Fonction	Primitive	Domaine de validité
$x \longmapsto x^n \quad (n \in \mathbb{N})$	$x \longmapsto \dfrac{x^{n+1}}{n+1}$	$\mathbb{R}$
$x \longmapsto x^p \quad (p \in \mathbb{Z}\backslash\{-1\})$	$x \longmapsto \dfrac{x^{p+1}}{p+1}$	$]-\infty, 0[$ ou $]0, +\infty[$
$x \longmapsto x^q \quad (q \in \mathbb{R}\backslash\{-1\})$	$x \longmapsto \dfrac{x^{q+1}}{q+1}$	$]0, +\infty[$
$x \longmapsto \dfrac{1}{x}$	$x \longmapsto \ln\|x\|$	$]-\infty, 0[$ ou $]0, +\infty[$
$x \longmapsto e^x$	$x \longmapsto e^x$	$\mathbb{R}$
$x \longmapsto \sin x$	$x \longmapsto -\cos x$	$\mathbb{R}$
$x \longmapsto \cos x$	$x \longmapsto \sin x$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto 1 + \mathrm{tg}^2 x = \dfrac{1}{\cos^2 x}$	$x \mapsto \mathrm{tg}\, x$	$\left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[+ \pi\mathbb{Z}$
$x \longmapsto \mathrm{sh}\, x$	$x \longmapsto \mathrm{ch}\, x$	$\mathbb{R}$
$x \longmapsto \mathrm{ch}\, x$	$x \longmapsto \mathrm{sh}\, x$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto 1 - \mathrm{th}^2 x = \dfrac{1}{\mathrm{ch}^2 x}$	$x \mapsto \mathrm{th}\, x$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$x \mapsto \mathrm{Arcsin}\, x$	$]-1, 1[$
$x \mapsto \dfrac{1}{1+x^2}$	$x \mapsto \mathrm{Arctg}\, x$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$	$x \mapsto \mathrm{Argsh}\, x$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$	$x \mapsto \mathrm{Argch}\, x$	$x \in]1, \infty[)$
$x \mapsto \dfrac{1}{1-x^2}$	$x \mapsto \mathrm{Argth}\, x$	$]-1, 1[$

Opérations et dérivées

$(f+g)' = f' + g'$

$(\lambda f)' = \lambda f'$. λ désignant une constante

$(fg)' = f'g + fg'$

$$\left(\frac{1}{g}\right)' = -\frac{g'}{g^2}$$

$$\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{f'g - fg'}{g^2}$$

$$\boxed{(f \circ g)' = g' \times (f' \circ g)}$$

$(u^n)' = nu^{n-1}u' \quad (n \in \mathbb{N},\ n \geqslant 2)$

$$\left(\frac{1}{u^n}\right)' = -\frac{nu'}{u^{n+1}} \quad (n \in N,\ n \geqslant 1)$$

$(e^u)' = u'e^u$

$$(\ln|u|)' = \frac{u'}{u}$$

En particulier,si $u > 0$: $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, $\boxed{(u^\alpha)' = \alpha u' u^{\alpha-1}}$

Opérations et primitives

On suppose que u est une fonction dérivable sur un intervalle I

- Une primitive de $u'u^n$ sur I est $\dfrac{u^{n+1}}{n+1}$ $(n \in \mathbb{N}^*)$
- Une primitive de $\dfrac{u'}{u^2}$ sur I est $-\dfrac{1}{u}$.
- Une primitive de $\dfrac{u'}{u^n}$ sur I est $-\dfrac{1}{(n-1)\,u^{n-1}}$.$(n \in \mathbb{N}, n \geqslant 2$.
- Une primitive de $\dfrac{u'}{\sqrt{u}}$ sur I est $2\sqrt{u}$ (En supposant $u > 0$ sur I.)
- Une primitive de $\dfrac{u'}{u}$ sur I est $\ln|u|$.
- Une primitive de $u'e^u$ sur I est e^u.

En particulier, si $u > 0$ sur I et si $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$, une primitive de $u'u^\alpha$ sur I est :

$$\boxed{\int u'u^\alpha = \begin{cases} \dfrac{1}{\alpha+1} u^{\alpha+1} + C & \text{si } \alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-1\} \\ \ln u \ + C & \text{si } \alpha = -1 \end{cases}}$$

Dérivées usuelles

Fonction		Dérivée	Dérivabilité
x^n	$n \in \mathbb{Z}$	nx^{n-1}	$\mathbb{R}^*$
x^α	$\alpha \in \mathbb{R}$	$\alpha x^{\alpha-1}$	$\mathbb{R}_+^*$
$e^{\alpha x}$	$\alpha \in \mathbb{C}$	$\alpha e^{\alpha x}$	$\mathbb{R}$
a^x	$a \in \mathbb{R}_+^*$	$a^x \ln a$	$\mathbb{R}$
$\ln \lvert x \rvert$		$\dfrac{1}{x}$	$\mathbb{R}^*$
$\log_a x$	$a \in \mathbb{R}_+^* \smallsetminus \{1\}$	$\dfrac{1}{x \ln a}$	$\mathbb{R}^*$
$\cos x$		$-\sin x$	$\mathbb{R}$
$\sin x$		$\cos x$	$\mathbb{R}$
$\tan x$		$1 + \tan^2 x = \dfrac{1}{\cos^2 x}$	$\mathbb{R} \smallsetminus \left\{ \dfrac{\pi}{2} + k\pi \;\middle\vert\; k \in \mathbb{Z} \right\}$
$\operatorname{cotan} x$		$-1 - \operatorname{cotan}^2 x = \dfrac{-1}{\sin^2 x}$	$\mathbb{R} \smallsetminus \pi\mathbb{Z}$
$\operatorname{ch} x$		$\operatorname{sh} x$	$\mathbb{R}$
$\operatorname{sh} x$		$\operatorname{ch} x$	$\mathbb{R}$
$\operatorname{th} x$		$1 - \operatorname{th}^2 x = \dfrac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$	$\mathbb{R}$
$\operatorname{coth} x$		$1 - \operatorname{coth}^2 x = \dfrac{-1}{\operatorname{sh}^2 x}$	$\mathbb{R}^*$
$\operatorname{Arcsin} x$		$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$]-1\,;1[$
$\operatorname{Arccos} x$		$\dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$	$]-1\,;1[$
$\operatorname{Arctan} x$		$\dfrac{1}{1+x^2}$	$\mathbb{R}$
$\operatorname{Argsh} x$		$\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$	$\mathbb{R}$
$\operatorname{Argch} x$		$\dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$	$]1\,;+\infty[$
$\operatorname{Argth} x$		$\dfrac{1}{1-x^2}$	$]-1\,;1[$

IV Fonctions dérivées de fonctions réciproques

Fonction	Primitive	Intervalles
$\dfrac{1}{1+x^2}$	$\mathrm{Arctan}\, x$	$\mathbb{R}$
$\dfrac{1}{a^2+x^2}$ $a \in \mathbb{R}^*$	$\dfrac{1}{a}\,\mathrm{Arctan}\,\dfrac{x}{a}$	$\mathbb{R}$
$\dfrac{1}{1-x^2}$	$\begin{cases} \mathrm{Argth}\, x \\ \dfrac{1}{2}\ln\left\lvert\dfrac{1+x}{1-x}\right\rvert \end{cases}$	$\begin{cases}]-1\,;1[\\ ]-\infty\,;-1[\ , \\ ]-1\,;1[\ ,\ ]1\,;+\infty[\end{cases}$
$\dfrac{1}{a^2-x^2}$ $a \in \mathbb{R}^*$	$\begin{cases} \dfrac{1}{a}\,\mathrm{Argth}\,\dfrac{x}{a} \\ \dfrac{1}{2a}\ln\left\lvert\dfrac{a+x}{a-x}\right\rvert \end{cases}$	$\begin{cases}]-\lvert a\rvert\,;\lvert a\rvert[\\ ]-\infty\,;-\lvert a\rvert[\ . \\ ]-\lvert a\rvert\,;\lvert a\rvert[\ ,\ ]\lvert a\rvert\,;+\infty[\end{cases}$
$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\mathrm{Arcsin}\, x$	$]-1\,;1[$
$\dfrac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}$ $a \in \mathbb{R}^*$	$\mathrm{Arcsin}\,\dfrac{x}{\lvert a\rvert}$	$]-\lvert a\rvert\,;\lvert a\rvert[$
$\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$	$\mathrm{Argsh}\, x =$ $\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$	$\mathbb{R}$
$\dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$	$\begin{cases} \mathrm{Argch}\, x \\ -\,\mathrm{Argch}\,(-x) \\ \ln\lvert x+\sqrt{x^2-1}\rvert \end{cases}$	$\begin{cases}]1\,;+\infty[\\ ]-\infty\,;-1[\\ ]-\infty\,;-1[\text{ ou }]1\,;+\infty[\end{cases}$
$\dfrac{1}{\sqrt{x^2+a}}$ $a \in \mathbb{R}^*$	$\ln\left\lvert x+\sqrt{x^2+a}\right\rvert$	$\begin{cases} a>0\ :\ \mathbb{R} \\ a<0\ : \\ \quad]-\infty\,;-\sqrt{-a}[\\ \quad \text{ou }]\sqrt{a}\,;+\infty[\end{cases}$
$\dfrac{1}{(x^2+1)^2}$	$\dfrac{1}{2}\,\mathrm{Arctan}\, x + \dfrac{x}{2(x^2+1)}$	$\mathbb{R}$
$\dfrac{x^2}{(x^2+1)^2}$	$\dfrac{1}{2}\,\mathrm{Arctan}\, x - \dfrac{x}{2(x^2+1)}$	$\mathbb{R}$

I.S.I.M.M
LF1 INFO

SÉRIE $N^o 1$

- PRIMITIVES ET INTÉGRALES -

Exercice 1

Trouver les primitives de la fonction f sur l'intervalle I dans chacun des cas suivants:

1. $f : x \mapsto \tan x + \tan^3 x$, $I =]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.
2. $f : x \mapsto \frac{\arctan^2 x}{1+x^2}$, $I = \mathbb{R}$.
3. $f : x \mapsto \frac{1}{x \ln^3 x}$, $I =]1, +\infty[$.
4. $f : x \mapsto \frac{\tan x}{1+\tan^2 x}$, $I =]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.
5. $f : x \mapsto \cos^2 x \sin(2x)$, $I = \mathbb{R}$.
6. $f : x \mapsto \frac{1}{1-x}$, $I =]1, +\infty[$.
7. $f : x \mapsto \frac{\sin x}{1+\cos x+\tan^2 x}$, $I =]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.
8. $f : x \mapsto \frac{x}{x^2-1}$, $I =]-1, 1[$.

Exercice 2

Calculer les intégrales suivantes:

1. $\displaystyle\int_0^2 \frac{t^2}{\sqrt{5+t^3}} dt.$
2. $\displaystyle\int_e^4 \frac{dt}{t \ln t}.$
3. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t \cos(2t)\ dt.$
4. $\displaystyle\int_2^3 \frac{2t+1}{t^2+3t-4} dt.$

(*Indication:* On pourra remarquer que $\forall t \in \mathbb{R}\setminus\{-4,1\}$, $\frac{1}{t^2+3t-4} = \frac{1}{5}(\frac{1}{t-1} - \frac{1}{t+4})$).

Exercice 3

1. Montrer qu'il existe deux réels a et b tel que $\forall x \in \mathbb{R}\setminus\{-1,1\}$,

$$\frac{x^2+x+1}{(x-1)^2(x+1)^2} = \frac{a}{(x-1)^2} + \frac{b}{(x+1)^2}.$$

2. En déduire $\displaystyle\int_2^3 \frac{x^2+x+1}{(x-1)^2(x+1)^2} dx.$

Exercice 4

Calculer les intégrales suivantes en utilisant une intégration par parties:

1. $\displaystyle\int_0^1 x \arctan x \; dx.$
2. $\displaystyle\int_1^2 (x^2+1)\ln x \; dx.$
3. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x}{\cos^2 x} \; dx.$
4. $\displaystyle\int_0^1 xe^{-x} \; dx.$
5. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \cos x \; dx.$

Exercice 5

Calculer les intégrales suivantes en utilisant le changement de variable proposé:

1. $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{x^2+x+1}, \quad t = \frac{2}{\sqrt{3}}(x+\frac{1}{2}).$
2. $\displaystyle\int_0^4 \frac{dx}{\sqrt{x}+1}, \quad t = \sqrt{x}.$
3. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos x}{\cos x + \sin x} dx, \quad t = \tan x.$

Exercice 6

Soit $\displaystyle I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{\sin x}}{\sqrt{\sin x}+\sqrt{\cos x}} dx$ et $\displaystyle J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{\cos x}}{\sqrt{\sin x}+\sqrt{\cos x}} dx.$

1. Montrer à l'aide d'un changement de variable que $I = J$.
2. Calculer $I + J$ puis en déduire la valeur de I et J.

Ex1

Série N°1 : (Analyse).

1°/ $\cdot \int (\tan x + \tan^3 x)\, dx = \int \tan x (1 + \tan^2 x)\, dx$

$$= \int \underbrace{(1 + \tan^2 x)}_{u'} \underbrace{\tan x}_{u}\, dx$$

$$u' u \xrightarrow{P} \frac{1}{2} u^2 + c \,;\ c \in \mathbb{R}.$$

$$\underline{\forall n \neq 1} : \ u' u^n \xrightarrow{P} \frac{1}{n+1} u^{n+1} + c \,;\ \underset{n \neq -1}{c \in \mathbb{R}}.$$

$$\Rightarrow \int (\tan(x) + \tan^3(x))\, dx = \frac{1}{2} \tan^2(x) + c \,;\ c \in \mathbb{R} \,; \ \forall x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$$

2°/ $\cdot \int \frac{\arctan^2 x}{1 + x^2}\, dx = \int \underbrace{\frac{1}{1 + x^2}}_{u'} \cdot \underbrace{\arctan^2 x}_{u^2}\, dx$

$$= \frac{1}{2+1} \arctan^{2+1} x + c$$

$$= \frac{1}{3} \arctan^3 x + c \,;\ c \in \mathbb{R}. \ \ \forall x \in \mathbb{R}.$$

3°/ $\cdot \int \frac{1}{x \ln^3 x}\, dx = \int \underbrace{\frac{1}{x}}_{u'} \cdot \underbrace{\ln^{-3} x}_{u^{-3}}\, dx$

$$= \frac{1}{-3+1} \ln^{-3+1} x + c$$

$$= -\frac{1}{2 \ln^2 x} + c \,;\ c \in \mathbb{R}, \ \forall x > 1.$$

②

4°/ $\cdot \int \frac{\tan x}{1+\tan^2 x}\, dx = \int \frac{1}{\frac{1}{\tan x} + \tan x}\, dx$

$$= \int \frac{1}{\frac{\cos x}{\sin x} + \frac{\sin x}{\cos x}}\, dx$$

$$= \int \frac{1}{\frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos x \sin x}}\, dx$$

$$= \int \underbrace{\cos x}_{u'}\ \underbrace{\sin x}_{u}\, dx$$

$$= \frac{1}{2} \sin^2 x + C \ ; \ C \in \mathbb{R},\ \forall x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[.$$

5°/ $\cdot \int \cos^2 x\ \underbrace{\sin(2x)}_{2\sin x \cos x}\, dx = \int -2 \underbrace{(-\sin x)}_{u'}\ \underbrace{\cos^3 x}_{u^3}\, dx$

$$= -\frac{2}{3+1} \cos^{3+1}(x) + C \ ;$$

$$= -\frac{1}{2} \cos^4(x) + C \ ; \ C \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathbb{R}.$$

6°/ $\cdot \int \frac{-1}{1-x}\, dx = -\int \frac{-1}{1-x}$

$$= -\ln|1-x| + C$$

$$= -\ln(x-1) + C \ ; \ C \in \mathbb{R},\ \forall x > 1.$$

$\frac{u'}{u} \xrightarrow{I} \ln|u| + C \ ;$ $\underline{\underline{C \in \mathbb{R}}}$

(3°)

$1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$

7°/ $\bullet \int \frac{\sin x}{1+\cos x + \tan^2 x}\,dx = \int \frac{\sin x}{\cos x + 1 + \tan^2 x}\,dx$

$$= \int \frac{\sin x}{\cos x + \frac{1}{\cos^2 x}}\,dx$$

$$= \int \frac{\sin x}{\frac{\cos^3(x)+1}{\cos^2 x}}\,dx$$

$$= \frac{1}{-3}\int \frac{\overset{u'}{-3\sin x \cos^2 x}}{\underset{u}{\cos^3(x)+1}}\,dx$$

$$= -\frac{1}{3}\operatorname{Ln}|\cos^3(x)+1| + c$$

$$= -\frac{1}{3}\operatorname{Ln}(\cos^3(x)+1) + c \,;\; c \in \mathbb{R},\ \forall x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$$

8°/ $\bullet \frac{1}{2}\int \frac{\overset{u'}{2x}}{\underset{u}{x^2-1}}\,dx = \frac{1}{2}\operatorname{Ln}|x^2-1| + c$

$$= \frac{1}{2}\operatorname{Ln}(1-x^2) + c \,;\; c \in \mathbb{R},\ \forall x \in]-1,1[.$$

EX2

④

$\frac{u'}{\sqrt{u}} \xrightarrow{P} 2\sqrt{u}+c;\ c\in\mathbb{R}$

1°/ $\cdot \displaystyle\int_0^2 \frac{t^2}{\sqrt{5+t^3}}\,dt = \frac{1}{3}\int_0^2 \frac{3t^2}{\sqrt{5+t^3}}$

$$= \frac{1}{3}\left[2\sqrt{5+t^3}\right]_0^2$$

$$= \frac{1}{3}\left[2\sqrt{5+8} - 2\sqrt{5}\right]$$

$$= \frac{2}{3}\left(\sqrt{13}-\sqrt{5}\right).$$

2°/ $\cdot \displaystyle\int_e^4 \frac{dt}{t\,\mathrm{Ln}t} = \int_e^4 \frac{\overset{u'}{\left(\frac{1}{t}\right)}}{\underbrace{\mathrm{Ln}t}_{u}}\,dt$

$$= \left[\mathrm{Ln}|\mathrm{Ln}t|\right]_e^4$$

$$= \mathrm{Ln}(\mathrm{Ln}4) - \underbrace{\mathrm{Ln}(\underbrace{\mathrm{Ln}\,e}_{1})}_{0}$$

$$= \mathrm{Ln}(\mathrm{Ln}\,4).$$

3°/ $\cdot \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t\,\cos(2t)\,dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t\left[2\cos^2 t - 1\right]dt$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(-2\underbrace{(-\sin t)}_{u}\underbrace{\cos^2 t}_{u^2} - \sin t\right)dt$$

$$= \left[-\frac{2}{3}\cos^3 t + \cos t\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \left(\underbrace{-\frac{2}{3}\cos^3\frac{\pi}{2} + \cos\frac{\pi}{2}}_{0}\right) - \left(-\frac{2}{3}\cos^3 0 + \cos 0\right)$$

$$= -\left(-\frac{2}{3}+1\right)$$

$$= -\frac{1}{3}.$$

$\cdot \cos 2a = 2\cos^2 a - 1$

$= 1 - 2\sin^2 a$

$\cdot \sin 2a = 2\cos a \sin a$

⑤

4°/ $\cdot \displaystyle\int_2^3 \frac{2t+1}{t^2+3t-4}\,dt = ?$

$\forall t \in \mathbb{R}\setminus\{-4,1\},\quad \dfrac{1}{t^2+3t-4} = \dfrac{1}{5}\left(\dfrac{1}{t-1} - \dfrac{1}{t+4}\right).$

$$\Rightarrow \int_2^3 \frac{2t+1}{t^2+3t-4}\,dt = \int_2^3 \frac{2t+3-3+1}{t^2+3t-4}\,dt$$

$$= \int_2^3 \frac{\overbrace{2t+3}^{u'}}{\underbrace{t^2+3t-4}_{u}}\,dt - 2\int_2^3 \frac{1}{t^2+3t-4}\,dt$$

$$= \Big[\ln|t^2+3t-4|\Big]_2^3 - \frac{2}{5}\int_2^3 \frac{1}{t-1} - \frac{1}{t+4}\,dt$$

$$= \Big[\ln|t^2+3t-4|\Big]_2^3 - \frac{2}{5}\Big[\ln|t-1| - \ln|t+4|\Big]_2^3$$

$$= \big(\ln(14) - \ln(6)\big) - \frac{2}{5}\Big(\ln(2) - \ln(7) - \underbrace{\ln(1)}_{0} + \ln 6$$

$$= \ln(7) + \cancel{\ln 2} - \ln(3) - \cancel{\ln 2} - \frac{2}{5}\ln 2 + \frac{2}{5}\ln 7 - \frac{2}{5}\ln 6$$

$$= \ln(7) - \ln(3) - \frac{2}{5}\ln(2) + \frac{2}{5}\ln(7) - \frac{2}{5}\ln 2 - \frac{2}{5}\ln 3$$

$$= \frac{7}{5}\ln(7) - \frac{7}{5}\ln 3 - \frac{4}{5}\ln 2 .$$

$\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b);\ \forall a,b > 0$

Ex3.

1/ • $$\frac{a}{(x-1)^2} + \frac{b}{(x+1)^2} = \frac{a(x+1)^2 + b(x-1)^2}{(x-1)^2(x+1)^2}$$

$$= \frac{a(x^2+2x+1) + b(x^2-2x+1)}{(x-1)^2(x+1)^2}$$

$$= \frac{(a+b)x^2 + 2(a-b)x + (a+b)}{(x-1)^2(x+1)^2}$$

$$= \frac{x^2+x+1}{(x-1)^2(x+1)^2}; \quad \forall x \neq \pm 1.$$

Par identification:

$$\begin{cases} a+b=1 & ① \\ \cancel{2}(a-b) = \frac{1}{2} & ② \\ a+b = 1 & (\underline{\text{vérifié}}) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ①② \; a = \frac{3}{4} \\ b = \frac{1}{4}. \end{cases}$$

d'où l'existence de: $\left.\begin{matrix} a = \frac{3}{4} \\ b = \frac{1}{4} \end{matrix}\right)$ tel que:

$$\frac{x^2+x+1}{(x-1)^2(x+1)^2} = \frac{\frac{3}{4}}{(x-1)^2} + \frac{\frac{1}{4}}{(x+1)^2}; \quad \forall x \neq \pm 1.$$

2/ • $$\int_2^3 \frac{x^2+x+1}{(x-1)^2(x+1)^2}\,dx = \frac{3}{4}\int_2^3 \frac{1}{(x-1)^2}\,dx + \frac{1}{4}\int_2^3 \frac{1}{(x+1)^2}\,dx$$

$$= \frac{3}{4}\int_2^3 \underbrace{1}_{u'}\cdot\underbrace{(x-1)^{-2}}_{u^{-2}}\,dx + \frac{1}{4}\int_2^3 \underbrace{1}_{u'}\cdot\underbrace{(x+1)^{-2}}_{u^{-2}}\,dx$$

$$= \frac{3}{4}\left[\frac{1}{-2+1}(x-1)^{-2+1}\right]_2^3 + \frac{1}{4}\left[\frac{1}{-2+1}(x+1)^{-2+1}\right]_2^3$$

$$= \frac{3}{4}\left[-\frac{1}{(x-1)}\right]_2^3 + \frac{1}{4}\left[-\frac{1}{(x+1)}\right]_2^3$$

$$= \frac{3}{4}\left(-\frac{1}{2}+1\right) + \frac{1}{4}\left(-\frac{1}{4}+\frac{1}{3}\right) = \frac{3}{4}\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{4}\left(\frac{1}{12}\right) = \frac{19}{48}.$$

$$u' \cdot u^n \xrightarrow{P} \frac{1}{n+1}u^{n+1} + C; \; C \in \mathbb{R}, \; n \neq -1$$

ou

$$\frac{u'}{u^{n+1}} \xrightarrow{P} -\frac{1}{nu'} + C; \; \underline{C \in \mathbb{R}}.$$

Ex4 :

1°/ $\int_0^1 x \arctan x \, dx$

$$x \xrightarrow{I} \frac{1}{2}x^2$$

$$\arctan x \xrightarrow{d} \frac{1}{1+x^2}$$

$$\text{IPP} \Rightarrow \int_0^1 x \arctan x \, dx = \left[\frac{x^2 \arctan x}{2}\right]_0^1 - \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{x^2}{1+x^2}\, dx$$

Or $\frac{x^2+1-1}{1+x^2} = 1 - \frac{1}{1+x^2}$

$$\Rightarrow \int_0^1 x \arctan x \, dx = \left[\frac{x^2 \arctan x}{2}\right]_0^1 - \frac{1}{2}\int_0^1 \left(1 - \frac{1}{1+x^2}\right) dx$$

$$= \left[\frac{x^2 \arctan x}{2}\right]_0^1 - \frac{1}{2}\Big[x - \arctan x\Big]_0^1$$

$$= \frac{\arctan(1)}{2} - \frac{1}{2}\left(1 - \arctan 1\right)$$

$$= \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$= \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2} + \frac{\pi}{8}$$

$$= \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}.$$

2°/ $\int_1^2 (x^2+1)\ln x \, dx =$

$$x^2+1 \xrightarrow{I} \frac{x^3}{3}+x.$$

$$\ln x \xrightarrow{d} \frac{1}{x}.$$

$$\text{IPP} \Longrightarrow \int_1^2 (x^2+1)\ln x \, dx = \left.\left(\frac{x^3}{3}+x\right)\ln x\right]_1^2 - \int_1^2 \left(\frac{x^2}{3}+1\right) dx$$

$$= \left.\left(\frac{x^3}{3}+x\right)\ln x\right]_1^2 - \left[\left(\frac{1}{9}x^3+x\right)\right]_1^2$$

$$= \left(\frac{8}{3}+2\right)\ln 2 - \left(\frac{8}{9}+2\right) + \left(\frac{1}{9}+1\right)$$

$$= \frac{14}{3}\ln 2 - \frac{16}{9}.$$

3°/ $\int_0^{\pi/4} \frac{x}{\cos^2 x} \, dx$

$$x \xrightarrow{d} 1$$

$$\frac{1}{\cos^2 x} = 1+\tan^2 x \xrightarrow{I} \tan x$$

$$\text{IPP} \Longrightarrow \int_0^{\pi/4} \frac{x}{\cos^2 x} \, dx = \left. x \tan x \right]_0^{\pi/4} - \int_0^{\pi/4} \tan x \, dx$$

$$= \left. x \tan x \right]_0^{\pi/4} + \int_0^{\pi/4} \frac{\overset{u'}{-\sin x}}{\underset{u}{\cos x}} \, dx$$

$$= \left. x \tan x \right]_0^{\pi/4} + \Big[\ln|\cos x|\Big]_0^{\pi/4}$$

$$= \frac{\pi}{4} + \ln\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right).$$

$$= \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\ln 2.$$

4°/ $\int_0^1 x\, e^{-x}\, dx$

$e^{ax} \xrightarrow{P} \frac{1}{a} e^{ax}$ $_{x;}$ $\underline{a \in \mathbb{R}}$

$$x \xrightarrow{d} 1$$

$$e^{-x} \xrightarrow{P} -e^{-x}$$

$$\text{IPP} \Rightarrow \int_0^1 x e^{-x}\, dx = \left.-x e^{-x}\right]_0^1 + \int_0^1 e^{-x}\, dx$$

$$= \left.-x e^{-x} - e^{-x}\right]_0^1$$

$$= \left.-(x+1) e^{-x}\right]_0^1$$

$$= -2e^{-1} + e^{0}$$

$$= 1 - \frac{2}{e}.$$

5°/ $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \cos x\, dx$

$$x^2 \xrightarrow{d} 2x$$

$$\cos x \xrightarrow{P} \sin x$$

$$\text{IPP} \Rightarrow \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \cos x\, dx = \left.x^2 \sin x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin x\, dx.$$

$$x \xrightarrow{d} 1$$

$$\sin x \xrightarrow{P} -\cos x$$

$$\text{IPP} \Rightarrow \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin x\, dx = \left.-x\cos x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\, dx$$

$$= \left.-x\cos x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \left.\sin x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= 0 \quad + (1-0)$$

$$= 1.$$

$$\Rightarrow \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \cos x\, dx = \frac{\pi^2}{4} - 2.$$

Ex6:

1°/ $J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{\cos x}}{\sqrt{\sin x} + \sqrt{\cos x}} \, dx$

on pose $t = \frac{\pi}{2} - x \Rightarrow dx = -dt$

$\begin{cases} x = 0 \rightarrow t = \frac{\pi}{2} \\ x = \frac{\pi}{2} \rightarrow t = 0 \end{cases}$

$$\Rightarrow J = \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \frac{\sqrt{\cos(\frac{\pi}{2}-t)}}{\sqrt{\sin(\frac{\pi}{2}-t)} + \sqrt{\cos(\frac{\pi}{2}-t)}} (-dt)$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{\sin t}}{\sqrt{\cos t} + \sqrt{\sin t}} \, dt$$

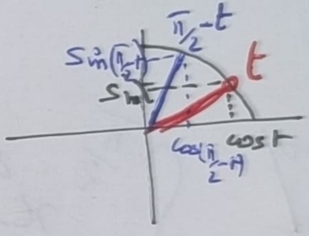
$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{\sin x}}{\sqrt{\sin x} + \sqrt{\cos x}} \, dx$$

$$= I .$$

$\cos(\frac{\pi}{2} - t) = \sin t$

$\sin(\frac{\pi}{2} - t) = \cos t$

$\int_a^b = -\int_b^a$



2°/ · $I + J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{\sin x}}{\sqrt{\sin x} + \sqrt{\cos x}} \, dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{\cos x}}{\sqrt{\sin x} + \sqrt{\cos x}} \, dx$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{\sin x} + \sqrt{\cos x}}{\sqrt{\sin x} + \sqrt{\cos x}} \, dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 \, dx$$

$$= x \Big]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{\pi}{2}$$

Puisque $J = I$.

$\Rightarrow 2I = \frac{\pi}{2}$

$\Rightarrow I = \frac{\pi}{4}$

et

$J = \frac{\pi}{4}$