$B(p)$ Bernoulli. $\xrightarrow{p} 1$, $\xrightarrow{1-p} 0$

$X \sim B(n,p)$ $\quad P(X=k) = C_n^k \, p^k (1-p)^{n-k}$

4/ Loi géométrique :

Considérons une suite d'épreuves répétées indépendantes avec même probabilité de succès $p \in]0,1[$.

Soit X le rang de la 1ère réussite

- $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$
- $P(X=k) = (1-p)^{k-1} p$

$$\sum_{k\in X(\Omega)} P(X=k) = \sum_{k=1}^{+\infty} p(1-p)^{k-1}$$

$$\overset{m=k-1}{=} p\sum_{m=0}^{+\infty}(1-p)^m = p\cdot\frac{1}{1-(1-p)}$$

$$=1$$

- on dit que X suit la loi géométrique de paramètre p et on note $X \sim \mathcal{G}(p)$

Exercice

$X \sim \mathcal{G}(p)$, $n \in \mathbb{N}$

Calculer $P(X>n)$

$$\{X>n\} = \bigcup_{k=n+1}^{+\infty}\{X=k\}$$

$$P(X>n) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} P(X=k) = p\sum_{k=n+1}^{+\infty}(1-p)^{k-1}$$

$$\overset{m=k-(n+1)}{=} p\sum_{m=0}^{+\infty} q^{m+n}$$

$$= q^n \underbrace{p\sum_{m=0}^{+\infty} q^m}_{1}$$

$$= q^n$$

2ème méthode

$S_i = \{\text{succès au } i^{\text{ème}} \text{ épreuve}\}$

$P(S_i) = p \quad \forall i$

$\{X > n\} = \bigcap_{i=1}^{n} \bar{S}_i$

$P(X > n) = \prod_{i=1}^{n} P(\bar{S}_i) = q^n$

3/ Loi de Poisson :

On dit qu'une v.a X suit la loi de Poisson de paramètre λ ; $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$, si :

- $X(\Omega) = \mathbb{N}$
- $P(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$; $\forall k \in \mathbb{N}$

On note $X \rightsquigarrow \mathcal{P}(\lambda)$.

$$\sum_{k\in X(\Omega)} P(X=k) = \sum_{k=0}^{+\infty} e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{\lambda^k}{k!} = 1$$

<u>Théorème</u> : Soit (p_n) une suite réelle de $[0,1]$

t.q $np_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \lambda > 0$.

<u>Alors</u> $\forall k\in\mathbb{N}$, $C_n^k\, p_n^k (1-p_n)^{n-k} \xrightarrow[n\to+\infty]{} e^{-\lambda}\dfrac{\lambda^k}{k!}$

<u>Application</u> : lorsque n est grand $(n>30)$ et np est petit (np

on peut remplacer la loi Binomiale $\mathcal{B}(n,p)$ par la loi de Poisson

$\mathcal{P}(\lambda)$ où $\lambda = np$.

<u>Exemple</u> : le président d'un bureau de vote est né le 1er avril.

Il décide de noter le nombre X de personnes ayant leur anniversaire

le même jour que lui parmi les 500 premiers électeurs.

$X \sim \mathcal{B}\left(500\,;\,\frac{1}{365}\right)$

Vecteurs aléatoires discrets.

k	0	1	2	3	4	5
$\mathcal{B}(n,p)$	0,25937	0,3484	0,2388			0,0372
$\mathcal{P}(\lambda = \frac{500}{365})$	0,2541	0,3481	0,2385			0,0373

I - Introduction :

Vecteurs aléatoires discrets.

I - Introduction :

Pour modéliser un phénomène aléatoire, parfois une seule v.a ne suffit pas et il faut ajouter d'autres v.a.

Exemple : Une urne contient 7 boules : 2 bleues, 3 blanches et 2 rouges.
On en prélève 3 boules d'un coup. On note respectivement X et Y les nombres des boules bleues et blanches dans l'échantillon tiré. Calculer les probabilités suivantes : $P(X > Y)$; $P(X = Y)$; $P(2$ rou

$\#\Omega = C_7^3 = 35$

$X(\Omega) = \{0, 1, 2\}$

$Y(\Omega) = \{0, 1, 2, 3\}$

$$P(X=i \text{ et } Y=j) = \begin{cases} \dfrac{C_2^i \, C_3^j \, C_2^{3-(i+j)}}{35} & \text{si } 0 \leq i+j \leq 3 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$X=i$ \ $Y=j$	0	1	2	3	$P(X=i)$
0	0	$\frac{3}{35}$	$6/35$	$\frac{1}{35}$	$\frac{10}{35}$
1	$2/35$	$12/35$	$6/35$	0	$\frac{20}{35}$
2	$\frac{2}{35}$	$\frac{3}{35}$	0	0	$\frac{5}{35}$
$P(Y=j)$	$4/35$	$\frac{18}{35}$	$\frac{12}{35}$	$\frac{1}{35}$	1

$P(X=Y) = \frac{12}{35}$

$P(X>Y) = \frac{7}{35}$

$P(1 \text{ Rouge}) = P(X+Y=1) = \frac{5}{35}$

$P(X=0) \overset{FPT}{=} P(X=0 \mid Y=0)P(Y=0) + P(X=0 \mid Y=1)P(Y=1) + P(X=0 \mid Y=2)P($

$= P(X=0, Y=0) + P(X=0, Y=1) + P(X=0, Y=2)$