Les grammaires

Introduction:

- Une grammaire est l'ensemble des règles à suivre pour parler et écrire correctement une langue.

- Ce même principe s'applique également à la théorie des langages, où en suivant les règles de production d'une grammaire, il est possible de créer un langage spécifique.

Grammaire

Définitions:

- Une grammaire est un ensemble de règles de production qui sont utilisées pour engendrer un langage
- Ensemble de règles pour générer les mots du langage sont sous la forme de règles de réécriture

  → Remplacer une séquence de symboles par une autre séquence
- Mots générés = mots obtenus à partir d'un symbole spécial appelé symbole de départ ou axiome

Grammaire

Exemple: Considérons la phrase suivante :

La vieille dame regarde la petite fille

- Peut-on construire une grammaire qui permet de générer cette phrase?
- Alphabet : A= { la, vieille, petite, dame, fille, regarde}
- Structure de la phrase :
  - Un groupe sujet (article, adjectif, nom)
  - Un verbe
  - Un groupe complément d'objet (article, adjectif, nom)

Grammaire

Exemple:

- Règles de production:

1. <Phrase>→<Sujet><Verbe><Complément>
2. <Sujet>→<Groupe Nominal>
3. <Complément>→<Groupe Nominal>
4. <Groupe Nominal>→<Article><Nom>
5. <Groupe Nominal>→<Article><Adjectif><Nom>
6. <Article>→ la
7. <Nom>→ dame | fille
8. <Adjectif>→ vieille | petite
9. <Verbe>→regarde

Grammaire

- **Définition formelle:**
  Une grammaire G est un quadruplet (N,T,P,S) tels que:
  - N: ensemble fini de symboles non terminaux
  - T: ensemble fini de symboles terminaux
  - $N \cap T = \emptyset$
  - S: symbole non terminal appelé axiome (point de départ de la dérivation) ;
  - P: ensemble fini de règles de production de la forme:
    $\alpha \rightarrow \beta$ tel que $\alpha \in (N \cup T)^+$ et $\beta \in (N \cup T)^*$

    La notation $\alpha \rightarrow \beta$ est appelée une dérivation et signifie que α peut être remplacé par β.

Grammaire

- **Dérivation directe:**

  Un mot w' dérive directement d'un mot w qu'on note w=>w' si une règle G est appliquée une fois pour passer de w à w'.

  Càd: il existe une règle $\alpha \rightarrow \beta$ dans P telle que:

  $w=u\alpha v$ et $w'=u\beta v$ avec $u, v \in (N \cup T)^*$

- **Dérivation au sens général:**

  Un mot w' dérive d'un mot w qu'on note w->w', si on applique n fois les règles de G pour passer de w vers w' tel que n>=0.

Grammaire

- **Exemple:**
  soit la grammaire: G=({S}, {a, b},{S->aSb, S->ε}, S), nous avons:

  - aSb dérive directement de S et on écrit: S=>aSb car il existe une règle S->aSb ∈ P
  - ab dérive directement de aSb et on écrit: aSb=>ab car il existe une règle S-> ε ∈ P
  - S->aSb->ab est une dérivation de longueur 2
  - S->aSb->aaSbb->aabb est une dérivation de longueur 3
  - S->aSb->…..-> $a^n b^n$ est une dérivation de longueur n+1

Langage engendré par une grammaire

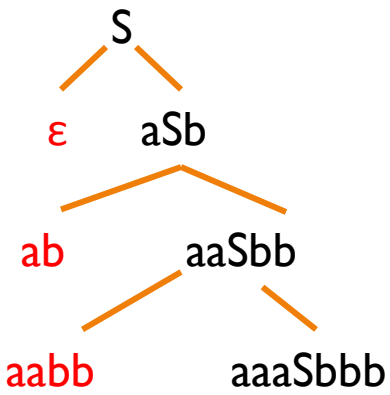
- **Définition:** Un langage engendré par une grammaire G=(N,T,P,S) est l'ensemble des mots obtenus en appliquant des séquences de dérivations à partir de l'axiome S.

  On note: $L(G)=\{w \in T^* / S =>^*_G w\}$

- **Exemples:**

  Pour la grammaire: G=({S}, {a, b},{S->aSb, S->ε}, S):

  - Mot minimal: ε
  - La forme générale: $L(G)=\{a^n b^n / n>=0\}$



- Remarque: Une grammaire définit un seul langage par contre un même langage peut être engendré par plusieurs grammaires différentes.

Grammaires équivalentes

- Deux grammaires sont équivalentes si elles engendrent le même langage.
  G équivalente à G' ⇔L(G)=L(G')

- **Exemples:**

  - G=({S,A,B}, {a,b}, {S->aS|ABb, A->Aa|a, B->b},S)

  - G'=({S,A,B}, {a,b}, {S->aS|aA, A->aA|bB, B->b},S)

  - => On trouve que L(G)=L(G')={$a^k b^2$ / k>=1}

Classification des grammaires

- **Hiérarchie de Chomsky**

  Selon la classification de Chomsky, les grammaires sont regroupées en quatre types en fonction de la forme de leurs règles de production:

  - Grammaire Syntagmatique -Type 0
  - Grammaire Monotone – Type1
  - Grammaire Algébrique (hors contexte) – Type 2
  - Grammaire Régulière – Type 3

Classification des grammaires

- **Grammaire Syntagmatique -Type 0**

  Dite aussi grammaire sans restriction (grammaire générale): si toutes ses règles sont de la forme générale suivante:

  $\alpha \rightarrow \beta$ tel que $\alpha \in (N \cup T)^+$ et $\beta \in (N \cup T)^*$

- **Exemple**:

  G=({S}, {a,b,c}, {S -> aS | Sb | c, aSb -> Sa | bS }, S)

Classification des grammaires

- **Grammaire monotone- Type 1:**
  si toutes ses règles sont de la forme:
  $\alpha \rightarrow \beta$ avec $|\alpha| <= |\beta|$ tel que $\alpha \in (N \cup T)^+$ et $\beta \in (N \cup T)^*$

  Exception: axiome ->ε peut appartenir à P

- **Exemple:**
  G=({S,R,T}, {a,b,c}, {S-> ε | abc, R->aRTb | aTb, Tb->bT, Tc->cc }, S)

Classification des grammaires

- **Grammaire algébrique –type2:**
  si toutes ses règles sont de la forme:
  A-> β avec A ∈ N et β ∈ (N U T)*

- **Exemple:**
  - G=({S},{a, b}, {S->aSb | ε}, S)
    Mots: ε, ab, aabb, aaabbb,….,$a^n b^n$
  - G=({S}, {0, 1}, {S->0S0 | 1S1 | ε | 0 | 1 }, S)
    Mots: 00, 11, 010, 101, 000, 111, 101101, …
    C'est la grammaire des Palindromes

Classification des grammaires

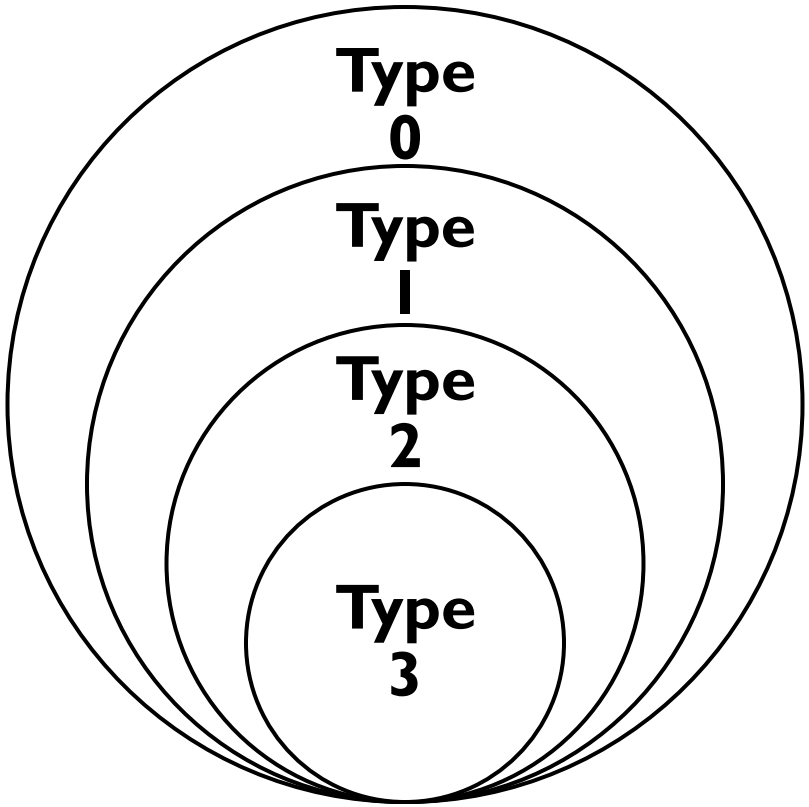
- **Grammaire Algebrique (hors contexte)- Type 3**
  Dite aussi grammaire régulière si elle est régulière à gauche ou bien à droite

  - Une grammaire G dite régulière à gauche si toutes ses règles sont de la forme:
    A->Bw ou A->w avec A, B ∈ N et w ∈ T*

  - Une grammaire G dite régulière à droite si toutes ses règles sont de la forme:
    A->wB ou A->w avec A, B ∈ N et w ∈ T*

Classification des grammaires

- Il existe une relation d'inclusion entre les types de grammaires selon la figure suivante :



Classification des grammaires

- Le type retenu pour une grammaire est le plus petit qui satisfait les conditions.
- Pour trouver la classe d'un langage on procède cependant comme suit :
  - Chercher une grammaire de type 3 qui le génère, si elle existe, le langage est de type 3 (ou **régulier)**
  - Sinon, chercher une grammaire de type 2 qui le génère, si elle existe, le langage est de type 2 (ou **algébrique)**
  - Sinon, chercher une grammaire de type 1 qui le génère, si elle existe, le langage est de type 1 (ou **contextuel)**
  - Sinon, le langage est de type 0.

Les automates

- Les grammaires représentent un moyen qui permet de décrire un langage d'une manière inductive.
- Elles montrent comment les mots du langage sont construits.
- Considérons à présent un langage L, on se propose de répondre à la question si $w \in L$?. On peut y répondre de plusieurs façons:
  - On peut vérifier l'existence de w dans la liste des mots de L (impossible à réaliser si le langage est infini).
  - Si L est défini par compréhension, on peut alors vérifier si w respecte la propriété du langage.
  - Si L est défini par une grammaire, on vérifie l'existence d'une chaîne de dérivation pour w

Les automates

- Il existe en réalité un autre moyen permettant de répondre à cette question : les automates.
- Un automate est une machine qui, après avoir exécuté un certain nombre d'opérations sur le mot, peut répondre à cette question par oui ou non.
- **Définition** : Un automate est une machine abstraite qui permet de lire un mot et de répondre à la question : "un mot w appartient-il à un langage L ?" par oui ou non.

Les automates

- Un automate est composé de :
  - Une bande en entrée finie ou infinie sur laquelle sera inscrit le mot à lire ;
  - Un organe de commande qui permet de gérer un ensemble fini de pas d'exécution ;
  - Eventuellement, une mémoire auxiliaire de stockage.
- un automate contient au minimum :
  - Un alphabet pour les mots en entrée noté X ;
  - Un ensemble non vide d'états noté Q;
  - Un état initial noté $q0 \in Q$;
  - Un ensemble non vide d'états finaux $qf \in Q$;
  - Une fonction de transition (permet de changer d'état) notée δ.

Les automates

- Configuration d'un automate
- Le fonctionnement d'un automate sur un mot se fait à travers un ensemble de configurations.
- Définition: On appelle configuration d'un automate en fonctionnement les valeurs de ses différents composants, à savoir la position de la tête L/E, l'état de l'automate et éventuellement le contenu de la mémoire auxiliaire (lorsqu'elle existe).
- Il existe deux configurations spéciales appelées configuration initiale et configuration finale.

Les automates

- **Définition:** La configuration initiale est celle qui correspond à l'état initial q0 et où la tête de L/E est positionnée sur le premier symbole du mot à lire.
- **Définition:** Une configuration finale est celle qui correspond à un des états finaux qf et où le mot a été entièrement lu.
- On dit qu'un mot est reconnu par un automate si, à partir d'une configuration initiale, on arrive à une configuration finale à travers une succession de configurations intermédiaires .
- On dit qu'un langage est reconnu par un automate lorsque tous les mots de ce langage sont reconnus par l'automate.

Classification des automates

- Comme les grammaires, les automates peuvent être classés en 4 classes selon la hiérarchie de Chomsky:
  - Type 3 ou automate à états fini (AEF) : il reconnaît les langages de type 3. Sa structure est la suivante :
    - bande en entrée finie ;
    - sens de lecture de gauche à droite ;
    - Pas d'écriture sur la bande et pas de mémoire auxiliaire.
  - Type 2 ou automate à pile : il reconnaît les langages de type 2. Sa structure est similaire à l'AEF mais dispose en plus d'une mémoire organisée sous forme d'une pile infinie ;

Classification des automates

- Type 1 ou automate à bornes linéaires (ABL) : il reconnaît les langages de type 1. Sa structure est la suivante :
  - Bande en entrée finie accessible en lecture/écriture ;
  - Lecture dans les deux sens ;
  - Pas de mémoire auxiliaire.

- Type 0 ou machine de Turing : il reconnaît les langages de type 0. Sa structure est la même que l'ABL mais la bande en entrée est infinie.

Les automates

Grammaire	Langage	Automate
Type 0	Récursivement énumérable	Machine de Turing
Type 1	Contextuel	Machine de Turing à borne linéaire
Type 2	Algébrique	Automate à pile
Type 3	Régulier ou rationnel	Automate à états fini

Automates à Etats Finis

Définition: Un automate d'états finis est défini par un quintuple A=(X, Q, I, δ, F) avec:

- X: l'alphabet
- Q: L'ensemble fini des états
- I: L'ensemble des états initiaux (I ⊆ Q)
- F: L'ensemble des états finaux (F ⊆ Q)
- δ : La relation de transition définie par l'ensemble fini de transitions de la forme (i, a, j) où i et j sont des états et a est un symbole appartenant à X.
- On la note δ(i, a)=j qui signifie la transition de l'état i vers l'état j en lisant le symbole a.

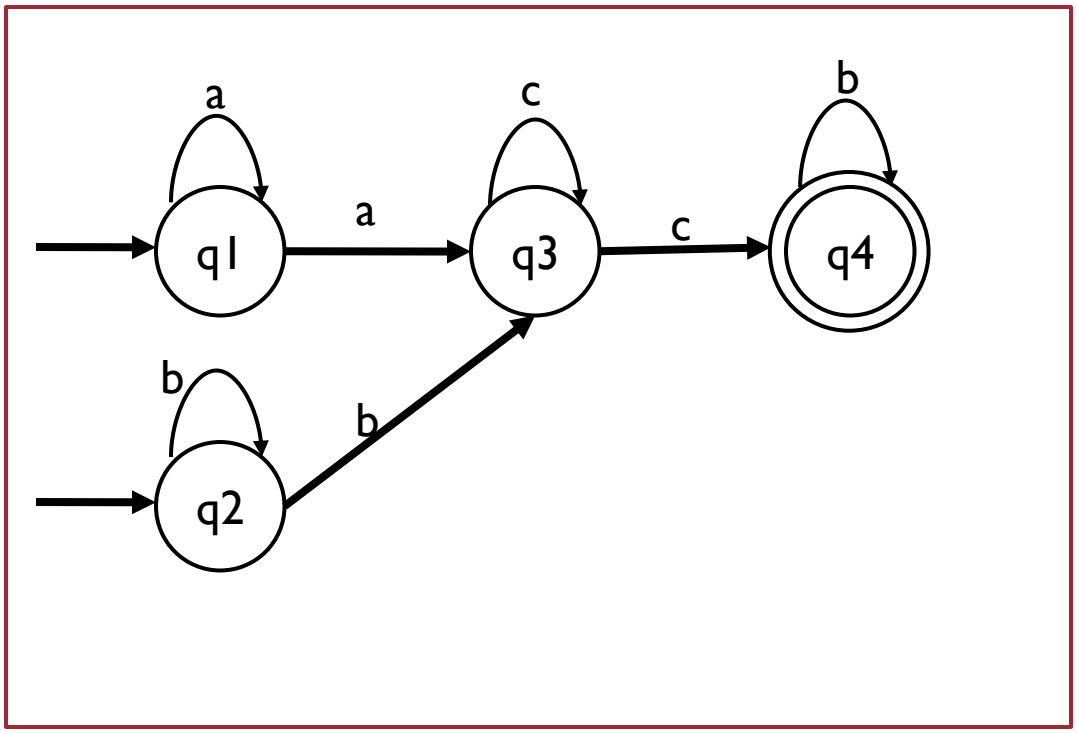
Automates à Etats Finis

Représentation Graphique: Elle consiste à représenter un automate d'états finis par un graphe orienté comme suit:

- Chaque état est schématisé par un rond (un nœud).
- Chaque état initial est précédé d'une flèche
- Chaque état final est entouré d'un cercle
- Pour chaque transition $\delta(qi, a)=qj$ on raccorde le nœud qi au nœud qj par un arc étiqueté par le symbole a.

Automates à Etats Finis

- **Représentation graphique**: exemple
- Soit l'automate d'états finis A=(X, Q, I, δ, F) avec:
  - X={a,b,c}
  - Q=(q1,q2,q3,q4}
  - I=(q1,q2}
  - F={q4}
  - Les transitions:
    - δ(q1,a)={q1,q3}
    - δ(q2,b)={q2,q3}
    - δ(q3,c)={q3,q4}
    - δ(q4,b)={q4}



Automates à Etats Finis

- **Représentation Matricielle**: Exemple
- Soit l'automate d'états finis A=(X, Q, I, δ, F) avec:
  - X={a,b,c}
  - Q=(q1,q2,q3,q4}
  - I=(q1,q2}
  - F={q4}
  - Les transitions:
    - δ(q1,a)={q1,q3}
    - δ(q2,b)={q2,q3}
    - δ(q3,c)={q3,q4}
    - δ(q4,b)={q4}

	a	b	c
→q1	{q1,q3}	-	-
→q2	-	{q2,q3}	-
q3	-	-	{q3,q4}
(q4)	-	q4	-

Automates à Etats Finis

Langage accepté par un automate: Définition

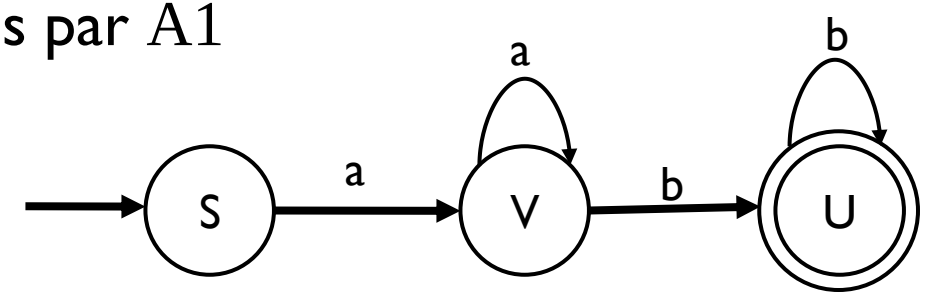
Soit l'automate d'états finis A=(X, Q, I, δ, F) , on dit que:

- Tout mot fini w=x0.x1.x2.x3….xn de X est accepté par un automate A si et seulement si il existe une séquence q0.q1.q2….qn.qn+1 de Q telle que:
  - Pour tout $0 \leq i \leq n$, $(q_i, x_i, q_{i+1}) \in \delta$.
  - q_{n+1} appartient à l'ensemble F
  - Le langage accepté (ou reconnu) par un automate A, noté L(A) est constitué de l'ensemble des mots acceptés par A.
  - Le langage accepté par un automate d'état fini est un langage régulier.

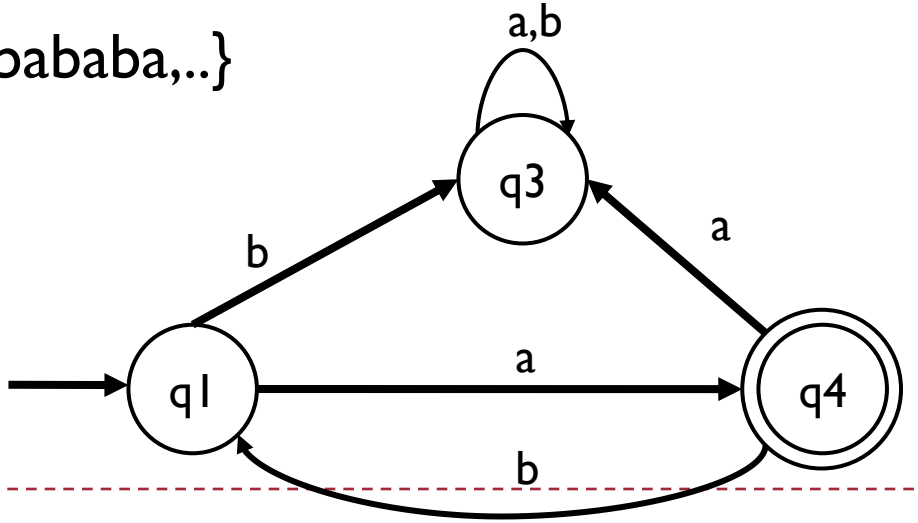
Automates à Etats Finis

- **Langage accepté par un automate: Exemples:**

1. Le langage accepté par cet automate est: L(A1)={$a^n b^p$/n>0,p>0}. Les mots bbab et aba ne sont pas acceptés par A1



2. L(A2)={a,aba, ababa, abababaaba,..}

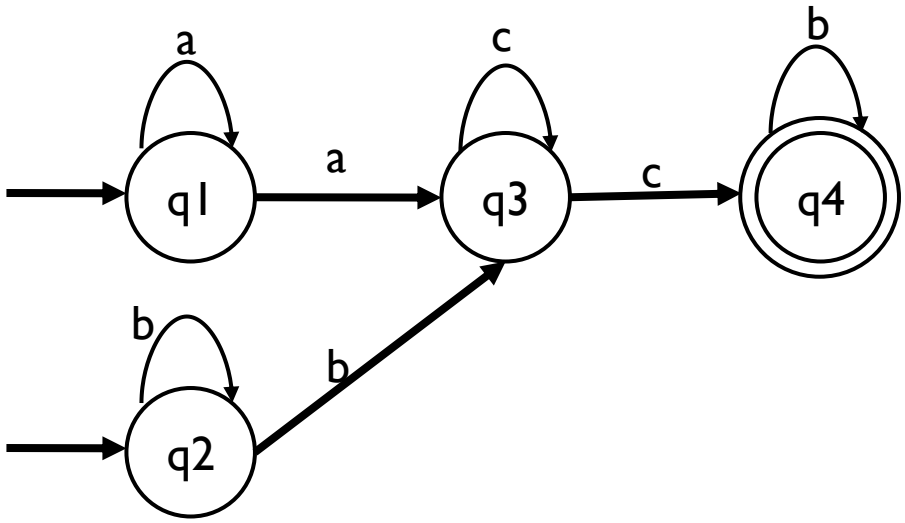


Automates Finis Non Déterministes

- Un automate est dit indéterministe, car:

1. Il peut y avoir plusieurs états initiaux
2. Etant donné un état $\delta i \in \delta$ et un symbole $a \in X$, il peut exister plusieurs transitions possibles

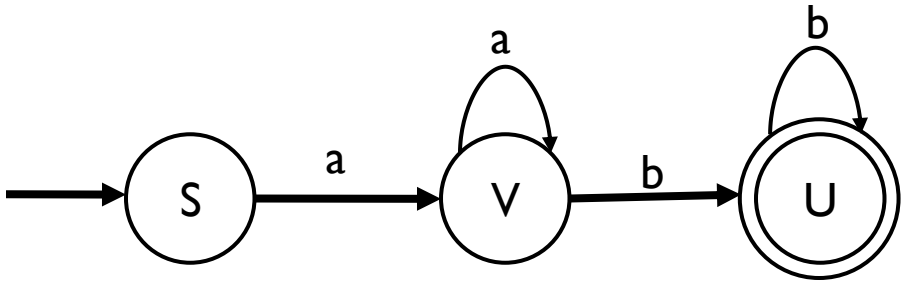
Dans la représentation graphique, ce non déterminisme correspond au cas ou il y plusieurs arcs étiquetés par un même symbole terminal qui partent du même sommet.



Automates Finis Déterministes

- Un automate est dit déterministe, si:

1. Il a un seul état initial
2. Etant donné un état $\delta i \in \delta$ et un symbole $a \in X$, il existe une seule transition possible



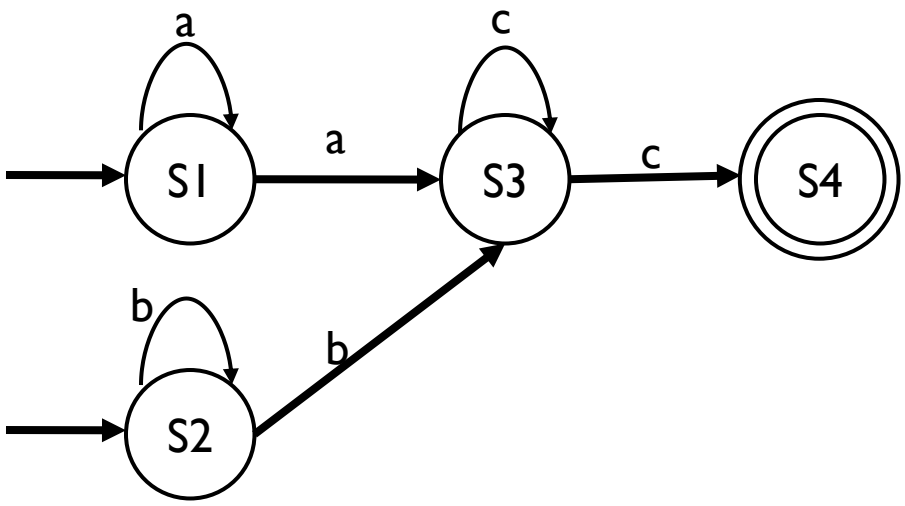
Déterminisation d'un AFN

- **Objectif:**
  - Pour déterminer si un mot u de longueur n est accepté, un AFD effectue exactement n transitions, tandis qu'un AFN en effectue de l'ordre de 2^n. L'exécution d'un AFD est donc nettement plus efficace que celle d'un AFN.
  - En contrepartie, on peut se demander si les AFN sont plus généraux, càd s'ils acceptent plus de langages que les AFD. La réponse, négative, est donnée par ce théorème:
- Théorème (Rabin-Scott):

  Tout langage reconnu par un AFN peut être reconnu par un AFD.

Déterminisation d'un AFN

- En pratique: prenons l'automate suivant:



	a	b	c
→S1	{S1,S3}	-	-
→S2	-	{S2,S3}	-
S3	-	-	{S3,S4}
(S4)	-		-

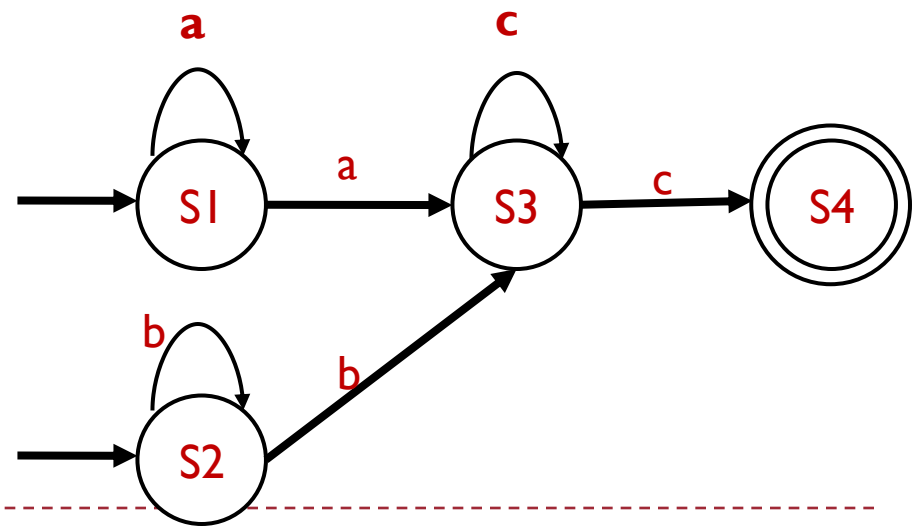
- On construit ensuite les états de l'AFD et leurs fonctions de transition

Déterminisation d'un AFN

- En pratique:

  Au départ, l'AFD a un seul état qui est composé de l'ensemble des états initiaux de l'AFN: dans notre exple, l'état initial sera {S1, S2}. A chaque fois qu'on ajoute un nouvel état dans l'AFD, on détermine sa fonction de transition en faisant l'union des lignes correspondantes dans la table de transition de l'AFN. Dans l'exple, pour l'état {S1,S2}, on fait l'union des lignes correspondantes à S1 et S2, et on détermine la fonction de transition:

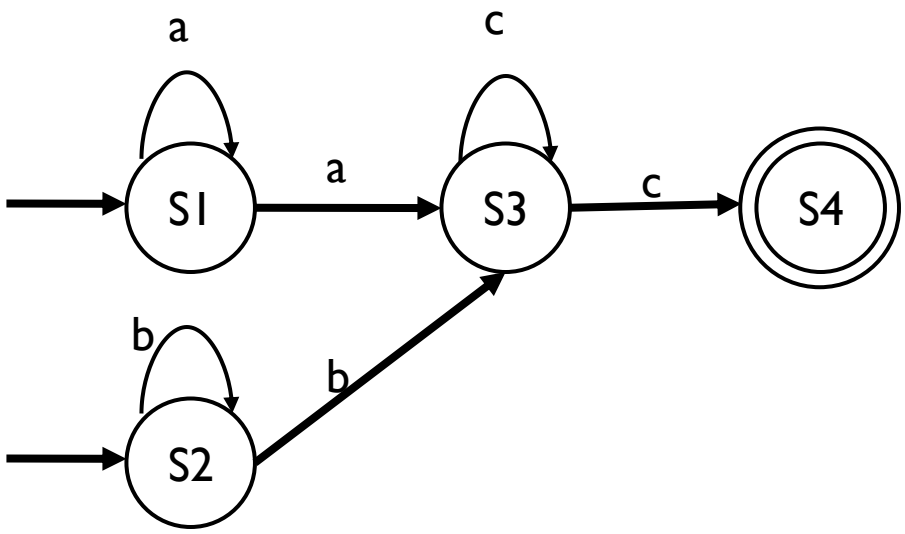
M	a	b	c
{S1,S2}	{S1,S3}	{S2,S3}	-



Déterminisation d'un AFN

- En pratique:
  On rajoute ensuite les états {S1, S3} et {S2, S3} à l'AFD et on détermine leur fonction de transition selon le même principe. De proche en proche, on construit la table de transition suivante pour l'AFD:

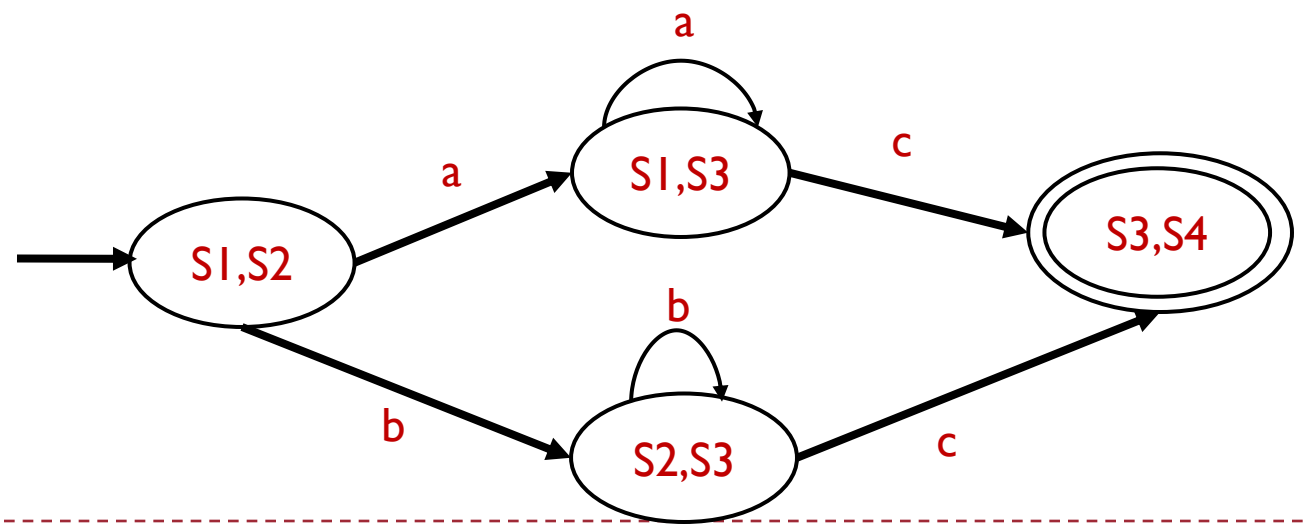
M	a	b	c
{S1,S2}	{S1,S3}	{S2,S3}	-
{S1,S3}	{S1,S3}		{S3,S4}
{S2,S3}		{S2,S3}	{S3,S4}
{S3,S4}			{S3,S4}



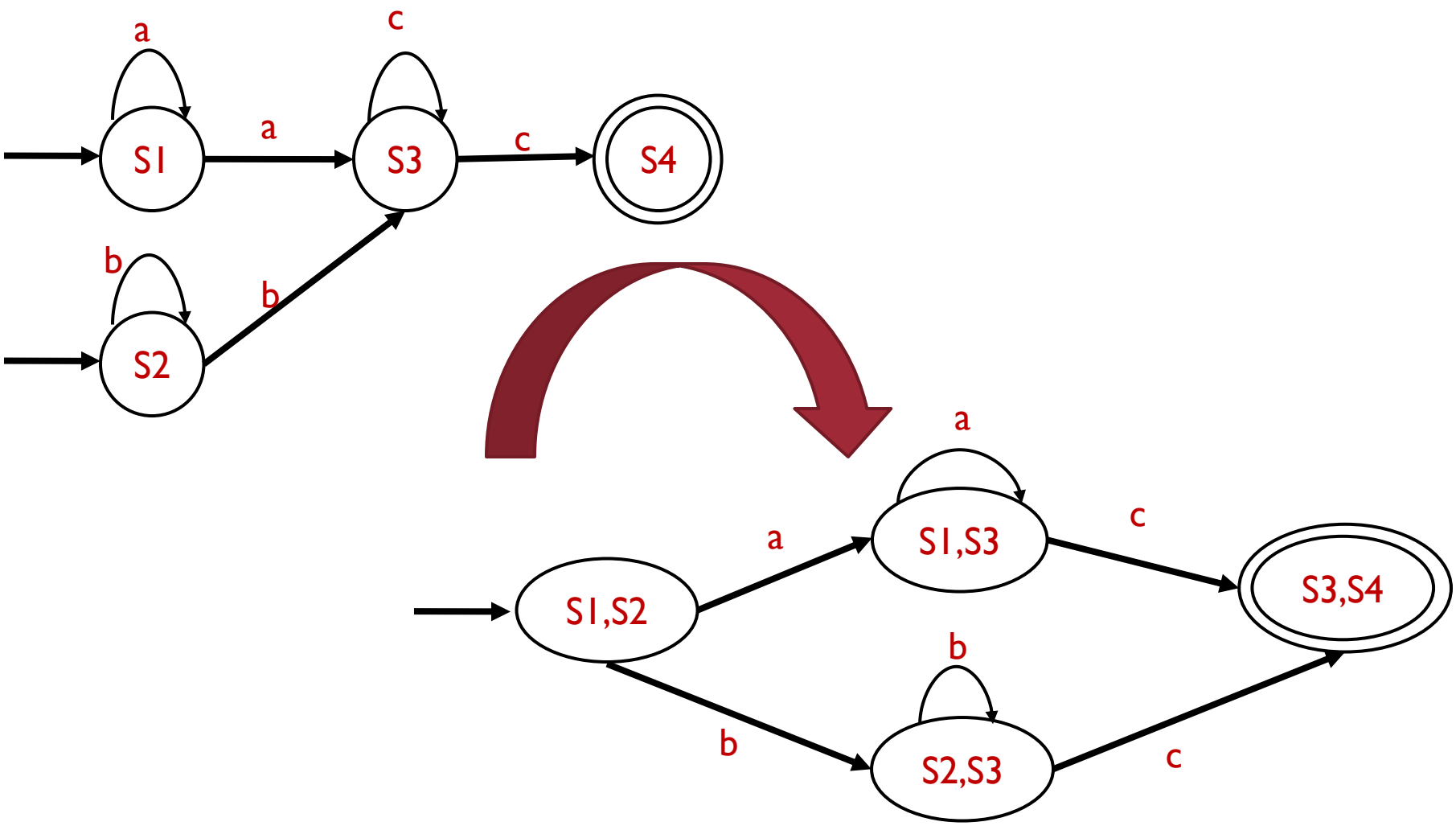
Déterminisation d'un AFN

En pratique:

- L'ensemble des états de l'AFD est Q={{S1, S2},{S1,S3}, {S2, S3}}.
- Les états de l'AFD contenant un état final de l'AFN sont des états finaux. Ici, l'AFN a un seul état final S4 et l'ensemble des états finaux de l'AFD est F'={{S3,S4}}. Cet AFD correspond au graphe suivant:



Déterminisation d'un AFN



Minimisation d'un AFD

- Objectif: La minimisation d'un AFD consiste à transformer un AFD donné en un AFD ayant le nombre minimal d'états et qui reconnait le même langage régulier.
  La minimisation a une importance pratique évidente par le gain d'espace qu'elle permet.
- La minimisation s'effectue:

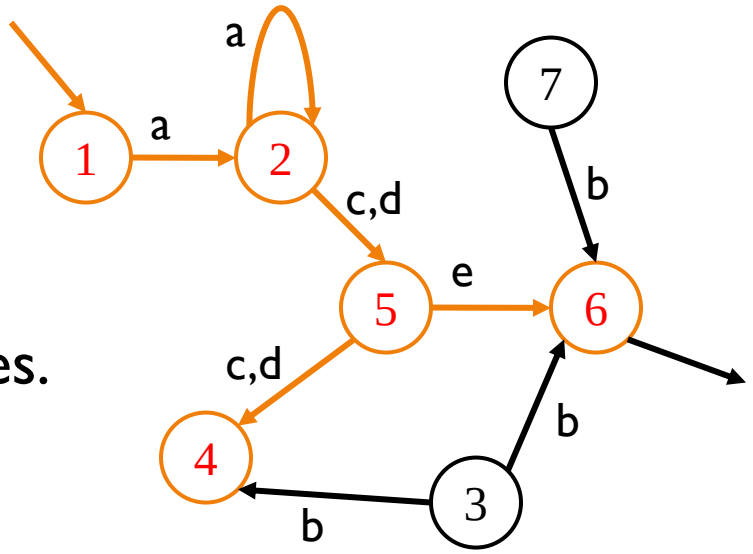
1. En éliminant les états dits inaccessibles
2. En regroupant les états congruents (appartenant à la même classe d'équivalence).

Minimisation d'un AFD

1. L'élimination des états inaccessibles: Un état est dit inaccessible s'il n'existe aucun chemin permettant de l'atteindre à partir de l'état initial. Cad qu'ils ne participeront jamais à l'acceptation d'un mot. Ainsi, la première étape de minimisation d'un AFD consiste à éliminer ces états.

- **Exemple:**

  Les états 7 et 3 sont inaccessibles. Donc nous les supprimons.

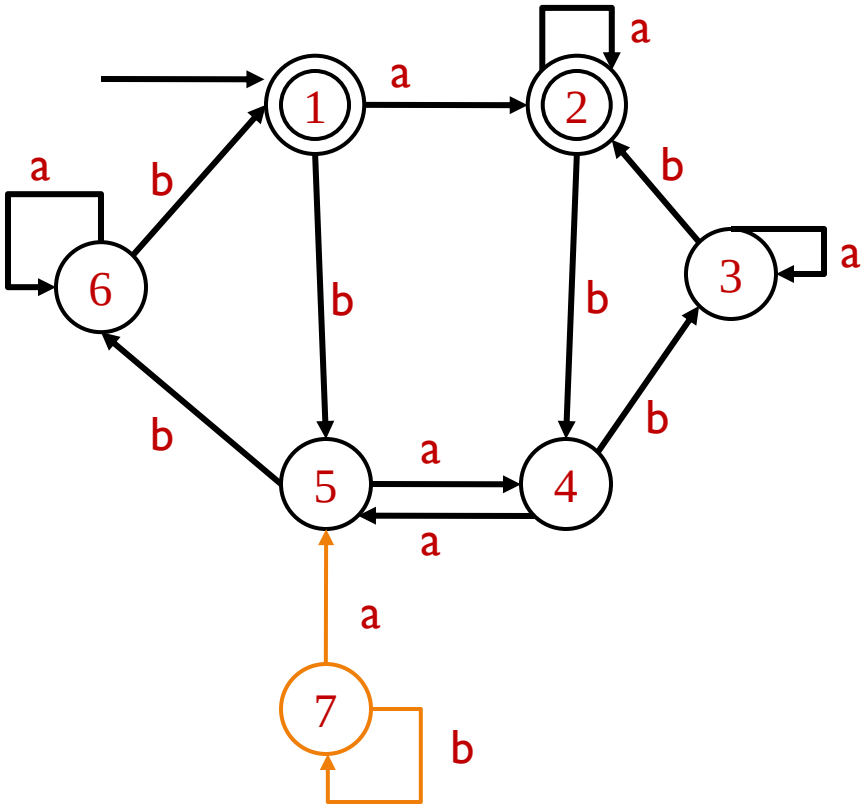


Minimisation d'un AFD

- L'élimination des états inaccessibles en utilisant l'algorithme de marquage:
  - Pour des automates de taille importante, nous utilisons l'algorithme de marquage pour supprimer les états inaccessibles.
  - Le principe de cet algorithme est de commencer le marquage des états depuis l'état initial et marquer les états atteints de bout en bout jusqu'à trouver des états non marqués.

Minimisation d'un AFD

- L'élimination des états inaccessibles en utilisant l'algorithme de marquage:



Etat	a	b
→ 1**	2	5
2**	2	4
3**	3	2
4**	5	3
5**	4	6
6**	6	1
7	5	7