

Série N :4
Couple de variables aléatoires discrètes

Niveau : L2 INFO

A.U : 2025/2026

Exercice 1 On considère deux variables aléatoires X et Y dont la loi conjointe est donnée par le tableau suivant

| Y | 1 | 2 | 3 |
|---|------|------|------|
| X | | | |
| 1 | 3/50 | 1/50 | 6/50 |
| 2 | 5/50 | 3/50 | 3/50 |
| 3 | 2/50 | 4/50 | |
| 4 | 5/50 | 5/50 | 7/50 |

1. Compléter le tableau.
2. Déterminer les lois marginales de X et Y . Les deux variables sont-elles indépendantes ?
3. Calculer $E(X)$, $V(X)$ puis $E(Y)$ et $V(Y)$.
4. Calculer $E(XY)$ puis $cov(X, Y)$.
5. Calculer les probabilités $P(X \leq 2, Y \geq 3)$, $P(X = Y)$ et $P(X > Y)$.
6. Déterminer la loi de la variable aléatoire $W = X - Y$. Calculer $E(W)$ et $V(W)$.

Exercice 2 Un hebdomadaire lance une campagne d'abonnement en envoyant par la poste n lettres proposant trois types d'abonnement : 1 an pour 50D, 2 ans pour 90D et 3 ans pour 125D. Les campagnes précédentes permettent de savoir que les probabilités p_i qu'une personne ainsi sollicitée s'abonne pour i années sont : $p_1 = 0.09$, $p_2 = 0.04$ et $p_3 = 0.02$. On admet que les différentes personnes sollicitées ont des comportements mutuellement indépendants.

1. Quelle est la probabilité qu'une personne sollicitée ne réponde pas ? Quelle est la loi du nombre S_n de lettres sans réponse ? Donner ES_n et $V(S_n)$.
2. L'éditeur se demande quel nombre minimal de lettres il doit envoyer pour qu'avec une probabilité d'au moins 0.95, le pourcentage de lettres sans réponses reste au dessous de 90%. En utilisant l'inégalité de Tchebycheff proposez lui une solution.
3. Pour $i = 1, 2, 3$, donner la loi de Y_i nombre d'abonnements pour i années reçus à la fin de la campagne. Les variables aléatoires Y_1 et Y_2 sont-elles indépendantes ?
4. Soit R_n la rentrée financière procurée par les abonnements. Que vaut $E(R_n)$?

Exercice 3 Soit $a \in]0, 1[$ et (X, Y) un couple de variables aléatoires de loi de probabilité :

$$P(X = k, Y = n) = \begin{cases} (1-a)^2 a^n & \text{si } 0 \leq k \leq n, \\ 0 & \text{si } k \geq n+1. \end{cases}$$

1. Calculer $P(X = Y)$.
2. Calculer les lois marginales de X et de Y .
3. Quelle est la loi conditionnelle de X sachant $Y = n$?
4. Calculer la loi de la variable $Z = Y - X$.
5. Les variables X et Z sont-elles indépendantes?

Exercice 4 Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant la même loi géométrique de paramètre $p \in]0, 1[$, c'est-à-dire, $P(X = k) = p(1 - p)^{k-1}$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$. On pose $Z = \min(X, Y)$ et $q = 1 - p$.

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
 - (a) Montrer que $P(X \geq n) = q^{n-1}$.
 - (b) Calculer $P(Z \geq n)$. Trouver et reconnaître la loi de Z en précisant le paramètre (c'est une loi géométrique).
 - (c) Les deux variables X et Z sont-elles indépendantes? (ne chercher pas la loi du couple).
2.
 - (a) Pour chaque $m \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ calculer la probabilité de l'événement $\{X + Y = m\}$.
 - (b) Trouver toutes les valeurs possibles de Z si $X + Y = 2n + 1$, $n \in \mathbb{N}$.
 - (c) Calculer $P(Z = k / X + Y = 2n + 1)$.
 - (d) Identifier la loi de Z conditionnelle à $\{X + Y = 2n + 1\}$.

Exercice 5 Un militant entreprend de faire signer une pétition à l'entrée d'un supermarché. Le nombre de personnes X qu'il peut ainsi contacter est une variable aléatoire de Poisson de paramètre λ . Soit p la probabilité qu'une personne ainsi sollicitée signe la pétition. On note Y le nombre total de signatures et Z le nombre total de refus de signature ($X = Y + Z$).

1. Soient j et k deux entiers. En distinguant les cas $j > k$ et $j \leq k$, calculer $P(Y = j | X = k)$.
2. En déduire $P(X = k, Y = j)$.
3. Déterminer la loi de Y . Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes?
4. En utilisant le résultat de la question 2), déterminer la loi du couple (Y, Z) .
5. Ces deux variables aléatoires sont-elles indépendantes? Commenter.

Exercice 6 Une variable aléatoire X suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$. Les valeurs que prend X sont affichées sur un écran, mais celui-ci est défaillant. Lorsque il doit afficher 0, il affiche n'importe quelle valeur entre 1 et n au hasard. Le reste de temps l'écran affiche la valeur exacte de X . Soit Y la variable aléatoire désignant le numéro affiché.

1. Donner l'ensemble A des valeurs prises par Y .
2. Montrer que pour tout $k \in A$ on a

$$P(Y = k) = P(Y = k / X = k)P(X = k) + P(Y = k / X = 0)P(X = 0).$$

3. Calculer $P(Y = k)$ pour tout $k \in A$.

4. Montrer que $E(Y) = \sum_{k=1}^n \frac{k}{n} (1-p)^n + E(X)$. En déduire $E(Y)$.

5. L'écran affiche 1. Quelle est alors la probabilité que la variable X ait prit réellement la valeur 1 ?

Exercice 7 Soit $a \in]0, 1[$ et $\lambda > 0$ deux réels. On considère un couple de variables aléatoires (X, Y) de loi de probabilité :

$$P(X = i, Y = j) = \begin{cases} e^{-\lambda} \frac{\lambda^j}{i!(j-i)!} a^i (1-a)^{j-i} & \text{si } i \leq j, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

1. Déterminer les lois marginales de X et de Y . Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?
2. Déterminer la loi conditionnelle de X sachant $Y = j$.
3. Calculer $cov(X, Y)$.
4. Montrer que les variables X et $Z = X - Y$ sont indépendantes et donner la loi de Z .
5. Retrouver par un calcul simple $cov(X, Y)$.
6. Calculer $V(3Y - 2X)$.

Exercice 8 Sami fait souvent du shopping pendant X heures pour acheter des livres. X est une v.a qui suit la loi uniforme sur l'ensemble $\{1, 2, 3, 4\}$. Le nombre de livres N qu'il achète est une v.a qui dépend du temps X de la façon suivante

$$\mathbb{P}(N = n | X = k) = \begin{cases} \frac{1}{k}, & \text{si } 1 \leq n \leq k \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

1. Calculer $\mathbb{P}(N = 1)$, $\mathbb{P}(N = 2)$, $\mathbb{P}(N = 3)$ et $\mathbb{P}(N = 4)$. Donner $\mathbb{P}(N = k)$ pour tout entier $k > 4$.
2. Soit Y la v.a égale au nombre d'heures passé par Sami au shopping sachant qu'il a acheté deux livres. Trouver la loi de Y (ça revient à chercher $\mathbb{P}(X = k | N = 2)$ pour $k \in Y(\Omega)$). Calculer $E(Y)$.
3. Déterminer la loi de la v.a Z égale au nombre d'heures passé par Sami au shopping sachant qu'il a acheté 2 ou 3 livres. Calculer $E(Z)$.
4. Le prix de chaque livre est une v.a de moyenne 30d. Calculer la dépense moyenne de Sami quand il va faire du shopping.

Exercice 9 On suppose que le couple de variables aléatoires discrètes (X, Y) a une loi donnée par :

$$\forall (i, j) \in \mathbb{N}^2, \quad P(X = i, Y = j) = \frac{\alpha}{(1+i+j)!}$$

où α est une constante strictement positive qui sera précisée ultérieurement.

1. Expliquer sans calcul pourquoi les marginales X et Y ont la même loi.

2. On pose $S = X + Y$. Montrer que :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad P(S = k) = \frac{\alpha}{k!}.$$

3. En déduire la valeur de α et reconnaître la loi de S .

4. Calculer $P(X = 0)$. Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ?

5. Donner l'espérance de S et en déduire la valeur de $E[X]$. La même méthode peut-elle servir pour obtenir $\text{Var}[X]$?

6. Calculer $P(X = Y)$ et en déduire sans calcul $P(X > Y)$.

Exercice 10 On considère une suite de n épreuves répétées indépendantes, chaque épreuve ayant k résultats possibles r_1, \dots, r_k . On note p_i la probabilité de réalisation du résultat r_i lors d'une épreuve donnée. Par exemple si on lance n fois un dé, $k = 6$ et $p_i = 1/6$ pour $1 \leq i \leq 6$. Pour $1 \leq i \leq k$, notons X_i le nombre de réalisations du résultat r_i au cours des n épreuves.

1. Expliquer sans calcul pourquoi $V(X_1 + \dots + X_k) = 0$.

2. Quelle est la loi de X_i ? Que vaut sa variance ?

3. Pour $i \neq j$, donner la loi et la variance de $X_i + X_j$.

4. En déduire $\text{Cov}(X_i, X_j)$.

5. Contrôler ce résultat en développant $V(X_1 + \dots + X_k)$ et en utilisant la première question.

Exercice 11 Soit X une variable aléatoire discrète à valeurs dans \mathbb{N} . On définit la fonction génératrice des moments de X par

$$\phi_X(s) = \mathbf{E}(s^X) = \sum_{k \in X(\Omega)} s^k P(X = k).$$

1. Calculer ϕ_X pour

i. X suit une loi de Bernoulli de paramètre $p \in [0, 1]$.

ii. X suit une loi Binomiale de paramètres $n \in \mathbb{N}$ et $p \in [0, 1]$.

iii. X suit une loi de Poisson de paramètre λ , $\lambda > 0$.

2. Montrer que $\mathbf{E}(X) = \phi'_X(1)$ et que $\mathbf{V}(X) = \phi''_X(1) + \phi'_X(1) - [\phi'_X(1)]^2$.

3. Montrer que pour toute n valeur possible pour X , on a

$$P(X = n) = \frac{\phi_X^{(n)}(0)}{n!}$$

où $\phi_X^{(n)}$ désigne la dérivée n -ème de ϕ_X . Déduire que la fonction génératrice caractérise la loi de X .

4. Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes. Exprimer la fonction génératrice de $X + Y$ en fonction de celles de X et de Y .

5. Utiliser les question précédentes pour trouver la loi de la somme de deux variables X et Y indépendantes de loi de Poisson de paramètres respectifs λ_1 et λ_2 .