I.S.I.M.M
LF1 INFO

SÉRIE N^o 2

- INTÉGRALES IMPROPRES -

Exercice 1

Déterminer la nature des intégrales impropres suivantes:

1. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{e^{\cos t}}{t} dt.$
2. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dt}{e^t + t^2 e^{-t}}.$
3. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{e^{\frac{1}{t}}}{1+t^3} dt.$
4. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \ln(1 + \frac{1}{t^2}) dt.$
5. $\displaystyle\int_0^{1} \frac{t^2 - 1}{\ln t} dt.$
6. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{t}\sin(t^{-\frac{5}{2}})}{\ln(1+t)} dt.$

Exercice 2

1. Montrer qu'il existe deux réels a et b tel que: $\forall t \in \mathbb{R}\backslash\{-2, -1\}$,

$$\frac{1}{(t+1)(t+2)} = \frac{a}{t+1} + \frac{b}{t+2}.$$

2. Calculer alors $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dt}{(t+1)(t+2)}$ après avoir justifié sa convergence.

Exercice 3

1. Montrer qu'il existe deux réels a et b tel que: $\forall u \in \mathbb{R}\backslash\{-1,1\}$,

$$\frac{1}{u^2 - 1} = \frac{a}{u+1} + \frac{b}{u-1}.$$

2. a. Justifier la convergence de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dt}{\sqrt{e^t + 1}}.$

   b. Calculer alors $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dt}{\sqrt{e^t + 1}}$ en utilisant le changement de variable $u = \sqrt{e^t + 1}.$

Exercice 4

1. Montrer qu'il existe deux réels a, b et c tel que : $\forall t \in \mathbb{R}^*$,

$$\frac{1}{t(t^2+1)} = \frac{a}{t} + \frac{bt+c}{t^2+1}.$$

2. a. Justifier la convergence de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t\ln t}{(1+t^2)^2}dt$.

   b. Calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t\ln t}{(1+t^2)^2}dt$. (On pourra utiliser une intégration par parties).

Riemann

$+\infty$:

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha} \text{ converge si } \alpha > 1$$
$$\text{diverge si } \alpha \leq 1$$

$$0 : \int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha} \text{ converge si } \alpha < 1$$
$$\text{diverge si } \alpha \geq 1$$

⚠ f c.m. $[a, b[$, $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$

$\int_a^b f$ converge si $\lim_{x \to b} \int_a^x f$: $\exists$, finie

↳ sinon diverge

Bertrand

$+\infty$: $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha \ln^\beta x}$ converge

↳ si ($\alpha > 1$ ou $\alpha = 1$ et $\beta > 1$)

0 : $\int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha \ln^\beta x}$ converge

↳ si ($\alpha < 1$ ou $\alpha = 1$ et $\beta > 1$).

Remarque :

$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$ diverge $\forall \alpha$.

Critère de Riemann :

f c.m. $]0, +\infty[$

$+\infty$: si $\exists \alpha > 1$, $\lim_{x \to +\infty} t^\alpha f(t) = 0$

↳ $\int_1^{+\infty} f(t)\,dt$ converge

. $\alpha \leq 1$, $\lim_{x \to +\infty} t^\alpha f(t) = \pm\infty$

$\int_1^{+\infty} f(t)\,dt$ diverge

0 : si $\alpha < 1$, $\lim_{0^+} t^\alpha f(t) = 0$

$\int_0^a f(t)\,dt$ converge

↳ $\alpha \geq 1$, $\lim_{0^+} t^\alpha f(t) = \infty$

↳ $\int_0^a f$ diverge.

. Critère de comparaison :

f, g c.m. $[a, +\infty[$

$0 \leq f \leq g$

. si $\int_0^{+\infty} g$ converge $\Rightarrow \int_0^{+\infty} f$ converge

. Critère d'équivalence :

f c.m. $[a, b[$

si $f \sim_b g$ et $g \geq 0$ au $V(b)$

$\left(f \sim_b g \iff \lim_b \frac{f(x)}{g(x)} = 1 \right)$

$\iff \int f$ et $\int g$ sont de m. nature.

Exercice 1 :

1/ $\int_1^{+\infty} \frac{e^{\cos t}}{t}\, dt$

on pose $f(t) = \frac{e^{\cos t}}{t}$, $t \geq 1$

f est continue sur $[1, +\infty[$

! problème de convergence au voisinage $(+\infty)$

$\forall t \geq 1$: $-1 \leq \cos t \leq 1$

$$e^{-1} \leq e^{\cos t} \leq e$$

$$\frac{e^{-1}}{t} \leq \frac{e^{\cos t}}{t} \leq \frac{e}{t}$$

$$0 \leq \frac{e^{-1}}{t} \leq f(t) \leq \frac{e}{t}$$

. or $e^{-1}\int_1^{+\infty} \frac{1}{t}\, dt$ diverge (Riemann $\alpha = 1$)

. D'après le critère de comparaison

$\int_1^{+\infty} \frac{e^{\cos t}}{t}$ diverge

2/ $\int_0^{+\infty} \frac{dt}{e^t + t^2 e^{-t}}$

on pose $f(t) = \frac{1}{e^t + t^2 e^{-t}}$, $t \geq 0$

f est continue sur $[0, +\infty[$

! problème de convergence au $V(+\infty)$

$\forall t \geq 0$:

$$\frac{1}{e^t + t^2 e^{-t}} = \frac{1}{e^t\left(1 + \frac{t^2 e^{-t}}{e^t}\right)}$$

$$= \frac{1}{e^t\left(1 + \left(\frac{t}{e^t}\right)^2\right)} \leq \frac{1}{e^t}$$

. Riemann

. au $V(+\infty)$

$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$: converge si $\alpha > 1$

↳ diverge si $\alpha \leq 1$

. au $V(0)$

$\int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha}$. converge si $\alpha < 1$

↳ diverge si $\alpha \geq 1$

or $\int_0^{+\infty} \frac{dt}{e^t}$ converge car $\forall x \in [0, +\infty[$:

$$\lim_{x \to +\infty} \int_0^x \frac{dt}{e^t} = \lim_{x \to +\infty} \left[-e^{-t}\right]_0^x = 1$$

. D'après le critère de comparaison :

$\int_0^{+\infty} \frac{dt}{e^t + t^2 e^{-t}}$ converge

Rappel ⚠ :

f c sur $[a, b[$, $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$

$\int_a^b f$ converge si $\lim_{x \to b} \int_a^x f$ $\exists$, finie

↳ Sinon diverge

. Intégrale de Riemann : f c sur $]0, +\infty[$

. au $V(+\infty)$: $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$ converge si $\alpha > 1$

↳ diverge si $\alpha \leq 1$

. au $V(0)$: $\int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha}$ converge si $\alpha < 1$

↳ diverge si $\alpha \geq 1$

Rq : $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$ diverge $\forall \alpha$ ⚠

· Intégrale de Bertrand :

· au $V(+\infty)$: $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha \ln^\beta x}$ converge si ($\alpha > 1$ ou $\alpha = 1$ et $\beta > 1$)

· au $V(0)$: $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha \ln^\beta x}$ converge si ($\alpha < 1$ ou $\alpha = 1$ et $\beta > 1$)

3/ $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{e^{\frac{1}{t}}}{1+t^3}\, dt$

on pose $f(t) = \dfrac{e^{\frac{1}{t}}}{1+t^3}$, $\forall t \geq 1$

f est continue sur $[1, +\infty[$

Problème de convergence en $+\infty$

· $t \geq 1$

$\frac{1}{t} \leq 1$

$e^{\frac{1}{t}} \leq e$

$0 \leq \dfrac{e^{\frac{1}{t}}}{1+t^3} \leq \dfrac{e}{1+t^3}$

et $\dfrac{e}{1+t^3} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{e}{t^3}$

et $e\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^3}$ converge ($\alpha = 3 > 1$) I. R

=> par les critères d'équivalence,

=> $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{e}{1+t^3}$ converge

par le critère de comparaison

$\displaystyle\int_1^{+\infty} f(t)\, dt$ converge

+ Critère de Riemann

f C sur $]a, +\infty[$

+ au $V(+\infty)$: · s'il $\exists\, \alpha > 1$ / $\lim\limits_{t \to +\infty} t^\alpha f(t) = 0$

=> $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(t)\, dt$ converge

· s'il $\exists\, \alpha \leq 1$ / $\lim\limits_{t \to +\infty} t^\alpha f(t) = \infty$

=> $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(t)\, dt$ diverge

+ au $V(0)$:

· si il $\exists\, \alpha < 1$ / $\lim\limits_{t \to 0^+} t^\alpha f(t) = 0$

=> $\displaystyle\int_0^a f$ converge

· s'il $\exists\, \alpha \geq 1$, $\lim\limits_{t \to 0^+} t^\alpha f(t) = \infty$

=> $\displaystyle\int_0^a f$ diverge

+ Critère de comparaison :

f, g C sur $[a, +\infty[$

$0 \leq f \leq g$

· Si $\displaystyle\int_0^{+\infty} g$ converge => $\displaystyle\int_0^{+\infty} f$ converge

(resp diverge)

+ Critère d'équivalence :

f C sur $[a, b[$

Si $f \underset{b}{\sim} g$ et $g \geq 0$ au $V(b)$

$f \underset{b}{\sim} g$

↳ $\lim\limits_{x \to b} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 1$

=> $\int f$ et $\int g$ sont de même nature methode 2 :

$$\lim_{t\to+\infty} t^2 \frac{e^{\frac{1}{t}}}{1+t^3} = \lim_{+\infty} \frac{\overset{1}{e^{\frac{1}{t}}}}{\underbrace{\frac{1}{t^2}+t}_{+\infty}} = 0$$

⇒ les critères de Riemann

$$\int_1^{+\infty} \frac{e^{\frac{1}{t}}}{1+t^3}\, dt \text{ converge } (\alpha = 2)$$

4/ $\displaystyle\int_0^{+\infty} \ln\left(1+\frac{1}{t^2}\right) dt$

$f : t \to \ln\left(1+\frac{1}{t^2}\right)$ est continue sur $]0,+\infty[$

↳ il y a deux problèmes un en 0

↳ un en $+\infty$

au V(0) : $\displaystyle\int_0^1 \ln\left(1+\frac{1}{t^2}\right) dt$

$$= \int_0^1 \ln\left(\frac{t^2+1}{t^2}\right) dt$$

$$= \int_0^1 \ln(t^2+1) - 2\ln t \, dt$$

or : $\displaystyle\underbrace{\int_0^1 \ln(t^2+1)\, dt}_{I.S}$ → converge

$\displaystyle\int_0^1 \ln|t|\, dt = -1$ (converge)

cl : $\displaystyle\int_0^1 \ln\left(1+\frac{1}{t^2}\right) dt$ converge

au V(+∞) : $\displaystyle\int_1^{+\infty} \ln\left(1+\frac{1}{t^2}\right) dt$

$$\lim_{t\to+\infty} t^2 \ln\left(1+\frac{1}{t^2}\right) dt$$

$$= \lim_{+\infty} \frac{\ln\left(1+\frac{1}{t^2}\right)}{\frac{1}{t^2}}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$$

⇒ critère de Riemann ($\alpha = 1$)

$\displaystyle\int_1^{+\infty} f(t)\, dt$ converge

cl : $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\, dt$ converge

5/ $\displaystyle\int_0^1 \frac{t^2-1}{\ln(t)}\, dt$

$f : t \to \dfrac{t^2-1}{\ln(t)}$ est continue sur $]0,1[$

→ il y a deux problèmes en 0 et en un autre en 1.

• en 0 : $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} f(t)\, dt$

$$\lim_{t\to 0^+} f(t) = \lim_{t\to 0^+} \frac{\overset{-1}{t^2-1}}{\underset{-\infty}{\ln(t)}} = 0$$

on peut prolonger f par continuité en 0

⇒ $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} f(t)\, dt$ C.V

• en 0 : $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^{1} f(t)\, dt$

$$\lim_{t\to 1^-} f(t) = \lim_{1^-} \frac{t^2-1}{\ln(t)} = \lim_{1^-} \frac{(t-1)(t+1)}{\ln(t)} = 2$$

→ $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^{1} f(t)\, dt$ C.V

cl. $\displaystyle\int_0^1 f$ cv car $\displaystyle\int_0^1 f = \int_0^{\frac{1}{2}} f + \int_{\frac{1}{2}}^{1} f$.

6/ $\displaystyle\int_0^{+\infty} \sqrt{t}\,\frac{\sin(t^{-\frac{5}{2}})}{\ln(1+t)}\,dt$

$f: t \longmapsto \dfrac{\sqrt{t}\,\sin(t^{-\frac{5}{2}})}{\ln(1+t)}$ est continue

sur $]0, +\infty[$

... il y a 2 problèmes en 0 et en $+\infty$

en 0 : $\displaystyle\int_0^1 f(t)\,dt$

$0 \leq |f(t)| \leq \dfrac{\sqrt{t}}{\ln(t+1)} \leq \dfrac{\sqrt{t}}{\ln(t)}$

or $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sqrt{t}}{\ln(t)}\,dt = \int_0^1 \frac{dt}{t^{-\frac{1}{2}}\ln(t)}$

CV (intégrale de Bertrand au $V(0)$ $\alpha = -\frac{1}{2} < 1$)

Par le critère de comparaison $\displaystyle\int_0^1 |f(t)|\,dt$ CV

$\Rightarrow \displaystyle\int_0^1 f(t)\,dt$ CV abs $\Rightarrow \displaystyle\int_0^1 f(t)\,dt$ CV

en $+\infty$: $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(t)\,dt$

$\sin(t^{-\frac{5}{2}}) \underset{+\infty}{\sim} t^{-\frac{5}{2}}$

$\ln(1+t) \underset{+\infty}{\sim} \ln(t)$

$\hookrightarrow$ car $\displaystyle\lim_{+\infty} \frac{\ln(t+1)}{\ln(t)} = 1$

$\left(\begin{array}{l} 1+t \underset{+\infty}{\sim} t \\ \ln(1+t) \underset{+\infty}{\sim} \ln(t) \end{array}\right)$

$f(t) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{\sqrt{t}\cdot t^{-\frac{5}{2}}}{\ln t} = \dfrac{1}{t^2\ln(t)}$

et $\dfrac{1}{t^2\ln(t)} \geq 0$ au $V(+\infty)$

et $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^2\ln(t)}$ CV (int Bertrand en $+\infty$ $\alpha = 2 > 1$)

$\Rightarrow$ par l'équivalence, $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(t)$ CV

d'où $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\,dt$ CV

et $\displaystyle\int_0^{+\infty} f = \int_0^1 f + \int_1^{+\infty} f$

Exercice 1:

1/ $\forall t \in \mathbb{R} \setminus \{-2, -1\}$

$$\frac{1}{(t+1)(t+2)} = \frac{a}{t+1} + \frac{b}{t+2}$$

$$= \frac{a(t+2)+b(t+1)}{(t+1)(t+2)}$$

$$= \frac{at+2a+bt+b}{(t+1)(t+2)}$$

$$= \frac{(a+b)t+2a+b}{(t+1)(t+2)}$$

$\Leftrightarrow$ par identification on a $\begin{cases} a+b=0 \Leftrightarrow b=-a \\ 2a+b=1 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \cancel{a+b} \; b=-a \\ \cancel{2a+b} \; 2a-a=1 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} b=-a=-1 \\ a=1 \end{cases}$

d'où $\dfrac{1}{(t+1)(t+2)} = \dfrac{1}{t+1} - \dfrac{1}{t+2}$

2/ $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dt}{(t+1)(t+2)}$

$f : t \to \dfrac{1}{(t+1)(t+2)}$ est continue sur $[0,+\infty[$

$\to$ problème au $V(+\infty)$

$t+1 \underset{+\infty}{\sim} t$, $t+2 \underset{+\infty}{\sim} t$ $\Big\}$ $(t+1)(t+2) \underset{+\infty}{\sim} t^2$

$f \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{t^2}$ et $\dfrac{1}{t^2} > 0$ (au $V(+\infty)$)

et $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^2}$ CV (I.R de Riemann $V(+\infty)$ $\alpha = 2 > 1$)

$\displaystyle\int_1^{+\infty} f(t)\,dt$ CV

d'$\Rightarrow \displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\,dt$ CV

Exercice 3:

1/ $\forall u \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$

$$\frac{1}{u^2-1} = \frac{a}{u+1} + \frac{b}{u-1}$$

$$\frac{a}{u+1} + \frac{b}{u-1} = \frac{a(u-1)+b(u+1)}{(u-1)(u+1)}$$

$$= \frac{au-a+bu+b}{(u-1)(u+1)}$$

$$= \frac{au-a+bu+b}{u^2-1} = \frac{u(a+b)-a+b}{u^2-1}$$

par identification:

$\begin{cases} (a+b)=0 \Leftrightarrow a=-b \\ \cancel{a}+b=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=\frac{1}{2} \\ a=-\frac{1}{2} \end{cases}$

$\Rightarrow \dfrac{1}{u^2-1} = \dfrac{-\frac{1}{2}}{u+1} + \dfrac{\frac{1}{2}}{u+1}$

2/a) la convergence de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dt}{\sqrt{e^t+1}}$

$f : t \longmapsto \dfrac{1}{\sqrt{e^t+1}}$ est continue sur $[0,+\infty[$

on a un problème au $V(+\infty)$

or $0 \leq \dfrac{1}{\sqrt{e^t+1}} \leq \dfrac{1}{\sqrt{e^t}}$

et $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{e^t}}$ converge $= \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-\frac{t}{2}}\,dt = \lim_{+\infty} \left[-2e^{-\frac{t}{2}}\right]_0$

$= 2 \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow$ donc d'après le critère de comparaison $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\,dt$ CV.

3

b/ $\int_0^{+\infty} \frac{dt}{\sqrt{e^t+1}}$

on pose $u=\sqrt{e^t+1}$

$t \to \sqrt{e^t+1}$ est de classe C^1 et strictement croissante sur $[0,+\infty[$ donc elle réalise une bijection de $[0,+\infty[$ sur $[\sqrt{2},+\infty[$

• $u=\sqrt{e^t+1}$

$u^2=e^t+1$

$\ln(u^2-1)=t$

$dt=\frac{2u}{u^2-1}$

$\Rightarrow \int_0^{+\infty} f(t)\,dt = \int_{\sqrt{2}}^{+\infty} \frac{2u}{u^2-1}\cdot\frac{1}{u}\,du$

$= 2\int_{\sqrt{2}}^{+\infty} \frac{1}{u^2-1}\cdot\frac{1}{2}\,du$

$=\int_{\sqrt{2}}^{+\infty} \frac{1}{u-1}-\frac{1}{u+1}\,du$

$= \lim_{x\to+\infty}\left[\ln\left(\frac{u-1}{u+1}\right)\right]_{\sqrt{2}}^{x}$

$\lim_{x\to+\infty} \underbrace{\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)}_{0} - \ln\left(\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}\right)$

$=\ln\left(\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}\right)$

Exercice 4

1/ $\frac{1}{t(t^2+1)} = \frac{a}{t}+\frac{bt+c}{t^2+1}$?

$=\frac{a(t^2+1)+(bt+c)t}{t(t^2+1)}$

$=\frac{at^2+a+bt^2+ct}{t(t^2+1)}$

$=\frac{t^2(a+b)+ct+a}{t(t^2+1)}$

Par identification : $\begin{cases} a+b=0 \\ c=0 \\ a=1 \end{cases}$ $\begin{cases} b=-a=-1 \\ a=1 \\ c=0 \end{cases}$

d'où $\frac{1}{t(t^2+1)}=\frac{1}{t} - \frac{t}{t^2+1}$, $t\neq 0$

2) la convergence de $\int_0^{+\infty}\frac{t\ln t}{(1+t^2)^2}\,dt$

$f: t\mapsto \frac{t\ln t}{(1+t^2)^2}$ est continue sur $]0,+\infty[$

. il y a deux problèmes de convergence en 0 et au V(+∞)

. au voisinage de 0 :

$\int_0^1 f(t)\,dt$, on remarque que $\lim_{t\to 0^+} f(t)=0$

($\lim_{0^+} t\ln t=0$)

$\Rightarrow$ f se prolonge par continuité en 0

$\Rightarrow \int_0^1 f(t)\,dt$ converge.

• au voisinage de (+∞)

$\int^{+\infty} f(t)\,dt$

$0\leq f(t)\leq \frac{1}{t^3\ln^{-1}(t)}$

or $\int_1^{+\infty}\frac{dt}{t^3\ln^{-1}(t)}$ converge (Bert au V(+∞) $\alpha=3$)

d'après le critère de comparaison

$\int_1^{+\infty} f(t)\,dt$ converge.