

Chapitre : Suites et séries numériques

I. Suites numériques.

Définition et propriétés.

Définition : une suite numérique à valeur réelle est une application

$$U: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R} \\ n \mapsto U(n) = U_n$$

La suite réelle est notée $(U_n)_n$

Remarque : Une suite réelle peut être définie à partir d'un certain rang n_0

(c'est-à-dire $\forall n \geq n_0$ et on note $(U_n)_{n \geq n_0}$)

Exemples

- 1) Soit $(U_n)_n$ définie $U_n = \sqrt{n^2 + 1}$
- 2) Soit $(U_n)_n$ définie $U_n = \frac{\sqrt{n^2 + 1}}{n-1}$, $\forall n \geq 2$
- 3) Soit $(U_n)_n$ définie par :
$$\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = 3U_n^2 + 4, \forall n \geq 0 \end{cases}$$

* Suite arithmétique

Définition: Une suite $(U_n)_n$ est dite arithmétique s'il existe $r \in \mathbb{R}$ tel que: $\boxed{U_{n+1} - U_n = r}$ et on appelle r le raison de la suite arithmétique

Proposition: Si $(U_n)_{n \geq 0}$ est une suite arithmétique de raison $r \in \mathbb{R}$ alors $\forall n \in \mathbb{N}$ on a $\boxed{U_n = U_0 + nr}$

Proposition: Si (U_n) est une suite arithmétique de raison $r \in \mathbb{R}$ alors

$$\forall m > n \in \mathbb{N}, \text{ on a } \boxed{U_m = U_n + (m-n)r}$$

Proposition: Si $(U_n)_n$ est une suite arithmétique de raison $r \in \mathbb{R}$, alors $\forall m \leq n$ on a

$$\sum_{k=m}^n U_k = \underbrace{(n-m+1)}_{\substack{\text{nombre} \\ \text{de termes}}} \underbrace{\left(\frac{U_m + U_n}{2} \right)}_{\substack{\text{premier et dernier} \\ \text{deux termes}}}$$

Application

Montrer que $\sum_{k=0}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$?

Solution Soit $(U_n)_{n \geq 0}$ une suite

définie par $U_n = n, \forall n \geq 0$

* $(U_n)_{n \geq 0}$ est une suite arithmétique.

En effet:

$$U_{n+1} - U_n = (n+1) - n = 1 = r$$

donc $(U_n)_{n \geq 0}$ est une suite arithmétique

de raison $r = 1$.

$$* \sum_{k=0}^n k = \sum_{k=0}^n U_k = \frac{(n+1)n}{2}$$

* Suite géométrique

Définition Une suite $(U_n)_n$ est dite une suite géométrique s'il existe $q \in \mathbb{R}$ tel que

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad U_{n+1} = q U_n$$

* Le réel q est appelé le raison de la suite.

Proposition: Si $(U_n)_{n \geq 0}$ est une suite géométrique de raison $q \in \mathbb{R}$ alors on a $\forall n \in \mathbb{N}$

$$U_n = q^n U_0$$

Proposition: Si $(U_n)_{n \geq 0}$ une suite géométrique de raison $q \in \mathbb{R}$, alors $\forall m \leq n \in \mathbb{N}$

on a :

$$\sum_{k=m}^n U_k = \begin{cases} (n-m+1) U_0, & \text{si } q=1 \\ \frac{1-q^{n-m+1}}{1-q} U_m, & \text{si } q \neq 1 \end{cases}$$

* Suite minorée - Suite majorée - bornée:

Définition: Soit $(U_n)_{n \geq 0}$ une suite réelle

* La suite $(U_n)_{n \geq 0}$ est dite minorée s'il existe un réel $m \in \mathbb{R} / \forall n \geq 0$ on a $U_n \geq m$. (m ne dépend pas de n)

* La suite $(U_n)_{n \geq 0}$ est dite majorée s'il existe un réel $M \in \mathbb{R} / \forall n \geq 0$ on a $U_n \leq M$ (M ne dépend pas de n)

* Une suite $(u_n)_{n \geq 0}$ est dite bornée
s'il est majorée et minorée à la fois
c.à.d. $\forall n \geq 0, \exists m, M \in \mathbb{R}$ tel que

$$m \leq u_n \leq M$$

(M, m , ne dépendent pas de n)

Remarque.

La suite $(u_n)_n$ est bornée c'est équivalent
qu'à la suite $(|u_n|)_n$ est majorée

(c.à.d.)

$$|u_n| \leq M \Leftrightarrow -M \leq u_n \leq M$$

Exemples

1) Soit $(u_n)_{n \geq 0}$ définie par: $u_n = 4 + 2n^2 \geq 4$

donc $(u_n)_{n \geq 0}$ est minorée par 4

2) $(u_n)_{n \geq 0}$ définie: $u_n = \frac{n^2}{n^2 + 4}$

on a $n+1 \geq n^2$ } Donc $(u_n)_n$ est majorée par 1
ou $1 \geq \frac{n^2}{n^2 + 4}$

3) La suite $(u_n)_n$ définie par

$$u_n = (-1)^n \cos(n)$$

Mq que $(u_n)_n$ est bornée?

Solution

$$|u_n| = |(-1)^n \cos(n)| \leq 1.$$

Donc $-1 \leq u_n \leq 1$ d'où $(u_n)_n$ est bornée.

* Suite monotone et strictement monotone:

Définition. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle

* On dit que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante si

$$u_{n+1} \geq u_n \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

* On dit que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est strictement croissante

$$\text{si } u_{n+1} > u_n, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

* On dit que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante si

$$u_{n+1} \leq u_n, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

* On dit que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est strictement décroissante

$$\text{si } u_{n+1} < u_n, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

* On dit que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est monotone s'elle est croissante ou bien décroissante.

* On dit que $(u_n)_{n \in \mathbb{R}}$ est monotone si \nearrow ou bien \searrow .

* Limite d'une suite réelle - convergence / divergence:

Limite d'une suite réelle:

Définition: Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle, soit $l \in \mathbb{R}$, on dit que $(u_n)_n$ admet une limite finie l si

$\forall \varepsilon > 0 \exists N \geq 0$ tel que $\forall n \geq N$
on a $|u_n - l| < \varepsilon$.

et on note $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = l$

* On dit que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ n'admet pas de limite

Cà d: $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = +\infty$ ou bien n'existe pas

* Convergence - Divergence

Définition: Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle

- On dit que $(u_n)_n$ converge si elle admet une limite finie.
- On dit que $(u_n)_n$ diverge si elle n'est pas convergente.

Proposition : Toute suite réelle

convergente est bornée

* Monotonie et convergence

1) Toute suite croissante et majorée est convergente

2) Toute suite décroissante et minorée est convergente

* Suites adjacentes

Définition : Soient $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ deux suites réelles vérifiant :

* $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq v_n$

* $(u_n)_n$ est croissante et $(v_n)_n$ est décroissante

* $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n - v_n = 0$.

Alors $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ sont deux suites adjacentes

Théorème :

Deux suites adjacentes convergent vers la même limite.

* Suites équivalentes

Définition : Soit $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ deux suites

on dit qu'elles sont équivalentes si $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{v_n} = 1$ et on note $u_n \sim_{n \rightarrow \infty} v_n$

Proposition

Deux suites équivalentes ont la même limite.

Exemple. Soit $(u_n)_{n \geq 1}$ une suite réelle

définie par $u_n = \sqrt{n} \sin\left(\frac{1}{n}\right)$

Montrer que $(u_n)_{n \geq 1}$ est convergente?

Solution

on a $\sin(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x$

Prendons $x = \frac{1}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$

donc $\sin\left(\frac{1}{n}\right) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n}$

donc $\sqrt{n} \sin\left(\frac{1}{n}\right) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\sqrt{n}}{n} = \frac{1}{\sqrt{n}}$

Donc $(\sqrt{n} \sin(\frac{1}{n}))_{n \geq 1}$ est équivalente $(\frac{1}{\sqrt{n}})_{n \geq 1}$

Par suite $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n} \sin\left(\frac{1}{n}\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$ (fin)

D'où la suite $(\sqrt{n} \sin(\frac{1}{n}))_{n \geq 1}$ est convergente et converge vers 0.