REPUBLIQUE TUNISIENNE
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
UNIVERSITÉ DE MONASTIR
Institut Supérieur d'Informatique et de Mathématiques de Monastir

L1: EEA-info-Tic

Séries numériques

- Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite de $\mathbb{R}$ ou de $\mathbb{C}$.

On définit les sommes partielles par : $S_N = \sum_{n=0}^{N} u_n = u_0 + u_1 + \dots + u_N$.

- On dira que la série $\sum u_n$ est :

convergente si $\lim S_n$ existe, finie et on note alors $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ (somme de cette série).

EX 1. En calculant les sommes partielles, déterminer si les séries suivantes sont convergentes. Le cas échéant calculer leur somme.

1/ $\sum_{n\geq 2} \ln\left(1-\frac{1}{n}\right)$

2/ $\sum_{n\geq 2} \frac{1}{n(n-1)}$

3/ $\sum_{n\geq 0} e^{-3n}$

4/ $\sum_{n\geq 2} \frac{\ln\left(\frac{n+1}{n}\right)}{\ln(n)\ln(n+1)}$.

Correction :

1/ • $S_N = \sum_{n=2}^{N} \ln\left(1-\frac{1}{n}\right) = \sum_{n=2}^{N} \ln\left(\frac{n-1}{n}\right)$

$= \sum_{n=2}^{N}\left(\ln(n-1) - \ln(n)\right)$.

$$\Rightarrow S_N = \left(\ln(1) - \cancel{\ln(2)}\right) + \left(\cancel{\ln(2)} - \cancel{\ln(3)}\right) + \cdots + \left(\cancel{\ln(N)} - \ln(N+1)\right)$$

$$= \underbrace{\ln(1)}_{0} - \ln(N+1)$$

$$= -\ln(N+1) .$$

$$\bullet \lim_{N\to+\infty} S_N = \lim_{N\to+\infty} -\ln(N+1) = -\infty$$

$\Rightarrow \sum_{n\geq 2} \ln\left(1-\frac{1}{n}\right)$ est divergente.

2°/ $\sum_{n\geq 2} \frac{1}{n(n-1)}$.

$$\bullet\ \frac{1+n-n}{n(n-1)} = \frac{n-(n-1)}{n(n-1)} = \frac{\cancel{n}}{\cancel{n}(n-1)} + \frac{-\cancel{(n-1)}}{n\cancel{(n-1)}}$$

$$= \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}$$

$$\Rightarrow S_N = \sum_{n=2}^{N} \frac{1}{n(n-1)} = \sum_{n=2}^{N}\left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right)$$

$$= \left(1 - \cancel{\tfrac{1}{2}}\right) + \left(\cancel{\tfrac{1}{2}} - \cancel{\tfrac{1}{3}}\right) + \cdots + \left(\cancel{\tfrac{1}{N-1}} - \frac{1}{N}\right)$$

$$= 1 - \frac{1}{N}.$$

$$\Rightarrow \lim_{N\to+\infty} S_N = \lim_{N\to+\infty}\left(1 - \frac{1}{N}\right) = 1 . \text{ existe finie}$$

$\Rightarrow \sum_{n\geq 2} u_n$ converge et $\underbrace{\sum_{n=2}^{+\infty} u_n = 1}_{\text{Somme}}$.

3°/ $\sum_{n\geq 0} e^{-3n}$; $u_n = e^{-3n}$

$$= \left(e^{-3}\right)^n$$

$$= \left(\frac{1}{e^3}\right)^n ; \ n \geq 0.$$

Rpp : Série géométrique :

$u_n = q^n$, $q \in \mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

- Si $q \in]-1,1[\Rightarrow \sum_{n\geq 0} q^n$ converge et $\sum_{n=0}^{+\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$.

- Sinon $\sum q^n$ diverge.

$$\sum_{n\geq 0} u_n = \underbrace{\sum_{n\geq 0} \left(\frac{1}{e^3}\right)^n}_{\text{Série géo, } q\in]-1,1[}, \quad q = \frac{1}{e^3} \in]-1,1[$$

$\Rightarrow \sum_{n\geq 0} u_n$ est convergente

et $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \frac{1}{1-q} = \frac{1}{1-\frac{1}{e^3}}$

$= \frac{e^3}{e^3-1}$.

4°/ $\sum_{n\geq 2} u_n$; $u_n = \frac{\ln\left(\frac{n+1}{n}\right)}{\ln(n)\ln(n+1)}$

$\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b$

$$= \frac{\ln(n+1) - \ln(n)}{\ln(n)\ln(n+1)}$$

$$= \frac{\cancel{\ln(n+1)}}{\ln(n)\cancel{\ln(n+1)}} - \frac{\cancel{\ln(n)}}{\cancel{\ln(n)}\ln(n+1)}$$

$$= \frac{1}{\ln(n)} - \frac{1}{\ln(n+1)}, \quad n \geq 2.$$

$$\Rightarrow S_N = \sum_{n=2}^{N}\left(\frac{1}{\ln(n)} - \frac{1}{\ln(n+1)}\right) = \left(\frac{1}{\ln(2)} - \cancel{\frac{1}{\ln(3)}}\right) + \left(\cancel{\frac{1}{\ln(3)}} - \cancel{\frac{1}{\ln 4}}\right) + \dots + \left(\cancel{\frac{1}{\ln N}} - \frac{1}{\ln(N+1)}\right)$$

$$= \frac{1}{\ln(2)} - \frac{1}{\ln(N+1)}; \quad N \geq 2.$$

$$\Rightarrow \lim S_N = \lim \frac{1}{\ln 2} - \frac{1}{\ln(N+1)}$$

$$= \frac{1}{\ln(2)}$$

$\Rightarrow \sum U_n$ converge

et

$$\sum_{n=2}^{+\infty} U_n = \frac{1}{\ln(2)}.$$

- Série de Riemann : $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$ converge ssi $\alpha > 1$
- Série de Riemann alternée :

$$\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n^\alpha} \text{ converge ssi } \alpha > 0.$$

Exp : 1°/ . $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$ converge (S.R $\alpha = 2 > 1$)

. $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n\sqrt{n}} = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^{3/2}}$ converge (S.R $\alpha = \frac{3}{2} > 1$)

. $\left.\begin{matrix} \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n} \\ \sum_{n\geq 1} \frac{1}{\sqrt{n}} \end{matrix}\right\}$ diverge

. $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n}$ converge (Série de Riemann alternée $\alpha = 1 > 0$)

. $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ converge (S.R. alternée $\alpha = \frac{1}{2} > 0$)

- Critère de comparaison :

$$0 \leq u_n \leq v_n \; ; \; \forall n \geq n_0.$$

si $\sum v_n$ cv $\Rightarrow \sum u_n$ cv

si $\sum u_n$ div $\Rightarrow \sum v_n$ div

Ex: Utiliser les critères de comparaison pour étudier les séries de terme général :

1°/ $u_n = \dfrac{1}{n\sin\left(\frac{1}{n}\right)}$; $n \geq 1$.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$: $u_n > 0$.

D'autre part, on a : $0 < n \sin\left(\frac{1}{n}\right) \leq n$

$$\Rightarrow \frac{1}{n\sin\left(\frac{1}{n}\right)} \geq \frac{1}{n}$$

or $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}$ diverge (S. Riemann $\alpha = 1 \leq 1$)

$\Rightarrow$ Par le critère de comparaison,

$\sum \frac{1}{n\sin\left(\frac{1}{n}\right)}$ diverge.

2°/ $u_n = \dfrac{1! + 2! + \dots + n!}{(n+3)!}$; $n \geq 1$.

$\forall n \in \mathbb{N}^*$: $u_n > 0$

- $\forall k \in [\![1, n]\!]$: $k! \leq n!$

$$\Rightarrow 1!\,2!\,3!\dots n! \leq \underbrace{n!\,n!\,n!\dots n!}_{n \text{ fois}}$$

$\Rightarrow 1!+2!+\dots+n! \leq n.n!$

$$\Rightarrow u_n = \frac{1!+2!+\dots+n!}{(n+3)!} \leq \frac{n.\cancel{n!}}{(n+3)(n+2)(n+1).\cancel{n!}}$$

$$\leq \frac{\cancel{n}}{n.n.\cancel{n}} \quad \text{car} \quad \frac{1}{n+3} \leq \frac{1}{n}, \quad \frac{1}{n+2} \leq \frac{1}{n}, \quad \frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{n}$$

$$\Rightarrow 0 < u_n \leq \frac{1}{n^2}$$

or $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$ converge ($S.R\ \alpha = 2 > 1$)

$\xrightarrow[\text{comparaison}]{\text{critère}} \sum_{n\geq 1} u_n$ converge.

3°/ $u_n = \frac{1}{n\cos^2 n}$; $n \geq 1$.

$$0 < u_n \geq \frac{1}{n} \quad \left(\begin{array}{l} 0 < \cos^2 n \leq 1 \\ 0 < n\cos^2 n \leq n \\ 0 < \frac{1}{n\cos^2 n} \geq \frac{1}{n} \end{array} \right)$$

or $\sum \frac{1}{n}$ div ($S.R\ \alpha = 1 \leq 1$)

$\xrightarrow{\text{comp}} \sum u_n$ $\underline{\text{div}}$.

• Critère d'équivalence :

$$u_n, v_n \geqslant 0$$

Si $\underbrace{u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n}_{\text{c.à.d } \lim \frac{u_n}{v_n}=1} \Rightarrow \sum u_n$ et $\sum v_n$ ont la même nature.

Ex: Utiliser les critères d'équivalence pour étudier les séries de terme général :

1/ $u_n = \dfrac{1-\cos(\frac{1}{n})}{n^\alpha}$; $\alpha \in \mathbb{R}$.

$u_n \geqslant 0$.

• $\cos(x) \underset{0}{\sim} 1 - \dfrac{x^2}{2} \Leftrightarrow 1-\cos(x) \underset{0}{\sim} \dfrac{x^2}{2}$

$\Rightarrow \cos(\underbrace{\tfrac{1}{n}}_{+\infty \to 0}) \underset{+\infty}{\sim} 1 - \dfrac{1}{2n^2} \Leftrightarrow 1 - \cos(\frac{1}{n}) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{2n^2}$.

$\Rightarrow u_n = \dfrac{1-\cos(\frac{1}{n})}{n^\alpha} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{\frac{1}{2n^2}}{n^\alpha} = \dfrac{1}{2\, n^{\alpha+2}}$

or $\sum \dfrac{1}{n^{\alpha+2}}$ converge ssi $\alpha+2>1$ (S.R)
ssi $\alpha > -1$

$\xrightarrow{\text{Critère équi}} \sum u_n$ cv ssi $\alpha > -1$.

$2°/ \quad u_n = \dfrac{1}{\sqrt{n^2-1}} - \dfrac{1}{\sqrt{n^2+1}} \; ; \; n \geq 2.$

$$= \left(\frac{\sqrt{n^2+1} - \sqrt{n^2-1}}{\sqrt{n^2-1} \cdot \sqrt{n^2+1}} \right) \cdot \frac{\left(\sqrt{n^2+1} + \sqrt{n^2-1}\right)}{\left(\sqrt{n^2+1} + \sqrt{n^2-1}\right)}$$

$$= \frac{2}{\left(\sqrt{n^2-1} \cdot \sqrt{n^2+1}\right) \cdot \left(\sqrt{n^2+1} + \sqrt{n^2-1}\right)}$$

Or. $\sqrt{n^2-1} \cdot \sqrt{n^2+1} \underset{+\infty}{\sim} n \cdot n = n^2.$

• $\sqrt{n^2+1} + \sqrt{n^2-1} = n\sqrt{1+\frac{1}{n^2}} + n\sqrt{1-\frac{1}{n^2}}$

$$= n\left(\sqrt{1+\underbrace{\tfrac{1}{n^2}}_{0}} + \sqrt{1-\underbrace{\tfrac{1}{n^2}}_{0}}\right) \underset{+\infty}{\sim} 2 \cdot n$$

$$\Rightarrow u_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{\cancel{2}}{n^2 \cdot \cancel{2}n} = \frac{1}{n^3}$$

Or $\sum \frac{1}{n^3}$ converge ($S.R \; \alpha = 3 > 1$)

$\xrightarrow{\text{Critère d'équi}} \sum u_n$ converge.

• Règle de $(n^\alpha U_n)$: critère de Riemann :

s'il existe $\alpha>1$ / $\lim n^\alpha U_n = 0 \Rightarrow \sum U_n$ cv

s'il existe $\alpha\leq 1$ / $\lim n^\alpha U_n = +\infty \Rightarrow \sum U_n$ div.

Ex : Déterminer la nature de la série $\sum_n U_n$:

1/ $U_n = 3^{\ln(n)} e^{-\sqrt{n}}$; $n\geq 1$.

$U_n > 0$, $\forall n\geq 1$.

$$U_n = 3^{\ln(n)} \cdot e^{-\sqrt{n}}$$

$a^b = e^{b\ln a}$; $a>0$.

$$= e^{\ln(3)\ln(n)} \cdot e^{-\sqrt{n}}$$

$$= n^3 \cdot e^{-\sqrt{n}} \ ; \ n\geq 1$$

On prend $\alpha = 2$: $\lim n^\alpha U_n = \lim n^2 \cdot n^3 \cdot e^{-\sqrt{n}}$

$$= \lim n^5 \cdot e^{-\sqrt{n}}$$

$$= \lim e^{5\ln n - \sqrt{n}}$$

$$= \lim e^{\sqrt{n}\left(5\frac{\ln n}{\sqrt{n}} - 1\right)}$$

$$= 0$$

$\xRightarrow[\text{de Riemann}]{\text{critère}} \sum U_n$ converge.

2°/ $u_n = n^2 e^{\alpha n^2}$; $\alpha \in \mathbb{R}$.

$$\lim u_n = \begin{cases} +\infty & \text{si } \alpha \geq 0 \\ 0 & \text{si } \alpha < 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow \sum u_n$ diverge si $\alpha \geq 0$

• si $\alpha \underline{\underline{<}} 0$: on prend $\alpha = 2$:

$$\lim n^{\alpha} u_n = \lim n^2 (n^2 e^{\alpha n^2})$$

$$= \lim n^4 e^{\alpha n^2}$$

$$= 0$$

$\Rightarrow \sum u_n$ converge si $\alpha < 0$.

Règle de d'Alembert $u_n \geq 0$

$$\lim \frac{u_{n+1}}{u_n} = \ell$$

si $\ell > 1 \Rightarrow \sum u_n$ div

si $\ell < 1 \Rightarrow \sum u_n$ cv

Règle de Cauchy :

$$\lim \sqrt[n]{u_n} = \ell$$

si $\ell > 1 \Rightarrow \sum u_n$ div

si $\ell < 1 \Rightarrow \sum u_n$ cv.

si $\ell = 1 \Rightarrow$ on ne peut pas conclure.

<u>EX</u> : 1°/ $\sum u_n$; $u_n = \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$; $n \geq 1$

$$\lim \sqrt[n]{u_n} = \lim \left(\frac{n}{n+1}\right)^n$$

$$= \lim \left(\frac{1}{\frac{n+1}{n}}\right)^n$$

$$= \lim \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}$$

$$= \lim \frac{1}{e^{n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}} \quad \Big| \; \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{n}$$

$$= \lim \frac{1}{e^{\cancel{n} \cdot \frac{1}{\cancel{n}}}} = \frac{1}{e} < 1$$

C. Cauchy $\Rightarrow \sum u_n$ <u>converge</u>.

2°/ $\sum U_n$; $U_n = \dfrac{n^{\ln n}}{(\ln n)^n}$; $n \geq 2$.

$$\sqrt[n]{U_n} = \sqrt[n]{\frac{n^{\ln n}}{(\ln n)^n}} = \frac{n^{\frac{\ln n}{n}}}{\ln n} = \frac{e^{\frac{\ln n}{n}\cdot \ln n}}{\ln n}$$

$$= \frac{e^{\frac{(\ln n)^2}{n}}}{\ln n}$$

or $\lim\limits_{+\infty} \dfrac{(\ln n)^2}{n} = 0$

$$\Rightarrow \lim \sqrt[n]{U} = \lim \frac{e^{\cancel{\frac{(\ln n)^2}{n}}\,0}}{\ln n} = 0 < 1$$

$\overset{\text{R. Cauchy}}{\Rightarrow}$ $\sum U_n$ $\underline{CV}$.

3°/ $\sum U_n$; $U_n = \dfrac{n!}{n^n}$; $n \geq 1$

$$\frac{U_{n+1}}{U_n} = \frac{n^n}{(n+1)^n} = \frac{1}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n} = \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} = \frac{1}{e^{n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}}$$

$$\underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{e}$$

$\Rightarrow \lim \dfrac{U_{n+1}}{U_n} = \dfrac{1}{e} < 1 \overset{\text{Alembert}}{\Rightarrow} \sum U_n$ $\underline{\text{converge}}$.