Espaces Vectoriels.

Dans Ant ce qui soit k=12

I) Définitions - droprietes !

Def: Soit E un ensemble muni d'une loi de composition interne note + et d'une loi de Composition enterne

+:ExE ->E (u,v) pout v

et · 61K xE > E

(din) >> du

On dit que (E, +, 0) lot un espace victorial son 1k on E est un IK - espace vectoriel si

1) Yniv EE, Merzreu

2) Vui, V, WCE, u+ (v+w)=

3) Il eniste un élement de E noté E appelé élement neutre fare : 1 1 + 0 = = no

4) YNEE, FREE, NAN = DE (n'appeliélement symétrique de note-n)

5) + 26t, Hd, BEIK, (d+B) 20=

dx+ bx

6) Y REE, Y diBENC, d (B.N=(dB) N

H Luy EE, Ydele,

S FREE 1-N=N

Rg: les élements de E sont appelis vectures. Les élements de 11 sont

appelés les scalaires.

11 E= 22 = {(a,y) E Rx RZ Sn't MEE = u = (n/14) VEE = n = (n/14)

(u+v) = (n1941) + (n2142)

2 (24 M21 4 42)

YZER, Yu=(n,iy) EE du=d(x,,y,)= (dx,dy)

et 2, 8 En (2, 1/2) et = (231/3)

1) MAN= (n114,)+(n214) = (21+12, 4-4) = (n2 1/2) + (h11/y1)

21 m + (v+w)= (21141) + ((2314)) + (x3143))

= (21141) + (22+23142+43)

= (2,+(x2+n3), y+(y2+y3))

= ((x1+x2)+x3 9 (1+y2)+y3)

= ((2,+2),(y,+42))+ (x3+43)

= ((a,147) + (x142)) + (x3,143) = (u+12)+w

 $\exists ? O_{E}(a_{1}b) / u + O_{E} = u$ 6 / (B M) = d (B (21 1 41)) = d(Bx, Ay) = (2 Br, 1 of By) (x,14,)+(a,b)=(n,14) = dp(x,14) (x1+a1 y1+b) = (x11y1) =(xp) m. 2 (m+re) = 2 (2,14)+(21/2) = d(n,+y,y,+y) = 5 OE = (0,0) Soit OE = (0,0) on a: = (d(x1+x2) 1 d(y1+y2)) 11+0E = (314) - (90) = (dx1+dx21 dy1+dy2) = (2,+0, 4,+0) = (dn, g dy) +(dn, dy) = (x, 18,) = d(x1, y1)+d(x2, y2) = duedr. 4) m+n'= 0E 8) + 1. u = 1(n13/1) (x1141) + (a16) = (0,0) = (1.x, 14) (21+a1 y+h) =(0,0) a = 3 $x_1 + a = 0$ $x_1 = -a$ $y_1 + b = 0$ $y_2 = -b$ = (4,141)=4. Conclusion: (R2, +1) let un espace => n'= (-x, -y,) vectoriel son R. 5) (d+B) n= (d+B) (21) y1) I lus généralement : = ((d+B) y, (L+B) y,) * (Rn, +1.0) est un espace rectoriel An A. = (dx1+ Bx1, dy+ By1) 2) E= { f: R > R } = (dx19dy)+(Bx1By1) Alors E est un espace vectoriel = (day toly)T mun avec les lois suivants = d(m, y)+B(n, y) Big € E / (f+g) (n)=f(n)+g(n) = duy Bu + NEW, YEE, $(\lambda \beta)(n) = \lambda \beta(n)$

3) E=D[x] E= C[X] framie tes: Soit (E,+10) un espace nectorial som the Alus ona: Y MIN EE, YZIBENK: 11 0. U= OE 2 (-1). u= -u 31 d. DE = DE 4) (-d) m = o(-u)= - (du) 5) (d-p) u= du-\$u. 6) d(u, v) = du-dv. I du= 0E (=) d=0 on u=0E II Sous-espales Vectoriels: Dans toute la suite (E1+10) est un espace vectoriel su 1k. Définition? line partie F de E est dite un sons espace vectoriel de E At seulement is on a? 1 F # \$ 2) du EF, Y LEIK, YUEF 3) MYVEF, YM, VEF. (2) et (3) (du+ 12 GF, Y delle Yu, OCF

Remanque: 1) tout sous espace vectoriel F de E Contrait le vectour mul DE

Ex: F= { (n,y) En2, x+y=0} 1) OE = OR2 = (90)EF Can 0-10=0 21 boit 2 cm et 114 u= (2/1/4) 1 2/+4, =0 du = d(x194) = (dx1dy) ona: dx, +dy, =d(x, +y) =2.0-0 (dx, idy,) ef (=) d(2,94) EF (=) de don EF 3) Sit u, vEF u=(1,14); 1,14 =0 v= (12/1/2) 1 N2+42=0 Men = (21141)+(2,42) ma: =(x+x2, y+42) ペノナペシナリナナタースノナナ もろもり => 11+4 GF = 040=0 Ce: Fest un sons espace vectoriel de in2.

Remarque Tout sous espace rectoriel F de Exentient d'élèment neutre 0E. (2) Si b est un sonsepace vectoriel de E alos (F,+,0) est lui même est un espace nectoriel bulk. Arino: pour monter qui un ensamble Fist un espace vectoriel som IK, il suffit de monter que Fest un Sous-espace vectoriel de É. Définition- proposition: Soit n GEN , NI , Va -- 1, Vn des vectours de E. On appelle ambinarisan lineaire de V1, -- 1 Vn tout vectour et de Equi s'écrit m = 2, V, + 2, V2+ --= In devk.

Remarque Tout sous espace vectoriel F de Examplient l'élement neutre OE. & si f est un sonseque vectoriel de E alos (F,+,0) est lui mome est un espace nectoriel smik. Ains: pour monter qu' un ensamble F est un espace vectoriel som IK, il Suffit de monter que Fest un sous-espace vectriel de E. Définition- proposition: Soit n ENT IVAIVa --- I VA olls rections de É. On appelle combinaison lineaire de V1, -- 1Vn font rection it de Equi s'écuit m = du Vitte Vet = \frac{1}{k=1} \lambda_k \nabla_k. On note Vect (V11/21 - Vn) l'ensumble finne par toutes les ambinaisms linéaires finites des vectours Vir-, Vn vect (V11 y -- Vn)= { u = d1 V1+ da Vat ··· + dn Vn3 Alons Vect (V11 V21 -- 1 Vn) lestran gus espace vectriel de É appelé le sons-espace vectriel de El engendre par VIII-, Vn

Remarque: Rom monter que Flot un sons-emace vectoriel de E, il suffit de l'éaire sons frme d'un vect. Loposition - Définition: Sorant Fet G & sono-espaces vectriels de E : On note F+G= { n+v, nEF et vegj Alos F+G est un sons-espace rectriel de É appelé somme de F et G. F+61 contract Fet G. Définition: On dit que les Sons - espace vectoriels Fet G sout une somme directe on que la somme F+G est objecte 16 FNG = 30=3 On note dans ce cas cette somme que FPG Ex: E=D2 F= { (ny) E R2 / n+y=0} G= { (x19) Enl2, 2-4=03 1) Antrer que Fet Gont 2 sons-espaces vectriels de me. 21 Colouler FNG 3) Déduire. Solution: 1 F & (niy) ER2 n=-y? = (y(-1,1), ER3 = Vect {(1,1)}

3) E=R[X] E= C[X] Promietes:

Spit (E,+10) un espace nectriel son ik

Almona:

F WIN EEI YZIBEIK

11 0. U= OE

21 (-1). M= -M

31 d. DE= DE

4) (-d) m = o(-u)= - (du)

5) (d-p) u= du-\$u.

6) d(u= v) = du- dv.

7 du= 0E (=) d=0 on u=0E

II Sous-espaces Vectoriels:

Dans toute la suite (E1+10) est un espace vectoriel som 1k. Définition?

une partie F de E est dite un sons espace vectoriel de E It sentement is on a ?

1 F# \$ 3 du EF, Y LEIK, YUEF 3) MIREF, YMINEF.

(2) et (3) () du+ 12 GF,

VAEIR

Remarque; 1) tout sous espace vectoriel F de E Contrait le vectour mul DE

F= { (n,y) En2, x+y=0} 1) OE = OR2 = (20)EF Con 0+0=0 2) bût den et uff u= (2/1/3/) 1 2/14/, 20 du = d(x, 94,) = (dx, 1dy) ona: dx, +dy, =d(x,+y)

=2.0-0

(dxidy) ef (=) d(2, 94,) EF (=) dxu don EF 3) Soit u, ref u=(n,y); n,ty=0 v= (121/2) 1 x2+42=0 Mer= (21141)+(25142)

ma: =(2+1/2, 14+1/2)

スノースシャリーチャースノナダーインナリン => U+V GF = 0+0=0

Ce: Fest un sons epace vectoriel de in2.

=> Fest un 8ms tespace vectriel de R2: G= { (any) ERE , x= y } = {(11,1) and 1 11 602 } = Vect { (1,1)} => G est un sons-espace vectoriel de R2. 21 FNG= { ZEF et 26 G} = = = (x1y),x+y== et x-y=0} {x+y=0 =, {2x=0 x-y=0 =, {2y=0 =, x=y=0 => FN G = { DE } 31 F et 6 sont une somme directe. Définition: 2 sons espace nectouels Fet G de E sont dites souplimentais -res dans Ext. 1 FNG = JOE? 21 F+ G = E Dans ce vas on écrit FAG=E Example: E= C F= R G= iR 1 FNG= 903 Soit zec, z= a+ib EF EG => ECG+F D'autre F+GCE > FOG = E

III-Famille libre-Famille lite 5 Soit tun enace vectril bulk. Définition: soit non, V11/2--- Vn des vecturs 1) On dit que la famille (V,1 /2 ... Vn) est libre ou que Visign sont linéairement independantes si. lour tous scalaires dy, ..., dn d, V, + oz Vz + - - + on Vn = DE => &= da = da = dn=0 2) On dit que la famille (V11 -- , Vn) est lier s'il existe des scalaires du 1-10m Elle non tous muls tique 21 V1+ 0/2 V2+ -- +dn Vn = 0E Ex: E = 02 H= {(1,0), (9,1)} Montrer que H est libre: Soient d, 1 de COR tque: 01 V1+ de V2 = 022 (=) da (1,0) + da (2,1) = (90) (=) (9/1/2) = (0,0) (=) d1= d2=0 => Hest libra B F= { (1,0), (0,1), (1,1)} Montrer que Fest lier: En effet, sment de, of got fin type: 21 1/1 of 1/4 of 1/4= (90)

C=> { d1+d2=0 c=> { d1==d3 } d1==d3 => # F m'est pas libre duc elle est liée. Definitin: Soient V21 -- Vn des vecturs de an dit que la famille (V11-in) est generative. dows Exsi pour tout utt, il existe dur-du Elk tque u= dy y+ gy+ - · · + dn Vn =-0E: Exemple: E = 122 (10), (01)} Exemple: E=R2 F= } (40), (41)} Soit u = (N14) EE, ona: n = (niy)=(nio)+(qy)= x(0,1)+y(0,1) => M = on h + de Vs => F est une famille générative Jam E. Définition: Soit 3 = { Vn, V2 , -- , Vn) une famille de vecteurs de E. an dit que Best me base Si Best une famille libre et génératria:

Example: E=R2

D'après les exemples précédents on a montré que Fest une famille libre 2, génératrice duc Fest une base de 12². Cette base appelée base Canonique de 12².