Chapitre 2 : Les fonctions trigonométriques réciproques :

1) La fct arc sinus :

1.1 : Définition :

La fct sinus est continue et strictement croissante sur $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, qu'elle applique bijectivement sur $[-1, 1]$.
Elle admet donc une bijection définie sur $[-1, 1]$ appelée arcsinus et notée arcsin.

$f : \sin : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to [-1, 1]$ continue et est ↗
$\quad y \mapsto \sin(y)$

$f^{-1} : \arcsin : [-1, 1] \to [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$
$\quad x \mapsto \arcsin x$

On a alors :

$$(y = \arcsin x \text{ et } x \in [-1, 1]) \iff (x = \sin(y) \text{ et } y \in [-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}])$$

Le réel $\arcsin(x)$ est donc le nombre appartenant à $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

Remarque : ∀

$$\forall x \in [-1, 1],\ \sin(\arcsin(x)) = x$$
$$\forall y \in [-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}],\ \arcsin(\sin(y)) = y$$

Exemple :

$\arcsin(\sin(\pi)) = \arcsin(\sin(0)) = 0$
(car $0 \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$)

1.2 : propriétés :

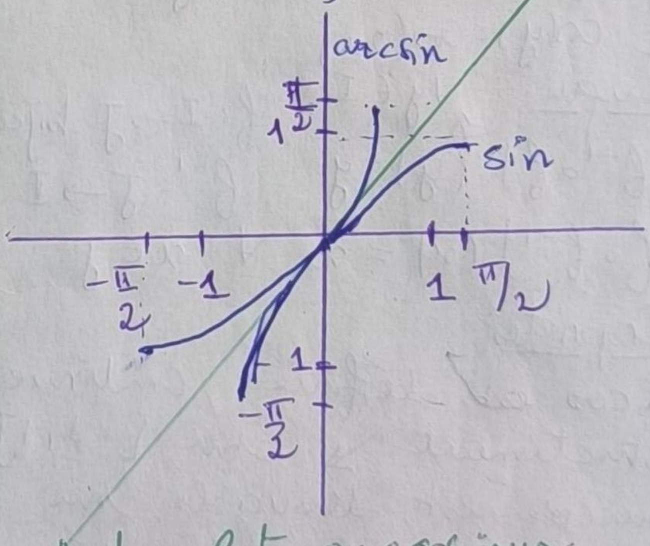
Les propriétés suivantes se déduisent de celle de la fct sinus à ~~l'ordre~~ l'aide des résultats sur les fcts réciproques.

* La fct arcsin est définie continue et strictement ↗ sur $[-1, 1]$
* La fct arcsin est impaire
* La fct arcsin est dérivable sur $]-1, 1[$ et on a :

$$\forall x \in]-1, 1[,\ (\arcsin(x))' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

1-3 : Représentation graphique :

Elle se déduit de celle de sinus par symétrie par rapport à la première bissectrice (dans un repère orthonormé).



2 : La fct arccosinus :

1 : Définition :

La fct cosinus est continue et strictement ↘ sur $[0, \pi]$ qu'elle applique bijectivement sur $[-1, 1]$. Elle admet donc une bijection réciproque définie sur $[-1, 1]$

appelée arccosinus et notée arccos. On a alors:

$(y = \arccos(x) \text{ et } x \in [-1,1])$

$\iff (x = \cos(y) \text{ et } y \in [0,\pi])$

$f : \cos\ [0,\pi] \to [-1,1]$ continue & est $\searrow$

$y \longmapsto \cos(y)$

$f^{-1} : \arccos\ [-1,1] \to [0,\pi]$

$x \longmapsto \arccos(x)$

Remarques:

$\cos(\arccos(x)) = x$ ~~pour~~ $\forall x \in [-1,1]$

$\arccos(\cos(y)) = y \quad \forall y \in [0,\pi]$.

Exp: $\arccos(\cos(2\pi)) = \arccos(\cos(0)) = 0$

on $\in [0,\pi]$ donc on cherche un point

$\begin{cases} y \in [0,\pi] \\ \text{et} \\ \cos(y) = \cos(2\pi) \end{cases}$ donc $y = 0$

Remarque: $\forall y \in I$ $\quad f : I \to J$ bijection $\quad f^{-1} : J \to I$

$(f^{-1} \circ f)(y) = y$

$(f \circ f^{-1})(x) = x \quad \forall\ x \in J$

2. Propriétés:

* arccos est définie, continue & strictement $\searrow$ sur $[-1,1]$
* arccos est dérivable sur $]-1,1[$ et $\forall x \in]-1,1[$

$(\arccos(x))' = \dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$

* On a $\forall x \in [-1,1]$:

$\arccos(-x) + \arccos(x) = \pi$

Preuve

On veut montrer que

$\underbrace{\arccos(x) + \arccos(-x)}_{f(x)} = \pi$

$D_f = [-1,1]$ et f est dérivable sur $]-1,1[$

$f'(x) = (\arccos(-x) + \arccos(x))'$

$= \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 0$

Donc $f(x) = cte \quad \forall x \in [-1,1]$

or $f(0) = 2\arccos(0)$

$= 2\left(\frac{\pi}{2}\right) = \pi$

donc $cte = \pi$

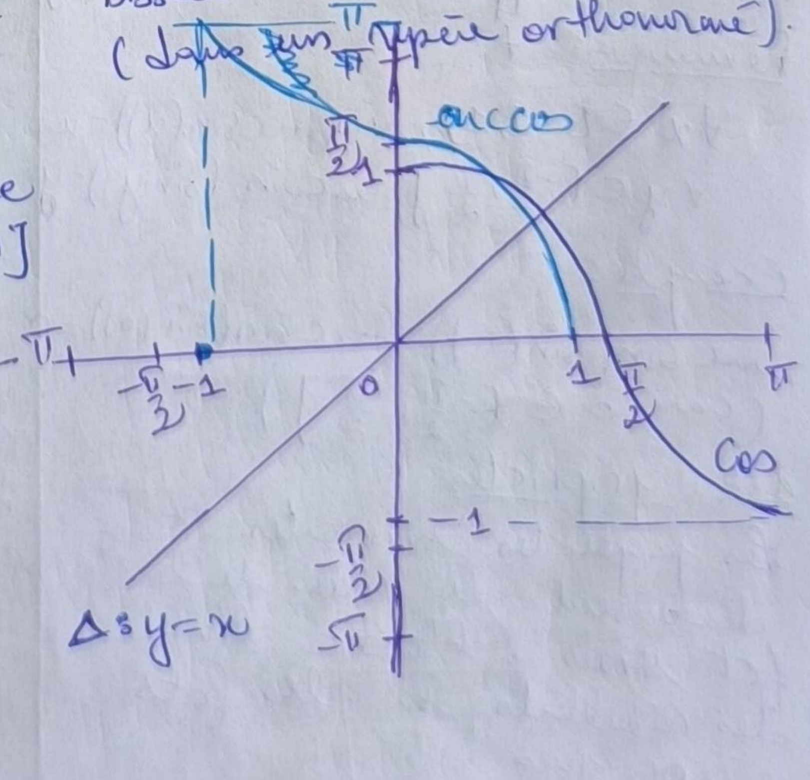
$\left(\begin{array}{c} \arccos(0) = ? \\ \cos(?) = 0 \\ ? \in [0,\pi] \end{array}\right)$

D'où $\arccos(-x) + \arccos(x) = \pi$

$\forall\ x \in [-1,1]$

Représentation graphique:

Elle se déduit par symétrie par rapport à la première bissectrice de celle de cosinus (dans un repère orthonormé).



3.~~4~~ : La fonction arctangente :

3.1 : Définition :

La fct tgt est cont strict ↗ sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ qu'elle applique bijectivement sur $\mathbb{R}$. Elle admet donc une bijection réciproque appelée arctg et notée par arctan

~~Dém~~

$$f : \tan \;]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\to \mathbb{R} \text{ cont et } \nearrow$$
$$y \mapsto tg(y)$$

$$f^{-1} \arctan : \mathbb{R} \to]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$$
$$x \mapsto \arctan(x)$$

Remarque :

$\forall x \in \mathbb{R}$, $\tan(\arctan(x)) = x$

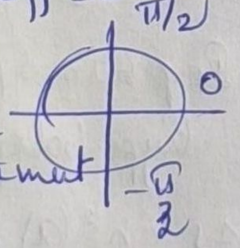
$\forall y \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ $\arctan(\tan(y)) = y$

Exp :

$\arctan(\tan(2\pi)) =$

$\arctan(\tan(0)) = 0$

3.2 : Propriétés :



arctan est définie continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

* arctan est impaire
* arctan est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a :

$$(\arctan(x))' = \frac{1}{1+x^2} ; \forall x \in \mathbb{R}$$

Quelques autres formules :

* $\forall x \in [-1, 1]$, $\arcsin(x) + \arccos(x) = \frac{\pi}{2}$
* $\forall x \in \mathbb{R}^*$, ~~arctet~~ $\arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & \text{si } x > 0 \\ -\frac{\pi}{2} & \text{si } x < 0 \end{cases}$

Les ~~facteurs~~ fonctions hyperbolique & ses réciproques :

1) Cosinus hyperbolique & son inverse :

$\forall x \in \mathbb{R}$, le cosinus hyperbolique est notée par ch.

$$ch(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

Dans $[0, +\infty[$ la fct "ch" est continue & strictement croissante

$$ch : [0, +\infty[\to [1, +\infty[$$

Donc ch réalise une bijection de $[0, +\infty[$ vers $[1, +\infty[$ et sa fonction réciproque est notée par argch.

$$argch : [1, +\infty[\to [0, +\infty[$$
$$y \mapsto \ln\left(y + \sqrt{y^2 - 1}\right)$$

argch est dérivable sur $[1, +\infty[$ et sa fct dérivée est :

$$(argch(y))' = \frac{1}{\sqrt{y^2 - 1}},$$

$$\forall y \in]1, +\infty[$$

2) Sinus hyperbolique et son inverse :

Soit $x \in \mathbb{R}$, la fct sin est hyperbolique ~~est~~ définie par et notée par ~~ch~~ sh

$$sh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

La fct sh est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$. elle réalise une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, sa fct réciproque est "argsh", argsh : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$y \mapsto \ln(y+\sqrt{y^2+1})$$

* Argsh est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$, sa dérivée

$$(\text{argsh}(y))' = \frac{1}{\sqrt{y^2+1}}$$

3) Tangente hyperbolique et son inverse:

On définit la fct tangente hyperbolique par : th

$$th(x) = \frac{sh(x)}{ch(x)} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$$

sa fct dérivée est donnée par

$$(th(x))' = \left(\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}\right)' = \frac{4}{(e^x+e^{-x})^2} > 0$$

cela implique que la fct th est croissante sur $\mathbb{R}$, et comme elle est continue donc elle réalise une bijection de $\mathbb{R}$ vers $th(\mathbb{R}) =]-1,1[$

Sa fct récip est argth : $]-1,1[\to \mathbb{R}$

$$y \mapsto \text{argth}(y) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+y}{1-y}\right)$$

argth est dérivable sur $]-1,1[$ et

$$(\text{argth}(y))' = \frac{1}{1-y^2} \; ; \forall y \in]-1,1[$$

4) Propriétés trigonométriques & trigonométrique hyperboliques :

Proposition (trigonométrique) :

1) $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

2) $\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b) \quad \forall a,b \in \mathbb{R}$

3) $\cos(2a) = \cos^2(a) - \sin^2(a)$
$= 1 - 2\sin^2(a)$
$= 2\cos^2(a) - 1$

4) $\sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + \sin(b)\cos(a) \quad \forall a,b \in \mathbb{R}$

5) $\sin(2a) = 2\sin(a)\cos(a)$

6) $\cos(a+\pi) = -\cos(a)$

$\sin(a+\pi) = -\sin(a)$

7) $\cos(a+\frac{\pi}{2}) = \sin a$ et

$\sin(a+\frac{\pi}{2}) = -\cos(a)$

8) $tg(a+b) = \dfrac{tg(a)+tg(b)}{1-tg(a)tg(b)}$

Proposition (trigonométrique hyperbolique)

1) $ch^2(a) - sh^2(a) = 1, \forall a \in \mathbb{R}$

2) $ch(a+b) = ch(a)ch(b) + sh(a)sh(b)$

3) $ch(2a) = ch^2(a) + sh^2(a)$

4) $sh(a+b) = sh(a)ch(b) + sh(b)ch(a)$

5) $sh(2a) = 2\,sh(a)ch(a)$.

6) $th(a+b) = \dfrac{th(a)+th(b)}{1+th(a)th(b)}$

7) $th(2a) = \dfrac{2\,th(a)}{1+th^2(a)}$

8) Les fonctions sh, th sont

impaires et la fct ch est paire.

9) $(ch(x))' = sh(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$

10) $(sh(x))' = ch(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$

11) $$(th(x))' = \left(\frac{sh(x)}{ch(x)}\right)' = \frac{1}{ch^2(x)} = 1 - th^2(x), \forall x \in \mathbb{R}$$

Chapitre : Développement limités :