Université de Monastir
Institut Supérieur d'Informatique
et de Mathématiques de Monastir
Département de Mathématiques

Matière : Analyse I
Niveau : L1 Info, TIC, EEA

Série n^0 4

Exercice 1. Somme et produit de DLs
Calculer les développements limités suivants :

1. $\dfrac{1}{1-x} - e^x$ à l'ordre 3 en 0,
2. $\sqrt{1-x} + \sqrt{1+x}$ à l'ordre 4 en 0,
3. $\sin x \cos(2x)$ à l'ordre 6 en 0,
4. $\left(\ln(1+x)\right)^2$ à l'ordre 4 en 0.

Exercice 2. Composition de DLs
Calculer les développements limités suivants :

1. $\ln\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)$ à l'ordre 4 en 0,
2. $\exp(\sin x)$ à l'ordre 4 en 0,
3. $(\cos x)^{\sin x}$ à l'ordre 5 en 0.

Exercice 3. Inversion de DLs
Calculer les développements limités suivants :

1. $\dfrac{1}{1+x+x^2}$ à l'ordre 4 en 0,
2. $\tan(x)$ à l'ordre 5 en 0,
3. $\dfrac{\ln(1+x)}{\sin x}$ à l'ordre 3 en 0.

Exercice 4. DLs pas en 0
Calculer les développements limités suivants :

1. $\sqrt{x}$ à l'ordre 3 en 2,
2. $\dfrac{\sqrt{x+2}}{\sqrt{x}}$ à l'ordre 3 en $+\infty$,
3. $\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right) - \ln x$ à l'ordre 4 en $+\infty$.

Développements limités usuels

(au voisinage de 0)

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$$

$$\mathrm{ch}\, x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1})$$

$$\mathrm{sh}\, x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2})$$

$$\mathrm{th}\, x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15}x^5 - \frac{17}{315}x^7 + o(x^8)$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + (-1)^n.\frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1})$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + (-1)^n.\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2})$$

$$\tan x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15}x^5 + \frac{17}{315}x^7 + o(x^8)$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + o(x^n)$$

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 + \cdots + (-1)^n x^n + o(x^n)$$

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{1}{8}x^2 + \cdots + (-1)^{n-1}.\frac{1.1.3.5\ldots(2n-3)}{2^n n!}x^n + o(x^n)$$

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 - \frac{x}{2} + \frac{3}{8}x^2 + \cdots + (-1)^n.\frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2^n n!}x^n + o(x^n)$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^{n-1}.\frac{x^n}{n} + o(x^n)$$

$$\mathrm{argth}\, x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots + \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+2})$$

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots + (-1)^n.\frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+2})$$

$$\mathrm{argsh}\, x = x - \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} + \frac{3}{8}\frac{x^5}{5} + \cdots + (-1)^n.\frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2^n n!}\frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+2})$$

$$\arcsin x = x + \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} + \frac{3}{8}\frac{x^5}{5} + \cdots + \frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2^n n!}\frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+2})$$

Série n^{0}4

Correction 1. 1. Il suffit d'écrire

$$\begin{aligned}\frac{1}{1-x} &= 1+x+x^2+x^3+o(x^3)\\ e^x &= 1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+o(x^3)\end{aligned}$$

et de faire la différence :

$$\frac{1}{1-x}-e^x=\frac{x^2}{2}+\frac{5x^3}{6}+o(x^3).$$

2. Il suffit d'écrire

$$\begin{aligned}\sqrt{1+x} &= 1+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8}+\frac{x^3}{16}-\frac{5x^4}{128}+o(x^4)\\ \sqrt{1-x} &= 1-\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8}-\frac{x^3}{16}-\frac{5x^4}{128}+o(x^4)\end{aligned}$$

et de faire la somme :

$$\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}=2-\frac{x^2}{4}-\frac{5x^4}{64}+o(x^4).$$

3. On écrit

$$\begin{aligned}\sin(x) &= x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}+o(x^6)\\ \cos(2x) &= 1-2x^2+\frac{2x^4}{3}+o(x^5).\end{aligned}$$

Remarquons qu'il n'est pas nécessaire d'aller jusqu'à l'ordre 6 pour $\cos(2x)$ car tous les termes de son développement limité seront au moins multipliés par x, et on gagne un ordre. On en déduit, en effectuant le produit

$$\sin(x)\cos(2x)=x-\frac{13x^3}{6}+\frac{121x^5}{120}+o(x^6).$$

4. Puisque $\ln(1+x) \sim_0 x$, il est là aussi simplement nécessaire d'effectuer un DL de $\ln(1+x)$ à l'ordre 3. En effectuant le produit, on va automatiquement gagner un ordre. Donc, en écrivant

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$$

on trouve

$$\big(\ln(1+x)\big)^2 = x^2 - x^3 + \frac{11x^4}{12} + o(x^4).$$

Correction 2. 1. On commence par écrire

$$\frac{\sin x}{x} = 1 - \frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120} + o(x^4).$$

On peut donc écrire

$$\ln\left(\frac{\sin x}{x}\right) = \ln(1+u) \text{ avec } u = -\frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120} + o(x^4).$$

En particulier, on remarque que $o(u^2) = o(x^4)$. De plus, on sait que

$$\ln(1+u) = u - \frac{u^2}{2} + o(u^2).$$

On calcule les puissances de u, et on les tronque à l'ordre 4. Ainsi,

$$u = -\frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120} + o(x^4)$$

$$u^2 = \frac{x^4}{36} + o(x^4).$$

Il vient

$$\begin{aligned} \ln\left(\frac{\sin x}{x}\right) &= \frac{-x^2}{6} + \left(\frac{1}{120} - \frac{1}{2\times 36}\right)x^4 + o(x^4) \\ &= \frac{-x^2}{6} - \frac{x^4}{180} + o(x^4). \end{aligned}$$

2. On pose $u = \sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)$. u tend vers 0 lorsque x tend vers 0, et on peut bien écrire que

$$\exp(u) = 1 + u + \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{6} + \frac{u^4}{24} + o(u^4).$$

Mais,

$$\begin{aligned} u &= x - \frac{x^3}{6} + o(x^4) \\ u^2 &= x^2 - \frac{x^4}{3} + o(x^4) \\ u^3 &= x^3 + o(x^4) \\ u^4 &= x^4 + o(x^4). \end{aligned}$$

En remplaçant, on trouve

$$\exp(\sin(x)) = 1 + x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{8} + o(x^4).$$

3. On écrit

$$(\cos x)^{\sin x} = \exp\big(\sin x \ln(\cos x)\big).$$

On va donc devoir composer deux DLs, et faire un produit ! Soit d'abord $u = -\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^5)$. On a

$$\ln(\cos x) = \ln(1+u) = u - \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{3} - \frac{u^4}{4} + \frac{u^5}{5} + o(u^5).$$

D'autre part,

$$\begin{aligned} u &= -\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^5) \\ u^2 &= \frac{x^4}{4} + o(x^5) \\ u^3 &= o(x^5) \\ u^4 &= o(x^5) \\ u^5 &= o(x^5) \end{aligned}$$

Il vient

$$\ln(\cos x) = -\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{12} + o(x^5).$$

On en déduit

$$\begin{aligned} \sin(x)\ln(\cos x) &= \left(x - \frac{x^3}{9} + \frac{x^5}{120} + o(x^5)\right)\left(-\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{12} + o(x^5)\right) \\ &= -\frac{x^3}{2} + o(x^5) \end{aligned}$$

Finalement, on pose $v = -\frac{x^3}{2} + o(x^3)$, et on voit que $v^2 = o(x^5)$. On obtient donc

$$\exp\big(\sin x \ln(\cos x)\big) = \exp(v) = 1 + v + O(v^2) = 1 - \frac{x^3}{2} + o(x^5).$$

Il y avait finalement moins de calculs que l'on ne pouvait le craindre !

Correction 3. 1. On pose $u = x + x^2$, qui tend bien vers 0 lorsque x tend vers 0, et on utilise

$$\frac{1}{1+u} = 1 - u + u^2 - u^3 + u^4 + o(u^4).$$

On calcule les puissances de u, mais bien sûr on les tronque à l'ordre 4. On trouve :

$$\begin{aligned} u &= x + x^2 \\ u^2 &= x^2 + 2x^3 + x^4 \\ u^3 &= x^3 + 3x^4 + o(x^4) \\ u^4 &= x^4 + o(x^4) \end{aligned}$$

Ainsi, en remplaçant, on trouve

$$\frac{1}{1+x+x^2} = 1 - x + x^3 - x^4 + o(x^4).$$

2. A l'ordre 2, on a

$$\cos(x) + 1 = 2 - \frac{x^2}{2} + o(x^2),$$

d'où

$$\frac{1}{\cos x + 1} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{1 - \frac{x^2}{4} + o(x^2)} = \frac{1}{2} + \frac{x^2}{8} + o(x^2).$$

On multiplie ce DL par celui de $\sin x - 1$

$$\sin x - 1 = -1 + x + o(x^2).$$

On trouve finalement

$$\frac{\sin x - 1}{2 + \cos x} = -\frac{1}{2} + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + o(x^2).$$

3. Ici, il faut faire un DL à l'ordre 4 du numérateur et du dénominateur car les termes en x vont se simplifier. On trouve

$$\frac{\ln(1+x)}{\sin x} = \frac{x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + o(x^4)}{x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)} = \frac{1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} - \frac{x^3}{4} + o(x^3)}{1 - \frac{x^2}{6} + o(x^3)}.$$

On effectue ensuite le DL à l'ordre 3 de

$$\frac{1}{1 - \frac{x^2}{6} + o(x^3)} = 1 + \frac{x^2}{6} + o(x^3)$$

puis le produit et on trouve finalement

$$\frac{\ln(1+x)}{\sin x} = 1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + o(x^3).$$

Correction 4. 1. On pose $x = 2+h$, d'où

$$\begin{aligned}\sqrt{2+h} &= \sqrt{2}\sqrt{1+\frac{h}{2}} = \sqrt{2}\left(1+\frac{1}{2}\frac{h}{2}-\frac{1}{8}\left(\frac{h}{2}\right)^2+\frac{1}{16}\left(\frac{h}{2}\right)^3+o(h^3)\right)\\ &= \sqrt{2}+\frac{\sqrt{2}}{4}h-\frac{\sqrt{2}}{32}h^2+\frac{\sqrt{2}}{128}h^3+o(h^3).\end{aligned}$$

En revenant à x, on a

$$\sqrt{x} = \sqrt{2}+\frac{\sqrt{2}}{4}(x-2)-\frac{\sqrt{2}}{32}(x-2)^2+\frac{\sqrt{2}}{128}(x-2)^3+o((x-2)^3).$$

2. On pose $u=\frac{1}{x}$, de sorte que

$$\begin{aligned}\frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}} &= \sqrt{1+2u}\\ &= 1+u-\frac{u^2}{2}+\frac{u^3}{2}+o(u^3)\\ &= 1+\frac{1}{x}-\frac{1}{2x^2}+\frac{1}{2x^3}+o\left(\frac{1}{x^3}\right).\end{aligned}$$

3. On commence par écrire

$$\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)-\ln x = \ln\left(1+\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\right).$$

On pose alors $u=\frac{1}{x}$, puis on écrit, pour se ramener à un DL du logarithme en 0,

$$\ln\left(1+\sqrt{1+u^2}\right) = \ln\left(1+\frac{\sqrt{1+u^2}-1}{2}\right).$$

Or,

$$\frac{\sqrt{1+u^2}-1}{2} = \frac{u^2}{4}-\frac{u^4}{16}+o(u^4)$$

d'où, par composition de DLS,

$$\ln\left(1+\sqrt{1+u^2}\right) = \frac{u^2}{4}-\frac{3u^4}{32}+o(u^4).$$

Revenant à la fonction initiale, on trouve

$$\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)-\ln x = \ln 2+\frac{1}{4x^2}-\frac{3}{32x^4}+o\left(\frac{1}{x^4}\right).$$

Correction 5. 1. $\cos x = 1 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{4!}x^4 + x^5 o(x)$ donc

$$\cos x - 1 = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{4!}x^4 + x^5 o(x) = x^2\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4!}x^2 + x^3 o(x)\right),$$

$e^x = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 + x^4 o(x)$ donc

$$x(e^x - 1) = x^2\left(1 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{3!}x^2 + \frac{1}{4!}x^3 + x^3 o(x)\right).$$

On fait une division par les puissances croissantes et on obtient

$$\begin{array}{rrrr|l}
\frac{1}{2} & & -\frac{1}{4!}x^2 & & 1+\frac{1}{2}x+\frac{1}{3!}x^2+\frac{1}{4!}x^3 \\
\hline
-\big(\frac{1}{2} & +\frac{1}{4}x & +\frac{1}{2.3!}x^2 & +\frac{1}{2.4!}x^3\big) & \frac{1}{2}-\frac{1}{4}x+\frac{1}{32}x^3 \\
 & -\frac{1}{4}x & -\frac{1}{8}x^2 & -\frac{1}{4.4!}x^4 & \\
 & -\big(-\frac{1}{4}x & -\frac{1}{8}x^2 & -\frac{1}{4.3!}x^3\big) & \\
 & & & \frac{1}{32}x^3 &
\end{array}$$

donc

$$f(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{4}x + \frac{1}{32}x^3 + x^3 o(x).$$

2. Comme f a un développement limité à l'ordre 0 en 0, elle est donc prolongeable par continuité si on prend $f(0) = \frac{1}{2}$ (le premier terme du développement limité). Comme f a un développement limité à l'ordre 1 en 0, et ce prolongement est dérivable et $f'(0) = -\frac{1}{4}$.
3. On a

$$n\frac{\cos\frac{1}{n} - 1}{e^{1/n} - 1} - \frac{1}{2} = f(1/n) - \frac{1}{2} = -\frac{1}{4n} + \frac{1}{32n^3} + \frac{1}{n^3}o(1/n) \to 0.$$

Correction 6. 1. Les techniques classiques de calcul montrent que :

$$\frac{1}{1+e^x} = \frac{1}{2} - \frac{1}{4}x + \frac{1}{48}x^3 + x^3 o(x).$$

2. Au point d'abscisse 0, on a $f(0) = 1/2$, f est dérivable et vérifie $f'(0) = -1/4$. Le graphe est donc tangent à la droite d'équation $y = \frac{1}{2} - \frac{x}{4}$.
3. Au voisinage de 0, on a :

$$\frac{1}{1+e^x} - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}x\right) = \frac{1}{48}x^3 + x^3 o(x).$$

Si x est assez petit, cette quantité est positive pour $x > 0$, et négative pour $x < 0$: la courbe traverse sa tangente.