Chapitre 3 : Applications linéaires :

I - Définition et propriétés :

Soient E et F un sous espace vectoriels sur $\mathbb{K}$

Définition : On appelle application linéaire, une application $f : E \longrightarrow F$ tque

1) $\forall u, v \in E$, $f(u+v) = f(u) + f(v)$

2) $\forall u \in E, \forall \alpha \in \mathbb{K}$, $f(\alpha u) = \alpha f(u)$

Ex : $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$
$(x, y) \longmapsto x+y$

f est linéaire. En effet,

1) Soit $u = (x_1, y_1) \in \mathbb{R}^2$
$v = (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$

$$f(u+v) = f((x_1, y_1) + (x_2, y_2))$$
$$= f(x_1 + x_2, y_1 + y_2)$$
$$= x_1 + x_2 + y_1 + y_2$$
$$= x_1 + y_1 + x_2 + y_2$$
$$= f(x_1, y_1) + f(x_2, y_2)$$
$$= f(u) + f(v)$$

2) Soit $\alpha \in \mathbb{K}$ et $u = (x_1, y_1)$

$$f(\alpha u) = f(\alpha(x_1, y_1))$$
$$= f(\alpha x_1, \alpha y_1)$$
$$= \alpha x_1 + \alpha y_1 = \alpha(x_1 + y_1)$$
$$= \alpha f(x_1, y_1)$$
$$= \alpha f(u)$$

$\Rightarrow$ f est bien une application linéaire.

Remarque :

$\neg$(Si f est linéaire alors $f(0_E) = 0_F$

Si $f(0_E) \neq 0_F \Rightarrow$ f n'est pas linéaire

Ex : $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$
$(x, y) \longmapsto x+y+1$

On a : $f(0_E) = 0+0+1 \neq 0$

$\Rightarrow$ f n'est pas linéaire.

Ex2 : $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$
$x \longmapsto x^2$

On a $f(0) = 0^2 = 0$

$f(\alpha u) = \cancel{\alpha f(u)} = (\alpha u)^2 = \alpha^2 u^2$

$\alpha f(u)$ alors que

αu^2

$\Rightarrow$ f n'est pas linéaire.

démonstration : $\boxed{f(0_E) = 0_F}$

$0_F \neq f(0_E) = f(0_E + 0_E)$
$= f(0_E) + f(0_E)$

$f(0 u) = 0 f(u)$

$f(0) = 0$

morphisme : app linéaire

Remarque :

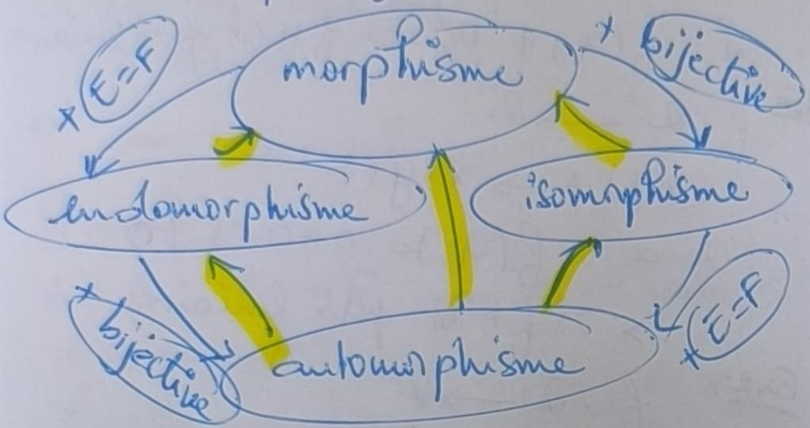
Soit $f : E \to F$ une application linéaire.

1) f est dite aussi un morphisme

2) Si de plus, $E=F$, on dit que f est un endomorphisme.

3) Si f est bijective, on dit que f est un isomorphisme.

4) Si $E=F$ et f est bijective on dit que f est automorphisme



Notation:

L'ensemble des applications linéaires de E dans F est noté par $\mathcal{L}(E,F)$ → II - Image & noyau:

Proposition: Soit $f: E \to F$ une application linéaire, alors:

1) L'image d'un sous-espace vectoriel de E par f est un sous espace ~~II - Image & noyau~~: vectoriel de F

2) L'image réciproque d'un sous-espace vectoriel de F par f est un sous-espace vectoriel de E.

~~II - Image & noyau~~:

1) Définition:

1) On appelle ~~&~~ image de f et on note $Im(f)$ le sous-espace vectoriel de F défini par:

$$Im(f) = f(E) = \{y \in F, \exists x \in E \; y = f(x)\}$$

2) On appelle noyau de f et on note $Ker(f)$ le sous-espace vectoriel de E défini par:

$$Ker(f) = f^{-1}(\{0_F\}) = \{x \in E, f(x) = 0_F\}$$

Ex:
$$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$
$$(x,y) \mapsto x+y$$

$$Ker(f) = \{u \in E, f(u) = 0_F\}$$
$$= \{(x,y), f(x,y) = 0\}$$
$$= \{(x,y), x+y=0\}$$
$$= \{(x,y); x=-y\}$$
$$= \{(-y,y); y \in \mathbb{R}\}$$
$$= \{y(-1,1), y \in \mathbb{R}\}$$
$$= Vect\{(-1,1)\}$$

Ex n°2: 10 dec

Proposition:

Soit $f: E \to F$ une application

1) f est injective $\Longleftrightarrow$ $Ker f = \{0_E\}$

2) f est surjective $\Longleftrightarrow$ $Im f = F$

Ex:
$$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$
$$(x,y) \mapsto x+y$$

D'après l'exemple précédent, on a: $Ker f = Vect\{(-1,1)\} \neq \{(0,0)\}$

$\Rightarrow f$ n'est pas injective.

2) $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}_1[x]$

$(a,b) \longmapsto a+bx$

On a montré que $\ker f = \{(0,0)\}$

$\Rightarrow$ f est injective.

$\operatorname{Im} f = \mathbb{R}_1[x] \Rightarrow f$ est surjective.

Conclusion :

$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}_1[x]$

$(a,b) \longmapsto a+bx$

est un isomorphisme.

Proposition :

Soit f $E \to F$ une application linéaire et $\{u_1, \dots, u_p\}$ est une famille de vecteurs de E. Alors :

1) Si $\{u_1, \dots, u_p\}$ et libre dans E et f est injective alors ~~$f(\{u_1, \dots, u_p\})$~~ $f(\{u_1 \dots u_p\})$ est libre dans F.

2) Si $\{u_1, \dots, u_p\}$ est génératrice dans E et f est surjective. $f(\{u_1 \dots u_p\})$ est une famille génératrice dans F.

Conséquence : l'image d'une base de E par un isomorphisme f est une base de F.

~~Définition~~ :

Cas de dimension finie :

Proposition :

Soient E et F deux espaces vectoriels de dimensions finies et $\dim E = \dim F = n$.

f est injective $\Leftrightarrow$ f est surjective $\Leftrightarrow$ f est bijective.

Ex :

$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}_1[x]$

$(a,b) \longmapsto a+bx$

Mque f est un isomorphisme.

On a : $\dim \mathbb{R}^2 = \dim \mathbb{R}_1[x] = 2$

et $\ker f = \{(0,0)\}$

$\Rightarrow$ f est bijective.

Rq : si $\dim E \neq \dim F$; il existe aucun isomorphisme entre E et F

Définition : Soit $f : E \to F$ une application linéaire.

On appelle rang de f et notée $\operatorname{rg}(f)$ la dimension de $\operatorname{Im}(f)$

$\operatorname{rg}(f) = \dim(\operatorname{Im}(f))$

Théorème : (théorème du rang)

$$\dim \ker(f) + \dim \operatorname{Im} f = \dim E.$$

càd :

$$\dim \ker(f) + \operatorname{rg}(f) = \dim E.$$

$\dim E = \dim F$

On peut trouver isomorphisme

$\dim E \neq \dim F$

impossible de trouver isomorphisme

Ex:

Soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$(x, y) \longmapsto (x, x+y)$

1) Mque f est ~~un~~ morphisme

2) Calculer $\ker f$ et $\mathrm{Im}(f)$

3) Déduire.

1) ~~R~~ soient $u, v \in \mathbb{R}^2$

~~f(u+v) =~~ tque $u = (x, y)$

$v = (a, b)$

$f(u+v) = f((x,y) + (a,b))$

$= f((x+a, y+b))$

$= (x+a, x+a+y+b)$

$= \cancel{(x,y)+(a,}$

$= (x, x+y) + (a, a+b)$

$= f(u) + f(v)$

soit $\alpha \in \mathbb{R}$:

$\alpha f(u) = \cancel{f}\, \alpha f(x, y)$

$= \alpha (x, x+y)$

$= (\alpha x, \alpha(x+y))$

$= f(\alpha u)$

$\Rightarrow$ f est un morphisme.

2) $\ker f = \{ \cancel{x \in \mathbb{R}}\ u \in \mathbb{R}^2, f(u) = 0_{\mathbb{R}^2} \}$

$= \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2, f(x,y) = (0,0) \}$

$= \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2, (x, x+y) = (0,0) \}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x+y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$

CC: $\ker f = \{(0,0)\}$

Im f

Comme $\dim E = \dim F \Rightarrow$ f est surjective.

$\Rightarrow \mathrm{Im} f = F = \mathbb{R}^2$.

3)