Institut Supérieur d'Informatique
et de Mathématiques de Monastir

Série N :1
Analyse combinatoire

Niveau : L2 INFO — A.U : 2024/2025

Exercice 1 Soient E un ensemble quelconque et A, B et $C \in \mathcal{P}(E)$. Montrer :

1. $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$
2. $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$
3. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
4. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

Exercice 2 On lance simultanément 5 dés cubiques. Quel est le nombre des résultats possibles ?

Exercice 3 Un jury est composé de 10 membres tirés au sort parmi un groupe de 8 hommes et 9 femmes.

1. Combien de jurys différent peut-on former ?
2. Combien de jurys comportant 5 hommes et femmes peut-on former ?
3. Monsieur X refuse de s'associer avec Madame Y. Combien de jurys peut-on former dans ces conditions ?

Exercice 4 Dans un camp de vacances hébergeant 80 personnes, 55 personnes pratiquent la natation, 33 le tennis et 16 ne pratiquent aucun de ces deux sports. Combien de personnes pratiquent à la fois le tennis et la natation ?

Exercice 5
1. Au jeu du Promosport, on coche l'une des trois cases 1,X , 2 pour chacun des 13 matches sélectionnés. Dénombrer le nombre de colones distincts.
2. Combien y a-t-il de numéro de téléphone commençant par 7353... ?
3. De combien de façons peut-on repartir 7 personnes sur 7 chaises ?
4. Dans une course de chevaux comporte 20 partants. Combien peut-il y avoir de résultats possibles de tiercés dans l'ordre ?
5. Au loto, On tire au hasard 6 boules parmi 49. Combien de tirages possibles

Exercice 6 Au jeu de Poker (jeu de 32 cartes), on choisit une "main" de 5 cartes au hasard. Déterminer :

1. Nombre de mains total.
2. Nombre de mains qui contiennent exactement 3 as.

3. Nombre de mains qui contiennent au moins 3 as.

Exercice 7 Pour jouer au loto, il faut cocher 6 numéros sur une grille en compant 42. Pour gagner, il faut avoir au moins 3 numéros en commun avec le tirage officiel. Ce dernier compte en fait 7 numéros. Les 6 premiers constituent la combinaison principale et le dernier est appelé "numéro cmplémentaire" . Cinq rangs de gain sont définis : le premier correspond à 6 numéros corrects (du tirage principal). le deuxième à 5 numéros corrects plus le complémentaire, les trois rangs suivants supposent 5,4 ou 3 numéros corrects.

1. Déterminer le nombre de grilles possilbles de 6 numéros.
2. Pour chaque rang de gain. calculez le nombre de combinaisons gagnantes
3. Déterminer pour chaque rang la probabilité de gain.

TD 1

Ensemble

(ib)

Ex 1

1) Pour Montrer que un ensemble $A = B$

$A \subset B$ et $B \subset A$

si $x \in A$
$\Leftrightarrow \dots$
$\Leftrightarrow \dots$
$\Leftrightarrow x \in B$

1) $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$?

on : $x \in \overline{A \cap B} \Leftrightarrow x \notin A \cap B$

$\Leftrightarrow x \notin A$ ou $x \notin B$

$\Leftrightarrow x \in \overline{A}$ ou $x \in \overline{B}$ donc $x \in \overline{A} \cup \overline{B}$

2) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$?

on a $x \in \overline{A \cup B} \Leftrightarrow x \notin A \cup B$

$\Leftrightarrow x \notin A$ et $x \notin B$

$\Leftrightarrow x \in \overline{A}$ et $x \in \overline{B}$ donc $x \in \overline{A} \cap \overline{B}$

3) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$?

Mq $A \cup (B \cap C) \subset (A \cup B) \cap (A \cup C)$

$x \in A \cup (B \cap C) \Leftrightarrow x \in A$ ou $x \in (B \cap C)$

$\Leftrightarrow x \in A$ ou $(x \in B$ et $x \in C)$

or

si $x \in A \Rightarrow x \in A \cup B$ et $x \in A \cup C$

$\Leftrightarrow x \in \boxed{(A \cup B) \cap (A \cup C)}$

si $x \in B \cap C \Leftrightarrow x \in B$ et $x \in C$

$\Leftrightarrow x \in A \cup B$ et $x \in A \cup C$

donc $x \in \boxed{(A \cup B) \cap (A \cup C)}$

Donc

si $x \in A$ ou $x \in B \cap C$ alors $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$

$\Leftrightarrow x \in A \cup (B \cap C) \subset (A \cup B) \cap (A \cup C)$ 1

Mq $(A \cup B) \cap (A \cup C) \subset A \cup (B \cap C)$

soit $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C) \Leftrightarrow x \in (A \cup B)$ et $x \in (A \cup C)$

$\Leftrightarrow (x \in A$ ou $x \in B)$ et $(x \in A$ ou $x \in C)$

donc

si $x \in A$ et $(x \in A$ ou $x \in C)$

$\Leftrightarrow x \in A \cap A$ ou $x \in A \cap C \Leftrightarrow x \in A$ ou $x \in A \cap C$

si $x \in B$ et $x \in A$ ou $x \in C$

$\Rightarrow x \in B \cap A$ ou $x \in B \cap C$

donc

$x \in A$ ou $x \in A \cap C$ ou $x \in A \cap B$ ou $x \in B \cap C$

alors

$x \in A$ or $A \cap C \subset A$ et $A \cap B \subset A$

donc $x \in A$ ou $x \in B \cap C \Rightarrow x \in A \cup (B \cap C)$

donc $(A \cup B) \cap (A \cup C) \subset A \cup (B \cap C)$ (2)

donc

Le resultat

4) de même manier

Ex2

nbr des resultat possible $= 6^5 = 7776$

Ex3

1) nbr de jury possible $= C_{17}^{10} = 19448$

2) nbr de jury avec 5H et 5F $= C_8^5 \times C_9^5 = 7056$

3)

si M.X refuse d'être de mission avec M. Y, il y a une contraint
on peut résoudre ce problème en deux étape:
d'abord on calcule

$$\begin{matrix}\text{nbr jury} \\ \text{tel que } X \text{ et } Y \\ \text{sont ensemble}\end{matrix} = C_{15}^{8} = 6435$$

donc

$$\begin{matrix}\text{nbr jury} \\ \text{tel que} \\ X \text{ et } Y \text{ ne sont pas} \\ \text{ensemble}\end{matrix} = \begin{matrix}\text{nb jury} \\ \text{total}\end{matrix} - C_{15}^{8} = \boxed{13013}$$

Exs

1) comme il y a 3 choix possible 1, X et 2 pour chaque et qu'il y a
13 match donc $\boxed{\text{nbr total} = 3^{13}}$

2) Pour dénombrer le nbr total de Telephone de 7 chiffre commençons par
7353 . . .
il suffit de considérer les 4 dernier chiffre car les 4 premier sont
fixé et comme chaque chiffre de numero est compris entre $\underbrace{0 \text{ et } 9}_{10 \text{ possibilité}}$
donc $\boxed{\begin{matrix}\text{nb} \\ \text{cas}\end{matrix} = 10^4}$

3) Pour répartir 7 personne sur 7 chaise il s'agit d'un problème de permutation

$$\boxed{\begin{matrix}\text{nbr façons de donner} \\ n \text{ un objet distinct sur} \\ n \text{ position nommée}\end{matrix} = n!}$$

donc $\begin{matrix}\text{nbr de} \\ \text{façons}\end{matrix} = 7!$

Suite de Ex 5

4) dans une course de 20 partant

nbr de resultat possible du tiercés dans l'ordre = nbr de façon de choisir et ordonner 3 parmi 20 = $A_{20}^{3} = 6840$

5) $\boxed{C_{49}^{6}}$

Ex4

16 : ne pratique rien

donc nbr de p qui pratique sport $= 80 - 16 = 64$ personne

or nb p Tennis + nb p natation $= 55 + 33 = 88$

donc $88 - 64 = 24$ qui pratique la natation et la Tennis

Ex6

1) une main de Poker est composé de 5 card donc

nbr de main possible $= C_{32}^{5} = 201{,}376$

2) un Jeux de 32 cart contient 4 as main devont choisir 3 as parmi 4 et choisir 2 carte parmi 28

donc

nbr de cas possibles $= C_4^3 \times C_{28}^2 = 4 \times C_{28}^2$

3) "au moins trois as" signifie qu'il peut y avoir trois ou 4 as

donc

nb cas $= C_4^3 \times C_{28}^2 + C_4^4 \times C_{28}^1 = \dots$

Ex 4

1) Pour le loto on choisit 6 numéros sur 42 donc le nbr total des combinaisons possibles $C_{42}^6 = \boxed{5\,245\,786}$

2) ⊕ Le premier rang : 6 numéros corrects dans combinaison principale

il faut que les 6 numéros cochés sont identiques au tirage : $\boxed{\text{nb comb.} = 1}$

⊕ pour le deuxième rang : 5 num correct plus complémentaire

ici nbr cas : $C_6^5 \times C_1^1 = \boxed{6}$

⊕ le troisième rang : 5 num correct ~~+ complémentaire~~ parmi 6 du tirage principale

(le 6ème numéro ne doit pas être le complém)

nb cas $= C_6^5 \times C_{35}^1 =$ [illegible]

$=$ [illegible] $\boxed{210}$