Université de Monastir
Institut Supérieur D'Informatique
et de Mathématiques de Monastir
Dépt. de Mathématiques

A.U: 2024-2025
L1 INFO
17 Mars 2025
Durée 1 heure

Devoir Surveillé – Algèbre 2

L'usage de la calculatrice est interdit.

$\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ désigne l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre 2 à coefficients réels.

1. On considère l'ensemble:

$$E = \left\{ A = \begin{pmatrix} a-b & b-c \\ c-a & -a \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}),\ a,b,c \in \mathbb{R} \right\}$$

   (a) Montrer que E est sous espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et préciser sa dimension.

   (b) Donner un supplémentaire F de E dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

   (c) Donner une base B de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ adaptée à la décomposition $\mathcal{M}_2(\mathbb{R}) = E \oplus F$.

   (d) Ecrire les coordonnées de la matrice identité I_2 dans la base B.

2. On considère $B_1 = (e_1,e_2,e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et $B_2 = (E_{1,1},\ E_{1,2},\ E_{2,1},\ E_{2,2})$ la base canonique de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Soit f l'application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ définie par:

$$\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ f(x,y,z) = \begin{pmatrix} x-y & y-z \\ z-x & -x \end{pmatrix}.$$

   (a) Ecrire $A = mat(f,\ B_1,\ B_2)$.

   (b) Déterminer le rang de A par la méthode du pivot de Gauss.

   (c) Effectuer, lorsque cela est possible, les opérations suivantes:
   $(A - 4I_3)$, $det(A)$, $A.\,{}^tA$, $A.({}^tA + A)$, $tr({}^tA\,.A)$, $tr(A\,.{}^tA + I_3)$.

   On considère les vecteurs: $u_1 = e_1 + e_2,\ u_2 = e_3,\ u_3 = e_1$ et les vecteurs

   $v_1 = 3E_{2,1},\ v_2 = E_{1,1},\ v_3 = -E_{2,2},\ v_4 = E_{1,2}$

   (d) Vérifier que $B_1' = (u_1,\ u_2,\ u_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$ et $B_2' = (v_1,\ v_2,\ v_3,\ v_4)$ est une base de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

   (e) Ecrire les matrices de passage $P = pass(B_1,\ B_1')$ et $Q = pass(B_2,\ B_2')$.

   (f) Déterminer $M = mat(f,\ B_1',\ B_2')$.

   (g) Ecrire la relation entre A et M à l'aide des matrices de passage P et Q.

   On considère $N = \dfrac{1}{3}\left({}^tA\,.A - 2I_3\right)$ et g l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à N.

   (h) Ecrire l'expression de $g(x,\ y,\ ,z)$, pour tout $(x,\ y,\ ,z) \in \mathbb{R}^3$.

   (i) Calculer $det(N)$ et justifier que g est un automorphisme de $\mathbb{R}^3$.

   (j) Montrer que $(3N - I_3)(9N^2 - 3I_3) = 0$ et déduire N^{-1} en fonction de I_3, N et N^2.