II Vecteurs aléatoires :

Définition :

Soient X et Y deux v.a définis sur l'esp de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$

l'application : $\Omega \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$\omega \longmapsto (X(\omega) ; Y(\omega))$

est appelée couple aléatoire discret de marginale X et Y ; le couple sera noté (X, Y).

Définition :

La loi du couple (X,Y) notée $P_{X,Y}$ est définie par :

$$\forall B \subset \mathbb{R}^2 \ ; \ P_{(X,Y)}(B) = \mathbb{P}\big(\omega \in \Omega \ ; \ (X(\omega) ; Y(\omega)) \in B\big)$$

- la loi $P_{X,Y}$ est entièrement déterminée par :

$$P_{X,Y}(i,j) = \mathbb{P}(X = i \text{ et } Y = j) = \mathbb{P}(X = i, Y = j) \quad \forall\, i \in X(\Omega),\ j \in Y(\Omega)$$

Proposition :

Si $(X;Y)$ est un couple aléatoire les lois marginales de X et de Y peuvent se calculer à partir de la loi $P_{X,Y}$

en effet $\forall i \in X(\Omega)$; $P(X=i) = \sum_{j \in Y(\Omega)} P(X=i, Y=j)$

$\forall j \in Y(\Omega)$ $P(Y=j) = \sum_{i \in X(\Omega)} P(X=i, Y=j)$

Preuve :

$$\{X=i\} = \{X=i\} \cap \Omega$$
$$= \{X=i\} \cap \Big(\bigcup_{j \in Y(\Omega)} \{Y=j\} \Big)$$
$$= \bigcup_{j \in Y(\Omega)} \{X=i\} \cap \{Y=j\}$$

$$\Rightarrow P(X=i) = \sum_{j \in Y(\Omega)} P(X=i, Y=j)$$

Exemple :

On jette un dé bleu et un dé rouge.

On note X les points indiqués par le dé bleu.

Y ceux indiqués par le dé rouge

on pose $Z = 7 - X$

$X, Y, Z \sim \mathcal{U}_{\{1, \dots, 6\}}$

$P(X = i, Y = j) = \frac{1}{36} \quad \forall (i, j) \in \{1, \dots, 6\}^2$

$P(X = 6, Z = 2) = 0$

donc $P_{X,Y} \neq P_{X,Z}$

Remarque : la connaissance de la loi du couple $P_{X,Y}$ permet de trouver les lois de X et de Y mais la réciproque n'est pas vraie.

P

III V.a indépendantes :

Définition : Deux v.a X et Y sont dites indépendantes si pour tout $A, B \in \mathbb{R}$; les évènement $\{X \in A\}$ et $\{Y \in B\}$ sont indépendantes, c-à-d ; $P(X \in A, Y \in B) = P(X \in A) P(Y \in B)$

Proposition : X et Y sont indépendantes ssi $\Leftrightarrow$

$$P(X = i, Y = j) = P(X = i) P(Y = j) \quad \forall i \in X(\Omega), j \in Y(\Omega)$$

Proposition : Soient X et Y deux v.a indépendantes ; f et g deux applications réelles. Alors $f(X)$ et $g(Y)$ sont indépendantes.

Proposition : X et Y sont deux V.a indépendantes. Alors la loi du couple (X, Y) est le produit $P_X \times P_Y$; c-à-d

$$P(X = i, Y = j) = P(X = i) P(Y = j)$$

Exercice (important) :

Soit $X \sim \mathcal{P}(\lambda_1)$

$Y \sim \mathcal{P}(\lambda_2)$ X et Y sont indépendante.

$Z = X + Y$. Trouver la loi de Z

- $Z(\Omega) = \mathbb{N}$
- $P(Z = k)$ $\forall k \in \mathbb{N}$?

$k \in \mathbb{N}^*$

$$\{Z = k\} = \{X + Y = k\} = \bigcup_{i=0}^{k} \{X = i, Y = k - i\}$$

$$P(Z = k) = \sum_{i=0}^{k} P(X = i, Y = k - i) = \sum_{i=0}^{k} P(X = i) P(Y = k - i)$$

$X(\Omega) = \mathbb{N}^*$

$Y(\Omega) = \mathbb{N}^*$

$Z(\Omega) = \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$

$$P(Z=k) = e^{-\lambda_1} e^{-\lambda_2} \sum_{i=0}^{k} \frac{\lambda_1^i}{i!} \frac{\lambda_2^{k-i}}{(k-i)!} = e^{-(\lambda_1+\lambda_2)} \frac{1}{k!} \sum_{i=0}^{k} \underbrace{C_k^i \lambda_1^i \lambda_2^{k-i}}_{(\lambda_1+\lambda_2)^k}$$

$$= \frac{(\lambda_1+\lambda_2)^k}{k!} e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}$$

$$Z \sim \mathcal{P}(\lambda_1+\lambda_2)$$

Moments des v.a discrètes :

Les moments d'une v.a sont des quantités numériques associées à sa loi qui apportent des information sur la v.a.

I Espérance (moment d'ordre 1)

Soit X une v.a discrète, on appelle espérance mathématique de X (ou moyenne de X) le réel $E(X)$ défini par :

$$E(X) = \sum_{k \in X(\Omega)} k\, P(X=k)$$

Exemples

1/ $X \sim \mathcal{B}(p)$

$X \xrightarrow{p} 1$

$X \xrightarrow{1-p} 0$

$$E(X) = \sum_{k \in \{0,1\}} k\, P(X=k) = p$$

2) $A \in \mathcal{F}$

$X(\omega) = 1$ si $\omega \in A$

$= 0$ sinon

$X = \mathbb{1}_A$

$E(X) = P(A)$.

3) $X = cte = c$ $\quad \begin{pmatrix} P(X=c) = 1 \\ P(X \neq c) = 0 \end{pmatrix}$

$E(X) = c$.

4) $X \sim \mathcal{U}_{\{x_1, \dots, x_n\}}$; $P(X = x_i) = \frac{1}{n}$

$$E(X) = \sum_{x_i \in X(\Omega)} x_i P(X = x_i) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i$$

5) $X \sim \mathcal{G}(p)$

$X(\Omega) = \mathbb{N}^*$, $P(X=k) = p(1-p)^{k-1}$

$$E(X) = \sum_{k \in X(\Omega)} k\, P(X=k)$$

$$= \sum_{k=1}^{+\infty} k\, p(1-p)^{k-1} = p \sum_{k=1}^{+\infty} k(1-p)^{k-1}$$

$$= p \frac{1}{(1-(1-p))^2} = \frac{1}{p}$$

$$\sum_{k=1}^{+\infty} k\, x^{k-1} = \sum_{k=1}^{+\infty} (x^k)'$$

$$= \left(\sum_{k=1}^{+\infty} x^k \right)' \quad \forall x \in]0,1[$$

$$= \left(\frac{1}{1-x} - 1 \right)' = \frac{1}{(1-x)^2}$$

6) $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$

$$E(X) = \sum_{k \in X(\Omega)} k\, P(X=k)$$

$$= e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{+\infty} k \frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda} \lambda \underbrace{\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!}}_{e^{\lambda}}$$

$$= \lambda$$

réel

Proposition :

l'espérance est linéaire

$\forall$ X, Y : v.a discrètes.

$a, b \in \mathbb{R}$

$$E(aX + bY) = a E(X) + b E(Y)$$

Application :

$X(\Omega) = \{0, \ldots, n\}$

$P(X=k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$

$X \sim \mathcal{B}(n, p)$

on peut écrire $X = X_1 + \cdots + X_n$ où $X_i \sim \mathcal{B}(p)$

$$\Rightarrow E(X) = E(X_1) + \cdots + E(X_n) \quad \left(\frac{1}{f}\right)'$$

$$= np \quad \left(\frac{1}{1-x}\right)'$$