Université de Monastir
Institut Supérieur D'Informatique
et de Mathématiques de Monastir
Dépt. de Mathématiques

A.U: 2024-2025
L1 INFO.
Algébre 2
Série No.1

Matrices - Calculs matriciels

Exercice 1:

1. Ecrire la matrice $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{n,p}(K)$ dans les cas suivants:
   (a) A de type (4,2) et $a_{ij} = j - 2i$.
   (b) $A \in \mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{C})$ et $a_{ij} = \sqrt{ij}$.
   (c) $A \in \mathcal{M}_{1,5}(\mathbb{R})$ et $a_{ij} = \frac{1}{2}j + i$.
   (d) A de type $(n,1)$ et $a_{ij} = 2-ij$.
   (e) A est symétrique d'ordre n et $a_{ij} = \begin{cases} 1 & si\ \ j \neq i \\ i-2j & sinon \end{cases}$
   (f) A est triangulaire inférieure d'ordre 4 et $a_{ij} = j^2 - 1$.
   (g) A est carrée d'ordre n et $a_{ij} = \begin{cases} -3i & si\ \ j \neq i \\ i+1 & sinon \end{cases}$
   (h) A est antisymétrique d'ordre 3 et $a_{ij} = 5j - i$, $si\ i > j$.
   (k) A est carrée d'ordre 4 et $a_{ij} = \begin{cases} 0 & si\ \ i+j\ \ est\ pair \\ i & sinon \end{cases}$
2. On considère les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \end{pmatrix};\ B = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix};\ C = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix};\ D = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -4 \end{pmatrix};\ E = -\frac{2}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$F = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix};\quad G = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix};\quad H = \begin{pmatrix} 4 & -3 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

   Effectuer, lorsque cela est possible, les opérations suivantes :

   $(1) A+B$, $(2) B.A$, $(3) A.B$, $(4)\ {}^tC - 2D$, $(5) D.C$, $(6) A.E$, $(7) F.\,{}^tE$, $(8) A.C$, $(9)\ {}^t(CD)$,
   $(10)\ {}^tC.\,{}^tD$, $(11) tr((3E+F)^2)$, $(12)\ HE$, $(13)\ CG$, $(14)\ tr(GF)$, $(15)\ E-3I_3$, $(16)\ F.\,{}^tH$.

Exercice 2: On considère les ensembles suivants:

$$E = \left\{ A = \begin{pmatrix} a+b & b \\ c & -2a \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}),\ a,b,c \in \mathbb{R} \right\},\quad F = \left\{ A = \begin{pmatrix} 0 & y \\ x-y & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}),\ x,y \in \mathbb{R} \right\}.$$

1. Montrer que E et F sont des sous espaces vectoriels de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
2. Déterminer les dimensions de E et F et donner une base B de E et une base B' de F.
3. E et F sont-ils supplémentaires dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$? Justifier la réponse.
4. Déterminer le sous espace $E \cap F$.
5. A-t-on $E + F = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$? Justifier la réponse.
6. Compléter la base B de E en une base B_1 de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
7. Ecrire les coordonnées des matrices élémentaires $E_{i,j}$ $(1 \leq i,j \leq 2)$ dans la base B_1.
8. Résoudre dans F les équations suivantes : (a) $X^2 = 0$, (b) $X^2 = X$.

Exercice 3: On considère la matrice $M = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 \\ -1 & 3 & 2 \\ -1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$

1. Calculer $M^2 - 5M + 6I$ puis déduire que M est inversible et donner M^{-1}.
2. On note $A = M - 2I$ et $B = M - 3I$.
   (a) Calculer A^2 et B^2.
   (b) Déduire A^n et B^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
3. Calculer AB et BA.
4. Déterminer les réels α et λ tel que: $M = \alpha A + \lambda B$ et déduire M^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 4: Vérifier que les applications suivantes sont linéaires et écrire leurs matrices relativement aux bases canoniques :

1. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3,\ f(x, y) = (-x - 6y\ , 2x + 5y\ , x - 2y)$.
2. $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2,\ f(x\ , y\ , z\ , t) = (3z + y - 2x,\ 4x - \frac{2t}{3})$.
3. $f : \mathbb{R}_3[X] \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $f(P) = (P(-3), P(0), P(1))$.
4. $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n,\quad f(x_1, x_2 \ldots x_n) = (x_1\ , x_2 - x_1\ \ , x_3 - x_1\ , \ldots\ , x_n - x_1)$.
5. $f : \mathbb{R}_2[X] \longrightarrow \mathbb{R}_3[X]$, $f(P) = e^{-X^2}(e^{X^2}P)'$.
6. $f : \mathbb{R}_4[X] \longrightarrow \mathbb{R},\quad f(P) = \int_{-1}^{1} xP(x)dx$.
7. Soit $N = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ et f l'application définie par: $f(A) = AN,\ \forall A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Exercice 5:
On considère $B_1 = (e_1,e_2,e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et $B_2 = (u_1,u_2)$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$.
Soit f l'application linéaire définie de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$ par:

$$\forall(x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ f(x,y,z) = (x - y + 2z\ ,\ -2y + z).$$

1. Ecrire $A = mat(f,B_1,B_2)$.
2. Effectuer, lorsque cela est possible, les opérations suivantes :
   $(A + 5I_2)$, $\ {}^tA\,.A$, $\ A.(\,{}^tA - 2I_3)$, $\ A.\,{}^tA$, $\ tr({}^tA\,.A)$, $\ tr(A\,.{}^tA - 2I_3)$.
3. Soit $S = A.\,{}^tA - 6I_2$.
   (a) Calculer $S^2 + S - 10I_2$.
   (b) En déduire que S est inversible et donner son inverse S^{-1}.
4. Soit $N = {}^tA\,.A - 5I_3$.
   On considère g l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice relativement à la base canonique B_1 est N. (c-à-d : $N = mat(g, B_1)$).
   (a) Donner l'expression de $g(x,y,z)$, pour tout $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$.

   On considère les vecteurs: $e_1' = e_2 + e_3,\ e_2' = e_3,\ e_3' = e_1$.

   (b) Vérifier que $B_1' = (e_1',e_2',e_3')$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
   (c) Ecrire la matrice de passage $P = pass(B_1, B_1')$.
   (d) Déterminer $M = mat(g, B_1')$ la matrice de g relativement à la base B_1' .
   (e) Ecrire la relation entre M et N à l'aide de la matrice de passage P.

Exercice 6: On considère u l'application définie par: $\forall P \in \mathbb{R}_n[X],\ u(P) = -2P + (X + 1)P'$.

1. Montrer que u est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.
2. Ecrire A la matrice de u relativement à la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$.

3. Pour k, $0 \leq k \leq n$, on pose $P_k = X^{n-k}$.
   (a) Vérifier que $B = (P_k,\ 0 \leq k \leq n)$ forme une base de $\mathbb{R}_n[X]$.
   (b) Ecrire S la matrice de passage de la base canonique à la base B.
   (c) Ecrire M la matrice de u relativement à la base B.
   (d) Ecrire la relation entre M et A à l'aide de la matrice S.
4. Pour k, $0 \leq k \leq n$, on pose $Q_k = (X+1)^k$.
   (a) Vérifier que $B' = (Q_k,\ 0 \leq k \leq n)$ forme une base de $\mathbb{R}_n[X]$.
   (b) Ecrire R la matrice de passage de la base canonique à la base B'.
   (c) Ecrire N la matrice de u relativement à la base B'.
   (d) Ecrire la relation entre N et A à l'aide de la matrice R.
   (e) Ecrire T la matrice de passage de la base B à la base B'.
   (f) Ecrire une relation reliant les matrices M et N.
5. Parmi les matrices citées précédemment, existe -t-il des matrices diagonales, triangulaires, symétriques ou antisymétriques.

Exercice 7: Devoir De Maison

On considère $E = \mathbb{R}_2[X]$ muni de sa base canonique B , $F = \mathbb{R}_1[X]$ muni de sa base canonique B_1. Soit f et g des applications définies par:

$$\forall P \in E = \mathbb{R}_2[X], \quad f(P) = P + (1-X)P'$$

$$\forall P \in F = \mathbb{R}_1[X], \quad g(P) = (1+2X)P(X+1)$$

1. Montrer que f est un endomorphisme de E et écrire $M = mat(f, B)$.
2. Déterminer le noyau et l'image de f et montrer qu'ils sont supplémentaires dans E.
3. Montrer que g est une application linéaire de F sur E et écrire $A = mat(g, B_1, B)$.
4. Déterminer le noyau et l'image de g et préciser son rang.
5. Effectuer, lorsque cela est possible, les opérations suivantes :
   $(A+2M)$, ${}^tA\,.A$, $A.M$, ${}^tA.M$, $M.A$, $tr(A)$, $tr(M)$.
6. Parmi les matrices citées précédemment, existe -t-il des matrices diagonales, triangulaires, symétriques ou antisymétriques.
7. Soit $S = {}^tA\,.A - 4I_2$. Calculer $S^2 - 11S$, déduire que S est inversible et donner son inverse S^{-1}.
8. Soient $P_1 = X^2+1$, $P_2 = X+1$, *et* $P_3 = 2X^2 - X$.
   (a) Montrer que $B' = (P_1,P_2,P_3)$ forme une base de $\mathbb{R}_2[X]$.
   (b) Ecrire la matrice de passage de B à B' , puis celle de B' à B.
   (c) Déterminer la matrice M' de f relativement à la base B' et écrire la relation entre M et M' à l'aide de la matrice de passage.
9. Calculer $N = \frac{1}{2}\ {}^tA(M+3I_3)$.
10. Soit g l'application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$ dont la matrice relativement aux bases canoniques est N.
    (a) Donner l'expression de g.
    (b) Soit $V_1 = (1,1,-1)$, $V_2 = (1,1,0)$, $V_3 = (0,1,-1)$ et soit $u_1 = (0,1)$, $u_2 = (1,1)$
        i. Vérifier que la famille $\varepsilon_1 = (V_1,V_2,V_3)$ forme une base de $\mathbb{R}^3$ et que la famille $\varepsilon_2 = (u_1,u_2)$ forme une base de $\mathbb{R}^2$.
        ii. Ecrire R la matrice de passage de la base canonique de $\mathbb{R}^3$ à la base ε_1.
        iii. Ecrire S la matrice de passage de la base canonique de $\mathbb{R}^2$ à la base ε_2.
        iv. Déterminer la matrice N_1 de g relativement aux bases $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$.
        v. Ecrire la relation reliant N_1 et N à l'aide des matrices de passage.