Rq : • $\sum u_n$ converge $\not\Longleftarrow\Longrightarrow \lim u_n = 0$

• si $\lim u_n \neq 0 \Longrightarrow \sum u_n$ diverge.

Exp :

1°/ $\sum_{n\geq 0} \underbrace{n(n+1)}_{u_n}$.

$\lim u_n = +\infty \Longrightarrow \sum u_n$ diverge.

2°/ $\sum \left(1+\frac{\alpha}{n}\right)^n ; \alpha \in \mathbb{R}$.

$u_n = \left(1+\frac{\alpha}{n}\right)^n = e^{n \ln\left(1+\frac{\alpha}{n}\right)} \underset{+\infty}{\sim} e^{n \cdot \frac{\alpha}{n}} = e^{\alpha}, \alpha\in\mathbb{R}$

$\Longrightarrow \lim u_n = e^{\alpha} \neq 0 \Longrightarrow \sum \left(1+\frac{\alpha}{n}\right)^n$ diverge.

3°/ $\sum \frac{1}{n^{\frac{1}{n}}} = \sum u_n$.

• $u_n = \frac{1}{n^{\frac{1}{n}}} = \frac{1}{n^{\frac{1}{n}}} = \frac{1}{e^{\frac{\ln n}{n}}}$

$\lim u_n = \lim \frac{1}{e^{\frac{\ln n}{n}}} = 1 \neq 0$

$\Longrightarrow \sum u_n$ diverge.

Convergence absolue

Si $\sum |u_n|$ converge $\Rightarrow \sum u_n$ converge absolument

Rq: $\sum u_n$ converge absolument $\Rightarrow \sum u_n$ converge

mais $\sum u_n$ converge $\not\Rightarrow \sum u_n$ converge absolument

Exple:

$$\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n} \quad \text{(série de Riemann alternée)}$$
$$\alpha = 1 > 0$$

$$\Rightarrow \sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n} \text{ converge}$$

$$\text{mais } \sum_{n\geq 1} \left|\frac{(-1)^n}{n}\right| = \underbrace{\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}}_{\text{diverge.}} \quad \begin{pmatrix}\text{série de Riemann} \\ \alpha = 1 \leq 1\end{pmatrix}$$

- Critère d'Abel

$$\sum u_n \cdot v_n$$

$$\left.\begin{array}{l} \cdot \text{ Si } \left|\sum_{n=n_0}^{N} u_n\right| \leq M \\ \cdot \ (v_n) \oplus \text{ et } \searrow ;\ \lim v_n = 0 \end{array}\right) \Rightarrow \sum u_n \cdot v_n \text{ converge.}$$

Ex : $\displaystyle\sum_{n\geq 2} \frac{\cos(n)}{n \ln n}$.

$x \notin 2\pi\mathbb{Z}$.

ind: $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \cos(kx) = \frac{\cos\left(\frac{nx}{2}\right)\sin\left(\frac{(n+1)x}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}$

- $\displaystyle\left|\sum_{n=2}^{n}\cos(k)\right| \overset{x=1}{=} \left|\frac{\cos\left(\frac{n}{2}\right)\sin\left(\frac{(n+1)}{2}\right)}{\sin\left(\frac{1}{2}\right)}\right|$

  $\displaystyle\leq \frac{1}{\left|\sin\left(\frac{1}{2}\right)\right|} = M.$

- $\displaystyle\frac{1}{n\ln n} > 0$; $n \geq 2$.

- $\displaystyle\lim \frac{1}{n\ln n} = 0$

- $\displaystyle\left(\frac{1}{n\ln n}\right)_{n\in\mathbb{N}\setminus\{0,2\}}$ est décroissante.

$\xRightarrow{\text{Abel}}$ $\displaystyle\sum \frac{\cos(n)}{n\ln n}$ converge.

* $\sum (-1)^n . V_n$

Si $V_n \geqslant 0$

(V_n) est $\searrow$

$\lim V_n = 0$

$\xRightarrow[\text{Leibniz}]{\text{critère}} \sum (-1)^n V_n$ converge

Exple :

1/ $\sum (-1)^n . e^{-n^2}$.

. On pose $V_n = e^{-n^2}$.

$V_n \geqslant 0$

(V_n) est $\searrow$

$\lim V_n = 0$

$\xRightarrow{\text{Leibniz}} \sum (-1)^n V_n$ converge.

2/ $\sum_{n \geqslant 2} \frac{(-1)^n}{n \ln n}$ converge car la série s'écrit sous la forme $\sum (-1)^n V_n$ où $V_n = \frac{1}{n \ln n} > 0$, $\lim V_n = 0$ et (V_n) est $\searrow$.

2°/ $\sum (-1)^{n+1} \frac{\ln n}{n}$; $n \geq 1$.

$$\sum (-1)^{n+1} \frac{\ln n}{n} = - \sum (-1)^n \cdot \frac{\ln n}{n} \; ; \; n \geq 1$$

On pose $v_n = \frac{\ln n}{n} \geq 0$; $n \geq 1$.

$v_n = f(n)$ avec $f(x) = \frac{\ln x}{x}$.

f est dérivable sur $]0, +\infty[$ et $f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}$.

$f'(x) \leq 0$ sur $[e, +\infty[$, en particulier sur $[3, +\infty[$.

$\Rightarrow (v_n)_{n \geq 3}$ est décroissante.

d'autre part $\lim v_n = 0$.

D'après le critère de Leibniz $\sum u_n$ $\underline{cv}$.

3°/ $\sum u_n$; $u_n = \frac{(-1)^n}{n - \sqrt{n}}$, $n \geq 2$.

$$= (-1)^n \cdot v_n \; ; \; v_n = \frac{1}{n - \sqrt{n}} \; ; \; n \geq 2$$

$$v_n \geq 0$$

. $v_n = f(n)$ avec $f(x) = \frac{1}{x - \sqrt{x}}$

$$f'(x) = \frac{1 - 2\sqrt{x}}{2\sqrt{x}(x - \sqrt{x})^2} \leq 0 \quad \forall x \in [2, +\infty[.$$

$\Rightarrow (v_n)$ est $\searrow$; $\forall n \geq 2$.

. $\lim v_n = 0$

$\overset{\text{Leibniz}}{\Longrightarrow} \sum (-1)^n v_n$ $\underline{\text{converge}}$.

4°/ $\sum \sin\left(\frac{1}{n} + n\pi\right)$; $\sin\left(\frac{1}{n} + n\pi\right) = (-1)^n \underbrace{\sin\left(\frac{1}{n}\right)}_{v_n}$

. $v_n \geq 0$, $\lim v_n = 0$, (v_n) est $\searrow$ $\overset{\text{Leibniz}}{\Longrightarrow} \sum \sin\left(\frac{1}{n} + n\pi\right)$ $\underline{cv}$.

Etudier suivant la valeur de α la convergence de la série $\sum u_n$; $u_n = \ln\left(1+\frac{(-1)^n}{n^\alpha}\right)$; $\alpha > 0$.

Pour $n \geq 2$, $u_n = \frac{(-1)^n}{n^\alpha} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{n^{2\alpha}} + o\left(\frac{1}{n^{2\alpha}}\right)$

$= v_n + w_n$.

• $\sum v_n = \sum \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$ série de Riemann alternée converge ssi $\alpha > 0$

$\Rightarrow \sum v_n$ converge puisque $\alpha > 0$.

• $w_n = -\frac{1}{2n^{2\alpha}} + o\left(\frac{1}{n^{2\alpha}}\right) \underset{+\infty}{\sim} -\frac{1}{2n^{2\alpha}}$

$\sum w_n$ converge ssi $2\alpha > 1$ (S. Riemann).
ssi $\alpha > \frac{1}{2}$.

$\Rightarrow \sum u_n = \sum v_n + w_n$ converge si $\alpha > \frac{1}{2}$.
diverge sinon.

Rq : si $\alpha = \frac{1}{2}$: $\sum u_n = \sum \ln\left(1+\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)$ diverge.

$\ln\left(1+\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right) \underset{+\infty}{\sim} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$

mais $\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ converge (S. R. alternée cv $\alpha = \frac{1}{2} > 0$)

La règle des équivalents est mise en défaut pour les série qui ne sont pas à termes de signe constant à partir d'un certain rang.

• $\sum u_n$; $u_n = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n^\alpha + (-1)^n}}$; $\alpha > 0$.

$$u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n^\alpha\left(1 + \frac{(-1)^n}{n^\alpha}\right)}} = \frac{(-1)^n}{n^{\frac{\alpha}{2}}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{(-1)^n}{n^\alpha}}}$$

$$= \frac{(-1)^n}{n^{\frac{\alpha}{2}}} \cdot \left(1 + \frac{(-1)^n}{n^\alpha}\right)^{-\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{(-1)^n}{n^{\frac{\alpha}{2}}} \left(1 - \frac{(-1)^n}{2n^\alpha} + o\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)\right)$$

$$= \underbrace{\frac{(-1)^n}{n^{\frac{\alpha}{2}}}}_{v_n} \underbrace{- \frac{1}{2n^{\frac{3\alpha}{2}}} + o\left(\frac{1}{n^{\frac{3\alpha}{2}}}\right)}_{w_n}$$

$$= v_n + w_n.$$

or • $\sum v_n$ cv (S.R. alternée $\frac{\alpha}{2} > 0$).

• $\sum w_n$ cv ssi $\frac{3\alpha}{2} > 1$ ssi $\alpha > \frac{2}{3}$

cl: $\sum u_n$ cv ssi $\alpha > \frac{2}{3}$.

Comparaison à une intégrale:

Soit $f : [n_0, +\infty[\to [0, +\infty[$ continue, décroissante.

Alors $\sum_n f(n)$ et $\int^{+\infty} f(t)\,dt$ sont de même nature

Exp: • Nature de $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n}$.

On pose $f(t) = \frac{1}{t}$; $t \geq 1$.

• $f(t) \geq 0$.

• f est $\searrow$ sur $[1, +\infty[$.

$\Rightarrow \sum_{n \geq 1} f(n) = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n}$ et $\int_1^{+\infty} f(t)\,dt = \underbrace{\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t}}_{\text{diverge}}$

(Int. Riemann au $V(+\infty)$ $\alpha = 1 \leq 1$).

$\Rightarrow \sum \frac{1}{n}$ diverge

• de même $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{n \ln n} = \sum_{n \geq 2} f(n)$; $f : [2, +\infty[\to [0, +\infty[$, $t \mapsto \frac{1}{t \ln t}$, continue, $\searrow$.

et $\int_2^{+\infty} f(t)\,dt$ diverge (Int. Bertrand $\alpha = 1$, $\beta = 1$)

comp. série-Int $\Rightarrow \sum \frac{1}{n \ln n}$ diverge