Série 4

EX3 :

$m \in \mathbb{R}$, $A_m = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 4 \\ m & -m & -1 \\ -m & 2 & 3-m \end{pmatrix}$

1] P_m le poly caract de A_m.

$$P_m(x) = \det(A_m - x I_3) = \begin{vmatrix} 3-x & 4 & 4 \\ m & -m-x & -1 \\ -m & 2 & 3-m-x \end{vmatrix}$$

$L_3 \leftarrow L_3 + L_2$

$$P_m(x) = \begin{vmatrix} 3-x & 4 & 4 \\ m & -m-x & -1 \\ 0 & 2-m-x & 2-m-x \end{vmatrix}$$

$$= (2-m-x) \begin{vmatrix} 3-x & 4 & 4 \\ m & -m-x & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$(C_2 \leftarrow C_2 - C_3)$

$$P_m(x) = (2-m-x) \begin{vmatrix} 3-x & 0 & 4 \\ m & -m+1-x & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$ dev % à L_3

$$= (2-m-x)(3-x)(-m+1-x)$$

$Sp(A_m) = \{2-m, 3, 1-m\}$

2] A_m est inversible $\iff \det(A_m) \neq 0$.

$\iff 0 \notin Sp(A_m)$.

$\Leftrightarrow \begin{cases} 2-m \neq 0 \\ \text{et} \\ 1-m \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 2 \\ \text{et} \\ m \neq 1. \end{cases}$

A_m est inv $\Leftrightarrow m \in \mathbb{R} \setminus \{1, 2\}$.

3] Soit $m \in \mathbb{R} \setminus \{-1, -2\}$.

M que A_m est diag<u>ble</u>.

on a : $Sp(A_m) = \{2-m, 3, 1-m\}$.

on a :

*/ $2-m = 3 \Leftrightarrow m = -1$

Comme $m \in \mathbb{R} \setminus \{-1, -2\}$ alors $2-m \neq 3$.

*/ $1-m = 3 \Leftrightarrow m = -2$

Comme $m \in \mathbb{R} \setminus \{-1, -2\}$ alors $1-m \neq 3$.

et on a : $1-m \neq 2-m$, $\forall m$

<u>cl</u> : A_m admet 3 v.p distincts et $A_m \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ $\Rightarrow$ A_m est diag<u>ble</u>

4] $\boxed{m = 0}$, $A = A_0 = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

$P_A(x) = (2-x)(3-x)(1-x)$.

$Sp(A) = \{1, 2, 3\}$.

(a) Diagonaliser A c'est donner D diagonale, P inversible tq $A = P.D.P^{-1}$.

Déterminons les sous espaces propres :

$$E_1(A) = \ker(A - I_3) = \left\{ X = \begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix} \text{ tq } AX = X \right\}.$$

$$X = \begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix} \in E_1(A) \iff AX = X$$

$$\iff \begin{pmatrix} 3 & 4 & 4\\ 0 & 0 & -1\\ 0 & 2 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix} \iff \begin{cases} 3x+4y+4z = x & (1)\\ -z = y & (2)\\ 2y+3z = z & (3)\end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} (2)\ ;\ z = -y.\\ (3)\ ;\ z = -y\\ (1)\ ;\ x = 0. \end{cases}$$

$$\iff X = \begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0\\ +y\\ -y\end{pmatrix} = y\begin{pmatrix} 0\\ 1\\ -1\end{pmatrix}.$$

$$= y\, V_3 .$$

$$E_1(A) = \text{Vect}(V_2)$$

$$V_2 = \begin{pmatrix} 0\\ 1\\ -1\end{pmatrix}.$$

$$E_2(A) = \text{Vect}\begin{pmatrix} 4\\ 1\\ -2\end{pmatrix} = \text{Vect}(V_3),\quad V_3 = \begin{pmatrix} 4\\ 1\\ -2\end{pmatrix}$$

$$E_3(A) = \text{Vect}\begin{pmatrix} 1\\ 0\\ 0\end{pmatrix},\quad V_1 = \begin{pmatrix} 1\\ 0\\ 0\end{pmatrix}$$

$$= \text{Vect}(V_1).$$

d : $A = P \cdot D \cdot P^{-1}$

avec
$$D = \begin{array}{c} \begin{matrix} AV_1 & AV_2 & AV_3 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} \; & \; & \; \end{pmatrix} \end{array} \begin{matrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{matrix}$$

$$P = \begin{array}{c} \begin{matrix} V_1 & V_2 & V_3 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} \; & \; & \; \end{pmatrix} \end{array} \; BC$$

$V_1 \in E_3(A) \Rightarrow AV_1 = 3V_1.$

$V_2 \in E_1(A) \Rightarrow AV_2 = V_2$

$V_3 \in E_2(A) \Rightarrow AV_3 = 2V_3.$

par suite $D = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}$.

Rque : le calcul de P^{-1} n'est pas demandé

$\boxed{4}$ $\underline{m = 0}$, $A = A_0 = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

(b) $m = 0 \in \mathbb{R} \setminus \{1, 2\}$ d'après 2) A est inv.

on a : $A = P \cdot D \cdot P^{-1}$.

$$\Rightarrow A^{-1} = (P \cdot D \cdot P^{-1})^{-1} = (P^{-1})^{-1} \cdot D^{-1} \cdot P^{-1}$$
$$= P \cdot D^{-1} \cdot P^{-1}.$$

$$D = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \Longrightarrow D^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

$$A^{-1} = P \cdot D^{-1} \cdot P^{-1}.$$

$$Sp(A^{-1}) = Sp(D^{-1}) = \left\{ \frac{1}{3}, 1, \frac{1}{2} \right\}.$$

Comme $P = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} V_1 & V_2 & V_3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} \boxed{} & \boxed{} & \boxed{} \end{pmatrix}_{Bc} \end{array}$

Ainsi $E_{\frac{1}{3}}(A^{-1}) = \mathrm{Vect}(V_1)$, $V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$E_1(A^{-1}) = \mathrm{Vect}(V_2)$, $V_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

$E_{\frac{1}{2}}(A^{-1}) = \mathrm{Vect}(V_3)$, $V_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$.

$$D^{-1} = \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} A^{-1}V_1 & A^{-1}V_2 & A^{-1}V_3 \end{array} \\ & \begin{pmatrix} 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{array}{c} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{array} \end{array}$$

Ecrire : $A^{-1} = P \cdot D^{-1} \cdot P^{-1}$

c'est diagonaliser A^{-1}.

(c)

$$N = 2A + A^{-1} + 3 I_3.$$

On a :

$A = P \cdot D \cdot P^{-1}$

$A^{-1} = P \cdot D^{-1} \cdot P^{-1}.$

$I_3 = P \cdot P^{-1}.$

$N = 2 \cdot P \cdot D \cdot P^{-1} + P \cdot D^{-1} \cdot P^{-1} + 3 P \cdot P^{-1}$

$= P \underbrace{\left(2D + D^{-1} + 3 I_3 \right)}_{\Delta} P^{-1}$

$N = P \cdot \Delta \cdot P^{-1}$.

$\Delta = 2D + D^{-1} + 3 I_3 = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

$\Delta = \begin{pmatrix} \frac{28}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{15}{2} \end{pmatrix}$ est diagonale.

$N = P \cdot \Delta \cdot P^{-1}$

$P = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} v_1 & v_2 & v_3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} \boxed{} & \boxed{} & \boxed{} \end{pmatrix}_{B_C} \end{array}$

N est diag^{ble}, $Sp(N) = \left\{ \frac{28}{3}, 6, \frac{15}{2} \right\}$

$E_{\frac{28}{3}}(N) = Vect(v_1)$

$E_6(N) = Vect(v_2)$

$E_{\frac{15}{2}}(N) = Vect(v_3)$.

(d) on a :

$A = P \cdot D \cdot P^{-1}$.

$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}$,

$A^n = P \cdot D^n \cdot P^{-1}$

$D = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow D^n = \begin{pmatrix} 3^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}$

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}.$$

$$P^{-1} = \frac{1}{\det P} \, {}^{t}(\mathrm{com}\, P).$$

$$\mathrm{com}\, P = \begin{pmatrix} +\Delta_{11} & -\Delta_{12} & +\Delta_{13} \\ -\Delta_{21} & +\Delta_{22} & -\Delta_{23} \\ +\Delta_{31} & -\Delta_{32} & +\Delta_{33} \end{pmatrix}$$

$$\Delta_{11} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} = -1, \quad \Delta_{12} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = 0, \quad \Delta_{13} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Delta_{21} = \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} = 4, \quad \Delta_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = -2, \quad \Delta_{23} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -1$$

$$\Delta_{31} = \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -4, \quad \Delta_{32} = \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1, \quad \Delta_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

$$\mathrm{com}\, P = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -4 & -2 & +1 \\ -4 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\det P = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \end{vmatrix} \text{ dev \% à } C_1$$

$$= -1.$$

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 4 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A^n = P \cdot D^n \cdot P^{-1}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 4 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3^n & 4 \cdot 3^n & 4 \cdot 3^n \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & -2^n & -2^n \end{pmatrix}$$

$$A^n = \begin{pmatrix} 3^n & 4 \cdot 3^n - 2^{n+2} & 4 \cdot 3^n - 2^{n+2} \\ 0 & 2 - 2^n & 1 - 2^n \\ 0 & -2 + 2^{n+1} & -1 + 2^{n+1} \end{pmatrix}.$$

$\boxed{5}$ $(x_n)_n, (y_n)_n, (z_n)_n$ des suites réelles

Vérifiant : $x_0 = y_0 = z_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$

$$\begin{cases} x_{n+1} = 3x_n + 4y_n + 4z_n \\ y_{n+1} = x_n - y_n - z_n \\ z_{n+1} = -x_n + 2y_n + 2z_n. \end{cases}$$

on pose $X_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix}$

$$X_{n+1} = \begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \\ z_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 4 \\ 1 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix}$$

$$X_{n+1} = A_1 \cdot X_n$$

<u>Rque</u> : $\boxed{X_{n+1} = A \cdot X_n}$

par récurrence on Π.pue

$$\boxed{X_n = A^n \cdot X_0}$$

avec $X_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$$\begin{cases} x_{n+1} = 3x_n + 4y_n + 4z_n \\ y_{n+1} = -z_n \\ z_{n+1} = 2y_n + 3z_n . \end{cases}$$

soit $X_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix}$.

$$X_{n+1} = \begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \\ z_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix}$$

$X_{n+1} = A_0 \cdot X_n$.

$X_{n+1} = A X_n$.

$$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix} = X_n = A^n \cdot X_0 = \begin{pmatrix} 3^n & 4 \cdot 3^n - 2^{n+2} & 4 \cdot 3^n - 2^{n+2} \\ 0 & 2 - 2^n & 1 - 2^n \\ 0 & -2 + 2^{n+1} & -1 + 2^{n+1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

d: $\begin{cases} x_n = 3^n + 4.3^n - 2^{n+2} + 4.3^n - 2^{n+2} \\ y_n = 2 - 2^n + 1 - 2^n \\ z_n = -2 + 2^{n+1} - 1 + 2^{n+1}. \end{cases}$

$\boxed{6}$ $m = -1$

$$M = A_{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 4 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

$P_M(x) = (3-x)^2(2-x).$

3 v.p double
2 v.p simple.

(a) $m = -1 \in \mathbb{R} \setminus \{1, 2\}$
d'après a) M est inv.

Théo de Cayley-Hamilton

$P_M(x) = (3-x)^2(2-x)$
$= (x^2 - 6x + 9)(2-x)$
$= -x^3 + 8x^2 - 21x + 18.$

T.C-H: $P_M(M) = 0$

$P_M(M) = -M^3 + 8M^2 - 21M + 18I_3$

$P_M(M) = 0 \Longrightarrow$
$-M^3 + 8M^2 - 21M + 18I_3 = 0$
$\Longrightarrow I_3 = \frac{1}{18}\left[M^3 - 8M^2 + 21M\right]$
$= \frac{1}{18} M \left[M^2 - 8M + 21I_3\right]$

$$M^{-1} = \frac{1}{18}\left[M^2 - 8M + 21 I_3\right]$$

(b) Déterminons $E_3(M)$

$E_3(M) = \mathrm{Ker}(M - 3I_3)$

$= \left\{ X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \text{ tq } MX = 3X \right\}$

$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_3(M) \iff MX = 3X$

$$\iff \begin{cases} 3x + 4y + 4z = 3x \\ -x + y - z = 3y \\ x + 2y + 4z = 3z \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} y = -z \\ x = -2y - z = -y \\ x = -y \end{cases}$$

$\iff X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y \\ y \\ -y \end{pmatrix} = -y \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$E_3(M) = \mathrm{Vect}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$\dim E_3(M) = 1 \neq 2 = m_3$

Cl : M n'est pas diag^{ble}.

comme $P_M(x) = (3-x)^2(2-x)$ est Scin dé $\mathbb{R}$

alors M est trig^{ble}.

REPUBLIQUE TUNISIENNE

MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITÉ DE MONASTIR

Institut Supérieur d'Informatique et de Mathématiques de Monastir

Réservé à l'administration

Ne pas inscrire le nom ici

Signature lisibles des surveillants

$m = -1$, $M = A_{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 4 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$

$P_{A_{-1}}(x) = (3-x)^2(2-x)$.

c°/ $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3) \;/\; M = mat(f, B_c)$.

Déterminons $B = (V_1, V_2, V_3)$ une base de $\mathbb{R}^3$ tq

$f(V_1) = 2V_1$

$f(V_2) = 3V_2$

$f(V_3) = V_2 + 3V_3$.

On a $f(V_1) = 2V_1 \Rightarrow V_1 \in E_2(f)$

$f(V_2) = 3V_2 \Rightarrow V_2 \in E_3(f)$

Déterminons les sous-espaces propres de f:

$E_3(f) = \{a = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;/\; f(a) = 3a\}$.

$a = (x,y,z) \in E_3(a) \Leftrightarrow f(a) = 3a$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cancel{3x} + 4y + 4z = \cancel{3x} \\ -x + y - z = 3y \\ x + 2y + 4z = 3z \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = -z \\ x = (y-z) - 3y = -2y \\ \qquad = -y \end{cases}$$

$\Leftrightarrow a = (x,y,z) = (-y, y, -y)$

$= -y(+1,-1,+1) \; ; \; y \in \mathbb{R}.$

$\Rightarrow E_3(f) = \text{vect}\left(V_2 = (+1,-1,+1)\right),$

de m̂ on détermine $E_2(f)$:

$E_2(f) = \text{vect}\left(V_1 = (0,1,-1)\right).$

. cherchons V_3 / $f(V_3) = V_2 + 3V_3$.

soit $V_3 = (x,y,z)$.

$$f(V_3) = V_2 + 3V_3 \Leftrightarrow \begin{cases} 3x + 4y + 4z = 3x+1 \\ -x + y - z = 3y - 1 \\ x + 2y + 4z = 3z + 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4y + 4z = 1 \\ x = -2y - z + 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{1}{4} - z \\ x = \frac{1}{2} + z \end{cases}$$

$\Leftrightarrow V_3 = (x, y, z) = \left(\frac{1}{2} + z, \frac{1}{4} - z, z\right); z \in \mathbb{R}$.

Le système admet une infinité de sol^s,

On choisit $z = 0$.

On aura : $V_3 = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, 0\right)$.

Vérifions que $B = (V_1, V_2, V_3)$ forme une base de $\mathbb{R}^3$.

$$\det_{BC}(B) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 1 & -1 & \frac{1}{4} \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\overset{L_2 \leftarrow L_2 + L_3}{=} \begin{vmatrix} 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= -\frac{1}{4} \neq 0$$

$\Rightarrow B = (V_1, V_2, V_3)$ forme une base de $\mathbb{R}^3$.

d°/

$$\mathrm{mat}(f, B) = \begin{array}{cccc} f(v_1) & f(v_2) & f(v_3) & \\ \left(\begin{matrix} \boxed{\begin{matrix}2\\0\\0\end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix}0\\3\\0\end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix}0\\1\\3\end{matrix}} \end{matrix}\right) & & & \begin{matrix} v_1\\ v_2\\ v_3\end{matrix} \end{array}$$

$$= T.$$

$v_1 \in E_2(f) \Rightarrow f(v_1) = 2v_1$

$v_2 \in E_3(f) \Rightarrow f(v_2) = 3v_2$

$f(v_3) = 3v_3 + v_2.$

- $\mathrm{mat}(f, B) = T$ triang sup
- $\mathrm{mat}(f, B_c) = M$

$$\Rightarrow M = P \cdot T \cdot P^{-1}$$

avec $P = \mathrm{pass}(B_c, B)$

$$= \begin{array}{ccc} v_1 & v_2 & v_3 \\ \left(\begin{matrix} \boxed{\begin{matrix}0\\+1\\-1\end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix}1\\-1\\1\end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix}1/2\\1/4\\0\end{matrix}} \end{matrix}\right)_{B_c} \end{array}$$

e°/ $T = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$$= \Delta + N.$$

REPUBLIQUE TUNISIENNE

MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR
ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITÉ DE MONASTIR

Institut Supérieur d'Informatique
et de Mathématiques de Monastir

Réservé à l'administration

Ne pas inscrire le nom ici

Signature lisibles des surveillants

On vérifie que $\Delta N = N\Delta$,

$$N^2 = 0.$$

f) D'après la formule du binôme on a :

$$T^n = (\Delta + N)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k N^k \Delta^{n-k}$$

$$= C_n^0 \Delta^n + C_n^1 \Delta^{n-1} . N + \underbrace{C_n^2 \Delta^{n-2} N^2}_{0} + \underbrace{\dots}_{0}$$

$$= \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 3^n & 0 \\ 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix} + n \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3^{n-1} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 3^n & n3^{n-1} \\ 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix} ; \; n \geq 1.$$

$$T^0 = I_3.$$

et $M^n = P . T^n . P^{-1}$;

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 1 & -2 & -2 \\ 0 & 4 & 4 \end{pmatrix}.$$