1/ $X \sim \mathcal{N}(m, \sigma^2)$

$a \in \mathbb{R}^*$

$b \in \mathbb{R}$ alors $aX + b \sim \mathcal{N}(am + b, (a\sigma)^2)$

2) $X \sim \mathcal{N}(m_1, \sigma_1^2)$

$Y \sim \mathcal{N}(m_2, \sigma_2^2)$

X et Y sont indépendantes

$a, b \in \mathbb{R}^*$

$aX + bY \sim \mathcal{N}(am_1 + bm_2 ; \sqrt{a^2\sigma_1^2 + b^2\sigma_2^2})$

- Loi normal centrée réduite :

. on dit que X suit la loi normale centrée réduite si $E(X)=0$ et $V(X)=1$; $X \sim \mathcal{N}(0,1)$

- la densité de X est $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$

- la fonction de répartition de X sera notée ϕ

donc $\phi(t) = P(X \leq t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{t} e^{-x^2/2} dx$

Proposition

$\phi(t) + \phi(-t) = 1$

Preuve :

$$\phi(t) + \phi(-t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{t} e^{-\frac{x^2}{2}} dx + \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{-t} e^{-x^2/2} dx}_{\substack{y=-x \\ dy=-dx}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = 1$$

$$\phi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{t} e^{-x^2/2}\, dx$$

$x = 1,4$

$\phi(1,4) \simeq 0,9192$

$\phi(1,46) \simeq 0,9279$

$\phi(2,25) \simeq 0,9878$

$\phi(-1,24) = 1 - \phi(1,24)$

$\simeq 1 - 0,8925$

ϕ est stri $\nearrow$

ϕ est continue

donc ϕ admet une application inverse ϕ^{-1}

est appelée fractile

$\phi^{-1} :]0,1[\to \mathbb{R}$

Proposition : pour $t < 0,5$ on a :

$$\phi^{-1}(t) = -\phi^{-1}(1-t).$$

Ex7 :

$X \sim \mathcal{N}(m, (1{,}5)^2)$.

1/ $m = 101$ cl

$P(X < 100)$

$= P\left(\frac{X-101}{1{,}5} < \frac{100-101}{1{,}5}\right)$

$aX + b \sim \mathcal{N}(0,1)$

$\frac{X-m}{\sigma} \sim$

$\frac{1}{\sigma}X - \frac{m}{\sigma} \sim \mathcal{N}(0,1)$

$= P\left(\underbrace{\frac{X-101}{1{,}5}}_{\sim \mathcal{N}(0,1)} \leq \underbrace{-\frac{2}{3}}_{-0{,}66}\right)$

$= \phi(-0{,}66) = 1 - \phi(0{,}66)$

$\simeq 0{,}2541$

25%

$X \sim \mathcal{N}(m, \sigma^2)$

$aX + b \sim \mathcal{N}(\underbrace{am+b}_{0}, \underbrace{(a\sigma)}_{1}{}^2)$

$a = \frac{1}{\sigma}$

$b = -\frac{m}{\sigma}$

$\frac{1}{\sigma}X - \frac{m}{\sigma} \sim \mathcal{N}(0,1)$

$\frac{X-m}{\sigma} \sim \mathcal{N}(0,1)$

b) $P(X>103) = P\left(\underbrace{\frac{X-101}{1,5}}_{\sim \mathcal{N}(0,1)} > \frac{103-101}{1,5}\right)$

$= 1 - \phi(1,33)$

$\simeq 0,0918$

$-\phi^{-1}(0,95) = -1,6449$

2/ m?

$P(X \geq 99) \geq 0,95$

$P(X \geq 99) \geq 0,95 \Leftrightarrow$

$P\left(\frac{X-m}{1,5} \geq \frac{99-m}{1,5}\right) \geq 0,95$

$\Leftrightarrow \quad 1 - \phi\left(\frac{99-m}{1,5}\right) \geq 0,95$

$\Leftrightarrow \phi\left(\frac{99-m}{1,5}\right) \leq 0,05$

$\Leftrightarrow \frac{99-m}{1,5} \leq \phi^{-1}(0,05)$ (ϕ^{-1}↗

$\Leftrightarrow m \geq -1,5\,\underbrace{\phi^{-1}(0,05)} + 99$

$\geq 101,467$

Ex 13 :

1/ X : la durée du trajet de directeur.

a) $X \rightsquigarrow \mathcal{N}(13, (3)^2)$

$P(X \geq 15) = P\left(\frac{X - 13}{3} \geq \frac{15 - 13}{3}\right)$

$= 1 - \phi(0,66) \simeq 0,25$

b) a ?

$P(X \leq a) = 0,9$

$\Leftrightarrow P\left(\frac{X - 13}{3} \leq \frac{a - 13}{3}\right) = 0,9$

$\Leftrightarrow \phi\left(\frac{a - 13}{3}\right) = 0,9$

$\Leftrightarrow \frac{a - 13}{3} = \phi^{-1}(0,9)$

$\Leftrightarrow a = 3 . \phi^{-1}(0,9) + 13 \simeq 16,85$

le départ $9^h - 16,84$ mn

2) T train $8^h 32$: $T, \mathcal{N}(16, 2^2)$

Bus $8^h 50$ $\mathcal{N}(9, 1)$

$P(T \geq 18) = P\left(\frac{T - 16}{2} \geq \frac{18 - 16}{2}\right)$

$= 1 - \phi(1)$

$\simeq 0,158$

b) Bus : $B \sim \mathcal{N}(9, 1)$

$P($elle arrive à l'heure$)$: $P(T \leq 18)\, P(B \leq 10)$

$$P(B \leq 10) = P\left(\frac{B-9}{1} \leq \frac{10-9}{1}\right) = \Phi(1) \simeq 0,841$$

$$= (0,841)^2 \simeq 0,707$$

c) On suppose que le bus attends le train

Qu'elle est la prob que la secrétaire arrive à l'heure ?

2/ m ?

$$P(X \geq 99) \geq 0,95$$

$$P(X \geq 99) \geq 0,95 \iff$$

$$P\left(\frac{X-m}{1,5} \geq \frac{99-m}{1,5}\right) \geq 0,95$$

$$\iff 1 - \Phi\left(\frac{99-m}{1,5}\right) \geq 0,95$$

$$\iff \Phi\left(\frac{99-m}{1,5}\right) \leq 0,05$$

$$\iff \frac{99-m}{1,5} \leq \Phi^{-1}(0,05) \quad (\Phi^{-1} \nearrow$$

$$\iff m \geq -1,5\, \underbrace{\Phi^{-1}(0,05)} + 99$$

$$\geq 101,467$$

c) La trajectoir $\sim T+B \sim \mathcal{N}(25, \sqrt{5}^2)$

$P(T+B \leq 28)$.

3) D : le directeur arrive à l'heure

S : la secrétaire "

$$P(D \cup S) = P(D) + P(S) - P(D \cap S)$$
$$= P(D) + P(S) - P(D)P(S)$$

b) a ?

$$P(X \leq a) = 0{,}9$$

$$\Leftrightarrow P\left(\frac{X-13}{3} \leq \frac{a-13}{3}\right) = 0{,}9$$

$$\Leftrightarrow \phi\left(\frac{a-13}{3}\right) = 0{,}9$$

$$\Leftrightarrow \frac{a-13}{3} = \phi^{-1}(0{,}9)$$

$$\Leftrightarrow a = 3 \cdot \phi^{-1}(0{,}9) + 13 \simeq 16{,}85$$

le départ $9^h - 16{,}84$ mn

2) T train $8^h 32$; $T \sim \mathcal{N}(16, 2^2)$

Bus $8^h 50$ $\mathcal{N}(9, 1)$

$$P(T \geq 18) = P\left(\frac{T-16}{2} \geq \frac{18-16}{2}\right)$$
$$= 1 - \phi(1)$$
$$\simeq 0{,}158$$

Théorème : (Théorème limite centrale TLC)

Soient $X_1, \dots, X_n$ une famille de v.a indépendantes, de même loi ; $E(X_1) = m$ et $Var(X_1) = \sigma^2$

. On pose $S_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i$, $E(S_n) = m$

$V(S_n) = \frac{\sigma^2}{n}$

Alors : $\forall t \in \mathbb{R}$

$$P\left(\frac{S_n - m}{\sigma/\sqrt{n}} \leq t\right) \xrightarrow[n \to +\infty]{} \phi(t)$$

$\Leftrightarrow \phi\left(\frac{99-m}{1,5}\right) \leq 0,05$

$\Leftrightarrow \frac{99-m}{1,5} \leq \phi^{-1}(0,05)$ (ϕ^{-1}

$\Leftrightarrow m \geq \underbrace{-1,5\,\phi^{-1}(0,05)}\, + 99$

$\geq 101,467$