
Examen : Session de contrôle

Exercice 1:

Soit le polynôme $P(X) = X^4 + 2X^3 + 2X^2 + 2X + 1$.

1. Montrer que -1 est une racine double de P .
2. Effectuer la division euclidienne de P par $X - i$.
3. Sans faire la division euclidienne de P par $X + i$, justifier pourquoi le reste est forcément nul.
4. Déterminer les racines de P dans \mathbb{C} .
5. En déduire la factorisation de P dans $\mathbb{C}[X]$ et dans $\mathbb{R}[X]$.

Exercice 2:

Soient les applications linéaires

$$\begin{array}{ccc} f : \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x, y, z) & \longmapsto & (z, x + y + z) \end{array}, \quad \begin{array}{ccc} g : \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x, y) & \longmapsto & (-y, -x + 2y, x). \end{array}$$

1. (a) Déterminer une base de $\ker f$.
(b) Utiliser le théorème du rang pour calculer $\dim \operatorname{Im} f$. En déduire que f est surjective.
2. (a) Montrer que g est injective.
(b) Utiliser le théorème du rang pour calculer $\dim \operatorname{Im} g$.
(c) Montrer que $\{(-1, 2, 0), (0, -1, 1)\}$ est une base de $\operatorname{Im} g$.
3. (a) Montrer que $f \circ g = \operatorname{Id}_{\mathbb{R}^2}$.
(b) Montrer que $\ker(g \circ f) = \ker f$ et $\operatorname{Im}(g \circ f) = \operatorname{Im} g$.