$E_\lambda(u) = \ker(u - \lambda \, id)$

$E_0(u) = \ker u$

$= \{ a = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \text{ tq } u(a) = 0 \}$

$a = (x,y,z) \in E_0(u) \iff u(a) = 0$

$\iff u(x,y,z) = 0$

$\iff \begin{cases} x+y+z=0 \\ x+y+z=0 \\ x+y+z=0 \end{cases} \iff x+y+z=0$

$\iff x = -y-z$

$\iff a = (x,y,z) = (-y-z, y, z)$

$\iff a = y\underbrace{(-1,1,0)}_{v_1} + z\underbrace{(-1,0,1)}_{v_2}$

cl : $E_0(u) = \mathrm{Vect}(v_1, v_2)$.

*/ $E_3(u) = \ker(u - 3\, id)$

$= \{ a = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \text{ tq } u(a) = 3a \}$

$a = (x,y,z) \in E_3(u) \iff u(a) = 3a$

$\iff u(x,y,z) = 3(x,y,z)$

$\iff \begin{cases} x+y+z = 3x \\ x+y+z = 3y \\ x+y+z = 3z \end{cases} \iff x = y = z$

$\iff a = (x,y,z) = (x,x,x) = x\underbrace{(1,1,1)}_{v_3}$

$E_3(u) = \mathrm{Vect}(v_3)$.

$B' = (v_1, v_2, v_3)$

$$\det_{Bc}(B') = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} v_1 & v_2 & v_3 \end{array} \\ \begin{vmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}_{Bc} \end{array}$$

$L_2 \leftarrow L_2 + L_1$

$$= \begin{vmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} \text{ dev \% à } C_1$$

$= -1(-1-2) = 3 \neq 0.$

Chapitre : Série Entière

Définition

On appelle série entière, toute série de la forme $\sum_n a_n z^n$ avec $(a_n)_n$ est une suite dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et $z \in \mathbb{C}$.

Exemple

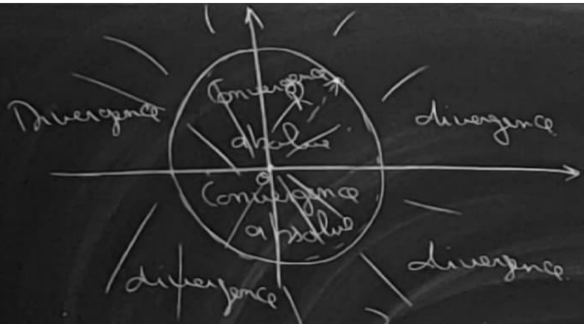
$\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n} z^n$, $\sum_{n\geq 0} z^n$ sont des séries entière.

Rayon de convergence

Théorème

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière il existe un réel $R \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ tel que :

1) $\sum_n a_n z^n$ converge absolument si $|z| < R$
2) La série $\sum_n a_n z^n$ diverge si $|z| > R$



$z = x + iy \in \mathbb{C}$

$\sum_n a_n z^n$

Remarques

* Si $|z| = R$ on ne peut rien dire.
* $D(0, R) = \{ z \in \mathbb{C} \ / \ |z| < R \}$ est appelé le disque convergence.
* Technique de calcul :

Proposition :

Soit $\sum_n a_n z^n$ une série entière

Si $\lim_{n \to +\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \ell$ alors $R = \frac{1}{\ell}$

(avec la convention $\frac{1}{0^+} = +\infty$ et $\frac{1}{+\infty} = 0$)

Exemple : Déterminer le rayon de convergence de

$$\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2} z^n \quad (z \in \mathbb{C})$$

Solution : on a $a_n = \frac{1}{n^2}$, $\forall n \geq 1$

$$\lim_{n\to+\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{1}{(n+1)^2}}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^2}{n^2} \cdot \frac{1}{(\ldots)}$$

Donc le rayon de convergence

$$R = \frac{1}{l} = \frac{1}{1} = 1$$

Proposition 2 : (règle de Cauchy).

Soit $\sum_n a_n z^n$ une série entière.

$$\boxed{\text{Si } \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = l \text{ alors } R = \frac{1}{l}}$$

Exemple : Déterminer le rayon de convergence de $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^{3n}} z^n$.

Solution : on a $a_n = \frac{1}{n^{3n}}$

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to+\infty} |a_n|^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{n^{3n}}\right)^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^{\ldots}} = 0$$

Donc $R = +\infty$ $\left(\frac{1}{0}\right)$

Théorème :

Soit $\sum_n a_n z^n$ et $\sum_n b_n z^n$ deux séries entières de rayon de convergence R_a et R_b respectivement

1) Soit $\lambda \in \mathbb{R}^*$ (ou bien $\mathbb{C}^*$) le rayon de convergence de $\sum_n \lambda a_n z^n$ est égale à R_a.

2) Le rayon de convergence de $\sum_n (a_n + b_n) z^n$ noté R_{a+b} est égale à :

$$R_{a+b} = \begin{cases} \min(R_a, R_b) \ ; & \text{si } R_a \neq R_b \\ \text{supérieur strictement à } R_a \ ; & \text{si } R_a = R_b \end{cases}$$

Exemple : Déterminer le rayon de convergence de $\sum_{n \geq 1} \left(\frac{\sqrt{n}}{n!} + \frac{1}{2^n} \right) z^n$.

Solution : $a_n = \frac{\sqrt{n}}{n!}$, $b_n = \frac{1}{2^n}$, $n \geq 1$

$$\lim_{n \to +\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{n+1}{n} \right)^{1/2} = 0$$

donc $R_a = \frac{1}{0} = +\infty$ (le rayon de convergence de $\sum a_n z^n$

$b_n = \frac{1}{2^n}$

$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|b_n|} = \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{2^n}\right)^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{2}$

Donc $R_b = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$ (le rayon de convergence de $\sum_n b_n z^n$)

Donc le rayon de convergence ($R_a \neq R_b$) de $\sum_n \left(\frac{\sqrt{n}}{n!} + \frac{1}{2^n}\right) z^n = \min(+\infty, 2) = 2.$

* Developpement d'une fonction sous forme d'une série entière:

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ (I est un intervalle centré en 0)

* On dit que f est developpable en somme d'une série entière ssi

$$f(x) = \sum_n a_n x^n, \ \forall x \in I \cap]-R, R[$$

avec R est le rayon de convergence de $\sum_n a_n x^n$.

Proposition : Si $f(x) = \sum_n a_n x^n$ alors

$$a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$$

Proposition : le developpement en série entière de f s'il existe est unique

Developpement usuelles

$$e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\cos(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\sin(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n, \quad \forall |x| < 1 \ (\text{car } R = 1)$$

$$\ln(1+x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1}, \quad \forall |x| < 1$$