Chapitre : Développement limité

I. Formule de Taylor-Young :

Théorème :

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^n$ sur I et soit $a \in I$.

Alors, pour tout $x \in I$ on a :

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + (x-a)^n \varepsilon(x)$$

[illegible]

avec $\varepsilon : I \to \mathbb{R}$ tel que $\lim_{x \to a} \varepsilon(x) = 0$.

Remarque :

Si $a = 0$, la formule de Taylor-Young s'écrit :

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f^{(3)}(0)}{3!}x^3 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + x^n \varepsilon(x)$$

avec $\varepsilon(x) \xrightarrow[x \to 0]{} 0$.

Exemple

Si $f(x) = e^{x}$, en appliquant la formule de Taylor-Young à f en 0 on obtient :

$$e^{x} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + x^n \varepsilon(x), \; \varepsilon(x) \underset{x \to 0}{\longrightarrow} 0$$

II. Développement Limité :

Définition

Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction. Pour $a \in I$ et $n \in \mathbb{N}$, on dit que f admet un développement limité d'ordre n au point a $(DL_n(a))$ s'il existe $C_0, C_1, C_2, \ldots C_n \in \mathbb{R}$ et $\varepsilon : I \to \mathbb{R}$ tel que $\lim_{x \to a} \varepsilon(x) = 0$ de sorte que :

$$\boxed{f(x) = C_0 + C_1(x-a) + C_2(x-a)^2 + \cdots + C_n(x-a)^n + (x-a)^n \varepsilon(x).}$$

avec $\varepsilon(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} 0$

* On appelle les termes $C_0 + C_1(x-a) + C_2(x-a)^2 + \dots + C_n(x-a)^n$: la partie polynomiale de $DL_n(a)$

* On appelle $(x-a)^n \varepsilon(x)$: le reste de la $DL_n(a)$.

* On peut écrire le reste de la manière suivant au lieu d'écrire $\underbrace{(x-a)^n \varepsilon(x)}_{o((x-a)^n)}$, on écrit

<u>Remarques</u> : 1) Par identification avec la formule de Taylor-Young on a :

$$C_0 = f(a)$$
$$C_1 = f'(a)$$
$$C_2 = \frac{f''(a)}{2!}$$
$$C_3 = \frac{f^{(3)}(a)}{3!}$$
$$\vdots$$
$$C_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}$$

2) $DL_n(0)$ de f :

$f(x) = C_0 + C_1 x + C_2 x^2 + \dots + C_n x^n + x^n \varepsilon$

Par identification avec la formule de Taylor-Young en 0 on a :

$C_0 = f(0)$, $C_1 = f'(0)$, $C_2 = \frac{f''(0)}{2!}$,

$C_3 = \frac{f^{(3)}(0)}{3!}$, …, $C_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$.

Proposition

1) Si f est de classe C^n alors d'après Taylor-Young f admet un $DL_n(a)$

2) Si f admet un DL alors il est unique.

3) Si f est paire (resp. impaire) alors le DL de f contient seulement les puissances paires (resp. les puissances impaires).

Exemples: (En appliquant la formule de Taylor-Young en 0)

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} + x^{2n+1}\varepsilon(x)$$

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots + \frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n} + x^{2n}\varepsilon(x)$$

$C_0 = f(0)$

$C_1 = f'(0)$

$C_2 = \frac{f''(0)}{2!}$

$C_3 = \frac{f^{(3)}(0)}{3!}$

$C_4 = \frac{f^{(4)}(0)}{3!}$

$C_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$

Proposition

On suppose que f et g admettent des $DL_n(0)$

$$f(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \dots + c_n x^n + O_1(x^n)$$

$$g(x) = d_0 + d_1 x + d_2 x^2 + \dots + d_n x^n + O_2(x^n)$$

Alors :

1) $f+g$ admet un $DL_n(0)$ et on a :

$$f(x)+g(x) = (c_0+d_0) + (c_1+d_1)x + (c_2+d_2)x^2 + \dots + (c_n+d_n)x^n + O(x^n)$$

2) fg admet un $DL_n(0)$ et on a :

$$f(x)g(x) = (c_0 + c_1 x + c_2 x^2 \dots + c_n x^n)(d_0 + d_1 x + d_2 x^2 \dots d_n x^n) + O(x^n).$$

Exemple

$DL_2(0)$ $\sin(x) . \cos(x)$

$DL_2(0)$: $\sin(x) = x + x^2 \varepsilon_1(x)$, $\varepsilon_1 \xrightarrow[x\to 0]{} 0$

$DL_2(0)$: $\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + x^2 \varepsilon_2(x)$, $\varepsilon_2 \xrightarrow[x\to 0]{} 0$

$DL_2(0)$: $\sin(x)\cos(x) = x \cdot \left(1 - \frac{x^2}{2}\right) + x^2 \varepsilon(x)$, $\varepsilon(x) \xrightarrow[x\to 0]{} 0$

$= x + x^2 \varepsilon(x).$

Proposition

On suppose que f et g deux fonctions admettent $DL_n(0)$ respectivement :

$$f(x) = \underbrace{c_0 + c_1 x + \cdots + c_n x^n}_{C(x)} + x^n \varepsilon_1(x), \quad \varepsilon_1(x) \xrightarrow[x \to 0]{} 0$$

$$g(x) = \underbrace{d_0 + d_1 x + \cdots + d_n x^n}_{D(x)} + x^n \varepsilon_2(x), \quad \varepsilon_2(x) \xrightarrow[x \to 0]{} 0$$

Si $g(0) = 0$ alors la fonction $f \circ g$ admet un $DL_n(0)$ dont la partie polynomial $((C \circ D)(x))$ tronqué à n.

Exemple : Donner $DL_3(0)$ de $f(x) = e^{\sin(x)}$?

Solution :

$DL_3(0)$ de :

$$e^X = 1 + X + \frac{X^2}{2} + \frac{X^3}{6} + o_1(X^3)$$

$$\sin(x) = \left(x - \frac{x^3}{6}\right) + o_2(x^3)$$

$$e^{\sin(x)} = 1 + \left(x - \frac{x^3}{6}\right) + \frac{\left(x - \frac{x^3}{6}\right)^2}{2} + \frac{\left(x - \frac{x^3}{6}\right)^3}{6} + o(x^3)$$

* $\left(x - \frac{x^3}{6}\right)^2 = \cdots$
* $\left(x - \frac{x^3}{6}\right)^3 = \cdots$

$$f(x) = 1 + \frac{x^2}{2} + o(x^3)$$

$$f(x) + g(x) = (c_0 + d_0) + (c_1 + d_1)x + (c_2 + d_2)x^2 + \cdots + (c_n + d_n)x^n + o(x^n)$$

2) fg admet un $DL_n(0)$ et on a :

$$f(x)g(x) = (c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots + c_n x^n)(d_0 + d_1 x + d_2 x^2 + \cdots + d_n x^n) + o(x^n)$$

Exemple

$DL_2(0)$ $\sin(x) \cdot \cos(x)$

$DL_2(0)$: $\sin(x) = x + x^2 \varepsilon_1(x), \quad \varepsilon_1 \xrightarrow[x \to 0]{} 0$

$DL_2(0)$: $\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + x^2 \varepsilon_2(x), \quad \varepsilon_2 \xrightarrow[x \to 0]{} 0$

$DL_2(0)$: $\sin(x)\cos(x) = x \cdot \left(1 - \frac{x^2}{2}\right) + x^2 \varepsilon(x), \quad \varepsilon(x) \xrightarrow[x \to 0]{} 0$

$= x + x^2 \varepsilon(x)$.

Proposition

Soient f et g deux fonctions admettent un $DL_n(0)$ de parties régulières P et Q respectivement.

Si $g(0) \neq 0$ alors $\frac{f}{g}$ admet un $DL_n(0)$ de partie régulière $\frac{P}{Q}$

* Si $\deg P > \deg Q$: C'est une division Euclidienne
* Si $\deg P < \deg Q$: C'est une division suivant les puissances croissantes.

Exemples d'utilisation le développement limités:

* Le développement limité peut nous aider à calculer les limites qui se représentent comme forme indéterminer

Exemple: $\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos(x)}{x^2} = \frac{1}{2}$?

Proposition: Soit $f \in C^n(I, \mathbb{R})$ dont le $DL_n(0)$ est

$$f(x) = C_0 + C_1 x + \dots + C_n x^n + o(x^n).$$

Notons F une primitive de f Alors, le $DL_{n+1}(0)$ de F est

$$\boxed{F(x) = F(0) + C_0 x + C_1 \frac{x^2}{2} + C_2 \frac{x^3}{3} + \dots + C_n \frac{x^{n+1}}{n+1} + o(x^{n+1})}$$

exemple.

Donner le $DL_4(0)$ de $Ln(1+x)$

Solution on a $DL_3(0)$ de

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + o(x^3)$$

on sait que $\int \frac{1}{1+x}\,dx = Ln(1+x)$

donc $DL_4(0)$ de, $Ln(1+0) = Ln(1) = 0$

$$Ln(1+x) = \int 1 - x + x^2 - x^3\,dx + o(x^4)$$

$$= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + o(x^4)$$

On a $DL_2(0)$ de

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$$

$$-\cos(x) = -1 + \frac{x^2}{2} + o(x^2)$$

$$1 - \cos(x) = \cancel{1} - \cancel{1} + \frac{x^2}{2} + o(x^2)$$

$$\frac{1-\cos(x)}{x^2} = \frac{\frac{\cancel{x^2}}{2}}{\cancel{x^2}} + o(1) = \frac{1}{2} + \overset{\text{négligeable}}{o(1)}$$

Donc $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1-\cos(x)}{x^2} = \frac{1}{2}$

* Une autre utilité pour le développement limité c'est l'étude des fonctions.

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction

1) Si f admet un $DL_0(0)$ alors f est continue en 0.

($DL_0(0)$ de f :

$f(x) = C_0 + o(1)$, $C_0 = f(0)$ fini)

2) Si f admet un $DL_1(0)$ donc f est dérivable en 0.

($f(x) = C_0 + C_1 x + o(x)$

avec $C_1 = f'(0)$)

3) Si f admet un $DL_n(0)$, $n \geq 2$

$$f(x) = C_0 + C_1 x + C_2 x^2 + \dots + C_n x^n + o(x^n)$$

$$T_0 : y = C_0 + C_1 x \quad \left(\begin{array}{l} \text{car } C_0 = f(0) \\ C_1 = f'(0) \end{array} \right)$$

T_0 c'est l'équation de la tangente de f en 0

Si $a \neq 0$, $DL_n(a)$ de f

$$f(x) = \underbrace{C_0 + C_1(x-a)}_{} + \dots + C_n(x-a)^n + o((x-a)^n)$$

$T_a : y = C_0 + C_1(x-a)$: c'est l'équation de la tangente au $V(a)$

* La position de la courbe par rapport à la tangente :

On a $DL_n(0)$ de f

$$f(x) = \underbrace{C_0 + C_1 x}_{} + C_2 x^2 + \dots + C_n x^n + o(x^n)$$

$T_0 : y = C_0 + C_1 x$: l'équation de la tangente en 0

$$f(x) - y = f(x) - (C_0 + C_1 x) = C_2 x^2 + \dots + C_n x^n + o(x^n)$$

$$f(x) - y = C_p x^p + o(x^p)$$

- Si p est paire
  - Si $C_p > 0$: $C_p x^p > 0$ et C au dessus de T_0
  - Si $C_p < 0$: $C_p x^p < 0$: C au dessous de T_0
- Si p est impaire
  - $C_p > 0$: $C_p x^p$
    - $x > 0$: C au dessus de T_0
    - $x < 0$: C au dessous de T_0
  - $C_p < 0$: $C_p x^p$
    - $x > 0$: C au dessous de T_0
    - $x < 0$: C au dessus de T_0

Exercice :

Soit $f(x) = e^{\sin(x)} + \cos(x)$

1) Déterminer le $DL_3(0)$ de f

2) En déduire l'équation de la tangente

Solution : on a

$DL_3(0)$ de

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)$$

$$e^X = 1 + X + \frac{X^2}{2} + \frac{X^3}{6} + o(X^3)$$

Puis on remplace $X = x - \frac{x^3}{6}$, on trouve le $DL_3(0)$ de

$$e^{\sin(x)} = 1 + \left(x - \frac{x^3}{6}\right) + \frac{1}{2}\left(x - \frac{x^3}{6}\right)^2 + \frac{1}{6}\left(x - \frac{x^3}{6}\right)^3 + o(x^3)$$

$$= 1 + x - \cancel{\frac{x^3}{6}} + \frac{1}{2}\left[x^2\right] + \frac{1}{6}\left(\cancel{x^3}\right) + o(x^3)$$

$$\boxed{e^{\sin(x)} = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + o(x^3)}$$

$$\left(x - \frac{x^3}{6}\right)^3 = \left(x - \frac{x^3}{6}\right)^2\left(x - \frac{x^3}{6}\right)$$

$$= x^2\left(x - \frac{x^3}{6}\right) + o(x^3)$$

$$= x^3 + o(x^3)$$

on a $DL_3(0)$ de

$$\boxed{\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3)}$$

Donc $DL_3(0)$ de

$$f(x) = 1 + x + \cancel{\frac{x^2}{2}} + 1 - \cancel{\frac{x^2}{2}} + O(x^3)$$

$$= 2 + x + O(x^3)$$

2) D'après la question 1) on a

$T_0 : y = 2 + x$ c'est l'équation de la tangente en 0.

Exercice

$$f(x) = e^{\sin(x)}.$$

1) Déterminer $DL_3(0)$ de f

2) Déterminer l'équation de la tangente en 0 et en déduire la position de la C_f / T_0

Solution

1) D'après l'exercice précédent

$DL_3(0)$ de

$$f(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + O(x^3)$$

2) $T_0 : y = 1 + x$, c'est l'équation de la tangente de f en $x = 0$.

$$f(x) - (1 + x) = \frac{x^2}{2} \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$$

alors C_f est au dessus de T_0.