Institut Supérieur d'Informatique et de Mathématiques de Monastir

Cours : Logique Formelle

Chapitre 3: La Logique des Prédicats du Premier Ordre

Enseignante: Dr. Aljia BOUZIDI

aljia.bouzidi95@gmail.com

1ère Licence en Sciences d'Informatique

Année Universitaire :2024-2025

Objectifs

- Comprendre la logique des prédicats
- Savoir différencier entre le calcul propositionnel et le calcul des prédicats
- Connaitre les quantificateurs logiques
- Savoir les formule normales les plus usuelles
- Savoir normaliser des formules bien formées

Contenu du chapitre 3

1. **Partie 1**: Introduction à La Logique des Prédicats
2. **Partie 2:** Formalisation du Langage Naturel
3. **Partie 3:** Syntaxe du Calcul des Prédicats Formalisation du Langage Naturel
4. **Partie 4:** Sémantique du Calcul des Prédicats
5. **Partie 5:** Normalisation Des Formules

Partie 1: Introduction à La Logique des Prédicats

Contenu de la Partie 1

1. Limites de la Logique Propositionnelle
2. Prédicat
3. La Logique des Prédicats
4. Poids d’un Prédicat

Limites de la Logique Propositionnelle (1/4)

- La logique propositionnelle qui nous a permis de mettre au point une première théorie de raisonnement mais elle ne permet pas de formuler tous les raisonnements .

- Il faut aller alors plus loin que le simple calcul des propositions.

- Le calcul propositionnel **se limite** à **fournir** la structure générale ou **le squelette** des raisonnements déductifs.

- **Cependant, il ne donne aucune information sur les entités ou les objets spécifiques qui sont utilisés dans ces déductions.**

Limites de la Logique Propositionnelle (2/4)

Exemple 1:

- {n est un entier naturel pair} n'est pas une proposition
- par contre {5 est un entier naturel pair} est une proposition fausse.

➔À Chaque fois qu'on remplace n par un entier particulier on obtient une proposition

- {n est un entier naturel pair} est un prédicat.

Limites de la Logique Propositionnelle (3/4)

- **Exemple 2**:

Tous les hommes sont mortels
Socrate est un homme
Donc, Socrate est mortel

- Nous avons déjà traduit des énoncés en logique des propositions. Supposons la traduction suivante :
  - Tout homme est mortel est traduit par la proposition **a**.
  - Socrate est un homme est traduit par la proposition **b**.
  - Donc, Socrate est mortel est traduit par la proposition **c**.
- Le problème s'écrit alors, en logique des propositions, $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \rightarrow \mathbf{c}$.
- Cette traduction est correcte. Mais elle est de piètre qualité.

Limites de la Logique Propositionnelle (4/4)

Exemple2 (suite)

- Le problème précédent peut être traduit de manière adéquate en logique des prédicats :
  - **Hypothèse 1** : Quelque soit x appartenant au domaine D, si x est un homme, alors x est mortel ($\forall x\ (H(x) \rightarrow M(x))$) ;
  - **Hypothèse 2** : Socrate à la propriété d'être un homme (H(Socrate)) ;
  - **Conclusion** : Socrate à la propriété d'être mortel (M(Socrate)).
- Dans cet exemple, nous avons utilisé
  - deux prédicats (**H et M**),
  - une constante (Socrate),
  - une variable (x)
  - et le quantificateur universel ($\forall$).
- Comme nous le plus tard, ce raisonnement, ainsi formalisé en logique des prédicats, sera valide.

Prédicat (1/3) : Définition

- C'est une **formule logique** qui **dépend d'une variable libre**.
- un prédicat c'est une affirmation **qui porte sur des symboles représentant des éléments variables d'un ensemble fixe**.

  - Puisqu'un prédicat dépend d'une variable x, nous les noterons souvent **P(x)**;
  - C'est une application qui associe une proposition P(x) à chaque élément d'un ensemble **E**, cette ensemble s'appelle l'**univers** du prédicat
  - Dans le cas de l'exemple1 **E = n**

Prédicat (2/3)

Exemples:

- L'énonce suivant: **P(n)= « n est un multiple de 2 »** est un prédicat car il devient une assertion quand on donne une valeur à **n**.
  - P (**10**)= « **10** est un multiple de 2 » est une assertion vraie
  - P(**11**)= « **11** est un multiple de 2 » est une assertion fausse

- L'énoncé suivant : **P(x, A)= « x ∈ A »** est un prédicat à **deux variables**.
  - P (1, $\mathbb{N}$) est une assertion vraie
  - P$\sqrt{2}$, $\mathbb{Q}$) est une assertion fausse

Remarque: Une assertion peut s'interpréter comme un prédicat sans variable, c'est-à-dire comme un prédicat toujours vrai ou toujours faux

La Logique des Prédicats: Objectifs

- La logique des prédicats a pour but **de généraliser la logique des propositions**. On peut considérer un **prédicat** comme un **énoncé général** où **apparaissent des variables**.
- **Par exemple**:

  (1) « X est la sœur de Y »

  (2) « si X est le père de Y et Y le père de Z alors X est le grand père de Z »

  Si l'on remplace toutes les variables d'un prédicat par des valeurs définies on obtient une proposition à la quelle on pourra associer une interprétation (vrais, faux),

  Par exemple :

  X= Rim et Y = Ali

  dans (1) donne « Rim est la sœur de Ali »

Un prédicat représente donc potentiellement une classe de propositions.

Dans la logique du prédicat, on s'intéresse aux quantificateurs

Poids d'un Prédicat (1/3)

- Le **nombre des variables** d'un prédicat s'appelle **poids du prédicat**.
  - **Exemple** : p (a, b) = { le couple d'entiers naturels (a, b) tel que a+b=10}
    - si l'univers du prédicat est N^2 alors **son poids** est égal à 2
    - si l'univers du prédicat est N alors son poids est égal à 1

- Dans un prédicat de poids ***n***, si l'on affecte une valeur à l'une des variables, on obtient un prédicat de poids ***n-1***.

- Par conséquent, un **prédicat** de **poids *0*** est une **proposition**.

- Les **prédicats** qui portent sur le **même univers** peuvent être **combinés** entre eux à l'aide des connecteurs logiques ($\neg, \vee, \wedge, \rightarrow$ et $\leftrightarrow$) pour former de nouveau prédicat.

Poids d'un Prédicat (2/3)

- Le prédicat **¬ p (x)** associe à **x** la **négation du prédicat p(x)**
- Le prédicat **p ∧ q (x)** associe à x la **conjonction des prédicats p(x) et q(x)**

  on notera aussi (p ∧ q) (x)
- Le prédicat **p ∨ q (x)** associe à x la **disjonction des prédicats p(x) et q(x)**

  on notera aussi (p ∨ q) (x)

  • **Exemple** : même univers N

  p(n) = {l'entier naturel n est pair}; q(m) = {l'entier naturel m est divisible pas 5}

  - ¬ p(n) = {l'entier naturel n est impair}
  - p ∧ q (n) = {l'entier naturel n est pair, et il est divisible par 5} (poids 1)
  - p ∨q (n) = {l'entier naturel n est pair, ou il est divisible par 5} (poids 1)

Attention : si l'univers est N^2 (poids 2), il ne faut pas confondre p ∧ q (n) avec S (n,m) = {l'entier naturel n est pair et l'entier naturel m est divisible par 5}

Institut Supérieur d'Informatique et de Mathématiques de Monastir

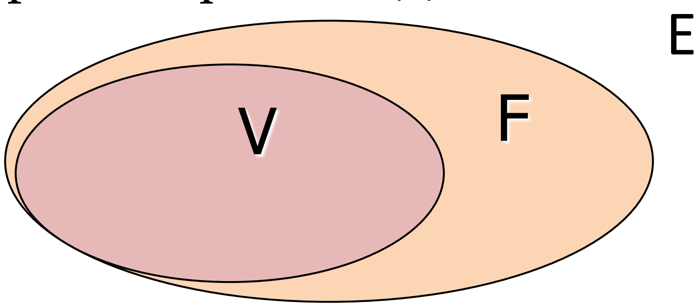
Partie 3: Formalisation du Langage Naturel

Contenu de la Partie 2

1. Introduction
2. Quantificateurs Logiques

Introduction

- Soit P un prédicat de poids 1 sur l'univers E. Comme ce prédicat associe une proposition P(x) à tout élément x de E, on peut trier les élément de E en deux sous ensembles, ceux pour lesquelles P(x) est vraie et ceux pour qui elle est fausse.



  - Donc soit l'application $v : E \longrightarrow \{V , F\}$
  - $x \longrightarrow P(x)$
  - Ce tri revient à regrouper les éléments de E pour qui v (x) = V et ceux pour qui v (x) = F

<u>Exemple</u> :

- Soit le prédicat P(n) = { l'entier naturel n est pair }
  - $\forall$n P(n) est une proposition fausse car on lit : « tout entier naturel est pair »
  - $\exists$n P(n) est une proposition vraie car on lit : « il existe un entier naturel pair »

Quantificateurs Logiques (1/7)

- **Selon Aristote:**
  - les jugements attributifs peuvent varier en quantité:
  - **Exemple**:
    - tous les hommes sont mortels (= **jugement universel**)
    - certains hommes sont chauves (=**quantité différente**)

Les jugements varient par la quantité.

- Les différents connecteurs vus dans le chapitre précédant ne peuvent pas représenter la **quantification.**

C'est pour cette raison que deux nouveaux symboles sont introduits dans la logique des Prédicats: **ce sont des quantificateurs logiques**.

Quantificateurs Logiques (2/7)

- L'affirmation « l'ensemble des x pour lesquels P(x) est vraie est E tout entier » est une proposition ; on la note $\forall x\ P(x)$

➡ on lit : quelque soit x la proposition P(x) est vrai

$\forall$: **quantificateur universel**

- L'affirmation « l'ensemble des x pour lesquels P(x) est vraie n'est pas vide » est une proposition ; on la note $\exists x\ P(x)$

➡ on lit : il existe x tel que P(x) est vraie

$\exists$: **quantificateur existentiel**

Quantificateurs Logiques (3/7) :
Le quantificateur existentiel

- Un quantificateur **existentiel** ou **particulier** signifie : « **il existe** » ou plus précisément : « **il existe au moins un** » et est noté **∃**.
- On peut écrire : **$\exists x P(x)$**
- Et on doit comprendre :
  - « il existe **au moins un x** tel que P(x) soit « vrai » (ou faux). revient à considérer que $P(a1) \vee \cdots \vee P(an)$ est vrai (ou faux), si $\{a1, \ldots, an\}$ est le domaine de x
- On peut écrire aussi : **$\exists ! x P(x)$**
- Et on doit comprendre :
  - « il existe **un et un seul** x tel que P(x) soit « vrai » ou « faux ».
- **Exemples**:
  - « **il existe** un élève de classe qui est une fille »
  - « **il existe** un élève de la classe qui n'est pas une fille »
  - Le prédicat quantifié : « $\exists\, x \in \mathbb{R}\ x^2=4$ » est vraie
  - Le prédicat quantifié : « $\exists\, !x \in \mathbb{R}\ \ln(x) = 1=4$ » est vraie

Quantificateurs Logiques (4/7) :
Le quantificateur universel

- Un quantificateur **universel** signifie : «**quelque soit**» et est noté ∀.
- On écrit : **∀xP(x)**
- Et on doit comprendre :
  - « quelque soit **x**, P(x) soit « vrai » (ou faux). revient à considérer que P(a1)∧· · · ∧P(an) est vrai (ou faux), si {a1, . . . , an} est le domaine de x
- **Exemples**:
  - « **tous** les élèves de baccalauréat passent un examen principal »
  - « **aucun** lapin ne porte de lunettes »
  - « $\forall x \in [-3,1]\ x^2 + 2x - 3 \geq 0$ » est vraie
  - « $\forall x \in \mathbb{N}\ (x-3)\, n > 0$» est fausse

Remarque : si «∃ x ∈P(x) » est vrai alors «∃x ∈P(x) » est vrai

Quantificateurs Logiques (5/7)

Exercice d'application

Soit les prédicats : $H(x) = \{ x \text{ est un homme} \}$

$M(x) = \{ x \text{ est méchant} \}$

Formuler les affirmation suivantes:

- «C'est faux que tout les hommes sont méchants »:

  $\neg(\forall x\, (H(x) \rightarrow M(x)))$

- «Seulement les hommes sont méchants » :

  $\forall x\, (M(x) \rightarrow H(x))$

- « Il existe un homme méchant » :

  $\exists x\ \ (H(x) \wedge M(x))$

- « Il n'existe pas d'homme méchant » :

  $\neg\, (\exists x\ \ (H(x) \wedge M(x)))$

Quantificateurs Logiques (6/7)

Remarques

- Soit P un prédicat dont l'univers est E = { $e_1, e_2, e_3, \ldots, e_n$ }
  - La proposition **∀xP(x)** est **vraie quand** les propositions **P(e_1) , P(e_2),……, P(e_n)** sont **toutes vraies**.

➡ ∀ x P(x) se confond avec la proposition $P(e_1) \wedge P(e_2) \wedge \ldots \wedge P(e_n)$

  - La proposition **∃ xP(x)** est **vraie** si l'une **au moins** des propositions **P(e_1) , P(e_2),……, P(e_n)** est **vraie**.

➡ ∃xP(x) se confond avec la proposition $P(e_1) \vee P(e_2) \vee \ldots \vee P(e_n)$

Quantificateurs Logiques (7/7)

Remarques (suite)

- Soit **P(x,y,z)** un prédicat de **poids 3**
  - **Q(x,z)** = ∃y P(x,y,z) est un prédicat de **poids 2**
  - **R(z)** = ∀x Q(x,z) = ∀x ∃ y P(x,y,z) est prédicat de **poids 1**

Partie 2: Syntaxe du Calcul des Prédicats

Contenu de la Partie 3

1. Alphabet
2. Termes du langage
3. Les formules en Logique des Prédicats
4. Utilisation des Quantificateurs Logiques
5. Variables Libres
6. Variables Liées

Alphabet

- L'**alphabet** du **langage du calcul des prédicats** est composé des symboles suivants :
  1. Ensemble de symboles appelé **séparateur** : «**(**», «**)**» et «**,**»
  2. Un ensemble de **constantes** : {**V**, **F**, 2,6, 23, ...}
  3. Un ensemble de **variables** : les lettres minuscules et leurs concaténations {**x**, **y**, **z**, . . .} ;
  4. Un ensemble (dénombrable) de **fonctions** {**f**, **g**, **h**, . . .} ;
  5. Un ensemble de symboles appelé **prédicat (relation)** comme les variables construites de lettres majuscules et leurs concaténations {**P**,**Q**, . . .} ;

     P(-), Q(-,-,-)

     - L'Arité est un nombre entier >0 qui représente le poid d'un prédicat.
     - Lorsque **l'Arité est fixé à 0**, le prédicat est aussi appelé **proposition**.
  6. Un ensemble de symboles appelé connecteur logique { ¬,∧ ,∨,→,↔}
  7. Deux symboles appelés **quantificateurs** :
     - ∃ : quantificateur existentiel (« il existe » : ∃xP(x))
     - ∀ : quantificateur universel (« pour tout ») : ∀xP(x))

Termes du langage (1/2)

- Les **termes** sont **construits à partir** de l'ensemble **des variables** et **des symboles de fonctions** F .
- Tout terme est construit par l'application des lois suivantes:
  - Une **constante** est un terme (qui sera interprétée par un individus fixé)
  - Les **symboles de fonctions** ayant **chacun un poids ≥ 1** sont des termes. (un nombre d'arguments fixé)
  - Une **variable** est un terme (qui varie dans l'ensemble des individus de l'interprétation)
  - Si f est un symbole fonctionnel **d'arité** (de poids) **n** et si $t_1, t_2, \ldots, t_n$ sont n termes, alors f $(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ est un terme.
- **Exemple :** xi, f1 (xi), g2(x, f1 (xi)) sont des termes

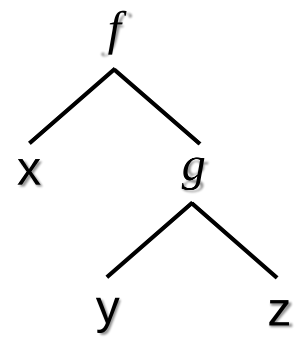
Un terme est dit **clos** s'il ne contient **aucune variable**.

Termes du langage (2/2)

Exemple :

- f (x, g (y , z)) est un terme si f et g sont des symboles de fonction de poids 2.

Arbre de décomposition :



- f (5, 3) est un terme clos
- f (x, g (y1, y2)) est un terme

Les formules en Logique des Prédicats

- Une formule bien formée (ou formule simplement) en logique des prédicats se construit **similairement à une formule en logique des propositions**. En fait un prédicat va jouer un rôle analogue à une proposition. On doit **en plus prendre en compte les quantifications** :
  - Une **formule atomique** est une formule
    - A est une formule atomique(ou atome) ssi A s'écrit sous la forme P($t_1, t_2 ....,t_n$) avec
      - ✓ P est un symbole de prédicat de poids n (P∈ P_n)
      - ✓ $t_1, t_2 ....,t_n$ sont des termes
      - ✓ Si n = 0, une formule atomique est une variable propositionnelle
  - Si A est une formule, alors **(¬A)** est une formule.
  - Si A et B sont deux formules, **A ∨ B, A ∧ B, A → B et A↔B** sont des formules.
  - Si A est une formule et x est une variable, alors **∀x. A et ∃x. A** sont des formules.

Utilisation des Quantificateurs Logiques (1/5):

Revenons au deux quantificateurs (existentiel et universel) développer précédemment. Nous rappelons les définitions de chacun:

- $\exists$: « existe au moins un»
- $\exists!$: « existe un et un seul »
- $\forall$: « quelque soit, ou pour tout »

Utilisation des Quantificateurs Logiques (2/5): Quantificateurs Imbriqués

- Notons que l’ordre des quantificateurs est important:
  - En effet, « tout le monde aime quelqu’un »

    s’écrirait $\forall x.\ (\exists y. Aime(x, y))$,

  - qui n’a pas exactement le même sens que « il y a quelqu’un qui est aimé par tout le monde »

    qui s’écrirait $\exists y\ .\ (\forall x\ .\ Aime(x, y))$.

Utilisation des Quantificateurs Logiques (3/5): Quantificateurs Imbriqués(suite)

- On a les lois de Morgan entre les quantifications :

$$\neg \forall x.F \equiv \exists x. \neg F$$

$$\neg \exists x.F \equiv \forall x. \neg F$$

$$\forall x.F \equiv \neg \exists x. \neg F$$

$$\exists x.F \equiv \neg \forall x. \neg F$$

Utilisation des Quantificateurs Logiques (4/5): Quantificateurs Imbriqués (suite)

Illustration:

- soit le prédicat Aime (A, B) : « A aime B »

  - « Tout le monde déteste les brocolis » revient au même que « Il n'existe personne qui aime les brocolis »:

    $$\forall x.\ \neg Aime(x,brocolis) \equiv \neg \exists x.\ Aime(x,bricolis)$$

  - « Tout le monde aime les glaces » et « il n'y a personne qui n'aime pas les glaces » sont équivalentes:

    $$\forall x.\ Aime(x,glaces) \equiv \neg \exists\ x.\ \neg\ Aime(x,glaces)$$

Utilisation des Quantificateurs Logiques (5/5): Remarques

- On traduit généralement certaines expressions en logique du prédicat comme suite:

  - « Tous les A sont B »: $\forall x(A(x) \rightarrow B(x))$
  - « Seuls les A sont B »: $\forall x(B(x) \rightarrow A(x))$
  - « Aucun A n'est B »: $\forall x\,(A(x) \rightarrow \neg\, B(x)$
  - « Quelques A sont B » : $\exists\, x(A(x) \wedge B(x))$

Exercices Applicatifs (1/3)

<u>Exercice 1:</u> Formuler en calcul des prédicats les phrases suivantes:

1. les baleines sont des mammifères.
2. les entiers sont pairs ou impairs
3. Il existe un entier pair

<u>Correction</u>:

1. $\forall$ x. (Baleine(x) $\rightarrow$ Mamm(x))
2. $\forall$ x. (Entier(x) $\rightarrow$ (Pair(x) $\vee$ Impair(x)))
3. $\exists$ x. (Entier(x) $\wedge$ Pair(x))

Exercices Applicatifs (2/3)

Exercice 2: Exprimer les énoncés suivants en logique du premier ordre

1. « Tous les lions sont féroces. »
2. « Quelques femmes ne boivent pas de café »
3. « Tous les singes sont malicieux »

Correction:

1. $\forall$ x. (Lion(x) $\rightarrow$ Féroce(x))
2. $\exists$x. (Femme(x)$\wedge$($\neg$ Café(x))
3. $\forall$x. (Singes(x) $\rightarrow$ Maliceux (x))

Exercices Applicatifs (3/3)

Exercice 3: Exprimer les énoncés suivants en logique du premier ordre

1. « Certains étudiants assistent à tous les cours »
2. Il n'ya pas un homme qui marche
3. « Aucun étudiant n'assiste à un cours intéressant»

Correction:

1. $\exists$x. (Etudiant(x)$\wedge$ ($\forall$y.cours(y) $\wedge$ assite(x,y))
2. $\neg\exists$x. (homme(x)$\wedge$ (marche (x)) = $\forall$x. (homme(x) $\rightarrow$ $\neg$marche(x))= $\forall$x ($\neg$ homme (x) v $\neg$marche (x))
3. $\forall$x. (Etudiant(x)$\rightarrow$ $\neg$(assiste (x, y) $\wedge$ $\neg$ interessant(y)))

Dans la seconde formule, on constate que la variable y n'est pas quantifiée: une telle variable est **dite libre**. Une variable quantifiée est dite **liée**.

Variables Libres (1/4)

Soit A une formule. L'ensemble des **variables libres** de A, noté Var(A), est définie comme suit :

- Si A est un atome, de forme $P(t_1, t_2 ....,t_n)$alors :

$$\mathrm{Var(A)} = \mathrm{Var}\big(\mathrm{P}(t_1, t_2 ....,t_n)\big) = \mathrm{Var}(t_1)\mathrm{U\ Var}(, t_2)\mathrm{U} \dots \dots \mathrm{U\ Var}(t_n)$$

- Si $\mathrm{A} = \neg\mathrm{B}$ alors $\mathrm{Var(A)} = \mathrm{Var}(\neg\mathrm{B}) = \mathrm{Var(B)}$
- Si $\mathrm{A} = \mathrm{B} \# \mathrm{C}$ avec $\# \in \{\vee, \wedge, \rightarrow, \Leftrightarrow\}$ alors :

$$\mathrm{Var(A)} = \mathrm{Var(B \# C)} = \mathrm{Var(B)\ U\ Var(C)}$$

- Si $\mathrm{A} = \exists \mathrm{x\ B}$ ou $\mathrm{A} = \forall \mathrm{x\ B}$ alors :

$$\mathrm{Var(A)} = \mathrm{Var}(\exists \mathrm{x\ B}) = \mathrm{Var}(\forall \mathrm{x\ B}) = \mathrm{Var(B)} \setminus \{\mathrm{x}\}$$

Variables Libres (2/4)

- Chacune des fois où une variable **x apparaît** dans une formule A est **appelée une occurrence de x dans A**.
- Toutes les **occurrences** des variables d'un terme sont **des variables libres** de t.

c.à.d :

1. $Var(x) = \{x\}$
2. $Var(c) = \{ \}$ (c : constante)
3. $Var(f(t_1, t_2, t_3 \ldots t_n)) = Var(t_1) \cup Var(t_2) \cup \ldots \cup Var(t_n)$

Une formule de A est **dite close** si **Var(A) = ∅** (*A n'a pas de variable libre*)

Variables Libres (3/4)

Exemples:

1. A: $\forall x \exists y\, P(f(x,y),z)$

   $\text{Var}(A) = \text{Var}(\exists y\, P(f(x,y),z)) \setminus \{x\}$
   $= \text{Var}(P(f(x,y),z) \setminus \{y\}) \setminus \{x\}$
   $= \text{Var}((\text{Var}(f(x,y)) \cup \text{Var}(z)) \setminus \{y\}) \setminus \{x\}$
   $= ((\{x,y\} \cup \{z\}) \setminus \{y\}) \setminus \{x\}$
   $= (\{x,y,z\} \setminus \{y\}) \setminus \{x\}$
   $= (\{x,z\}) \setminus \{x\}$
   $= \{z\}$

   Donc A n'est pas close

2. B: $\forall x\, P(x)$

   $\text{Var}(B) = \text{Var}(\forall x\, P(x)) = \text{Var}(P(x)) \setminus \{x\} = \{x\} \setminus \{x\} = \emptyset$

   Donc B est close

Variables Libres (4/4)

Exemples (suite):

3. A: $\left(\forall x\,(P(x,y) \rightarrow Q(x))\right) \wedge \left(\forall y\ \left(\neg P(x,y) \wedge (\exists z\, Q(z))\right)\right)$

- $Var(B) = Var\big(P(x,y) \rightarrow Q(x)\big) \setminus \{x\} = \{\, x, y, x \,\} \setminus \{x\} = \{y\}$
- $Var(C) = Var\left(\neg P(x,y) \wedge (\exists z\, Q(z))\right) \setminus \{\, y \,\}$

  $Var(C) = \left(Var\big(\neg P(x,y)\big) U\ Var(Q(z) \setminus \{\, z \,\})\right) \setminus \{\, y \,\}$

  $Var(C) = \big(\{\, x, y \,\} U\ (\{\, z \,\} \setminus \{\, z \,\})\big) \setminus \{y\}$

  $Var(C) = \{\, x, y \,\} \setminus \{y\} = \{\, x \,\}$
- $Var(A) = Var(B)\ U\ Var(C) = \{\, x, y \,\}$

Variables Liées (1/4)

Soit A une formule. L'ensemble des **variables liées** de A, noté BVar(A) (B pour **Bound**), est définie comme suit :

- Si A est un atome, $\mathrm{BVar}(A) = \emptyset$
- Si $A = \neg B$ alors $B\mathrm{Var}(A) = B\mathrm{Var}(\neg B) = B\mathrm{Var}(B)$
- Si $A = B \# C$ avec $\# \in \{\vee, \wedge, \rightarrow, \leftrightarrow\}$ alors :

$$B\mathrm{Var}(A) = B\mathrm{Var}(B \# C) = B\mathrm{Var}(B) \cup B\mathrm{Var}(C)$$

- Si $A = \exists x\, B$ ou $A = \forall x\, B$ alors :

$$B\mathrm{Var}(A) = B\mathrm{Var}(\exists x\, B) = B\mathrm{Var}(\forall x\, B) = B\mathrm{Var}(B) \cup \{x\}$$

Variables Liées (2/4)

Exemple:

$$A: \left(\forall x\,(P(x,y) \rightarrow Q(x))\right) \wedge \left(\forall y\ \left(\neg P(x,y) \wedge (\exists z\, Q(z))\right)\right)$$

- $BVar(B) = BVar(P(x,y) \rightarrow Q(x)\,)\ U\ \{x\}$

  $= \left(BVar(P(x,y))U\ BVar(Q(x))\right)U\{x\}$

  $= (\emptyset\ U\ \emptyset\,)\ U\ \{\,x\,\} = \{\,x\,\}$

- $BVar(C) = BVar\left(\neg P(x,y) \wedge (\exists z\, Q(z))\right) U\{\,y\,\}$

  $BVar(C) = \left(BVar(\neg P(x,y))U\ (BVar(Q(z))U\{\,z\,\})\right) U\{\,y\,\}$

  $BVar(C) = (\emptyset\ U\ (\emptyset\ U\ \{z\}))U\{y\} = \{z, y\}$

- $BVar(A) = BVar(B)\ U\ BVar(C) = \{\,x, y, z\,\}$

Variables Liées (3/4)

Exercice Applicatif:

- Donner les variables libres pour chacune des formules suivantes:

1. $\forall x\,(P(x) \rightarrow \exists\, y\, Q(x,y))$
2. $(\exists\, y\, Q(x,y)) \rightarrow \forall x\, P(x)$
3. $\exists\, x\, (\neg(\exists\, y\, P(x,y)) \rightarrow (\exists\, z\, Q(z) \rightarrow R(x)))$
4. $(\exists\, x\, (\neg(\exists\, y\, P(x,y))\,) \rightarrow (\exists\, z\, Q(z) \rightarrow R(x)))$
5. $((\forall\, x\, P(x) \rightarrow\ \exists\, y\, Q(y)) \rightarrow\ \exists\, z\, R(z)) \rightarrow\ \exists\, u\, S(u)$

Variables Liées (4/4)

Exercice Applicatif:

- Donner les variables liées pour chacune des formules suivantes:

1. $\forall x\ (P(x) \rightarrow \exists\ y\ Q(x,y))$
2. $(\exists\ y\ Q(x,y)) \rightarrow \forall x\ P(x)$
3. $\exists\ x\ (\neg(\exists\ y\ P(x,y)) \rightarrow (\exists\ z\ Q(z) \rightarrow R(x)))$
4. $(\exists\ x\ (\neg(\exists\ y\ P(x,y))\ ) \rightarrow (\exists\ z\ Q(z) \rightarrow R(x)))$
5. $((\forall\ x\ P(x) \rightarrow\ \exists\ y\ Q(y)) \rightarrow\ \exists\ z\ R(z)) \rightarrow\ \exists\ u\ S(u)$

Fin

aljia.bouzidi95@gmail.com