Institut Supérieur d'Informatique
et de Mathématiques de Monastir

Série N :5
Variables aléatoires continues

Niveau : L2 INFO A.U : 2024/2025

Exercice 1 Soit X une variable aléatoire de densité :

$$f(x) = \frac{2x}{\theta^2}\mathbf{1}_{[0,\theta]}(\mathbf{x}).$$

1. Calculer $E(X)$, $E(X^2)$ et $Var(X)$ en fonction de θ.
2. Calculer $P(X < \theta/4)$.

Exercice 2 La durée de vie d'un appareil est une v.a. Y mesurée en années dont la densité est $f(t) = ct\exp(-t)\mathbf{1}_{]0,+\infty[}(t)$.

1. Calculer la valeur de c.
2. Calculer l'espérance et la variance de Y.
3. Quelle est la probabilité que Y soit inférieur à 4 ans sachant qu'elle dépasse 1 an ?
4. Soit Z la v.a.r. telle que $Z = \sqrt{Y}$. Donner la densité de Z.

Exercice 3 Soit X une variable aléatoire suivant la loi unforme sur $]-1,1[$, c-à-d, la densité de X est

$$f_X(t) = \frac{1}{2}\mathbf{1}_{]-1,1[}(\mathbf{t}).$$

Soit la variable $Y = \exp(X)$.

1. Déterminer une densité de Y.
2. Calculer $E(Y)$ et $Var(Y)$.

Exercice 4 Soit U une v.a de loi uniforme sur $]0,1[$ et soit λ un réel strictement positif. Trouver la densité de la v.a $X = -\frac{1}{\lambda}\log(U)$.

Exercice 5 Soit X une v.a.r. absolument continue et $Y = X^2$. Calculer une densité de Y dans les cas suivants :

1. X suit une loi uniforme sur $[-1,1]$.
2. X suit une loi normale de paramètres m et σ.

Exercice 6 Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes. X suit la loi exponentielle de paramètre λ ($\lambda > 0$) et Y suit la loi exponentielle de paramètre μ ($\mu > 0$). Soit $U = \min(X,Y)$. Trouver la loi de U.

$X \sim \mathcal{E}(\lambda)$
$f(x) = \lambda e^{-\lambda x}\mathbb{1}_{[0,+\infty[}(x)$

$Y \sim \mathcal{E}(\mu)$
$f(x) = \mu e^{-\mu x}\mathbb{1}_{[0,+\infty[}(x)$

Exercice 7 1. Soit X une variable aléatoire suivant la loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$, c-à-d, la densité de X est donnée par

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x} \mathbf{1}_{]0,+\infty[}(x).$$

(a) Pour tout réel t, calculer $P(X > t)$ (distinguer deux cas : $t \leq 0$ et $t > 0$).

(b) Soit $t > s \geq 0$. Montrer que $P(X > t / X \geq s) = P(X \geq t - s)$.

2. Soit la variable Y de même loi que X et est indépendante avec X. On considère la variable $Z = \min(X, Y)$.

(a) Soit t un réel quelconque. Écrire l'événement $(Z \geq t)$ en fonction des événements $(X \geq t)$ et $(Y \geq t)$ puis calculer sa probabilité.

(b) En déduire que Z suit la loi exponentielle de paramètre 2λ.

3. Un système est composé de deux composants indépendants. La durée de vie (en secondes) du premier composant est la variable aléatoire X et celle du deuxième composant est la variable aléatoire Y. Soit U la durée de vie du système.

(a) Supposons que le système tombe en panne si l'un des deux composants tombe en panne. Exprimer U en fonction de X et Y puis calculer $P(U \leq t)$.

(b) Supposons maintenant que le système tombe en panne si et seulement si les deux composants tombent en panne. Calculer $P(U \leq t)$.

Exercice 8 Une usine utilise une embouteilleuse pour remplir des bouteilles de 1 litre. Par suite de variations aléatoires dans le mécanisme, le contenue d'une bouteille est une variable aléatoire X de loi normale de moyenne m et de variance $(1.5)^2$ cl (centilitre).

1. L'embouteilleuse est réglée sur $m = 101$ cl.

(a) Quelle est la probabilité que le contenue d'une bouteille soit inférieur à 1 litre ?

(b) Quelle est la probabilité que le contenue d'une bouteille soit supérieur à 103 cl ?

2. Trouver m pour qu'au moins 95% des bouteilles contiennent 99 cl ou plus ?

Exercice 9 Une équipe de football utilise des ballons dont la durée de vie suit une loi gaussienne de moyenne 75 jours et variance $(10)^2$.

1. Donner la probabilité qu'un ballon soit encore utilisable aprés 90 jours.

2. On suppose qu'une saison de foot est de 90 jours, et que la direction mette à la disposition de l'équipe 100 ballons. On considère les variables aléatoires Y_i, $i = 1 \ldots 100$ vérifiant $Y_i = 1$ si la $_i$ème ballon à une durée de vie plus que 90 jours et $Y_i = 0$ sinon.

(a) Préciser la loi de chaque Y_i ansi que la loi de la variable aléatoire $Y = \sum_{i=1}^{100} Y_i$.

(b) En utilisant l'approximation de Gauss, donner la propabilité qu'à la fin de la saison il y ait plus de 10 ballons encore utilisables.

Exercice 10 La durée de vie d'un appareil électronique est distribuée normalement avec une moyenne 83 jours et une variance $(10)^2$ jours. Le fabriquant offre une période de garantie de 75 jours. Chaque pièce retournée engendre une perte de 40 DT et chaque pièce non retournée engendre un gain de 40 DT.

1. Quelle est la probabilité de retourenement d'une pièce ?
2. Soit Y la variable aléatoire désignant le gain par pièce, Y prend donc deux valeurs 40 et -40. Trouver la loi de probabilité de Y. Quel est le gain espéré par pièce ?
3. Quelle doit être la période de garantie du fabriquant s'il veut au maximum 5 pour cent de retour et quel est le gain espéré dans ce cas ?
4. On prénds un échantillon de 100 appareils. A chaque appareil on associe une variable aléatoire Z_i, $i = 1, \ldots, 100$ qui prends la valeure 1 si la pièce est retournée et 0 sinon. Soit $Z = \sum_{i=1}^{100} Z_i$.
   (a) Que répresente la variable Z ? Trouver sa loi de probabilité.
   (b) En utilisant l'approximation de Gauss, donner la probabilité qu'à la fin de la période de garantie il y aura moins de 1/5 de l'échantillon retournés.

Exercice 11 La taille en centimètre des femmes agées est modélisée par une variable aléatoire X_1 suivant la loi normale de paramètres $m_1 = 165cm$ et $\sigma_1 = 6cm$, et celle des hommes agés par une variable X_2 suivant la loi normale de paramètres $m_2 = 175cm$ et $\sigma_2 = 11cm$.

1. Quelle est la probabilité qu'une femme choisie au hasard mesure entre $153cm$ et $177cm$?
2. Sachant qu'un homme chosi au hasard mesure plus que $180cm$, qu'elle est la probabilité qu'il mesure moins que $190cm$.
3. On sait que dans la population des personnes agées, la pourcentage des femmes est 52%.
   (a) Quelle est probabilité qu'une personne choisie au hasard (homme ou femme) mesure plus de $170cm$?
   (b) On choisit au hasard une personne. Elle mesure plus de $170cm$. Quelle est la probabilité que cette personne soit une femme ?

Exercice 12 Dans un lot de pommes de terre, on admet que le poids en grammes d'une pièce est une variable aléatoire X qui suit une loi normale de moyenne m et de variance σ^2. On admet que 20% des pièces pèsent plus de 200 grammes et que 1% des pièces pèsent plus que 300 grammes.

1. Montrer que $m \simeq 143,34$ et $\sigma \simeq 67,36$.
2. Quel est la probabilité des pièces dont le poids est compris entre 100 et 147 grammes ?
3. On tire au hasard, avec remise, 10 pièces du lot. On désigne par Y le nombre des pièces de poids supérieure à 200 grammes. Donner la loi de Y en précisant les paramètres.
4. On considère un échantillon de n pièces de pommes de terre de poids respectifs $X_1, \ldots, X_n$ (indépendantes et de même loi que X). On définit le poids moyen de l'échantillon par $\overline{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$.

(a) Trouver $E(\overline{X}_n)$ et $V(\overline{X}_n)$.

(b) Donner la loi de $\overline{X}_n$ en précisant les paramètres.

(c) Déterminer, ~~en utilisant l'approximation de Gauss~~, un entier n tel que

$$P(|\overline{X}_n - m| \leq 10) \geq 0.99.$$

Exercice 13 On suppose que la distribution des quotients intellectuels des individus dans une population d'adultes est modélisée par une loi normale de moyenne 100 et de variance $(16)^2$.

1. Dans cette population, quelle est la proportion d'individus ayant un quotient intellectuel entre 92 et 112 ?

2. On choisit un échantillon de n individus au hasard. A chaque individu on associe une variable aléatoire Z_i, $i = 1, \ldots, n$, qui prends la valeur 1 si son quotient intellectuel dépasse 116 et 0 sinon. Considérons la variable aléatoire $N = \sum_{i=1}^{n} Z_i$.

   (a) Préciser la loi de N.

   (b) On prends $n = 25$. Quelle est la probabilité qu'il y ait aucune personne avec un quotient intellectuel supérieure à 116 ? Quelle est la probabilité qu'il y ait au moins une personne ?

   (c) On prends $n = 100$. En utilisant l'approximation de Gauss, donner la probabilité qu'il y ait plus de 20 individus, de l'échantillon, de quotient intellectuel supérieure à 116.

3. On choisit 36 personnes au hasard. Soit la variable aléatoire $V = \frac{1}{36}\sum_{i=1}^{36} X_i$, où pour tout $i = 1 \ldots 36$, la variable X_i suit la loi normale de moyenne 100 et de variance $(16)^2$. La variable V est donc la moyenne empirique des quotients intellectuels de ces 36 individus.

   (a) Préciser la loi de V.

   (b) Quelle est la probabilité que la moyennes empirique des quotients intellectuels de ces 36 personnes soit supérieure à 104 ?

3 Fonction de répartition de la loi Normale centrée réduite

- Si $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, alors $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{1}{2}(\frac{x-\mu}{\sigma})^2\right)$, $\mathbb{E}(X) = \mu$ et $\mathrm{Var}(X) = \sigma^2$.
- On note quelquefois U la v. a. gaussienne centrée-réduite et Φ sa fonction de répartition : $U \sim \mathcal{N}(0, 1)$.
- La table qui suit donne les valeurs de la fonction de répartition empirique de la loi normale centrée réduite $\Phi(x)$ pour les valeurs de x positives.
- Pour les valeurs négatives de x, on utilisera la relation $\Phi(x) = 1 - \Phi(-x)$.

$\Phi(x) = \mathbb{P}(X \leq x)$ où $X \sim \mathcal{N}(0, 1)$ et $x = x_1 + x_2$

	x_2									
x_1	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.00	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.10	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.20	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.30	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.40	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.50	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.60	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.70	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.80	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.90	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.00	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.10	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.20	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.30	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.40	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.50	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.60	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.70	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.80	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.90	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.00	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.10	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.20	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.30	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.40	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.50	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.60	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.70	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.80	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.90	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.00	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.10	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.20	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.30	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.40	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.50	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998
3.60	0.9998	0.9998	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.70	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.80	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.90	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1

Exp: $\Phi(1) = 0,8413$

$\Phi(1,02) = \Phi(1 + 0,02) = 0,8461$

$\Phi(1,54) = \Phi(1,5 + 0,04) = 0,9418$

Rq: $\Phi(-1,54) = 1 - \Phi(1,54)$

$= 1,0 - 0,9413$

réaprogm

fonctions

4 Fractiles de la loi Normale centrée réduite

Pour les valeurs de $\alpha < 0.5$, on utilisera la relation $u_\alpha = -u_{1-\alpha}$

$u_\alpha = \Phi^{-1}(\alpha)$ où $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$

	α_2									
α_1	0.000	0.001	0.002	0.003	0.004	0.005	0.006	0.007	0.008	0.009
0.500	0.0000	0.0025	0.0050	0.0075	0.0100	0.0125	0.0150	0.0175	0.0201	0.0226
0.510	0.0251	0.0276	0.0301	0.0326	0.0351	0.0376	0.0401	0.0426	0.0451	0.0476
0.520	0.0502	0.0527	0.0552	0.0577	0.0602	0.0627	0.0652	0.0677	0.0702	0.0728
0.530	0.0753	0.0778	0.0803	0.0828	0.0853	0.0878	0.0904	0.0929	0.0954	0.0979
0.540	0.1004	0.1030	0.1055	0.1080	0.1105	0.1130	0.1156	0.1181	0.1206	0.1231
0.550	0.1257	0.1282	0.1307	0.1332	0.1358	0.1383	0.1408	0.1434	0.1459	0.1484
0.560	0.1510	0.1535	0.1560	0.1586	0.1611	0.1637	0.1662	0.1687	0.1713	0.1738
0.570	0.1764	0.1789	0.1815	0.1840	0.1866	0.1891	0.1917	0.1942	0.1968	0.1993
0.580	0.2019	0.2045	0.2070	0.2096	0.2121	0.2147	0.2173	0.2198	0.2224	0.2250
0.590	0.2275	0.2301	0.2327	0.2353	0.2378	0.2404	0.2430	0.2456	0.2482	0.2508
0.600	0.2533	0.2559	0.2585	0.2611	0.2637	0.2663	0.2689	0.2715	0.2741	0.2767
0.610	0.2793	0.2819	0.2845	0.2871	0.2898	0.2924	0.2950	0.2976	0.3002	0.3029
0.620	0.3055	0.3081	0.3107	0.3134	0.3160	0.3186	0.3213	0.3239	0.3266	0.3292
0.630	0.3319	0.3345	0.3372	0.3398	0.3425	0.3451	0.3478	0.3505	0.3531	0.3558
0.640	0.3585	0.3611	0.3638	0.3665	0.3692	0.3719	0.3745	0.3772	0.3799	0.3826
0.650	0.3853	0.3880	0.3907	0.3934	0.3961	0.3989	0.4016	0.4043	0.4070	0.4097
0.660	0.4125	0.4152	0.4179	0.4207	0.4234	0.4261	0.4289	0.4316	0.4344	0.4372
0.670	0.4399	0.4427	0.4454	0.4482	0.4510	0.4538	0.4565	0.4593	0.4621	0.4649
0.680	0.4677	0.4705	0.4733	0.4761	0.4789	0.4817	0.4845	0.4874	0.4902	0.4930
0.690	0.4959	0.4987	0.5015	0.5044	0.5072	0.5101	0.5129	0.5158	0.5187	0.5215
0.700	0.5244	0.5273	0.5302	0.5330	0.5359	0.5388	0.5417	0.5446	0.5476	0.5505
0.710	0.5534	0.5563	0.5592	0.5622	0.5651	0.5681	0.5710	0.5740	0.5769	0.5799
0.720	0.5828	0.5858	0.5888	0.5918	0.5948	0.5978	0.6008	0.6038	0.6068	0.6098
0.730	0.6128	0.6158	0.6189	0.6219	0.6250	0.6280	0.6311	0.6341	0.6372	0.6403
0.740	0.6433	0.6464	0.6495	0.6526	0.6557	0.6588	0.6620	0.6651	0.6682	0.6713
0.750	0.6745	0.6776	0.6808	0.6840	0.6871	0.6903	0.6935	0.6967	0.6999	0.7031
0.760	0.7063	0.7095	0.7128	0.7160	0.7192	0.7225	0.7257	0.7290	0.7323	0.7356
0.770	0.7388	0.7421	0.7454	0.7488	0.7521	0.7554	0.7588	0.7621	0.7655	0.7688
0.780	0.7722	0.7756	0.7790	0.7824	0.7858	0.7892	0.7926	0.7961	0.7995	0.8030
0.790	0.8064	0.8099	0.8134	0.8169	0.8204	0.8239	0.8274	0.8310	0.8345	0.8381
0.800	0.8416	0.8452	0.8488	0.8524	0.8560	0.8596	0.8633	0.8669	0.8705	0.8742
0.810	0.8779	0.8816	0.8853	0.8890	0.8927	0.8965	0.9002	0.9040	0.9078	0.9116
0.820	0.9154	0.9192	0.9230	0.9269	0.9307	0.9346	0.9385	0.9424	0.9463	0.9502
0.830	0.9542	0.9581	0.9621	0.9661	0.9701	0.9741	0.9782	0.9822	0.9863	0.9904
0.840	0.9945	0.9986	1.0027	1.0069	1.0110	1.0152	1.0194	1.0237	1.0279	1.0322
0.850	1.0364	1.0407	1.0450	1.0494	1.0537	1.0581	1.0625	1.0669	1.0714	1.0758
0.860	1.0803	1.0848	1.0893	1.0939	1.0985	1.1031	1.1077	1.1123	1.1170	1.1217
0.870	1.1264	1.1311	1.1359	1.1407	1.1455	1.1503	1.1552	1.1601	1.1650	1.1700
0.880	1.1750	1.1800	1.1850	1.1901	1.1952	1.2004	1.2055	1.2107	1.2160	1.2212
0.890	1.2265	1.2319	1.2372	1.2426	1.2481	1.2536	1.2591	1.2646	1.2702	1.2759
0.900	1.2816	1.2873	1.2930	1.2988	1.3047	1.3106	1.3165	1.3225	1.3285	1.3346
0.910	1.3408	1.3469	1.3532	1.3595	1.3658	1.3722	1.3787	1.3852	1.3917	1.3984
0.920	1.4051	1.4118	1.4187	1.4255	1.4325	1.4395	1.4466	1.4538	1.4611	1.4684
0.930	1.4758	1.4833	1.4909	1.4985	1.5063	1.5141	1.5220	1.5301	1.5382	1.5464
0.940	1.5548	1.5632	1.5718	1.5805	1.5893	1.5982	1.6072	1.6164	1.6258	1.6352
0.950	1.6449	1.6546	1.6646	1.6747	1.6849	1.6954	1.7060	1.7169	1.7279	1.7392
0.960	1.7507	1.7624	1.7744	1.7866	1.7991	1.8119	1.8250	1.8384	1.8522	1.8663
0.970	1.8808	1.8957	1.9110	1.9268	1.9431	1.9600	1.9774	1.9954	2.0141	2.0335
0.980	2.0537	2.0749	2.0969	2.1201	2.1444	2.1701	2.1973	2.2262	2.2571	2.2904
0.990	2.3263	2.3656	2.4089	2.4573	2.5121	2.5758	2.6521	2.7478	2.8782	3.0902

⊛ Serie 5 ⊛

V.a, c

Ex1

$$f(x) = \frac{2x}{\theta^2} 1_{[0,\theta]}(x) = \begin{cases} \frac{2x}{\theta^2} & \text{si } x \in [0,\theta] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1)

$$E(X) = \int_{\mathbb{R}} x f_X(x)\, dx$$

$$= \int_0^\theta x \frac{2x}{\theta^2} dx$$

$$= \frac{2}{\theta^2} \int_0^\theta x^2 dx = \frac{2}{\theta^2} \left[\frac{1}{3} x^3\right]_0^\theta$$

$$= \frac{2}{\theta} \left[\frac{1}{3}\theta^3 - \frac{1}{3} 0\right]$$

$$= \boxed{\frac{2\theta}{3}}$$

$$E(x^2) = \int_{\mathbb{R}} x^2 f_X(x)\, dx$$

$$= \frac{2}{\theta^2} \int_0^\theta x^3 dx = \frac{2}{\theta^2} \left[\frac{1}{4} x^4\right]_0^\theta$$

$$= \frac{2}{4}\theta^2 = \boxed{\frac{1}{2}\theta^2}$$

Ex 4 $U \sim \mathcal{U}_{[0;1]}$

$$f_U(x) = 1 \times \mathbb{1}_{]0;1[}$$

$\lambda > 0$ $\quad X = -\frac{1}{\lambda} \log(U)$

$$F_X(t) = P(X \leq t)$$

$$= P\left(-\frac{1}{\lambda} \log(U) \leq t\right)$$

$$= P\left(\ln(U) \geq -\lambda t\right)$$

$$= P\left(U \geq e^{-\lambda t}\right)$$

$$= \int_{e^{-\lambda t}}^{+\infty} f_U(x)\, dx = \int_{e^{-\lambda t}}^{+\infty} \mathbb{1}_{]0,1[}(x)\, dx$$

si $t \leq 0$, $e^{-\lambda t} > 1$ donc $F_X(t) = 0$

si $t > 0$ $e^{-\lambda t} < 1$ donc $F_X(t) = \int_{e^{-\lambda t}}^{1} dx$

$$= \boxed{1 - e^{-\lambda t}}$$

$$= \int_0^{t^2} x e^{-x} dx$$

$$u = x \rightarrow u' = 1$$

$$v' = e^{-x} \rightarrow v = -e^{-x}$$

$$= \left[-x e^{-x}\right]_0^{t^2} + \int_0^{t^2} e^{-x} dx$$

$$= -t^2 e^{-t^2} + \left[-e^{-x}\right]_0^{t^2}$$

$$= -t^2 e^{-t^2} - e^{-t^2} + 1$$

<u>donc</u>

$$f_Z(x) = \left(F_Z(x)\right)'$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{si } t \leq 0 \\ \cancel{-2t e^{-t^2}} + 2t^3 e^{-t^2} + \cancel{2t e^{-t^2}} \end{cases}$$

$$= 2t^3 e^{-t^2} \text{ si } t > 0$$

$$f_Z(x) = 2x^3 e^{-x^2} \mathbb{1}_{]0,+\infty[}(x)$$

3) $P(Y \leq 4 / Y > 1) = \dfrac{P(1 \leq Y \leq 4)}{P(Y \geq 1)}$

et

$P(1 \leq Y \leq 4) = \int_1^4 f_Y(t)\, dt$

$= \int_1^4 t e^{-t}\, dt$ ... à calculer

$P(Y \geq 1) = \int_1^{+\infty} f_Y(t)\, dt = \int_1^{+\infty} t e^{-t}\, dt$ ... à calculer

4) Z v.a, $Z = \sqrt{Y}$ Chercher la densité

seul méthode

1) Cherche $F_Z(t)$

$F_Z(t) = P(Z \leq t)$

$= P(\sqrt{Y} \leq t) = 0$ si $t \leq 0$

$t > 0$

$F_Z(t) = P(\sqrt{Y} \leq t) = P(Y \leq t^2)$

$= \int_{-\infty}^{t^2} f_Y(x)\, dx$

$$= c \underbrace{\int_0^{+\infty} e^{-t}\,dt}_{\left[-e^{-t}\right]_0^{+\infty}} = \boxed{c} = 1$$

Donc $\boxed{c = 1}$

e) $E(Y) = \int_{\mathbb{R}} t\, f_Y(t)\,dt$

$$= \int_0^{+\infty} t^2 e^{-t}\,dt$$

On

$u = t^2 \Rightarrow u' = 2t$

$v' = e^{-t} \Rightarrow v = -e^{-t}$

$$E(Y) = \underbrace{\left[-t^2 e^{-t}\right]_0^{+\infty}}_{0} + \underbrace{\int_0^{+\infty} 2t e^{-t}\,dt}$$

$$= 2 \cdot \underbrace{\int_0^{+\infty} t e^{-t}\,dt}_{1} = 2$$

Exe

$$f(t) = c \times t \times \exp(-t)\, 1_{]0;+\infty[}(t)$$

$$= \begin{cases} c.t.e^{-t} & \text{si } t>0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1) on $f(t)$ est une densité

donc $\int_{\mathbb{R}} f(t)\,dt = 1$

$$\Leftrightarrow \int_0^{+\infty} c.t.e^{-t}\,dt = 1$$

$$\Leftrightarrow c\int_0^{+\infty} te^{-t}\,dt = 1$$

$$\overset{IPP}{=} \quad u = t \Rightarrow u' = 1$$

$$v' = e^{-t} \Rightarrow v = -e^{-t}$$

donc

$$\Leftrightarrow c.\left(\left[-te^{-t}\right]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} -e^{-t}\,dt\right)$$

$$\Leftrightarrow c\left(\underbrace{\left[-te^{-t}\right]_0^{+\infty}}_{0} + \int_0^{+\infty} e^{-t}\,dt\right)$$

$$V(X) = E(X^2) - (E(X))^2$$

$$= \frac{1}{2}\theta^2 - \left(\frac{2}{3}\theta\right)^2 = \frac{\theta^2}{2} - \frac{4}{9}\theta^2$$

$$= \boxed{\frac{\theta^2}{18}}$$

2)

$$P(X < \theta/4) = P(X \in]-\infty ; \theta/4[)$$

$$= \int_{-\infty}^{\theta/4} f_X(x)\,dx$$

$$= \int_0^{\theta/4} \frac{2x}{\theta^2}\,dx = \frac{2}{\theta^2}\int_0^{\theta/4} x\,dx$$

$$= \frac{2}{\theta^2}\left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^{\frac{\theta}{4}}$$

$$= \boxed{1/16}$$

$$\Leftrightarrow \Phi\left(\frac{10}{2/\sqrt{n}}\right) - \Phi\left(\frac{-10}{2/\sqrt{n}}\right) \geq 0{,}99$$

$$\Leftrightarrow 2\,\Phi\left(\frac{10}{2/\sqrt{n}}\right) - 1 \geq 0{,}99$$

$$\Leftrightarrow \Phi\left(\frac{10}{2/\sqrt{n}}\right) \geq \frac{1{,}99}{2} = 0{,}995$$

$$\Leftrightarrow \frac{10}{2/\sqrt{n}} \geq \Phi^{-1}(0{,}995) = 2{,}575$$

$$\Leftrightarrow \frac{10\sqrt{n}}{2} \geq 2{,}578$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{n} \geq \frac{2{,}575 \times 2}{10} = (2{,}575 \times 0{,}2)$$

dom

$$n = (\quad)^2 \boxed{\simeq 301}$$

4) $\bar{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$

donc $E(\bar{X}_n) = \frac{1}{n}\sum_{1}^{n} E(X) = \frac{m}{n} \cdot n = \boxed{m}$

$V(\bar{X}_n) = \boxed{\frac{\sigma^2}{n}}$

5) ⚠ on a $X_i \sim N(m, \sigma)$ et les X_i sont indépendants

donc toute combinaison linéaire de X reste un loi Normale

donc $\bar{X}_n \sim N\left(m, \frac{\sigma^2}{n}\right)$

espérance — variance

6) n ?

on a $P(|\bar{X}_n - m| \leq 10) \geq 0{,}99$

$\Rightarrow P(-10 \leq \bar{X}_n - m \leq 10) \geq 0{,}99$

$\Leftrightarrow P\left(\frac{-10}{\sigma/\sqrt{n}} \leq \frac{\bar{X}_n - m}{\sigma/\sqrt{n}} \leq \frac{10}{\sigma/\sqrt{n}}\right) \geq 0{,}99$

2) $Z = \min(X, Y)$ et $Y \sim \mathcal{E}(\lambda)$

a) $Z \sim \mathcal{E}(2\lambda)$ d'après le ex 6 $\left\{ \begin{array}{l} \text{a et b} \end{array} \right.$

3) ons $U \sim \min(X, Y)$

dom $U \sim \mathcal{E}(2\lambda)$

dons $\boxed{P(U \leq t) = 1 - e^{-2\lambda t} \mathbb{1}_{]0;+\infty[}(t)}$

4) ons $U = \max(X, Y)$

$$\underbrace{P(U \leq t)}_{P(X \leq t, Y \leq t)} = P(X \leq t) \cdot P(Y \leq t) \quad X \perp\!\!\!\perp Y$$

$$= \left[P(X \leq t)\right]^2 =$$

Ex 7

$X \sim \mathcal{E}(\lambda)$ avec $f(x) = \lambda e^{-\lambda x} \mathbb{1}_{]0;+\infty[}(x)$

1) $P(X \geq t) = e^{-\lambda t} \mathbb{1}_{]0;+\infty[}(t)$

2) $t > 0$, $s > 0$

$$P(X > t / X \geq s) = \frac{P(\overbrace{X > t, X \geq s}^{t \geq s > 0})}{P(X \geq s)}$$

$$= \frac{P(X > t)}{P(X \geq s)} = \frac{e^{-\lambda t}}{e^{-\lambda s}}$$

$$= e^{-\lambda(t-s)}$$

$$= \boxed{P(X \geq t-s)}$$

donc

$$f_X(t) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda t} & \text{si } t > 0 \\ 0 & \text{si } t \leq 0 \end{cases}$$

$$= \lambda e^{-\lambda t} \mathbb{1}_{]0;+\infty[}(t)$$

$X \sim \mathcal{E}(\lambda)$

$$\Rightarrow \mathbb{P}\left(\frac{X-m}{\sigma} \geq \frac{200-m}{\sigma}\right) = 0{,}2$$

$$1 - \Phi\left(\frac{200-m}{\sigma}\right) = 0{,}2$$

$$\Phi\left(\frac{200-m}{\sigma}\right) = 0{,}8$$

$$\boxed{\frac{200-m}{\sigma} = \Phi^{-1}(0{,}8) = 0{,}842}$$

$$\Rightarrow \mathbb{P}(X \geq 300) = 0{,}01$$

$$1 - \Phi\left(\frac{300-m}{\sigma}\right) = 0{,}01$$

$$\Phi\left(\frac{300-m}{\sigma}\right) = 0{,}99$$

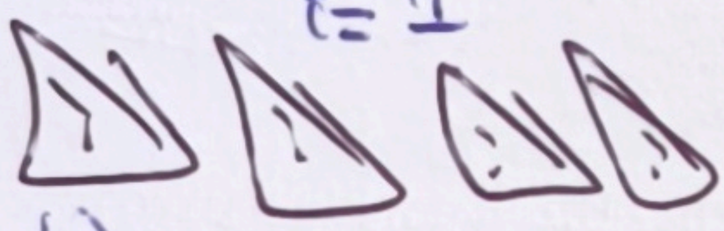
$$\boxed{\frac{300-m}{\sigma} = \Phi^{-1}(0{,}99) = 2{,}326}$$

2) on $Y_i(\Omega) = \{0, 1\}$ $\forall i$

donc

$$Y_i \sim \mathcal{B}(p = 0{,}0668)$$

et $Y = \sum_{i=1}^{100} Y_i$ donc $Y \sim \mathcal{B}(100, 0{,}0668)$



b) $P(Y \geq 10)$?

on considère le contraire

<u>d'après le théorème de T.L.C</u>

$$P(Y \geq 10) = P\left(\sum_{i=1}^{100} Y_i \geq 10\right)$$

$$= P\left(\frac{\sum_{i=1}^{100} Y_i - 100{,}0668}{\sqrt{Var(Y)}}\right)$$

$$= P\left(\frac{\sum Y_i - \underbrace{E(\sum Y_i)}_{\text{de la loi } Y}}{\underbrace{\sqrt{Var(\sum Y_i)}}_{\text{de la loi } Y}} \geq \frac{10 - E(\sum Y_i)}{\sqrt{V(\sum Y_i)}}\right)$$

or

$E(Y) = np = 6{,}688$

$V(Y) = np(1-p) = 6{,}233 =$

donc $\sqrt{V(Y)} = (2{,}496)$

donc

$$m \geq 99 + \phi^{-1}(0,95) \cdot 1,5$$

$$m \geq 99 + 1,5 \times 1,644\,9$$

$$m \geq \boxed{101,46}$$

On prend $\boxed{m = 101,46}$

Exo

$$X \sim N(75, 10^2)$$

1)

$$P(X \geq 90) = P\left(\frac{X-75}{10} \geq \frac{90-75}{10}\right)$$

$$= 1 - P\left(Z \leq \frac{15}{10} = 1,5\right)$$

$$= 1 - \phi(1,5) = 0,0668$$

d

$$P(X_2 \geq 170) = 1 - P\left(\frac{X_2 - 175}{21} \leq \frac{170 - 175}{21}\right)$$

$$= 1 - \Phi\left(\frac{-5}{21}\right) = \Phi\left(\frac{5}{21}\right)$$

$$= 0{,}673$$

dom

$$\boxed{P(X \geq 170) = 0{,}204 \times 0{,}52 + 0{,}673 \times 0{,}48}$$

4) $$P(F / X \geq 170) \overset{Bay}{=} \frac{P(X \geq 170 / F)\, P(F)}{P(X \geq 170)}$$

$$= \frac{f(X_1 \geq 170) \times 0{,}52}{\ldots}$$

Ex 12

$$P(X \geq 200) = 0{,}2$$

$$= \frac{\Phi\left(\frac{15}{21}\right) - \Phi\left(\frac{5}{21}\right)}{1 - \Phi(\cdot)} = \frac{\Phi(1{,}36) - \Phi(0{,}45)}{1 - \Phi(0{,}48)}$$

$$\simeq \frac{0{,}913 - 0{,}673}{1 - 0{,}673} = \boxed{0{,}733}$$

3) X : taille d'une personne 1c9

$X_{/H} = X_2$

$X_{/F} = X_1$

donc

$$P(X \geq 170) = P(X \geq 170 / F)\, P(F) + P(X \geq 170 / H)\, P(H)$$

$$= P(X_1 \geq 170) \cdot P(F) + P(X_2 \geq 170)\, P(H)$$

et

$$P(X_1 \geq 170) = 1 - P\left(\frac{X_1 - 165}{6} \leq \frac{170 - 165}{6}\right)$$

$$= 1 - \Phi(0{,}83) = 1 - 0{,}796 = \boxed{0{,}204}$$

donc $\varphi(2) - \varphi(1) \Rightarrow 100 = \sigma(2{,}326 - 0{,}841)$

donc $\sigma = \dfrac{100}{1{,}485} = \boxed{67{,}37}$

donc

$$\boxed{m = 300 - 2{,}326 \times 67{,}37}$$

$$\boxed{m = 143{,}34}$$

2)

$$P(100 \leq X \leq 147)$$

$$= P\left(\underbrace{\frac{100 - 143{,}34}{67{,}37}}_{B} \leq Z \leq \underbrace{\frac{147 - 143{,}34}{67{,}34}}_{A}\right)$$

$$= \boxed{\Phi(A) - \Phi(B)}$$

3) $Y \sim \mathcal{B}(n, p = 0{,}2 = P(X \geq 200))$

donc $P(Y \geq 10) = P\left(\frac{Y - 6,69}{2,496} \geq \frac{10 - 6,69}{2,496}\right)$

$= P(Z \geq 1,33)$

$= 1 - \Phi(1,33) = 1 - 0,9082$

$= \boxed{0,1}$

Ex 11

1) $X_1 \sim N(165, (6)^2)$

$X_2 \sim N(175, (11)^2)$

donc

$P(153 \leq X_1 \leq 177) = P\left(\frac{153-165}{6} \leq \frac{X_1 - 165}{6} \leq \frac{177-165}{6}\right)$

$= P\left(-2 \leq \frac{X - 165}{6} \leq 2\right)$

$= 1 - \Phi(1{,}33)$

$= 1 - 0{,}9082 = \dots$

1) 2) m ? pour que $P(X \geq 99) \geq 0{,}95$

donc $\Leftrightarrow P\left(\frac{X-m}{1{,}5} \geq \frac{99-m}{1{,}5}\right) \geq 0{,}95$

$P\left(Z \geq \frac{99-m}{1{,}5}\right) \geq 0{,}95$

$1 - \Phi\left(\frac{99-m}{1{,}5}\right) \geq 0{,}95$

$\Phi\left(\frac{99-m}{1{,}5}\right) \leq 0{,}05$

on applique Φ^{-1} fonct ↑

$\Leftrightarrow \frac{99-m}{1{,}5} \leq \Phi^{-1}(0{,}05)$

$m \geq 99 - \Phi^{-1}(0{,}05) \times 1{,}5$

$\Rightarrow m \geq 99 - \Phi^{-1}(0{,}95) \cdot 1{,}5$

$$Z \sim N(0,1)$$

$$E(Z) = \frac{1}{\sigma} \frac{E(X)}{m} - \frac{m}{\sigma} = 0$$

<u>donc</u>

même opération

$$P(X \leq 1) = P\left(\frac{X - 101}{1,5} < \frac{100 - 101}{1,5}\right)$$

$$= P\left(Z < \frac{-1}{1,5} = -0,66\right)$$

$$= \Phi(-0,66)$$

$$= 1 - \Phi(0,66) = \ldots$$

<u>d'après table</u>

2) $P(X \geq 103) = 1 - P(X < 103)$

$$= 1 - \left(P\left(\frac{X - 101}{1,5} < \frac{103 - 101}{1,5}\right)\right)$$

$$= 1 - P(Z < 1,33)$$

donc

$$f_U(t) = (\lambda+\mu)\, e^{-(\lambda+\mu)t} \quad \mathbb{1}_{]0;+\infty[}(t)$$

$$U \sim \mathcal{E}(\lambda+\mu)$$

Ex 8

$$X \sim \mathcal{N}(m, (1,5)^2)$$

1) on fixe $m = 101$

a) $P(X \leq 1) = ?$ car $\underbrace{\int_{-\infty} f_X(t)\, dt}_{\text{non calculable}}$

et X n'est pas centré réduit

donc on donc changer X vers une loi Normal centré réduite

Lem on pose

$$Z = \frac{X - m}{\sigma} = \frac{1}{\sigma} X - \frac{m}{\sigma}$$

bonjour

Ex 1

$X \sim \mathcal{E}(\lambda)$, $Y \sim \mathcal{E}(\mu)$

$U = \min(X, Y)$

on a $P(U \geq t) = P(\min(X,Y) \geq t) = 1 - F_U(t)$

$= P(X \geq t, Y \geq t) = P(X \geq t) \cdot P(Y \geq t)$

donc

$P(X \geq t) \cdot P(Y \geq t) = (1 - F_X(t))(1 - F_Y(t))$

or

$F_X(t) = (1 - e^{-\lambda t}) \mathbb{1}_{]0;+\infty[}(t)$ et même pour Y

donc

$$= \begin{cases} 1 & \text{si } t \leq 0 \\ e^{-(\lambda+\mu)t} & \text{si } t > 0 \end{cases}$$

donc

si on dérive

$$= -f_U(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \leq 0 \\ -(\lambda+\mu)\, e^{-(\lambda+\mu)t} & \text{si } t > 0 \end{cases}$$

on

$$\boxed{P(a \leq X \leq b) = F_X(b) - F_X(a)}$$

donc $= \phi(2) - \phi(-2)$

$= 2\phi(2) - 1 = 2 \times 0{,}977 - 1$

$= 0{,}954$

2) $P(X_2 \leq 190 \,/\, X_2 \geq 180)$

$$= \frac{P(180 \leq X_2 \leq 190)}{P(X_2 \geq 180)}$$

$$= \frac{P\left(\frac{180-175}{11} \leq \frac{X_2 - 175}{11} \leq \frac{190-175}{11}\right)}{P\left(\frac{X_2 - 175}{11} \geq \frac{180-175}{11}\right)}$$