

- $g : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$
  $(x,y,z) \longmapsto (2x+y+2z, y, -x-y-z)$.

- $(\underset{(1,0,0)}{e_1}, \underset{(0,1,0)}{e_2}, \underset{(0,0,1)}{e_3})$ base canonique de $\mathbb{R}^3$.

- $g^2 = g \circ g$.

1°/ Mq g est linéaire.

soit $\lambda \in \mathbb{R}$, $X = (x,y,z)$, $Y = (x',y',z') \in \mathbb{R}^3$

- $\lambda X + Y = \lambda(x,y,z) + (x',y',z')$
  $= (\lambda x + x', \lambda y + y', \lambda z + z')$.

$\Rightarrow g(\lambda X + Y) = g(\boxed{\lambda x + x'}, \boxed{\lambda y + y'}, \boxed{\lambda z + z'})$

$= (2(\lambda x + x') + (\lambda y + y') + 2(\lambda z + z'), \lambda y + y', -(\lambda x + x') - (\lambda y + y') - (\lambda z + z'))$

$= \lambda(2x+y+2z, y, -x-y-z) + (2x'+y'+2z', y', -x'-y'-z')$

$= \lambda g(x,y,z) + g(x',y',z')$

$= \lambda g(X) + g(Y)$.

$\Rightarrow$ g est linéaire

2°/ • $g(e_1) = g(1,0,0) = (2,0,-1) = (2,0,0) - (0,0,1)$
$= 2(1,0,0) - (0,0,1)$
$= 2e_1 - e_3$.

• $g(e_2) = g(0,1,0) = (1,1,-1) = (1,0,0) + (0,1,0) - (0,0,1)$
$= e_1 + e_2 - e_3$.

• $g(e_3) = g(0,0,1) = (2,0,-1) = 2e_1 - e_3$.

- $g^2(e_1) = g\circ g(e_1) = g(\underbrace{g(e_1)}_{2e_1-e_3}) = g(2e_1 - e_3)$

  g est linéaire

  $\overset{\checkmark}{=} 2g(e_1) - g(e_3)$

  $= 2(2e_1-e_3) - (2e_1-e_3)$

  $= 2e_1 - e_3.$

  $= g(e_1)$

- $g^2(e_2) = g\circ g(e_2) = g(\underbrace{g(e_2)}_{e_1+e_2-e_3}) = g(e_1+e_2-e_3)$

  g linéaire

  $= \cancel{g(e_1)} + g(e_2) \cancel{- g(e_3)}$

  $= e_1+e_2-e_3.$

  $= g(e_2)$

- $g^2(e_3) = g\circ g(e_3) = g(\underbrace{g(e_3)}_{g(e_1)}) = 2e_1 - e_3$

  $= g(e_3)$

- on a $\left.\begin{array}{l} \cdot\, g^2(e_1) = g(e_1) \\ \cdot\, g^2(e_2) = g(e_2) \\ \cdot\, g^2(e_3) = g(e_3) \\ \text{et } (e_1,e_2,e_3) \text{ base canonique de } \mathbb{R}^3 \end{array}\right\} \Rightarrow \forall u \in \mathbb{R}^3;\ g^2(u) = g(u).$

3°/ . base de $Im(g)$:

$Im(g) = vect\{g(e_1), g(e_2), g(e_3)\}$

$g(e_1)=g(e_3)$

$\overset{\checkmark}{=} vect\{\underbrace{g(e_1)}_{(2,0,-1)}, \underbrace{g(e_2)}_{(1,1,-1)}\}$

- $g(e_1)$ et $g(e_2)$ deux vecteurs non colinéaires est une famille libre, de plus elle engendre

$\Rightarrow \{g(e_1), g(e_2)\}$ est une base de $Im(g)$.

$Im(g) \Rightarrow \{g(e_1), g(e_2)\}$ est une

• base de Ker (g - id). ⑤

$$\ker(g-id) = \{X=(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \,/\, (g-id)(X) = 0_{\mathbb{R}^3}\}$$

$$= \{X=(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \,/\, g(X) - X = 0_{\mathbb{R}^3}\}$$

$\underline{Rq}$:
$id(X) = X$

$\cdot\; g(X) - X = 0_{\mathbb{R}^3}$

$\Leftrightarrow g(X) = X$

$\Leftrightarrow g(x,y,z) = (x,y,z)$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2x+y+2z \\ y \\ -x-y-z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x+y+2z = x \\ y = y \\ -x-y-z = z \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+y+2z = 0 & ① \\ y = y & ② \\ -x-y-2z = 0 & ③ : \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y+2z=0 \\ y=y \\ ③\times(-1) : x+y+2z=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+y+2z=0 \\ y=y \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=-y-2z \\ y=y \end{cases}$$

$$\Rightarrow X=(x,y,z) = (-y-2z, y, z) = (-y,y,0) + (-2z,0,z)$$

$$= y(-1,1,0) + z(-2,0,1).$$

$$\Rightarrow \ker(g-id) = \text{vect}\{\overset{v_1}{(-1,1,0)}, \overset{v_2}{(-2,0,1)}\}.$$

8

- v_1 et v_2 deux vecteurs non colinéaires $\Rightarrow \{v_1, v_2\}$ est libre, de plus engendre $\ker(g-id)$ donc c'est base de $\ker(g-id)$.

4/ • on a $Im(g) = vect\{\underset{(2,0,-1)}{g(e_1)}, \underset{(1,1,-1)}{g(e_2)}\}$

$\ker(g-id) = vec\{\underset{(-2,0,1)}{v_1}, \underset{(-1,1,0)}{v_2}\}$

on remarque que : • $v_2 = -g(e_1) \Rightarrow v_2 \in Im(g)$

• $v_1 = g(e_2) - g(e_1) \Rightarrow v_1 \in Im(g)$

$\Rightarrow \{v_1, v_2\} \subset Im(g)$

$\Rightarrow \underbrace{vect\{v_1, v_2\}}_{=\ker(g-id)} \subset Im(g)$

$\Rightarrow \ker(g-id) \subset Im(g)$

de plus $\dim(g-id) = \dim Im(g)$

$\Rightarrow \ker(g-id) = Im(g)$

• $A \subset B$
• $\dim A = \dim B$
$\Rightarrow A = B$

• Mq $\boxed{\ker(g) \oplus Im(g) = \mathbb{R}^3} \Leftrightarrow \begin{cases} \ker(g) \cap Im(g) = \{0_{\mathbb{R}^3}\} \\ \dim \ker(g) + \dim(g) = \dim \mathbb{R}^3 \end{cases}$

directement Thm du rang.

si $x \in \ker(g) \cap Im(g) = \ker(g) \cap \ker(g-id)$

$\Rightarrow \begin{cases} x \in \ker(g) \\ \text{et} \\ x \in \ker(g-id) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) = 0_{\mathbb{R}^3} \\ g(x) - x = 0_{\mathbb{R}^3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) = \boxed{0_{\mathbb{R}^3}} \\ g(x) = \boxed{x} \end{cases}$

$\Rightarrow x = 0_{\mathbb{R}^3} \Rightarrow \boxed{\ker(g) \oplus Im(g) = \mathbb{R}^3}$

Ex 6: $f : \mathbb{R}_2[X] \longrightarrow \mathbb{R}^2$
$P \longmapsto (P(1), P'(0))$

1°/ • soit $\lambda \in \mathbb{R}$, $P, Q \in \mathbb{R}_2[X]$.

$$\Rightarrow f(\lambda P + Q) = ((\lambda P + Q)(1), (\lambda P + Q)'(0))$$
$$= (\lambda P(1) + Q(1), \lambda P'(0) + Q'(0))$$
$$= (\lambda P(1), \lambda P'(0)) + (Q(1), Q'(0))$$
$$= \lambda (P(1), P'(0)) + (Q(1), Q'(0))$$
$$= \lambda f(P) + f(Q)$$

$\Rightarrow f$ est linéaire.

2°/ $\mathrm{Ker}(f) = \{P \in \mathbb{R}_2[X] / f(P) = 0_{\mathbb{R}^2}\}$

$$= \{P = aX^2 + bX + c,\ a, b, c \in \mathbb{R} \mid (P(1), P'(0)) = (0,0)\}$$
$$= \{P = aX^2 + bX + c,\ a, b, c \in \mathbb{R} \mid (a+b+c, b) = (0,0)\}$$
$$= \{P = aX^2 + bX + c \mid a + c = 0 \text{ et } b = 0\}$$
$$= \{P = aX^2 + bX + c \mid a = -c \text{ et } b = 0\}$$
$$= \{P = aX^2 - a,\ a \in \mathbb{R}\}$$
$$= \{P = a(X^2 - 1),\ a \in \mathbb{R}\}$$
$$= \mathrm{Vect}\{X^2 - 1\}.$$

3°/ D'après le théorème du rang :

$$\underbrace{\dim \ker(f)}_{=1} + \dim \mathrm{Im}(f) = \underbrace{\dim \mathbb{R}_2[X]}_{=3}$$

$\Rightarrow \boxed{\dim \mathrm{Im}(f) = 2}$

Rq : $\cdot$ f n'est pas injective car $\ker(f) \neq 0_{\mathbb{R}_2[X]}$

$\cdot$ f est surjective car : $\cdot$ $\mathrm{Im}(f) \subset \mathbb{R}^2$

$\cdot$ $\dim \mathrm{Im}(f) = \dim \mathbb{R}^2$ $\Big) \Rightarrow \boxed{\mathrm{Im} f = \mathbb{R}^2}$

4°/ $\cdot$ $E = \langle X \rangle = \mathrm{vect}\{X\} = \{aX ; a \in \mathbb{R}\}$.

$\cdot$ $f(X) = (1,1) \Rightarrow f(E) = \{a(1,1) ; a \in \mathbb{R}\}$

$= \mathrm{vect}\{(1,1)\}$.

Ex1 :

4°/ $f : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$

$z \mapsto \mathrm{Re}(z)$

$\cdot$ soit $\lambda \in \mathbb{R}$, $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$:

$f(\lambda z_1 + z_2) = \mathrm{Re}(\lambda z_1 + z_2)$

$= \lambda \mathrm{Re}(z_1) + \mathrm{Re}(z_2)$

$= \lambda f(z_1) + f(z_2)$

$\Rightarrow f$ linéaire

Rq : $\cdot$ $\mathbb{C}$ est $\mathbb{R}$-e.v $\Rightarrow \{1, i\}$ base de $\mathbb{C}$

$\cdot$ $\mathbb{C}$ est $\mathbb{C}$-e.v $\Rightarrow \{1\}$ base de $\mathbb{C}$

$\cdot$ $\ker(f) = \{z = a+ib \in \mathbb{C}, a,b \in \mathbb{R} \mid f(z) = 0\}$

$= \{a+ib, a,b \in \mathbb{R} \mid a = 0\}$

$= \{ib, b \in \mathbb{R}\}$

$= i\mathbb{R}$.

$\cdot$ $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{vect}\{f(1), f(i)\}$

$= \mathrm{vect}\{1, 0\} = \mathrm{vect}\{1\}$.

Ex1:

1°/ $f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$
$(x,y) \longmapsto (y,0)$

soit $\lambda \in \mathbb{R}$, $X=(x,y)$, $Y=(x',y') \in \mathbb{R}^2$.

- $\lambda X + Y = \lambda(x,y) + (x',y') = (\lambda x, \lambda y) + (x',y') = (\lambda x + x', \lambda y + y')$.

$$\Rightarrow f(\lambda X + Y) = f(\lambda x + x', \lambda y + y')$$
$$= (\lambda y + y', 0)$$
$$= (\lambda y, 0) + (y', 0)$$
$$= \lambda(y,0) + (y',0)$$
$$= \lambda f(x,y) + f(x',y')$$
$$= \lambda f(X) + f(Y)$$

$\Rightarrow$ f est linéaire.

- $f: E \to F$ (E, F deux $\mathbb{K}$-e.v)

f est linéaire si:
$\forall \lambda \in \mathbb{K}, X, Y \in E$
$\Rightarrow f(\lambda X + Y) = \lambda f(X) + f(Y)$

- Noyau de f:

$$\ker f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, f(x,y) = 0_{\mathbb{R}^2}\}$$
$$= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, (y,0) = (0,0)\}$$
$$= \{(x,0),\ x \in \mathbb{R}\}$$
$$= \text{vect}\{(1,0)\}.$$

Rq $\{(1,0)\}$ base de $\ker(f) \Rightarrow \dim \ker(f) = 1$

- $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$ base canonique de $\mathbb{R}^2$, $e_1 = (1,0)$, $e_2 = (0,1)$

$$\Rightarrow \text{Im}(f) = \text{vect}\{f(e_1), f(e_2)\}$$
$$= \text{vect}\{(0,0), (1,0)\}$$
$$= \text{vect}\{(1,0)\}$$

$\Rightarrow \{(1,0)\}$ base de $\text{Im}(f) \Rightarrow \dim \text{Im}(f) = 1$

$f: E \to F$

- Noyau de f noté par:
$\ker(f) = \{X \in E \,/\, f(X) = 0_F\}$
- Image de f noté $\text{Im}(f)$:
$\text{Im} f = \{f(X) \,/\, X \in E\}$.

$f: E \to F$

$\{v_1, \dots, v_n\}$ famille génératrice de E

$\Rightarrow \text{Im}(f) = \text{vect}\{f(v_1), \dots, f(v_n)\}$

3/ $f : \mathbb{R}[X] \longrightarrow \mathbb{R}[X]$

$$P \longmapsto P'$$

- soit $\lambda \in \mathbb{R}$, $P, Q \in \mathbb{R}[X]$:

$$f(\lambda P + Q) = (\lambda P + Q)'$$
$$= \lambda P' + Q'$$
$$= \lambda f(P) + f(Q)$$

$\Rightarrow f$ est linéaire.

- $$\ker(f) = \{ P \in \mathbb{R}[X] \mid f(P) = 0_{\text{poly. nul}} \}$$
$$= \{ P \in \mathbb{R}[X] \mid \underbrace{P' = 0}_{P \text{ cste}} \}$$
$$= \{ P = \alpha \,;\, \alpha \in \mathbb{R} \}$$
$$= \mathbb{R}$$

- $$\operatorname{Im} f = \operatorname{vect}\left(\left(f(X^k) \right)_{k \in \mathbb{N}} \right)$$
$$= \operatorname{vect}\left(\left(k \cdot X^{k-1} \right)_{k \in \mathbb{N}^*} \right)$$
$$= \operatorname{vect}\left(\left((k+1) \cdot X^k \right)_{k \in \mathbb{N}} \right)$$
$$= \mathbb{R}[X].$$

Rq: $\dim \operatorname{Im} f = +\infty$.