Université de Monastir
Institut Supérieur d'Informatique
et de Mathématiques de Monastir

Année Universitaire : 2023/2024
Matière : Algèbre 1
Niveau : L1 INFO, S1

Examen

Exercice 1 *(8 pts)*
On considère l'ensemble

$$S = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x - \frac{1}{2}(y - z) = 0\right\}.$$

1. *Montrer que S est un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.*
2. *Déterminer une base de S et donner sa dimension.*
3. *Soit $T = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, -x + y + z = 0\}$. A-t-on $\mathbb{R}^3 = S \oplus T$?*
4. *Donner un supplément de S dans $\mathbb{R}^3$.*

Exercice 2 *(8 pts)*
Soit l'application :

$$\begin{aligned} g : \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y, z) &\longmapsto (x, y - z)\,. \end{aligned}$$

1. *Montrer que g est une application linéaire de $\mathbb{R}^3$ vers $\mathbb{R}^2$.*
2. *Montrer que g est non injective.*
3. *Donner une base de $Im(g)$ et en déduire que g est surjective.*
4. *g est-elle un isomorphisme de $\mathbb{R}^3$ vers $\mathbb{R}^2$.*

Exercice 3 *(4 pts)*
Soient a, b, c des nombres réels distincts.

1. *Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ un polyôme de degré inférieur ou égal à 2 tel que*

$$P(a) = P(b) = P(c).$$

   Expliquez pourquoi le polynôme P est constant.

2. *Que vaut la quantité*

$$\frac{(2024-a)(2024-b)}{(c-a)(c-b)} + \frac{(2024-b)(2024-c)}{(a-b)(a-c)} + \frac{(2024-c)(2024-a)}{(b-c)(b-a)}?$$