République Tunisienne
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Institut Supérieur d'Informatique et des Mathématiques de Monastir
Université de Monastir

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

Cours:
Systèmes Logiques et Architecture des Ordinateurs

Dr. Safa Teboulbi

Année universitaire : 2024-2025

Chapitre 2

Algèbre De BOOLE et Fonctions Logiques

Les Variables et les Fonctions Logiques

Les Variables Logiques

- Une variable logique est une grandeur qui ne peut prendre que deux états logiques.
- Nous les symbolisons par 0 ou 1.

Exemples

Un interrupteur peut être : * Fermé (1 logique)
* Ouvert (0 logique)

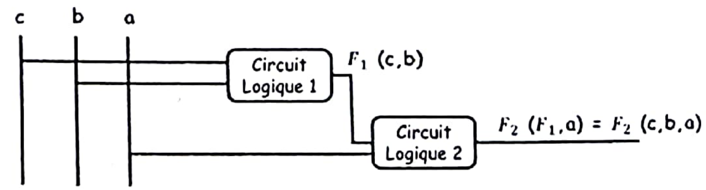
Une lampe peut être : * Allumée (1 logique)
* Eteinte (0 logique)

Une alarme peut être : * Activée (1 logique)
* Désactivée (0 logique)

Les Fonctions Logiques

- Une fonction logique est une variable logique dont la valeur dépend d'autres variables.

- C'est une *expression logique* (de valeur 0 ou 1) qui combine un ensemble de *variables booléennes* à l'aide des *opérateurs logiques* OU, ET, NON.



- *Une fonction logique* qui prend les valeurs 0 ou 1 peut être considérée comme une *variable binaire* pour une *autre fonction logique*.

Les Circuits Combinatoires

- Dans un système logique (les entrées et sorties ne peuvent prendre que (0) ou (1) comme valeur) combinatoire, les sorties ne sont fonctions que des entrées

Entrée e_i → Circuit Combinatoire → Sortie $s_i = f(e_i)$

Exemple

Soit le schéma électrique suivant

- Pour décrire le fonctionnement d'un système en cherchant l'état de la sortie pour toutes les combinaisons possibles des entrées, on utilisera « *La table de verite* ».

- *La table de vérité* est une table qui décrit toutes les combinaisons des entrées et la valeur de la fonction (sortie) pour chaque entrée

A	*l*
0	0
1	1

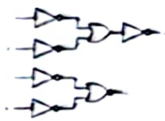
- ***Nombre d'états de la sortie dépend de nombre des entrées :***
  - Si nombre des entrées 1 → nombre d'états de la sortie est $2^1 = 2$
  - Si nombre des entrées 2 → nombre d'états de la sortie est $2^2 = 4$
  - Si nombre des entrées 3 → nombre d'états de la sortie est $2^3 = 8$

Algèbre de BOOLE

- L'algèbre de Boole est l'outil mathématique qui permet d'établir la relation entre les sorties et les entrées d'un système logique (*synthèse du système*).

- En technologie électronique:

- Les variables logiques sont généralement *des signaux « bi-tension »*.
- Les opérateurs logiques sont des circuits électroniques appelés *« portes logiques »*.



- *L'algèbre de Boole* est un ensemble de variables à *deux états* (0 et 1) dites aussi *booléennes* muni de *3 operateurs* élémentaires présentés dans le tableau suivant

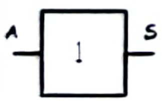
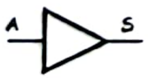
Opération logique	Addition	Multiplication	Inversion
	OU	ET	NON
Notation algebrique	*A OU B = A+B*	*A ET B = A.B*	*Non A = $\bar{A}$*

Matérialisation des Opérateurs de Base

Les Operateurs Logiques élémentaires

Porte OUI

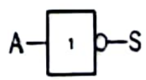
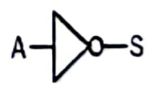
- *C'est* une porte dite unaire (ne s'applique qu'à une seule opérande).
- Elle affecte à la variable de sortie, l'état logique de la variable d'entrée.

Symboles		Equation	Table de vérité
Symbole Européen	Symbole Américain		
		$S = A$	A / S: 0 / 0; 1 / 1

A	S
0	0
1	1

Porte NON (NOT)

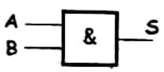
- C'est une porte à une seule entrée, elle matérialise l'opérateur inverseur.
- Elle effectue l'opération appelée *Inversion* ou *Complémentaire*.
- Elle transfert un 1 en 0 et un 0 en 1.

Symboles		Equation	Table de vérité
Symbole Européen	Symbole Américain		
		$S = \bar{A}$	

A	S
0	1
1	0

Porte ET (AND)

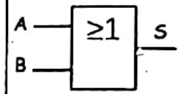
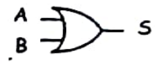
❖ La sortie est active, si les deux entrées sont actives.

<table>
<tr><th colspan="2">Symboles</th><th>Equation</th><th>Table de vérité</th></tr>
<tr><td>Symbole Européen</td><td>Symbole Américain</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td></td><td></td><td>$S = A.B$</td><td>
<table>
<tr><th>A</th><th>B</th><th>S</th></tr>
<tr><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr>
<tr><td>0</td><td>1</td><td>0</td></tr>
<tr><td>1</td><td>0</td><td>0</td></tr>
<tr><td>1</td><td>1</td><td>1</td></tr>
</table>
</td></tr>
</table>

Porte OU (OR)

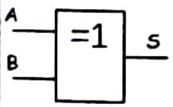
❖ L'opérateur OU est la somme logique.

❖ C'est un opérateur binaire qui qui affecte à la variable de sortie l'état 1 si et seulement si une variable d'entrée est à 1.

<table>
<tr><th colspan="2">Symboles</th><th>Equation</th><th>Table de vérité</th></tr>
<tr><td>Symbole Européen</td><td>Symbole Américain</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td></td><td></td><td>$S = A+B$</td><td>
<table>
<tr><th>A</th><th>B</th><th>S</th></tr>
<tr><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr>
<tr><td>0</td><td>1</td><td>1</td></tr>
<tr><td>1</td><td>0</td><td>1</td></tr>
<tr><td>1</td><td>1</td><td>1</td></tr>
</table>
</td></tr>
</table>

Porte OU-exclusif (XOR)

❖ Cet opérateur logique binaire ne prend la valeur 1 que si une seule des entrées est à 1.

<table>
<tr><th colspan="2">Symboles</th><th>Equation</th><th>Table de vérité</th></tr>
<tr><td>Symbole Européen</td><td>Symbole Américain</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td></td><td></td><td>$S=A\oplus B$</td><td>
<table>
<tr><th>A</th><th>B</th><th>S</th></tr>
<tr><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr>
<tr><td>0</td><td>1</td><td>1</td></tr>
<tr><td>1</td><td>0</td><td>1</td></tr>
<tr><td>1</td><td>1</td><td>0</td></tr>
</table>
</td></tr>
</table>

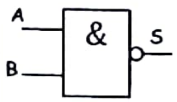
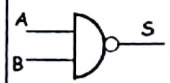
Remarque

❖ La sortie de la fonction OU-EXCLUSIF prend l'état logique 1 si un nombre impair des variables d'entrée est à l'état logique 1.

Les Opérateurs Logiques Universelles

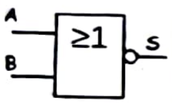
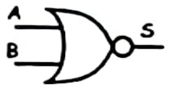
Porte NON-ET (NAND)

❖ Elle est équivalente à une porte NON suivie d'un inverseur.

<table>
<tr><th colspan="2">Symboles</th><th>Equation</th><th>Table de vérité</th></tr>
<tr><td>Symbole Européen</td><td>Symbole Américain</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td></td><td></td><td>$S=A|B$
$S=\overline{A.B}$</td><td>
<table>
<tr><th>A</th><th>B</th><th>S</th></tr>
<tr><td>0</td><td>0</td><td>1</td></tr>
<tr><td>0</td><td>1</td><td>1</td></tr>
<tr><td>1</td><td>0</td><td>1</td></tr>
<tr><td>1</td><td>1</td><td>0</td></tr>
</table>
</td></tr>
</table>

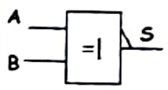
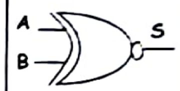
Porte NON-OU (NOR)

❖ Elle est équivalente à une porte OU suivie d'un inverseur.

Symboles		Equation	Table de vérité
Symbole Européen	Symbole Américain		
		$S=A\downarrow B$ $S=\overline{A+B}$	A B S 0 0 1 0 1 0 1 0 0 1 1 0

Porte Non OU-exclusif (XNOR)

❖ La sortie XNOR (NON-XOR, NON OU-EXCLUSIF) est simplement le complément logique de la sortie XOR. Donc, lorsque la sortie XOR est 0, la sortie XNOR est 1, et vice versa.

Symboles		Equation	Table de vérité
Symbole Européen	Symbole Américain		
		$S=\overline{A\oplus B}$	A B S 0 0 1 0 1 0 1 0 0 1 1 1

Les Lois et les règles de l'Algèbre de BOOLE

Fonctions	OU	ET	Commentaires
1 Variable	*A + A = A*	*A . A = A*	*Idempotence*
	A + 1 = 1	*A . 0 = 0*	*Elément absorbant*
	A + 0 = A	*A . 1 = A*	*Elément neutre*
	$A+\bar{A}=1$	$A.\bar{A}=0$	*Complément*
	$\bar{\bar{A}}=A$		*Involution*
2 Variables	*A + B = B + A*	*A . B = B . A*	*Commutativité*
3 Variables	*A+(B+C) = (A+B)+C = A+B+C*	*A.(B.C) = (A.B).C = A.B.C*	*Associativité*
	A+(B . C)= (A+B) . (A+C)	*A. (B+C) = (A.B) + (A.C)*	*Distributivité*

Les Théorèmes de l'Algèbre de BOOLE

❖ Pour effectuer tout calcul Booléen, on utilise, en plus des propriétés, un ensemble de théorèmes :

Théorèmes	*OU*	*ET*
De DEMORGAN	$\overline{A+B}=\bar{A}.\bar{B}$	$\overline{A.B}=\bar{A}+\bar{B}$
	Ce théorème peut être généralisé à plusieurs variables.	
	$\overline{A+B+.....+Z}=\bar{A}.\bar{B}. ... .\bar{Z}$	$\overline{A.B. ... .Z}=\bar{A}+\bar{B}+....+\bar{Z}$
D'Absorption	A+AB=A	A.(A+B)=A
D'Allègement	$A+\bar{A}B=A+B$	$A.(\bar{A}+B)=A.B$
	$A.B+\bar{A}C+BC=AB+\bar{A}C$	

Systèmes Logiques et Architecture des Ordinateurs	Série 2	Dr. Safa Teboulbi 2024-2025

Exercice 1 :

1/ Réaliser les opérateurs de base (NON, ET, OU) à l'aide des portes NAND.

Exercice 2 :

Donner le complément des équations suivantes :

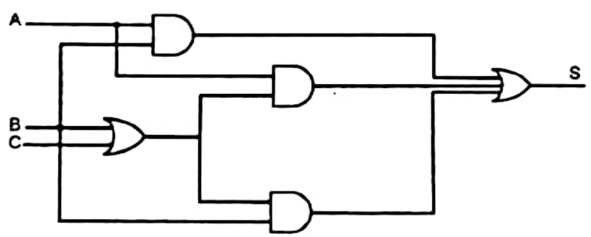
$E = a + \bar{b} + c\,\bar{b}$

$F = a\,b + c\,\bar{b} + \bar{a}\,\bar{c}$

$G = (b + \bar{c})\,\bar{a}\,b$

Exercice 3 :

Simplifier le circuit logique suivant :



Exercice 4:

Donner les schémas logiques des fonctions suivantes, en utilisant :

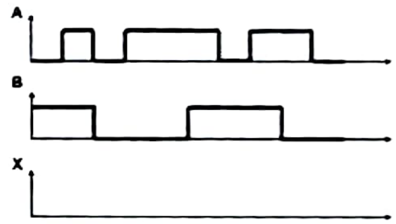
- Des portes ET, OU, et des inverseurs.
- Des portes NON-ET.
- Des portes NON-OU.

1/ $F1 = (A+B) . CD$

2/ $A . (B+\bar{C}) + \bar{B}.C$

Exercice 5:

1/ Déterminer la sortie d'une porte NON-ET ayant des entrées représentées sur la figure suivante :



2/ On applique un inverseur à l'entrée A, donner la nouvelle sortie x.

3/ Donner la sortie x si on applique un inverseur à l'entrée B.

Exercice 6 :

Soit la fonction logique définie par la table de vérité suivante :

a	*b*	*F(a,b)*
0	0	1
0	1	0
1	0	1
1	1	1

Donner le schéma de cette fonction, avec deux méthodes, en utilisant uniquement des portes NON-ET.

Exercice 7:

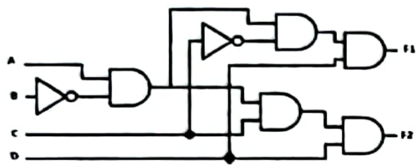
1/ Réaliser un NAND à 3 entrées avec des NAND à 2 entrées.

2/ Réaliser la fonction suivante en utilisant uniquement des NAND à 2 entrées :

$Z = x_1\,x_0 + x_3 x_2 x_1$

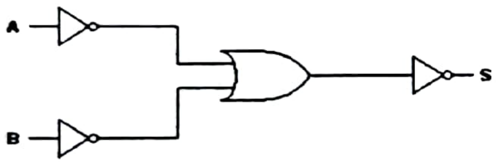
Exercice 8:

Analyser le circuit ci-dessous. Déterminer les fonctions logiques F1 et F2. Générer la table de vérité.



Exercice 9:

Déterminer l'équation du circuit de la figure suivante :



a. Dresser la table de vérité de ce circuit.

b. Quelle est la fonction logique réalisée et quel est son symbole.