Université de Monastir Institut Supérieur d'informatique et de Mathématiques de Monastir Département de Mathématiques Année Universitaire : 2024/2025

Matière : Algèbre 1 Niveau : L1INFO

Devoir Surveillé

Exercice 1

Soit $A(X) = X^5 - 2X^4 + \alpha X^3 + \beta X^2 + \gamma X - 1$ avec α, β et $\gamma \in \mathbb{R}$.

- 1. Déterminer les réels α , β , γ pour que 1 soit une racine triple de A.
- 2. Factoriser, dans ce cas, le polynôme A dans $\mathbb{R}[X]$ et dans $\mathbb{C}[X]$.

Exercice 2

Soit $P(X) = X^4 + 2X^3 + 2X^2 + 2X + 1$.

- 1. Montrer que -1 est une racine double de P.
- 2. Effectuer la division euclidienne de P par X-i.
- 3. Sans faire la division euclidienne de P par X+i, justifier pourquoi le reste est forcément nul.
- 4. En déduire la factorisation de P dans $\mathbb{C}[X]$ et dans $\mathbb{R}[X]$.
- 5. On considère la fraction rationnelle :

$$F(X) = \frac{X^4 + 1}{P(X)}.$$

Décomposer en éléments simples la fraction F dans $\mathbb{C}(X)$ et dans $\mathbb{R}(X)$.