Institut Supérieur d'Informatique
et de Mathématiques de Monastir

Série N :2
Probabilité et probabilité conditionnelle

Niveau : L2 INFO — A.U : 2025/2026

Exercice 1 Une urne contient 5 boules blanches et 7 rouges. On effectue 3 tirages d'une boule suivant la procédure suivante. A chaque tirage on prend une boule et on la remet dans l'urne en y ajoutant une boule de même couleur. Calculer les probabilités que l'échantillon de trois boules tiré contienne :

1. Aucune blanche.
2. Exactement une blanche.
3. Trois blanches.
4. Exactement deux blanches.

Exercice 2 Dans une population, on a observé que pendant 1 mois, 40% des individus sont allés au cinéma, 25% au théatre et 12,5% au cin ´ema et au théatre. Calculer la probabilité que pendant 1 mois un individu

1. aille au cinéma ou au théatre.
2. n'aille pas au cinéma.
3. n'aille ni au cinéma ni au théatre.
4. aille au cinéma mais pas au théatre.
5. aille au théatre sachant qu'il est allé au cinéma.
6. n'aille pas au cinéma sachant qu'il n'est pas allé au théatre.

Exercice 3 Une compagnie d'assurance répartit ses clients en trois classes R_1, R_2 et R_3 : les bons risques, les risques moyens et les mauvais risques. Les effectifs des ces trois classes représentent 20% de la population totale pour la classe R_1, 50% pour R_2 et 30% pour R_3. Les statistiques indiquent que les probabilités d'avoir un accident au cours de l'année pour une personne de l'une de ces trois classes sont respectivement de 0.05, 0.15 et 0.30.

1. Quelle est la probabilité qu'une personne choisie au hasard dans la population ait un accident dans l'année ?
2. Si M. Mounir n'a pas eu d'accident cette année, quelle est la probabilité qu'il soit un bon risque ?

Exercice 4 On dispose de n urnes contenant chacune 3 boules. Parmi ces $3n$ boules, l'une est jaune et toutes les autres sont bleues. On ignore dans quelle urne se trouve la boule jaune (autrement dit P(la boule jaune est dans l'urne i) $= \frac{1}{n}$ pour tout $i = 1, \dots, n$.

1. On tire simultanément sans remise deux boules de l'urne 1. On note les deux événéments

B_1 : "les deux boules tirées sont bleues"

J_1 : "la boule jaune est dans l'urne 1".

Calculer $P(B_1/J_1)$ et $P(B_1/\overline{J_1})$. En déduire $P(B_1)$.

2. Quelle est la probabilité que la boule jaune soit dans l'urne 1 si le tirage a donné deux bleues ?
3. On reprend l'expérience avec cette fois n personnes chacune face à une urne où elles tirent simultanément et sans remise deux boules. On note B_i et J_i les événements définis de manière analogue à la première question.
   (a) Que vaut $P(\overline{B}_i/J_k)$ pour $1 \leq i,\, k \leq n$? On distinguera les cas $i = k$ et $i \neq k$. En déduire $P(B_i)$.
   (b) Déterminer les valeurs des probabilités conditionnelles $P(B_i \cap B_j/J_k)$ (on distinguera les deux cas $k = i$, $k = j$ et $k \notin \{i, j\}$. En déduire $P(Bi \cap B_j)$.
   (c) Les événements B_i et B_j $(i \neq j)$ sont-il indépendants.

Exercice 5 Montrer que si A, B, C sont indépendants, $A \cup B$ et C sont indépendants. Généraliser.

Exercice 6 On effectue des lancers répétés d'une paire de dés et on observe pour chaque lancer la somme des points indiqués par les deux dés. On se propose de calculer de deux façons la probabilité de l'événement E défini ainsi : dans la suite des résultats observés, la première obtention d'un 9 a lieu avant la première obtention d'un 7.

1. Quelle est la probabilité de n'obtenir ni 7 ni 9 au cours d'un lancer ?
2. Première méthode : On note $F_i = \{obtention\ d'un\ 9\ au\ i\text{-}ème\ lancer\}$ et pour $n > 1$, $E_n = \{$ $ni\ 7\ ni\ 9\ ne\ sont\ obtenus\ au\ cours\ des\ n-1\ premiers\ lancers\ et\ le\ n\text{-}ème\ lancer\ donne\ 9\}$. Dans le cas particulier $n = 1$, on pose $E_1 = F_1$.
   (a) Exprimer E à l'aide d'opérations ensemblistes sur les E_n $(n \geq 1)$. Exprimer de même chaque E_n à l'aide des F_i et des $H_i = \{ni\ 7\ ni\ 9\ au\ i\text{-}ème\ lancer\}$.
   (b) Calculer $P(E_n)$ en utilisant l'indépendance des lancers.
   (c) Calculer $P(E)$.
3. Deuxième méthode : On note $G_1 = \{obtention\ d'un\ 7\ au\ premier\ lancer\}$.
   (a) Donner une expression de $P(E)$ en utilisant le conditionnement par la partition $\{F_1, G_1, H_1\}$.
   (b) Donner sans calcul les valeurs de $P(E|F_1)$, $P(E|G_1)$. Expliquer pourquoi $P(E|H_1) = P(E)$ puis déduire la valeur de $P(E)$.

Exercice 7 Trois personnes nommées A, B, C lancent à tour de rôle la même pièce de monnaie (ABCABCABC.. .). La probabilité d'obtenir pile lors d'un lancer est p $(0 < p < 1)$. Le gagnant est le premier qui obtient pile (la partie s'arrête alors).

1. On note A_n (resp. B_n, C_n) l'événement A gagne la partie lors du n-ième lancer (resp. B, C). Calculer $P(A_1)$, $P(B_2)$, $P(C_3)$. Les événements A_1 et B_2 sont-ils indépendants ?
2. En discutant suivant les valeurs de n, calculer $P(A_n)$, $P(B_n)$, $P(C_n)$.
3. Calculer la probabilité de gagner de chacun des trois joueurs.
4. Quelle est la probabilité qu'il y ait un vainqueur ? Conclure.

Série N°2

Ex n°1 :

Correction fil cours

Ex n°2 :

Soient C : " aller au cinéma "

T : " aller au théatre "

avec $P(C) = 0,4$

$P(T) = \cancel{0,5}\ 0,25$

1/ $P(C \cup T) = P(C) + P(T) - P(C \cap T)$

$= 0,4 + 0,25 - 0,125$

$= 0,525$

2/ $P(\bar{C}) = 1 - P(C) = 1 - 0,4 = 0,6$

$\boxed{P(\bar{a} \cap \bar{b}) = P(\overline{a \cup b})}$

3/ $P(\bar{C} \cap \bar{T}) = P(\overline{C \cup T})$

$= 1 - P(C \cup T)$

$= 1 - 0,525 = 0,475$

$\boxed{P(a \cap \bar{b}) = P(a) - P(a \cap b)}$

4/ $P(C \cap \bar{T}) = P(C) - P(C \cap T)$

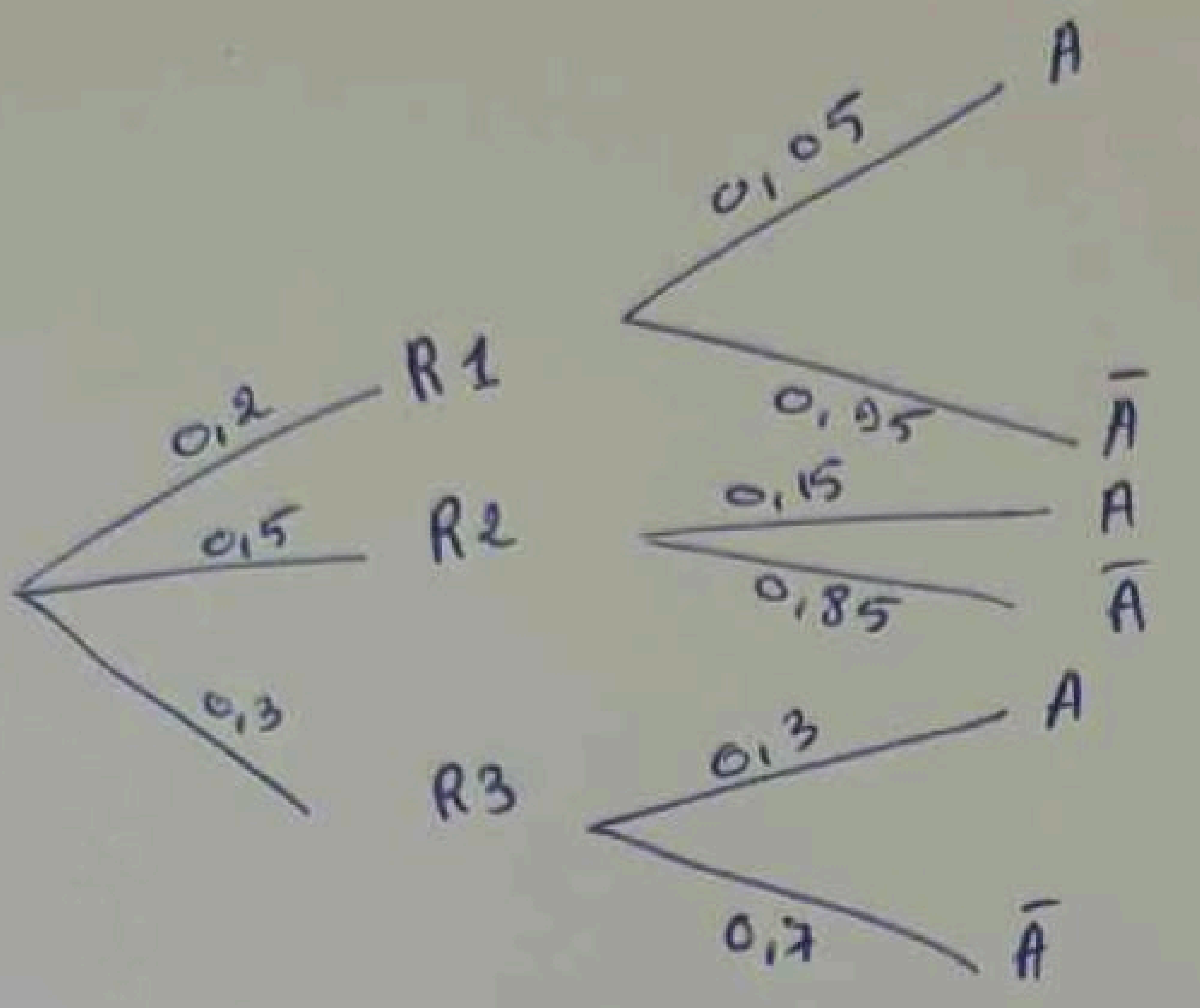
$= 0,4 - 0,125 = 0,275$

5/ $P(T/C) = \dfrac{P(C \cap T)}{P(C)} = \dfrac{0,123}{0,4} = 0,3125$

6/ $P(\bar{C} / \bar{T}) = \dfrac{P(\bar{C} \cap \bar{T})}{P(\bar{T})} = \dfrac{0,475}{1 - 0,25} = 0,633$

Ex n°3 :

Soit A : " avoir un accident "



1/ $P(A) = P(A/R1)P(A1) + P(A/R2)\,P(R2) + P(A/R3)\,P(R3)$

$= 0{,}05 . 0{,}2 + 0{,}15 . 0{,}5 + 0{,}3 . 0{,}3$

$= 0{,}175$

2/ $P(R1/\bar{A}) = \dfrac{P(\bar{A}/R1)\,P(R1)}{P(\bar{A})}$

$= \dfrac{0{,}95 . 0{,}2}{1 - 0{,}175}$

$= 0{,}23$

Ex n°4 :

1/ $P(B1/J1) = \dfrac{C_2^2}{C_3^2} = \dfrac{1}{3}$

$P(B1/\bar{J1}) = \dfrac{C_3^2}{C_3^2} = 1$

$P(B1) = P(B1/J1)\,P(J1) + P(B1/\bar{J1})\,P(\bar{J1})$

$= \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{1}{n} + 1 \cdot \dfrac{n-1}{n}$

$= \dfrac{1}{3n} + \dfrac{n-1}{n}$

$= \dfrac{3n-2}{3n}$

2/ $P(J1/B1) = \dfrac{P(B1/J1)\,P(J1)}{P(B1)}$

$= \dfrac{\dfrac{1}{3n}}{\dfrac{3n-2}{3n}}$

$= \dfrac{1}{3n-2}$

3/ a-

* $P(\bar{B}_i / J_k) = 1 - P(B_i / J_k)$

si $i = k$

$P(B_k / J_k) = \frac{1}{3} \Rightarrow P(\bar{B}_k / J_k) = \frac{2}{3}$

si $i \neq k$

$P(B_i / J_k) = 1 \Rightarrow P(\bar{B}_i / J_k) = 1 - 1 = 0$

* $P(B_i) = \sum_{k=1}^{m} P(B_i / J_k) P(J_k)$

$= P(B_i / J_k) P(J_i) + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{m} P(B_i / J_k) P(J_k)$

$= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{m} + (m-1) \cdot \frac{1}{m} \cdot 1$

$= \frac{3m-2}{3m}$

b-

* $P(B_i \cap B_j / J_k) = ?$

. si $k = i$

$P(B_i \cap B_j / J_i) = \frac{1}{3} \times 1 = \frac{1}{3}$

. si $k = j$

$P(B_i \cap B_j / J_j) = \frac{1}{3} \times 1 = \frac{1}{3}$

. si $k \notin \{i, j\}$

$P(B_i \cap B_j / J_k) = 1 \times 1 = 1$

*

$P(B_i \cap B_j)$

$= \sum_{K=1}^{n} P(B_i \cap B_j / J_K) \cdot P(J_K)$

$= P(B_i \cap B_j / J_i) \, P(J_i) + P(B_i \cap B_j / J_j) \, P(J_j)$

$+ \sum_{\substack{K=1 \\ K \neq i,j}}^{n} P(B_i \cap B_j / J_K) \, P(J_K)$

$= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{n} + (n-2) \cdot 1 \cdot \frac{1}{n}$

$= \ldots$

$= \frac{3n-4}{3n}$

c-

$A \perp\!\!\!\perp B \Rightarrow P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

$P(B_i) \cdot P(B_j) = \left(\frac{3n-2}{3n}\right)^2 \neq \frac{3n-4}{3n} = P(B_i \cap B_j)$

$\hookrightarrow$ B_i et B_j ne sont pas indépendants

Ex n°5 :

$P(A \cup B \cap C)$

$= P((A \cap C) \cup (B \cap C))$

$= P(A \cap C) + P(B \cap C) - P((A \cap C) \cap (B \cap C))$

$= P(A) . P(C) + P(B) . P(C) - P(A) . P(B) . P(C)$

$= P(C) \left(P(A) + P(B) - P(A) . P(B) \right)$

$= P(C) . P(A \cup B)$

$= P(A \cup B) . P(C)$

$\Rightarrow A \cup B$ et C sont indépendants

$\lceil A_1, A_2, \dots, A_n$ et C sont $\perp\!\!\!\perp$

alors $\bigcup_{i=1}^{n} A_i$ et C sont indépendants $\rfloor$

Ex n°6 :

1/ $\Omega = 6.6 = 36$

$P(7) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$

$P(9) = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$

$P(\overline{7} \cap \overline{9}) = 1 - \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{9}\right) = \frac{13}{18}$

2/ a-

$$E_n = \bigcap_{i=1}^{n-1} H_i \cap F_n$$

b-

$$P(E_n) = P\left(\bigcap_{i=1}^{n-1} H_i \cap F_n\right)$$

$$= \prod_{i=1}^{n-1} P(H_i) \cdot P(F_n)$$

$$= \left(\frac{13}{18}\right)^{n-1} \cdot \frac{1}{9}$$

c-

$$P(E) = P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} P(E_n)$$

$$= \frac{1}{9} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{13}{18}\right)^{n-1}$$

changement de variable $k = n-1$

$$= \frac{1}{9} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{13}{18}\right)^{k}$$

$$= \frac{1}{9}\left[1 - \frac{1}{1 - \frac{13}{18}}\right] = \frac{2}{5}$$

3/ a.

$$P(E) = P(E/F1)\,P(F1) + P(E/G1)\,P(G1) + P(E/H1)\,P(H1)$$

b.

$P(E/F1) = 1$ était réalisé

$P(E/G1) = 0$ n'était pas réalisé

$P(E/H1) = P(E)$ indépendant

$$P(E) = 1 \cdot \frac{1}{5} + 0 \cdot P(G1) + \frac{13}{18}\,P(E)$$

$$\Leftrightarrow \quad P(E)\left(1 - \frac{13}{18}\right) = \frac{1}{5}$$

$$\Leftrightarrow \quad P(E) = \ldots = \frac{2}{5}$$

Ex n°7.

1/ • $P(A1) = P$

$P(B2) = (1-P)P$

$P(C3) = (1-P)^2 P$

• A1 et B2 ne sont pas indépendants car B joue si A a eu face

2/ $P(A_n) = (1-P)^{3(n-1)} . P$

$P(B_n) = (1-P)^{3(n-1)+1} . P$

$P(C_n) = (1-P)^{3(n-1)+2} . P$

3/ $P(A) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n)$

$= \sum_{n=1}^{\infty} (1-P)^{3(n-1)} . P$

$K = n-1$ $\quad = P \sum_{n=0}^{\infty} ((1-P)^3)^K$

$= P . \frac{1}{1-(1-P)^3}$

$P(B) = \sum_{n=1}^{\infty} (1-P)^{3(n-1)+1} . P$

$= (1-P).P \sum_{n=1}^{\infty} ((1-P)^3)^{n-1}$

$= \frac{(1-P)P}{1-(1-P)^3}$

$$P(C) = \sum_{n=1}^{\infty} (1-p)^{3(n-1)+2} \cdot p$$

$$= (1-p)^2 \cdot p \sum_{n=1}^{\infty} \left(\left((1-p)^3\right)^{n-1} \right)$$

$$= \frac{(1-p)^2 p}{1-(1-p)^3}$$

$$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$$

4)

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C)$$

$$= \frac{p + (1-p).p + (1-p)^2 . p}{1-(1-p)^3}$$

$$= \frac{p.(1 + (1-p) + (1-p)^2)}{(1-1+p)\,(1^2 + (1-p) + (1-p)^2)}$$

$$= \frac{p}{p} = 1$$

$\Longrightarrow$ Certainement l'un de joueur va gagner à un instant