2) Moments des variables à densités :

Définition : Soit X une v.a de densité f t.q $\int_{\mathbb{R}} |x| f(x)\,dx$ converge.

On appelle espérance de X et on note $E(X)$ la quantité suivante : $E(X) = \int_{\mathbb{R}} x f(x)\,dx$.

- le moment d'ordre k de x est

$$E(X^k) = \int_{\mathbb{R}} x^k f(x)\,dx.$$

- Plus généralement, si g est une application réelle ;

$$E(g(X)) = \int_{\mathbb{R}} g(x) f(x)\,dx.$$

	V.a discrète	V.a continue
$X(\Omega)$	$\{x_1, \dots, x_n \dots\}$	$\mathbb{R}$ ou intervalle de $\mathbb{R}$.
$P(a<X<b)$	$\sum_{a<k<b} P(X=k)$	$\int_a^b f_X(x)\,dx$ → densité de X
$E(X)$	$\sum_{k \in X(\Omega)} k\,P(X=k)$	$\int_{\mathbb{R}} x\, f_X(x)\,dx$
$E(g(X))$	$\sum_{k \in X(\Omega)} g(k) P(X=k)$	$\int_{\mathbb{R}} g(x)\, f_X(x)\,dx$

$V(X) = E(X^2) - E^2(X)$

les propriétés vu pour l'espérance et la variance restent vraie.

III - Loi à densité classiques :

1/ Loi uniforme :

une v.a X suit la loi uniforme sur l'intervalle $[a,b]$.

si elle a la densité suivante $f_X(x) = \frac{1}{b-a} \mathbb{1}_{[a,b]}(x)$.

on note $X \rightsquigarrow \mathcal{U}_{[a,b]}$

$$E(X) = \int_{\mathbb{R}} x f_X(x)\,dx$$

$$= \frac{1}{b-a} \int_a^b x\,dx = \frac{1}{b-a} \left[\tfrac{1}{2} x^2 \right]_a^b$$

$$= \frac{a+b}{2}$$

$$V(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$$

2) Loi exponentielle :

Une v.a X suit la loi exponentielle de paramètre λ, ($\lambda \in \mathbb{R}_+^*$)

si elle a la densité suivante : $f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x} \mathbb{1}_{]0,+\infty[}(x)$

On note $X \sim \mathcal{E}(\lambda)$.

$$E(X) = \int_{\mathbb{R}} x f_X(x)\,dx = \lambda \int_0^{+\infty} x e^{-\lambda x}\,dx$$

$u'(x) = e^{-\lambda x} \longrightarrow u(x) = -\frac{1}{\lambda} e^{-\lambda x}$

$v(x) = x \longrightarrow v'(x) = 1$

$E(X) = \lambda \left[\underbrace{x e^{-\lambda x}}_{0} \right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} e^{-\lambda x} dx$

$= \left[-\frac{1}{\lambda} e^{-\lambda x} \right]_0^{+\infty} = \frac{1}{\lambda}$

$X \sim \mathcal{E}(\lambda)$

$F_X(t) = P(X \leq t)$

$= \int_{-\infty}^{t} f_X(x) dx = 0$ si $t \leq 0$.

si $t > 0$ $F_X(t) = \lambda \int_0^t e^{-\lambda x} dx = \lambda \left[-\frac{1}{\lambda} e^{-\lambda x} \right]_0^t = -e^{-\lambda t} + 1$

$F_X(t) = (1 - e^{-\lambda t}) \mathbb{1}_{]0,+\infty[}(t)$

$P(X \geq t) = e^{-\lambda t}$ si $t > 0$

$= 1$ si $t \leq 0$

Exercice :

$U \sim \mathcal{U}_{]0,1[}$

$\lambda > 0$; $X = -\frac{1}{\lambda}\ln(U)$

Chercher la densité de X.

2) Loi exponentielle :

Une v.a X suit la loi exponentielle de paramètre λ, ($\lambda \in \mathbb{R}_+^*$)

si elle a la densité suivante : $f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x} \mathbb{1}_{]0,+\infty[}(x)$

On note $X \sim \mathcal{E}(\lambda)$.

$E(X) = \int_{\mathbb{R}} x\, f_X(x)\,dx = \lambda \cdot \int_0^{+\infty} x e^{-\lambda x}\,dx$

$\underline{t \in \mathbb{R}}$ $F_X(t) = P(X \leq t)$

$= P\left(-\frac{1}{\lambda} \ln U \leq t\right)$

$= P(-\ln U \leq \lambda t)$

$= P(\ln U \geq -\lambda t)$

$= P(U \geq e^{-\lambda t})$ $F_U(x) = P(U \leq x)$

$= 1 - F_U(e^{-\lambda t})$

$\Rightarrow f_X(t) = F_X'(t) = (1 - F_U(e^{-\lambda t}))'$

$= -(-\lambda)e^{-\lambda t} f_U(e^{-\lambda t})$

$= \lambda e^{-\lambda t} f_U(e^{-\lambda t})_{/?}$

$$f_U(e^{-\lambda t}) = \mathbb{1}_{[0,1]}(e^{-\lambda t})$$

$$= \begin{cases} 1 & \text{si } e^{-\lambda t} \in [0,1] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 1 & \text{si } t \in [0,+\infty[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$0 < e^{-\lambda t} < 1$$

$$e^{-\lambda t} \in]0,1) \Leftrightarrow t \in]0,+\infty[.$$

$\underline{\text{d}}$ $f_X(t) = \lambda e^{-\lambda t}\, \mathbb{1}_{[0,+\infty[}(t)$

$X \sim \mathcal{E}(\lambda)$.

3/ Loi gaussienne :

Une V.a X suit la loi gaussienne ou normal de paramètres $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$ si elle a la densité suivante : $m \in \mathbb{R}$, σ^2, $\sigma \in \mathbb{R}_+^*$

$$f_{m,\sigma}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)^2\right]$$

$$E(X) = \int_{\mathbb{R}} x \, f_{m,\sigma}(x)\,dx$$

$$\int_{\mathbb{R}} f_{m,\sigma}(x)\,dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{\mathbb{R}} e^{-1/2\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)^2} dx$$

On pose $y = \frac{x-m}{\sigma} \Rightarrow x = \sigma y + m$

$\Rightarrow dx = \sigma\, dy$

$$\int_{\mathbb{R}} f_{m,\sigma}(x)\,dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}y^2}\,\sigma\,dy$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \underbrace{\left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}y^2}\,dy\right)}_{\sqrt{2\pi}} = 1$$

$$E(x) = \int_{\mathbb{R}} x\, f_{m,\sigma}(x)\,dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{-\infty}^{+\infty} x\, e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)^2} dx$$

On pose $y = \frac{x-m}{\sigma} \Rightarrow x = \sigma y + m;\ dx = \sigma\,dy$

$$E(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} (\sigma y + m)\, e^{-\frac{1}{2}y^2}\,dy$$

$$= \underbrace{\frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} y\, e^{-\frac{1}{2}y^2}\,dy}_{0} + \frac{m}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}y^2}\,dy$$

$$= m$$

$$E(X^2) = \int_{\mathbb{R}} x^2 f_{m,\sigma}(x)\,dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)^2} dx$$

On pose $y = \frac{x-m}{\sigma} \Rightarrow x = \sigma y + m \,;\; dx = \sigma dy$

$$E(X^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} (\sigma y + m)^2 e^{-1/2\, y^2} dy$$

$$= \frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} y^2 e^{-1/2\, y^2} dy + \frac{2m\sigma}{\sqrt{2\pi}} \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} y\, e^{-1/2\, y^2} dy}_{0} + \frac{m^2}{\sqrt{2\pi}} \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-1/2\, y^2} dy}_{m^2}$$

$I = \int_{\mathbb{R}} y^2 e^{-1/2 y^2} dy$

$u' = y e^{-1/2 y^2} \longrightarrow u = - e^{-1/2 y^2}$

$v = y \longrightarrow v' = 1$

$I = \underbrace{\left[-y e^{-1/2 y^2} \right]_{-\infty}^{+\infty}}_{0} + \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-1/2 y^2} dy}_{\sqrt{2\pi}}$

$\Rightarrow I = \sqrt{2\pi}$

$E(X^2) = \sigma^2 + m^2$

$V(X) = \sigma^2$

$X \sim \mathcal{N}(m, \sigma^2)$

espérance — variance.

Si $m = 0$ on dit que X est centrée

Si $\sigma = 1$ on dit que X est réduite

Si $X \sim \mathcal{N}(0,1)$ on dit que X est centrée réduite.

$X \sim \mathcal{N}(0,1)$; $f_X(x) = f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-1/2 x^2}$

Propriété (exercice) :

La loi gaussienne est stable par transformation affine.

c-à-d : $X \sim \mathcal{N}(m,\sigma^2)$; $a \in \mathbb{R}^*$; $b \in \mathbb{R}$

alors $aX+b \sim \mathcal{N}(am+b,(a\sigma)^2)$

$$E(X^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} (\sigma y + m)^2 e^{-1/2\, y^2}\, dy$$

$$= \frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} y^2 e^{-1/2\, y^2}\, dy + \frac{2 m\sigma}{\sqrt{2\pi}} \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} y\, e^{-1/2\, y^2}\, dy}_{0} + \underbrace{\frac{m^2}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-1/2\, y^2}\, dy}_{m^2}$$