Théorie des Langages et Automates

2025-2026

Plan du cours

- Automates finis et langages réguliers
  - Notion de langage
  - Automates finis déterministes
  - Automates finis non déterministes + Déterminisation
  - Lemme de Pompage o Grammaires régulières o Expressions régulières
  - Equivalence entre automates finis, grammaires régulières et expressions régulières
  - Limites des langages réguliers
- Automates à pile, langages non contextuels
  - Automates à pile
  - Grammaires non contextuelles
  - Equivalence automates à pile et grammaires non contextuelles
  - Lemme de pompage
- Machines de Turing
  - Définitions
  - Langages Turing acceptables
  - Problème de l'arrêt

Introduction générale

- En linguistique et en informatique, on parle de théorie des langages pour décrire les langages formels.

- Plus généralement, la théorie des langages concerne tout langage fini ou infini qui peut être spécifié par une méthode ou un mécanisme fini, et explicite, qui permet de le produire ou de l'analyser.

- La théorie des langages ne se préoccupe pas du côte sémantique (le sens), mais plutôt syntaxique (la forme) d'un langage.

Introduction générale

- On définit un langage notamment grâce aux grammaires et on analyse les mots d'un langage grâce aux automates.

- Ce cours va s'articuler autour de ces trois concepts que sont les langages, les grammaires et les automates.

- La théorie des langages est une base pour un certain nombre de disciplines informatique dont principalement la compilation.

Chapitre 1:
Automates finis et langages réguliers

Plan

- Rappel sur la théorie des ensembles
- Notion de langage
- Automates finis déterministes
- Automates finis non déterministes + Déterminisation
- Lemme de Pompage o Grammaires régulières o Expressions régulières
- Equivalence entre automates finis, grammaires régulières et expressions régulières
- Limites des langages réguliers

Rappel sur la théorie des ensembles

Définitions :

- Un ensemble est une collection d'objets sans répétition.

- Si un objet appartient à un ensemble A, on dit qu'il est élément de cet ensemble et l'on note $x \in A$.

- On distingue un ensemble particulier noté $\emptyset$ qui ne contient aucun élément.

- Un ensemble est noté par {...} où les pointillés indiquent les éléments de l'ensemble ou une caractéristique de ses éléments

Rappel sur la théorie des ensembles

- Il existe principalement trois moyens pour définir un ensemble :
  - **Définition par extension:** consiste à donner tous les éléments d'un ensemble. Exemple: {0,1,2,3,4}.

  - **Définition par compréhension:** définit les éléments d'un ensemble par les propriétés qui les définissent. on écrira {x / x vérifie une propriété P(x)}. Exemple : $\{n \in N \mid n \% 2 = 0\}$ définit les nombres entiers pairs.

  - **Définition par induction :** définit un ensemble par certains éléments triviaux et des règles d'induction permettant de retrouver d'autres éléments en fonction de ceux déjà connus. On écrit: $x \in A \Rightarrow f(x) \in A$ tel que f est un moyen permettant de construire d'autres éléments en fonction de l'argument. Exemple : l'ensemble des entiers peut être représenté comme suit : $N = \{0; x \in N \Rightarrow (x + 1) \in N\}$.

Opérations sur les ensembles

- **Comparaison des ensembles:**

  - **Inclusion:** $A \subseteq B$, si $\forall x \in A$, $x \in B$. On dira alors que A est un sous ensemble de B.

    - Exemple : $\{a, b, c\} \subseteq \{a, b, c, d\}$.

  - **Egalité:** Deux ensembles A et B sont égaux si $A \subseteq B$ et $B \subseteq A$.

Opérations sur les ensembles

- **Construction d'autres ensembles:**

  Soit A et B deux sous ensembles de de Ω:

  - L'union $A \cup B$: *comporte tout élément appartenant à A ou B*
  - L'intersection $A \cap B$: *comporte tout élément appartenant à A et B*
  - La différence $A - B$: *comporte tout élément appartenant à A et qui n'appartient pas à B*
  - Le complément, noté $\overline{A} = \Omega - A$
  - Le produit cartésien $A \times B$: *est l'ensemble des paires (a, b) telles que $a \in A$ et $b \in B$.*
  - L'ensemble des parties de A, noté 2^A : *est l'ensemble de tous les sous-ensembles de A*

Opérations sur les ensembles

- **Exemple : $A = \{a, b\}$, $B = \{a, c\}$, $\Omega = \{a, b, c\}$:**
  - $A \cap B = \{a\}$;
  - $A \cup B = \{a, b, c\}$;
  - $A - B = \{b\}$;
  - $\overline{A} = \{c\}$;
  - $A \times B = \{(a, a), (a, c), (b, a), (b, c)\}$;
  - $2^A = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$

Opérations sur les ensembles

- **Mesures sur les ensembles:**
  - La mesure la plus utilisée et celle de la cardinalité. Elle est notée card(A) et représente le nombre d'éléments de A.
  - Si l'ensemble est infini alors sa cardinalité est ∞.
  - $\text{card}(A \times B) = \text{card}(A).\text{card}(B)$
  - $\text{card}(2^A) = 2^{\text{card}(A)}$.

Notion de langage

- La théorie des langages utilise un certain nombre de concepts ainsi qu'une certaine terminologie.

- Nous allons d'abord définir certaines notions capitales qui sont les bases de cette théorie:

  - Alphabet
  - Mot
  - Langage

Alphabet

- **Définitions:**
  - Un **alphabet** est un ensemble fini de symboles.
  - Un **symbole** est une entité abstraite qui ne peut pas être définie formellement comme les lettres, les chiffres, ..ect

- **Exemples :**
  - A = {0,1}, l'alphabet binaire
  - B= {a, b, c}
  - C= {if , then, else, a, b}, un alphabet du langage C
  - F = {$\rightarrow$, $\leftarrow$, $\uparrow$, $\downarrow$} un alphabet de fleches

Mot

- **Définition**:
  - Un mot sur l'alphabet *X est une séquence finie et ordonnée* d'éléments de l'alphabet.
  - C'est une concaténation de lettres.
- **Exemples:**
  - abbac et ba sont deux mots de l'alphabet {a,b,c}.
  - 00,01,10010 sont des mots de l'alphabet {0,1}
- **Notations:**
  - Le mot vide, noté ε, correspond à la suite de symboles vides.
  - L'ensemble des mots construits sur un alphabet X est un ensemble infini noté X^*
  - L'ensemble des mots construits sur un alphabet X et qui ne contient pas le mot vide est un ensemble infini noté X^+

Mot

- **Longueur d'un mot:**

  Soient X est un alphabet, $w \in X^*$, et x est un des symboles constituant le mot w:

  - $|w|$ est la longueur du mot **w**
  - $|w|_x$ est le nombre de l'occurrence de x dans le mot w

- **Exemples**:
  - $|abbac| = 5$
  - $|ba| = 2$
  - $|\varepsilon| = 0.$
  - $|ababac|_a = 3$

Mot: Opérations sur les mots

- **Concaténation**
  Soient deux mots w,w' ∈ X*, la concaténation de w et w' est définie comme la juxtaposition de w et w'. Elle est notée par w.w' ou bien ww'.
- Exemple:
  - X={0,1}, w=10, w'=00
    w.w'=1000
    w'.w=0010

Mot: Opérations sur les mots

- **Puissance d'un mot**

  Soit un alphabet X, w ∈ X*et n ∈ N , la puissance de w est donnée comme suit:

$$w^n = \begin{cases} \varepsilon \text{ si } n = 0 \\ w \text{ si } n = 1 \\ ww^{n-1} = w^{n-1}w \text{ si } n > 1 \end{cases}$$

- Exemple:

$$\text{Soit } X = \{a, b\} \text{ et } w = aba$$

- $w^0 = \varepsilon$
- $w^1 = w.\varepsilon = w = aba$
- $w^2 = w.w = ww = abaaba$

Mot: Opérations sur les mots

- **Factorisation d'un mot**

  Soit un alphabet X, w ∈ X*

$-\,u$ est un facteur gauche (préfixe) de $w \Leftrightarrow \exists\, v \in X^*$ tel que $w = uv$

$-\,u$ est un facteur droit (suffixe) de $w \Leftrightarrow \exists\, v \in X^*$ tel que $w = vu$

$-\,u$ est un préfixe propre de $w \Leftrightarrow \exists\, v \in X^+$ tel que $w = uv$

$-\,u$ est un suffixe propre de $w \Leftrightarrow \exists\, v \in X^+$ tel que $w = vu$

- **Exemple:**

  Soit $X = \{a, b\}$ et $w = babb$:

  - les préfixes de w sont : b, ba, bab, babb
  - les suffixes de w sont : b, bb, abb, babb
  - les préfixes propres de w sont : b, ba, bab
  - les suffixes propres de w sont : b, bb, abb

Mot: Opérations sur les mots

- **Inverse d'un mot ou Miroir**

  le miroir d'un mot $w=a_1a_2......a_n$ est le mot noté w^R $=a_n......a_2a_1$ obtenu en inversant les symboles de w.

- **Exemple:**
  - Soit w=abbc un mot de l'alphabet x={a,b,c}:

    w^R =cbba

- **Remarques:**
  - Le miroir d'un mot composé d'un seul symbole est le mot lui-même
  - ε^R $=\varepsilon$
  - Un mot est un palindrome si w^R =w, exple: $(aba)^R$ =aba

Langage

- **Définition:** Un langage est un ensemble (fini ou infini) de mots définis sur un alphabet donné. Il peut être défini par extension, par compréhension ou par induction

- **Exemples:**

  Soit l'alphabet X={a,b}

  - Ø est le langage vide. Il ne contient aucun mot.
  - {ε} est un langage.
  - {a, b, aa, bb, aba} est un langage
  - {aa, ab, ba, bb} est le Langage des mots de longueur 2
  - $\{w \in X^* \mid w=a^n$ tel que $n > 0\}$ est un langage

- **Remarques:**
  - Un langage sur un alphabet X peut être fini ou infini
  - Ø est un langage défini sur n'importe quel alphabet

Opérations sur les langages

- Les langages sont des ensembles. On peut alors leur appliquer n'importe quelle opération ensembliste telles que l'union, l'intersection, et la complémentarité.

- Soient L, L1 et L2 trois langages définis sur l'alphabet X, on définit les opérations suivantes :

$$
\begin{aligned}
&- \text{L'union} : L1 + L2 = \{w \,/\, w \in L1 \vee w \in L2\} \\
&- \text{L'intersection} : \mathrm{L1} \cap L2 = \{w \,/\, w \in L1 \wedge w \in L2\} \\
&- \text{Le complément} : \bar{L} = \{\text{tous les mots w sur x} \,/\, w \notin L1\} \\
&- \text{La concatenation} : L1 . L2 = \{w \,/\, \exists u \in L1, \exists v \in L2 : w = uv\} \\
&- \text{Exposant} : L^n = \{w \,/\, \exists u_1, u_2, \ldots u_n \in L : w = u_1 u_2 \ldots u_n\}
\end{aligned}
$$

Opérations sur les langages

- **Egalité:**

  Soit L1 et L2 deux langages engendré sur X*.

  On dit que les deux langages sont égaux (L1 = L2) si et seulement si $\forall$ w $\in$ L1 alors w $\in$ L2 et $\forall$ w $\in$ L2 alors w $\in$ L1.

Opérations sur les langages

- **Union:**
  Soit X un alphabet et soit deux langages L1 et L2 engendrés sur X*.
  L'union de L1 et L2 est l'ensemble des mots de L1 et L2:
  $L1 \cup L2 = \{w \in X^* \,/\, w \in L1 \text{ ou } w \in L2\}$
- L'union est:
  - Associative
  - Commutative
  - Elément neutre, le langage vide: $L \cup \emptyset = L$
  - Elément absorbant, le vocabulaire X*: $L \cup X^* = X^*$
  - Notée + dans la théorie des langages: $L1 \cup L2 = L1 + L2$

Opérations sur les langages

- Intersection:
  L'intersection de L1 et L2 est l'ensemble des mots qui appartiennent à la fois à L1 et L2: $L1 \cap L2 = \{w \in X^* / w \in L1 \text{ et } w \in L2\}$
- Elle est:
  - Associative
  - Commutative
  - Element neutre est X^*: $L \cap X^* = L$
  - Element absorbant, le langage vide: $L \cap \emptyset = \emptyset$

Opérations sur les langages

- Produit ou concaténation:
  C'est le résultat de la concaténation de chaque mot de L1 avec chaque mot de L2:
  $L1.L2=\{w=u.v \ / \ u \in L1, v \in L2\}$
- Le produit est:
  - Associatif
  - Il n'est pas commutatif
  - Element neutre est $\{\varepsilon\}$
  - Element absorbant, le langage vide: $\emptyset$
  - Le produit est distributif par rapport à l'union: $L1.(L2 \cup L3)=(L1.L2) \cup (L1.L3)$

Opérations sur les langages

- **Puissance:**
  La puissance d'un langage est définit comme suit:

- $$L^n = \begin{cases} \{\varepsilon\} & \text{si } n=0 \\ L & \text{si } n=1 \\ L.L^{n-1}=L^{n-1} & \text{si } n > 1 \end{cases}$$

Opérations sur les langages

- **Complémentarité**:

Soit un langage L défini sur l'alphabet X.

La complémentarité de L noté $\overline{L}$, est définie par:

$\overline{L} = X^* \setminus L = \{w \in X^* \,/\, w \notin L\}$

Opérations sur les langages

- **Fermeture positive:**
  La fermeture positive de L est notée L^+.

$$L^+ = \bigcup_{i=1}^{\infty} L^i$$

- **Fermeture de Kleene:**
  La fermeture étoile de L est notée L^*.

$$L^* = \bigcup_{i=0}^{\infty} L^i = L^0 + \bigcup_{i=1}^{\infty} L^i = \{\varepsilon\} + L^+$$

Opérations sur les langages

- **Exemples:**

  Soit X={0,1}, L1={00,11,01} et L2={01,10}

  - L1+L2={00,11,01,10}
  - L1 $\cap$ L2={01}
  - L1.L2={0001,0010,1101,1110,0101,0110}
  - L2 *={ε}+{L2}+{L2.L2}+……+{L2.L2.L2…….L2.L2.L2}

Les grammaires

Introduction:

- Une grammaire est l’ensemble des règles à suivre pour parler et écrire correctement une langue.

- Ce même principe s'applique également à la théorie des langages, où en suivant les règles de production d'une grammaire, il est possible de créer un langage spécifique.

Grammaire

Définitions:

- Une grammaire est un ensemble de règles de production qui sont utilisées pour engendrer un langage
- Ensemble de règles pour générer les mots du langage sont sous la forme de règles de réécriture

  $\longrightarrow$ Remplacer une séquence de symboles par une autre séquence
- Mots générés = mots obtenus à partir d'un symbole spécial appelé symbole de départ ou axiome

Grammaire

Exemple: Considérons la phrase suivante :

La vieille dame regarde la petite fille

- Peut-on construire une grammaire qui permet de générer cette phrase?
- Alphabet : A= { la, vieille, petite, dame, fille, regarde}
- Structure de la phrase :
  - Un groupe sujet (article, adjectif, nom)
  - Un verbe
  - Un groupe complément d'objet (article, adjectif, nom)

Grammaire

Exemple:

- Règles de production:

1. <Phrase>→<Sujet><Verbe><Complément>
2. <Sujet>→<Groupe Nominal>
3. <Complément>→<Groupe Nominal>
4. <Groupe Nominal>→<Article><Nom>
5. <Groupe Nominal>→<Article><Adjectif><Nom>
6. <Article>→ la
7. <Nom>→ dame | fille
8. <Adjectif>→ vieille | petite
9. <Verbe>→regarde

Grammaire

- **Définition formelle:**

  Une grammaire G est un quadruplet (N,T,P,S) tels que:
  - N: ensemble fini de symboles non terminaux
  - T: ensemble fini de symboles terminaux
  - $N \cap T = \emptyset$
  - S: symbole non terminal appelé axiome (point de départ de la dérivation) ;
  - P: ensemble fini de règles de production de la forme:
    $\alpha \rightarrow \beta$ tel que $\alpha \in (N \cup T)^+$ et $\beta \in (N \cup T)^*$

  La notation $\alpha \rightarrow \beta$ est appelée une dérivation et signifie que α peut être remplacé par β.

Grammaire

- **Dérivation directe:**

  Un mot w' dérive directement d'un mot w qu'on note w=>w' si une règle G est appliquée une fois pour passer de w à w'.

  Càd: il existe une règle $\alpha \rightarrow \beta$ dans P telle que:

  $w=u\alpha v$ et $w'=u\beta v$ avec $u, v \in (N \cup T)^*$

- **Dérivation au sens général:**

  Un mot w' dérive d'un mot w qu'on note w->w', si on applique n fois les règles de G pour passer de w vers w' tel que n>=0.

Grammaire

- **Exemple:**
  soit la grammaire: G=({S}, {a, b},{S->aSb, S->ε}, S), nous avons:

  - aSb dérive directement de S et on écrit: S=>aSb car il existe une règle S->aSb ∈ P
  - ab dérive directement de aSb et on écrit: aSb=>ab car il existe une règle S-> ε ∈ P
  - S->aSb->ab est une dérivation de longueur 2
  - S->aSb->aaSbb->aabb est une dérivation de longueur 3
  - S->aSb->…..-> $a^n b^n$ est une dérivation de longueur n+1

Langage engendré par une grammaire

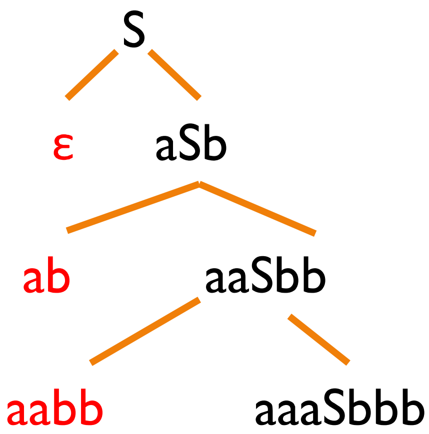
- **Définition:** Un langage engendré par une grammaire G=(N,T,P,S) est l'ensemble des mots obtenus en appliquant des séquences de dérivations à partir de l'axiome S.

  On note: $L(G)=\{w \in T^*/S=>^*_G w\}$

- **Exemples:**

  Pour la grammaire: G=({S}, {a, b},{S->aSb, S->ε}, S):

  - Mot minimal: ε
  - La forme générale: $L(G)=\{a^n b^n \ / \ n>=0\}$



- Remarque: Une grammaire définit un seul langage par contre un même langage peut être engendré par plusieurs grammaires différentes.

Grammaires équivalentes

- Deux grammaires sont équivalentes si elles engendrent le même langage.
  G équivalente à G’ ⇔L(G)=L(G’)

- **Exemples:**
  - G=({S,A,B}, {a,b}, {S->aS|ABb, A->Aa|a, B->b},S)
  - G’=({S,A,B}, {a,b}, {S->aS|Aa, A->Aa|bB, B->b},S)
  - => On trouve que L(G)=L(G’)={$a^k b^2$ / k>=1}