Institut Supérieur d'Informatique
et de Mathématiques de Monastir

Série N :4

Couple de variables aléatoires discrètes

Niveau : L2 INFO A.U : 2024/2025

Exercice 1 On considère deux variables aléatoires X et Y dont la loi conjointe est donnée par le tableau suivant

X \ Y	1	2	3
1	3/50	1/50	6/50
2	5/50	3/50	3/50
3	2/50	4/50	6/50
4	5/50	5/50	7/50

1. Compléter le tableau
2. Déterminer les lois marginales de X et Y. Les deux variables sont-elles indépendantes ?
3. Calculer $E(X)$, $V(X)$ puis $E(Y)$ et $V(Y)$.
4. Calculer $E(XY)$ puis $cov(X, Y)$.
5. Calculer les probabilités $P(X \leq 2, Y \geq 3)$, $P(X = Y)$ et $P(X > Y)$.
6. Déterminer la loi de la variable aléatoire $W = X - Y$. Calculer $E(W)$ et $V(W)$.

Exercice 2 Un hebdomadaire lance une campagne d'abonnement en envoyant par la poste n lettres proposant trois types d'abonnement : 1 an pour 50D, 2 ans pour 90D et 3 ans pour 125D. Les campagnes précédentes permettent de savoir que les probabilités p_i qu'une personne ainsi sollicitée s'abonne pour i années sont : $p_1 = 0.09$, $p_2 = 0.04$ et $p_3 = 0.02$. On admet que les différentes personnes sollicitées ont des comportements mutuellement indépendants.

1. Quelle est la probabilité qu'une personne sollicitée ne réponde pas ? Quelle est la loi du nombre S_n de lettres sans réponse ? Donner ES_n et $V(S_n)$.
2. ? L'éditeur se demande quel nombre minimal de lettres il doit envoyer pour qu'avec une probabilité d'au moins 0.95, le pourcentage de lettres sans réponses reste au dessous de 90%. En utilisant l'inégalité de Tchebycheff proposez lui une solution.
3. Pour $i = 1, 2, 3$, donner la loi de Y_i nombre d'abonnements pour i années reçus à la fin de la campagne. Les variables aléatoires Y_1 et Y_2 sont-elles indépendantes ?
4. Soit R_n la rentrée financière procurée par les abonnements. Que vaut $E(R_n)$?

Exercice 3 Soit $a \in]0, 1[$ et (X, Y) un couple de variables aléatoires de loi de probabilité :

1

$$P(X = k, Y = n) = \begin{cases} (1-a)^2 a^n & \text{si } 0 \leq k \leq n, \\ 0 & \text{si } k \geq n+1. \end{cases}$$

1. Calculer $P(X = Y)$.
2. Calculer les lois marginales de X et de Y.
3. Quelle est la loi conditionnele de X sachant $Y = n$?
4. Calculer la loi de la variable $Z = Y - X$.
5. Les variables X et Z sont-elles indépendantes ?

Exercice 4 Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant la même loi géométrique de paramètre $p \in]0, 1[$, c'est-à-dire, $P(X = k) = p(1-p)^{k-1}$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$. On pose $Z = \min(X, Y)$ et $q = 1 - p$.

$P(Y=k) = p(1-p)^{k-1}$

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
   (a) Montrer que $P(X \geq n) = q^{n-1}$.
   (b) Calculer $P(Z \geq n)$. Trouver et reconnaître la loi de Z en précisant le paramètre (c'est une loi géométrique)
   (c) Les deux variables X et Z sont-elle indépendantes ? (ne chercher pas la loi du couple).
2. (a) Pour chaque $m \in \mathbb{N} \backslash \{0, 1\}$ calculer la probabilité de l'événement $\{X + Y = m\}$.
   (b) Trouver toutes les valeurs possibles de Z si $X + Y = 2n + 1$, $n \in \mathbb{N}$.
   (c) Calculer $P(Z = k / X + Y = 2n + 1)$.
   (d) Identifier la loi de Z conditionnelle à $\{X + Y = 2n + 1\}$. $= \frac{1}{n}$

très important

Exercice 5 Un militant entreprend de faire signer une pétition à l'entrée d'un supermarché. Le nombre de personnes X qu'il peut ainsi contacter est une variable aléatoire de Poisson de paramètre λ. Soit p la probabilité qu'une personne ainsi sollicitée signe la pétition. On note Y le nombre total de signatures et Z le nombre total de refus de signature $(X = Y + Z)$.

nb de personne, signé, refus

1. Soient j et k deux entiers. En distinguant les cas $j > k$ et $j \leq k$, calculer $P(Y = j | X = k)$.
2. En déduire $P(X = k, Y = j)$.
3. Déterminer la loi de Y . Les variables aléatoires X et Y sont elles indépendantes ?
4. En utilisant le résultat de la question 2), déterminer la loi du couple (Y, Z).
5. Ces deux variables aléatoires sont elles indépendantes ? Commenter.

Exercice 6 Une variable aléatoire X suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$. Les valeurs que prend X sont affichées sur un écran, mais celui-ci est défaillant. Lorsque il doit afficher 0, il affiche n'importe quelle valeur entre 1 et n au hasard. Le reste de temps l'écran affiche la valeur exacte de X. Soit Y la variable aléatoire désignant le numéro affiché.

1. Donner l'ensemble A des valeurs prises par Y.
2. Montrer que pour tout $k \in A$ on a

$$P(Y = k) = P(Y = k / X = k)P(X = k) + P(Y = k / X = 0)P(X = 0).$$

3. Calculer $P(Y = k)$ pour tout $k \in A$.

4. Montrer que $E(Y) = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n}(1-p)^n + E(X)$. En déduire $E(Y)$.

5. L'écran affiche 1. Quelle est alors la probabilité que la variable X ait prit réellement la valeur 1 ?

Exercice 7 Soit $a \in]0,1[$ et $\lambda > 0$ deux réels. On considère un couple de variables aléatoires (X, Y) de loi de probabilté :

$$P(X = i, Y = j) = \begin{cases} e^{-\lambda} \frac{\lambda^j}{i!(j-i)!} a^i (1-a)^{j-i} & \text{si } i \leq j, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

1. Déterminer les lois marginales de X et de Y. Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?
2. Déterminer la loi conditionnelle de X sachant $Y = j$.
3. Calculer $cov(X, Y)$.
4. Montrer que les variables X et $Z = Y - X$ sont indépendantes et donner la loi de Z.
5. Retrouver par un calcul simple $cov(X, Y)$.
6. Calculer $V(3Y - 2X)$.

Exercice 8 Sami fait souvent du shopping pendant X heures pour acheter des livres. X est une v.a qui suit la loi uniforme sur l'ensemble $\{1, 2, 3, 4\}$. Le nombre de livres N qu'il achète est une v.a qui depends du temps X de la façon suivante

$$\mathbb{P}(N = n | X = k) = \begin{cases} \frac{1}{k}, & \text{si } 1 \leq n \leq k \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

1. Calculer $\mathbb{P}(N = 1)$, $\mathbb{P}(N = 2)$, $\mathbb{P}(N = 3)$ et $\mathbb{P}(N = 4)$. Donner $\mathbb{P}(N = k)$ pour tout entier $k > 4$.
2. Soit Y la v.a égale au nombre d'heures passé par Sami au shopping sachant qu'il a acheté deux livres. Trouver la loi de Y (ça revient à cherchér $\mathbb{P}(X = k/N = 2)$ pour $k \in Y(\Omega)$). Calculer $E(Y.)$
3. Déterminer la loi de la v.a Z égale au nombre d'heures passé par Sami au shopping sachant qu'il a acheté 2 ou 3 livres. Calculer $E(Z)$.
4. Le prix de chaque livre est une v.a de moyenne 30d. Calculer la dépense moyenne de Sami quand il va faire du shopping.

Exercice 9 On suppose que le couple de variables aléatoires discrètes (X, Y) a une loi donnée par :

$$\forall (i,j) \in \mathbb{N}^2, \qquad P(X = i, Y = j) = \frac{\alpha}{(1+i+j)!}$$

oú α est une constante strictement positive qui sera précisée ultérieurement.

1. Expliquer sans calcul pourquoi les marginales X et Y ont la même loi.

$Y \rightsquigarrow \mathcal{P}(\lambda p)$

$Z \rightsquigarrow \mathcal{P}(\lambda(1-p))$

$Y+Z \rightsquigarrow \mathcal{P}(\lambda)$ $\boxed{\text{ce qui est } \cancel{X}}$

Ex 4

$$P(X=i, Y=j) = \begin{cases} = e^{-\lambda} \dfrac{\lambda^j}{i!\,(j-i)!}(1-a)^{j-i} & \text{si } 0 \le i \le j \\ = 0 & \end{cases}$$

1) $$P(X=i) = \sum_{j=0}^{+\infty} P(X=i, Y=j)$$

$$= \sum_{j=i}^{+\infty} P(X=i \mid Y=j)$$

$$= e^{-\lambda} \sum_{j=i}^{+\infty} \frac{\lambda^j (1-a)^{j-i} a^i}{i!\,(j-i)!}$$

donc $P(X=k) \cdot P(Y=j) \neq P(X=k, Y=j)$

donc X et Y sont pas indépendant

4) $P(Y=i, Z=j) = P(Y=i, X-Y=j)$

$$= P(Y=i, X=i+j)$$

$$= \frac{e^{-\lambda}\lambda^{i+j}p^{i}(1-p)^{i}}{(j!\,(\cancel{\ \ })!\,i!)}$$

$$= e^{-\lambda}\frac{(\lambda p)^{i}}{i!}\frac{(\lambda(1-p))^{j}}{j!}$$

$$= e^{-\lambda p}\frac{(\lambda p)^{i}}{i!} \quad \frac{e^{-\lambda(1-p)}(\lambda(1-p))^{j}}{j!}$$

$P(Y=i)$ $\qquad$ $P(Z=j)$

donc

Y et Z sont indépendant

3) $$P(Y=j) = \sum_{k=0}^{+\infty} P(X=k, Y=j)$$

$$= \sum_{k=j}^{+\infty} P(X=k, Y=j)$$

$$= \frac{e^{-\lambda} p^{j}}{j!} \cdot \sum_{k=j}^{+\infty} \frac{\lambda^{k} (1-p)^{k-j}}{(k-j)!}$$

$$= \frac{e^{-\lambda} (\lambda p)^{j}}{j!} \underbrace{\sum_{j}^{+\infty} \frac{\lambda^{k-j} (1-p)^{k-j}}{(k-j)!}}_{e^{\lambda(1-p)}}$$

$$P(Y=j) = \boxed{e^{-\lambda p} \frac{(\lambda p)^{j}}{j!}}$$

donc

$$Y \sim P(\lambda p)$$

TD 4

(2ème)

Ex5

1) $P(Y=j \mid X=k) = \begin{cases} =0 & \text{si } j>k \\ \text{et si } j \leq k & \\ = C_k^j \, p^j (1-p)^{k-j} & \end{cases}$

sachant

donc

$Y|_{X=k} \sim \beta(k,p)$

2) $P(X=k \cap Y=j) = P(Y=j / X=k) \cdot P(X=k)$

intersection

$= \begin{cases} =0 & \text{si } j>k \\ \text{si } j \leq k & \\ = C_k^j \, p^j (1-p)^{k-j} \cdot e^{-\lambda} \dfrac{\lambda^k}{k!} & \end{cases}$

$= \begin{cases} =0 & \text{si } j>k \\ = e^{-\lambda} \cdot \dfrac{\lambda^k p^j (1-p)^{k-j}}{j! \, (k-j)!} & \text{si } j \leq k \end{cases}$

2. On pose $S = X + Y$. Montrer que :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \qquad P(S = k) = \frac{\alpha}{k!}.$$

3. En déduire la valeur de α et reconnaître la loi de S.

4. Calculer $P(X = 0)$. Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ?

5. Donner l'espérance de S et en déduire la valeur de $E[X]$. La même méthode peut-elle servir pour obtenir Var[X] ?

6. Calculer $P(X = Y)$ et en déduire sans calcul $P(X > Y)$.

Exercice 10 On considère une suite de n épreuves répétées indépendantes, chaque épreuve ayant k résultats possibles $r_1, \ldots, r_k$. On note p_i la probabilité de réalisation du résultat r_i lors d'une épreuve donnée. Par exemple si on lance n fois un dé, $k = 6$ et $p_i = 1/6$ pour $1 \leq i \leq 6$. Pour $1 \leq i \leq k$, notons X_i le nombre de réalisations du résultat r_i au cours des n épreuves.

1. Expliquer sans calcul pourquoi $V(X_1 + \ldots + X_k) = 0$.

2. Quelle est la loi de X_i ? Que vaut sa variance ?

3. Pour $i \neq j$, donner la loi et la variance de $X_i + X_j$.

4. En déduire $Cov(X_i, X_j)$.

5. Contrôler ce résultat en développant $V(X_1 + \ldots + X_k)$ et en utilisant la première question.

Exercice 11 Soit X une variable aléatoire discrète à valeurs dans $\mathbb{N}$. On définit la fonction génératrice des moments de X par

$$\phi_X(s) = \mathbf{E}(s^X) = \sum_{k \in X(\Omega)} s^k P(X = k).$$

1. Calculer ϕ_X pour

   i. X suit une loi de Bernoulli de paramètre $p \in [0, 1]$.

   ii. X suit une loi Binomiale de paramètres $n \in \mathbb{N}$ et $p \in [0, 1]$.

   iii. X suit une loi de Poisson de paramètre λ, $\lambda > 0$.

2. Montrer que $\mathbf{E}(X) = \phi'_X(1)$ et que $\mathbf{V}(X) = \phi''_X(1) + \phi'_X(1) - [\phi'_X(1)]^2$.

3. Montrer que pour toute n valeur possible pour X, on a

$$P(X = n) = \frac{\phi_X^{(n)}(0)}{n!}$$

   où $\phi_X^{(n)}$ désigne la dérivée n-ème de ϕ_X. Déduire que la fonction génératrice caractérise la loi de X.

4. Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes. Exprimer la fonction génératrice de $X + Y$ en fonction de celles de X et de Y.

5. Utiliser les question précédentes pour trouver la loi de la somme de deux variables X et Y indépendantes de loi de Poisson de paramètres respectifs λ_1 et λ_2.

$$= \cancel{e^{-\lambda} \frac{\lambda^j}{j!} \sum_{j=i}^{+\infty} \frac{j!}{i!(j-i)!}}$$

$$= e^{-\lambda} \frac{a^i}{i!} \lambda^i \sum_{j=i}^{+\infty} \frac{\left[\lambda(1-a)\right]^{j-i}}{(j-i)!}$$

$$= e^{-\lambda} \frac{a^i}{i!} \lambda^i \times e^{\lambda(1-a)} = e^{-\lambda a} \frac{(\lambda a)^i}{i!}$$

$$\overset{\text{donc}}{\Longrightarrow} X \sim P(\lambda a)$$

$$P(Y=j) = \sum_{i=0}^{+\infty} P(X=i, Y=j)$$

$$= \sum_{i=0}^{j} e^{-\lambda} \frac{\lambda^j}{i!(j-i)!} (1-a)^{j-i}$$

$$= e^{-\lambda} \frac{\lambda^j}{j!} \sum_{i=0}^{j} \frac{j!\, a^i (1-a)^{j-i}}{i!(j-i)!}$$

$$= e^{-\lambda} \frac{\lambda^j}{j!} \underbrace{\sum_{i=0}^{j} C_j^i a^i (1-a)^{j-i}}_{(a+1-a)^j = \boxed{1}}$$

$$= e^{-\lambda} \frac{\lambda^j}{j!}$$

donc $Y \rightsquigarrow \mathcal{P}(\lambda)$

$P(X=i) \times P(Y=j) \neq P(X=i, J=j)$

donc ils ne sont pas indépendant

2) loi X selon $Y=j \Leftrightarrow P(X \neq k / Y=j)$

or $P(X=k / Y=j) = \dfrac{P(X=k, Y=j)}{P(Y=j)}$

$= 0$ si $k > j$

si $k \leq j$

$$= \frac{\cancel{e^{-\lambda}} \frac{\cancel{\lambda^j} a^i}{i!\,(j-i)!} (1-a)^{j-i}}{\cancel{e^{-\lambda}} \frac{\cancel{\lambda^j}}{j!}}$$

$$= \boxed{C_j^k a^k (1-a)^{j-k}}$$

$X /_{Y=j} \rightsquigarrow \mathcal{B}(j, a)$

Ex 3

$$P(X=i, Y=j) = \frac{\alpha}{(1+i+j)!}, \quad \alpha > 0$$

1)

on

$$\boxed{\sum_{i=} \frac{\alpha}{(1+i+j)!} = \sum_{j} \frac{\alpha}{(1+i+j)!}}$$

donc il ont la même loi

2) $S = X + Y$

on a

$$\{S = k\} = \{X+Y=k\}$$

$$= \bigcup_{i=0}^{k} \{X=i, Y=k-i\}$$

$$P(S=k) = \sum_{i=0}^{k} P(X=i, Y=k-i)$$

$$= \sum_{i=0}^{k} \frac{\alpha}{(1+i+k-i)!}$$

5) $\mathrm{cov}(X,Y) = \mathrm{cov}(X, X+Z)$

$= E(X(X+Z)) - E(X)\cdot E(Z+X)$

$= E(X^2) + \cancel{E(XZ)} - E(X^2) - \cancel{E(X)E(Z)}$

$= E(X^2) - E^2(X) = V(X) = \boxed{\lambda a}$

6) $V(3Y - 2X) = \cancel{\ }$

$= a^2 V(Y) + b^2 V(X) - 2ab\,\mathrm{cov}(X,Y)$

$= 9\,V(Y) + 4\,V(X) - 12\,\mathrm{cov}(X,Y)$

$= 9\lambda + 4\lambda a - 12\lambda a = \boxed{9\lambda - 8a\lambda}$

donc $\operatorname{cov}(X,Y) = \lambda a(1+\lambda) - \lambda^2 a$

$$= \boxed{\lambda a}$$

4) $Z = X - Y$

$$P(X=i,\ Z=j) = P(X=i,\ Y-X=j)$$

$$= P(X=i,\ Y=i+j)$$

$$= e^{-\lambda} \frac{\lambda^{j+i}}{i!\, j!} a^i (1-a)^j$$

$$= e^{-\lambda} \cdot \frac{(\lambda a)^i}{i!} \times \frac{[\lambda(1-a)]^j}{j!}$$

$$= e^{-\lambda a} \frac{(\lambda a)^i}{i!} \times \underbrace{e^{-\lambda(1-a)} \frac{(\lambda(1-a))^j}{j!}}$$

$$= P(X=i) \times P(Z=j)$$

$$= \frac{a}{n!} \underbrace{\sum_{m=0}^{n} \frac{n!\, a^m (1-a)^{n-m}}{m!\,(n-m)!}}$$

$$(1-a+a)^n = 1$$

$$= \boxed{\frac{a}{n!}}$$

donne

$$= e^{-\lambda} \sum_{j=0}^{+\infty} j \lambda^j \frac{a}{(j-1)!}$$

$$= a e^{-\lambda} \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{j \lambda^j}{(j-1)!} = a e^{-\lambda} \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{(j+1) \lambda^{j+1}}{j!}$$

$$= a e^{-\lambda} \Big(\underbrace{\sum \frac{\lambda^j}{j!}} + \sum \frac{j \lambda^{j+1}}{j!}$$

$$= a e^{-\lambda} \cdot \lambda \left(\lambda e^{\lambda} + \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{\lambda^{j+1}}{(j-1)!} \right)$$

$$= a e^{-\lambda} \cdot \lambda \left(\lambda e^{\lambda} + \lambda^2 e^{\lambda} \right)$$

$$= \boxed{\lambda a (1+\lambda)}$$

3) $\operatorname{cov}(X,Y) = E(XY) - E(X)\cdot E(Y)$

on a $E(XY) = ?$

on a $E(XY) = \sum_{i,j \geq 0} ij \cdot P(X=i, Y=j)$

$$= \sum_{j=0}^{+\infty} \sum_{i=0}^{j} i \cdot j \cdot e^{-\lambda} \frac{\lambda^j a^i}{i!\,(j-i)!} (1-a)^{j-i}$$

$$= e^{-\lambda} \sum_{j=0}^{+\infty} \left(j \lambda^j \left(\sum_{i=0}^{j} \frac{i\, a^i (1-a)^{j-i}}{i!\,(j-i)!} \right) \right)$$

si $i=0$
$\Sigma = 0$
donc Σ
commence
pour 1
seulement

$$= e^{-\lambda} \sum_{j=0}^{+\infty} \lambda^j \cdot j \left(\sum_{i=1}^{j} \frac{a^i (1-a)^{j-i}}{(i-1)!\,(j-1)!} \right)$$

$m = i-1$

$$= e^{-\lambda} \sum_{j=0}^{+\infty} \lambda^j \cdot j \cdot \sum_{m=0}^{j-1} \frac{a^{m+1} (1-a)^{j-(m+1)}}{m!\,(j-m+1)!}$$

on a

$$\sum_{m=0}^{j-i} \frac{a^{m+1} (1-a)^{(j-1)-m}}{m!\,((j-i)-m)}$$

3) $E(X) = \sum_{k=1}^{4} k\, P(X=k)$

$= \boxed{2,72}$

$V(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = \boxed{1,2816}$

$E(Y) = \sum_{k=1}^{3} k\, P(Y=k) = \boxed{2,14}$

$V(Y) = E(Y^2) - E^2(Y) = \boxed{0,7204}$

4)

$E(XY) = \sum_{i,j} i.j.\ P(X=i, Y=j)$

$= 1 \times 1 \times \frac{3}{50} + 1 \times 2 \times \frac{1}{50} + 1 \times 3 \times \frac{6}{50} + 2 \times 1 \times \frac{1}{50} \cdots$

$= \boxed{5,82}$

$Cov(XY) = E(XY) - E(X) \cdot E(Y)$

$= \boxed{-0,0008}$

on a $P(X=3, Y=3) = 1 - \frac{44}{50} = \frac{6}{50}$

2)

$P(X=1) = \sum_{1}^{3} P(X=1; Y=k)$

$= \frac{3}{50} + \frac{1}{50} + \frac{6}{50} = \boxed{\frac{10}{50}}$

$P(X=2) = \sum_{k=1}^{3} P(X=2, Y=k)$

$= \boxed{\frac{11}{50}}$

$P(X=3) = \boxed{\frac{12}{50}}$

$P(X=4) = \boxed{\frac{17}{50}}$

X	1	2	3	4
$=k$	$\frac{10}{50}$	$\frac{11}{50}$	$\frac{12}{50}$	$\frac{17}{50}$

de meme donc $P(Y=1) = \sum_{k=1}^{4} P(X=k, Y=1)$

$= \boxed{\frac{15}{50}}$

$P(Y=2) = \boxed{\frac{13}{50}}$

$P(Y=3) = \boxed{\frac{22}{50}}$

on a

$P(X=2, Y=2) = \frac{3}{50} \neq P(X=2) \cdot P(Y=2)$

$= \frac{11}{50} \times \frac{13}{50} = 0{,}0572$

$$E(S) = E(X^2+Y) = E(X) + \underbrace{E(Y)}_{E(X)} = 2E(X)$$

donc

$$E(X) = \boxed{\frac{1}{2}}$$

5) cette méthode ne marche pas car X et Y ne sont pas indépendant

6)

$P(X=Y)$?

on a

$$\{X=Y\} = \bigcup_{i=0}^{+\infty} \{X=i, Y=i\}$$

donc

$$P(X=Y) = \sum_{i=0}^{+\infty} P(X=i, Y=i)$$

Ex 2

X \ Y	1	2	3
1	3/50	1/50	6/50
2	5/50	3/50	3/50
3	2/50	4/50	?
4	5/50	5/50	7/50

4) $P(X=0) = \sum_{j=0}^{+\infty} \left(P(X=0, Y=j) \right)$

$$= \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{\alpha}{(1+0+j)!}$$

$$= \alpha \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{1}{(1+j)!} \quad \left(\sum_{0}^{+\infty} \frac{1}{m!} - 1 \right)$$

$$\underset{m=1+j}{=} \alpha \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{1}{m!} = \alpha \left(e^{1} - \underset{\text{terme } 0}{1} \right)$$

$$= 1 - e^{-1}$$

$P(X=0) = P(Y=0) = 1 - e^{-1}$

or $\neq$

$P(X=0, Y=0) = \boxed{e^{-1}}$

donc Y et X ne sont pas independant

5) $E(S) = \boxed{1}$

$$= \sum_{i=0}^{k} \frac{\alpha}{(1+k)!} = \frac{\alpha}{(1+k)!} \times (1+k)$$

$$= \boxed{\frac{\alpha}{k!}}$$

3) $$\sum_{k=0}^{+\infty} P(S=k) = 1$$

donc

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\alpha}{k!} = 1$$

$$\alpha \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1^k}{k!} = 1 \iff \alpha e = 1$$

donc $\alpha = \boxed{e^{-1}}$

donc

$$P(S=k) = \frac{e^{-1}}{k!} \cdot 1^k$$

donc

$S \sim P(1)$

2) $m \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$

$$P(X+Y=m) = \sum_{i=1}^{m-1} P(X=i) \cdot P(Y=m-i) \quad \text{ca } X \perp\!\!\!\perp Y$$

$$= \sum_{1}^{m-1} p(1-p)^{i-1} \cdot p(1-p)^{m-i-1}$$

$$= p^2 \sum_{i=1}^{m-1} q^{m-2}$$

$$= p^2 q^{m-2} \sum_{i=1}^{m-1} 1$$

$$= p^2 (1-p)^{m-2} (m-1)$$

2) c) $$P(Z=k \mid X+Y=2n+1) = \frac{P(Z=k,\ X+Y=2n+1)}{P(X+Y=2n+1)}$$

$$= \frac{P(X=k, Y \geq k) + P(X \geq k; Y=k)}{P(X+Y=2n+1)} \qquad X \perp\!\!\!\perp Y$$

$$= \frac{P(X=k) \cdot P(Y \geq k) + P(X \geq k) \cdot P(Y=k)}{P(X+Y=2n+1)}$$

$P(Z=n) = P(Z \geq n) - P(Z \geq n+1)$

$$= (q^2)^{n-1} - \left((1-p)^2\right)^n$$

$$= (1-p)^{2n-2}\left(1-q^2\right)$$

$1-(1-q^2)$

$$= (q^2)^{n-1}(1-q^2)$$

donc

$$Z \hookrightarrow G(1-q^2)$$

3) On a $P(Z=k \mid X<k) = 0$

donc $Z \not\perp X$

càd on sait que Z et X ne sont pas indépendant

car la chose de X affect Z exp

si $Z=n$ donc $\boxed{X \geq n}$

$P(Z=n) = P(Z \geq n) - P(Z \geq n+1)$

$= (q^2)^{n-1} - ((1-p)^2)^n$

$= (1-p)^{2n-2} \left(1 - q^2\right)$

$1-(1-q^2)$

$= (q^2)^{n-1} (1-q^2)$

donc

$Z \hookrightarrow G(1-q^2)$

3) On a $P(Z = k \mid X < k) = 0$

donc $Z \not\perp X$

Raison

On sait que Z et X ne sont pas indépendant

car la chose de X affect Z exp

si $Z = n$ donc $\boxed{X \geq n}$

Ex4 $X \perp\!\!\!\perp Y$ avec $X, Y \sim \mathcal{G}(n, p)$

$P(X = k) = p(1-p)^{k-1}$

1) $P(X \geq n) = \sum_{k=n}^{+\infty} P(X = k)$

$= p \sum_{k}^{+\infty} (1-p)^{k-1}$

$= \cancel{p} \cdot \frac{(1-p)^{n-1}}{1 - (1-p)} = q^{n-1}$

b) $Z = \min(X, Y)$

$P(Z \geq n) = P(\min(X, Y) \geq n)$

$= P(X \geq n, Y \geq n)$

$X \perp\!\!\!\perp Y \quad = P(X \geq n) \cdot P(Y \geq n)$

$= \cancel{P(X \geq n)} = q^{n-1} \cdot q^{n-1} = (q^2)^{n-1}$

$$P(X \leq 2, Y \geq 3) = P(X = 1; Y = 3) + P(X = 2, Y = 3)$$

$$= \boxed{\frac{9}{50}}$$

$$P(X = Y) = \sum_{k=1}^{3} P(X = k, Y = k)$$

$$= \boxed{\frac{12}{50}}$$

$$P(X > Y) = \boxed{\frac{28}{50}}$$

6) $W = X - Y$

on

-	1	2	3	4
1	0	1	1	2
2	-1	0	1	1
3	-2	-1	0	1

$W(\Omega) = \{-2, -1, 0, 1, 2, 3\}$

7) $E(W) = E(X) - E(Y) = \boxed{0,58}$

$V(W) = E(W^2) - E^2(W) = \boxed{2,0036}$

$$= \frac{\cancel{(1-a)^2}\ \cancel{a^m}}{(m+1)\cancel{(1-a)^2}\ \cancel{a^m}}, k \leq m$$

$$= \boxed{\frac{1}{m+1}}, k < m$$

dom $X / Y = m$ suit la loi uniforme sur $[0, 1, \dots, m]$

4) $Z = Y - X$

dom

$$P(Z = m) = \sum_{k=0}^{+\infty} (1-a)^2 a^{k+m}$$

$$= (1-a)^2 a^m \sum_{k=0}^{+\infty} a^k$$

$$= \cancel{(1-a)}^2 a^m \frac{1}{\cancel{1-a}}$$

$$P(Z = m) = (1-a) a^m$$

$$= \sum_{n=k}^{+\infty} (1-a)^2 a^n$$

$$= (1-a)^2 \sum_{n=k}^{+\infty} a^n$$

$$P(X=k) = (1-a)^2 \frac{a^k}{1-a} = \boxed{(1-a)\, a^k}$$

$$P(Y=n) = \sum_{k=0}^{+\infty} \left(P(X=k ; Y=n) \right)$$

$$= \sum_{k=0}^{n} (1-a)^2 a^n$$

$$= (1-a)^2 a^n \sum_{k=0}^{n} 1$$

$$P(Y=n) = (n+1)(1-a)^2 a^n$$

3)

$$P(X=k / Y=n) = \frac{P(X=k, Y=n)}{P(Y=n)}$$

$$=$$

$\underline{\underline{\alpha}}$ $S_n \to \mathcal{B}(n, 0{,}85) \Rightarrow E[S_n] = 0{,}85n$

donc

$S_n \leq 0{,}9n \Rightarrow |S - E[S_n]| \geq 0{,}05$

avec le théorème de Tchebychev

$$P(|S_n - E(S_n)| \geq 0{,}05) \leq \frac{\mathrm{Var}(S_n)}{(0{,}05)^2}$$

???

Ex3

1) $P(X=Y) = \sum_{i=0}^{+\infty} P(X=i, Y=i)$

$$= \sum_{0}^{+\infty} (1-\alpha)^2 \alpha^n$$

$$= (1-\alpha)^2 \sum_{0}^{+\infty} \alpha^n = \frac{(1-\alpha)^{\cancel{2}}}{\cancel{1-\alpha}}$$

$$= \boxed{1-\alpha}$$

2) $P(Y=k) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(X=k, Y=n)$

$$= \cancel{\sum_{n=0}^{k} P(X=k, Y=n)} + \sum_{n=k}^{+\infty} P(Y=k, Y=n)$$

0

Les variable Y_i compte des resultat issue d'experience independante de plus chaque variable a un type spécifique independant des autres donc independant

4) donc

$$R_n = 50 Y_1 + 90 Y_2 + 120 Y_3$$

donc

$$E(R_n) = E(\dots) =$$

5) on cherche a det le nombre minimale de Lettre n qu'il faut envoyer pour que la probabilité des Lettre sans reponse soit min 0,95

donc $\boxed{P\left(\frac{S_n}{n} \leq 0{,}9\right) \geq 0{,}95}$

proportion des lettre sans reponse

ce qui donne

comme la for

$$P(S_n \leq 0{,}9\, n) \geq 0{,}95 \Rightarrow P(S_n \geq 0{,}9\, n) \leq 0{,}05$$

Ex 2

1) soit S : "Pas de Reponse"

donc $P(S) = 1 - (P_1 + P_2 + P_3) = \boxed{0,85}$

2) S_n est le nbr de lettre sans reponse parmi n lettre

donc $S_n \rightsquigarrow \beta(n, p)$

donc $P(S_n = k) = C_n^k \, p^k (1-p)^{n-k}$

$= C_n^k (0,85)^k (1 - 0,85)^{n-k}$

donc

$E(S_n) = np = \boxed{n \cdot 0,85}$

$V(S_n) = np(1-p) = \boxed{0,15 \cdot 0,85 \cdot n}$

3) La loi de Y_i, $i \in [1, 3]$

donc Y_i représente le nbr d'abonnement de type i. chaque personne repond indépendamment des autres et choisi donc $Y_i \rightsquigarrow \beta(n, P_i)$

3) on a

$$P(X=i, Z=n) = P(X=i, Y-X=n)$$

$$= P(X=i, Y=X+n)$$

$$= (1-\alpha)^2 (\alpha)^{n+i}$$

on

$$P(X=i) \times P(Z=n) = P(X=i, Z=n)$$

donc Z et X sont indépendant

Ex 8

$X \sim \mathcal{U}_{[1,2,3,4]}$ donc $P(X=k) = \frac{1}{4}$

d'après PT

$$P(N=n) = P(N=n / X=1) P(X=1) + P(N=n / X=2) P(X=2)$$

$$+ P(N=n / X=3) P(X=3) + P(N=n / X=4) P(X=4)$$

donc $P(N=1) = \frac{25}{48}$ $\quad P(N=2) = \boxed{\frac{13}{48}}$

$P(N=3) = \boxed{\frac{7}{48}}$

5) $P(X=1/Y=1) \overset{\text{Bay}}{=} \dfrac{P(Y=1/X=1)\,P(X=1)}{P(Y=1)}$

$$= \frac{P(X=1)}{P(Y=1)} = \frac{C_m^1\, p\,(1-p)^{m-1}}{C_m^1\, p\,(1-p)^{m-1} + \frac{(1-p)^m}{m}}$$

$$= \boxed{\frac{m^2 p}{m^2 p + (1-p)}}$$

Ex 6

$X \sim \mathcal{B}(n, p)$

1) $A = \{1, \dots, n\}$

2) $P(Y=k) \overset{?}{=} P(Y=k / X=k)\, P(X=k) + P(X=k / X=0)\, P(X=0)$

$= \sum_{x=0}^{n} P(Y=k / X=x)\, P(X=x)$

$= P(Y=k / X=0)\, P(X=0) + \sum_{1}^{n} P(Y=k / X=x)\, P(X=x)$

or

$Y=k / X=x \begin{cases} = (Y=k / X=k) \text{ sinon} \\ = 0 \text{ si } x \neq k \end{cases}$

donc

$P(Y=k) = P(Y=k / X=0)\, P(X=0) + P(Y=k / X=k)\, P(X=k)$

3)

ona

$P(Y=k) = P(Y=k / X=0)\, P(X=0) + \underbrace{P(Y=k / X=k)}_{\downarrow}\, P(X=k)$

$= \frac{1}{n} \cdot C_n^0\, p^0 (1-p)^n + 1 \cdot C_n^k\, p^k (1-p)^{n-k}$

$= \frac{(1-p)^n}{n} + C_n^k\, p^k (1-p)^k$

4)

$E(Y) = \sum_{k=1}^{n} k P(Y=k)$

$= \sum_{1}^{n} k \left(\frac{(1-p)^n}{n} + C_n^k (1-p)^{n-k} p^k \right)$

$= \sum_{1}^{n} k \frac{(1-p)^n}{n} + \sum_{1}^{n} k \underbrace{C_n^k (1-p)^{n-k} p^k}_{P(X=k)}$

$= \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n} (1-p)^n + E(X)$

$E(Y) = \frac{(1-p)^n}{n} \sum_{1}^{n} k + np$

$= \frac{(1-p)^n}{\cancel{n}} \cdot \frac{\cancel{n} \cdot (n+1)}{2} + np$

$= \frac{(n+1)(1-p)^n}{2} + np$

4) ⚠

on

$$E[D] = E[N \cdot C]$$

dépense — nb livre — prix du livre

or N et C sont indépendant

donc $= E(N) \cdot E[C]$

Suite de Ex 4

$$= \frac{\cancel{2}\,\cancel{p}\,\cancel{(1-p)^{k-1}}\ \cancel{p}\,\cancel{(1-p)^{2m-k}}}{p^2\,\cancel{(1-p)^{2m-1}}\ \cancel{2}m}$$

$$= \boxed{\frac{1}{m}}$$ Uniforme

2ème méthode

on peut utiliser

$P(Z=k \mid X+Y=2m+1)$

$$= \frac{P(X=k)\,P(Y=2m+1-k) + P(X=2m+1-k)\cdot P(Y=k)}{P(X+Y=2m+1)}$$

$$= \frac{2\,p(1-p)^{k-1}\ p(1-p)^{2m-k}}{p^2\,(1-p)^{2m-1}\ 2m}$$

or

$P(X=k / N=3) = P(Y=k)$

$$P(X=k \mid N=3) \overset{Bay}{=} \frac{P(N=3 \mid X=k) \cdot P(X=k)}{P(N=3)}$$

$$= \frac{\frac{1}{k} \cdot \frac{1}{4}}{\frac{7}{48}} = \frac{12}{7 \cdot k}$$

<u>donc</u>

$$P(Z=k) = \begin{cases} = \frac{12}{13k} + \frac{12}{7k} & \text{si } k \geq 3 \\ = \frac{12}{13k} & \text{si } 2 \leq k < 3 \\ = 0 & \text{si } k < 2 \text{ ou } k > 4 \end{cases}$$

?

et $Z(\Omega) = \{2, 3, 4\}$

k	2	3	4
$P(Z=k)$	$\frac{6}{13}$	$\frac{4}{13}$	$\frac{3}{13}$
	$\frac{3}{10}$?	$\frac{4}{10}$?	$\frac{3}{20}$?

$P(N=4) = \boxed{\frac{3}{48}}$

d- $\forall\, n > 4$

$\underline{\text{mq}}$ $P(N=n) = \underline{\underline{0}}$

3) D'après formule de Bayes

$$P(X=k \,/\, N=2) = \frac{P(N=2 \,/\, X=k)\; P(X=k)}{P(N=2)}$$

$$= \frac{\frac{1}{k} \cdot \frac{1}{4}}{\frac{13}{48}} = \frac{48}{4 \times 13k} \quad \forall\, \boxed{k \geqslant 2} \text{ et } k \leq 4$$

et $Y(\Omega) = \{2, 3, 4\}$

donc

k	2	3	4
$Y=k$	$\frac{6}{13}$	$\frac{4}{13}$	$\frac{3}{13}$

et $\sum_{k=2}^{4} P(Y=k) = 1$

$E(Y) = \sum_{2}^{4} k\, P(Y=k)$

$= \boxed{2{,}7692}$

3) $P(Z=k) = \dfrac{P(X=k \,/\, N=2) + P(X=k \,/\, N=3)}{P(N=2) + P(N=3)}$???