Probabilité Conditionnelle et Indépendance :

I - Probabilité Conditionnelle :

1 - Introduction : Est-ce que la probabilité d'un événement change si on dispose d'une information supplémentaire, et si oui, comment elle change ?

Exemple : une Fédération de Tennis regroupe N licenciés dont N_H hommes et $N_F = N - N_H$ femmes. On choisit un individu au hasard. Notons :

G : {l'individu choisi est gaucher}

H : { " " est un homme}

On note $N_{G\cap H}$: le nombre de joueurs hommes et gauchers.

$$P(H) = \frac{N_H}{N}$$

$$P(G\cap H) = \frac{N_{G\cap H}}{N}$$

- Sachant que l'individu choisi est un homme qu'elle est la probabilité qu'il soit gaucher ?

l'information supplémentaire est que l'individu choisi est un homme. Cette probabilité est $\dfrac{N_{G\cap H}}{N_H} = \dfrac{N\,P(G\cap H)}{N\,P(H)} = \dfrac{P(G\cap H)}{P(H)}$

Définition : $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espace de probabilité.

Soit H un événement tel que $P(H) \neq 0$.

Alors $\forall A \in \mathcal{F}$, on définit : $P(A/H) = \dfrac{P(A \cap H)}{P(H)}$

C'est appelée probabilité conditionnelle de A sachant H (sous l'hypothèse ...)

Exemple :

Une urne contient r boules rouges et v boules vertes. On tire deux boules l'une après l'autre sans remise.

Quelle est la probabilité d'obtenir 2 boules rouges ?

R_i " tirer une boule rouge au $i^{\text{ème}}$ tirage " $i = 1, 2$

$P(R_1 \cap R_2)$?

$P(R_1) = \dfrac{r}{r+v}$

$P(R_2)$?

$P(R_2 | R_1) = \dfrac{r-1}{r+v-1} = \dfrac{P(R_1 \cap R_2)}{P(R_1)}$

Donc $P(R_1 \cap R_2) = P(R_2 | R_1) P(R_1)$

$= \dfrac{r(r-1)}{(r+v)(r+v-1)}$.

2/ Propriétés :

Proposition : $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ est un espace de probabilité. $H \in \mathcal{F}$; $P(H) \neq 0$.

Alors : $P(\cdot | H) : \mathcal{F} \longrightarrow [0,1]$

$A \longmapsto P(A|H)$

est une probabilité sur $(\Omega, \mathcal{F}, P)$.

Donc $P(\cdot \mid H)$ vérifie toute les propriétés d'une probabilité.

Corollaire :

1) $P(\phi \mid H) = 0$ et $P(\Omega \mid H) = 1$

($Si\ H \subset A \quad P(A \mid H) = 1$)

2) Si les A_i sont deux à deux disjoints, alors

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i \mid H\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i \mid H)$$

3) $P(A^c \mid H) = 1 - P(A \mid H)$

4) Si $A \subseteq B$ alors $P(A \mid H) \leq P(B \mid H)$

5) $P(A \cup B \mid H) = P(A \mid H) + P(B \mid H) - P(A \cap B \mid H)$.

Les probabilités conditionnelles permettent de calculer la probabilité d'un évènement en conditionnant par tous les cas possibles.

Définition : on dit qu'une famille d'évènement $(H_i)_{i\in I}$ est une partition de Ω (ou système complet d'évènements) si :

- $H_i \neq \phi \quad \forall i \in I$
- $H_i \cap H_j = \phi \quad \forall i,j \in I,\ i \neq j$
- $\bigcup_{i\in I} H_i = \Omega$

Théorème (Formule de probabilité totale (FPT))

Soit $(H_i)_{i\in I}$ une partition de Ω. Soit $A \in \mathcal{F}$

Alors $P(A) = \sum_{i\in I} P(A/H_i)P(H_i)$

Preuve : $A \in \mathcal{F}$

$A = A \cap \Omega = A \cap \left(\bigcup_{i \in I} H_i \right) = \bigcup_{i \in I} (A \cap H_i)$

$P(A) = P\left(\bigcup_{i \in I} A \cap H_i \right) = \sum_{i \in I} P(A \cap H_i) = \sum_{i \in I} P(A | H_i) P(H_i)$.

Exemple : $P(R_2)$?

$\{R_1, \bar{R}_1\}$ est une partition de Ω

F.P.T : $P(R_2) = P(R_2 | R_1) P(R_1) + P(R_2 | \bar{R}_1) P(\bar{R}_1)$

$P(R_2) = \frac{r-1}{r+v-1} \cdot \frac{r}{r+v} + \frac{r}{r+v-1} \cdot \frac{v}{r+v}$

Théorème (Formule de Bayes) :

- $(H_i)_{i \in I}$ une partition de Ω
- $A \in \mathcal{F}$

Alors $P(H_j | A) = \frac{P(A | H_j) P(H_j)}{P(A)} = \frac{P(A | H_j) P(H_j)}{\sum_{i \in I} P(A | H_i) P(H_i)}$

Exercice : Un questionnaire à choix multiple propose m réponses pour chaque question. Soit p la probabilité qu'un étudiant connaisse la réponse à une question donnée. S'il ignore la réponse, il choisit au hasard l'une des réponses proposées. Quelle est pour le correcteur la probabilité qu'un étudiant connaisse vraiment la bonne réponse lorsqu'il l'a donnée ?

F.P.T $P(A) = P(A|B)P(B) + P(A|\overline{B})P(\overline{B})$

$= p + \frac{1}{m}(1-p)$

$$P(B|A) = \frac{p}{p + \frac{1}{m}(1-p)}$$

A " l'étudiant a répondu correctement "

B " l'étudiant connaisse la bonne réponse ".

$P(B|A)$?

$P(B) = p$

$P(A|B) = 1$

$P(A|\overline{B}) = \frac{1}{m}$

Formule de Bayes

$$P(B|A) = \frac{P(A|B)\,P(B)}{P(A)}$$

II Indépendance :

Soit A et B deux événements, $P(A) \neq 0$ et $P(B) \neq 0$.

Il est possible que la connaissance de la réalisation de A ne change pas la probabilité de B, c-à-d : $P(B) = P(B|A)$

· Proposition :

$A, B \in \mathcal{F}$; $P(A)$ et $P(B)$ non nulles.

Alors on a l'équivalence :

1) $P(A|B) = P(A)$

2) $P(B|A) = P(B)$

3) $P(A \cap B) = P(A)P(B)$.

F. F.P.T $P(A) = P(A|B)P(B) + P(A|\overline{B})P(\overline{B})$

$= p + \frac{1}{m}(1-p)$

$P(B|A) = \dfrac{p}{p+\frac{1}{m}(1-p)}$

<u>Définition</u> :

Deux événements A, B sont dites indépendantes (dans $(\Omega, \mathcal{F}, P)$)

si $P(A \cap B) = P(A)P(B)$.