

EXAMEN EN PROBABILITES

SESSION PRINCIPALE

Durée 1h 30

Niveau : L2INFO

A.U : 2024/2025

Exercice 1

(6 points)

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes de même loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0, 1[$. On pose $S = X + Y$ et $T = X - Y$.

1. Déterminer les valeurs possibles de S et de T ($S(\Omega)$ et $T(\Omega)$).
2. Déterminer la loi du couple (S, T) (vous pouvez dresser un tableau illustrant la loi du couple).
3. En déduire la loi de S et la loi de T .
4. Calculer $\text{cov}(S, T)$.
5. Les variables S et T sont-elles indépendantes ?

Exercice 2

(5 points)

La densité de probabilité d'une variable X est donnée par :

$$f_X(x) = \begin{cases} \lambda e^{-x} & \text{si } x \geq \theta \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} = \lambda e^{-x} \mathbf{1}_{[\theta, +\infty[}(x),$$

où θ est paramètre réel strictement positif.

1. Déterminer le paramètre λ en fonction de θ pour que f_X soit bien une densité de probabilité.
2. Calculer l'espérance de X .
3. La variable X modélise la durée de vie (en jours) d'un certain composant électronique. Sachant que cet composant fonctionne en moyenne 200 jours, calculer le paramètre θ .
4. Déterminer la densité de la variable aléatoire $Y = \sqrt{X}$.

Exercice 3
(5 points)

Un examen de probabilité est constitué de deux parties (discrète et continue) notées chacune sur 10 points. Un étudiant a préparé son examen de façon telle que :

- Sa note X sur la partie discrète suit une loi normale $\mathcal{N}(7, 1)$.
- Sa note Y sur la partie continue suit une loi normale $\mathcal{N}(6, \sqrt{3}^2)$.

L'étudiant sera admis si sa note est supérieure à 9,5. Soit $T = X + Y$ la note totale de l'étudiant.

1. Déterminer en justifiant votre réponse la loi de T .
2. Calculer la probabilité que l'étudiant soit admis.
3. L'étudiant a remarqué que la variance de la partie continue est trop élevée. Il cherche donc à la réduire à une valeur σ^2 de tel sorte que sa chance d'être admis soit 95%. Trouver la valeur de σ^2 .

Exercice 4
(6 points)

Les durées des trajetotires dans cet exercice sont supposées de loi normale.

1. Un directeur de société habite dans la ville A. Il part de chez lui à 8h45 et se rend en voiture à son bureau qui ouvre à 9h. La durée de son trajetotire est en moyenne de 13 minutes et de variance $(3)^2$ minutes.
 - (a) Quelle est la probabilité que le directeur arrive en retard ?
 - (b) À quelle heure il doit partir pour qu'avec 90% il n'arrive pas en retard à son bureau ?
2. La secrétaire du directeur habite en A, elle va au bureau avec le train de 8h32 ; elle descend à la station B. Elle prend ensuite le bus qui part de B à 8h50 (sans attendre le train), pour aller de B à son bureau. La durée du trajet en train a pour moyenne 16 minutes , pour variance 4 minutes, et la durée du trajet en bus a pour moyenne 9 minutes et pour variance 1 minute. Les durées de trajet en train et en bus sont indépendants.
 - (a) Quelle est la probabilité que la secrétaire rate le bus ?
 - (b) Quelle est la probabilité qu'elle arrive à l'heure ?
3. Quelle est la probabilité pour que le directeur ou la secrétaire (c'est-à-dire l'un au moins des deux) arrive à l'heure, les durées du trajet du directeur ou de la secrétaire étant supposés indépendantes ?

Bon Travail

Fractiles de la loi Normale centrée réduite

Pour les valeurs de $\alpha < 0.5$, on utilisera la relation $u_\alpha = -u_{1-\alpha}$

$u_\alpha = \Phi^{-1}(\alpha)$ où $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$											
α_1	α_2										
	0.000	0.001	0.002	0.003	0.004	0.005	0.006	0.007	0.008	0.009	
0.500	0.0000	0.0025	0.0050	0.0075	0.0100	0.0125	0.0150	0.0175	0.0201	0.0226	
0.510	0.0251	0.0276	0.0301	0.0326	0.0351	0.0376	0.0401	0.0426	0.0451	0.0476	
0.520	0.0502	0.0527	0.0552	0.0577	0.0602	0.0627	0.0652	0.0677	0.0702	0.0728	
0.530	0.0753	0.0778	0.0803	0.0828	0.0853	0.0878	0.0904	0.0929	0.0954	0.0979	
0.540	0.1004	0.1030	0.1055	0.1080	0.1105	0.1130	0.1156	0.1181	0.1206	0.1231	
0.550	0.1257	0.1282	0.1307	0.1332	0.1358	0.1383	0.1408	0.1434	0.1459	0.1484	
0.560	0.1510	0.1535	0.1560	0.1586	0.1611	0.1637	0.1662	0.1687	0.1713	0.1738	
0.570	0.1764	0.1789	0.1815	0.1840	0.1866	0.1891	0.1917	0.1942	0.1968	0.1993	
0.580	0.2019	0.2045	0.2070	0.2096	0.2121	0.2147	0.2173	0.2198	0.2224	0.2250	
0.590	0.2275	0.2301	0.2327	0.2353	0.2378	0.2404	0.2430	0.2456	0.2482	0.2508	
0.600	0.2533	0.2559	0.2585	0.2611	0.2637	0.2663	0.2689	0.2715	0.2741	0.2767	
0.610	0.2793	0.2819	0.2845	0.2871	0.2898	0.2924	0.2950	0.2976	0.3002	0.3029	
0.620	0.3055	0.3081	0.3107	0.3134	0.3160	0.3186	0.3213	0.3239	0.3266	0.3292	
0.630	0.3319	0.3345	0.3372	0.3398	0.3425	0.3451	0.3478	0.3505	0.3531	0.3558	
0.640	0.3585	0.3611	0.3638	0.3665	0.3692	0.3719	0.3745	0.3772	0.3799	0.3826	
0.650	0.3863	0.3880	0.3907	0.3934	0.3961	0.3989	0.4016	0.4043	0.4070	0.4097	
0.660	0.4125	0.4152	0.4179	0.4207	0.4234	0.4261	0.4289	0.4316	0.4344	0.4372	
0.670	0.4399	0.4427	0.4454	0.4482	0.4510	0.4538	0.4565	0.4593	0.4621	0.4649	
0.680	0.4677	0.4705	0.4733	0.4761	0.4789	0.4817	0.4845	0.4874	0.4902	0.4930	
0.690	0.4959	0.4987	0.5015	0.5044	0.5072	0.5101	0.5129	0.5158	0.5187	0.5215	
0.700	0.5244	0.5273	0.5302	0.5330	0.5359	0.5388	0.5417	0.5446	0.5476	0.5505	
0.710	0.5534	0.5563	0.5592	0.5622	0.5651	0.5681	0.5710	0.5740	0.5769	0.5799	
0.720	0.5828	0.5858	0.5888	0.5918	0.5948	0.5978	0.6008	0.6038	0.6068	0.6098	
0.730	0.6128	0.6158	0.6189	0.6219	0.6250	0.6280	0.6311	0.6341	0.6372	0.6403	
0.740	0.6433	0.6464	0.6495	0.6526	0.6557	0.6588	0.6620	0.6651	0.6682	0.6713	
0.750	0.6745	0.6776	0.6808	0.6840	0.6871	0.6903	0.6935	0.6967	0.6999	0.7031	
0.760	0.7063	0.7095	0.7128	0.7160	0.7192	0.7225	0.7257	0.7290	0.7323	0.7356	
0.770	0.7388	0.7421	0.7454	0.7488	0.7521	0.7554	0.7588	0.7621	0.7655	0.7688	
0.780	0.7722	0.7756	0.7790	0.7824	0.7858	0.7892	0.7926	0.7961	0.7995	0.8030	
0.790	0.8064	0.8099	0.8134	0.8169	0.8204	0.8239	0.8274	0.8310	0.8345	0.8381	
0.800	0.8416	0.8452	0.8488	0.8524	0.8560	0.8596	0.8633	0.8669	0.8705	0.8742	
0.810	0.8779	0.8816	0.8853	0.8890	0.8927	0.8965	0.9002	0.9040	0.9078	0.9116	
0.820	0.9154	0.9192	0.9230	0.9269	0.9307	0.9346	0.9385	0.9424	0.9463	0.9502	
0.830	0.9542	0.9581	0.9621	0.9661	0.9701	0.9741	0.9782	0.9822	0.9863	0.9904	
0.840	0.9945	0.9986	1.0027	1.0069	1.0110	1.0152	1.0194	1.0237	1.0279	1.0322	
0.850	1.0364	1.0407	1.0450	1.0494	1.0537	1.0581	1.0625	1.0669	1.0714	1.0758	
0.860	1.0803	1.0848	1.0893	1.0939	1.0985	1.1031	1.1077	1.1123	1.1170	1.1217	
0.870	1.1264	1.1311	1.1359	1.1407	1.1455	1.1503	1.1552	1.1601	1.1650	1.1700	
0.880	1.1750	1.1800	1.1850	1.1901	1.1952	1.2004	1.2055	1.2107	1.2160	1.2212	
0.890	1.2265	1.2319	1.2372	1.2426	1.2481	1.2536	1.2591	1.2646	1.2702	1.2759	
0.900	1.2816	1.2873	1.2930	1.2988	1.3047	1.3106	1.3165	1.3225	1.3285	1.3346	
0.910	1.3408	1.3469	1.3532	1.3595	1.3658	1.3722	1.3787	1.3852	1.3917	1.3984	
0.920	1.4051	1.4118	1.4187	1.4255	1.4325	1.4395	1.4466	1.4538	1.4611	1.4684	
0.930	1.4758	1.4833	1.4909	1.4985	1.5063	1.5141	1.5220	1.5301	1.5382	1.5464	
0.940	1.5548	1.5632	1.5718	1.5805	1.5893	1.5982	1.6072	1.6164	1.6258	1.6352	
0.950	1.6449	1.6546	1.6646	1.6747	1.6849	1.6954	1.7060	1.7169	1.7279	1.7392	
0.960	1.7507	1.7624	1.7744	1.7866	1.7991	1.8119	1.8250	1.8384	1.8522	1.8663	
0.970	1.8808	1.8957	1.9110	1.9268	1.9431	1.9600	1.9774	1.9954	2.0141	2.0335	
0.980	2.0537	2.0749	2.0969	2.1201	2.1444	2.1701	2.1973	2.2262	2.2571	2.2904	
0.990	2.3263	2.3656	2.4089	2.4573	2.5121	2.5758	2.6521	2.7478	2.8782	3.0902	

Fonction de répartition de la loi Normale centrée réduite

- Si $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, alors $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right)$, $\mathbb{E}(X) = \mu$ et $\text{Var}(X) = \sigma^2$.
 - On note quelquefois U la v. a. gaussienne centrée-réduite et Φ sa fonction de répartition : $U \sim \mathcal{N}(0, 1)$.
 - La table qui suit donne les valeurs de la fonction de répartition empirique de la loi normale centrée réduite $\Phi(x)$ pour les valeurs de x positives.
 - Pour les valeurs négatives de x , on utilisera la relation $\Phi(x) = 1 - \Phi(-x)$.