Institut Supérieur d'Informatique
et de Mathématiques de Monastir

Série N :3

Variables aléatoires discrètes

Niveau : L2 INFO — A.U : 2024/2025

Exercice 1 On considère un dé cubique truqué dont les faces sont numérotés de 1 à 6 et on note X la variable aléatoire donnée par le numéro obtenue. On suppose que la probabilité d'obtenir une face est proportionnelle au numéro inscrit sur cette face.

1. Déterminer la loi de X.
2. Déterminer la loi de la variable aléatoire $Y = 1/X$.

Exercice 2 On considère une suite infinie d'épreuves répétées indépendantes. La i-ème épreuve peut donner une réussite (événement R_i) avec probabilité p $(0 < p < 1)$ ou un échec (événement R_i^c) avec probabilité $q = 1 - p$. On note X le numéro (aléatoire) de l'épreuve où l'on observe la deuxième réussite.

1. Écrire les événements $\{X = 2\}$, $\{X = 3\}$, $\{X = 4\}$ à l'aide des R_i et R_i^c et calculer leurs probabilités respectives.
2. Calculer $P(X = k)$ pour tout entier k.
3. Écrire à l'aide des R_i et R_i^c l'événement

$$\{\text{on n'observe jamais de deuxième succès}\}$$

et montrer que sa probabilité est nulle.

Exercice 3 Une compagnie de métro pratique les tarifs suivants. Le ticket donnant droit à un trajet coûte 1 D ; les amendes sont fixées à 20 D pour la première infraction constatée, 40 D pour la deuxième et 400 D pour la troisième. La probabilité p pour un voyageur d'être contrôlé au cours d'un trajet est supposée constante et connue de la seule compagnie. Un fraudeur décide de prendre systématiquement le métro sans payer jusqu'à la deuxième amende et d'arrêter alors de frauder. On note T le nombre de trajets effectués jusqu'à la deuxième amende (T est le numéro du trajet où le fraudeur est contrôlé pour la deuxième fois). On note $q = 1 - p$ la probabilité de faire un trajet sans contrôle.

1. Montrer que la loi de T est donnée par

$$P(T = k) = (k-1)p^2 q^{k-2}, k \geq 2.$$

2. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, calculer $P(T > n)$. Indication : on pourra commencer par chercher une formule explicite pour la somme de la série entière

$$f(x) := \sum_{k=n+1}^{+\infty} x^{k-1},$$

puis pour sa dérivée terme par terme.

3. Calculer numériquement $P(T > 10)$ (pourquoi s'intéresse-t-on à cette quantité ?) lorsque $p = 1/10$ et lorsque $p = 1/20$.

4. D'un point de vue purement financier (et donc hors de toute considération de moralité), quel conseil donneriez vous au fraudeur ?

Exercice 4 *Loi binomiale négative*

1. Soit $n \in N^*$ fixé. Donner le développement en série entière de la variable q de :

$$f(q) = (1-q)^{-n}, \ q \in [0, 1[.$$

avec $q \in [0;1[$

$$= \sum_{0}^{+\infty} \frac{(n+k-1)!}{(n-1)!\,k!} q^k$$

Dans la suite, on note $p = 1 - q$.

2. En déduire que :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad P(X = k) = C_{n+k-1}^{k} p^n q^k,$$

est une loi de probabilité sur $\mathbb{N}$. Cette loi s'appelle loi binomiale négative de paramètres n et p.

3. On considère une urne contenant n_1 boules vertes et n_2 boules rouges. On note $p = n_1/(n_1+n_2)$. On effectue des tirages avec remise d'une boule dans l'urne jusqu'à l'obtention de la n-ième boule verte. Soit Y la variable aléatoire égale au nombre de boules rouges tirées. Quelle est la loi de Y ?

Exercice 5 Le nombre de fois où un individu attrape un rhume en une année donnée est une variable de Poisson de paramètre $\lambda = 5$. Un nouveau médicament vient d'être mis sur le marché. Il réduit le paramètre de Poisson à $\lambda = 3$ pour 75% de la population. Pour le reste de la population, le médicament est sans effet notable sur les rhumes. Si un individu essaie le médicament pendant un an et attrape 2 rhumes au cours de cette période, quelle est la probabilité que le médicament lui ait été bénéfique ?

Exercice 6 Un boulanger mélange 1000 raisins dans de la pâte pour fabriquer 100 brioches de même masse.

1. Quelle est la loi exacte du nombre X de raisins contenus dans une brioche achetée chez ce boulanger ? Précisez quelles hypothèses vous faites.

2. En utilisant une approximation classique de la loi de X, évaluer la probabilité que la brioche achetée contienne 10 raisins à deux unités près (i.e. $8 \leq X \leq 12$).

TD3

Probabilité

(2ᵉ 3)

Exo 2

1) $\{X=2\} = R_1 \cap R_2$, $P(X=2) = p^2$

$\{X=3\} = R_1 R_2^c R_3 + (U)\ R_1^c . R_2 . R_3$

$P(X=3) = 2 \times p^2 (1-p) = 2p^2 q = C_2^1 p^2 q$

$P(\{X=4\}) = C_3^2 p^2 . q^2 = 3 p^2 q^2$

2) X loi?

on a $X(\Omega) = \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$

$k \in X(\Omega)$, $P(X=k) = C_{k-1}^1 p^2 q^{k-2} = (k-1) p^2 q^{k-2}$

$$\boxed{\sum_{k \in X(\Omega)}^{+\infty} P(X=k) = 1} ?$$

donc

$$p^2 \sum_{k\geq 2}^{+\infty} (k-1) q^{k-2} = \cancel{p^2 \sum_{n=0}^{+\infty}}$$

⚠ donc

on calcule

$$\sum_{k=2}^{+\infty} (k-1)\, q^{k-2}$$

La dérivée de la somme = la somme de dérivées

on calcule

$$\sum_{k=2}^{+\infty} (k-1)\, x^{k-2} = \sum_{k=2}^{+\infty} \left(x^{k-1}\right)' = \left(\sum_{k=2}^{+\infty} x^{k-1}\right)'$$

on

$$\sum_{k=2}^{+\infty} x^{k-1} \underset{m=k-2}{=} \sum_{m=0}^{+\infty} x^{m+1} = x \sum_{0} x^{m}$$

$$= x \cdot \frac{1}{1-x}$$

car $x \in]0;1[$

donc

$$\sum_{k=2}^{+\infty} (k-1)\, x^{k-2} = \left(\frac{x}{1-x}\right)' = \boxed{\frac{1}{(1-x)^2}}$$

donc $x = q$

on a

$$\sum_{k=2}^{+\infty} (k-1)\, q^{k-2} = \frac{1}{(1-q)^2} = \boxed{\frac{1}{p^2}}$$

donc

$$\sum_{k=2}^{+\infty} P(X=k) = p^2 \cdot \frac{1}{p^2} = \boxed{1}$$

3) A = " on obtienne jamais un succès "

$$A = \bigcap_{i=1}^{+\infty} \overline{R_i} \cup \underbrace{\left[\bigcup_{i=1}^{+\infty} \left(R_i \cap \left(\bigcap_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{+\infty} \overline{R_j}\right)\right)\right]}_{B}$$

on

$$P\left(\bigcap_{i=1}^{+\infty} \overline{R_i}\right) = \prod_{i=1}^{+\infty} q = \lim_{+\infty} q^n = 0$$

car $q \in [0,1[$

$$P(B) = \sum_{1}^{+\infty} P\Big(\underbrace{\prod_{\substack{j=1 \\ j\neq i}} q}_{0}\Big) = 0$$

Ex3

1) $P(T=k) = (k-1)\cdot p^2 q^{k-2}$; $k \geq 2$ comme ex 2

2) $P(T>n)$; $n \in \mathbb{N}^*$

on

$$\{T>n\} = \bigcup_{k=n+1}^{+\infty} \{T=k\}$$

$$P(T>n) = \sum^{+\infty} P(T=k)$$

$= p^2 \sum_{n+1}^{+\infty} (k-1) q^{k-2}$ (à finir) !!!

3)

$P(T > 60)$ sachant que chaque ticket $= 1$ D

et l'amende $= 60$ D

si le fraudeur passe les tickets sans être amendé il a gagné

sinon il a perdu

pour calculer $P(T > 60)$ on retourne à question 2

$$P(T > k) = p^2 \sum_{n+1}^{+\infty} (k-1) q^{k-2}$$

on calcule

$$\sum_{n+1}^{+\infty} (k-1) x^{k-2} = \sum_{n+1}^{+\infty} \left(x^{k-1}\right)'$$

$$= \left(\sum_{n+1}^{+\infty} x^{k-1} \right)'$$

$$\sum_{n+1}^{+\infty} x^{k-1} = \sum_{m=0}^{+\infty} x^{m+n} = x^n \sum_{m=0}^{+\infty} x^m$$

$m = k-(n+1)$

$$= \boxed{\frac{x^n}{1-x}}$$

donc $+\infty$

$$\sum_{n+1} (k-1)\, x^{k-2} = \left(\frac{x^n}{1-x}\right)' = \frac{n x^{n-1} - x^n}{(1-x)^2}$$

$$= \frac{x^{n-1}(-nx + x + n)}{(1-x)^2}$$

$$= \frac{x^{n-1}(n(1-x) + x)}{(1-x)^2}$$

Pour $x = q$

$$\sum_{n+1}^{+\infty} (k-1)\, q^{k-2} = \frac{q^{n-1}(n\overset{(1-q)}{p} + q)}{p^2}$$

$$\boxed{P(T > n) = q^{n-1}(np + q)}$$

donc

Pour $\boxed{p = \frac{1}{10}}$ $P(T > 60) = 0{,}1 < \frac{1}{2}$

Pour $\boxed{p\ \frac{1}{20}}$ $P(T > 60) = 0{,}05 < \frac{1}{2}$

Ex 1 Loi de X ?

$X(\Omega) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

X	1	2	3	4	5	6
$P(X = x_i)$	$1 \times k$	$2 \times k$	$3 \times k$	$4 \times k$	$5 \times k$	$6 \times k$

on $\sum_{i=0} P(X = x_i) = 1 = 21k$ donc $\boxed{k = \frac{1}{21}}$

donc $\boxed{P(X = k) = \frac{1}{21} k}$

2) $Y = \frac{1}{X}$

$X(\Omega) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

$Y(\Omega) = \{1, \frac{1}{2}, 1/3, 1/4, 1/5, 1/6\}$

on

$P\{Y = 1\} = P(X = 1) = \frac{1}{21}$

donc :

$\boxed{P(Y = k) = P(X = k) = \frac{1}{21} k}$

Exc6

1) hyp 1) les raisin sont reparti independamment les uns les autres entre les briocha

hyp 2) chaque raison a une probabilité de $1/100$ de retrouver dans une brioche donné puisque les brioche de meme masse.

Modelisation ; diffinition pour chaque raisin une V.a X_i telque $X_i = \{1, 0\}$ sinon

si le raisin i est dans la brioche choisi

$$P(X_i = 1) = 1/100 \text{ donc } X_i \sim B(1/100)$$

Bernolli

Le nbr totale de Raisin dans une Brioche donnée est alors la somme des varible $X_1, X_2, \dots X_{1000}$.

$$X = \sum_{k=1}^{1000} X_i$$

Puisque X est la somme de 1000 varible de Bernolli independant

donc $X \sim B(1000, 1/100)$

c) "Rappeler l'approximation de la loi Binomiale par la loi de Poisson" (on utilise ...)

On considère que une bonne approximation de la loi $\mathcal{B}(n,p)$ est la loi de poisson $\mathcal{P}(np)$

lorsque $n \geq 30$ et $p \leq 0,05$ ou $n \geq 100$ et $np \leq 10$

lorsque $n = 100$ et $n \times p = 10$

on peut utiliser une approximation de paramètre $np = 10$

$X \sim \mathcal{P}(\lambda)$

donc $X \sim \mathcal{P}(10)$ ⇒ $P(X = k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$

⇒ $\boxed{P(8 \leq X \leq 12)} = P(X=8) + P(X=9) + P(X=10) + P(X=11) + P(X=12)$

$=$