

**DS Probabilités**

**Durée 1h**

Niveau : L2 INFO

Année universitaire : 2025/2026

**Exercice 1**

(10 points)

Soit un couple de variables aléatoires  $(X, Y)$  tel que  $X(\Omega) = \{-2, 0, 1\}$  et  $Y(\Omega) = \{-1, 1, 2\}$  dont la loi conjointe  $P(X = x, Y = y)$  est donnée par le tableau suivant :

X/Y	y=-1	y=1	y=2
x=-2	0.2	0.2	0.05
x=0	0.1	0.1	0.05
x=1	0.2	0	0.1

1. Trouver les lois marginales de  $X$  et de  $Y$ .
2. Les deux variables  $X$  et  $Y$  sont-elles indépendantes ?
3. Calculer la loi conditionnelle de  $X$  sachant  $Y = 1$  puis calculer  $E(X|Y = 1)$ .
4. Calculer  $Cov(X, Y)$ .
5. On pose  $Z = X + Y$ . Trouver la loi de  $Z$  puis  $E(Z)$  et  $V(Z)$ .

**Exercice 2**

(10 points)

Soient  $X$  une variable aléatoire qui suit la loi géométrique de paramètre  $p \in ]0, 1[$ .

1. Calculer  $P(X > k)$  pour tout  $k \in \mathbb{N}$ .
2. Soit  $m \in \mathbb{N}^*$  et soit la variable aléatoire  $Y = \min(X, m)$ .
  - (a) Déterminer  $Y(\Omega)$ .
  - (b) Calculer  $P(Y = k)$  pour tout  $k \in Y(\Omega)$  (distinguer deux cas :  $k = m$  et  $k \neq m$ ).
3. Soit  $Z$  une variable aléatoire indépendante avec  $X$  et de même loi que  $X$ .
  - (a) Calculer  $P(X = Z)$ .
  - (b) En déduire la probabilité  $P(X > Z)$  (on peut remarquer que  $P(X > Z) = P(X < Z)$ ).
  - (c) Soit la variable aléatoire  $T = \min(X, Z)$ . Donner (sans calcul supplémentaire) la valeur de  $P(T = X)$ .