

X, Y deux v.a ; $a, b \in \mathbb{R}$

$$E(aX + bY) = aE(X) + bE(Y)$$

Qdm X une v.a ; f une fonction réelle
 $E(f(X))$?

Exemple :

X

\sim

$\Omega = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$

$f(x) = x^4 - x^2 + 2$

on pose $Y = f(X) = X^4 - X^2 + 2$

$Y(\Omega) = \{14, 2\}$

$$E(Y) = \sum_{k \in Y(\Omega)} k P(Y=k)$$

$$= 2 P(Y=2) + 14 P(Y=14)$$

$$= 2 \left[P(X=0) + P(X=-1) + P(X=1) \right]$$

$$+ 14 \left[P(X=2) + P(X=-2) \right]$$

$$= f(0)P(X=0) + f(-1)P(X=-1) + f(1)P(X=1) \\ + f(-2)P(X=-2) + f(2)P(X=2).$$

donc $E(f(x)) = \sum_{k \in X(\Omega)} f(k)P(X=k)$

Proposition:

Soit X une v.a ; f une fonction réelle.

Alors

$$E(f(X)) = \sum_{k \in X(\Omega)} f(k)P(X=k)$$

Réponse

- si $X > 0$. alors $E(X) > 0$.

- si $X \leq Y$, $E(X) \leq E(Y)$.

IV Moments d'ordre r :

Def. : Soit $r \in \mathbb{N}^*$. On appelle moment d'ordre r de la v.a. X la quantité :

$$E(X^r) = \sum_{k \in X(\mathbb{Z})} k^r \cdot P(X=k)$$

Théorème

(Inégalité de Markov).

Soit

X une v.a.

positive. Alors on a :

$\forall t > 0$:

$P(X > t) \leq \frac{E(X)}{t}$

Preuve :

Soit $t > 0$.

$E(X) = \sum_{k \in X(\mathbb{Z})} k \cdot P(X=k) = \sum_{k \geq t} k \cdot P(X=k) + \underbrace{\sum_{k < t} k \cdot P(X=k)}$

$\Rightarrow E(X) \geq \sum_{k \geq t} k \cdot P(X=k) \geq \sum_{k \geq t} t \cdot P(X=k) = t \cdot P(X > t)$

$\Rightarrow P(X > t) \leq \frac{E(X)}{t}$

III

Variance

Définition: Soit X une v.a.

on appelle variance de X

la quantité : $V(X) = E[(X - E(X))^2] \geq 0$.

on appelle écart-type de X ; la quantité

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$$

Proposition

X une v.a ; $a, b \in \mathbb{R}$

$$V(ax + b) = a^2 V(X)$$

Preuve:

$$V(ax + b) = E[(ax + b - E(ax + b))^2]$$

$$= E[(ax + b - aE(x) - b)^2] = E[a^2(X - E(X))^2]$$

$$= a^2 E[(X - E(X))^2] = a^2 V(X)$$

Consequence : $a=0 \Rightarrow V(b)=0$.

Proposition : $V(x)=0 \Leftrightarrow x=c$

Proposition : $V(x) = E(x^2) - E^2(x)$

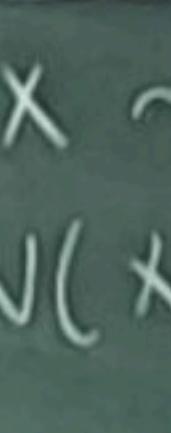
$$\begin{aligned} \text{Preuve} : V(x) &= E\left((x - E(x))^2\right) \\ &= E\left(X^2 - 2E(x) \cdot X + E^2(x)\right) \\ &= E(X^2) - 2E(x)E(x) + E^2(x) \\ &= E(X^2) - E^2(x) \end{aligned}$$

Exemples :

1) $X \sim \mathcal{B}(p)$



2) $X \sim P(\omega)$



$$E(X^2) = \sum_{k \in \{0,1\}} k^2 P(X=k) = p$$

$$V(x) = p - p^2 = p(1-p)$$

3) $X \sim g(p)$

$$V(x) = \frac{1-p}{p^2}$$

Théorème (Inégalité de Tchebycheff) :

X une v.a.

$$\forall t > 0 ; P(|X - E(X)| \geq t) \leq \frac{V(X)}{t^2}$$

Exemple : on jette 3600 fois un dé.

Miniser la prob que le nombre d'apparition de 1 soit compris entre 480 et 720.

Notons S le nombre d'apparition de 1

$$S \sim B(3600, \frac{1}{6})$$

$$E(S) = \frac{3600}{6} = 600$$

$$P(480 \leq S \leq 720)$$

Markov.

Collatice X une v.a. $\forall t > 0$

$$P(|X| \geq t) \leq \frac{E(|X|)}{t}$$

On prends $X = S - E(S)$.
 $= S - 600$.

$$\begin{aligned} \{480 < S < 720\} &= \{-120 < S - 600 < 120\} \\ &= \{|S - 600| < 120\} \end{aligned}$$

$$1 - P(|X| < 120) \leq \frac{E(|X|)}{120}$$

IV Covariance :

• le but est de calculer la variance d'une somme de v.a.

Déf:

Soit X, Y deux v.a.

$$E(XY) = \sum_{i,j} i j P(X=i, Y=j)$$

Prop: Si X et Y sont indép, alors $E(XY) = E(X)E(Y)$

Attention. $E(X\gamma) = E(X)E(\gamma)$ ~~if X et γ are independent~~

Example. $X \sim U_{\{-1, 0, 1\}}$; $\gamma \sim a$; $P(\gamma = -1) = 0.53$

$$E(X\gamma) = \sum_{\substack{i \in \{-1, 0, 1\} \\ j \in \{0, 1\}}} ij P(X=i, \gamma=j) = 0$$

$$P(\gamma=1) = P(X=0)$$

$$P(\gamma=0) = P(X \neq 0)$$

$$E(X) = 0$$

$$E(\gamma) = \frac{1}{3}$$

$E(X\gamma) = E(X)E(\gamma)$ alors que X et γ

sont pas indépendantes.

$$\begin{aligned} V(X+\gamma) &= E((X+\gamma - E(X+\gamma))^2) \\ &= E((X - E(X))^2) + E((\gamma - E(\gamma))^2) - 2E(X-E(X))(\gamma-E(\gamma)) \\ &\neq V(X) + V(\gamma) \end{aligned}$$

Définition :

X, Y deux v.a

on appelle covariance de (X, Y) la quantité :

$$\text{cov}(X, Y) = E[(X - E(X))(Y - E(Y))]$$

$$\text{cov}(X, X) = V(X)$$

$$\text{cov}(X, Y) = E[X(Y - E(Y)) + E(X)(Y - E(Y))]$$

$$= E(XY) - E(X)E(Y)$$

4) Si X et Y sont indép

alors $\text{cov}(X, Y) = 0$

$$1) \text{cov}(X, Y) = \text{cov}(Y, X)$$

$$2) \text{cov}(aX+b, cY+d) = ac \text{cov}(X, Y)$$

$$3) |\text{cov}(X, Y)| \leq \Gamma(X)\Gamma(Y)$$

Propriétés :

$$(la réciproque n'est pas vraie)$$

Proposition:

$$V(X+Y) = V(X) + V(Y) + 2 \operatorname{cov}(X, Y)$$

$$V\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) = \sum_{i=1}^n V(X_i) + \sum_{i,j=1}^n \operatorname{cov}(X_i, X_j)$$

Si X et Y sont indépendants alors

$$V(X+Y) = V(X) + V(Y)$$

$$V(aX+bY) = a^2 V(X) + b^2 V(Y)$$

$$\begin{aligned} V(X+Y) &= E\left((X+Y - E(X+Y))^2\right) \\ &= E\left((X - E(X))^2\right) + E\left((Y - E(Y))^2\right) - 2E(X-E(X))(Y-E(Y)) \\ &\neq V(X) + V(Y) \end{aligned}$$

Application :

$$X \sim \mathcal{B}(n, p)$$

$$X = X_1 + X_2 + \dots + X_n, \text{ avec } X_i \sim \mathcal{B}(p)$$

(les X_i sont indépendantes)

$$\begin{aligned} \text{done } V(X) &= V(X_1) + \dots + V(X_n) \\ &= n p(1-p) \end{aligned}$$

$$\left| \text{cov}(x, y) = E[(X - E(X))(Y - E(Y))] \right.$$

$$\left. = E(XY) - E(X)E(Y) \right| \cdot 4) \text{ Si } X \text{ et } Y \text{ sont indép}$$

Propriétés :

$$1) \text{cov}(X, Y) = \text{cov}(Y, X)$$

$$2) \text{cov}(ax + b, cy + d) = ac \text{cov}(x, y)$$

$$3) |\text{cov}(x, y)| \leq \sqrt{V(x)V(y)}$$

$$\text{alors } \text{cov}(x, Y) = 0$$

(la réciproque n'est pas vraie)