ESPACE DE PROBABILITÉ :

I - Modélisation :

- Expérience aléatoire : c'est une expérience qui dépend du hasard, c-à-d, on ne peut pas prédicte les résultats.

Une expérience aléatoire est décrite mathématiquement par l'ensemble de tous les résultats possibles.

- Cette ensemble sera noté Ω et s'appelle l'univers des possibles.

Exemples

1/ lancer un dé cubique $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

2/ " une pièce de monnaie : $\Omega = \{P, F\}$

3) lancer deux pièces de monnaies : $\Omega = \{PP, FF, PF\}$

$= \{PP, F_1F, PF, FP\}$

4) Nombre de voitures qui passent devant l'ISIMM de 10^h à 12^h

$\Omega = \mathbb{N}$.

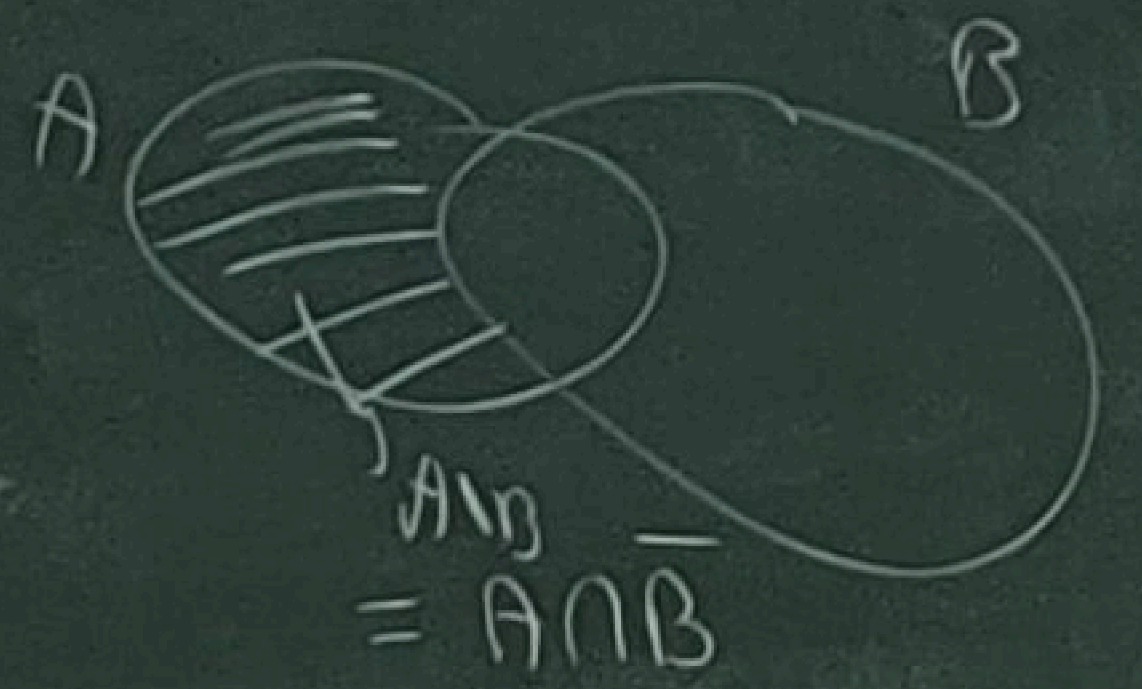
5/ Durée de vie d'un PC , $\Omega = \mathbb{R}_+$

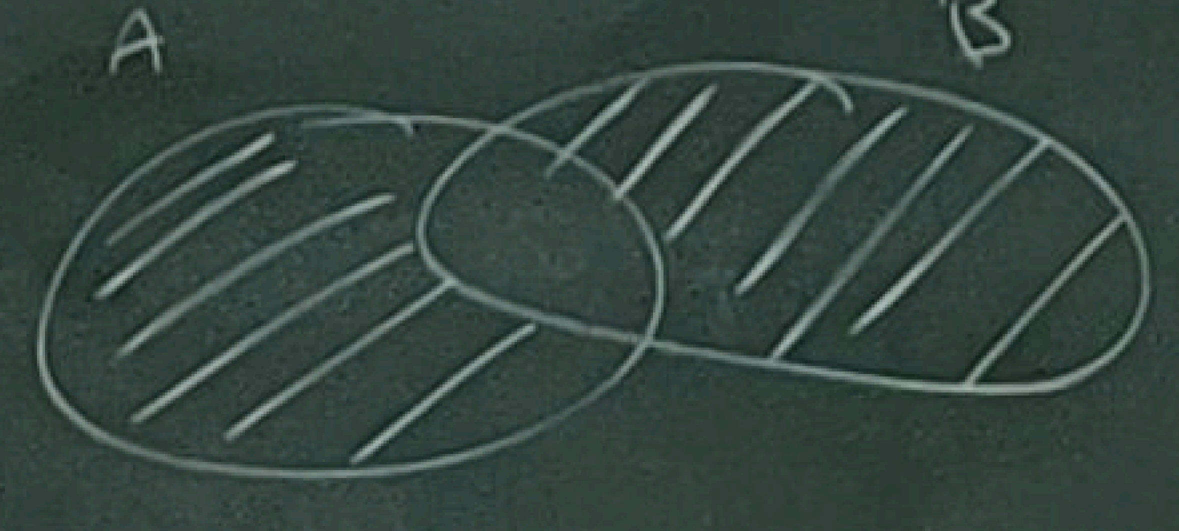
Définition : - Tout élément ω de Ω s'appelle évènement élementaire.

- Ω est l'évènement certain.
- ϕ : l'évènement impossible.

- Un résultat d'une expérience s'appelle évènement.
- Si Ω est un ensemble au plus dénombrable alors tout ss-ensemble de Ω est un évènement c-à-d l'ensemble des évènement est $\mathcal{P}(\Omega)$.
- l'ensemble des évènements d'une expérience aléatoire sera noté $\mathcal{F}$.

Définition : on appelle espace probabilisable le couple $(\Omega, \mathcal{F})$ où Ω est l'univers des résultats possibles (lié à une expérience aléatoire) et $\mathcal{F}$ est l'ensemble des événements.





Propriétés :

Soit $(\Omega, \mathcal{F})$ un espace probabilisable. Alors

- $\Omega \in \mathcal{F}$
- si $A \in \mathcal{F}$ alors $\bar{A} \in \mathcal{F}$. ($\mathcal{F}$ est stable par complémentaire)
- si $A, B \in \mathcal{F}$ alors $A \cup B \in \mathcal{F}$ et $A \cap B \in \mathcal{F}$
- si $A, B \in \mathcal{F}$ alors $A \setminus B \in \mathcal{F}$ et $A \Delta B = A \setminus B \cup B \setminus A$

$$= A \cup B \setminus A \cap B \in \mathcal{F}.$$

II Introduction de la notion de probabilité :

Exemple :

1/ Lancer une pièce de monnaie : $\Omega = \{P, F\}$

A : " obtenir pile " ; $A = \{P\}$

on définit f : la fréquence statistique

$$f(B) = \frac{\# B}{\# \Omega} \quad \forall B \subseteq \Omega.$$

$$f(A) = \frac{\# A}{\# \Omega} = \frac{1}{2}$$

2) lancer un dé, $\Omega = \{1, 2, \dots, 6\}$

A : " obtenir un multiple de 3 " $= \{3, 6\}$

$$f(A) = \frac{\# A}{\# \Omega} = 2/6 = 1/3$$

$$f : \mathcal{P}(\Omega) = \mathcal{F} \longrightarrow [0, 1].$$

$A, B \in \mathcal{F}$, $A \cap B = \phi$

- $f(A \cup B) = \dfrac{\#(A \cup B)}{\# \Omega} = \dfrac{\# A + \# B}{\# \Omega} = f(A) + f(B)$

- $f(\Omega) = 1$
- $f(\phi) = 0$

Définition :

Soit $(\Omega, \mathcal{F})$ un espace probabilisable.

Soit l'application $P : \mathcal{F} \longrightarrow [0, 1]$ vérifiant :

(i) $P(\Omega) = 1$

(ii) $\forall A, B \in \mathcal{F}$, $A \cap B = \phi$; $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ (P est additif)

P est appelée probabilité sur $(\Omega, \mathcal{F})$.

Le tuplet $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ s'appelle espace de probabilité.

Propriétés : Soit $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espace de probabilité. Alors

1) $P(\phi) = 0$

2) $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$; $\forall A \in \mathcal{F}$

3) $\forall A, B \in \mathcal{F}$, $B \subseteq A$ alors $P(A \setminus B) = P(A) - P(B)$

4) Si $B \subseteq A$ alors $P(B) \leq P(A)$

5) $\forall A, B \in \mathcal{F}$, $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

Preuve :

1) $\Omega = \Omega \cup \phi$

$P(\Omega) = 1 = P(\Omega) + P(\phi) = 1 + P(\phi)$

donc $P(\phi) = 0$.

2) Soit $A \in \mathcal{F}$

$A \cup \bar{A} = \Omega$. Donc $P(A \cup \bar{A}) = P(\Omega) = 1$

$= P(A) + P(\bar{A})$

$\Rightarrow P(\bar{A}) = 1 - P(A)$.

3) Soit $A, B \in \mathcal{F}$; $B \subseteq A$

. $A = B \cup A \setminus B$

$\Rightarrow P(A) = P(B) + P(A \setminus B) \Rightarrow P(A \setminus B) = P(A) - P(B)$.

4) $B \subseteq A$; $P(A \setminus B) \in [0, 1]$

$= P(A) - P(B) \Rightarrow P(A) \geq P(B)$.

5)

$A \cup B = A \setminus A \cap B \cup A \cap B \cup B \setminus A \cap B$

$\Rightarrow P(A \cup B) = P(A \setminus A \cap B) + P(A \cap B) + P(B \setminus A \cap B)$

$= P(A) - P(A \cap B) + P(A \cap B) + P(B) - P(A \cap B)$

$= P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

Remarque :

Si $\# \Omega < \infty$, alors la seule probabilité qui existe sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ est la fréquence statistique.

$$f(A) = \frac{\# A}{\# \Omega}$$

$\#C = 5 \times 6 \times 7$

$P(C) = \dfrac{5 \times 6 \times 7}{17 \times 13 \times 14} = \dfrac{15}{4 \times 13} = \dfrac{5}{52}$

D " exactement 2 blanches "

$\#D = 5 \times 6 \times 7 + 5 \times 7 \times 6 + 7 \times 5 \times 6 = 3 \times 5 \times 6 \times 7$

$P(D) = \dfrac{15 \times 6 \times 7}{17 \times 13 \times 14} = \dfrac{15}{4 \times 13} = \dfrac{15}{52}$

Ex 1 :

$\# \Omega = 12 \times 13 \times 14$

1/ A " aucune blanche "

$P(A) = \dfrac{\#A}{\#\Omega}$; $\#A = 7 \times 8 \times 9$

$P(A) = \dfrac{7 \times 8 \times 9}{12 \times 13 \times 14} =$

(b_1, b_2, b_3)

2) B : " exactement une blanche "

$\#B = 5 \times 7 \times 8 + 7 \times 5 \times 8$
$+ 7 \times 8 \times 5 = 3 \times 5 \times 7 \times 8$

$P(B) = \dfrac{15 \times 8}{11 \times 13 \times 2} = \dfrac{5}{13}$

3) C : " trois blanche "