Ex4 :

$X, Y \sim \mathcal{G}(p)$.

1) a) $P(X \geq n) = \sum_{k=n}^{+\infty} P(X = k)$

$= p \sum_{k=n}^{+\infty} (1-p)^{k-1}$

$= p(1-p)^{n-1} \frac{1}{1-(1-p)} = (1-p)^{n-1} = q^{n-1}$

$Z = \min(X, Y)$

$\{Z \geq n\} = \{\min(X,Y) \geqslant n\}$

$= \{X \geqslant n, Y \geqslant n\}$

$P(Z \geqslant n) = P(X \geqslant n) P(Y \geqslant n)$

$= (q^{n-1})^2 = (q^2)^{n-1}$.

$P(Z = n)$?

$\{Z = n\} = \overbrace{\{Z \geq n\}}^{A} \setminus \overbrace{\{Z \geq n+1\}}^{B}$

$P(Z = n) = P(Z \geq n) - P(Z \geq n+1)$

$= (q^2)^{n-1} - (q^2)^n$

$= (q^2)^{n-1}(1 - q^2)$

$Z \sim \mathcal{G}(1 - q^2)$

$P(X=k, Y=2n+1-k$

$x=1)$

$$= \sum_{i=1}^{m-1} p^2 (1-p)^{i-1} (1-p)^{m-i-1}$$

$$= p^2 (1-p)^{m-2} (m-1)$$

b/ $X+Y=2n+1$

$Z(\Omega) = \{1, \dots, n\}$

$$P(Z=k / X+Y=2n+1)$$

$$= \frac{P(Z=k, X+Y=2n+1)}{P(X+Y=2n+1)}$$

Variables aléatoires continues :

I - Notion de v.a continue :

considérons les expériences suivantes :

- temps d'attente d'un patient dans une cabine médicale.
- Durée de vie d'un PC.

- $X(\Omega)$ est infini non dénombrable. ($\mathbb{R}$ ou intervalle de $\mathbb{R}$)

- il faut changer $P(X=k)$ par $P(X \in I)$;

I un intervalle.

Définition (continue) : on appelle variable aléatoire réelle toute application :

$$X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$w \longmapsto X(w)$$

où $X(\Omega)$ est un ensemble infini non dénombrable.

Définition :

Soit X une v.a continue de loi P_X

. la fonction de répartition de X, F_X, est donnée par :

$$F_X(t) = P(X \leq t) = P_X(]-\infty, t])$$

Propriétés : 1) F_X est $\nearrow$

2) F_X est continue

3) $\lim_{t \to +\infty} F_X(t) = 1$, $\lim_{t \to -\infty} F_X(t) = 0$.

4) $P(X \in [a,b]) = F_X(b) - F_X(a)$

5) Deux v.a X, Y ont la même loi ssi $F_X = F_Y$.

II Variable à densités :

Définition :

une fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est dite " densité de probabilité "

si

* $D_f = \mathbb{R}$
* $f(t) \geq 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}$
* $\int_{\mathbb{R}} f(t)\,dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt = 1$

Définition :

une variable aléatoire X est dite à densité f

(f est une densité de prob) si pour tout intervalle

I de $\mathbb{R}$ $P(X \in I) = \int_I f(x)\,dx$

Exemples : 1/ $f(t) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{si } t \in [a,b] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

- $D_f = \mathbb{R}$
- $f(x) \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$
- $\int_{\mathbb{R}} f(x)\,dx = \frac{1}{b-a} \int_a^b dx = 1$

$f(x) = \frac{1}{b-a} \mathbb{1}_{[a,b]}(x)$

$A \subseteq \mathbb{R}$; $\mathbb{1}_A : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$x \longmapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

X v.a de densité $f_X(t) = f(t) = \frac{1}{3} \mathbb{1}_{[0,3]}(t)$

$P(X \leq 2) = P(X \in]-\infty, 2]) = \int_{-\infty}^{2} f_X(t)\,dt$

$= \frac{1}{3} \int_0^2 dx = 2/3$.

$P(X = a)$

Proposition :

Soit X une v.a continue de densité f_X et soit F_X sa fonction de répartition

$F_X(t) = P(X \leq t) = \int_{-\infty}^{t} f_X(x)\,dx$

- F_X est continue dérivable sur $\mathbb{R}$

$F_X'(t) = f_X(t)$.