

Graphes et optimisation

Présenté par: **Dr. Marwa thabet**

Maître assistante

thabetmarwa2@gmail.com

Plan du cours

Partie I. Programmation Linéaire

1. Programmes linéaires, modélisation et résolution graphique
2. Algorithme du Simplexe
3. Dualité

Partie II. Graphes et algorithmes

4. Vocabulaires et Notions de bases
5. Arbres et arborescences
6. Cheminement

2

Partie 1 : Programmation linéaire

Cours 1 : Programmes linéaires, modélisation et résolution graphique

Présenté par: **Dr. Marwa thabet**

Maître assistante

thabetmarwa2@gmail.com

Qu'est ce que la programmation linéaire?

- **Définition:** C'est l'une des plus importantes techniques d'optimisation utilisées en recherche opérationnelle.
- **Objectif:** est de déterminer de façon optimale l'utilisation des ressources c.à.d allocation des ressources limitées d'une manière optimale
- **Principe:** est la maximisation ou la minimisation d'une fonction linéaire à plusieurs variables sachant que ces dernières sont liées par des relations appelées contraintes.

- Un programme linéaire (PL) sous **sa forme canonique**, s'écrit sous la forme:

$$(PL) \begin{cases} \text{Max ou Min } Z = \sum_{i=1}^n f_i x_i & \leftarrow \text{Fonction objectif} \\ \forall j=1, \dots, m: \sum_{i=1}^n a_{ij} x_i \leq, = \text{ ou } \geq b_j & \leftarrow \text{Contraintes} \\ \forall i = 1, \dots, n: x_i \geq 0 & \leftarrow \text{Contraintes de positivité} \end{cases}$$

- La programmation linéaire (PL) est basée sur:
 - La fonction objectif** : la fonction à optimiser pour une expression linéaire
 - La variable de décision** : est toute quantité utile à la résolution du problème, et dont on doit déterminer sa valeur.
 - Les contraintes** : des relations limitant le choix des valeurs possibles pour une variable.

- La modélisation consiste à transformer un problème réel en un ensemble de relations.
- Pour modéliser un problème linéaire, il faut suivre les étapes suivantes:



- Identifier** les variables principales ou les variables de décision du problème
- Exprimer** la fonction objectif en fonction des variables identifiées en précisant s'il s'agit d'un problème à maximiser (un bénéfice, un rendement,...) ou à minimiser (la charge, le coût de production, la consommation,...)
- Formuler** les contraintes sous forme d'équations et/ou d'inéquations linéaires

5

6

Modélisation

Formulation d'un problème de maximisation

Enoncé du problème 0:

Un petit producteur fabrique deux types de jus :

Jus A : lui rapporte 5 unités de profit par litre.

Jus B : lui rapporte 3 unités de profit par litre.

Il dispose au maximum de 30 litres de fruits.

Chaque litre de Jus A consomme 3 litres de fruits,

et chaque litre de Jus B consomme 2 litres de fruits.

- **Combien de litres de chaque jus doit-il produire pour maximiser son profit ?**

Modélisation

Formulation d'un problème de maximisation

Enoncé du problème 1:

Une usine (U) fabrique deux produits A et B, le produit A coûte 400D/Tonne et le produit B coûte 500D/Tonne

On suppose que :

- Un tonne de A nécessite 40 minutes sur la machine M1 et 20 minutes sur la machine M2
- Un tonne de B nécessite 30 minutes sur la machine M1 et 30 minutes sur la machine M2
- La machine M1 est disponible que 6 H/jour
- La machine M2 est disponible 8 H/jour

L'objectif de l'entreprise est de maximiser le profit qu'elle pourra tirer, par jour, de ces deux produits (A et B) en utilisant au mieux ses ressources.

- **Formuler ce problème en PL**

7

8

Formulation d'un problème de maximisation

La construction du modèle linéaire (1/3)

□ Etape 1: identification des variables de décision



Quelles sont les informations dont doit disposer le directeur de l'entreprise pour considérer que son problème est résolu?



Quelles sont les informations dont doit disposer le directeur de l'entreprise pour considérer que son problème est résolu?



Il suffit de connaître la quantité des produits A et B à fabriquer quotidiennement

On note:

x_1 : la quantité du produit A à produire

x_2 : la quantité du produit B à produire

Les variables sont dites variables de décision

Formulation d'un problème de maximisation

La construction du modèle linéaire (2/3)

□ Etape 2: Exprimer la fonction objectif (Z)



Quel profit l'usine retire-t-il de la vente de ces deux produits ?



Quel profit l'usine retire-t-il de la vente de ces deux produits ?



Additionner les bénéfices à tirer de chacun des deux produits

- Pour le produit A, le bénéfice est de 400D/Tonne, et on fabrique x_1 unités → on a un bénéfice de $(400 * x_1)D$
- Pour le produit B, le bénéfice est de 500D/Tonne, et on fabrique x_2 unités → on a un bénéfice de $(500 * x_2)D$

$$Max(Z) = 400x_1 + 500x_2$$

Modélisation

Formulation d'un problème de maximisation

La construction du modèle linéaire (3/3)

□ Étape 3: Formuler les contraintes

Contrainte relative à la machine M1

Le temps d'utilisation de la machine M1 pour fabriquer les produits A et B ne peut excéder les 6 heures → temps d'utilisation de $M_1 \leq 6 (H)$

- Pour le produit **A**, on nécessite 40 minute pour fabriquer la quantité $x_1 \rightarrow (40 * x_1)$ min
- Pour le produit **B**, on nécessite 30 minute pour fabriquer la quantité $x_2 \rightarrow (30 * x_2)$ min
- La contrainte relative à la machine M1 s'écrit donc:

$$40x_1 + 30x_2 \leq 6 * 60(\text{min}) \quad (M1)$$

1

Modélisation

Formulation d'un problème de maximisation

La construction du modèle linéaire (3/3)

□ Etape3: Formuler les contraintes

Contrainte relative à la machine M2

Le temps d'utilisation de la machine M2 pour fabriquer les produits A et B ne peut excéder les 8 heures → temps d'utilisation de $M_2 \leq 8 (H)$

- Pour le produit **A**, on nécessite 20 minute pour fabriquer la quantité $x_1 \rightarrow (20 * x_1)$ min
- Pour le produit **B**, on nécessite 30 minute pour fabriquer la quantité $x_2 \rightarrow (30 * x_2)$ min
- La contrainte relative à la machine M2 s'écrit donc:

$$20x_1 + 30x_2 \leq 8 * 60(\text{min}) \quad (M2)$$

Contrainte relative à la positivité

Elles assurent que la solution ne comporte pas des valeurs négatives (inacceptables)

$$x_1, x_2 \geq 0$$

1

Modélisation

Formulation d'un problème de maximisation

La construction du modèle linéaire (3/3)

Le modèle se résume ainsi,

$$\text{PL: } \begin{cases} \text{Max}(Z) = 400x_1 + 500x_2 \\ \text{S.C} \\ 40x_1 + 30x_2 \leq 6 * 60(\text{min}) \quad (M1) \\ 20x_1 + 30x_2 \leq 8 * 60(\text{min}) \quad (M2) \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

1

Modélisation

Formulation d'un problème de minimisation

Enoncé du problème 2:

Un athlète suit un régime et souhaite consommer la plus faible ration quotidienne de trois éléments nutritifs protéines, vitamines et calcium. Les exigences quotidiennes sont de **16g** de protéines, **12g** de vitamines et **18g** de calcium. L'athlète achète deux types d'aliments P et Q.

1. Une unité de **P** comprend **2g** de protéines, **1g** de vitamines et **1g** de calcium; et elle coûte **20D**.
2. Une unité de **Q** comprend **1g** de protéines, **1g** de vitamines et **3g** de calcium; Et elle coûte **40D**.

L'athlète cherche la combinaison la moins coûteuse des quantités de P et Q qui respectera l'exigence de consommation minimale d'éléments nutritifs.

□ Formuler ce problème en PL

1

Formulation d'un problème de maximisation

La construction du modèle linéaire

Identifier

Appelons x_1 et x_2 les quantités des aliments P et Q qu'il faut acheter

Exprimer

L'objectif de l'athlète est évidemment de minimiser le coût total d'aliments qu'il faut acheter:

$$\text{Min}(Z) = 20x_1 + 40x_2$$

Formuler

Chacun des 3 éléments nutritifs donne lieu à une contrainte. On obtient

$$2x_1 + x_2 \geq 16 \quad (\text{Protéines})$$

$$x_1 + x_2 \geq 12 \quad (\text{Vitamines})$$

$$x_1 + 3x_2 \geq 18 \quad (\text{Calcium})$$

Enfin, il ne faut pas oublier qu'on ne peut pas acheter des quantités négatives de P et Q

$$\rightarrow x_1, x_2 \geq 0$$

1

Variables d'écart

- **Définition:** C'est la différence entre ce qui est disponible et ce qui est utilisé.
- **Objectif:** Ramener les contraintes à des égalités, qui sont plus faciles à traiter que les inégalités.

1

Formulation d'un problème de minimisation

La construction du modèle linéaire

Le modèle se résume ainsi,

$$\text{PL:} \quad \begin{cases} \text{Min}(Z) = 20x_1 + 40x_2 \\ \text{S.C} \\ 2x_1 + x_2 \geq 16 \quad (\text{P}) \\ x_1 + x_2 \geq 12 \quad (\text{V}) \\ x_1 + 3x_2 \geq 18 \quad (\text{C}) \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

1

Variables d'écart

Formulation d'un problème en utilisant les variables d'écart

Problème :

Une entreprise fabrique deux produits A et B en utilisant une machine m et deux matières premières p et q. On dispose chaque jour de 8 heures de m, de 10 Kg de p et de 36 Kg de q. On suppose que :

1. La production d'une unité de A nécessite 2Kg de p et 9 Kg de q, et utilise la machine m durant 1 heure;
 2. La production d'une unité de B nécessite 2 Kg de p et 4 kg de q, et utilise la machine m durant 2 heure;
 3. Les profits réalisés sont de 50 D par unité de A et de 60 D par unité de B
- L'objectif de l'entreprise est de maximiser le profit qu'elle pourra tirer, par jour, de ces deux produits en utilisant au mieux ses ressources.

□ Formuler ce problème en PL sous la forme standard

2

Variables d'écart

Formulation d'un problème en forme standard

La construction du modèle linéaire en forme standard

Le modèle en forme canonique se résume ainsi,

$$\text{PL en forme canonique: } \begin{cases} \text{Max}(Z) = 50x_1 + 60x_2 \\ \text{S.C} \\ x_1 + 2x_2 \leq 8 \quad (\text{m}) \\ 2x_1 + 2x_2 \leq 10 \quad (\text{p}) \\ 9x_1 + 4x_2 \leq 36 \quad (\text{q}) \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

On pose:

$$e_1 = 8 - (x_1 + 2x_2)$$

$$e_2 = 10 - (2x_1 + 2x_2)$$

$$e_3 = 36 - (9x_1 + 4x_2)$$

Où e_i est appelée variable d'écart associée à la $i^{\text{ème}}$ contrainte.

Variables d'écart

Formulation d'un problème

La construction du modèle linéaire en forme standard

On peut renommer les variables d'écart (e_1, e_2, e_3) comme les variables de décision (x_3, x_4, x_5)

$$\begin{cases} \text{Max}(Z) = 50x_1 + 60x_2 + 0e_1 + 0e_2 + 0e_3 \\ \text{S.C} \\ x_1 + 2x_2 + e_1 = 8 \quad (\text{m}) \\ 2x_1 + 2x_2 + e_2 = 10 \quad (\text{p}) \\ 9x_1 + 4x_2 + e_3 = 36 \quad (\text{q}) \\ x_1, x_2, e_1, e_2, e_3 \geq 0 \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{cases} \text{Max}(Z) = 50x_1 + 60x_2 \\ \text{S.C} \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 8 \quad (\text{m}) \\ 2x_1 + 2x_2 + x_4 = 10 \quad (\text{p}) \\ 9x_1 + 4x_2 + x_5 = 36 \quad (\text{q}) \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0 \end{cases} \quad \text{Forme standard}$$

Résolution graphique

- On dispose d'un outil (la PL) pour modéliser des problèmes
- Comment résoudre les problèmes à l'aide de la PL ?
 - Plusieurs algorithmes existent, dont le simplexe (prochain cours)
 - Pour des problèmes avec deux variables, on peut résoudre graphiquement (aide à comprendre la structure du problème)

Résolution graphique

- Un problème linéaire est résolu graphiquement en procédant comme suit:

1

Représentation
graphique de la
région réalisable.

2

Représentation
graphique de la
fonction objectif

3

Détermination de la
solution optimale

Résolution graphique

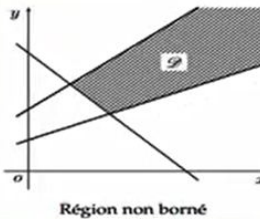
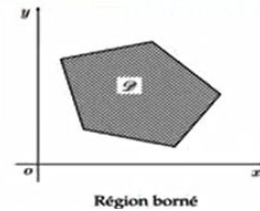
- La résolution d'un programme linéaire en utilisant la méthode graphique pour déterminer la solution optimale se déroule comme suit:

- Réaliser un repère orthonormé (ox_1x_2)
- Tracer la région réalisable (admissible) (D)
- Si (D) est borné, alors la solution optimale existe. Sinon, on distingue les deux cas suivants.

- Si le problème est à maximiser, aucune solution.
- Si le problème est à minimiser, une solution optimale existe.

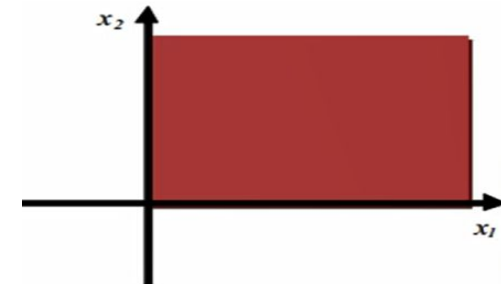
- Chercher tous les points sommets de (D) et parmi ceux-ci, choisir le point qui rend l'objectif optimal par deux méthodes:

- Méthode de recensement des sommets.
- Méthode des droites parallèles (repérage géométrique)



Résolution graphique

- Une des conditions de la réussite d'une représentation graphique est le choix d'un système d'axes. Un mauvais choix peut rendre notre représentation non claire et imprécise.
- Dans la plupart des PL, les variables de décision sont positives, dans ce cas le quadrant positif s'appelle **régions des solutions possibles**.



2

2

Résolution graphique

- Définition:** on appelle région réalisable ou région des solutions admissible, l'ensemble des valeurs de variables de décision qui satisfont toutes les contraintes.
- Méthode:** une représentation graphique **des inégalités (Contraintes)** nous permet de déterminer l'ensemble des solutions réalisables
- Exemple:** on considère le PL suivant

$$\begin{cases} \text{Max}(Z) = 300x_1 + 200x_2 \\ \text{S.C} \\ x_1 + 2x_2 \leq 20 \quad (1) \\ 2x_1 + x_2 \leq 22 \quad (2) \\ x_1 + x_2 \leq 12 \quad (3) \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

La région réalisable est l'ensemble des points (x_1, x_2) satisfaisant les inégalités de notre PL

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &\leq 20 \\ 2x_1 + x_2 &\leq 22 \\ x_1 + x_2 &\leq 12 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Région réalisable

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &\leq 20 \quad (1) \\ x_1 + 2x_2 &= 20 \end{aligned}$$

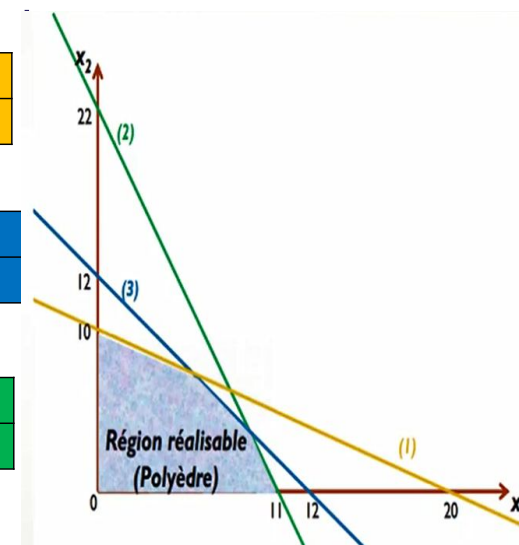
	0	20
	10	0

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 &\leq 22 \quad (2) \\ 2x_1 + x_2 &= 22 \end{aligned}$$

	11	0
	0	22

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &\leq 12 \quad (3) \\ x_1 + x_2 &= 12 \end{aligned}$$

	0	12
	12	0



2

Résolution graphique

Chercher la solution optimale dans l'ensemble infini de solutions réalisable.

• Méthode de recensement des sommets:

1. Déterminer les valeurs de l'objectif correspondantes à chacun des points sommets.
2. Remplacer ces valeurs dans la fonction objectif: la plus grande valeur réalise le maximum et la plus petite valeur réalise le minimum.

• Méthode des droites parallèles

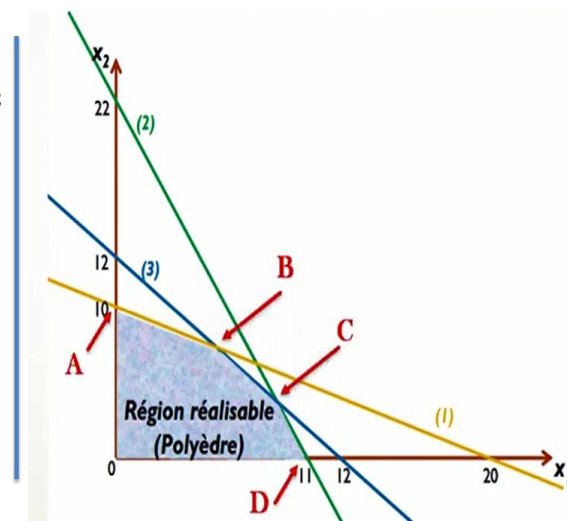
1. Tracer la droite relative à la fonction objectif (Δ).
2. Déplacer parallèlement (Δ) vers le point de la région réalisable le plus éloigné de l'origine en cas de maximisation ou vers le point le plus proche de l'origine en cas de minimisation.

Résolution graphique

Méthode de recensement des sommets

$$\begin{cases} \text{Max}(Z) = 300x_1 + 200x_2 \\ \text{S.C} \\ x_1 + 2x_2 \leq 20 \quad (1) \\ 2x_1 + x_2 \leq 22 \quad (2) \\ x_1 + x_2 \leq 12 \quad (3) \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

$$A=(0,10), D=(11,0), B=?, C=?$$



2

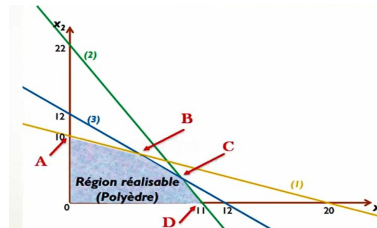
3

Résolution graphique

Résolution graphique

Méthode de recensement des sommets

$$\begin{cases} \text{Max}(Z) = 300x_1 + 200x_2 \\ \text{S.C} \\ x_1 + 2x_2 \leq 20 \quad (1) \\ 2x_1 + x_2 \leq 22 \quad (2) \\ x_1 + x_2 \leq 12 \quad (3) \end{cases}$$



$$A=(0,10), D=(11,0), B=?, C=?$$

Pour déterminer B et C, on peut les repérer graphiquement ou mathématiquement.

• Détermination de B et C mathématiquement:

- Les coordonnées de B sont la solution du système composé des deux inéquation des droites (1) et (3)

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \leq 20 \quad (1) \\ x_1 + x_2 \leq 12 \quad (3) \end{cases} \Rightarrow x_1 = 4, x_2 = 8 \Rightarrow B=(4,8)$$

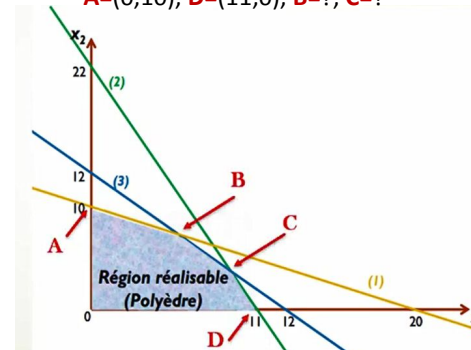
- les coordonnées de C sont la solution du système composé des deux inéquation des droites (2) et (3)

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \leq 22 \quad (2) \\ x_1 + x_2 \leq 12 \quad (3) \end{cases} \Rightarrow x_1 = 10, x_2 = 2 \Rightarrow C=(10,2)$$

Méthode de recensement des sommets

$$\begin{cases} \text{Max}(Z) = 300x_1 + 200x_2 \\ \text{S.C} \\ x_1 + 2x_2 \leq 20 \quad (1) \\ 2x_1 + x_2 \leq 22 \quad (2) \\ x_1 + x_2 \leq 12 \quad (3) \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

$$A=(0,10), D=(11,0), B=?, C=?$$



$$Z = 300x_1 + 200x_2$$

Les points sommets de la région réalisable sont les couples (x_1, x_2) suivants:

$$A=(0,10), B=(4,8), C=(10,2), D=(11,0)$$

$$A=(0,10) \rightarrow 300 \cdot 0 + 200 \cdot 10 = 2000$$

$$B=(4,8) \rightarrow 300 \cdot 4 + 200 \cdot 8 = 2800$$

$$C=(10,2) \rightarrow 300 \cdot 10 + 200 \cdot 2 = 3400$$

$$D=(11,0) \rightarrow 300 \cdot 11 + 200 \cdot 0 = 3300$$

➔ Le point sommet qui maximise la fonction est (10,2)

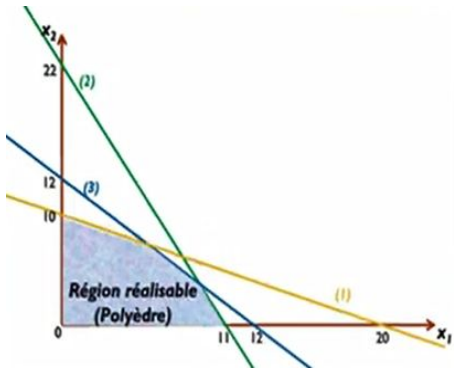
3

3

Résolution graphique

Méthode des droites parallèles

$$\begin{cases} \text{Max}(Z) = 300x_1 + 200x_2 \\ \text{S.C} \\ x_1 + 2x_2 \leq 20 \quad (1) \\ 2x_1 + x_2 \leq 22 \quad (2) \\ x_1 + x_2 \leq 12 \quad (3) \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$



On commence par représenter la droite de la fonction objectif:

$$Z = 300x_1 + 200x_2$$

Pour représenter la droite de la fonction objectif, il suffit de donner à Z une valeur particulière (par exemple $z=0$)

$$300x_1 + 200x_2 = 0$$

	0	1
	0	-3/2

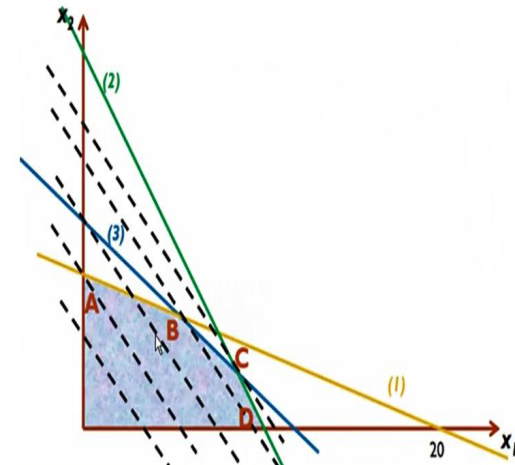
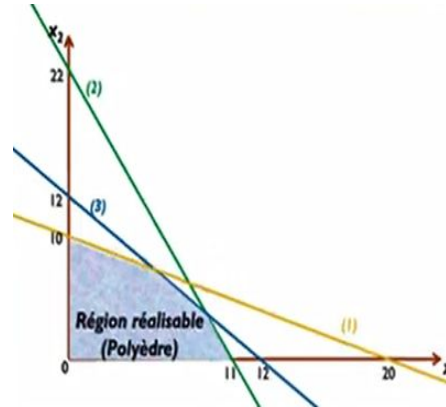
Une fois représentée, la droite de la fonction objectif sera translatée parallèlement à elle-même dans le sens de l'optimisation (Maximisation ou minimisation)

3

Résolution graphique

Méthode des droites parallèles

$$\begin{cases} \text{Max}(Z) = 300x_1 + 200x_2 \\ \text{S.C} \\ x_1 + 2x_2 \leq 20 \quad (1) \\ 2x_1 + x_2 \leq 22 \quad (2) \\ x_1 + x_2 \leq 12 \quad (3) \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

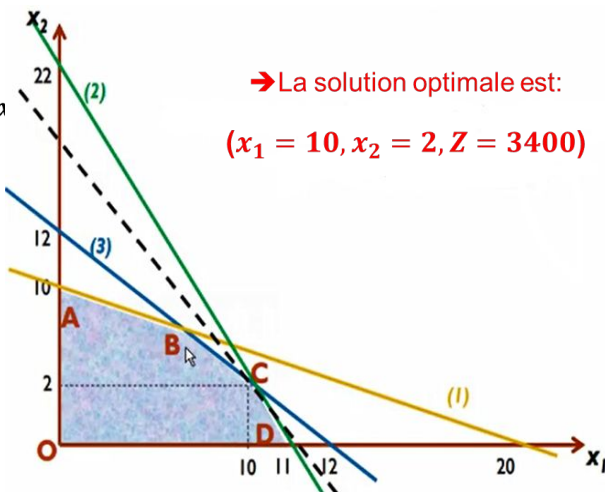


3

Résolution graphique

Méthode des droites parallèles

$$\begin{cases} \text{Max}(Z) = 300x_1 + 200x_2 \\ \text{S.C} \\ x_1 + 2x_2 \leq 20 \quad (1) \\ 2x_1 + x_2 \leq 22 \quad (2) \\ x_1 + x_2 \leq 12 \quad (3) \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$



→ La solution optimale est:

$$(x_1 = 10, x_2 = 2, Z = 3400)$$



Institut Supérieur d'Informatique et de Mathématiques de Monastir

Partie 1 : Programmation linéaire

Cours 2 : Algorithme du Simplexe

Présenté par: **Dr. Marwa thabet**

Maître assistante

thabetmarwa2@gmail.com

3

3



- On dispose d'un formalisme pour **modéliser** des problèmes réels : la programmation linéaire (PL)
- **La méthode de résolution graphique ni applicable que dans le cas où il n'y a que deux variables de décision.**
- Comment résoudre les problème à l'aide de la PL comporte **plusieurs dizaines de variables** et de contraintes?



Une procédure algébrique pour résoudre des PL avec plus de deux variables. Cette méthode appelée méthode du simplexe

3

- Apprendre la méthode du simplexe
- Comprendre son fonctionnement
- Savoir contourner les pièges pour l'algorithme
- Lien avec des notions de mathématiques connues, interprétation géométrique

3

Définition et principe

- ❑ une procédure algébrique itérative qui permet de résoudre des PL avec plus de deux variables.
- ❑ Commencer par une solution admissible correspondant à un point extrême du polyèdre (région réalisable), et chercher à augmenter la fonction objectif (fonction économique) sur un point extrême voisin et ainsi, de proche en proche sur le polyèdre, arriver à un point optimal.

Méthode

Etape 1:

Ecrire le programme sous forme standard

Etape 2:

Trouver la première solution réalisable de base



Tableau initial du simplexe

Etape 3:

Procéder à une série d'itérations sur les tableaux de simplexe aboutissant à la solution optimale

3

4

- **Forme canonique:** l'ensemble de contraintes se présente sous forme d'inégalités ($\leq, =, \geq$)
- **Forme standard:** toutes les contraintes sont des contraintes d'égalités.
- **Variable d'écart:** c'est la quantité disponible non utilisée. C'est l'écart entre la disponibilité et le besoin.
- **Principe:** ajouter aux membres de gauche d'une contrainte des variables d'écart qui sert à absorber l'écart entre le membre gauche et le membre droit d'une contrainte

Exemple :

PL en forme canonique:

$$\begin{cases} \text{Max}(Z) = 50x_1 + 60x_2 \\ \text{S. C} \\ x_1 + 2x_2 \leq 8 \quad (1) \\ 2x_1 + 2x_2 \leq 10 \quad (2) \\ 9x_1 + 4x_2 \leq 36 \quad (3) \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

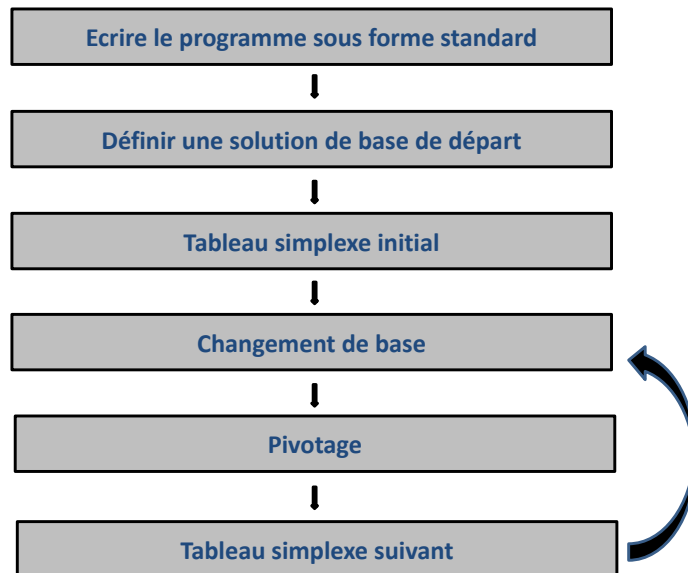
PL en forme standard:

$$\begin{cases} \text{Max}(Z) = 50x_1 + 60x_2 \\ \text{S. C} \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 8 \quad (1) \\ 2x_1 + 2x_2 + x_4 = 10 \quad (2) \\ 9x_1 + 4x_2 + x_5 = 36 \quad (3) \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0 \end{cases}$$

4

4

Algorithme



Exemple pas à pas

PL en forme canonique:

$$\begin{cases} \text{Max}(Z) = 300x_1 + 500x_2 \\ \text{S. C} \\ x_1 \leq 4 \quad (1) \\ 2x_2 \leq 12 \quad (2) \\ 3x_1 + 2x_2 \leq 18 \quad (3) \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

4

4

Exemple pas à pas

Etape 1: forme standard

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Max}(Z) = 300x_1 + 500x_2 \\ \text{S.C} \\ x_1 \leq 4 \quad (1) \\ 2x_2 \leq 12 \quad (2) \\ 3x_1 + 2x_2 \leq 18 \quad (3) \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{array} \right. \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Max}(Z) = 300x_1 + 500x_2 \\ \text{S.C} \\ x_1 + x_3 = 4 \quad (1) \\ 2x_2 + x_4 = 12 \quad (2) \\ 3x_1 + 2x_2 + x_5 = 18 \quad (3) \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0 \end{array} \right.$$

Etape 2: Solution de base

On exprime le problème sous forme matricielle, où:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} 4 \\ 12 \\ 18 \end{bmatrix}, c = [300 \quad 500 \quad 0 \quad 0 \quad 0]$$

Exemple pas à pas

Etape 3: tableau initial

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} 4 \\ 12 \\ 18 \end{bmatrix}, c = [300 \quad 500 \quad 0 \quad 0 \quad 0]$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Max}(Z) = 300x_1 + 500x_2 \\ \text{S.C} \\ x_1 + x_3 = 4 \quad (1) \\ 2x_2 + x_4 = 12 \quad (2) \\ 3x_1 + 2x_2 + x_5 = 18 \quad (3) \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0 \end{array} \right.$$

On considère:

- **B** : les variables de base qui sont les variables d'écart
- **Ci**: les coefficients de la fonction objectif
- **C_B**: les coefficients de la variable de base dans la fonction objectif

Max		Ci	300	500	0	0	0
C_B	B	b	x₁	x₂	x₃	x₄	x₅
0	x ₃	4	1	0	1	0	0
0	x ₄	12	0	2	0	1	0
0	x ₅	18	3	2	0	0	1
	Zi	0	0	0	0	0	0
	Ci - Zi		300	500	0	0	0

$$Z_1 = \text{colonne}_{x_1} * C_B$$

$$Z_0 = b * C_B$$

Exemple pas à pas

Etape 3: changement de base

Max		Ci	300	500	0	0	0
C_B	B	b	x₁	x₂	x₃	x₄	x₅
0	x ₃	4	1	0	1	0	0
0	x ₄	12	0	2	0	1	0
0	x ₅	18	3	2	0	0	1
	Zi	0	0	0	0	0	0
	Ci - Zi		300	500	0	0	0

- Pour augmenter la valeur de Z_i on doit examiner une nouvelle solution de base.
- Introduire une nouvelle variable dans la base (variable entrante) et exclure une des variables qui y figurait précédemment (variable sortante).
- Le changement de base représente le processus qui consiste à choisir la variable entrante et la variable sortante.

Exemple pas à pas

Etape 3: changement de base

- **Choix de la variable entrante**: dans la dernière ligne Ci - Zi, le coefficient dont la valeur est la plus élevée détermine la variable à entrer dans la base. Et la colonne de la variable entrante on l'appelle **colonne pivot**

Max		Ci	300	500	0	0	0
C_B	B	b	x₁	x₂	x₃	x₄	x₅
0	x ₃	4	1	0	1	0	0
0	x ₄	12	0	2	0	1	0
0	x ₅	18	3	2	0	0	1
	Zi	0	0	0	0	0	0
	Ci - Zi		300	500	0	0	0

Variable entrante

Colonne pivot

Exemple pas à pas

Etape 3: changement de base

- **Choix de la variable sortante**: c'est la variable de base qui s'annule la première. On doit calculer le minimum du rapport du coefficient du membre de droite de chaque contrainte sur le coefficient correspondant de la colonne pivot lorsque ce dernier est **strictement positif** $\rightarrow \min \left\{ \frac{12}{2}, \frac{18}{2} \right\} = 6$
- Cette ligne reçoit le nom de **ligne pivot**.

Max	Ci		300	500	0	0	0
C _B	B	b	x ₁	x ₂	x ₃	x ₄	x ₅
0	x ₃	4	1	0	1	0	0
0	x ₄	12	0	2	0	1	0
0	x ₅	18	3	2	0	0	1
	Zi	0	0	0	0	0	0
	Ci - Zi		300	500	0	0	0

Variable sortante: x₄
Colonne pivot: x₂
Ligne pivot: ligne x₄
Pivot: 2

4

Exemple pas à pas

Etape 4: Pivotage

- **Principe du pivotage**: rendre le pivot égal à 1 et transformer les autres cases selon des règles bien précises
- **Rôle du pivot**: transformer le tableau actuel en un deuxième tableau correspondant à la nouvelle base.
- **Transformation de la ligne pivot**: diviser tous ses éléments par le pivot
- **Transformation de la colonne pivot**: les éléments situés au-dessus et au-dessous du pivot deviennent nulles.
- **Transformation des autres cases du tableau**: en appliquant la règle dite du rectangle.

Max	Ci		300	500	0	0	0
C _B	B	b	x ₁	x ₂	x ₃	x ₄	x ₅
0	x ₃	4	1	0	1	0	0
0	x ₄	12	0	2	0	1	0
0	x ₅	18	3	2	0	0	1
	Zi	0	0	0	0	0	0
	Ci - Zi		300	500	0	0	0

5

Exemple pas à pas

Etape 4: Pivotage

- Changement du base ($x_4 \leftarrow x_2$) et ($0 \leftarrow 500$)
- Transformation de la colonne et de la ligne pivot

Max	Ci		300	500	0	0	0
C _B	B	b	x ₁	x ₂	x ₃	x ₄	x ₅
0	x ₃	4	1	0	1	0	0
0	x ₄	12	0	2	0	1	0
0	x ₅	18	3	2	0	0	1
	Zi	0	0	0	0	0	0
	Ci - Zi		300	500	0	0	0

Max	Ci		300	500	0	0	0
C _B	B	b	x ₁	x ₂	x ₃	x ₄	x ₅
0	x ₃			0			
500	x ₂	6	0	1	0	1/2	0
0	x ₅			0			
	Zi						
	Ci - Zi						

5

Exemple pas à pas

Etape 4: Pivotage

- Si une ligne contient un **0** à l'intersection avec la colonne du pivot, cette ligne ne sera pas modifiée.

Max	Ci		300	500	0	0	0
C _B	B	b	x ₁	x ₂	x ₃	x ₄	x ₅
0	x ₃	4	1	0	1	0	0
500	x ₂	6	0	1	0	1/2	0
0	x ₅			0			
	Zi						
	Ci - Zi						

5

Exemple pas à pas

Etape 4: Pivotage

- Si une colonne contient un 0 à l'intersection avec la ligne du pivot, cette colonne ne sera pas modifiée.

Max	Ci		300	500	0	0	0
C _B	B	b	x ₁	x ₂	x ₃	x ₄	x ₅
0	x ₃	4	1	0	1	0	0
500	x ₂	6	0	1	0	1/2	0
0	x ₅		3	0	0		1
	Zi						
	Ci - Zi						

Exemple pas à pas

Etape 4: Pivotage

- Règle du rectangle:** le principe de cette méthode est :

$$a' = a - \frac{b * c}{pivot}$$

Avec:

- a': la nouvelle valeur du coefficient a.
- b: l'élément situé sur la même ligne que a, mais dans la colonne du pivot
- c: l'élément situé sur la même colonne que a, mais sur la ligne du pivot.

→ a=18, b=2, c=12, pivot=2

Max	Ci		300	500	0	0	0
C _B	B	b	x ₁	x ₂	x ₃	x ₄	x ₅
0	x ₃	4	1	0	1	0	0
500	x ₂	6	0	1	0	1/2	0
0	x ₅	6	3	0	0		1
	Zi						
	Ci - Zi						

5

5

Exemple pas à pas

- Règle du rectangle:** le principe de cette méthode est :

$$a' = a - \frac{b * c}{pivot}$$

→ a=0, b=2, c=1, pivot=2

Max	Ci		300	500	0	0	0
C _B	B	b	x ₁	x ₂	x ₃	x ₄	x ₅
0	x ₃	4	1	0	1	0	0
500	x ₂	6	0	1	0	1/2	0
0	x ₅	6	3	0	0	-1	1
	Zi						
	Ci - Zi						

Exemple pas à pas

Etape 4: tableau simplexe suivant

- Calcule du Zi et Ci - Zi

Max	Ci		300	500	0	0	0
C _B	B	b	x ₁	x ₂	x ₃	x ₄	x ₅
0	x ₃	4	1	0	1	0	0
500	x ₂	6	0	1	0	1/2	0
0	x ₅	6	3	0	0	-1	1
	Zi	3000	0	500	0	250	0
	Ci - Zi		300	0	0	-250	0

5

5

Exemple pas à pas

Etape 5: tableau simplexe suivant

Max	Ci		300	500	0	0	0
C_B	B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
0	x_3	4	1	0	1	0	0
500	x_2	6	0	1	0	$\frac{1}{2}$	0
0	x_5	6	3	0	0	-1	1
	Zi	3000	0	500	0	250	0
	Ci - Zi		300	0	0	-250	0

- D'après ce tableau, on peut déterminer la deuxième solution de base réalisable: $x^{B_2} = (0, 6, 4, 0, 6)$ et la valeur de la fonction Z en x^{B_2} : $z_2 = 3000$
 - Le maximum de la fonction Z est atteint lorsqu'il n'y a plus de coefficients positifs dans $Ci - Zi$.
- On poursuit les changements de base et les pivotages, jusqu'à ce qu'on y parvienne.

5

Exemple pas à pas

Etape 6: retour à l'étape 3

Max	Ci		300	500	0	0	0
C_B	B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
0	x_3	4	1	0	1	0	0
500	x_2	6	0	1	0	$\frac{1}{2}$	0
0	x_5	6	3	0	0	-1	1
	Zi	3000	0	500	0	250	0
	Ci - Zi		300	0	0	-250	0

Max	Ci		300	500	0	0	0
C_B	B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
0	x_3	2	0	0	1	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$
500	x_2	6	0	1	0	$\frac{1}{2}$	0
300	x_1	2	1	0	0	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$
	Zi	3600	300	500	0	150	100
	Ci - Zi		0	0	0	-150	-100

5

Exemple pas à pas

Etape 6: retour à l'étape 3

Max	Ci		300	500	0	0	0
C_B	B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
0	x_3	2	0	0	1	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$
500	x_2	6	0	1	0	$\frac{1}{2}$	0
300	x_1	2	1	0	0	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$
	Zi	3600	300	500	0	150	100
	Ci - Zi		0	0	0	-150	-100

- D'après ce tableau, on peut déterminer la deuxième solution de base réalisable: $x^{B_3} = (2, 6, 2, 0, 0)$ et la valeur de la fonction Z en x^{B_3} : $z_2 = 3600$
 - Il n'y a plus de coefficients positifs dans la dernière ligne, la solution courante est optimale →
- $(x_1, x_2) = (2, 6)$ et $z = 3600$

5