Institut Supérieur d'Informatique et de Mathématiques de Monastir

Graphes et optimisation

Présenté par: **Dr. Marwa thabet**

Maître assistante

thabetmarwa2@gmail.com

Plan du cours

Institut Supérieur d'Informatique et de Mathématiques de Monastir

Partie 1 : Programmation linéaire

Cours 1 : Programmes linéaires, modélisation et résolution graphique

Présenté par: **Dr. Marwa thabet**

Maître assistante

thabetmarwa2@gmail.com

Qu'est ce que la programmation linéaire?

- ***Définition:*** *C'*est l'une des plus importantes techniques d'optimisation utilisées en recherche opérationnelle.
- ***Objectif:*** est de déterminer de façon optimale l'utilisation des ressources c.à.d allocation des ressource limitées d'une manière optimale
- ***Principe:*** est la maximisation ou la minimisation d'une fonction linéaire à plusieurs variables sachant que ces dernières sont liées par des relations appelées contraintes.

Formulation et notions de base

- Un programme linéaire (PL) sous **sa forme canonique**, s'écrit sous la forme:

$$(PL)\begin{cases} Max\ ou\ Min\ Z = \sum_{i=1}^{n} f_i x_i & \longleftarrow \textbf{Fonction objectif} \\ \quad S.C & \\ \forall j=1,\dots,m\colon \sum_{i=1}^{n} a_{ij}x_i \leq,=\ ou \geq b_j & \longleftarrow \textbf{Contraintes} \\ \forall i = 1,\dots,n\colon x_i \geq 0 & \longleftarrow \textbf{Contraintes de positivité} \end{cases}$$

- La programmation linéaire (PL) est basée sur:

  1. ***La fonction objectif*** : la fonction à optimiser pour une expression linéaire
  2. ***La variable de décision*** : est toute quantité utile à la résolution du problème, et dont on doit déterminer sa valeur.
  3. ***Les contraintes*** : des relations limitant le choix des valeurs possibles pour une variable.

Modélisation

- La modélisation consiste à transformer un problème réel en un ensemble de relations.
- Pour modéliser un problème linéaire, il faut suivre les étapes suivantes:

1. ***Identifier*** les variables principales ou les variables de décision du problème
2. ***Exprimer*** la fonction objectif en fonction des variables identifiées en précisant s'il s'agit d'un problème à maximiser (un bénéfice, un rendement,…) ou à minimiser (la charge, le coût de production, la consommation,…)
3. ***Formuler*** les contraintes sous forme d'équations et/ou d'inéquations linéaires

Modélisation

Formulation d'un problème de maximisation

Enoncé du problème 0:

Un petit producteur fabrique deux types de jus :

Jus A : lui rapporte 5 unités de profit par litre.

Jus B : lui rapporte 3 unités de profit par litre.

Il dispose au maximum de 30 litres de fruits.

Chaque litre de Jus A consomme 3 litres de fruits,

et chaque litre de Jus B consomme 2 litres de fruits.

- **Combien de litres de chaque jus doit-il produire pour maximiser son profit ?**

Modélisation

Formulation d'un problème de maximisation

Enoncé du problème 1:

Une usine (**U**) fabrique deux produits **A** et **B**, le produit **A** coûte **400D/Tonne** et le produit **B** coûte **500D/Tonne**

On suppose que :

1. **Un tonne** de **A** nécessite **40 minutes** sur la machine **M1** et **20 minutes** sur la machine **M2**
2. **Un tonne** de **B** nécessite **30 minutes** sur la machine **M1** et **30 minutes** sur la machine **M2**
3. La machine **M1** est disponible que **6 H/jour**
4. La machine **M2** est disponible **8 H/jour**

L'objectif de l'entreprise est de maximiser le profit qu'elle pourra tirer, par jour, de ces deux produits (A et B) en utilisant au mieux ses ressources.

 Formuler ce problème en PL

Modélisation

Formulation d'un problème de maximisation

La construction du modèle linéaire (1/3)

- Etape 1: identification des variables de décision

Quelles sont les informations dont doit disposer le directeur de l'entreprise pour considérer que son problème est résolu?

Modélisation

Formulation d'un problème de maximisation

La construction du modèle linéaire (1/3)

- Etape 1: identification des variables de décision

Quelles sont les informations dont doit disposer le directeur de l'entreprise pour considérer que son problème est résolu?

Il suffit de connaître la quantité des produits A et B à fabriquer quotidiennement

On note:

x_1: *la quantité du produit A à produire*

x_2: *la quantité du produit B à produire*

Les variables sont dites variables de décision

Modélisation

Formulation d'un problème de maximisation

La construction du modèle linéaire (2/3)

- Etape 2: Exprimer la fonction objectif (Z)

Quel profit l'usine retire-t-il de la vente de ces deux produits ?

Modélisation

Formulation d'un problème de maximisation

La construction du modèle linéaire (2/3)

- Etape 2: Exprimer la fonction objectif (Z)

Quel profit l'usine retire-t-il de la vente de ces deux produits ?

Additionner les bénéfices à tirer de chacun des deux produits

- Pour le produit **A, le bénéfice est de 400D/Tonne,** et on fabrique $\boldsymbol{x_1}$ unités→ on a un bénéfice de $(\mathbf{400} * \boldsymbol{x_1})\boldsymbol{D}$
- Pour le produit **B, le bénéfice est de 500D/Tonne,** et on fabrique $\boldsymbol{x_2}$ unités→ on a un bénéfice de $(\mathbf{500} * \boldsymbol{x_2})\boldsymbol{D}$

$$Max(Z) = 400x_1 + 500x_2$$

Modélisation

Formulation d'un problème de maximisation

La construction du modèle linéaire (3/3)

- **Étape 3: Formuler les contraintes**

Contrainte relative à la machine M1

Le temps d'utilisation de la machine M1 pour fabriquer les produits A et B ne peut excéder les 6 heures➔ temps d'utilisation de $M_1 \leq 6\ (H)$

- Pour le produit **A,** on nécessite 40 minute pour fabriquer la quantité $\boldsymbol{x_1}$➔ $(\mathbf{40} * \boldsymbol{x_1})$ min
- Pour le produit **B,** on nécessite 30 minute pour fabriquer la quantité $\boldsymbol{x_2}$➔ $(\mathbf{30} * \boldsymbol{x_2})$ min
- ➢ La contrainte relative à la machine M1 s'écrit donc:

$$\mathbf{40}x_1 + \mathbf{30}x_2 \leq \mathbf{6} * \mathbf{60}(\text{min}) \quad (\text{M1})$$

Modélisation

Formulation d'un problème de maximisation

La construction du modèle linéaire (3/3)

- **Etape3: Formuler les contraintes**

Contrainte relative à la machine M2

Le temps d'utilisation de la machine M2 pour fabriquer les produits A et B ne peut excéder les 8 heures➔ temps d'utilisation de $M_1 \leq 8\ (H)$

- Pour le produit **A,** on nécessite 20 minute pour fabriquer la quantité $\boldsymbol{x_1}$➔ $(\mathbf{20} * \boldsymbol{x_1})$ min
- Pour le produit **B,** on nécessite 30 minute pour fabriquer la quantité $\boldsymbol{x_2}$➔ $(\mathbf{30} * \boldsymbol{x_2})$ min
- ➢ La contrainte relative à la machine M1 s'écrit donc:

$$\mathbf{20}x_1 + \mathbf{30}x_2 \leq \mathbf{8} * \mathbf{60}(\text{min}) \quad (\text{M2})$$

Contrainte relative à la positivité

Elles assurent que la solution ne comporte pas des valeurs négatives (inacceptables)

$$\boldsymbol{x_1, x_2 \geq 0}$$

Modélisation

Formulation d'un problème de maximisation

La construction du modèle linéaire (3/3)

Le modèle se résume ainsi,

$$\textbf{PL:}\quad \begin{cases} \boldsymbol{Max(Z) = 400x_1 + 500x_2} \\ \boldsymbol{S.C} \\ \mathbf{40}x_1 + \mathbf{30}x_2 \leq \mathbf{6} * \mathbf{60}(\text{min}) \quad (\text{M1}) \\ \mathbf{20}x_1 + \mathbf{30}x_2 \leq \mathbf{8} * \mathbf{60}(\text{min}) \quad (\text{M2}) \\ \boldsymbol{x_1, x_2 \geq 0} \end{cases}$$

Modélisation

Formulation d'un problème de minimisation

Enoncé du problème 2:

Un athlète suit un régime et souhaite consommer la plus faible ration quotidienne de trois éléments nutritifs protéines, vitamines et calcium. Les exigences quotidiennes sont de **16g** de protéines, **12g** de vitamines et **18g** de calcium. L'athlète achète deux types d'aliments P et Q.

1. Une unité de **P** comprend **2g** de protéines, **1g** de vitamines et **1g** de calcium; et elle coûte **20D**.
2. Une unité de **Q** comprend **1g** de protéines, **1g** de vitamines et **3g** de calcium;. Et elle coûte **40D**.

L'athlète cherche la combinaison la moins coûteuse des quantités de P et Q qui respectera l'exigence de consommation minimale d'éléments nutritifs.

- **Formuler ce problème en PL**

Modélisation

Formulation d'un problème de maximisation

La construction du modèle linéaire

Identifier — Appelons x_1 et x_2 les quantités des aliments P et Q qu'il faut acheter

Exprimer — L'objectif de l'athlète est évidemment de minimiser le coût total d'aliments qu'il faut acheter:

$$Min\ (Z) = 20x_1 + 40x_2$$

Formuler — Chacun des 3 éléments nutritifs donne lieu à une contrainte. On obtient

$$2x_1 + x_2 \geq 16 \quad \text{(Protéines)}$$
$$x_1 + x_2 \geq 12 \quad \text{(Vitamines)}$$
$$x_1 + 3x_2 \geq 18 \quad \text{(Calcium)}$$

Enfin, il ne faut pas oublier qu'on ne peut pas acheter des quantités négatives de P et Q

$$\rightarrow x_1, x_2 \geq 0$$

Modélisation

Formulation d'un problème de minimisation

La construction du modèle linéaire

Le modèle se résume ainsi,

$$\text{PL:}\quad \begin{cases} Min(Z) = 20x_1 + 40x_2 \\ S.C \\ 2x_1 + x_2 \geq 16 \quad \text{(P)} \\ x_1 + x_2 \geq 12 \quad \text{(V)} \\ x_1 + 3x_2 \geq 18 \quad (C) \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Variables d'écart

- ***Définition:*** *C'*est la différence entre ce qui est disponible et ce qui est utilisé.
- ***Objectif:*** Ramener les contraintes à des égalités, qui sont plus faciles à traiter que les inégalités.

Variables d'écart

Formulation d'un problème en utilisant les variables d'écart

Problème :

Une entreprise fabrique deux produits A et B en utilisant une machine m et deux matières premières p et q. On dispose chaque jour de 8 heures de m, de 10 Kg de p et de 36 Kg de q. On suppose que :

1. La production d'une unité de A nécessite 2Kg de p et 9 Kg de q, et utilise la machine m durant 1 heure;
2. La production d'une unité de B nécessite 2 Kg de p et 4 kg de q, et utilise la machine m durant 2 heure;
3. Les profits réalisés sont de 50 D par unité de A et de 60 D par unité de B

L'objectif de l'entreprise est de maximiser le profit qu'elle pourra tirer, par jour, de ces deux produits en utilisant au mieux ses ressources.

- **Formuler ce problème en PL sous la forme standard**

Variables d'écart

Formulation d'un problème en forme standard

La construction du modèle linéaire en forme standard

Le modèle en forme canonique se résume ainsi,

PL en forme canonique:

$$\begin{cases} \boldsymbol{Max(Z) = 50x_1 + 60x_2} \\ \boldsymbol{S.C} \\ \boldsymbol{x_1 + 2x_2 \leq 8} \quad \text{(m)} \\ \boldsymbol{2x_1 + 2x_2 \leq 10} \quad \text{(p)} \\ \boldsymbol{9x_1 + 4x_2 \leq 36} \quad (q) \\ \boldsymbol{x_1, x_2 \geq 0} \end{cases}$$

On pose:

$$e_1 = 8 - (x_1+2x_2)$$

$$e_2 = 10 - (2x_1+2x_2)$$

$$e_3 = 36 - (9x_1+4x_2)$$

Où e_i est appelée variable d'écart associée à la $i^{ème}$ contrainte.

Variables d'écart

Formulation d'un problème

La construction du modèle linéaire en forme standard

On peut renommer les variables d'écart (e_1, e_2, e_3) comme les variables de décision (x_3, x_4, x_5)

$$\begin{cases} \boldsymbol{Max(Z) = 50x_1 + 60x_2 + 0e_1 + 0e_2 + 0e_3} \\ \boldsymbol{S.C} \\ \boldsymbol{x_1 + 2x_2 + e_1 = 8} \quad \text{(m)} \\ \boldsymbol{2x_1 + 2x_2 + e_2 = 10} \quad \text{(p)} \\ \boldsymbol{9x_1 + 4x_2 + e_3 = 36} \quad (q) \\ \boldsymbol{x_1, x_2, e_1, e_2, e_3 \geq 0} \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{cases} \boldsymbol{Max(Z) = 50x_1 + 60x_2} \\ \boldsymbol{S.C} \\ \boldsymbol{x_1 + 2x_2 + x_3 = 8} \quad \text{(m)} \\ \boldsymbol{2x_1 + 2x_2 + x_4 = 10} \quad \text{(p)} \\ \boldsymbol{9x_1 + 4x_2 + x_5 = 36} \quad (q) \\ \boldsymbol{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0} \end{cases}$$

Forme standard

Résolution graphique

- On dispose d'un outil (la PL) pour modéliser des problèmes
- Comment résoudre les problèmes à l'aide de la PL ?
  - Plusieurs algorithmes existent, dont le simplexe (prochain cours)
  - Pour des problèmes avec deux variables, on peut résoudre graphiquement (aide à comprendre la structure du problème)

Résolution graphique

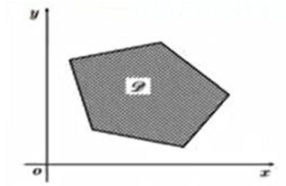
- Un problème linéaire est résolu graphiquement en procédant comme suit:

1. **Représentation graphique de la région réalisable.**
2. **Représentation graphique de la fonction objectif**
3. **Détermination de la solution optimale**

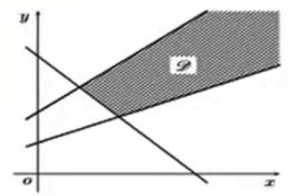
Résolution graphique

- La résolution d'un programme linéaire en utilisant la méthode graphique pour déterminer la solution optimale se déroule comme suit:

1. Réaliser un repère orthonormé (ox_1x_2)
2. Tracer la région réalisable (admissible) (D)
3. Si (D) est borné, alors la solution optimale existe. Sinon, on distingue les deux cas suivants.
   - ➢ Si le problème est à maximiser, aucune solution.
   - ➢ Si le problème est à minimiser, une solution optimale existe.
4. Chercher tous les points sommets de (D) et parmi ceux-ci, choisir le point qui rend l'objectif optimal par deux méthodes:
   - Méthode de recensement des sommets.
   - Méthode des droites parallèles (repérage géométrique)



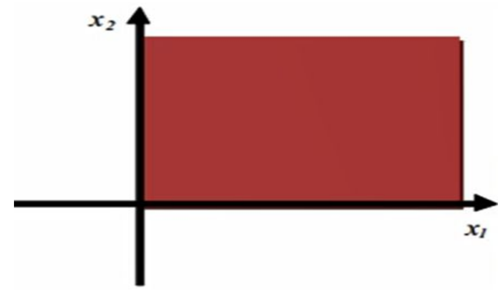
Région borné



Région non borné

Résolution graphique

- Une des condition de la réussite d'une représentation graphique est le choix d'un système d'axes □ un mauvais choix peut rendre notre représentation non claire et imprécise.
- Dans la plupart des PL, les variables de décision sont positives, dans ce cas le quadrant positif s'appelle **régions des solutions possibles**.



Résolution graphique

- ***<u>Définition:</u>*** on appelle région réalisable ou région des solution admissible, l'ensemble des valeurs de variables de décision qui <u>satisfont toutes les contraintes.</u>
- ***<u>Méthode:</u>*** une représentation graphique **des inégalités (Contraintes)** nous permet de déterminer <u>l'ensemble des solutions réalisables</u>
- ***Exemple***: on considère le PL suivant

$$\begin{cases} Max(Z) = 300x_1 + 200x_2 \\ S.C \\ x_1 + 2x_2 \leq 20 \quad (1) \\ 2x_1 + x_2 \leq 22 \quad (2) \\ x_1 + x_2 \leq 12 \quad (3) \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

La région réalisable est l'ensemble des points $(x_1,\ x_2)$ satisfaisant les inégalités de notre PL

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &\leq 20 \\ 2x_1 + x_2 &\leq 22 \\ x_1 + x_2 &\leq 12 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Résolution graphique

Région réalisable

$x_1 + 2x_2 \leq 20$ (1)
$x_1 + 2x_2 = 20$

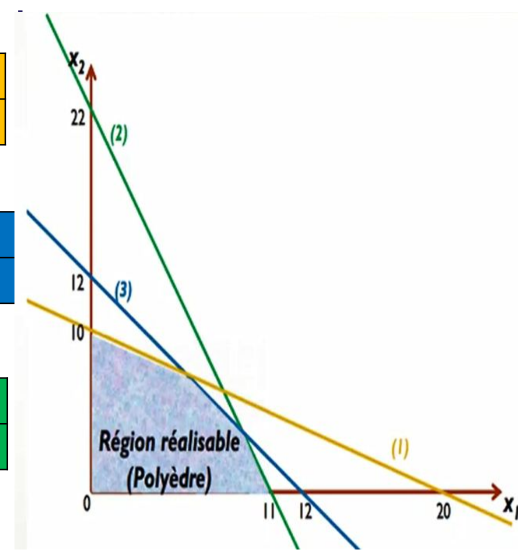
	0	20
	10	0

$2x_1 + x_2 \leq 22$ (2)
$2x_1 + x_2 = 22$

	11	0
	0	22

$x_1 + x_2 \leq 12$ (3)
$x_1 + x_2 = 12$

	0	12
	12	0



Résolution graphique

Chercher la solution optimale dans l'ensemble infini de solutions réalisable.

- ***Méthode de recensement des sommets:***

  1. Déterminer les valeurs de l'objectif correspondantes <u>à chacun des points sommets.</u>
  2. Remplacer ces valeurs dans la fonction objectif: la plus grande valeur réalise le maximum et la plus petite valeur réalise le minimum.

- ***Méthode des droites parallèles***

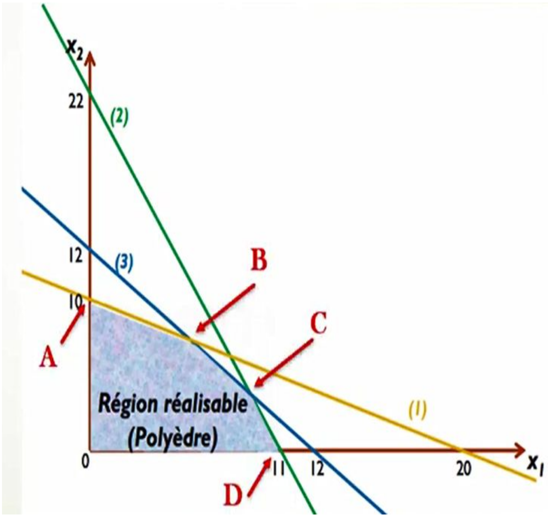
  1. Tracer la droite relative à la fonction objectif (Δ).
  2. <u>Déplacer parallèlement</u> (Δ) vers le point de la région réalisable le plus éloigné de l'origine en cas de maximisation ou vers le point le plus proche de l'origine en cas de minimisation.

Résolution graphique

Méthode de recensement des sommets

$$\begin{cases} Max(Z) = 300x_1 + 200x_2 \\ S.C \\ x_1 + 2x_2 \leq 20 \quad (1) \\ 2x_1 + x_2 \leq 22 \quad (2) \\ x_1 + x_2 \leq 12 \quad (3) \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

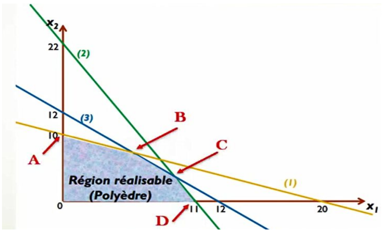
A=(0,10), D=(11,0), B=?, C=?



Résolution graphique

Méthode de recensement des sommets

$$\begin{cases} Max(Z) = 300x_1 + 200x_2 \\ S.C \\ x_1 + 2x_2 \leq 20 \quad (1) \\ 2x_1 + x_2 \leq 22 \quad (2) \\ x_1 + x_2 \leq 12 \quad (3) \end{cases}$$



A=(0,10), D=(11,0), B=?, C=?

Pour déterminer B et C, on peut les repérer graphiquement ou mathématiquement.

- ***<u>Détermination de B et C mathématiquement:</u>***

➢ Les coordonnées de B sont la solution du système composé des deux inéquation des droites (1) et (3)

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \leq 20 \quad (1) \\ x_1 + x_2 \leq 12 \quad (3) \end{cases} \rightarrow x_1 = 4, x_2 = 8 \rightarrow \textbf{B=(4,8)}$$

➢ les coordonnées de C sont la solution du système composé des deux inéquation des droites (2) et (3)

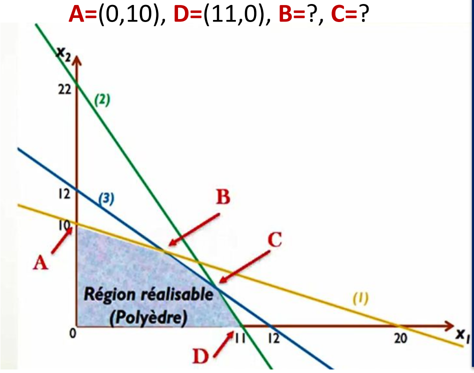
$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \leq 22 \quad (2) \\ x_1 + x_2 \leq 12 \quad (3) \end{cases} \rightarrow x_1 = 10, x_2 = 2 \rightarrow \textbf{C=(10,2)}$$

Résolution graphique

Méthode de recensement des sommets

$$\begin{cases} Max(Z) = 300x_1 + 200x_2 \\ S.C \\ x_1 + 2x_2 \leq 20 \quad (1) \\ 2x_1 + x_2 \leq 22 \quad (2) \\ x_1 + x_2 \leq 12 \quad (3) \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

A=(0,10), D=(11,0), B=?, C=?



Z= $300x_1 + 200x_2$

Les points sommets de la région réalisable sont les couples (x_1, x_2) suivants:

A=(0,10), B=(4,8), C=(10,2), D=(11,0)

A=(0,10) ➔ $300 * 0$ +200*10=2000

B=(4,8) ➔ $300 * 4$ +200*8=2800

$\boxed{\text{C=(10,2) ➔ } 300 * 10 \text{ +200*2=3400}}$

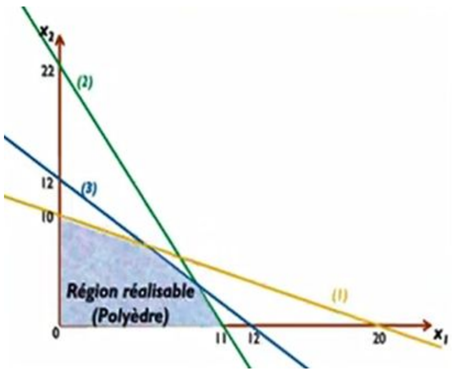
D=(11,0) ➔ $300 * 11$ +200*0=3300

➔ Le point sommet qui maximise la fonction est (10,2)

Résolution graphique

Méthode des droites parallèles

$$\begin{cases} Max(Z) = 300x_1 + 200x_2 \\ S.C \\ x_1 + 2x_2 \leq 20 \quad (1) \\ 2x_1 + x_2 \leq 22 \quad (2) \\ x_1 + x_2 \leq 12 \quad (3) \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$



On commence par représenter la droite de la fonction objectif:

Z= $300x_1 + 200x_2$

Pour représenter la droite de la fonction objectif, il suffit de donner à Z une valeur particulière (par exemple z=0)

$$300x_1 + 200x_2 = 0$$

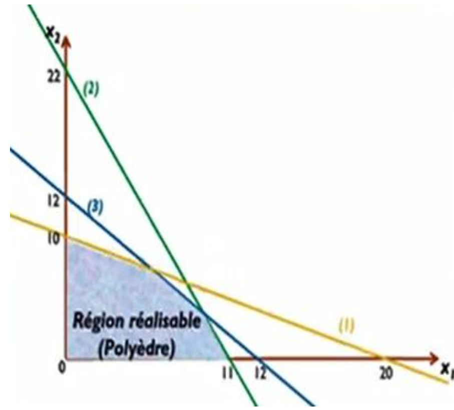
	0	1
	0	-3/2

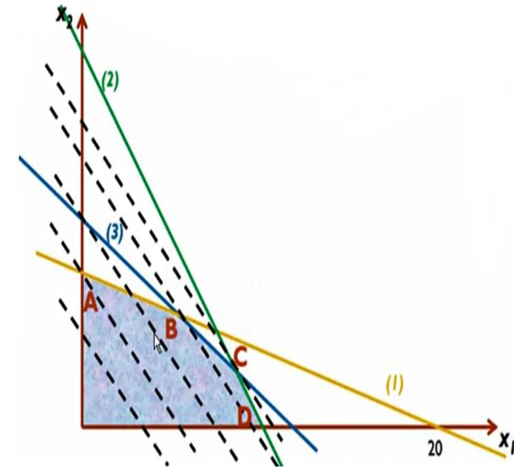
Une fois représentée, la droite de la fonction objectif sera translatée parallèlement à elle-même dans le sens de l'optimisation (Maximisation ou minimisation)

Résolution graphique

Méthode des droites parallèles

$$\begin{cases} Max(Z) = 300x_1 + 200x_2 \\ S.C \\ x_1 + 2x_2 \leq 20 \quad (1) \\ 2x_1 + x_2 \leq 22 \quad (2) \\ x_1 + x_2 \leq 12 \quad (3) \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

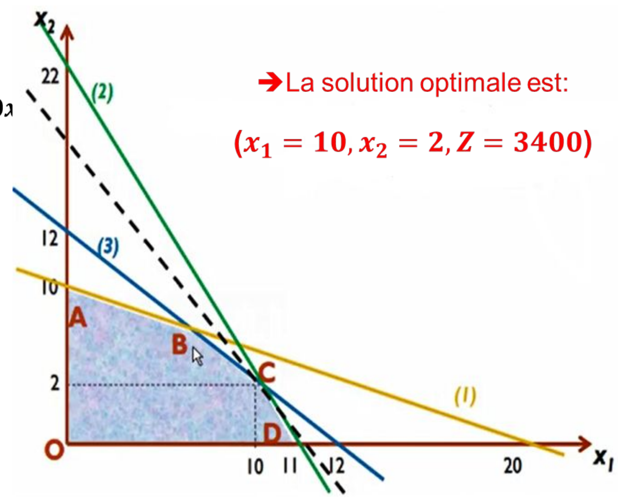




Résolution graphique

Méthode des droites parallèles

$$\begin{cases} Max(Z) = 300x_1 + 200x \\ S.C \\ x_1 + 2x_2 \leq 20 \quad (1) \\ 2x_1 + x_2 \leq 22 \quad (2) \\ x_1 + x_2 \leq 12 \quad (3) \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$



➔La solution optimale est:

$(x_1 = 10, x_2 = 2, Z = 3400)$

Institut Supérieur d'Informatique et de Mathématiques de Monastir

Partie 1 : Programmation linéaire

Cours 2 : Algorithme du Simplexe

Présenté par: **Dr. Marwa thabet**
Maître assistante
thabetmarwa2@gmail.com

Introduction

- On dispose d'un formalisme pour **modéliser** des problèmes réels : la programmation linéaire (PL)
- **La méthode de résolution graphique ni applicable que dans le cas où il n'y a que deux variables de décision.**
- Comment résoudre les problème à l'aide de la PL comporte **plusieurs dizaines de variables** et de contraintes?

Une procédure algébrique pour résoudre des PL avec plus de deux variables. Cette méthode appelée méthode du simplexe

Objectifs du cours

- Apprendre la méthode du simplex
- Comprendre son fonctionnement
- Savoir contourner les pièges pour l'algorithme
- Lien avec des notions de mathématiques connues, interprétation géométrique

Définition et principe

- une procédure algébrique itérative qui permet de résoudre des PL avec plus de deux variables.
- Commencer par une solution admissible correspondant à un point extrême du polyèdre (région réalisable), et chercher à augmenter la fonction objectif (fonction économique) sur un point extrême voisin et ainsi, de proche en proche sur le polyèdre, arriver à un point optimal.

Méthode

Etape 1:

Ecrire le programme sous forme standard

Etape 2:

Trouver la première solution réalisable de base

⬇

Tableau initial du simplexe

Etape 3:

Procéder à une série d'itérations sur les tableaux de simplexe aboutissant à la solution optimale

Forme standard d'un PL

- ***Forme canonique:*** l'ensemble de contraintes se présente sous forme d'inégalités ($\leq, =, \geq$)
- ***Forme standard:*** toutes les contraintes sont des contraintes d'égalités.
- ***Variable d'écart:*** c'est la quantité disponible non utilisée. C'est l'écart entre la disponibilité et le besoin.
- ***Principe:*** ajouter aux membres de gauche d'une contrainte des variables d'écart qui sert à absorber l'écart entre le membre gauche et le membre droit d'une contrainte

Forme standard d'un PL

Exemple :

PL en forme canonique:

$$\begin{cases} Max(Z) = 50x_1 + 60x_2 \\ S.C \\ x_1 + 2x_2 \leq 8 \quad (1) \\ 2x_1 + 2x_2 \leq 10 \quad (2) \\ 9x_1 + 4x_2 \leq 36 \quad (3) \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

PL en forme standard:

$$\begin{cases} Max(Z) = 50x_1 + 60x_2 \\ S.C \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 8 \quad (1) \\ 2x_1 + 2x_2 + x_4 = 10 \quad (2) \\ 9x_1 + 4x_2 + x_5 = 36 \quad (3) \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0 \end{cases}$$

Algorithme

Ecrire le programme sous forme standard

↓

Définir une solution de base de départ

↓

Tableau simplexe initial

↓

Changement de base

↓

Pivotage

↓

Tableau simplexe suivant

Exemple pas à pas

PL en forme canonique:

$$\begin{cases} Max(Z) = 300x_1 + 500x \\ S.C \\ x_1 \leq 4 \quad (1) \\ 2x_2 \leq 12 \quad (2) \\ 3x_1 + 2x_2 \leq 18 \quad (3) \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Exemple pas à pas

Etape 1: forme standard

$$\begin{cases} Max(Z) = 300x_1 + 500x_2 \\ S.C \\ x_1 \le 4 \quad (1) \\ 2x_2 \le 12 \quad (2) \\ 3x_1 + 2x_2 \le 18 \quad (3) \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} Max(Z) = 300x_1 + 500x_2 \\ S.C \\ x_1 + x_3 = 4 \quad (1) \\ 2x_2 + x_4 = 12 \quad (2) \\ 3x_1 + 2x_2 + x_5 = 18 \quad (3) \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \ge 0 \end{cases}$$

Etape 2: Solution de base

On exprime le problème sous forme matricielle, où:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} 4 \\ 12 \\ 18 \end{bmatrix}, c = \begin{bmatrix} 300 & 500 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Exemple pas à pas

Etape 3: tableau initial

$$\begin{cases} Max(Z) = 300x_1 + 500x_2 \\ S.C \\ x_1 + x_3 = 4 \quad (1) \\ 2x_2 + x_4 = 12 \quad (2) \\ 3x_1 + 2x_2 + x_5 = 18 \quad (3) \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \ge 0 \end{cases}$$

On considère:

- **B** : les variables de base qui sont les variables d'écart
- **Ci**: les coefficients de la fonction objectif
- C_B: les coefficients de la variable de base dans la fonction objectif

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} 4 \\ 12 \\ 18 \end{bmatrix},$$

$$c = \begin{bmatrix} 300 & 500 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Max	Ci		300	500	0	0	0
C_B	B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
0	x_3	4	1	0	1	0	0
0	x_4	12	0	2	0	1	0
0	x_5	18	3	2	0	0	1
	Zi	0	0	0	0	0	0
	Ci - Zi		300	500	0	0	0

$Z_1 = colonne\_x_1 * C_B$

$Z_0 = b * C_B$

Exemple pas à pas

Etape 3: changement de base

Max	Ci		300	500	0	0	0
C_B	B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
0	x_3	4	1	0	1	0	0
0	x_4	12	0	2	0	1	0
0	x_5	18	3	2	0	0	1
	Zi	0	0	0	0	0	0
	Ci - Zi		300	500	0	0	0

- Pour augmenter la valeur de Z_i on doit examiner une nouvelle solution de base.
- Introduire <u>une nouvelle variable dans la base </u>(variable entrante) et <u>exclure une des variables qui y figurait précédemment (variable sortante)</u>.
- Le changement de base représente le processus qui consiste à choisir la variable entrante et la variable sortante.

Exemple pas à pas

Etape 3: changement de base

- ***<u>Choix de la variable entrante</u>*** :dans la dernière ligne Ci- Zi, le coefficient dont la valeur est <u>la plus élevée</u> détermine la variable à entrer dans la base. Et la colonne de la variable entrante on l'appelle **colonne pivot**

Variable entrante

Max	Ci		300	500	0	0	0
C_B	B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
0	x_3	4	1	0	1	0	0
0	x_4	12	0	2	0	1	0
0	x_5	18	3	2	0	0	1
	Zi	0	0	0	0	0	0
	Ci - Zi		300	500	0	0	0

Colonne pivot

Exemple pas à pas

Etape 3: changement de base

- ***Choix de la variable sortante*** : c'est la variable de base qui s'annule la première. On doit calculer le minimum du rapport du coefficient du membre de droite de chaque contrainte sur le coefficient correspondant de la colonne pivot lorsque ce dernier est strictement positif ➔ $min\left\{\frac{12}{2}, \frac{18}{2}\right\} = 6$
- Cette ligne reçoit le nom de **ligne pivot.**

Max	Ci		300	500	0	0	0
C_B	B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
0	x_3	4	1	0	1	0	0
0	x_4	12	0	2	0	1	0
0	x_5	18	3	2	0	0	1
	Zi	0	0	0	0	0	0
	Ci - Zi		300	500	0	0	0

Ligne pivot

Pivot

Variable sortante

Colonne pivot

Exemple pas à pas

Etape 4: Pivotage

- ***Principe du pivotage:*** rendre le pivot égal à 1 et transforme les autres cases selon des règles bien précises
- ***Rôle du pivot:*** transformer le tableau actuel en un deuxième tableau correspondant à la nouvelle base.
- **Transformation de la ligne pivot:** diviser tous ses éléments par le pivot
- **Transformation de la colonne pivot**: les éléments situés au-dessus et au-dessous du pivot deviennent nulles.
- **Transformation des autres cases du tableau**: en appliquant la règle dite du rectangle.

Max	Ci		300	500	0	0	0
C_B	B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
0	x_3	4	1	0	1	0	0
0	x_4	12	0	2	0	1	0
0	x_5	18	3	2	0	0	1
	Zi	0	0	0	0	0	0
	Ci - Zi		300	500	0	0	0

Exemple pas à pas

Etape 4: Pivotage

- Changement du base $(x_4 \leftarrow x_2)$ et (0 ←500)
- Transformation de la colonne et de la ligne pivot

Max	Ci		300	500	0	0	0
C_B	B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
0	x_3	4	1	0	1	0	0
0	x_4	12	0	2	0	1	0
0	x_5	18	3	2	0	0	1
	Zi	0	0	0	0	0	0
	Ci - Zi		300	500	0	0	0

Max	Ci		300	500	0	0	0
C_B	B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
0	x_3			0			
500	x_2	6	0	1	0	½	0
0	x_5			0			
	Zi						
	Ci - Zi						

Exemple pas à pas

Etape 4: Pivotage

- Si **une ligne** contient **un 0** à l'intersection avec la colonne du pivot, cette ligne ne sera pas modifiée.

Max	Ci		300	500	0	0	0
C_B	B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
0	x_3	4	1	0	1	0	0
500	x_2	6	0	1	0	½	0
0	x_5			0			
	Zi						
	Ci - Zi						

Exemple pas à pas

Etape 4: Pivotage

- Si **une colonne** contient un **0** à l'intersection avec la ligne du pivot, cette colonne ne sera pas modifiée.

Max	Ci		300	500	0	0	0
C_B	B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
0	x_3	4	1	0	1	0	0
500	x_2	6	0	1	0	½	0
0	x_5		3	0	0		1
	Zi						
	Ci - Zi						

Exemple pas à pas

Etape 4: Pivotage

- ***Règle du rectangle***: le principe de cette méthode est :

$$a' = a - \frac{b * c}{pivot}$$

Avec:

- a': la nouvelle valeur du coefficient a.
- b: l'élément situé sur la même ligne que a, mais dans la colonne du pivot
- c: l'élément situé sur la même colonne que a, mais sur la ligne du pivot.

➔a=18, b=2, c=12, pivot=2

Max	Ci		300	500	0	0	0
C_B	B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
0	x_3	4	1	0	1	0	0
500	x_2	6	0	1	0	½	0
0	x_5	6	3	0	0		1
	Zi						
	Ci - Zi						

Exemple pas à pas

- ***Règle du rectangle***: le principe de cette méthode est :

$$a' = a - \frac{b * c}{pivot}$$

➔a=0, b=2, c=1, pivot=2

Max	Ci		300	500	0	0	0
C_B	B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
0	x_3	4	1	0	1	0	0
500	x_2	6	0	1	0	½	0
0	x_5	6	3	0	0	-1	1
	Zi						
	Ci - Zi						

Exemple pas à pas

Etape 4: tableau simplexe suivant

- Calcule du Zi et $\text{Ci} - Zi$

Max	Ci		300	500	0	0	0
C_B	B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
0	x_3	4	1	0	1	0	0
500	x_2	6	0	1	0	½	0
0	x_5	6	3	0	0	-1	1
	Zi	3000	0	500	0	250	0
	Ci - Zi		300	0	0	-250	0

Exemple pas à pas

Etape 5: tableau simplexe suivant

Max	Ci		300	500	0	0	0
C_B	B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
0	x_3	4	1	0	1	0	0
500	x_2	6	0	1	0	½	0
0	x_5	6	3	0	0	-1	1
	Zi	3000	0	500	0	250	0
	Ci - Zi		300	0	0	-250	0

- D'après ce tableau, on peut déterminer la deuxième solution de base réalisable: $\boldsymbol{x^{B_2} = (0,6,4,0,6)}$ et la valeur de la fonction Z en x^{B_2}: $\boldsymbol{z_2 = 3000}$
- Le maximum de la fonction Z est atteint lorsqu'il n'y a plus de **coefficients positifs dans** $\mathrm{Ci} - Zi$.

➔**On poursuit les changement** de base et les pivotages, jusqu'à ce qu'on y parvienne.

Exemple pas à pas

Etape 6: retour à l'étape 3

Max	Ci		300	500	0	0	0
C_B	B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
0	x_3	4	1	0	1	0	0
500	x_2	6	0	1	0	½	0
0	x_5	6	3	0	0	-1	1
	Zi	3000	0	500	0	250	0
	Ci - Zi		300	0	0	-250	0

Max	Ci		300	500	0	0	0
C_B	B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
0	x_3	2	0	0	1	1/3	-1/3
500	x_2	6	0	1	0	½	0
300	x_1	2	1	0	0	-1/3	1/3
	Zi	3600	300	500	0	150	100
	Ci - Zi		0	0	0	-150	-100

Exemple pas à pas

Etape 6: retour à l'étape 3

Max	Ci		300	500	0	0	0
C_B	B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
0	x_3	2	0	0	1	1/3	-1/3
500	x_2	6	0	1	0	½	0
300	x_1	2	1	0	0	-1/3	1/3
	Zi	3600	300	500	0	150	100
	Ci - Zi		0	0	0	-150	-100

- D'après ce tableau, on peut déterminer la deuxième solution de base réalisable: $\boldsymbol{x^{B_3} = (2,6,2,0,0)}$ et la valeur de la fonction Z en x^{B_2}: $\boldsymbol{z_2 = 3600}$
- Il n'y a plus de coefficients positifs dans la dernière ligne, la solution courante est optimale ➔

$$(x_{1,}, x_2) = (2,6) et\ z = 3600$$

Institut Supérieur d'Informatique et de Mathématiques de Monastir

Partie 1 : Programmation linéaire

Cours 2 : Algorithme du Simplexe

(Continue…)

Présenté par: **Dr. Marwa thabet**

Maître assistante

thabetmarwa2@gmail.com

Introduction

- Dans le chapitre précédent on a traité le cas où le programme linéaire est de type

$$(PL)\begin{cases} \textcolor{red}{Max}\ Z = \sum_{i=1}^{n} f_i x_i \\ S.C \\ \forall j = 1,\dots,m:\ \sum_{i=1}^{n} a_{ij}x_i \textcolor{red}{\leq, =}\ b_j \\ \forall i = 1,\dots,n: x_i \geq 0 \end{cases}$$

- Or dans les problèmes en programme linéaire on peut retrouver des contraintes de types $\textcolor{red}{\leq, =, \geq}$, ainsi que des problème où on a à minimiser au lieu de maximiser

$$(PL)\begin{cases} \textcolor{red}{Max/Min}\ Z = \sum_{i=1}^{n} f_i x_i \\ S.C \\ \forall j = 1,\dots,m:\ \sum_{i=1}^{n} a_{ij}x_i \textcolor{red}{\leq}\ b_j \\ \forall k = 1,\dots,p:\ \sum_{i=1}^{n} c_{ik}x_i \textcolor{red}{\geq}\ d_k \\ \forall i = 1,\dots,n: x_i \geq 0 \end{cases}$$

Introduction

- Soit

$$\textbf{(PL)}\begin{cases} \boldsymbol{Max(Z) = 4x_1 + 5x_2} \\ \boldsymbol{S.C} \\ \boldsymbol{2x_1 + 2x_2 \geq 8} \quad (1) \\ \boldsymbol{x_2 = 3} \quad (2) \\ \boldsymbol{-9x_1 - 3x_2 \geq -27}\ (3) \\ \boldsymbol{x_1, x_2 \geq 0} \end{cases}$$

- **Pour appliquer la méthode du simplexe il faut que :**
  - **Le programme soit sous sa forme standard**
  - **La non-négativité du second membre**

Il faut modifier la contrainte avant de commencer la standardisation, par la multiplication de deux membres de la contrainte par (-1) et le changement du signe de l'inégalité. D'où on obtient:

$$\boldsymbol{9x_1 + 3x_2 \leq 27}$$

Variable artificielle

▪Les variables artificielles n'ont aucune interprétation économique. Elle sont conçus pour nous aider à utiliser la procédure de simplexe et à formuler le tableau initial à partir de l'origine

$$\textbf{(PL)}\begin{cases} \boldsymbol{Max(Z) = 4x_1 + 5x_2} \\ \boldsymbol{S.C} \\ \boldsymbol{2x_1 + 2x_2} \textcolor{red}{- x_3} \boldsymbol{= 8} \quad (1) \\ \boldsymbol{x_2 = 3} \quad (2) \\ \boldsymbol{9x_1 + 3x_2 + x_4 = 27}\ (3) \\ \boldsymbol{x_1, x_2, x_3, x_4} \textcolor{red}{\geq} \boldsymbol{0} \end{cases}$$

- Si $x_1 = x_2 = 0$ on obtient $\textcolor{red}{x_3 = -8}$, $\boldsymbol{x_4 = 27}$ comme solution de départ, ce qui est contradictoire avec la contrainte de positivité➔ on doit introduire **des variables artificielles**

Variable artificielle

- La forme standard:

$$\textbf{(PL)}\begin{cases} \boldsymbol{Max(Z) = 4x_1 + 5x_2} \\ \boldsymbol{S.C} \\ \boldsymbol{2x_1 + 2x_2} \textcolor{red}{- x_3} \boldsymbol{= 8} \quad (1) \\ \boldsymbol{x_2 = 3} \quad (2) \\ \boldsymbol{9x_1 + 3x_2 + x_4 = 27}\ (3) \\ \boldsymbol{x_1, x_2, x_3, x_4} \textcolor{red}{\geq} \boldsymbol{0} \end{cases}$$

- Si $x_1 = x_2 = 0$ on obtient:

➢ Pour la contrainte (1), $\boldsymbol{x_3 = -8}$ ➔on doit introduire une variable artificielle $\boldsymbol{t_1}$

➢ Pour la contrainte (2), $\boldsymbol{x_2 = 3}$!!! ➔ on doit introduire une variable artificielle $\boldsymbol{t_2}$.

➢ Pour la contrainte (3), $\boldsymbol{x_4 = 27}$ ➔ pas du problème

$$\textbf{(PL)}\begin{cases} \boldsymbol{Max(Z) = 4x_1 + 5x_2} \\ \boldsymbol{S.C} \\ \boldsymbol{2x_1 + 2x_2 - x_3 + t_1 = 8} \quad (1) \\ \boldsymbol{x_2 + t_2 = 3} \quad (2) \\ \boldsymbol{9x_1 + 3x_2 + x_4 = 27}\ (3) \\ \boldsymbol{x_1, x_2, x_3, x_4, t_1, t_2} \textcolor{red}{\geq} \boldsymbol{0} \end{cases}$$

Tant que les variables artificielles restent dans la base, la solution demeure non réalisable réellement pour notre programme. Ainsi, ils perturbent le mécanisme d'optimalité objectif de la méthode. Ce qui nous obligent à les faire sortir le plutôt possible de la base.

Variable artificielle

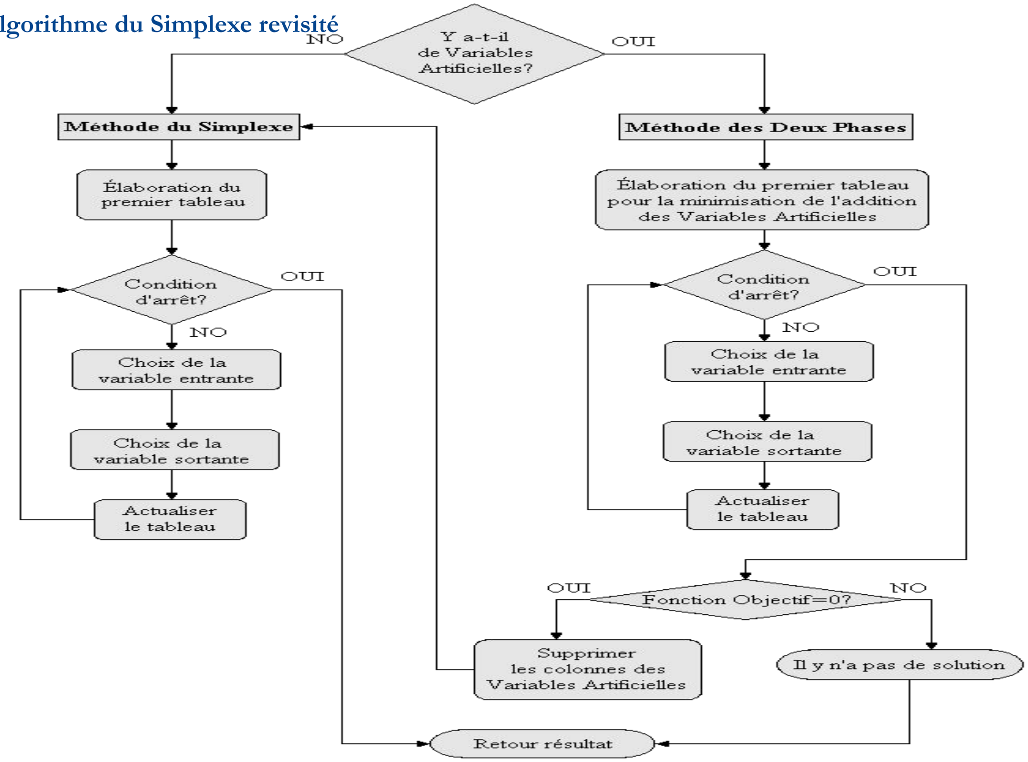
- Pour faire sortir les variables artificielles de la base, il faut appliquer l'algorithme du Simplexe revisité.

  - ***Méthode M***: une manière pour garantir que ces variables artificielles sortent de la base avant d'atteindre la solution optimale est de leur associée un grand coût **–M ou M** (problème de maximisation ou minimisation) dans la fonction objectif.

Méthode de deux phases:

1. Phase I consiste à éliminer les variables artificielles de la base (ou au moins à les rendre nulles).
2. Phase II débute avec le dernier tableau (dernière solution) de la phase I; l'algorithme se poursuit en examinant des solutions réalisables de base au problème original selon les critères usuels de l'algorithme du simplexe

Algorithme du Simplexe revisité



Méthode M: exemple d'application

Etape 1: forme standard

- La fonction objectif est la suivante:

$$Max(Z) = 4x_1 + 5x_2 + 0x_3 + 0x_4 - Mt_1 - Mt_2$$

- Le programme linéaire à résoudre est le suivant:

$$\begin{cases} Max(Z) = 4x_1 + 5x_2 - Mt_1 - Mt_2 \\ S.C \\ 2x_1 + 2x_2 - x_3 + t_1 = 8 \quad (1) \\ x_2 + t_2 = 3 \quad (2) \\ 9x_1 + 3x_2 + x_4 = 27 \quad (3) \\ \\ x_1, x_2, x_3, x_4, t_1, t_2 \geq 0 \end{cases}$$

Méthode M: exemple d'application

Etape 2: tableau initial

Max	Ci		4	5	0	0	-M	-M
C_B	B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	t_1	t_2
-M	t_1	8	2	2	-1	0	1	0
-M	t_2	3	0	1	0	0	0	1
0	x_4	27	9	3	0	1	0	0
	Zi	-11M	-2M	-3M	M	0	-M	-M
	Ci - Zi		4+2M	5+3M	-M	0	0	0

$-M * 8 + (-M) * 3 + 0 * 27 = -11M$ $\quad$ $-M * 2 + (-M) * 0 + 0 * 3 = -2M$

On applique les règles d'itérations vues précédemment (Maximisation ordinaire), pour obtenir deuxième tableau

Méthode M: exemple d'application

Etape 3: changement de base, pivotage

Max	Ci		4	5	0	0	-M	-M
C_B	B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	t_1	t_2
-M	t_1	8	2	2	-1	0	1	0
-M	t_2	3	0	1	0	0	0	1
0	x_4	27	9	3	0	1	0	0
	Zi	-11M	-2M	-3M	M	0	0	0
	Ci - Zi		4+2M	5+3M	-M	0	0	0

Max	Ci		4	5	0	0	-M	-M
C_B	B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	t_1	t_2
-M	t_1	2	2	0	-1	0	1	
5	x_2	3	0	1	0	0	0	
0	x_4	18	9	0	0	1	0	
	Zi	15 -2M	-2M	5	M	0	-M	
	Ci - Zi		4+2M	0	-M	0	0	

On doit chercher la variable entrante et sortante, pour déterminer le pivot, et appliquer les règles de pivotage pour construire le nouveau tableau

Remarque: Lorsqu'une variable artificielle sort de la base, elle ne doit plus être prise en considération dans la suite de la procédure

Méthode M: exemple d'application

Etape 4: Tableau simplexe suivant

Max	Ci		4	5	0	0	-M	-M
C_B	B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	t_1	t_2
-M	t_1	2	2	0	-1	0	1	
5	x_2	3	0	1	0	0	0	
0	x_4	18	9	0	0	1	0	
	Zi	15 -2M	-2M	5	M	0	-M	
	Ci - Zi		4+2M	0	-M	0	0	

- D'après ce tableau, on peut déterminer la deuxième solution de base réalisable: $\boldsymbol{x^{B_2}} = (\mathbf{0,3,0,18,2,0})$.
- Le maximum de la fonction Z est atteint lorsqu'il n'y a plus de **coefficients positifs dans** $\mathbf{Ci} - \boldsymbol{Zi}$. Or c'est pas le cas donc **on poursuit les changement** de base et les pivotages, jusqu'à ce qu'on y parvienne.

Méthode M: exemple d'application

Etape 5: répétition des étapes

Max	Ci		4	5	0	0	-M	-M
C_B	B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	t_1	t_2
-M	t_1	2	2	0	-1	0	1	
5	x_2	3	0	1	0	0	0	
0	x_4	18	9	0	0	1	0	
	Zi	15 -2M	-2M	5	M	0	-M	
	Ci - Zi		4+2M	0	-M	0	0	

➡

Max	Ci		4	5	0	0	-M	-M
C_B	B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	t_1	t_2
4	x_1	1	1	0	-1/2	0		
5	x_2	3	0	1	0	0		
0	x_4	9	0	0	9/2	1		
	Zi	19	4	5	-2	0		
	Ci - Zi		0	0	2	0		

- D'après le tableau obtenu, on peut déterminer la troisième solution de base réalisable: $\boldsymbol{x^{B_3}} = (\mathbf{1,3,0,9,0,0})$.
- Le maximum de la fonction Z est atteint lorsqu'il n'y a plus de **coefficients positifs dans** $\mathbf{Ci} - \boldsymbol{Zi}$. Or c'est pas le cas donc **on poursuit les changement** de base et les pivotages, jusqu'à ce qu'on y parvienne.

Méthode M: exemple d'application

Etape 6: répétition des étapes

Max	Ci		4	5	0	0	-M	-M
C_B	B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	t_1	t_2
4	x_1	1	1	0	-1/2	0		
5	x_2	3	0	1	0	0		
0	x_4	9	0	0	9/2	1		
	Zi	19	4	5	-2	0		
	Ci - Zi		0	0	2	0		

➡

Max	Ci		4	5	0	0	-M	-M
C_B	B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	t_1	t_2
4	x_1	2	1	0	0	1/9		
5	x_2	3	0	1	0	0		
0	x_3	2	0	0	1	2/9		
	Zi	23	4	5	0	4/9		
	Ci - Zi		0	0	0	-4/9		

- La quatrième solution de base réalisable est $\boldsymbol{x^{B_4}} = (\mathbf{2,3,2,0,0,0})$ et la valeur de la fonction objective Z=23
- Il n'y a plus de coefficients positifs dans la dernière ligne, la solution courante est optimale ➔ $(\boldsymbol{x_1}, \boldsymbol{x_2}) = (\mathbf{2,3})\ \boldsymbol{et}\ \boldsymbol{z} = \mathbf{23}$

Institut Supérieur d'Informatique et de Mathématiques de Monastir

Partie 1 : Programmation linéaire

Cours 2 : Algorithme du Simplexe

(Cas de Minimisation)

Continue...

Présenté par: **Dr. Marwa thabet**
Maître assistante
thabetmarwa2@gmail.com

Introduction

- Dans la première partie, on a traité le cas où le programme linéaire est de type maximisation

$$(PL)\begin{cases} \textbf{Max}\ Z = \sum_{i=1}^{n} f_i x_i \\ S.C \\ \forall j = 1, \dots, m: \sum_{i=1}^{n} a_{ij} x_i \leq, = b_j \\ \forall i = 1, \dots, n: x_i \geq 0 \end{cases}$$

- Dans les problèmes en programme linéaire on peut retrouver des contraintes de types $\leq, =, \geq$, ainsi que des problème où on a à **minimiser**

$$(PL)\begin{cases} \textbf{Min}\ Z = \sum_{i=1}^{n} f_i x_i \\ S.C \\ \forall j = 1, \dots, m: \sum_{i=1}^{n} a_{ij} x_i \leq b_j \\ \forall k = 1, \dots, p: \sum_{i=1}^{n} c_{ik} x_i \geq d_k \\ \forall i = 1, \dots, n: x_i \geq 0 \end{cases}$$

Règle générale

- La résolution d'un PL de minimisation nécessite quelques changements :
  - Règle du choix de la **variable entrante**, dans ce cas, est celle à laquelle on associe la plus petite valeur négative non nulle dans la dernière ligne Ci- Zi.
  - Règle d'arrêt de la procédure simplexe et de définir le tableau optimal, comme celui où **tous les coefficients de la dernière ligne, Ci-Zi, sont positifs ou nuls**
  - La manière pour garantir que ces variables artificielles sortent de la base avant d'atteindre la solution optimale est de leur associer **un grand coût M**

Exemple d'application

Etape 1: forme standard

- La fonction objectif est la suivante:

$$\boldsymbol{Min(Z) = 24x_1 + 20x_2}$$
S.C
$$\begin{cases} x_1 + x_2 \geq 30\ (1) \\ x_1 + 2x_2 \geq 40\ (2) \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

- Le programme linéaire sous forme standard est le suivant:

$$\boldsymbol{Min(Z) = 24x_1 + 20x_2}$$
S.C
$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 30\ (1) \\ x_1 + 2x_2 - x_4 = 40\ (2) \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{cases}$$

Exemple d'application

Etape 1: forme standard

- Si $x_1 = x_2 = 0$ on obtient $\boldsymbol{x_3} = -30\ , x_4 = -40$ comme solution de départ, ce qui est contradictoire avec la contrainte de positivité➔ on doit introduire **des variables artificielles**
- Le programme linéaire après l'ajout des variables artificielles sous forme standard :

$$\boldsymbol{Min(Z) = 24x_1 + 20x_2 + Mt_1 + Mt_2}$$

S.C

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + t_1 = 30\ (1) \\ x_1 + 2x_2 - x_4 + t_2 = 40\ (2) \\ x_1, x_2, x_3, x_4, t_1, t_2 \geq 0 \end{cases}$$

Exemple d'application

Etape 2: Tableau simplexe initial

Min	Ci		24	20	0	0	M	M
C_B	B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	t_1	t_2
M	t_1	30	1	1	-1	0	1	0
M	t_2	40	1	2	0	-1	0	1
	Zi	70M	2M	3M	-M	- M	M	M
	Ci - Zi		24-2M	20-3M	M	M	0	0

Exemple d'application

Etape 3: changement de la base

Min	Ci		24	20	0	0	M	M
C_B	B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	t_1	t_2
M	t_1	30	1	1	-1	0	1	0
M	t_2	40	1	2	0	-1	0	1
	Zi	70M	2M	3M	-M	- M	M	M
	Ci - Zi		24-2M	20-3M	M	M	0	0

Variable sortante **Variable entrante** **Pivot**

Exemple d'application

Etape 3: changement de la base

Itération 1

Min	Ci		24	20	0	0	M	M
C_B	B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	t_1	t_2
M	t_1	30	1	1	-1	0	1	0
M	t_2	40	1	2	0	-1	0	1
	Zi	70M	2M	3M	-M	- M	M	M
	Ci - Zi		24-2M	20-3M	M	M	0	0

Min	Ci		24	20	0	0	M	M
C_B	B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	t_1	t_2
M	t_1	10	1/2	0	-1	1/2	1	[redacted]
20	x_2	20	1/2	1	0	-1/2	0	
	Zi	400+10M	$10+\frac{1}{2}M$	20	-M	$-10+\frac{1}{2}M$	M	
	Ci - Zi		$14-\frac{1}{2}M$	0	M	$10-\frac{1}{2}M$	0	

Exemple d'application

Etape 3: changement de la base-itération 2-

Itération 2

Min	Ci		24	20	0	0	M	M
C_B	B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	t_1	t_2
M	t_1	10	1/2	0	-1	1/2	1	
20	x_2	20	1/2	1	0	-1/2	0	
	Zi	400+10M	$10+\frac{1}{2}M$	20	-M	$-10+\frac{1}{2}M$	M	
	Ci - Zi		$14-\frac{1}{2}M$	0	M	$10-\frac{1}{2}M$	0	

⬇

Min	Ci		24	20	0	0	M	M
C_B	B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	t_1	t_2
0	x_4	20	1	0	-2	1		
20	x_2	30	1	1	-1	0		
	Zi	600	20	20	-20	0		
	Ci - Zi		4	0	20	0		

- Il n'y a plus de coefficients négatifs dans la dernière ligne, la solution courante est optimale ➔ $(x_1, x_2) = (0,30)\ et\ z = 600$

Synthèse

Etape	Maximisation	Minimisation
1	Formuler un programme linéaire sous sa forme canonique	
2	Vérifier que le second membre du PL est positif sinon modifier les contraintes	
3	Mettre le programme sous sa forme standard	
4	Construire le tableau initial de simplexe	
5		
6	Choisir la variable sortante celle qui admet le plus petit ratio supérieur à 0	
7	Construire le nouveau tableau simplexe en utilisant les règles de pivotage	
8		

Cas particuliers

Solutions multiples:
Si des effets nets (Ci-Zi) (relatif à une variable de décision hors base) est nul et tous les reste sont négatifs

Solution non bornée:
Si on n'arrive pas à sélectionner la variable sortante(tous les rapports sont négatifs ou nul). Dans un tel cas, la solution optimale est infinie et la valeur maximum est $+\infty$

Solution impossible
Lorsque la solution optimale contient des variables artificielles dans la base à des niveaux non nuls

Solution dégénérée
Si au niveau du tableau optimal, une ou plusieurs des variables de base sont nulles.

Cas particuliers: solutions multiples

$$Max(Z) = x_1 - x_2$$

S.C

$$\text{(PL canonique)} \begin{cases} 2x_1 - x_2 \geq -4\ (c_1) \\ x_1 - x_2 \leq 4\ (c_2) \\ x_1 + x_2 \leq 10\ (c_3) \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

➡

$$Max(Z) = x_1 - x_2$$

S.C

$$\text{(PL standard)} \begin{cases} -2x_1 + x_2 + x_3 = 4\ (c_1) \\ x_1 - x_2 + x_4 = 4\ (c_2) \\ x_1 + x_2 + x_5 = 10\ (c_3) \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0 \end{cases}$$

Le premier tableau du simplexe est :

Max	Ci		1	-1	0	0	0
C_B	B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
0	x_3	4	-2	1	1	0	0
0	x_4	4	1	-1	0	1	0
0	x_5	10	1	1	0	0	1
	Zi	0	0	0	0	0	0
	Ci - Zi		1	-1	0	0	0

Cas particuliers: solutions multiples

Max	Ci		1	-1	0	0	0
C_B	B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
0	x_3	4	-2	1	1	0	0
0	x_4	4	1	-1	0	1	0
0	x_5	10	1	1	0	0	1
	Zi	0	0	0	0	0	0
	Ci - Zi		1	-1	0	0	0

➡

Max	Ci		1	-1	0	0	0
C_B	B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
0	x_3	12	0	-1	1	2	0
1	x_1	4	1	-1	0	1	0
0	x_5	6	0	2	0	-1	1
	Zi	4	1	-1	0	1	0
	Ci - Zi		0	0	0	-1	0

- Il n'y a plus de coefficients positifs dans la dernière ligne, la solution courante est optimale ➔ $(x_1, x_2) = (4, 0)$ ***et z = 4***
- On remarque que la dernière ligne contient un nombre nul (n'est pas négatif) correspond à une variable hors base, qui est x_2
- Par la suite x_2 peut entrer en base, ce qui conduit à une nouvelle solution de base optimale

Cas particuliers: solutions multiples

Max	Ci		1	-1	0	0	0
C_B	B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
0	x_3	12	0	-1	1	2	0
1	x_1	4	1	-1	0	1	0
0	x_5	6	0	2	0	-1	1
	Zi	4	1	-1	0	1	0
	Ci - Zi		0	0	0	-1	0

➡

Max	Ci		1	-1	0	0	0
C_B	B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
0	x_3	15	0	0	1	3/2	1/2
1	x_1	7	1	0	0	1/2	1/2
-1	x_2	3	0	1	0	-1/2	1/2
	Zi	4	1	-1	0	1	0
	Ci - Zi		0	0	0	-1	0

- Il n'y a plus de coefficients positifs dans la dernière ligne, la solution courante est optimale ➔ $(x_1, x_2) = (7, 3)$ ***et z = 4***
- **On remarque que la valeur optimale reste $z = 4$ ➔ donc on dit que notre PL à solutions multiples**

Cas particuliers: solution impossible

$$Min(Z) = -x_1 + x_2$$

S.C

(PL canonique)
$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 \geq -2\ (c_1) \\ x_1 - 2x_2 \leq -8\ (c_2) \\ x_1 + x_2 \leq 5\ (c_3) \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

➡

$$Max(Z) = -x_1 + x_2 + Mt$$

S.C

(PL standard)
$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 + x_3 = 2\ (c_1) \\ -x_1 + 2x_2 - x_4 + t = 8\ (c_2) \\ x_1 + x_2 + x_5 = 5\ (c_3) \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, t \geq 0 \end{cases}$$

Le premier tableau du simplexe est :

Min	Ci		-1	1	0	0	0	M
C_B	B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	t
0	x_3	2	-2	1	1	0	0	0
M	t	8	-1	2	0	-1	0	1
0	x_5	5	1	1	0	0	1	0
	Zi	8M	-M	2M	0	-M	0	M
	Ci - Zi		-1+M	1-2M	0	M	0	0

Cas particuliers: Solution impossible

Min	Ci		-1	1	0	0	0	M
C_B	B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	t
0	x_3	2	-2	1	1	0	0	0
M	t	8	-1	2	0	-1	0	1
0	x_5	5	1	1	0	0	1	0
	Zi	8M	-M	2M	0	-M	0	M
	Ci - Zi		-1+M	1-2M	0	M	0	0

➡

Min	Ci		-1	1	0	0	0	M
C_B	B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	t
1	x_2	2	-2	1	1	0	0	0
M	t	4	3	0	-2	-1	0	1
0	x_5	3	3	0	-1	0	1	0
	Zi	8M	-2+3M	1	1-2M	-M	0	M
	Ci - Zi		1-3M	0	-1+2M	M	0	0

➡

Min	Ci		-1	1	0	0	0	M
C_B	B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	t
1	x_2	4	1	1	1/3	0	2/3	0
M	t	1	0	0	-1	-1	-1	1
-1	x_1	1	1	0	-1/3	0	1/3	0
	Zi	3+M	1	1	2/3-M	-M	1/3-M	M
	Ci - Zi		0	0	-2/3+M	M	-1/3+M	0

- Il n'y a plus de coefficients négatifs dans la dernière ligne, la solution courante est optimale.
- **Comme la variable artificielle est positive (t=1) dans la solution optimale, nous concluons que le PL n'a pas de solution réalisable.**

Cas particuliers: solution non bornée

$$Max(Z) = 10x_1 + 14x_2$$

S.C

(PL canonique) $\begin{cases} x_1 + x_2 \geq 12 \ (c_1) \\ x_1 \geq 8 \ (c_2) \\ x_2 \leq 6 \ (c_3) \\ x_1, x_2 \ \geq 0 \end{cases}$

$$Max(Z) = 10x_1 + 14x_2 - Mt_1 - Mt_2$$

S.C

(PL standard) $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + t_1 = 12 \ (c_1) \\ x_1 - x_4 + t_2 = 8 \ (c_2) \\ x_2 + x_5 = 6 \ (c_3) \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, t_1, t_2 \geq 0 \end{cases}$

Le premier tableau du simplexe est :

Max	Ci		10	14	0	0	0	-M	-M
C_B	B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	t_1	t_2
-M	t_1	12	1	1	-1	0	0	1	0
-M	t_2	8	1	0	0	-1	0	0	1
0	x_5	6	0	1	0	0	1	0	0
	Zi	-20M	-2M	-M	M	M	0	-M	-M
	Ci - Zi		10+2M	14+M	-M	-M	0	0	0

Cas particuliers: solution non bornée

Max	Ci		10	14	0	0	0	-M	-M
C_B	B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	t_1	t_2
-M	t_1	12	1	1	-1	0	0	1	0
-M	t_2	8	1	0	0	-1	0	0	1
0	x_5	6	0	1	0	0	1	0	0
	Zi	-20M	-2M	-M	M	M	0	-M	-M
	Ci - Zi		10+2M	14+M	-M	-M	0	0	0

Max	Ci		10	14	0	0	0	-M	-M
C_B	B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	t_1	t_2
-M	t_1	4	0	1	-1	1	0	1	
10	x_1	8	1	0	0	-1	0	0	
0	x_5	6	0	1	0	0	1	0	
	Zi	80-4M	10	-M	M	-10-M	0	-M	
	Ci - Zi		0	14+M	-M	10+M	0	0	

Max	Ci		10	14	0	0	0	-M	-M
C_B	B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	t_1	t_2
14	x_2	4	0	1	-1	1	0		
10	x_1	8	1	0	0	-1	0		
0	x_5	2	0	0	1	-1	1		
	Zi	136	10	14	-14	4	0		
	Ci - Zi		0	0	14	-4	0		

Max	Ci		10	14	0	0	0	-M	-M
C_B	B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	t_1	t_2
14	x_2	6	0	1	0	0	1		
10	x_1	8	1	0	0	-1	0		
0	x_3	2	0	0	1	-1	1		
	Zi	164	10	14	0	-10	14		
	Ci - Zi		0	0	0	10	-14		

Cas particuliers: solution non bornée

Max	Ci		10	14	0	0	0	-M	-M
C_B	B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	t_1	t_2
14	x_2	6	0	1	0	0	1		
10	x_1	8	1	0	0	-1	0		
0	x_3	2	0	0	1	-1	1		
	Zi	164	10	14	0	-10	14		
	Ci - Zi		0	0	0	10	-14		

Nous constatons que la dernière ligne du tableau du simplexe contient un coefficient positif (10) pour lequel la colonne associée est constituée de valeurs négatives ou nulles (0,-1,-1) ➔ on ne peut pas sélectionné une variable sortante ➔ la solution optimale est infinie et la valeur maximum est $+\infty$

Problématique

<u>EXERCICE :</u>

Une entreprise disposant de 10 000 m2 de carton en réserve, fabrique et commercialise 2 types de boîtes en carton. La fabrication d'une boîte en carton de type 1 ou 2 requiert, respectivement, 1 et 2 m2 de carton ainsi que 2 et 3 minutes de temps d'assemblage. Seules 200 heures de travail sont disponibles pendant la semaine à venir. Les boîtes sont agrafées et il faut quatre fois plus d'agrafes pour une boîte du second type que pour une du premier. Le stock d'agrafes disponible permet d'assembler au maximum 15 000 boîtes du premier type. Les boîtes sont vendues, respectivement, 3 \$ et 5 \$.

1) Formuler le problème de la recherche d'un plan de production maximisant le chiffre d'affaires de l'entreprise sous forme d'un programme linéaire canonique.
2) Déterminer un plan de production optimal en résolvant le programme linéaire trouvé en 1.

Institut Supérieur d'Informatique et de Mathématiques de Monastir

Partie 1 : Programmation linéaire

Cours 3 : Dualité

Présenté par: **Dr. Marwa thabet**
Maître assistante
thabetmarwa2@gmail.com

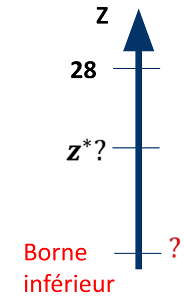
Problématique

- ***Exemple***

$$\boldsymbol{Min(Z) = 5x_1 + 6x_2}$$

S.C

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \geq 10 \ (c_1) \\ x_1 + x_2 \geq 5 \ (c_2) \\ x_1, x_{2,} \geq 0 \end{cases}$$



Est-ce que la solution $(x_1, x_2) = (2{,}3)$ est une borne inférieure ou supérieur de z^*?

- La solution est réalisable (on vérifie les contraintes)
- Comme il s'agit d'un problème de minimisation, c'est une **borne supérieure** de la valeur optimale.

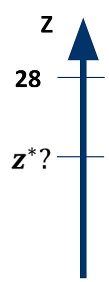
Le décideur aimerait savoir si on peut espérer faire beaucoup mieux donc il veut **une borne inférieure pour avoir le gain maximum possible qu'il peut espérer**

Quelle borne inférieure pouvez vous obtenir à partir des contraintes?

$$\boldsymbol{Min(Z) = 5x_1 + 6x_2}$$

S.C

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \geq 10 \ (c_1) \\ x_1 + x_2 \geq 5 \ (c_2) \\ x_1, x_{2,} \geq 0 \end{cases}$$



En utilisant C_1 seule:

$$z = \boxed{5}x_1 + \boxed{6}x_2 \geq \boxed{2}x_1 + \boxed{3}x_2 \geq 10$$

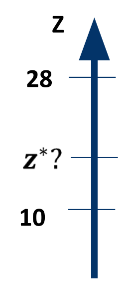
Donc $z^* \geq 10$

Quelle borne inférieure pouvez vous obtenir à partir des contraintes?

$$\boldsymbol{Min(Z) = 5x_1 + 6x_2}$$

S.C

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \geq 10 \ (c_1) \\ x_1 + x_2 \geq 5 \ (c_2) \\ x_1, x_{2,} \geq 0 \end{cases}$$



En utilisant C_1 et C_2

$$z = \boxed{5}x_1 + \boxed{6}x_2 \geq \boxed{3}x_1 + \boxed{4}x_2 \geq 15$$

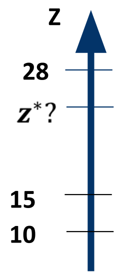
Donc $z^* \geq 15$

Quelle borne inférieure pouvez vous obtenir à partir des contraintes?

$$Min(Z) = 5x_1 + 6x_2$$

S.C

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \geq 10 \ (c_1) \\ x_1 + x_2 \geq 5 \ (c_2) \\ x_1, x_{2,} \geq 0 \end{cases}$$



En utilisant $C_1 + 3C_2$

$$z = \boxed{5}x_1 + \boxed{6}x_2 \geq \boxed{5}x_1 + \boxed{6}x_2 \geq 10 + 15$$ Donc $z^* \geq 25$

>

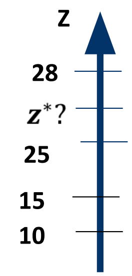
=

Quelle borne inférieure pouvez vous obtenir à partir des contraintes?

$$Min(Z) = 5x_1 + 6x_2$$

S.C

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \geq 10 \ (c_1) \\ x_1 + x_2 \geq 5 \ (c_2) \\ x_1, x_{2,} \geq 0 \end{cases}$$



Quelle borne inférieure pouvez vous obtenir à partir des contraintes?

$$c_1 \ implique \ z^* \geq 10$$

$$c_1 + c_2 \ implique \ z^* \geq 15$$

$$c_1 + 3c_2 \ implique \ z^* \geq 25$$

Objectif : faire des combinaison linéaire des membres de droite afin de :

- Constituer une borne inférieure
- Assurer qu'elle est maximum

C'est quoi la dualité?

- La dualité consiste à associer un autre programme linéaire dit son dual, qui ne sera défini qu'à l'aide des seules données du primal.
- le dual est le problème de trouver une combinaison linéaire des membres de droite (des contraintes) qui construit la meilleur borne inférieure possible (resp. supérieure possible) pour un problème de minimisation (resp. de maximisation).
- les propriétés liant le programme primal et son dual permettront de résoudre des problèmes de minimisation en termes de maximisation (resp. des problèmes de maximisation en termes de minimisation), et de développer de nouveaux algorithmes qui se révéleront plus performants pour un grand nombre de situations.

Dualité en programmation linéaire

- Programme linéaire primal

$$\boldsymbol{Min(Z) = 5x_1 + 6x_2}$$

S.C

$$(P) \begin{cases} \boldsymbol{2x_1 + 3x_2 \geq 10 \ (c_1)} \\ \boldsymbol{1x_1 + 1x_2 \geq 5 \ (c_2)} \\ \boldsymbol{x_1 \geq 0, x_2 \geq 0} \end{cases}$$

- Dual du programme linéaire primal

$$\boldsymbol{Max(Y) = 10c_1 + 5c_2}$$

S.C

$$(D) \begin{cases} \boldsymbol{2c_1 + 1c_2 \leq 5} & \boldsymbol{(1)} \\ \boldsymbol{3c_1 + 1c_2 \leq 6} & \boldsymbol{(2)} \\ \boldsymbol{c_1 \geq 0, c_2 \geq 0} \end{cases}$$

Dualité en programmation linéaire

$$\color{red}{Min}(Z) = 5x_1 + 6x_2$$

S.C

$$(P)\quad \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \geq 10\ (c_1) \\ 1x_1 + 1x_2 \geq 5\ (c_2) \\ x_1, x_2, \geq 0 \end{cases}$$

$$\color{red}{Max}(Y) = 10c_1 + 5c_2$$

S.C

$$(D)\quad \begin{cases} 2c_1 + 1c_2 \leq 5 & (1) \\ 3c_1 + 1c_2 \leq 6 & (2) \\ c_1, c_2, \geq 0 \end{cases}$$

Considérons:

- Une solution (x_1, x_2) réalisable de *(P)* de coût minimum *z*
- Une solution (c_1, c_2) réalisable de *(D)* de coût maximum *Y*

Par définition de *(P)* et *(D)* , *on a bien :*

$$Y \leq Z \qquad (\textit{théorème Faible})$$

$$Y = 10c_1 + 5c_2 \leq (2x_1 + 3x_2)c_1 + (x_1 + x_2)c_2$$

$$\leq (2c_1 + c_2)x_1 + (3c_1 + c_2)x_2$$

$$\leq 5x_1 + 6x_2 = Z$$

Dualité: caractéristiques

La dualité est caractérisée par les règles suivantes:

- Le sens de l'optimisation est inversé: la maximisation (resp. minimisation) dans le primal devient une minimisation (resp. maximisation) dans le dual.
- Les coefficients de la fonction économique du primal deviennent les seconds membres des contraintes duales; les seconds membres des contraintes primales deviennent les coefficients de la fonction économique du dual
- Les signes dans les inégalités des contraintes ou dans la contrainte de positivité des variables de décision suivent des règles précises de transformation

Dualité: Règle de dualisation

Maximisation		Minimisation
Nombre de contraintes	⟺	Nombre de variables
Nombre de variables	⟺	Nombre de contraintes
Type des contraintes		**Type des variables principales**
=	⟺	quelconque
≤	⟺	≥0
≥	⟺	≤0
Type des Variables de décision		**Type des contraintes**
quelconque	⟺	=
≥0	⟺	≥
≤0	⟺	≤

Exemple de dualité: MaxMin

- Programme linéaire primal

$$\color{red}{Max}(Z) = 3x_1 + x_2 - 2x_3$$

S.C

$$(P)\quad \begin{cases} x_1 + 2x_2 \geq 10 \\ 3x_1 - x_2 + x_3 = 7 \\ x_1 + 3x_3 \leq 8 \\ x_1 \gtrless 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0 \end{cases}$$

- Dual du programme linéaire primal

$$\color{red}{Min}(Y) = 10y_1 + 7y_2 + 8y_3$$

S.C

$$(D)\quad \begin{cases} y_1 + 3y_2 + y_3 = 3 & (1) \\ 2y_1 - y_2 \geq 1 & (2) \\ y_2 + 3y_3 \geq -2 & (3) \\ y_1 \leq 0, y_2 \lessgtr 0, y_3 \geq 0 \end{cases}$$

- Règle pour les opérateurs de contrainte de positivité: tous les opérateur des contraintes :(=↔≶), (≤↔≥)
- Règle pour les opérateurs des contraintes: on doit inverser uniquement les opérateurs $(= \ ou\ /et \lessgtr)$

Exemple de dualité: MinMax

- Programme linéaire primal

$$\color{red}{Min}(Z) = 3x_1 + x_2 - 2x_3$$

S.C

$$\textbf{(P)} \begin{cases} x_1 + 2x_2 \geq 10 \\ 3x_1 - x_2 + x_3 = 7 \\ x_1 + 3x_3 \leq 8 \\ x_1 \gtrless 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0 \end{cases}$$

- Dual du programme linéaire primal

$$\color{red}{Max}(Y) = 10y_1 + 7y_2 + 8y_3$$

S.C

$$\textbf{(D)} \begin{cases} y_1 + 3y_2 + y_3 = 3 & (1) \\ 2y_1 - y_2 \leq 1 & (2) \\ y_2 + 3y_3 \leq -2 & (3) \\ y_1 = 0, y_2 \geq 0, y_3 \geq 0 \end{cases}$$

- Règle pour les opérateurs de contraintes : tous les opérateur des contraintes :($= \leftrightarrow \lessgtr$), ($\leq \leftrightarrow \geq$)
- Règle pour les opérateurs de contrainte de positivité: on doit inverse uniquement les opérateurs ($= \, ou \, / et \, \lessgtr$)

Dualité: Théorème des écarts complémentaires

Comment retrouver une solution d'un problème avec la solution de l'autre?

Notons x^* la solution optimale du primal et y^* la solution optimale du dual

- Si $x_j^* > 0$, alors la **j-ième contrainte** du dual **est saturée**.
- Si la j-ième contrainte du dual <u>n'est pas saturée</u>, alors $x_j^* = 0$.
- Si $y_i^* > 0$, alors la i-ième contrainte du primal est saturée.
- Si la i-ième contrainte du primal n'est pas saturée, alors $y_i^* = 0$

Dualité: Théorème des écarts complémentaires

<u>Exemple</u>: Application du théorème des écarts complémentaires à un problème linéaire :

$$Max(Z) = 15x_1 + 25x_2$$

S.C

$$(P) \begin{cases} x_1 + 3x_2 \leq 96 \ (1) \\ x_1 + x_2 \leq 40 \ \ (2) \\ 7x_1 + 4x_2 \leq 238 \ \ (3) \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

La solution du primal est:

$$x_1 = 12; x_2 = 28$$

- (1) est saturée
- (2) est saturé
- (3) n'est pas saturé➔ contrainte marginale➔y_3=0

$$Min(W) = 96y_1 + 40y_2 + 238y_3$$

S.C

$$(D) \begin{cases} y_1 + y_2 + 7y_3 \geq 15 \ \ (1) \\ 3y_1 + y_2 + 4y_3 \geq 25 \ \ (2) \\ y_1 \geq 0, y_2 \geq 0, y_3 \geq 0 \end{cases}$$

- La dernière contrainte n'est pas saturée ➔ la variable dual associée est nulle: y_3=0
- $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$ ➔ deux contraintes duales **saturées**:

$$y_1 + y_2 + 7y_3 = 15 \Longrightarrow y_1 + y_2 = 15$$
$$3y_1 + y_2 + 4y_3 = 25 \Longrightarrow 3y_1 + y_2 = 25$$

➔$y_1 = 5, y_2 = 10, y_3 = 0$

Dualité: Exercice d'application

On considère le PL primal (P) suivant:

$$Min(Z) = 2x_1 + 5x_2 + 3x_3$$

S.C

$$(P) \begin{cases} x_1 \geq 10(1) \\ x_2 \geq 15 \ \ (2) \\ x_1 + 2x_2 + x_3 \geq 60 \ \ (3) \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 \geq 95 \ \ (4) \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0 \end{cases}$$

1. Donner (D) le dual du programme (P)
2. Résoudre (D) par l'algorithme du simplexe.
3. Déduire la solution optimale du programme primal (P)