X, Y deux v.a ; $a, b \in \mathbb{R}$

$$E(aX + bY) = aE(X) + bE(Y)$$

Pbm X une v.a ; f une fonction réelle.

$$E(f(X))?$$

Exemple :

$X \sim \mathcal{U}_{\{-2,-1,0,1,2\}}$

$f(x) = x^4 - x^2 + 2$

on pose $Y = f(X) = X^4 - X^2 + 2$

$Y(\Omega) = \{14 ; 2\}$

$$E(Y) = \sum_{k \in Y(\Omega)} k \, P(Y = k)$$

$= 2\,P(Y=2) + 14\,P(Y=14)$

$= 2\left[P(X=0) + P(X=-1) + P(X=1)\right]$

$+ 14\left[P(X=2) + P(X=-2)\right]$

II Moments d'ordre r :

Déf : Soit $r \in \mathbb{N}^*$. On appelle moment d'ordre r de la v.a X la quantité :

$$E(X^r) = \sum_{k \in X(\Omega)} k^r \cdot P(X=k)$$

Théorème (Inégalité de Markov) :

Soit X une v.a positive. Alors on a :

$$\forall t > 0 : \quad P(X \geq t) \leq \frac{E(X)}{t}$$

Preuve : Soit $t>0$; $E(X) = \sum_{k \in X(\Omega)} k\, P(X=k) = \sum_{k \geq t} k\, P(X=k) + \underbrace{\sum_{k<t} k\, P(X=k)}_{\geq 0}$

$$\Rightarrow E(X) \geq \sum_{k \geq t} k\, P(X=k) \geq \sum_{k \geq t} t\, P(X=k) = t\, P(X \geq t)$$

$$\Rightarrow P(X \geq t) \leq \frac{E(X)}{t}.$$

$$= f(0)P(X=0) + f(-1)P(X=-1) + f(1)P(X=1)$$
$$+ f(-2)P(X=-2) + f(2)P(X=2).$$

donc $E(f(X)) = \sum_{k \in X(\Omega)} f(k)P(X=k)$

Proposition :

Soit X une v.a ; f une fonction réelle.

- Alors $\boxed{E(f(X)) = \sum_{k \in X(\Omega)} f(k)P(X=k)}$

Remarque

- Si $X \geq 0$. alors $E(X) \geq 0$.
- Si $X \leq Y$, $E(X) \leq E(Y)$.

Conséquence : $a = 0 \Rightarrow V(b) = 0$.

Proposition : $V(X) = 0 \Leftrightarrow X = c^{te}$

Proposition : $V(X) = E(X^2) - E^2(X)$

preuve : $V(X) = E\left((X - E(X))^2\right)$

$$= E\left(X^2 - 2E(X).X + E^2(X)\right)$$

$$= E(X^2) - 2E(X)E(X) + E^2(X)$$

$$= E(X^2) - E^2(X).$$

Exemples :

1) $X \sim \mathcal{B}(p)$ $\quad X \begin{cases} \xrightarrow{p} 1 \\ \xrightarrow{1-p} 0 \end{cases}$

$$E(X^2) = \sum_{k \in X(\Omega)} k^2 P(X = k) = p$$

$$V(X) = p - p^2 = p(1-p)$$

2) $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$

$V(X) = \lambda$

3) $X \sim \mathcal{G}(p)$

$$V(X) = \frac{1-p}{p^2}$$

III Variance :

Définition : Soit X une v.a.
On appelle variance de X
la quantité : $V(X) = E\left[(X - E(X))^2\right] \geq 0$.

On appelle écart-type de X ; la quantité

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$$

Proposition

X une v.a ; $a, b \in \mathbb{R}$

$$V(aX + b) = a^2 V(X)$$

Preuve :

$$V(aX+b) = E\left[(aX+b - E(aX+b))^2\right]$$

$$= E\left[(aX+b - aE(X) - b)^2\right] = E\left(a^2(X - E(X))^2\right)$$

$$= a^2 E\left((X - E(X))^2\right) = a^2 V(X)$$

Théorème (Inégalité de Tchebychoff) :

X une v.a.

$$\forall t > 0 ; \quad P(|X - E(X)| \geq t) \leq \frac{V(X)}{t^2}$$

Exemple : On jette 3600 fois un dé.

Minorer la prob que le nombre d'apparition de 1 soit compris entre 480 et 720.

Notons S le nombre d'apparition de 1

$$S \sim \mathcal{B}\left(3600, \frac{1}{6}\right)$$

$$E(S) = \frac{3600}{6} = 600$$

$$P(480 < S < 720)$$

Markov.

Corollaire X une v.a. $\forall t > 0$

$$P(|X| \geq t) \leq \frac{E(|X|)}{t}$$

Attention : $E(XY) = E(X)E(Y) \not\Rightarrow$ X et Y sont indépendantes.

Exemple : $X \sim \mathcal{U}_{\{-1,0,1\}}$; Y v.a ; $Y(\Omega) = \{0,1\}$

$P(Y=1) = P(X=0)$

$E(XY) = \sum_{\substack{i \in \{-1,0,1\} \\ j \in \{0,1\}}} ij\, P(X=i, Y=j) = 0$

$P(Y=0) = P(X \neq 0)$

$E(X) = 0$

$E(Y) = 1/3$

$E(XY) = E(X)E(Y)$ alors que X et Y ne sont pas indépendantes.

$(\underbrace{X - E(X)}_{a} + \underbrace{Y - E(Y)}_{b})^2$

$V(X+Y) = E\left(\left(X+Y - E(X+Y)\right)^2\right)$

$= E\left(\left(X - E(X)\right)^2\right) + E\left(\left(Y - E(Y)\right)^2\right) - 2E\left(X - E(X)\right)\left(Y - E(\ldots\right.$

$\neq V(X) + V(Y)$ ...

On prends $X = S - E(S)$.

$= S - 600$.

$\{480 < S < 720\} = \{-120 < S - 600 < 120\}$

$= \{|S - 600| < 120\}$

$1 - P(|X| < 120) \leq \frac{E(|X|)}{120}$

IV Covariance :

. Le but est de calculer la variance d'une somme de v.a.

Déf :

. Soit X, Y deux v.a.

$$E(XY) = \sum_{\substack{i \in X(\Omega) \\ j \in Y(\Omega)}} i j P(X = i, Y = j)$$

Prop : Si X et Y sont indép, alors $\underline{E(XY) = E(X)E(Y)}$

Définition :

X, Y deux v.a

on appelle covariance de (X, Y) la quantité :

$$\operatorname{cov}(X,Y) = E\big[(X - E(X))(Y - E(Y))\big]$$

$$\operatorname{cov}(X,X) = V(X)$$

$$\operatorname{cov}(X,Y) = E\big[XY - E(X)Y - E(Y)X + E(X)E(Y)\big]$$

$$= E(XY) - E(X)E(Y)$$

Propriétés :

1) $\operatorname{cov}(X,Y) = \operatorname{cov}(Y,X)$

2) $\operatorname{cov}(aX+b, cY+d) = ac\,\operatorname{cov}(X,Y)$

3) $|\operatorname{cov}(X,Y)| \leq \sigma(X)\sigma(Y)$

4) Si X et Y sont indép alors $\operatorname{cov}(X,Y) = 0$

(la réciproque n'est pas vraie)

Application :

$X \sim \mathcal{B}(n,p)$

$X = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$; avec $X_i \sim \mathcal{B}(p)$

les X_i sont indépendantes.

donc $V(X) = V(X_1) + \cdots + V(X_n)$

$= np(1-p)$

$\operatorname{cov}(X,Y) = E\left[XY - E(X)Y - E(Y)X + E(X)E(Y)\right]$

$= E(XY) - E(X)E(Y)$

Propriétés :

1) $\operatorname{cov}(X,Y) = \operatorname{cov}(Y,X)$

2) $\operatorname{cov}(aX+b, cY+d) = ac\operatorname{cov}(X,Y)$

3) $|\operatorname{cov}(X,Y)| \leq \sigma(X)\sigma(Y)$

4) Si X et Y sont indép

alors $\operatorname{cov}(X,Y) = 0$

(La réciproque n'est pas vraie)

Proposition :

$$V(X+Y) = V(X) + V(Y) + 2\,\mathrm{cov}(X,Y)$$

$$V\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} V(X_i) + \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^{n} \mathrm{cov}(X_i, X_j)$$

- Si X et Y sont indépendants alors

$$\begin{cases} V(X+Y) = V(X) + V(Y) \\ V(aX+bY) = a^2 V(X) + b^2 V(Y) \end{cases}$$

$$V(X+Y) = E\left(\left(X+Y - E(X+Y)\right)^2\right)$$

$$= E\left(\left(X - E(X)\right)^2\right) + E\left(\left(Y - E(Y)\right)^2\right) - 2E\left(X - E(X)\right)\left(Y - E(Y)\right)$$

$$\neq V(X) + V(Y)$$