Institut Supérieur d'Informatique
et de Mathématiques de Monastir

Année universitaire : 2025/2026
LI2

TD 4 : Théorie des graphes

Correction

Exercice 1

Combien existe-t-il de graphes orientés (resp. Non orientés) à n sommets ?

Il y a $n(n-1)$ couples de sommets distincts et donc $2^{n(n-1)}$ graphes orientés possibles. Il y a $\sum_{i=1}^{n-1} i = \frac{n(n-1)}{2}$ paires de sommets et donc $2^{\frac{n(n-1)}{2}}$ graphes non orientés possibles.

Exercice 2

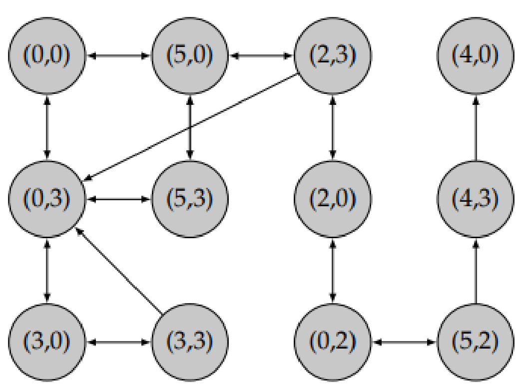
Montrer que dans un graphe non orienté, il y a toujours deux sommets de même degré.

Soit G un graphe non orienté à n sommets. Soit D l'ensemble des degrés des sommets de G. Puisque chaque sommet est relié à au plus $n-1$ autres sommets, $D \subseteq \{0,\ldots,n-1\}$. Si par ailleurs les degrés sont deux à deux distincts, D est de cardinal n et donc, nécessairement, $D = \{0,\ldots,n-1\}$. Mais G ne peut contenir simultanément un sommet de degré 0 et un sommet de degré $n-1$, puisque un sommet de degré $n-1$ est relié à tous les autres sommets du graphe. Donc $|D| < n$ et deux sommets au moins ont même degré.

Exercice 3

On souhaite prélever 4 litres de liquide dans un tonneau. Pour cela, nous avons à notre disposition deux récipients (non gradués !), l'un de 5 litres, l'autre de 3 litres. Comment doit-on faire ?

Les sommets sont cette fois des couples donnant le contenu du récipient de 5 litres et celui du récipient de 3 litres. On place un arc entre deux sommets lorsqu'on peut passer d'une configuration à l'autre. On cherche alors un chemin du sommet 0,0 au sommet 4,0… La figure suivante montre un tel chemin (le graphe n'est pas représenté en entier…), la bonne méthode est de construire le graphe progressivement sommet par sommet.



Exercice 4

Soit G = (X, U) un graphe, et soit m = |U |

1. Montrez que : $\sum_{x\in X} d(x) = 2m$

2. Dans un groupe de vingt enfants, est-il possible que sept d'entre eux aient chacun exactement trois amis, neuf d'entre eux en aient exactement quatre, et quatre d'entre eux exactement cinq ?

Considérons le graphe dont les sommets sont les enfants et il y a une arête entre deux sommets si les enfants sont amis. Ce graphe a $7 + 9 + 4 = 20$ sommets, pour déterminer le nombre d'arêtes, on calcule la somme des degrés $7 * 3 + 9 * 4 + 4 * 5 = 77$ est impaire. Par la lemme de la poignée de main, ce nombre doit être égal à deux fois le nombres d'arêtes ce qui est donc impossible.

Exercice 5

On a construit des ponts entre les îles d'un archipel de sorte de pouvoir aller (directement ou indirectement) de toute île à une autre. De plus, de chaque île part un nombre pair de ponts. On a remarqué que, lorsqu'un pont est inaccessible pour cause de travaux, on peut encore aller de toute île à une autre.

1. Traduire ce problème en termes de théorie des graphes.
2. Prouver le résultat !

Indication

1. Connexité et degré.
2. Si on obtient deux composantes connexes en supprimant une arête, il risque d'y avoir un problème concernant la somme des degrés...

Corrigé

1. La propriété que l'on cherche à prouver est la suivante : dans un graphe simple connexe dont tout sommet est de degré pair, la suppression d'une arête ne détruit pas la connexité du graphe.
2. On raisonne par l'absurde, et on suppose que la suppression de l'arête AB entraîne le fait que le graphe n'est plus connexe. Alors A et B sont dans deux composantes connexes disjointes (si on peut encore aller de A à B sans l'arête AB, c'est que celle-ci ne servait à rien...). Soit G_1 la composante connexe contenant A. Alors tous les sommets de G_1 sont de degré pair, sauf A qui est de degré impair. Cela signifie que la somme des degrés des éléments de G_1 est un nombre impair, ce qui est impossible!
On peut aussi proposer une autre preuve à l'aide du critère d'Euler sur l'existence de cycles eulériens. Dans le graphe initial (avant la suppression de l'arête), comme le graphe est connexe, on peut appliquer le critère d'Euler, à savoir que le graphe contient un cycle eulérien puisque tous les sommets sont de degré pair. Si on supprime désormais l'arête AB, quitte à faire "tourner" les sommets, on peut écrire le cycle du graphe d'origine sous la forme : $A, S_1, S_2, S_3, \dots, B, A$ (car, par définition, ce cycle passe par toutes les arêtes, donc entre autres par l'arête AB, que l'on place en dernier), où $S_1, S_2, \dots, S_n$ sont les n autres sommets parcourus par ce cycle (il est possible d'avoir plusieurs fois le même). Donc en enlevant l'arête AB, il existe toujours la chaine $A, S_1, S_2, S_3, \dots, B$ qui est par définition une chaine eulérienne (elle passe par toutes les arêtes du graphe initial moins l'arête AB, qui est l'arête qui n'existe plus dans le nouveau graphe). Donc le graphe est connexe (puisqu'il admet une chaine eulérienne).