Chapitre : Primitive & Integrale :

I - Primitive :

Déf : Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, on dit que la fct der $F : I \longrightarrow \mathbb{R}$ est une primitive de la fct $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ ssi :

$$F'(x) = f(x).$$

Exp : $F(x) = \frac{x^2}{2}$; $f(x) = x$

Théorème : Supposons que F_0 est une primitive de f, alors F est une autre primitive de f ssi $F(x) = F_0(x) + cte$

Notation : On note par $F(x) = \int f(x)dx$: la primitive de f.

Théorème :

Soient f et g 2 fcts $f : I \to \mathbb{R}$, $g : I \to \mathbb{R}$ alors on a

1) $\int (f+g)(x)\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx$

2) $\int (\alpha f)(x)\,dx = \alpha \int f(x)\,dx$; $\alpha \in \mathbb{R}^*$

Exp : Calculer

$$\int (x - 3x^2 - 2\sin(x))\,dx$$

en effet :

$$\int (x - 3x^2 - 2\sin(x))\,dx = \int x\,dx - 3\int x^2\,dx - 2\int \sin(x)\,dx$$

$$= \frac{x^2}{2} - 3\frac{x^3}{3} + 2\cos(x) + cste$$

(cste : constante de $\mathbb{R}$)

Théorème : (Integration par parties)

Soient f et g 2 fcts de classe C^1 sur un intervalle I de $\mathbb{R}$

$$\int f(x)\,g'(x)\,dx = f(x)\,g(x) \int f'(x)\,g(x)\,dx$$

Exp : Déterminer

$$\int x \ln(x)\,dx$$

en effet :

on pose $\begin{cases} f(x) = \ln(x) \\ g'(x) = x \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} f'(x) = \frac{1}{x} \\ g(x) = \frac{x^2}{2} \end{cases}$

en appliquant ~~la ta~~ le théorème Ipp on a :

$$\int x \ln(x)\,dx = \ln x \cdot \frac{x^2}{2} - \int \left(\frac{1}{x} \cdot \frac{x^2}{2}\right) dx$$

$$= \frac{x^2 \ln x}{2} - \frac{1}{2}\int x\,dx$$

Exp des primitives usuelles :

1) $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + cte$

2) $\int e^x\,dx = e^x + cte$

3) $\int \cos(x)\,dx = \sin(x) + cte$

4) $\int \sin(x)\,dx = -\cos(x) + cte$

5) $\int x^\alpha\,dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + cte$; $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$

6) $\int \frac{1}{\cos^2 x}\,dx = tg(x) + cte$.

7) $\int tg(x)\,dx = \ln|\cos(x)| + cte$

8) $\int ch(x)\,dx = sh(x) + cte$

9) $\int sh(x)dx = ch(x) + cte$

10) $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin(x) + cte$

11) $\int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan(x) + cte$

théorème: (changement des variables)

Soient I, J 2 intervalles dans $\mathbb{R}$ f une fct définie et cont sur J et $\varphi : I \to J$ une fct de classe C^1 sur I et $\varphi(I) \subset J$.

Si on pose $x = \varphi(t)$, $dx = \varphi'(t)dt$

alors : $\int f(x)dx = \int f(\varphi(t))\, \varphi'(t)dt$

$(\forall\ x \in J$ et $t \in I)$

exp:

Déterminer en utilisant un changement des variables la primitive

$I = \int \sin^2(t)\cos(t)\,dt$

Si on prend

$x = \sin(t)$

$dx = \cos(t)\,dt$

alors $I = \int x^2 dx$

$= \frac{x^3}{3} + cte$

$= \frac{\sin^3(t)}{3} + cte$

Exp de calcul des primitives:

A) $\int f(\cos(x)\ \sin(x))\,dx$

on pose $t = tg(\frac{x}{2})$

$\cos(x) = \frac{1-t^2}{1+t^2}$

$\sin(x) = \frac{2t}{1+t^2}$

et $dx = \frac{2dt}{1+t^2}$, $tg(x) = \frac{2t}{1-t^2}$

Exp: Déterminer la primitive suivante.

$I_1 = \int \frac{dx}{2+\cos(x)}$

en effet:

on pose $t = tg(\frac{x}{2})$ donc

$dx = \frac{2}{1+t^2}dt$ et

$\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$

en appliquant ce changement de variable on trouve:

$I_1 = \int \frac{\frac{2}{1+t^2}}{2+\frac{1-t^2}{1+t^2}}dt$

$= \int \frac{2}{\cancel{(1+t^2)}\,\frac{1-t^2+2t^2+2}{\cancel{(1+t^2)}}}dt$

$= \int \frac{2}{3+t^2}dt$

$= 2\int \frac{1}{3+t^2}dt$

$= 2\int \frac{1}{3(1+\frac{t^2}{3})}dt$

$= \frac{2}{3}\int \frac{dt}{1+(\frac{t}{\sqrt{3}})^2}$

$\int \frac{1}{1+y^2}dy$ on pose $y = \frac{t}{\sqrt{3}}$

$\Rightarrow t = \sqrt{3}y \Rightarrow dt = \sqrt{3}\,dy$

Donc $I_1 = \frac{2}{\cancel{3}}\int \frac{\cancel{\sqrt{3}}}{1+y^2}dy$

$= \frac{2}{\sqrt{3}}\int \frac{1}{1+y^2}dy$

$= \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan(y) + cte$

$= \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan\left(\frac{t}{\sqrt{3}}\right) + cte$

$I_1 = \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan\left(\frac{tg\left(\frac{x}{2}\right)}{\sqrt{3}}\right) + cte$

B] $\int f\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right) dx$

on pose $t = \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}$

$= \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{1}{n}}$

donc $t^n = \frac{ax+b}{cx+d}$

donc:

$x = \frac{b - t^n d}{t^n c - a}$

$dx = \left(\frac{b - t^n d}{t^n c - a}\right)' dt$

Exp:

$\int \frac{1}{x} \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}\, dx$

$a=1,\ b=-1,\ x=2,\ c=1$

$d=1$

on pose $t = \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$ donc

$x = \frac{1-t^2}{t^2-1} = \frac{1+t^2}{1-t^2} = x$

et $dx = \left(\frac{1+t^2}{1-t^2}\right)' dt$

$= \frac{4t}{(1-t^2)^2}\, dx$

alors on a:

$I_2 = \int \left(\frac{\cancel{1-t^2}}{1+t^2}\right) \cdot t \cdot \frac{4t}{(1-t^2)^{\cancel{2}}}\, dt$

$= \frac{4t^2}{(1+t^2)(1-t^2)}\, dt$

Indication: On peut utiliser

$\frac{4t^2}{(1+t^2)(1-t^2)} = \frac{-1}{t-1} + \frac{1}{t+1} - \frac{2}{1+t^2}$

Donc:

$I_2 = \int \frac{-1}{t-1}\, dt + \int \frac{dt}{t+1} - 2\int \frac{dt}{1+t^2}$

$= -\ln|t-1| + \ln|t+1| - 2\,\mathrm{arctg}(t) + cte$

alors:

$I_2 = -\ln\left|\sqrt{\frac{x-1}{x+1}} - 1\right| + \ln\left|\sqrt{\frac{x-1}{x+1}} + 1\right|$

$- 2 \arctan\left(\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}\right) + cte$

$\forall\ x > 1 \quad cte \in \mathbb{R}.$

Intégrale

On considère une fonction f continue sur $[a, b]$.

Théorème: Soit f une fonction continue sur un intervalle I, $a, b \in I$. On pose

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$

Alors, F est une primitive de f tel que $F(a) = 0$.

Théorème: Soit f une fonction continue sur un intervalle I, G est une primitive quelconque de f alors

$$\int_a^b f(x)\,dx = \left[G(x)\right]_a^b = G(b) - G(a)$$

Exemple

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \left[\arcsin(x)\right]_0^{\frac{1}{2}} = \arcsin\left(\frac{1}{2}\right) - \arcsin(0)$$
$$= \frac{\pi}{6} - 0 = \frac{\pi}{6}.$$

Propriétés de l'intégrale

Soient f et g deux fonctions continues sur $[a,b]$. On a :

1) $\int_a^b (f+g)(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$.

2) $\int_a^b (\lambda f)(x)\,dx = \lambda \int_a^b f(x)\,dx$, $(\lambda \in \mathbb{R}^*)$

3) $\forall x \in [a,b]$, $f(x) \geq 0$ alors $\int_a^b f(x)\,dx \geq 0$

4) Si $0 \leq f(x) \leq g(x)$, $\forall x \in [a,b]$ alors

$$0 \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx, \quad \forall x \in [a,b]$$

5) $\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx$.

6) Si f est continue sur $[a,b]$,

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$$

7) $\int_a^a f(x)\,dx = 0$.

8) $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$

$(c \in]a,b[)$, (relation de Chasles)

Exercice

Déterminer :

a) $I_1 = \int_0^1 \arctan(x)\,dx$

b) $I_2 = \int \cos(x)\,sh(x)\,dx$

c) $I_3 = \int \frac{x+1}{x^2+2x+3}\,dx$

d) $I_4 = \int \frac{1}{x^2+2x+3}\,dx$

Solution :

a) $I_1 = \int_0^1 \arctan(x)\,dx$

on pose $\begin{cases} U(x) = \arctan(x) \\ V'(x) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} U'(x) = \frac{1}{1+x^2} \\ V(x) = x \end{cases}$

En appliquant l'integration par partie

on a : $I_1 = \Big[x\arctan(x)\Big]_0^1 - \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{2x}{1+x^2}\,dx$

$= \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\Big[\ln|1+x^2|\Big]_0^1$

$= \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\left(\ln(2)\right)$

$= \frac{\pi}{4} - \frac{\ln(2)}{2}$

b) $I_2 = \int \cos(x)\,sh(x)\,dx$

on pose $\begin{cases} U(x) = sh(x) \\ V'(x) = \cos(x) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} U'(x) = ch(x) \\ V(x) = \sin(x) \end{cases}$

En appliquant l'intégration par partie on a.

$$I_2 = sh(x)\sin(x) - \underbrace{\int ch(x)\sin(x)\,dx}_{J_2} + \underline{\underline{cte}}$$

on pose $J_2 = \int ch(x)\sin(x)\,dx$

on pose $\begin{cases} u(x) = ch(x) \\ v'(x) = \sin(x) \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} u'(x) = sh(x) \\ v(x) = -\cos(x) \end{cases}$

En appliquant l'intégration par partie on a :

$$J_2 = -ch(x)\cos(x) + \int sh(x)\cos(x)\,dx + \underline{\underline{cte}}$$

(On remplace l'expression de J_2 dans I_2)

$$I_2 = sh(x)\sin(x) + ch(x)\cos(x) - \overbrace{\int sh(x)\cos(x)\,dx}^{I_2} + \underline{\underline{cte}}$$

Donc $2I_2 = sh(x)\sin(x) + ch(x)\cos(x) + \underline{\underline{cte}}$

$$I_2 = \frac{1}{2}\left(sh(x)\sin(x) + ch(x)\cos(x)\right) + \underline{\underline{cte}}$$

6) $I_3 = \int \frac{x+1}{x^2+2x+3}\,dx$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{2x+2}{x^2+2x+3}\,dx = \frac{1}{2}\ln|x^2+2x+3| + \underline{\underline{c}}$$

$$I_4 = \int \frac{dx}{x^2+2x+3} = \int \frac{dx}{(x+1)^2+2}$$

$$= \int \frac{dx}{2\left(\frac{(x+1)^2}{2}+1\right)}$$

$$I_4 = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{\left(\frac{(x+1)^2}{2}+1\right)} = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{\left(\frac{x+1}{\sqrt{2}}\right)^2+1}$$

on pose $\boxed{Y = \frac{x+1}{\sqrt{2}}} \Rightarrow x = \sqrt{2}\,Y - 1$

$\Rightarrow \boxed{dx = \sqrt{2}\,dY}$

Donc $I_4 = \frac{1}{2}\int \frac{\sqrt{2}\,dY}{Y^2+1} = \frac{1}{\sqrt{2}}\arctan(Y) + cte$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\left(\frac{x+1}{\sqrt{2}}\right) + cte$$

$$= \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\left[\ln|1+x^2|\right]_0^1$$

$$= \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\left(\ln(2)\right)$$

$$= \frac{\pi}{4} - \frac{\ln(2)}{2}$$

b) $I_2 = \int \cos(x)\, sh(x)\, dx$

on pose $\begin{cases} u(x) = sh(x) \\ v'(x) = \cos(x) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u'(x) = ch(x) \\ v(x) = \sin(x) \end{cases}$

Chapitre : Intégrale généralisée

Le but de ce chapitre est de généraliser la notion d'intégration à un intervalle autre qu'un segment c.à.d à une fonction continue par morceaux sur un intervalle non borné ou semi-ouvert.

1. Définition et exemples :

Définition : Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$, continue, on dit que f admet une intégrale généralisée (aussi on dit impropre) si l'un des conditions est vérifié :

i) $I = [a, b[$ où $-\infty < a < b \leq +\infty$ et $\boxed{\lim_{x \to b^-} \int_a^x f(t)\,dt}$ est finie.

ii) $I =]a, b]$ où $-\infty \leq a < b < +\infty$ et $\boxed{\lim_{x \to a^+} \int_x^b f(t)\,dt}$ est finie

Les Critères de convergence :

a) Critère de Comparaison :

Proposition : Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ d'extrémités $-\infty \leq a < b \leq +\infty$, f et g deux fonctions continues sur I tel que $\boxed{0 \leq f \leq g}$ on a :

1) Si $\int_a^b g(t)\,dt$ converge alors $\int_a^b f(t)\,dt$ converge.

2) Si $\int_a^b f(t)\,dt$ diverge alors $\int_a^b g(t)\,dt$ diverge.

Exemple : Déterminer la nature de

$$\int_1^{+\infty} \frac{dt}{\sqrt{t}\,(1+t)}$$

On a au $\mathcal{V}(+\infty)$ et $\forall t \geq 1$:

$$0 \leq \frac{1}{\sqrt{t}\,(1+t)} = \frac{1}{t^{\frac{1}{2}} + t^{\frac{3}{2}}} \leq \frac{1}{t^{\frac{3}{2}}}$$

et comme $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^{\frac{3}{2}}}\,dt$ converge (car c'est une intégrale de Riemann au $\mathcal{V}(+\infty)$ avec $\alpha = \frac{3}{2} > 1$)

Alors d'après le critère de comparaison $\int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{t}\,(1+t)}\,dt$ converge.

Exemples

* $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^{+\infty} \frac{1}{t}\, dt$ est divergente

car c'est une intégrale de Riemann au $v(+\infty)$ avec $\alpha = 1$

* $\displaystyle\int_{0}^{2} \frac{1}{t^2}\, dt$ divergente car c'est un intégrale de Riemann au $v(0)$ et $\alpha = 2 > 1$

b) Intégrale de Bertrand.

1) Soit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ et $0 < a < 1$

$$\int_{0}^{a} \frac{dt}{t^{\alpha} \ln^{\beta}(t)} \text{ : Converge ssi } \begin{cases} \alpha < 1 \text{ et } \forall \beta \in \mathbb{R} \\ \text{ou} \\ \alpha = 1 \text{ et } \beta > 1 \end{cases}$$

2) Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ et $a > 1$

$$\int_{a}^{+\infty} \frac{dt}{t^{\alpha} \ln^{\beta}(t)} \text{ : Converge ssi } \begin{cases} \alpha > 1 \text{ et } \beta \in \mathbb{R} \\ \text{ou} \\ \alpha = 1 \text{ et } \beta > 1 \end{cases}$$

Exemples

$\displaystyle\int_{4}^{+\infty} \frac{dt}{t^{2} \ln^{\frac{1}{2}}(t)}$ c'est une intégrale de Bertrand au $v(+\infty)$ avec $\alpha = 2$ et $\beta = \frac{1}{2}$

donc convergente.

$\displaystyle\int_{2}^{+\infty} \frac{dt}{t \ln^{2}(t)}$, $\alpha = 1$ et $\beta = 2 > 1$

donc c'est une intégrale de Bertrand convergente.

2) $I_2 = \int_1^{+\infty} e^{-t}\,dt = \lim_{x \to +\infty} \int_1^x e^{-t}\,dt$

$= \lim_{x \to +\infty} \left[-e^{-t} \right]_1^x = \lim_{x \to +\infty} \left(\underset{\downarrow\, 0}{-e^{-x}} + e^{-1} \right) = \frac{1}{e}$ (finie)

Donc I_2 est une intégrale généralisée Convergente.

3) $I_3 = \int_0^1 \frac{2t}{t^2-1}\,dt$, on a problème au borne 1.

$I_3 = \lim_{x \to 1^-} \int_0^x \frac{2t}{t^2-1}\,dt$

$= \lim_{x \to 1^-} \left[Ln\,|t^2-1| \right]_0^x$

$= \lim_{x \to 1^-} \left(Ln\,|x^2-1| \right) = -\infty$

Alors, I_3 est une intégrale généralisée divergente.

Les intégrales de références

a) Intégrale de Riemann :

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$, $a > 0$

* $\int_a^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha}\,dt$ converge ssi $\alpha > 1$
* $\int_0^a \frac{1}{t^\alpha}\,dt$ converge ssi $\alpha < 1$ $(a > 0)$

iii) $I =]a, b[$ où $-\infty \leq a < b \leq +\infty$:

il existe $c \in]a, b[$ tel que

$$\boxed{\lim_{x \to a^+} \int_x^c f(t)\,dt \text{ et } \lim_{x \to b^-} \int_c^x f(t)\,dt} \text{ sont finies}$$

* Dans ces trois cas, On dit que l'intégrale généralisé

$$\int_a^b f(t)\,dt$$ est convergente

et divergente dans le cas contraire.

Exemples : Déterminer la nature des intégrales généralisées suivantes.

1) $I_1 = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t}}$

On a problème au borne 1, I_1 est une intégrale généralisé

$$\int_0^x (1-t)^{-\frac{1}{2}}$$

$$\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t}} = \lim_{x \to 1^-} \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t}} =$$

$$= \lim_{x \to 1^-} - \left[\frac{(1-t)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} \right]_0^x = \lim_{x \to 1^-} -2\left(\sqrt{1-x} - 1\right) = 2.$$

b) Critère de Riemann

i) Critère de Riemann au $\mathcal{V}(+\infty)$:

Soit $a \in \mathbb{R}$ et $f : [a, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$, continue

1) S'il existe $\boxed{\alpha > 1}$ tel que $\boxed{\lim_{t \to +\infty} t^\alpha f(t) = 0}$ alors $\boxed{\int_a^{+\infty} f(t)\, dt \text{ converge}}$.

2) S'il existe $\boxed{\alpha \leq 1}$ tel que $\boxed{\lim_{t \to +\infty} t^\alpha f(t) = +\infty}$ alors $\boxed{\int_a^{+\infty} f(t)\, dt \text{ diverge}}$

ii) Critère de Riemann au $\mathcal{V}(0)$:

Soit $a > 0$ et $f :]0, a] \longrightarrow \mathbb{R}$, continue

1) S'il existe $\boxed{\alpha < 1}$ tel que $\boxed{\lim_{t \to 0^+} t^\alpha f(t) = 0}$ alors $\boxed{\int_0^a f(t)\, dt \text{ converge}}$.

2) S'il existe $\boxed{\alpha \geq 1}$ tel que $\boxed{\lim_{t \to 0^+} t^\alpha f(t) = +\infty}$ alors $\boxed{\int_0^a f(t)\, dt \text{ diverge}}$

Exemple : Déterminer la nature

de $\int_0^1 \frac{\sin(t)}{\sqrt{t}}\,dt$ c'est une intégrale

généralisée, le problème c'est en 0

$\frac{\sin(t)}{\sqrt{t}} \xrightarrow[t\to 0^+]{} 0$ D'après le critère de Riemann

$\sqrt{t} = t^{\frac{1}{2}}$ $\alpha = \frac{1}{2} < 1$

$\int_0^1 \frac{\sin(t)}{\sqrt{t}}\,dt$ converge

Remarques

1) Si $a > 0$, et $f :]0, a] \to \mathbb{R}$ continue

tel que $\lim_{t\to 0^+} f(t) = 0$, alors

$\int_0^a f(t)\,dt$ converge

2) Si $a \in \mathbb{R}$, $f : [a, +\infty[\to \mathbb{R}$, continue

tel que $\lim_{t\to +\infty} f(t) = +\infty$ alors $\int_a^{+\infty} f(t)\,dt$ diverge.