Université de Monastir
Institut Supérieur d'Informatique
et de Mathématiques de Monastir

Année Universitaire : 2023/2024
Matière : Algèbre 1
Niveau : L1 Info, S 1

Examen : Session de contrôle

Exercice 1:

Soit le polynôme $P(X) = X^4 + 2X^3 + 2X^2 + 2X + 1$.

1. Montrer que -1 est une racine double de P.
2. Effectuer la division euclidienne de P par $X - i$.
3. Sans faire la division euclidienne de P par $X + i$, justifier pourquoi le reste est forcément nul.
4. Déterminer les racines de P dans $\mathbb{C}$.
5. En déduire la factorisation de P dans $\mathbb{C}[X]$ et dans $\mathbb{R}[X]$.

Exercice 2:

Soient les applications linéaires

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (z, x+y+z) \end{array}, \quad g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,y) & \longmapsto & (-y, -x+2y, x). \end{array}$$

1. (a) Déterminer une base de $\ker f$.
   (b) Utiliser le théorème du rang pour calculer $\dim Imf$. En déduire que f est surjective.
2. (a) Montrer que g est injective.
   (b) Utiliser le théorème du rang pour calculer $\dim Img$.
   (c) Montrer que $\{(-1,2,0), (0,-1,1)\}$ est une base de Img.
3. (a) Montrer que $fog = Id_{\mathbb{R}^2}$.
   (b) Montrer que $\ker(gof) = \ker f$ et $Im(gof) = Img$.