

Définition :

Deux événements $A, B \in \mathcal{F}$ sont dites indépendantes (dans (Ω, \mathcal{F}, P)) si $P(A \cap B) = P(A)P(B)$.

Remarques

- 1 - Si $P(A) = 0$ alors A est indépendant avec tout événement.
- 2 - De même si $P(A) = 1$ (exercice).

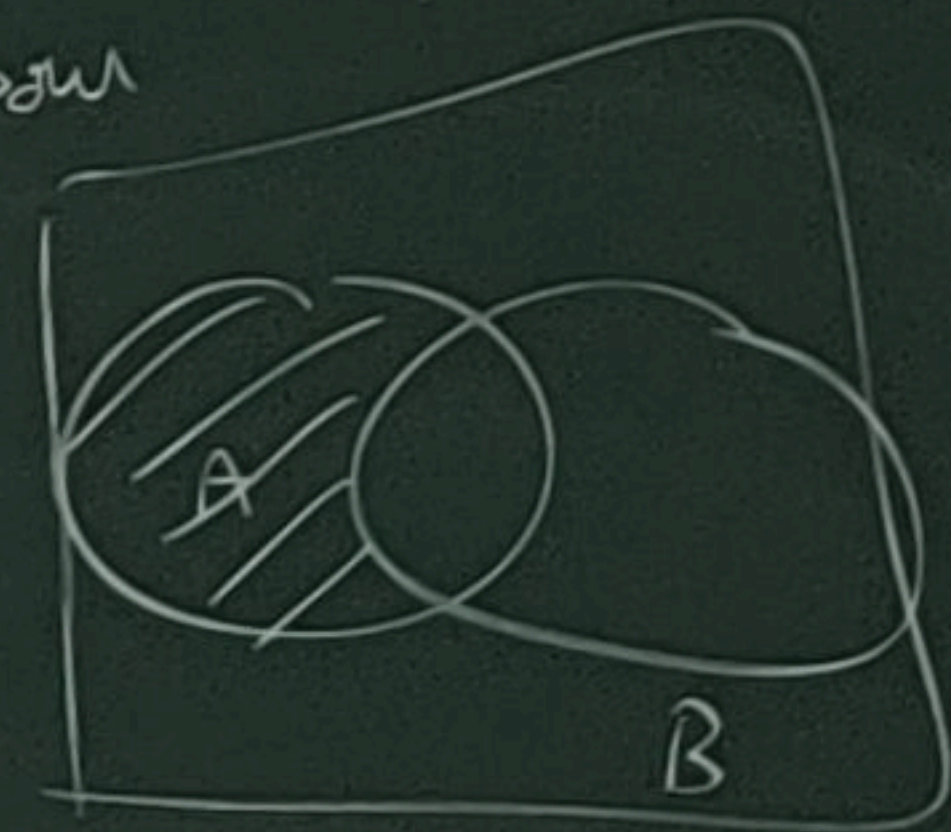
Proposition :

Si A et B sont indépendants; alors il en est de même pour A et \bar{B} ; \bar{A} et B , \bar{A} et \bar{B} .

Preuve

$$\begin{aligned} P(A \cap \bar{B}) &= P(A \setminus A \cap B) = P(A) - P(A \cap B) \\ &= P(A) - P(A)P(B) = P(A)[1 - P(B)] \\ &= P(A)P(\bar{B}). \end{aligned}$$

$$P(\bar{A} \cap \bar{B}) = P(\bar{A})P(\bar{B}) \text{ (exercice).}$$



Variables aléatoires discrètes:

I - Généralités

1/ Définition et propriétés:

on lance deux dés, l'un rouge et l'autre est bleu.

on note S la somme des numéros obtenus.

$$\Omega = \{1, 2, \dots, 6\}^2$$

$$S: \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(b, r) \longmapsto b+r$$

$$S(\Omega) = \{2, 3, \dots, 12\}$$

$$\text{soit } k \in S(\Omega)$$

$$\{S = k\} = \{(b, r) \in \Omega \mid b+r = k\}$$

$$P(S=2) = \frac{1}{36}$$

$$P(S=3) = \frac{2}{36}$$

$$P(S=4) = \frac{3}{36}$$

$$P(S=5) = \frac{4}{36}$$

$$P(S=6) = \frac{5}{36}$$

$$P(S=7) = \frac{6}{36}$$

$$P(S=8) = \frac{5}{36}$$

$$P(S=9) = \frac{4}{36}$$

$$P(S=10) = \frac{3}{36}$$

$$P(S=11) = \frac{2}{36}$$

$$P(S=12) = \frac{1}{36}$$

Si on note $\Omega' = \{2, -1, 2\}$

$\forall w \in \Omega'; P_S(w) = P(S=w)$ est une probabilité
que l'on appelle loi de S .

Définition: Soit (Ω, \mathcal{F}, P) un espace de probabilité
on appelle variable aléatoire discrète (v.a)

sur (Ω, \mathcal{F}, P) ; toute application

Proposition

$X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ vérifiant:

1/ l'ensemble des images $X(\Omega)$ est un ensemble dénombrable.

2/ $\forall k \in X(\Omega); \{X=k\} = \{w \in \Omega; X(w)=k\} \in \mathcal{F}$.

on peut remarquer: $\sum_{k \in X(\Omega)} P(X=k) = 1$

car $\{X=k\}; k \in X(\Omega)$ est une partition de Ω .

2) Loi d'une V.a. discrète

Définition: Soit X une v.a. sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$
on appelle loi de X la donnée de $\mathbb{P}(X=k)$
pour tout $k \in X(\Omega)$.

Exemple:

on lance deux dés l'un bleu et l'autre est rouge.

on note $X = \min(b, r)$

$$X(\Omega) = \{1, 2, \dots, 6\}$$

$$\mathbb{P}(X=1) = \frac{11}{36}; \quad \mathbb{P}(X=2) = \frac{9}{36}; \quad \mathbb{P}(X=3) = \frac{7}{36}; \quad \mathbb{P}(X=4) = \frac{5}{36}$$

$$\mathbb{P}(X=5) = \frac{3}{36}; \quad \mathbb{P}(X=6) = \frac{1}{36}$$

Remarque:

on peut avoir Loi de X égale au loi de Y
sans que $X=Y$.

- on lance un dé bleu; on note X la v.a. égale
au numéro obtenu.

- on lance un dé rouge; on note Y la v.a. égale
au numéro obtenu.

$$P(X=k) = 1/6 \quad \forall k \in \{1, \dots, 6\}$$

$$P(Y=k) = 1/6 \quad \forall k \in \{1, \dots, 6\}$$

loi de $X =$ loi de Y .

$$P(X=Y)$$

$$\begin{aligned} \{X=Y\} &= \bigcup_{k=1}^6 \{X=k\} \cap \{Y=k\} \\ &= \bigcup_{k=1}^6 \{X=k \text{ et } Y=k\} \end{aligned}$$

$$= \bigcup_{k=1}^6 (k, k)$$

$$P(X=Y) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

$$P(X \neq Y) = \frac{5}{6}$$

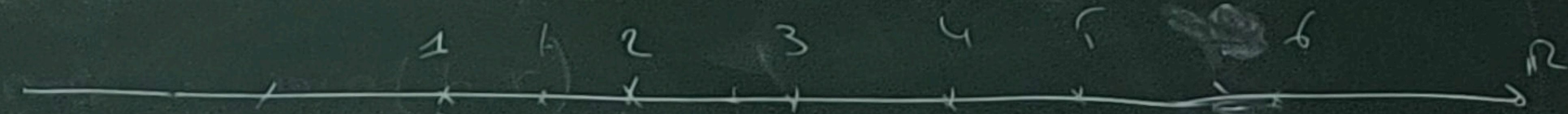
3) Fonction de répartition:

Définition: on appelle fonction de répartition (f.d.r)
d'une v.a. X la fonction notée F_X et définie par:

$$F_X: \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$$

$$t \mapsto P(X \leq t)$$

Exemple: $X = \min(b, r)$



$$\cdot t \in]-\infty, 1[\quad P(X \leq t) = 0,$$

$$\cdot t \in [1, 2[\quad P(X \leq t) = P(X=1) = \frac{11}{36}$$

$$\cdot t \in [2, 3[\quad P(X \leq t) = P(X=1) + P(X=2) = \frac{20}{36}$$

$$\cdot t \in [3, 4[\quad P(X \leq t) = \frac{27}{36}$$

$$P - t \in [4, 5[$$

$$P(X \leq t) = P(X \in]-\infty, 5]) = \frac{32}{36}$$

$$t \in [5, 6[; P(X \leq t) = \frac{35}{36}$$

$$t \in [6, +\infty[\quad P(X \leq t) = 1$$

Propriétés:

F_X vérifie les propriétés suivantes:

$$1) F_X \text{ est } \nearrow$$

$$2) \lim_{t \rightarrow +\infty} F_X(t) = 1 ; \lim_{t \rightarrow -\infty} F_X(t) = 0$$

3) F_X caractérise la loi de X . (en effet $F_X = F_Y$ si la loi de X égale la loi de Y)

$$4) \forall a, b \in \mathbb{R}, a \leq b, P(a < X \leq b) = F_X(b) - F_X(a)$$

II lois discrètes classiques (usuelles):

1) Loi uniforme sur un ensemble fini:

Une v.a. X suit la loi uniforme sur l'ensemble $\{x_1, \dots, x_n\}$

$$\Omega : - X(\Omega) = \{x_1, \dots, x_n\}$$

$$- P(X = x_i) = \frac{1}{n} \quad \forall i$$

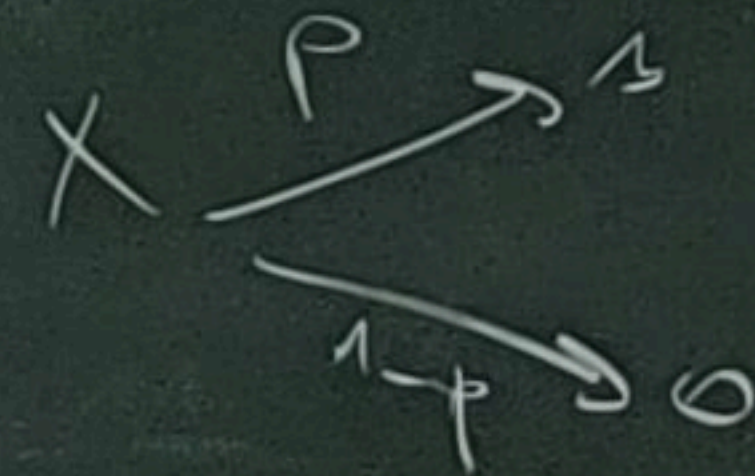
exemple: lancement d'un dé

on note $X \sim \mathcal{U}_{\{x_1, \dots, x_n\}}$

2) Loi de Bernoulli:

Une v.a. X suit la loi de Bernoulli de paramètre $p \in [0, 1]$

$$\Omega : X(\Omega) = \{0, 1\}$$



$$P(X=1) = p$$

$$P(X=0) = 1-p$$

on note $X \sim \mathcal{B}(p)$.