

Série N :2  
Probabilité et probabilité conditionnelle

Niveau : L2 INFO

A.U : 2024/2025

**Exercice 1** Une urne contient 5 boules blanches et 7 rouges. On effectue 3 tirages d'une boule suivant la procédure suivante. A chaque tirage on prend une boule et on la remet dans l'urne en y ajoutant une boule de même couleur. Calculer les probabilités que l'échantillon de trois boules tiré contienne :

1. Aucune blanche.
2. Exactement une blanche.
3. Trois blanches.
4. Exactement deux blanches.

**Exercice 2** Dans une population, on a observé que pendant 1 mois, 40% des individus sont allés au cinéma, 25% au théâtre et 12.5% au cinéma et au théâtre. Calculer la probabilité que pendant 1 mois un individu

1. aille au cinéma ou au théâtre.
2. n'aille pas au cinéma.
3. n'aille ni au cinéma ni au théâtre.
4. aille au cinéma mais pas au théâtre.
5. aille au théâtre sachant qu'il est allé au cinéma.
6. n'aille pas au cinéma sachant qu'il n'est pas allé au théâtre.

**Exercice 3** Une compagnie d'assurance répartit ses clients en trois classes  $R_1$ ,  $R_2$  et  $R_3$  : les bons risques, les risques moyens et les mauvais risques. Les effectifs des ces trois classes représentent 20% de la population totale pour la classe  $R_1$ , 50% pour  $R_2$  et 30% pour  $R_3$ . Les statistiques indiquent que les probabilités d'avoir un accident au cours de l'année pour une personne de l'une de ces trois classes sont respectivement de 0.05, 0.15 et 0.30.

1. Quelle est la probabilité qu'une personne choisie au hasard dans la population ait un accident dans l'année ?
2. Si M. Mounir n'a pas eu d'accident cette année, quelle est la probabilité qu'il soit un bon risque ?

**Exercice 4** On dispose de  $n$  urnes contenant chacune 3 boules. Parmi ces  $3n$  boules, l'une est jaune et toutes les autres sont bleues. On ignore dans quelle urne se trouve la boule jaune (autrement dit  $P(\text{la boule jaune est dans l'urne } i) = \frac{1}{n}$  pour tout  $i = 1, \dots, n$ ).

1. On tire simultanément sans remise deux boules de l'urne 1. On note les deux événements  
 $B_1$  : "les deux boules tirées sont bleues"  
 $J_1$  : "la boule jaune est dans l'urne 1".

Calculer  $P(B_1/J_1)$  et  $P(B_1/\bar{J}_1)$ . En déduire  $P(B_1)$ .

2. Quelle est la probabilité que la boule jaune soit dans l'urne 1 si le tirage a donné deux bleues ?
3. On reprend l'expérience avec cette fois  $n$  personnes chacune face à une urne où elles tirent simultanément et sans remise deux boules. On note  $B_i$  et  $J_i$  les événements définis de manière analogue à la première question.
- (a) Que vaut  $P(\bar{B}_i/J_k)$  pour  $1 \leq i, k \leq n$ ? On distingue les cas  $i = k$  et  $i \neq k$ . En déduire  $P(B_i)$
- (b) Déterminer les valeurs des probabilités conditionnelles  $P(B_i \cap B_j/J_k)$  (on distingue les deux cas  $k = i$ ,  $k = j$  et  $k \notin \{i, j\}$ ). En déduire  $P(B_i \cap B_j)$ .
- (c) Les événements  $B_i$  et  $B_j$  ( $i \neq j$ ) sont-ils indépendants.

**Exercice 5** Montrer que si  $A, B, C$  sont indépendants,  $A \cup B$  et  $C$  sont indépendants. Généraliser.

**Exercice 6** On effectue des lancers répétés d'une paire de dés et on observe pour chaque lancer la somme des points indiqués par les deux dés. On se propose de calculer de deux façons la probabilité de l'événement  $E$  défini ainsi : dans la suite des résultats observés, la première obtention d'un 9 a lieu avant la première obtention d'un 7.

1. Quelle est la probabilité de n'obtenir ni 7 ni 9 au cours d'un lancer ?
2. Première méthode : On note  $F_i = \{\text{obtention d'un 9 au } i\text{-ème lancer}\}$  et pour  $n > 1$ ,  $E_n = \{\text{ni 7 ni 9 ne sont obtenus au cours des } n-1 \text{ premiers lancers et le } n\text{-ème lancer donne 9}\}$ . Dans le cas particulier  $n = 1$ , on pose  $E_1 = F_1$ .

- (a) Exprimer  $E$  à l'aide d'opérations ensemblistes sur les  $E_n$  ( $n \geq 1$ ). Exprimer de même chaque  $E_n$  à l'aide des  $F_i$  et des  $H_i = \{\text{ni 7 ni 9 au } i\text{-ème lancer}\}$ .
- (b) Calculer  $P(E_n)$  en utilisant l'indépendance des lancers.
- (c) Calculer  $P(E)$ .

3. Deuxième méthode : On note  $G_1 = \{\text{obtention d'un 7 au premier lancer}\}$ .

- (a) Donner une expression de  $P(E)$  en utilisant le conditionnement par la partition  $\{F_1, G_1, H_1\}$ .
- (b) Donner sans calcul les valeurs de  $P(E|F_1)$ ,  $P(E|G_1)$ . Expliquer pourquoi  $P(E|H_1) = P(E)$  puis déduire la valeur de  $P(E)$ .

**Exercice 7** Trois personnes nommées A, B, C lancent à tour de rôle la même pièce de monnaie (ABCABCABC...). La probabilité d'obtenir pile lors d'un lancer est  $p$  ( $0 < p < 1$ ). Le gagnant est le premier qui obtient pile (la partie s'arrête alors).

1. On note  $A_n$  (resp.  $B_n, C_n$ ) l'événement A gagne la partie lors du  $n$ -ième lancer (resp. B, C). Calculer  $P(A_1)$ ,  $P(B_2)$ ,  $P(C_3)$ . Les événements  $A_1$  et  $B_2$  sont-ils indépendants ?
2. En discutant suivant les valeurs de  $n$ , calculer  $P(A_n)$ ,  $P(B_n)$ ,  $P(C_n)$ .
3. Calculer la probabilité de gagner de chacun des trois joueurs.  $\rightarrow P(A_n) = P(A_1) \cdot (1 - p)^{n-1}$
4. Quelle est la probabilité qu'il y ait un vainqueur ? Conclure

$$P(A_1) + P(B_2) + P(C_3)$$

(240)

~~TD e~~  
Probabilité

Ex2

1) A : "train Blanc"

$$P(A) = \frac{7}{12} \times \frac{8}{13} \times \frac{9}{14} = \boxed{\frac{3}{13}}$$

2) B : "exactement une Blanche"

$$P(B) = \frac{5}{12} \times \frac{7}{13} \times \frac{9}{14} + \frac{7}{12} \times \frac{5}{13} \times \frac{9}{14} + \frac{7}{12} \times \frac{6}{13} \times \frac{5}{14} = \boxed{\frac{5}{13}}$$

3) C : "Tous Blanches"

$$P(C) = \frac{5}{12} \times \frac{6}{13} \times \frac{7}{14} = \boxed{\frac{5}{52}}$$

4) D : "exactement deux Blanches"

$$P(D) = 1 - (P(A) + P(B) + P(C))$$

$$= \boxed{\frac{15}{52}}$$

$$P(C) = 0,4$$

$$P(T) = 0,25$$

Ex2 räk "C": "der im cinema" & "T": "der im theater"

1)

$$\begin{aligned} P(C \cup T) &= P(C) + P(T) - P(C \cap T) \\ &= [0,5] \end{aligned}$$

2)

$$P(\bar{C}) = 1 - P(C) = [0,6]$$

3)

$$P(\bar{C} \cup \bar{T}) = 1 - P(C \cap T) \leq [0,475]$$

4)

$$P(\bar{C} \cap \bar{T}) = P(\bar{C}) - P(C \cap T) = [0,275]$$

5)

$$P(T|C) = \frac{P(T \cap C)}{P(C)} = \frac{5}{26}$$

6)

$$P(\bar{C}|\bar{T}) = \frac{P(\bar{C} \cap \bar{T})}{P(\bar{T})} = \frac{P(\bar{C} \cup \bar{T})}{1 - P(T)} = \frac{0,475}{1 - 0,25} = \frac{0,475}{\frac{19}{25}} = \frac{19}{30}$$

Ex3

R<sub>i</sub>: "Le personne est dans l'âge de R<sub>i</sub>" i = {1, 2, 3}

A: "a un accident"

conc

$$P(R_1) = 0,2 \text{ et } P(R_2) = 0,5 \text{ et } P(R_3) = 0,3$$

$$\text{a)} \quad P(A|R_1) = 0,05 \quad \text{u} \quad P(A|R_2) = 0,15 \\ P(A|R_3) = 0,3$$

i) On  $(R_1, R_2, R_3)$  without position ch. u

~~down~~ F.P.T:  $P(A) = P(A|R_1) \cdot P(R_1) + P(A|R_2) \cdot P(R_2) + P(A|R_3) \cdot P(R_3) = 0,175$

e) on

$$P(R_1 | \bar{A}) = \frac{P(\bar{A} | R_1) \cdot P(R_1)}{P(\bar{A})} \\ = \frac{(1 - P(A|R_1)) P(R_1)}{1 - P(A)} \\ \hookrightarrow \frac{0,95 \cdot 0,82}{1 - 0,175} = \frac{19}{875}$$

$\Sigma x_4$  (D.S)

$$P(B_2 | J_1) = \frac{C_2^2}{C_3^2} = \frac{1}{3}$$

$$P(B_2 | \bar{J}_1) = 1$$

of  $P(B_2) \text{ P. o. m. } F.P.T$

$$P(B) = P(B_1 | \bar{J}_1) \cdot P(\bar{J}_1) + P(B_2 | \bar{J}_1) \cdot P(\bar{J}_1)$$

$$= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{m} + 1 \times \left(1 - \frac{1}{m}\right)$$

$$= \frac{1}{3m} + \frac{m-1}{m} = \frac{3m-2}{3m}$$

Formule d  
Bdy

$$P(\bar{J}_2 | B_2) = \frac{P(B_2 | \bar{J}_2) \cdot P(\bar{J}_2)}{P(B_2)}$$

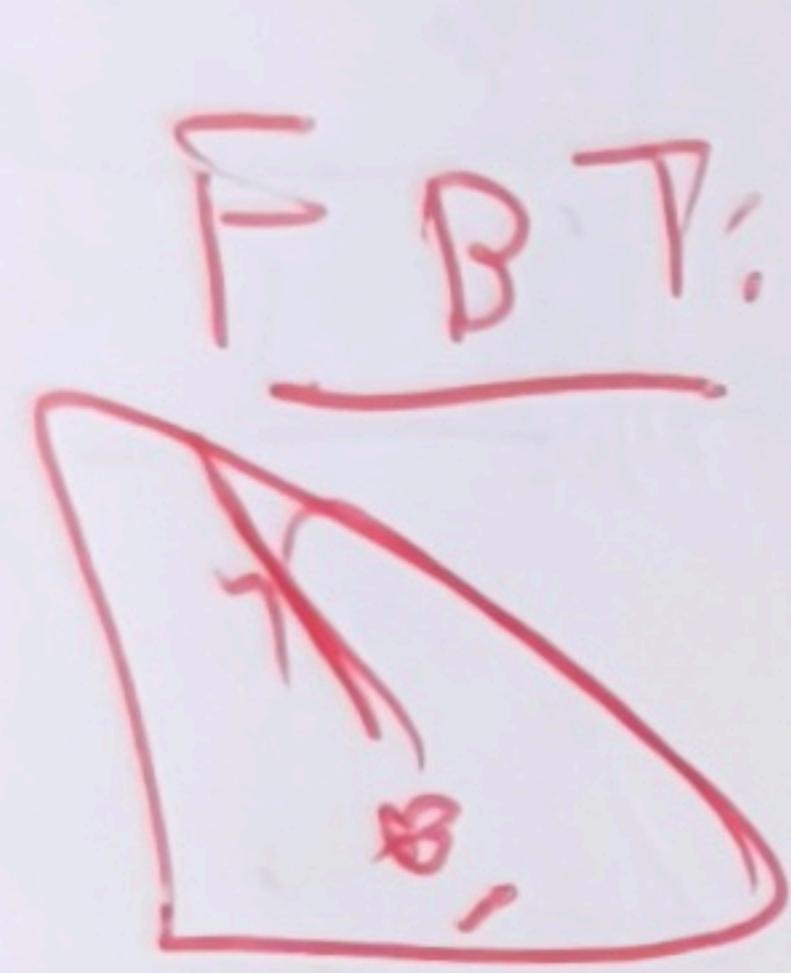
$$= \frac{\frac{1}{3m}}{\frac{3m-2}{3m}} = \frac{1}{3m-2}$$

3) i.e.  $i = k$

$$P(\bar{B}_0 | J_i) = \frac{C_2^1 \times C_2^1}{C_3^2} = \frac{2}{3}$$

3) a) Si.  $i \neq k$   $P(\bar{B}_i / J_k) = 0$

~~$P(\bar{B}_i)$  ? :~~



$$P(\bar{B}_i) = \sum_{k=1}^3 P(\bar{B}_i / J_k) P(J_k)$$

$\prod$

point tons = 0 ~~if~~  $x_i i=k$

done

$$P(\bar{B}_i) = \sum_{k=1}^3 P(\bar{B}_i / J_k) - P(J_k) = 1 - \frac{1}{3}$$

b) cas 1:  $k=i$

$$P(B_i \cap B_j / J_i) = \frac{C_2^2 \times C_1^0}{C_3^2} \times \frac{C_3^2}{C_3^2} = \frac{1}{3}$$

cas 2:  $k=j$

$$P(B_i \cap B_j / J_j) = 1 \times \frac{C_2^2 \times C_1^0}{C_3^2} = \frac{1}{3}$$

cas 3:  $k \notin \{i, j\}$

$$P(B_i \cap B_j / J_k) = 1 = \frac{C_3^2}{C_3^2} \times \frac{C_2^2}{C_3^2} = \frac{1}{3}$$

Ans

$$\underline{P}(B_i \cap B_j) \stackrel{\text{F.P.T}}{=} \sum_{k=2}^m P(B_i \cap B_j | \bar{J}k) \cdot P(\bar{J}k)$$

$$= \left( 2 \times \frac{1}{3} + (m-2) \times 1 \right) \times \frac{1}{m} = \frac{2}{3m} + \frac{m-2}{m}$$

( $\cancel{n - (i=k \text{ or } j=k)}$ )  
diff or

$$= \frac{3m-4}{3m}$$

(c) On

$$\underline{P}(B_i) = \frac{3m-2}{3m} \text{ & } \underline{P}(B_j) = \frac{3m-2}{3m}$$

close

$\underline{P}(B_i \cap B_j) \neq \underline{P}(B_i) \times \underline{P}(B_j)$  close  $B_i$  &  $B_j$  are not independent

Ex 5

A, B, C sont indépendant

$$\Rightarrow \underline{P}(A \cap B) = \underline{P}(A) \times \underline{P}(B)$$

$$\Rightarrow \underline{P}(A \cap C) = \underline{P}(A) \times \underline{P}(C)$$

$$\Rightarrow \underline{P}(B \cap C) = \underline{P}(B) \times \underline{P}(C)$$

$$\Rightarrow \underline{P}(A \cap B \cap C) = \underline{P}(A) \times \underline{P}(B) \times \underline{P}(C)$$

$$\text{Mg } \underline{P}((A \cup B) \cap C) = \underline{P}(A \cup B) \cdot \underline{P}(C)$$

$$\text{or } A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$$

done

$$P((A \cup B) \cap C) = P(A \cap C) + P(B \cap C) =$$

$$= P(A) \times P(C) + P(B) \times P(C)$$

$$= P(C) [P(A) + P(B)]$$

$$= P(A \cap C) + P(B \cap C) - P(A \cap B \cap C)$$

$$= P(A) \cdot P(C) + P(B) \cdot P(C) - P(A) \cdot P(B) \cdot P(C)$$

$$= P(C) \left[ P(A) + P(B) - \underbrace{P(A) \cdot P(B)}_{P(A \cap B)} \right]$$

$$= P(C) \cdot P(A \cup B)$$

done  $(A \cup B) \cap C$  sont indépendant

done

on généralise si on a  $A_1, A_2, \dots, A_m, C$  sont indépendant

independant done

$(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_m) \cap C$  sont indépendant

## Ex 6

1)  $n = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}^2$  donc  $\#n = 36$

$$P(7) = \frac{6}{36}$$

$$P(9) = \frac{6}{36}$$

donc

$$P(m_1 + m_2) = 1 - \left( \frac{6}{36} + \frac{6}{36} \right) = \frac{26}{36}$$

2)

$$\textcircled{2}) E = \bigcup_{m \geq 1} F_m = \boxed{U_{m \geq 1} E_m}$$

La définition de  $E_{\textcircled{2}}$ :

Pour  $m=1$   $E_1 = F_1$  (Le premier lance donne 9)

Pour  $m \geq 1$   $E_m = \text{mig mi7 on col et mien domme } \downarrow$   
 à  $m-1$  lancé      domme 9

domme

$E_m$  on on dit que  $m \neq m_1$  pendant  $m-1$  premiers lances et  
 9 n'a pas mis en

domme

$$E = \bigcup_{m \geq 1} F_m$$

$$C_9 \text{ and } E_3 = \left( \bigcap_{i=1}^{n-1} H_i \right) \cap F_m \quad \begin{array}{l} \text{mid mid junction n-1 loose} \\ \text{can't loose} \end{array}$$

$F_i$ : storm damage force

$H_i$ :  $m + n - i$  m items loose

$$b) P(E_3) = P(H_1 \cap H_2 \cap \dots \cap H_m \cap F_m)$$

$$= P(H_1 \cap H_2 \cap \dots \cap H_m) \cdot P(F_m) \quad \begin{array}{l} \text{independence} \\ \text{abs. damage} \end{array}$$

$$= \left(\frac{13}{18}\right)^{m-1} \times \frac{1}{9}$$

$$c) \text{if } P(E) = \bigcup_{i=1}^3 P(E_i) = \sum_{i=1}^3 P(E_i)$$

$$= \sum_{i=1}^3 \left(\frac{13}{18}\right)^{m-1} \cdot \frac{1}{9}$$

$$= \frac{1}{3} \sum_{i=1}^3 \left(\frac{13}{18}\right)^{m-1}$$

$$= \frac{1}{3} \sum_{i=0}^2 \left(\frac{13}{18}\right)^m$$

$$= \frac{1}{3} \times \frac{1}{1 - \frac{13}{18}} = \frac{1}{3} \times \frac{18}{5} = \boxed{\frac{6}{5}}$$

3) a)  $G_1$  "étonnement de la première tombé" (1)  
 $F_2$  "étonnement de l'an. prochain tombé" (1)  
 $H_1$  "mi+mis au premier tombé" ... } forme une partition de l'univers

donc

$$P(E) = P(E/F_1) \times P(F_1) + P(E/H_1) \times P(H_1) + P(E/G_1)$$

$$P(E) = P(F_1) + P(E/H_1) \times P(H_1)$$

$$P(E) = P(F_2) + P(E) \times P(H_2)$$

$$P(E) = \frac{P(F_1)}{1 - P(H_2)} = \frac{\frac{1}{9}}{1 - \frac{36}{36}} = \frac{1}{9} \times \frac{36}{10} = \boxed{\frac{2}{5}}$$

Ex 7

$$\stackrel{1}{\circ}) P(A_1) = P$$

$$P(B_2) = (1-P) P$$

$$P(C_3) = (1-P)^2 P$$

b) Les événements  $A_1$  &  $B_2$  ne sont pas indépendants. Rendre indépendants (A gagne sur 1<sup>er</sup> tombé) donc  $B_2$  ne peut pas se produire

$$(P(A_1 \cap B_2) = 0 \neq P(A_1) \times P(B_2))$$

A 1<sup>er</sup> tombé      B 2<sup>nd</sup> tombé

(c)

- Frage
- ⊕ falls  $n = 3k + 1$  A gelte dann  $P(A_n) = (1-p)^{3k}$   $P = (k-1)p$
  - ⊕ falls  $n = 3k + 2$  B gelte " " $P(B_n) = (1-p)^{3k+1}$   $P = p - (k-1)p$
  - ⊕ falls  $n = 3k + 3$  C gelte dann  $P(C_n) = (1-p)^{3k+2}$   $P = (1-p)^3$

(3)

$$\begin{aligned}
 P(\text{A gegr}) &= \sum_{m=0}^{+\infty} P(A_m) \\
 &= \sum_{m=0}^{+\infty} (1-p)^{3k} \cdot p \\
 &= p \sum_{k=0}^{+\infty} (1-p)^{3k} = p \cdot \frac{1}{1 - (1-p)^3}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 P(\text{B gegr}) &= \sum_{m=0}^{+\infty} P(B_m) \\
 &= \sum_{k=0}^{+\infty} P(B_m) = \sum_{k=0}^{+\infty} P(1-p)
 \end{aligned}$$

$$= p(1-p) \sum_{k=0}^{+\infty} (1-p)^{3k}$$

$$= p(1-p) \cdot \frac{1}{1 - (1-p)^3}$$

$$P(C) = \sum_{n=1}^{+\infty} P(C_n)$$

$$\rightarrow \sum_{k=0}^{+\infty} (1-p)^{3k+2} \cdot p = (1-p)^2 p \cdot \frac{1}{1-(1-p)^3}$$

④

$$P(V) = P(A) + P(B) + P(C)$$

$$= \frac{p}{1-(1-p)^3} + (1-p) \frac{p}{1-(1-p)^3} + (1-p)^2 \frac{p}{1-(1-p)^3}$$

$$= \frac{p}{1-(1-p)^3} \left[ 1 + (1-p) + (1-p)^2 \right]$$

$$= \frac{p}{1-(1-p)^3} \cdot \cancel{\frac{1-(1-p)^3}{1-(1-p)^3}} = \boxed{1}$$

Ille nt obtin cu Vincenr ninte