Institut Supérieur d'Informatique et de Mathématiques de Monastir

Cours : Logique Formelle

Chapitre 2:
La Logique Propositionnelle

Enseignante: Dr. Aljia BOUZIDI
aljia.bouzidi95@gmail.com

$1^{ère}$ Licence en Sciences d'Informatique
Année Universitaire :2024-2025

Objectifs

- Le but de ce chapitre est d'inculquer à l'étudiant la notion de la logique propositionnelle. Plus précisément :
  - Connaître les principaux opérateurs logiques et leurs propriétés : NON, ET, OU,... ;
  - Comprendre les notions d'implication et d'équivalence ;
  - Modéliser un énoncé afin de tester sa validité ;
  - Structurer proprement un raisonnement ;

Contenu du chapitre 2

1. **Partie 1:** Introduction à La Logique Propositionnelle
2. **Partie 2:** Syntaxe du Calcul Propositionnel
3. **Partie 3:** Sémantique du Calcul Propositionnel

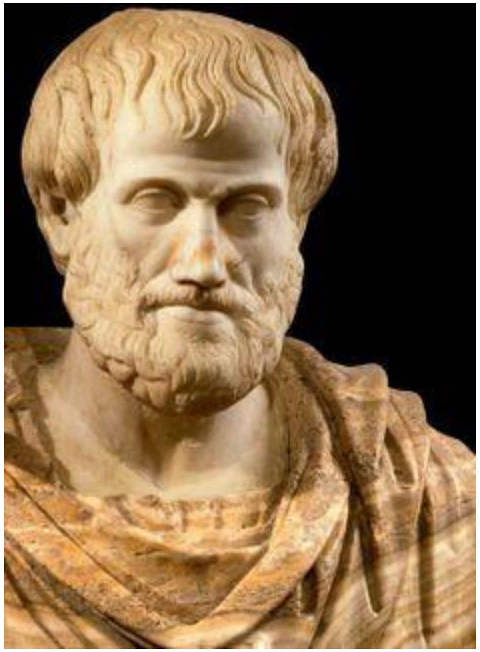
Institut Supérieur d'Informatique et de Mathématiques de Monastir

Partie 1: Introduction à La Logique Propositionnelle

Contenu de la Partie 1

1. Les 3 Principes d'Artistote: Rappel
2. Définition d'une Proposition
3. Exemples de Propositions
4. Calcul/Raisonnement Propositionnel
5. Récapitulons

Les 3 Principes d’Artistote: Rappel



1. **Le principe de non-contradiction:**

   Une proposition A ne peut être à la fois vraie et fausse

2. **Le principe de tiers exclu:**

   Une proposition A est forcément vraie ou fausse

3. **Le principe de d'identité:**

   La chose A s’explique (ou se vérifie) par elle-même

La notion de **« proposition »** est fondamentale en logique et déjà présente dans la logique d'Aristote.

Définition d'une Proposition

- Selon le principe du **tiers exclu** :
  - une proposition est **soit vraie soit fausse** mais **pas autre chose**.

➡ Une proposition est une expression qui est soit **vraie**, soit **fausse.**

On dit que la « valeur de vérité » d'une proposition est « vraie » ou « fausse ».

Exemples de Propositions

« Une proposition est une affirmation vraie ou fausses »

- L'énoncé « 24 est un multiple de 2 » est vrai (V)
- L'énoncé « 19 est un multiple de 2 » est faux (F)
- L'énoncé « Tunis est la capitale de la Tunisie » est vrai (V)

Calcul/Raisonnement Propositionnel (1/2)

- **Raisonner** c'est **déterminer** la **valeur** de **vérité** de **proposition** construites en combinant entre des propositions dont les valeurs de vérité sont déjà connues.
- **Le calcul proportionnel s'intéresse uniquement à la façon** dont les propositions sont liées entre elles, et aux conséquences qu'on peut en tirer quant à leur valeur de vérité.

c'est la **forme d'un argument** qui compte, et **non son contenu c-à-d il ne *s'intéresse pas du tout à leur signification***

Calcul/Raisonnement Propositionnel (2/2)

- Une **argumentation logique** utilise un **certain nombre de prémisses** pour prouver la validité d'une **assertion** (ou conclusion)
- Pour être **convaincu de l'assertion**, on doit être **convaincu des prémisses**.

> - Le calcul propositionnel **ne permet pas** de **découvrir de nouvelles réalités** sur le monde.
> - Elle **permet** simplement **d'effectuer un raisonnement correct** qui assure que, si les **prémisses sont vraies, alors la conclusion est vraie**.

Récapitulons

Dans la logique propositionnelle :

- On étudie les relations entre des énoncés appelés propositions ou formules.
- Ces relations sont exprimées via des connecteurs logiques.
- Les connecteurs logiques permettent de construire des formules syntaxiquement correctes.

Principe du **tiers exclu** :

- Ce principe affirme : "De deux propositions contradictoires, l'une est vraie, l'autre est fausse."
- Il n'y a pas de moyen terme ou de troisième hypothèse dans ce contexte.

Institut Supérieur d'Informatique et de Mathématiques de Monastir

Partie 2: Syntaxe du Calcul Propositionnel

Contenu de la Partie 2

1. Langage de la logique propositionnelle
2. Exercice Applicatif
3. Correction de l'Exercice Applicatif
4. Connecteurs Logiques
5. Forme Propositionnelle
6. Propriétés des Formes Propositionnelles
7. Classe Propositionnelle
8. Expressions Equivalentes

Langage de la logique propositionnelle

- S'intéresser à la syntaxe de la logique propositionnelle, c'est considérer les formules qui sont "**bien écrites**".

- Les **formules** sont définies comme **des chaînes de caractères sur un alphabet.**

- Pour cela, on se donne **un alphabet**, i.e. **un ensemble de symboles**, avec :
    - **deux constantes**, Vrai, Faux, pour lesquelles on utilise aussi les notations **1, 0** et **V, F** ;
    - Un ensemble **V={p,q,r,...}** dénombrable de lettres appelées **variables propositionnelles**. Il s'agit des propositions atomiques
    - Un ensemble (fini) de **connecteurs logiques** (**ou**, **et**, **non**, **implique**, **équivalence**)
    - Les **parenthèses** (,)

Exercice Applicatif

- **Exercice:**

Plaçons-nous dans le contexte suivant : « Il aime les fraises et la chantilly ». Dites si les propositions suivantes sont vraies ou fausses.

1. « Il aime les fraises et il aime la chantilly ». **Vrai.**
2. « Il aime les fraises et il n'aime pas la chantilly ».. **Faux**
3. « Il aime les fraises ou il aime la chantilly ». **Vrai.**
4. « Il aime les fraises ou il n'aime pas la chantilly ». **Vrai.**
5. « Il aime les fraises donc il aime la chantilly ». **Vrai.**
6. « Il aime les fraises donc il n'aime pas la chantilly ». **Faux**
7. « Il n'aime pas les fraises donc il aime la chantilly ». **Vrai.**
8. « Il n'aime pas les fraises donc il n'aime pas la chantilly ». **Vrai.**

Correction:

1. « Il aime les fraises et il aime la chantilly » : **Vrai.** Cette proposition est vraie, car elle correspond au contexte initial.
2. « Il aime les fraises et il n'aime pas la chantilly » : **Faux**. Cette proposition est fausse, car elle contredit le contexte initial où il est dit qu'il aime la chantilly.
3. « Il aime les fraises ou il aime la chantilly » : **Vrai.** Cette proposition est vraie, car elle est satisfaite si au moins une des deux conditions est vraie.
4. « Il aime les fraises ou il n'aime pas la chantilly » : **Vrai.** Cette proposition est vraie, car elle est également satisfaite si au moins l'une des deux conditions est vraie.
5. « Il aime les fraises donc il aime la chantilly » : **Vrai**. Cette proposition est vraie, car si quelqu'un aime les fraises et que la chantilly est incluse dans le contexte initial, il aime donc la chantilly.
6. « Il aime les fraises donc il n'aime pas la chantilly » **: Faux**. Cette proposition est fausse, car elle contredit le contexte initial où il est dit qu'il aime la chantilly.
7. « Il n'aime pas les fraises donc il aime la chantilly » : **Vrai.** Cette proposition est vraie, car elle n'entre pas en conflit avec le contexte initial. Si quelqu'un n'aime pas les fraises mais que l'on ne dit rien de sa préférence pour la chantilly, il peut tout à fait aimer la chantilly.
8. « Il n'aime pas les fraises donc il n'aime pas la chantilly » : **Vrai.** Cette proposition est vraie, car elle ne contredit pas le contexte initial. Si quelqu'un n'aime ni les fraises ni la chantilly, cela correspond toujours au contexte initial.

Connecteurs Logiques (1/19)

- En logique formelle, les **connecteurs logiques**, également appelés **opérateurs logiques**, sont des **symboles** ou des **mots** qui permettent de **combiner** des **propositions** **pour former de nouvelles propositions plus complexes**.
- Les connecteurs logiques sont utilisés pour exprimer des relations logiques entre des propositions et pour effectuer des opérations sur ces propositions.
- Les connecteurs les plus usuels sont:
  - **Négation** : *Non* (**Notation :** $\neg$)
  - **Conjonction** : *Et* (**Notation :** $\wedge$)
  - **Disjonction** : *Ou* (**Notation :** $\vee$)
  - **Conditionnel :** *Si… Alors* (**Notation :** $\longrightarrow$ *ou* $\Rightarrow$)
  - **Equivalence :** *Si et Seulement Si* (**Notation :** $\leftrightarrow$ *ou* $\Leftrightarrow$)

Connecteurs Logiques (2/19) :

Priorités de opérations

- Les connecteurs logiques ont une priorité d'opération qui diminue selon l'ordre du tableau précédent (dans la diapositive précédente) :
  - la **négation** a la plus **haute priorité**,
  - et l'**équivalence** la **plus basse priorité**.

- Ainsi, la proposition :

$$\neg p \wedge q \vee r \leftrightarrow q \longrightarrow p \wedge r$$

Est équivalente à :

$$(((\neg p) \wedge q) \vee r) \leftrightarrow (q \longrightarrow (p \wedge r))$$

Connecteurs Logiques (3/19):
La Négation (non)

- Soit **p une proposition**. **La négation de p**, est la proposition **non p**.
- **Notation : ¬**
- **Table de vérité de ¬:**

p	¬ p
V	F
F	V

- Si **p** est une proposition alors **non(p)/ ¬p** est une autre qui est **vraie si p est fausse**, et **fausse si p est vraie**.
- ¬ est un opérateur **unaire**.

- **Exemple** :
  - p : « 5 plus 4 font 9 »
    - ¬p : « il est faux que 5 plus 4 font 9 »
    - ¬ p : « 5 plus 4 ne font pas 9 »

Connecteurs Logiques (4/19):
La Négation (non) (suite)

- **Exemple**:
  - Soit une Proposition **A:** « ma voiture est blanche » alors **¬ A ?**

- **Correction** :
  - Si **A** : « ma voiture **est blanche** »

    alors **¬ A** : **« ma voiture n'est pas blanche »**

Table de vérité de ¬A :

A	¬ A
V	F
F	V

Connecteurs Logiques (5/19):

La Négation (non) (suite)

- **Autres exemples**
  - La proposition P= « 24 est un multiple de 2 » est une proposition vraie (V).
  - La proposition ¬P est définie par :
    - P= « 24 n'est pas un multiple de 2 »

      C'est une proposition fausse (F)
  - La proposition «1/2 n'est pas un entier naturel» est vraie car la proposition « ½ est un entier naturel » est fausse.

Connecteurs Logiques (6/19):
La Conjonction: ET

- Si **p** et **q** sont des propositions, alors :
  - La **conjonction** de p et q est la proposition **p ET q**
  - P **ET** q:
    - **vraie** si **p et q** sont **vraies en même temps**,
    - **Faux** dans **tous** les **autres cas**.
- **Notation** : ∧
- **Table de vérité de** ∧

p	q	p ∧ q
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

- **Exemple** :
  - p : « 10 est divisible par 2 »
  - q : « 10 est divisible par 5 »
  - p ∧ q :« 10 est divisible par 2 **et** 10 est divisible par 5 »

Connecteurs Logiques (7/19):
La Conjonction: ET(suite)

- **Autre exemple :**
  - Si A : « j'ai une voiture » et B : « j'ai le permis » Alors A et B : ?

- **Correction :**
  - Si A : « j'ai une voiture » et B : « j'ai le permis »
    Alors A ∧ B :
    - **« j'ai une voiture et j'ai le permis »**
      ou
    - **« j'ai une voiture et le permis**
  - A et B est vraie si A et B sont vraies toutes les deux, sinon elle est fausse.

Table de vérité de A ∧ B :

A	B	A∧ B
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Connecteurs Logiques (8/19):

La Disjonction: OU

- Si **p** et **q** sont des propositions, alors :
  - La **disjonction** de p et q est la proposition **p OU q**
  - P **OU** q:
    - Si **p et q** sont **deux propositions** alors **p OU q :**
    - est **fausse** lorsque **p et q** sont **fausses en même temps,**
    - est **vraie** lorsque l'**une au moins des deux est vraie**.
- **Notation** : $\vee$
- **Table de vérité de** $\vee$

p	q	$p \vee q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

- **Exemple** :
  - p : « 10 est divisible par 2 »
  - q : « 10 est divisible par 5 »
  - p $\vee$ q :«10 est divisible par 2 **ou** 10 est divisible par 5 »

Connecteurs Logiques (9/19) :
La Disjonction: OU (suite)

- **Autre exemple :**
  - Si A : « j'ai une voiture » et B : « j'ai le permis » Alors A ou B : ?

- **Correction :**
  - Si A : « j'ai une voiture » et B : « j'ai le permis » Alors **A ou B : « j'ai une voiture ou le permis »** A ou B est vraie si l'une au moins des propositions A et B est vraie.

Table de vérité de A $\vee$ B :

A	B	A $\vee$ B
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Connecteurs Logiques (10/19):
Conjonction et disjonction

Exemple de disjonction et conjonction:

- Considérons les deux propositions p et q suivantes:
  - P= « 10 est divisible par 2 »
  - Q= « 10 est divisible par 3 ».
  - On déduit les deux propositions

Correction:

- La proposition P est vraie tandis que la proposition Q est fausses
  - $P \wedge Q$= « 10 est divisible par 2 et 10 est divisible par 3 »,
  - $P \vee Q$ « 10 est divisible par 2 ou 10 est divisible par 3 »

- La proposition « $P \wedge Q$ » est une proposition fausse.
- En revanche, la proposition « $P \vee Q$ est une assertion vraie

Connecteurs Logiques (11/19):

Le Conditionnel: Implication: si… alors…

- Soient **p** et **q** deux propositions. La proposition « **p** ⇒ q » appelée **implication p vers q** ou « p entraîne q » , « p implique q » , « si p alors q » qui:
  - Est fausse lorsque **p** est **vraie** et **q fausses**
  - Est vrai **dans tous les autres cas**
- **Notation** :→/⇒
- **Table de vérité de → :**

p	q	p → q
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

- On dit que p est une **condition suffisante** pour q **mais pas nécessaire**
- **q** ⇒ p s'appelle l'implication réciproque de **p** ⇒ q
- (**p** ⇒ q) et (q ⇒ r) se note : **p** ⇒ q ⇒ r

Dans la formule **p ⇒ q**, on appelle **p l'antécédent**, **la condition suffisante** ou **la prémisse**, tandis que **q** est le **conséquent** ou la **conclusion**.

Connecteurs Logiques (12/19) :

Le Conditionnel: Implication: si… alors… (suite)

- $\boldsymbol{Un\ conditionnel\ n'\ est\ faux\ que\ dans\ un\ et\ un\ seul\ cas}$:
  - $\boldsymbol{si\ son\ antécédent\ est\ vrai\ et\ son\ conséquent\ faux}$

- **Démonstration : cas où p est vraie**
  - **Exemple1 :**
    - « s'il pleut, le sol est mouillé »
      - ✓ p : « il pleut »
      - ✓ q : « le sol est mouillé »
    - on suppose que p est vraie et on essaye de prouver que q est vraie
    - si la conséquence q est vraie, donc p → q est vraie
    - si la conséquence q est fausse, donc p → q est fausse

Connecteurs Logiques (13/19) :

Le Conditionnel: Implication: si… alors… (suite)

- **Démonstration : cas où p et q sont fausses**

- **Exemple 2 :**
  - p= « 2 est égal à 1 »
  - q = « Napoléon et Jules César sont une seul et même personne.»
  - On obtient « Si 2 est égal à 1 alors Napoléon et Jules César sont une seul et même personne»
    - ✓ « P entraîne Q» est vraie
  - **Preuve** : Napoléon et Jules César sont deux personnes : mais deux personnes n'en font qu'une si 2 est égal à 1. Par conséquent, si 2 est égal à 1 alors Napoléon et Jules César sont une seule et même personne

Connecteurs Logiques (14/19):
Le Conditionnel: Implication: si… alors… (suite)

- **Exemple :**
  - Montrer que la proposition suivante est vraie «si 1/2 est un nombre entier alors 1/2 n'est pas un nombre entier»

- **Réponse:**
  - P = «si 1/2 est un nombre entier» **est fausse**
  - Q = «1/2 n'est pas un nombre entier» **est vraie**

Donc $P \rightarrow Q$ est **vraie**

Connecteurs Logiques (15/19) :

Le Conditionnel: Implication: si… alors… (suite)

- **Théorème :** $p \rightarrow q = (\neg p) \vee q$

- **Démonstration :**

p	q	p→q	¬ p	(¬ p) ∨ q
V	V			
V	F			
F	V			
F	F			

Connecteur Logiques (16/19) :

Le conditionnel: Implication: si… alors… (suite)

- ***Exercice:***
  - Quelles sont les valeurs de vérité des propositions suivantes ?

1. « la somme des angles d'un triangle vaut 180° implique que la somme des angles d'un rectangle vaut 360°» **Vrai**
   V V
2. «π vaut 3.14 implique que la somme des angles d'un triangle vaut 182° » **Faux**
   V F
3. « si 7 est plus grand que 8 alors l'eau bout à 100°C » **Vrai**
   F V
4. « si 3 est plus petit que 4 alors 4 est plus petit que 3 » **Faux**
   V F
5. « si 4 est plus petit que 3 alors 3 est plus petit que 4 » **Vrai**
   F V
6. « 82 est divisible par 7 implique que π vaut 3.14 » **Vrai**
   F V
7. «si $330^{33}+5$ est divisible par 2 alors $330^{33}+5$ est plus grand que 5 » **Vrai**
   F V

Connecteur Logiques (17/19) :

Equivalence: biconditionnel:.. si seulement si..

- Soient **p** et **q** deux propositions. La proposition « **p** $\Leftrightarrow$ q » appelée **équivalence de p et de q** est une proposition qui:
  - Est vrai lorsque p et q sont simultanément vrai ou faux
  - Est faux dans tous les autres cas

- **Notation** : $\leftrightarrow$ *ou* $\Leftrightarrow$
- **Table de vérité de $\leftrightarrow$:**

p	q	$p \leftrightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

- (**p** $\Leftrightarrow$ q) et (**q**$\Leftrightarrow$ **r**) se note : **p** $\Leftrightarrow$ q $\Leftrightarrow$ **r**

- **Théorème** : $p \leftrightarrow q = (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$
- **Démonstration**:

p	q	$p \leftrightarrow q$	$p \rightarrow q$	$q \rightarrow p$	$(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$
V	V				
V	F				
F	V				
F	F				

Dans la formule p $\Leftrightarrow$ q, on dit que **q** est une **condition nécessaire** et **suffisante pour p**.

Connecteur Logiques (18/19):

Equivalence: biconditionnel: …si seulement si… (suite)

- **Exemple :**
  - x= je suis heureux **si et seulement si** tu m'aimes
  - **Réponse:**
    - P = je suis heureux ,q= tu m'aimes

p	q	p ↔ q
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

Connecteurs Logiques(19/19) :
Implication et équivalence

- **Exercice:**

Traduire les énoncés suivants en formules.

  - Quand il fait beau, Jean est heureux ;
  - Il fait soleil ; donc, Jean est heureux.

- **Correction:**

En logique propositionnelle, vous pouvez traduire les énoncés donnés en utilisant des propositions simples et des connecteurs logiques. Voici comment vous pouvez les formuler :

1. **Quand il fait beau, Jean est heureux ;**
   - Vous pouvez représenter cette phrase par une implication (→), où "p" représente "Il fait beau" et "q" représente "Jean est heureux". La formule serait donc :

     "$p \rightarrow q$".
2. **Il fait soleil ; donc, Jean est heureux;**
   - Cette phrase peut être traduite en une implication également. En utilisant les mêmes propositions "p" et "q" que précédemment, vous obtenez : "$p \rightarrow q$".

Ainsi, les deux énoncés peuvent être traduits en logique propositionnelle comme suit :

1. "$p \rightarrow q$" (Quand il fait beau, Jean est heureux), "p" représente "Il fait beau" et "q" représente "Jean est heureux".
2. "$p \rightarrow q$" (Il fait soleil ; donc, Jean est heureux)., "p" représente "Il fait soleil" et "q" représente "Jean est heureux".

Forme Propositionnelle (1/6) : Définition

Une **forme propositionnelle** (ou **formule propositionnelle**) est une **suite de symboles** construite selon des règles, où l'on retrouve des **connecteurs**, des **parenthèses,** et des symboles de **variables propositionnelles**.

- Parmi les mots que l'on peut écrire avec cet alphabet, on va regarder ceux qui correspondent à des **e**xpressions logiques **b**ien **f**ormées **EBF** (ou **f**ormules **b**ien **f**ormées : **FBF**), et que l'on définit (inductivement).
- Ainsi**:**
  - Toute **proposition** (atomique ou non) , i.e, p, q, r,..., est **une forme propositionnelle** (expression bien formée)
  - Si p est une variable alors p écrit tout seul est une forme propositionnelle
  - Si **A** et **B** sont deux **expressions bien formées**, alors **$(A \wedge B)$**, **$(A \vee B)$**, **$(A \longrightarrow B)$** et **$(A \longleftrightarrow B)$** sont des **expressions bien formées**
  - Si p est une forme propositionnelle, alors $\neg p$ est une forme propositionnelle

Forme Propositionnelle (2/6) :
Table de vérité

Dans une **forme propositionnelle**, quand on remplace les **variables par des propositions**, on obtient **une proposition**. La valeur de vérité de cette proposition ne dépend que des valeurs de vérité des propositions qui ont été substituées.

- **Exercice:**
  - Évaluer les valeurs de vérité de l'expression : $(\neg(p \rightarrow q) \wedge r)$

Note :si on a n variables il faut prévoir une table contenant 2^n lignes

p	q	r	$p \rightarrow q$	$\neg(p \rightarrow q)$	$\neg(p \rightarrow q) \wedge r$
V	V	V			
V	V	F			
V	F	V			
V	F	F			
F	V	V			
F	V	F			
F	F	V			
F	F	F			

Forme Propositionnelle (3/6):
Table de vérité (suite)

- Certaines expressions peuvent assembler plusieurs propositions simples (propositions atomiques) pour en faire des propositions complexes (proposition composée) qui permettent de calculer la valeur de vérité des propositions complexes si on connait la valeur de vérité des fonctions simples.
- **<u>Exemple :</u>** Soient $f(p, q) = p \wedge q$ et $g(p, r) = p \wedge (\neg r)$. déterminer la table de vérité de $f \vee g$

p	q	r	$\neg r$	$f = p \wedge q$	$g = p \wedge (\neg r)$	$f \vee g = (p \wedge q) \vee (p \wedge (\neg r))$
V	V	V				
V	V	F				
V	F	V				
V	F	F				
F	V	V				
F	V	F				
F	F	V				
F	F	F				

Forme Propositionnelle (4/6) :
Table de vérité (suite)

- **<u>Exercie 1:</u>**
  1. Combien de lignes contient la table de vérité d'une forme propositionnelle qui dépend de n variables ?
  2. A l'aide de deux propositions p et q on peut construire une autre, notée p↓q, bâtie sur le modèle : « ni p , ni q ». Cette opération est elle une connexion ? Si oui quelle est sa table de vérité ?

Réponse

1. 2^n

2. Cette connexion est dite« double exclusion » noté ↓

p	q	p ↓ q
V	V	f
V	F	F
F	V	F
F	F	V

Forme Propositionnelle (5/6) :
Table de vérité (suite)

- **Exercice 2:**

représenter la table de vérité de chaque forme propositionnelle :

1. $(\neg p) \vee q$
2. $(p \vee q) \longrightarrow (p \wedge q)$
3. $(p \wedge q) \longrightarrow (p \vee q)$
4. $(p \longrightarrow q) \longrightarrow (q \longrightarrow p)$
5. $(p \longrightarrow (\neg q)) \wedge (q \longrightarrow (\neg p))$
6. $p \longrightarrow ((\neg p) \vee p)$
7. $(p \longrightarrow q) \leftrightarrow ((p \longrightarrow r) \wedge (r \longrightarrow q))$

Forme Propositionnelle (6/ 6):
Modèle

Définition:

- Un choix des valeurs de vérité des variables qui donne une proposition **vraie** s'appelle **un modèle** de la forme propositionnelle.
  - Exemple: le choix de **V** pour **p**, **F** pour **q** est un modèle pour la forme propositionnelle W avec W= $p \vee q$.
  - On dit que des **formes propositionnelles sont compatibles** si elles ont au **moins un modèle en commun**.
  - On dit que des formes propositionnelles sont **contradictoires** quand elles n'ont **aucun modèle en commun**.
  - ....

Propriétés des Formes Propositionnelles (1/18): Satisfiable

○ Définition:

- On dit qu'une formule A est **consistante, ou satisfiable**, s'il existe **au moins** une interprétation de ses variables propositionnelles qui la rende vraie.
- **Exemple: p v q.**

Dans ce exemple ,on a 3 interprétation V

p	q	$p \vee q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Propriétés des Formes Propositionnelles (2/18): Tautologie/validité

Définition:

- Une Tautologie est une formule qui est vraie dans toutes les interprétations possibles.
  - Sa colonne de la formule complexe dans sa table ne contient que de **V**.
  - En tant que forme propositionnelle, une proposition vraie est une tautologie.

> - **Définition**
>
> Une proposition R qui est vraie quelles que soient les valeurs de p (la proposition qui la composent), est appelée **une tautologie**

- **Notation**: $\vDash$**A.**

Propriétés des Formes Propositionnelles(3/18): Tautologie/validité (suite)

Exemple

- Considérons une proposition p. Cette proposition peut prendre la valeur (de vérité) vrai ou faux. Considérons la proposition composée R telle que:

p	¬ p	p ∨ ¬ p
F	V	V
V	F	V

$$\mathbf{R} = \mathbf{p} \vee \neg \mathbf{p}$$

La proposition R est alors qualifiée **de tautologie**

Se note $\models$**R**

Propriétés des Formes Propositionnelles(4/18): Tautologie/validité (suite)

Définition:

- Une Antilogie est une formule qui n'est vraie dans aucune interprétation possible.
  - Sa colonne de la formule complexe dans sa table ne comporte que des **F**.
  - En tant que forme propositionnelle, une proposition fausse est une antilogie.
  - on dit aussi une **contradiction**.

Propriétés des Formes Propositionnelles (5/18): Tautologie

Exemples:

$(\neg\, p) \vee p$

Tautologie

p	¬p	$(\neg\, p) \vee p$
V	F	V
F	V	V

$((\neg\, p) \wedge p$

Antilogie

p	¬p	$(\neg p) \wedge p$
V	F	F
F	V	F

Propriétés des Formes Propositionnelles(6/18):
Tautologie (suite)

- **Exercie :**

montrer que les formules suivantes sont ou non des tautologies ?

1. $(p \vee q) \longrightarrow (p \wedge q)$
2. $(p \wedge q) \longrightarrow (p \vee q)$
3. $p \longrightarrow ((\neg p) \vee p)$
4. $p \longrightarrow ((\neg p) \wedge p)$
5. $(p \longrightarrow ((\neg p) \vee p)$
6. $(p \wedge (\neg p)) \vee (p \wedge q)$
7. $(p \longrightarrow q) \leftrightarrow ((p \longrightarrow r) \wedge (r \longrightarrow q))$

Propriétés des Formes Propositionnelles (7/18): Conséquence Logique

Définition:

- Si f et g deux formes propositionnelles, on dit que **g est un conséquence de f**, ou encore **g est déduit de f** si:

f→g est une tautologie

- On écrit alors : **f** ⊨ **g**
- **Le symbole** ⊨ **n'est pas un connecteur**
- ⊨ est un symbole d'une relation (g est un conséquence de f)

Propriétés des Formes Propositionnelles (8/18):
Conséquence Logique (suite)

- **Définition :**

1. Soient les formules A_1,A_2 ,…,A_n, B. B est une conséquence sémantique de A_1,A_2 ,…,A_n ssi pour **chaque interprétation I**, A_1, A_2 ,…,A_n **sont vrais alors B est aussi vrai**.

$$A_1,A_2,\ldots,A_n \models B$$

Remarque : Si il existe une interprétation où $v(A_1) = T$, $v(A_2)= T$,… et $v(B)=F$ alors $A_1, A_2,\ldots \not\models B$.

Propriétés des Formes Propositionnelles (9/18): Conséquence Logique (suite)

- **Exemple1 :**

1. Vérifier à l'aide de la table de vérité si A -> B, B ->C $\models$ A ->C
2. Quelles sont les conséquences valides que vous pouvez déduire de cette table de vérité ?

Correction :

A	B	C	A->B	B->C	A->C
T	T	T	**T**	**T**	**T**
T	T	F	T	F	F
T	F	T	F	T	T
T	F	F	F	T	F
F	T	T	**T**	**T**	**T**
F	T	F	T	F	T
F	F	T	**T**	**T**	**T**
F	F	F	**T**	**T**	**T**

Propriétés des Formes Propositionnelles (10/18): Conséquence Logique (suite)

Théorème:

- La **forme propositionnelle** g **est une conséquence de la forme propositionnelle** de f **si tout modèle** de **f** est **aussi un modèle** de **g**
- En effet, si $f \longrightarrow g$ prend toujours la valeur V cela signifie que f ne prend pas la valeur V quand g prend la valeur F

Théorème:
La forme propositionnelle g est une conséquence de la forme propositionnelle de f si tout modèle de f est aussi un modèle de g
En effet, si f⟶g prend toujours la valeur V cela signifie que f ne prend pas la valeur V quand g prend la valeur F

Propriétés des Formes Propositionnelles (11/18): Conséquence Logique (suite)

Exemple 1:

- Montrer que q est une conséquence logique de $(p \wedge (p \longrightarrow q))$

p	q	$p \rightarrow q$	$p \wedge (p \rightarrow q)$	$(p \wedge (p \rightarrow q)) \rightarrow q$
V	V			
V	F			
F	V			
F	F			

Conclusion: **Modus ponens** : $(p \wedge (p \longrightarrow q)) \vDash q$

Propriétés des Formes Propositionnelles (12/18): Conséquence Logique (suite)

Exemple 2:

- Montrer que $\neg p$ est une conséquence de $(\neg q) \wedge (p \rightarrow q)$

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$p \rightarrow q$	$\neg q \wedge (p \rightarrow q)$	$(\neg q \wedge (p \rightarrow q)) \rightarrow \neg p$
V	V					
V	F					
F	V					
F	F					

Conclusion: **Modus tollens** : $(\neg q) \wedge (p \rightarrow q) \vDash \neg p$

Propriétés des Formes Propositionnelles (13/18) :
Conséquence Logique (suite)

Exercice:

- Soient : $f(p,q,r)= (p\longrightarrow q) \wedge (q\longrightarrow r)$ et $g(p,r)= p\longrightarrow r$

Montrer que $f \models g$

p	q	r	$p \rightarrow q$	$q \rightarrow r$	$f = (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r)$	$g = (p \rightarrow r)$	$f \rightarrow g$
V	V	V					
V	V	F					
V	F	V					
V	F	F					
F	V	V					
F	V	F					
F	F	V					
F	F	F					

Propriétés des Formes Propositionnelles (14/18) : Conséquence logique (suite)

En récapitulant les **règles d'inférences**, nous avons les suivantes:

1. **Règle de Modus Ponens** :
   - La règle d'inférence appelée **Modus Ponens,** à partir de deux FBF respectivement de la forme **G** et (**G**→**H**), dérive la FBF **H**.
2. **Règle de Modus Tollens :**
   - La règle d'inférence appelée **Modus Tollens**, à partir de deux FBF respectivement de la forme (**¬H**) et (**G**→**H**), dérive la FBF **(¬G**).

- Les FBF choisies initialement sont appelées **axiomes**. Les FBF obtenues par application des règles d'inférence sont appelées **théorèmes**.

- Une **chaîne d'applications de règles d'inférence** conduisant, depuis les axiomes, à un théorème, constitue une **preuve du théorème**.

Propriétés des Formes Propositionnelles(15/18):
Conséquence logique (suite)

- **Exercice:**
  - Dans chacun des cas ci-dessous déterminer si la première forme propositionnelle est une conséquence de la forme propositionnelle qui est sur la même ligne :

1.	$(p \wedge q)$	p
2.	q	$(p \to q)$
3.	$\neg (p \to q)$	p
4.	$(p \wedge q) \vee r$	$p \wedge (q \vee r)$
5.	$(p \to q) \wedge (q \to r)$	$p \to (q \to r)$
6.	$p \to (q \to r)$	$p \to r$
7.	$p \to (q \wedge r)$	$p \to q$
8.	$(p \wedge q) \to r$	$(p \to r) \wedge (q \to r)$
9.	$p \to (q \vee r)$	$(p \to q) \vee (p \to r)$

Propriétés des Formes Propositionnelles (16/18): Equivalentes

- **Définition:**
  - Soient p et q deux propositions. Si :
    - P est vraie lorsque q est vraie
    - P est fausse lorsque q est fausse

    Alors on dit que deux formes propositionnelles **sont synonymes ou équivalentes** quand elles **ont la même table de vérité**
- **Notation $p \equiv q$**
  - **Exemple:**
    - Soit p une proposition . Non(non(p)) $\equiv$p
    - Soit x et y deux propositions :
      - ✓ $x \vee (x \wedge y) \equiv x$.
      - ✓ $x \wedge (x \vee y) \equiv x$.

Propriétés des Formes Propositionnelles (17/18): Equivalentes (suite)

- **Exemple:**
  - $(p \longrightarrow q)$ et $((\neg q) \longrightarrow (\neg p))$ sont **équivalentes**

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$p \rightarrow q$	$(\neg q) \rightarrow (\neg p)$
V	V				
V	F				
F	V				
F	F				

- **Remarque:** La proposition $(\neg q) \longrightarrow (\neg p)$ s'appelle la **contraposée** $(p \longrightarrow q)$

Propriétés des Formes Propositionnelles (18/18): Equivalentes (suite)

- **Exercice:**
  - Dans chacun des cas suivants dire si les deux formes propositionnelles sont équivalentes.

1. $p \rightarrow q$ — $(\neg p) \vee (p \wedge q)$
2. $p \rightarrow q$ — $(\neg p) \rightarrow (\neg q)$
3. $p \rightarrow (q \rightarrow r)$ — $(p \rightarrow q) \rightarrow r$
4. $(p \wedge q) \vee (q \wedge r) \vee (r \wedge p)$ — $(p \vee q) \wedge (q \vee r) \wedge (r \vee p)$

Classe Propositionnelle (1/2)

- Il est possible de ranger les formes propositionnelles en classes d'équivalence constituées de formes propositionnelles synonymes. Chaque classe est caractérisée par la table de vérité commune à toute les formes de la classe.
  - Toutes forme synonyme d'une tautologie est une tautologie.
    Notée : V
  - Toutes forme synonyme d'une antilogie est une antilogie
    Notée : F

$\square$: Dénote une formule **toujours fausse**

$\blacksquare$: Dénote une formule **toujours vraie**

- **Propriétés de la négation :**

1. $A \wedge \neg A \equiv \square$
2. $A \vee \neg A \equiv \blacksquare$
3. $\neg(\neg A) \equiv A$
4. $A \vee \square \equiv A$
5. $A \wedge \square \equiv \square$
6. $A \vee \blacksquare \equiv \blacksquare$
7. $A \wedge \blacksquare \equiv A$

Classe Propositionnelle (2/2)

- Soient C et D deux classes dont on présente que la dernière colonne.

C	D	$\neg C$	$C \wedge D$	$C \vee D$
V	V	F	V	V
F	F	V	F	F
F	V	V	F	V
V	F	F	F	V
V	F	F	F	V
F	V	V	F	V
F	F	V	F	F
F	V	V	F	V

Expressions Equivalentes (1/4)

- Si la proposition **$p \Leftrightarrow q$ est vraie**, alors on dit que **p et q** sont deux propositions **équivalentes**, et on note **$p \equiv q$**
- **Première loi de De Morgan :**
  - $\neg(p \vee q) \equiv \neg p \wedge \neg q$
  - $\neg(p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q$
- **Théorème 1:**
  - Si p et q sont deux propositions :
    1. $p \leftrightarrow q \equiv (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$;
    2. $\neg(p \rightarrow q) \equiv p \wedge \neg q$
    3. $p \rightarrow q \equiv \neg q \rightarrow \neg p$;

Expressions Equivalentes (2/4)

- **Commutativité**
  - $\models [(A \wedge B) \equiv (B \wedge A)]$
  - $\models [(A \vee B) \equiv (B \vee A)]$
  - $\models [(A \equiv B) \equiv (B \equiv A)]$

- **Associativité :**
  - $\models [((A \wedge B) \wedge C) \equiv ((A \wedge (B \wedge C))]$
  - $\models [((A \vee B) \vee C) \equiv (A \vee (B \vee C))]$
  - $\models [((A \equiv B) \equiv C) \equiv (A \equiv (B \equiv C))]$

- **lois de Morgan:**
  - $\neg (C1 \wedge C2) = (\neg C1) \vee (\neg C2)$
  - $\neg (C1 \vee C2) = (\neg C1) \wedge (\neg C2)$

- **Distributivité**
  - $C1 \vee (C2 \wedge C3) = (C1 \vee C2) \wedge (C1 \vee C3)$
  - $C1 \wedge (C2 \vee C3) = (C1 \wedge C2) \vee (C1 \wedge C3)$
  - $C1 \wedge (C5 \vee C8 \vee C1 \vee C2) = C1$
  - $C1 \vee (C5 \wedge C8 \wedge C1 \wedge C2) = C1$

- **Absorption :**
  - $[(A \wedge (A \vee B)) \equiv A]$
  - $\models [(A \vee (A \wedge B)) \equiv A]$

- **idempotence :**
  - $C1 \vee V = V$
  - $C1 \wedge V = C1$
  - $C1 \vee F = C1$
  - $C1 \wedge F = F$
  - $C1 \vee C1 = C1$
  - $C1 \wedge C1 = C1$

Expressions Equivalentes (3/4)

○ Implication:

- $\models [(A \rightarrow B) \equiv (\neg A \vee B)]$
- $\models [(A \rightarrow B) \equiv \neg(A \wedge \neg B)]$
- . . .

○ Equivalence:

- $\models [(A \equiv B) \equiv ((A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A))]$
- $\models [(A \equiv B) \equiv ((A \wedge B) \vee (\neg A \wedge \neg B))]$
- . . .

○ Contraposition:

- $\models [(A \rightarrow B) \equiv (\neg B \rightarrow \neg A)]$

○ Auto-distributivité:

- $\models [(A \rightarrow (B \rightarrow C)) \equiv ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C))]$

○ Import-export

$\models [(A \rightarrow (B \rightarrow C)) \equiv (B \rightarrow (A \rightarrow C))]$

○ Transitivité

- $\models [((A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow C)) \equiv (A \rightarrow C)]$

Expressions Equivalentes (4/4):

- **Exemple:**
- Soit Q une formule avec $Q=(p \land (\neg q \land r)) \lor (p \land \neg q)$.
  montrer que Q est équivalente à une formule plus simple

- **Réponse:**
  1. On commence avec $Q = (p \land \neg q \land r) \lor (p \land \neg q)$.
  2. Par **la propriété de négation (vrai est neutre pour et)** que Q est équivalent à $(p \land \neg q \land r) \lor ((p \land \neg q) \land \text{vrai})$.
  3. On applique **l'associativité et** pour déplacer une paire de parenthèses : $((p \land \neg q) \land r) \lor ((p \land \neg q) \land \text{vrai})$.
  4. On utilise **la distributivité-et-sur-ou** pour factoriser : $(p \land \neg q) \land (r \lor \text{vrai})$.
  5. Par **vrai est absorbant** , le terme de droite se simplifie : $(p \land \neg q) \land \text{vrai}$.
  6. On se sert de **vrai est neutre pour et** pour le faire disparaître : $p \land \neg q$.

Les formules écrites à chacune des étapes sont équivalentes les unes aux autres, donc en particulier à Q. **On peut donc conclure qu'on a $Q \Leftrightarrow p \land \neg q$.**