Chapitre : Développement limité

I. Formule de Taylor-Young :

Théorème :

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^n$ sur I et soit $a \in I$.

Alors, pour tout $x \in I$ on a :

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + (x-a)^n \varepsilon(x)$$

Le reste

avec $\varepsilon : I \to \mathbb{R}$ tel que $\lim_{x \to a} \varepsilon(x) = 0$.

Remarque :

Si $a = 0$, la formule de Taylor-Young s'écrit :

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f^{(3)}(0)}{3!}x^3 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + x^n \varepsilon(x),$$

avec $\varepsilon(x) \xrightarrow[x \to 0]{} 0$.

Exemple

Si $f(x) = e^x$, en appliquant la formule de Taylor-Young à f en 0 on obtient :

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + x^n \varepsilon(x), \ \varepsilon(x) \underset{x \to 0}{\longrightarrow} 0$$

II. Développement Limité :

Définition

Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction. Pour $a \in I$ et $n \in \mathbb{N}$, on dit que f admet un développement limité d'ordre n au point a $(DL_n(a))$ s'il existe $c_0, c_1, c_2, \dots c_n \in \mathbb{R}$ et $\varepsilon : I \to \mathbb{R}$ tel que $\lim_{x \to a} \varepsilon(x) = 0$ de sorte que :

$$\boxed{f(x) = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + \cdots + c_n(x-a)^n + (x-a)^n \varepsilon(x).}$$

avec $\varepsilon(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} 0$

* On appelle les termes $C_0 + C_1(x-a) + C_2(x-a)^2 + \dots + C_n(x-a)^n$ la partie polynomiale de $DL_n(a)$

* On appelle $(x-a)^n \varepsilon(x)$ le reste de la $DL_n(a)$.

* On peut écrire le reste de la manière suivante au lieu d'écrire $\underbrace{(x-a)^n \varepsilon(x)}_{o((x-a)^n)}$, on écrit

<u>Remarques</u> : 1) Par identification avec la formule de Taylor-Young on a :

$C_0 = f(a)$

$C_1 = f'(a)$

$C_2 = \dfrac{f''(a)}{2!}$

$C_3 = \dfrac{f^{(3)}(a)}{3!}$

$\vdots$

$C_n = \dfrac{f^{(n)}(a)}{n!}$

2) $DL_n(0)$ de f :

$f(x) = C_0 + C_1 x + C_2 x^2 + \dots + C_n x^n + x^n \varepsilon$

Par identification avec la formule de Taylor-Young en 0 on a :

$C_0 = f(0)$, $C_1 = f'(0)$, $C_2 = \dfrac{f''(0)}{2!}$

$C_3 = \dfrac{f^{(3)}(0)}{3!}$, ..., $C_n = \dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}$.

Proposition

1) Si f est de classe C^n alors d'après Taylor-Young f admet un $DL_n(a)$

2) Si f admet un DL alors il est unique.

3) Si f est paire (resp. impaire) alors le DL de f contient seulement les puissances paires (resp. les puissances impaires).

Exemples : (En appliquant la formule de Taylor-Young en 0)

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} + x^{2n+1}\varepsilon(x)$$

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots + \frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n} + x^{2n}\varepsilon(x)$$

$C_0 = f(0)$

$C_1 = f'(0)$

$C_2 = \frac{f''(0)}{2!}$

$C_3 = \frac{f^{(3)}(0)}{3!}$

$C_4 = \frac{f^{(4)}(0)}{3!}$

$C_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$

Proposition

On suppose que f et g admettent des $DL_n(0)$

$$f(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \dots + c_n x^n + o_1(x^n)$$

$$g(x) = d_0 + d_1 x + d_2 x^2 + \dots + d_n x^n + o_2(x^n)$$

Alors :

1) $f+g$ admet un $DL_n(0)$ et on a :

$$f(x)+g(x) = (c_0+d_0) + (c_1+d_1)x + (c_2+d_2)x^2 + \dots + (c_n+d_n)x^n + o(x^n)$$

2) fg admet un $DL_n(0)$ et on a :

$$f(x)\,g(x) = (c_0+c_1x+c_2x^2 \dots + c_nx^n)(d_0+d_1x+d_2x^2 \dots d_nx^n) + o(x^n).$$

Exemple

$DL_2(0)$ $\sin(x).\cos(x)$

$DL_2(0)$: $\sin(x) = x + x^2\varepsilon_1(x)$, $\varepsilon_1 \xrightarrow[x\to 0]{} 0$

$DL_2(0)$: $\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + x^2\varepsilon_2(x)$, $\varepsilon_2 \xrightarrow[x\to 0]{} 0$

$DL_2(0)$: $\sin(x)\cos(x) = x.\left(1-\frac{x^2}{2}\right) + x^2\varepsilon(x)$, $\varepsilon(x) \xrightarrow[x\to 0]{} 0$

$= x + x^2\varepsilon(x).$

Proposition

On suppose que f et g deux fonctions admettent $DL_n(0)$ respectivement :

$$f(x) = \underbrace{c_0 + c_1 x + \dots + c_n x^n}_{C(x)} + x^n \varepsilon_1(x),\quad \varepsilon_1(x) \xrightarrow[x \to 0]{} 0$$

$$g(x) = \underbrace{d_0 + d_1 x + \dots + d_n x^n}_{D(x)} + x^n \varepsilon_2(x),\quad \varepsilon_2(x) \xrightarrow[x \to 0]{} 0$$

Si $g(0) = 0$ alors la fonction $f \circ g$ admet un $DL_n(0)$ dont la partie polynomial $(C \circ D)(x)$ tronqué à n.

Exemple : Donner $DL_3(0)$ de $f(x) = e^{\sin(x)}$?

Solution :

$DL_3(0)$ de :

$$e^X = 1 + X + \frac{X^2}{2} + \frac{X^3}{6} + o_1(X^3)$$

$$\sin(x) = \underbrace{\left(x - \frac{x^3}{6}\right)}_{X} + o_2(x^3)$$

$$e^{\sin(x)} = 1 + \left(x - \frac{x^3}{6}\right) + \frac{\left(x - \frac{x^3}{6}\right)^2}{2} + \frac{\left(x - \frac{x^3}{6}\right)^3}{6} + o(x^3)$$

$* \left(x - \frac{x^3}{6}\right)^2 = \dots$

$* \left(x - \frac{x^3}{6}\right)^3 = \dots$

$$f(x) = 1 + \frac{x^2}{2} + o(x^3)$$

$$f(x) + g(x) = (c_0 + d_0) + (c_1 + d_1)x + (c_2 + d_2)x^2 + \dots + (c_n + d_n)x^n + o(x^n)$$

2) fg admet un $DL_n(0)$ et on a :

$$f(x)g(x) = (c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \dots + c_n x^n)(d_0 + d_1 x + d_2 x^2 + \dots + d_n x^n) + o(x^n)$$

Exemple

$DL_2(0)$ $\sin(x) \cdot \cos(x)$

$DL_2(0)$: $\sin(x) = x + x^2 \varepsilon_1(x)$, $\varepsilon_1 \xrightarrow[x \to 0]{} 0$

$DL_2(0)$: $\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + x^2 \varepsilon_2(x)$, $\varepsilon_2 \xrightarrow[x \to 0]{} 0$

$DL_2(0)$: $\sin(x)\cos(x) = x \cdot \left(1 - \frac{x^2}{2}\right) + x^2 \varepsilon(x)$, $\varepsilon(x) \xrightarrow[x \to 0]{} 0$

$= x + x^2 \varepsilon(x)$.