Université de Monastir
Institut Supérieur d'Informatique
et de Mathématiques de Monastir

Année Universitaire 2024 2025
Matière: Algèbre, S1
Niveaux: L1 Info

Série 2

Exercice 1: Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ tel que $P(X+1) = P(X)$.

1. On pose $Q(X) = P(X) - P(0)$. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $Q(n) = 0$.
2. En déduire que P est constant.

Exercice 2:

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, notons $P_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{X^k}{k!}$. Vérifier que P_n n'a pas de racine multiple.

Exercice 3:

Soit $P = X + 2(X^2+1)^2 + X^3(X^2+2)$.

1. Vérifier que i est une racine multiple de P.
2. Factoriser P en facteurs irréductibles dans $\mathbb{C}[X]$ puis dans $\mathbb{R}[X]$.

Exercice 4:

Soit le polynôme $P = X^4 + 3X^3 - 6X^2 - 28X - 24$.

1. Sachant que P amet une racine triple, sans la déterminer, prouver que cette racine doit être réelle.
2. Déterminer cette racine triple.
3. Donner toutes les racines de P ainsi que la foctorisation de P dans $\mathbb{R}[X]$.

Exercice 5:

1. Factoriser en facteurs irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$ et dans $\mathbb{C}[X]$ le polynôme $P = -X^3+X^2-X+1$.
2. Le but de cette question de factoriser le polynôme $P = \displaystyle\sum_{k=0}^{n}(-X)^k$, où $n \geqslant 3$ un entier.
   (a) Montrer que $(1+X)P = 1 - (-X)^{n+1}$.
   (b) En déduire les racines de P.
   (c) Factoriser en facteurs irréductibles dans $\mathbb{C}[X]$ le polynôme $1 - (-X)^{n+1}$.
   (d) En déduire la factorisation de P dans $\mathbb{C}[X]$ en facteurs irréductibles.

Quelques méthodes de calcul.

* simplification par symétrie, parité et imparité.

$$F = E + \frac{R}{Q} \text{ avec } [\deg R < \deg Q].$$

1/ R paire $\Rightarrow R(-X) = R(X)$

exemple : $R = \dfrac{1}{(x-1)^2(x+1)^2}$ est paire

$$R = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{(x-1)^2} + \frac{c}{(x+1)} + \frac{d}{(x+1)^2}; \quad a,b,c,d \in \mathbb{R}$$

Comme $R(-X) = R(X)$

$$\Rightarrow \frac{-a}{x+1} + \frac{b}{(x+1)^2} + \frac{-c}{x-1} + \frac{d}{(x-1)^2}$$

$$= \frac{a}{x-1} + \frac{b}{(x-1)^2} + \frac{c}{x+1} + \frac{d}{(x+1)^2}; \quad a,b,c,d \in \mathbb{R}$$

$\Rightarrow$ Par unicité des coefficients de la décomposition en éléments simples,

$-a = c$, $b = d$; $-c = a$, $d = b$

$\Rightarrow \boxed{\begin{matrix} a = -c \\ b = d \end{matrix}} \Rightarrow$ le calcul de a et b suffit donc.

de même si R impaire

2/ types de symétries :

exemple : $F = \dfrac{1}{x(x-1)}$; les pôles 0 et 1 sont symétrique par rapport à $\frac{1}{2}$

$\Rightarrow F(x) = F(1-x) \Rightarrow \left.\begin{matrix} F = \frac{\alpha}{x} + \frac{\beta}{x-1} \\ F(1-x) = \frac{-\beta}{x} - \frac{\alpha}{x-1} \end{matrix}\right\} \Rightarrow \boxed{\alpha = -\beta}$

Série 2

Ex1.

$P \in \mathbb{K}[X] \mid P(X+1) = P(X)$. (*)

1°/ Mq $Q(n) = 0, \forall n \in \mathbb{N}$.

- Pour $n=0$: $Q(0) = P(0) - P(0)$
$= 0$ Vraie.

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on suppose que $Q(n) = 0$ et montrons que $Q(n+1) = 0$.

 - $Q(n+1) = P(n+1) - P(0)$
 or $P(n+1) = P(n)$ (d'après (*))
 $\Rightarrow Q(n+1) = P(n) - P(0)$
 $= Q(n)$
 $= 0$, $n \in \mathbb{N}$.

$\Rightarrow$ Par le principe de récurrence, on a $Q(n) = 0, \forall n \in \mathbb{N}$.

2°/ $Q(n) = 0, \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow Q$ possède une infinité de racines

$\Rightarrow Q = 0$ (polynôme nul.)

$\Rightarrow P - P(0) = 0$

$\Rightarrow P = \underbrace{P(0)}_{cste}$.

$\Rightarrow P$ est constant.

EX2: Pour $n \in \mathbb{N}^*$, $P_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{X^k}{k!}$

$$= 1 + X + \frac{X^2}{2} + \dots + \frac{X^n}{n!}.$$

$$\Rightarrow P_n' = 1 + X + \frac{X^2}{2} + \dots + \frac{X^{n-1}}{(n-1)!}; \ n \in \mathbb{N}^*$$

$$\Rightarrow P_n = P_n' + \frac{X^n}{n!}; n \in \mathbb{N}^*. \ (*)$$

• Mq P_n n'a pas de racine multiple.

On suppose que P_n possède une racine multiple $\alpha \in K$.

$$\Rightarrow P_n(\alpha) = P_n'(\alpha) = 0$$

$\Rightarrow$ d'après $(*)$, on a:

$$P_n'(\alpha) + \frac{\alpha^n}{n!} = P_n'(\alpha) = 0 \ ; n \in \mathbb{N}^*$$

$$\Rightarrow \frac{\alpha^n}{n!} = 0, \ n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow \boxed{\alpha = 0}$$

Or $\left(P_n(0) = 1 \neq 0 \Rightarrow 0 \text{ n'est une racine de } P_n\right)$

ce qui est absurde

$\Rightarrow P_n$ n'a pas de racine multiple.

Ex3 : $P = X + 2(X^2+1)^2 + X^3(X^2+2)$

$= X + 2(X^4 + 2X^2 + 1) + X^5 + 2X^3$

$= X + 2X^4 + 4X^2 + 2 + X^5 + 2X^3$

$= X^5 + 2X^4 + 2X^3 + 4X^2 + X + 2.$

1°/ • $P = X^5 + 2X^4 + 2X^3 + 4X^2 + X + 2.$

$\Rightarrow P(i) = i^5 + 2i^4 + 2i^3 + 4i^2 + i + 2$

$= i + 2 - 2i - 4 + i + 2$

$= (i + i - 2i) + (2 + 2 - 4)$

$= 0$

• $P' = 5X^4 + 8X^3 + 6X^2 + 8X + 1.$

$\Rightarrow P'(i) = 5i^4 + 8i^3 + 6i^2 + 8i + 1$

$= 5 - 8i - 6 + 8i + 1$

$= (5 - 6 + 1) + (-8i + 8i)$

$= 0$

• $P'' = 20X^3 + 24X^2 + 12X + 8.$

$\Rightarrow P''(i) = 20i^3 + 24i^2 + 12i + 8$

$= -20i - 24 + 12i + 8$

$= (-24 + 8) + (-20i + 12i)$

$= -16 - 8i \neq 0$

Cl : $\begin{cases} P(i) = P'(i) = 0 \\ \text{et} \\ P''(i) \neq 0 \end{cases}$ $\Leftrightarrow$ i racine double de P.

2°/ • On a i racine double de P
et
$P \in \mathbb{R}[X]$
$\Rightarrow \bar{i} = -i$ racine double de P.
Reste seule racine à trouver (cette racine doit être réelle car $P \in \mathbb{R}[X]$)

• $\Rightarrow$ Factorisation de P en facteurs irréd. dans $\mathbb{C}[X]$:

$$P = (X-i)^2 (X+i)^2 (X-a) \; ; \; a \in \mathbb{R}.$$

$$\cdot\ P(0) = (-1)\cdot(-1)(-a) = 2 \Leftrightarrow \boxed{a = -2}$$

$$\Rightarrow \underline{P} = (X-i)^2 (X+i)^2 (X+2).$$

• $\Rightarrow$ Factorisation de P en facteurs irréd. dans $\mathbb{R}[X]$:

On a $P = (X-i)^2 (X+i)^2 (X+2)$

$$= \left[(X-i)(X+i)\right]^2 (X+2)$$

$$= \underbrace{(X^2+1)}_{\substack{\Delta < 0 \\ \text{donc irréd.} \\ \text{dans} \\ \mathbb{R}[X]}} (X+2).$$

Ex4: $P = x^4 + 3x^3 - 6x^2 - 28x - 24.$

1°/ On suppose que P admet une racine triple α, où $\alpha \in \mathbb{C}$.

Puisque $P \in \mathbb{R}[X] \Rightarrow \bar{\alpha}$ racine triple de P.

$\Rightarrow$ multiplicité (α) + multiplicité $(\bar{\alpha}) = 6 > \deg(P)$

$\hookrightarrow$ Ce qui est absurde

donc α doit être réelle.

2°/
- $P(\alpha) = \alpha^4 + 3\alpha^3 - 6\alpha^2 - 28\alpha - 24 = 0$
- $P'(\alpha) = 4\alpha^3 + 9\alpha^2 - 12\alpha - 28 = 0$
- $P''(\alpha) = 12\alpha^2 + 18\alpha - 12 = 0$

et $P^{(3)}(\alpha) = 24\alpha + 18 \neq 0$

α racine triple.

- $P''(\alpha) = 0 \Leftrightarrow 12\alpha^2 + 18\alpha - 12 = 0$

$\Leftrightarrow 6(2\alpha^2 + 3\alpha - 2) = 0$

$\Leftrightarrow 2\alpha^2 + 3\alpha - 2 = 0$

$\Delta = 3^2 + 4 \times 2 \times 2$

$= 9 + 16$

$= 25$

$\Rightarrow \alpha = \frac{-3-5}{4} = -2$ ou $\alpha = \frac{-3+5}{4} = \frac{1}{2}$

vérification:

$\Rightarrow \begin{cases} P(-2) = 0 \\ P'(-2) = 0 \\ P''(-2) = 0 \end{cases}$ et $P^{(3)}(-2) = 0$ mais $\begin{cases} P(\frac{1}{2}) \neq 0 \\ P'(\frac{1}{2}) \neq 0 \\ P''(\frac{1}{2}) = 0 \\ P^{(3)}(\frac{1}{2}) \neq 0 \end{cases}$

donc $\boxed{\alpha = -2}$ racine triple

3/ $P = (X+2)^3 (X-a)$,

où $a \in \mathbb{R}$ car $P \in \mathbb{R}[X]$.

. $P(0) = 2^3(-a) = -24$

$\Leftrightarrow$ $\boxed{a = \frac{24}{8} = 3}$

cl : . les racines de P : -2 racine triple
3 racine simple

. factorisation de P dans $\mathbb{R}[X]$:

$$\boxed{P = (X+2)^3 (X-3)}$$

Exs

- $\underline{P} = -X^3 + X^2 - X + 1$

$$= X^2(-X+1) + (-X+1)$$

$$= -(X+1)(X^2+1).$$

Comme le discriminant de X^2+1 est strictement négatif, il s'agit de la décomposition dans $\mathbb{R}[X]$.

- les deux racines de X^2+1 sont bien connues, il s'agit i et $-i$, ce qui entraine que la décomposition dans $\mathbb{C}$ est :

$$\underline{P} = -(X+1)(X-i)(X+i).$$

2°/ $\boxed{a}$ $(1+X)P = (1+X)\sum_{k=0}^{n}(-X)^k$

$$= \sum_{k=0}^{n}(1+X)(-X)^k$$

$$= \sum_{k=0}^{n}(-X)^k + \sum_{k=0}^{n} X(-X)^k$$

$$= \left[1 \cancel{- X} \cancel{+ X^2} \cancel{- X^3} + \dots \cancel{+ (-X)^n}\right] + \left[\cancel{X} \cancel{- X^2} \cancel{+ X^3} - X^4 + \dots \cancel{+ X(-X)^{n-1}} + X(-X)^n\right]$$

$$= 1 + X(-X)^n$$

$$= 1 - (-X)(-X)^n$$

$$= 1 - (-X)^{n+1}. \quad \forall n \geq 3.$$

$\boxed{b^\circ}$ Si $X \neq -1$: les racines de P vérifie

$$(-X)^{n+1} = 1.$$

$$\Rightarrow P(X) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} (-X)^{n+1} = 1 \\ \text{et} \\ X \neq -1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -X = e^{\frac{2ik\pi}{n+1}} ; k \in \{0,1,\dots,n\} \\ \text{et} \\ X \neq -1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} X = -e^{\frac{2ik\pi}{n+1}}, k \in \{0,1,\dots,n\} \\ \text{et} \\ X \neq -1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow X = -e^{\frac{2ik\pi}{n+1}}, k \in \{1,\dots,n\}.$$

$\boxed{c^\circ}$ • $1-(-X)^{n+1} = \prod_{k=0}^{n} \left(X + e^{\frac{2ik\pi}{n+1}}\right)$; $n \geq 3$.

$\boxed{d^\circ}$ • On a $1-(-X)^{n+1} = \prod_{k=0}^{n} \left(X + e^{\frac{2ik\pi}{n+1}}\right)$

$$= (X+1) \underbrace{\prod_{k=1}^{n} \left(X + e^{\frac{2ik\pi}{n+1}}\right)}$$

$$= (X+1) \; P.$$