Université de Monastir
Institut Supérieur D'Informatique
et de Mathématiques de Monastir
Dépt. de Mathématiques

A.U: 2023-2024
L1 INFO
Algèbre 2
15-5-2024

Examen Final - Session Principale

• **NOTE : L'usage de la calculatrice est interdit.**

Exercice 1: On considère les ensembles suivants:

$$E = \left\{ A = \begin{pmatrix} a+b & -b \\ c & a+c \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}),\, a,b,c \in \mathbb{R} \right\}, \quad F = \left\{ A = \begin{pmatrix} 2x-y & y \\ x & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}),\, x,y \in \mathbb{R} \right\}.$$

1. Montrer que E et F sont des sous espaces vectoriels de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, préciser leurs dimensions puis donner une base B de E et une base B' de F.
2. E et F sont-ils supplémentaires dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$? Justifier la réponse.
3. Déterminer le sous espace $E \cap F$.
4. A-t-on $E + F = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$? Justifier la réponse.
5. Compléter la base B' de F en une base B_1 de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
6. *Ecrire les coordonnées de la matrice* $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ *dans la base* B_1.

Exercice 2: On considère m un réel et le système $(S_m) : \begin{cases} (m+1)x - y + 2z = 1 \\ -3x + (m-1)y - 2z = 0 \\ 3x - y + mz = d \end{cases}$, $d \in \mathbb{R}$

1. Ecrire la matrice A_m du système (S_m).
2. Donner le rang de la matrice A_m suivant les valeurs de m.
3. Pour quelles valeurs de m, le système (S_m) est-il un système de Cramer.
4. On prend $m = 0$, vérifier que (S_0) est un système de Cramer et le résoudre avec les formules de Cramer.
5. On prend $m = -4$, résoudre (S_{-4}) avec la méthode des pivots de Gauss et interpréter le résultat géométriquement.
6. Dans la suite, on prend $m = 2$ et on note $A = A_2$.
   On considère $\mathbb{R}^3$ muni de sa base canonique Bc et soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à la matrice A.
   (a) Ecrire l'expression de $f(x, y, z)$ pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.
   (b) Calculer le polynôme $P_f(x) = det(A - x\, I_3)$, $x \in \mathbb{R}$.
   (c) Déterminer les sous espaces
   $$E_0(f) = \{a = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\, f(a) = 0\} \quad et \quad E_6(f) = \{a = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\, f(a) = 6a\}$$
   préciser leurs dimensions et donner une base de chacun.
   (d) Déduire qu'il existe une base B' de $\mathbb{R}^3$, une matrice D diagonale tel que $mat(f,B') = D$
   (e) Ecrire la matrice de passage $P = Pass(Bc, B')$ et calculer P^{-1} .
   (f) Donner la relation entre A et D à l'aide de la matrice P.
   (g) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, calculer D^n et en déduire A^n.