* Introduction à l'analyse *
Combinatoire

I/ Arrangement :

soit $U = \{x_1, \dots, x_n\}$ un ensemble fini

1) arrangement sans répétition :

On appelle arrangement sans répétition de p éléments $(p \leq n)$ de U tout p-uplet $(x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_p})$ (tous distincts).

$(\underset{n}{\cdot}\;\underset{(n-1)}{\cdot} \cdots\cdots)$ ⇒ le nombre d'arrangements est $= n(n-1)(n-2)\cdots(n-(p-1))$

$= \dfrac{n!}{(n-p)!}$

ce nombre sera noté A_n^p

2) Arrangement avec répétition :

On appelle arrangement avec répétition tout élément de U^p : de la forme $(x_{i_1} \dots x_{i_p})$ (les x_{i_j} ne sont pas nécessairement distincts)

Nombre de possibilités : n^p

[1] Exp : nb lignes téléphoniques pour Monastir

↳ Arrangement avec répétition de 6 éléments parmi 10 éléments.

73 …… $U = \{0, 1, 2, 3, 5, 6, 7, 8, 9\}$; $p = 6$; $N = 10^6$

[2] Exp : Nb d'arrangements de p boules dans n cases (boules et cases sont numérotées)

a – chaque case reçoit au plus une boule.

b – " " " " un nbr quelconques de boules.

Réponse ⟹ a – arrangement sans répétition donc $N = A_n^p = \dfrac{n!}{(n-p)!}$ *

b – " avec " " $N = n^p$

II / Combinaison :

$U = \{x_1, \dots, x_n\}$ un ensemble de cardinal n.

On appelle combinaison de p éléments de U tout sous-ensemble de U ayant p éléments.

→ Nombre de combinaisons possibles $N = \frac{A_n^p}{p!} = \frac{n!}{p!\,(n-p)!}$

exemple : Dans un concours il y a n candidats pour p places. $(p \leq n)$

a) avec ordre de mérite → A_n^p

b) sans " " → C_n^p

Triangle de Pascal : $a, b \in \mathbb{R}$; $n \in \mathbb{N}$

$$\boxed{(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \, a^k \, b^{n-k}}$$

$\# E = n$

$\# \mathcal{P}(E)$ = L'ensemble de tout les sous ensembles de E.

$\# \mathcal{P}(E) = ? = C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \dots + C_n^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k = \sum_{k=0}^{n} 1^k \, 1^{n-k}$

$= (1+1)^n = 2^n$

III / Coefficients Multinominaux :

Cherchons le nombre de partition de U en k parties ayant respectivement $n_1, n_2, \dots, n_k$ élément ; tq $n_1 + n_2 + \dots + n_k = n$

Notons ce nombre par $M_n(n_1, \dots, n_k)$.

$$M_n(n_1, \dots, n_k) = C_n^{n_1} \, C_{n-1}^{n_2} \, C_{n-2}^{n_3} \dots C_{n-(n_1+\dots+n_{k-1})}^{n_k}$$

$$= \frac{n!}{n_1!\,\cancel{(n-n_1)!}} \cdot \frac{\cancel{(n-n_1)!}}{n_2!\,\cancel{(n-n_1-n_2)!}} \cdot \cancel{\dots} \times 1$$

$$= \frac{n!}{n_1!\, n_2! \dots\dots n_k!}$$

Exp : Jeu de 32 cartes, il y a 4 joueurs A, B, C et D ⇒ nbr. de main $= \frac{32}{8!\,8!\,8!\,8!}$