Institut Supérieur D'Informatique et de Mathématiques de Monastir **ISIMM**			
Examen Final - Session Principal - S2 - 2024/2025			
Filière : L1 INFO	Matière : Algèbre 2		Enseignant: Rym BETTAIEB
Date: 19/5/2025	Nbr de Crédits: 2	Coefficient : 1	Nombre de pages : 1
Durée de l'examen : 1h30	Régime d'évaluation: Mixte/ CC		Calculatrices autorisés : Non
	EX(70%)– DS(20%) + OR(10%)		Documents autorisés : Non

On considère f_m l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ défini par:

$$f_m(x,y,z) = (y\ ,\ z\ ,\ -mx + y + mz\ ),\ \ m \in \mathbb{R}$$

1. Ecrire la matrice A_m de f_m relativement à la base canonique Bc de $\mathbb{R}^3$.
2. Calculer le polynôme caractéristique P_m de f_m.
3. Pour quelles valeurs de m, l'endomorphisme f_m est-il inversible.
4. Pour quelles valeurs de m, l'endomorphisme f_m est-il diagonalisable.
5. Dans la suite, on prend $m = 2$, on note $A = A_2$ *et* $f = f_2$.
   (a) Déterminer les sous espaces propres de f et déduire que f est diagonalisable.
   (b) Diagonaliser la matrice A.
   (c) Vérifier que A est inversible et montrer que la matrice $N = A + 2A^{-1} + 3I_3$ est diagonalisable, préciser ses valeurs propres et les sous espaces propres associés.
   (d) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, calculer A^n.
6. Soit $(x_n)_n$ une suite réelle vérifiant: $x_0 = x_1 = 1,\ x_2 = -1,$ et

$$\forall n \in \mathbb{N},\ x_{n+3} = -2x_n + x_{n+1} + 2x_{n+2}$$

   (a) On pose $U_n = \begin{pmatrix} x_n \\ x_{n+1} \\ x_{n+2} \end{pmatrix}$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N},\ U_n = A^n U_0$.
   (b) En déduire l'expression de x_n en fonction de n, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

7. Pour $k \in \mathbb{R}$, on considère le système

$$(S_k) : \begin{cases} kx + y = 1 \\ ky + z = 0 \\ -2x + y + (2+k)z = d \end{cases} \quad ,\ d \in \mathbb{R}$$

   (a) Ecrire la matrice M_k du système S_k en fonction de k, A et I_3.
   (b) En déduire, (en utilisant le polynôme caractéristique de A), les valeurs de k, pour lesquelles (S_k) est un système de Cramer.
   (c) Pour $k = 2$, résoudre (S_2) par les formules de Cramer.
   (d) Pour $k = -1$, résoudre (S_{-1}) par la méthode des pivots de Gauss.

Bon Travail