**I.S.I.M.M**
**LF1 INFO**

# SÉRIE $N^o$ 2

## - INTÉGRALES IMPROPRES -

**Exercice 1**

Déterminer la nature des intégrales impropres suivantes:

1. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{e^{\cos t}}{t} dt.$
2. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dt}{e^t + t^2 e^{-t}}.$
3. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{e^{\frac{1}{t}}}{1+t^3} dt.$
4. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \ln(1+\frac{1}{t^2}) dt.$
5. $\displaystyle\int_0^{1} \frac{t^2-1}{\ln t} dt.$
6. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{t}\sin(t^{-\frac{5}{2}})}{\ln(1+t)} dt.$

**Exercice 2**

1. Montrer qu'il existe deux réels $a$ et $b$ tel que: $\forall t \in \mathbb{R}\backslash\{-2,-1\}$,
$$\frac{1}{(t+1)(t+2)} = \frac{a}{t+1} + \frac{b}{t+2}.$$
2. Calculer alors $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dt}{(t+1)(t+2)}$ après avoir justifié sa convergence.

**Exercice 3**

1. Montrer qu'il existe deux réels $a$ et $b$ tel que: $\forall u \in \mathbb{R}\backslash\{-1,1\}$,
$$\frac{1}{u^2-1} = \frac{a}{u+1} + \frac{b}{u-1}.$$
2. a. Justifier la convergence de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dt}{\sqrt{e^t+1}}.$

   b. Calculer alors $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dt}{\sqrt{e^t+1}}$ en utilisant le changement de variable $u = \sqrt{e^t+1}$.

**Exercice 4**

1. Montrer qu'il existe deux réels $a$, $b$ et $c$ tel que : $\forall t \in \mathbb{R}^*$,

$$\frac{1}{t(t^2+1)} = \frac{a}{t} + \frac{bt+c}{t^2+1}.$$

2. a. Justifier la convergence de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t\ln t}{(1+t^2)^2}dt$.

   b. Calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t\ln t}{(1+t^2)^2}dt$. (On pourra utiliser une intégration par parties).