Définition :

Deux évènements $A, B \in \mathcal{F}$ sont dites indépendantes (dans $(\Omega, \mathcal{F}, P)$) si $P(A \cap B) = P(A)P(B)$.

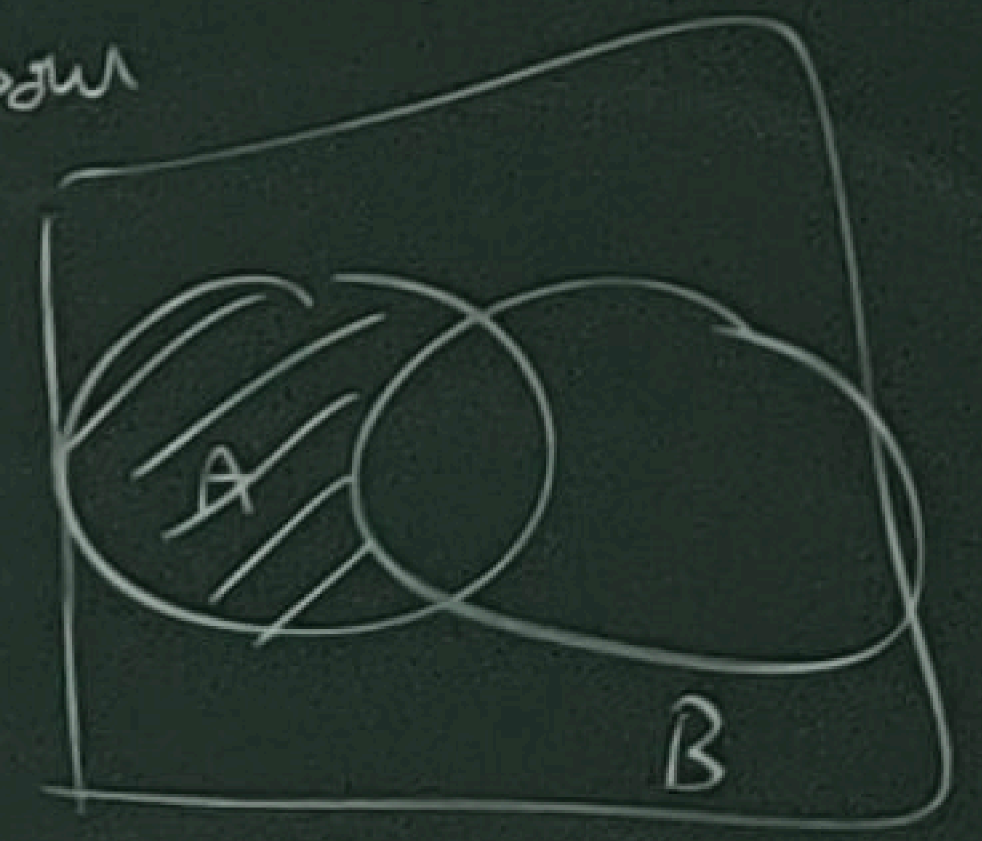
Remarques

1- Si $P(A) = 0$ alors A est indépendant avec tout évènement.

2- De même si $P(A) = 1$ (exercice).

Proposition :

Si A et B sont indépendants ; alors il en est de même pour A et $\bar{B}$; $\bar{A}$ et B, $\bar{A}$ et $\bar{B}$.



Preuve

- $P(A \cap \bar{B}) = P(A \setminus A \cap B) = P(A) - P(A \cap B)$
$= P(A) - P(A)P(B) = P(A)[1 - P(B)]$
$= P(A)P(\bar{B})$.

- $P(\bar{A} \cap \bar{B}) = P(\bar{A})P(\bar{B})$ (exercice).

Variables aléatoires discrètes :

I - Généralités

1/ Définition et propriétés :

On lance deux dés, l'un rouge et l'autre est bleu.

On note S la somme des numéros obtenus.

$$\Omega = \{1, 2, \ldots, 6\}^2$$

$$S : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(b, r) \longmapsto b + r$$

$S(\Omega) = \{2, 3, \ldots, 12\}$

Soit $k \in S(\Omega)$

$\{S = k\} = \{(b, r) \in \Omega \text{ t.q } b + r = k\}$

$P(S = 2) = \frac{1}{36}$

$P(S = 3) = \frac{2}{36}$

$P(S = 4) = \frac{3}{36}$

$P(S = 5) = \frac{4}{36}$

$P(S = 6) = \frac{5}{36}$

$P(S = 7) = \frac{6}{36}$

$P(S = 8) = \frac{5}{36}$

$P(S = 9) = \frac{4}{36}$

$P(S = 10) = \frac{3}{36}$

$P(S = 11) = \frac{2}{36}$

$P(S = 12) = \frac{1}{36}$.

Si on note $\Omega' = \{2, \dots, 12\}$

$\forall w \in \Omega'$; $P_S(w) = P(S = w)$: est une probabilité que l'on appelle loi de S.

Définition : Soit $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espace de probabilité on appelle variable aléatoire discrète (v.a) sur $(\Omega, \mathcal{F}, P)$; toute application

$X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ vérifiant :

1/ l'ensemble des images $X(\Omega)$ est un ensemble dénombrable.

2/ $\forall k \in X(\Omega)$; $\{X = k\} = \{w \in \Omega \; ; \; X(w) = k\} \in \mathcal{F}$.

. on peut remarquer : $\sum_{k \in X(\Omega)} P(X = k) = 1$

car $\{X = k\} ; k \in X(\Omega)$ est une partition de Ω.

2) Loi d'une v.a :

Définition : Soit X une v.a sur $(\Omega, \mathcal{F}, P)$

on appelle loi de X la donnée de $P(X=k)$

pour tout $k \in X(\Omega)$.

Exemple :

on lance deux dés l'un bleu et l'autre est rouge.

on note $X = \min(b, r)$

$X(\Omega) = \{1, 2, \dots, 6\}$

$P(X=1) = \frac{11}{36}$; $P(X=2) = \frac{9}{36}$; $P(X=3) = \frac{7}{36}$; $P(X=4) = \frac{5}{36}$

$P(X=5) = \frac{3}{36}$; $P(X=6) = \frac{1}{36}$

Remarque :

On peut avoir Loi de X égale au loi de Y sans que X = Y.

- On lance un dé bleu ; on note X la v.a égale au numéro obtenu.

- On lance un dé rouge ; on note Y la v.a égale au numéro obtenu.

non

$P(X=k) = 1/6 \quad \forall k \in \{1, \dots, 6\}$

$P(Y=k) = 1/6 \quad \forall k \in \{1, \dots, 6\}$

loi de X = loi de Y.

$P(X=Y)$

$\{X=Y\} = \bigcup_{k=1}^{6} \{X=k\} \cap \{Y=k\}$

$= \bigcup_{k=1}^{6} \{X=k \text{ et } Y=k\}$

$= \bigcup_{k=1}^{6} (k,k)$.

$P(X=Y) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$

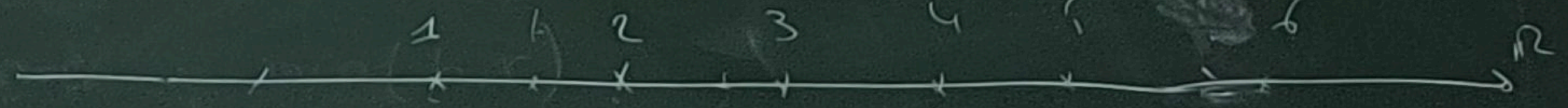
$P(X \neq Y) = \frac{5}{6}$

3) Fonction de répartition :

Définition : on appelle fonction de répartition (f.d.r) d'une v.a X la fonction notée F_X et définie par :

$$F_X : \mathbb{R} \longrightarrow [0,1]$$
$$t \longmapsto P(X \le t)$$

Exemple : $X = \min(b, r)$



- $t \in]-\infty, 1[$. $P(X \le t) = 0$.
- $t \in [1, 2[$ $P(X \le t) = P(X=1) = \frac{11}{36}$
- $t \in [2, 3[$ $P(X \le t) = P(X=1) + P(X=2) = \frac{20}{36}$
- $t \in [3, 4[$ $P(X < t) = \frac{27}{36}$.

- $t \in [4,5[$

$P(X \leq t) = P(X \in]-\infty, 5[) = \frac{32}{36}$

- $t \in [5,6[$; $P(X \leq t) = \frac{35}{36}$

- $t \in [6,+\infty[$ $P(X \leq t) = 1$

Propriétés :

F_X vérifie les propriétés suivantes :

1) F_X est $\nearrow$

2) $\lim_{t \to +\infty} F_X(t) = 1$; $\lim_{t \to -\infty} F_X(t) = 0$

3) F_X caractérise la loi de X (en effet $F_X = F_Y$ ssi loi de X égale loi de Y)

4) $\forall a, b \in \mathbb{R}$, $a \leq b$, $P(a < X \leq b) = F_X(b) - F_X(a)$