Taki Academy
www.takiacademy.com

Physique

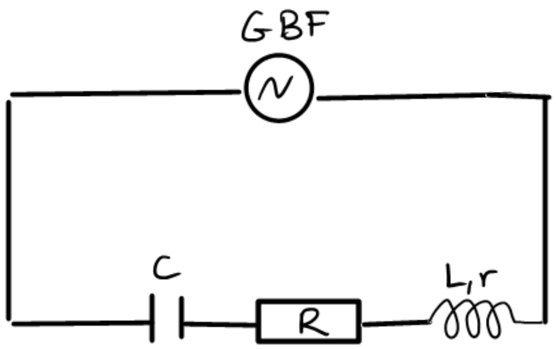
Classe : 4ème année

Chapitre : Oscillations électriques forcées

Fiche de méthodes

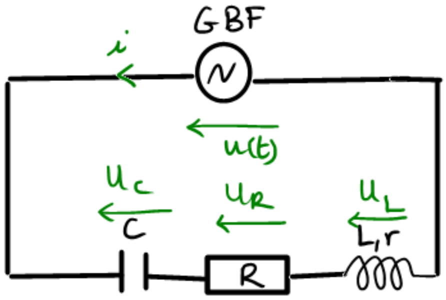
Oscillations électriques forcées

Montage :



* le resonateur : le circuit RLC
* l'excitateur : le G.B.F

Q1 : Déterminer l'équation differentielle relative à i(t)



loi des mailles ;

$$u_R + u_L + u_C - u = 0$$

$$i = C\frac{du_C}{dt}$$

$$\Rightarrow Ri + L\frac{di}{dt} + ri + \frac{q}{C} = u(t)$$

$$i = \frac{dq}{dt} \rightarrow q = \int i(t).\,dt$$

$$\Rightarrow \boxed{(R+r)i + L\frac{di}{dt} + \frac{1}{C}\int i(t).\,dt = u(t)}.$$

Q_2 : Faire la construction de Fresnel :

$$\underbrace{(R+r)\,i(t)}_{\vec{V}_1} + \underbrace{L\frac{di(t)}{dt}}_{\vec{V}_2} + \underbrace{\frac{1}{C}\int i(t)\,dt}_{\vec{V}_3} = \underbrace{u(t)}_{\vec{V}} \quad \text{et} \quad \boxed{i(t) = I_m \sin(\omega t + \varphi_i)}$$

$* \ \vec{V}_1 \rightarrow (R+r)\,i(t) = (R+r)\,I_m \sin(\omega t + \varphi_i)$

$$\Rightarrow \vec{V}_1 \left| \begin{array}{l} (R+r)\,I_m \\ \varphi_i \end{array} \right.$$

$* \ \vec{V}_2 \rightarrow L\frac{di}{dt} = L\frac{d}{dt}\left(I_m \sin(\omega t + \varphi_i)\right) = L I_m \omega \sin\left(\omega t + \varphi_i + \frac{\pi}{2}\right)$

$$\Rightarrow \vec{V}_2 \left| \begin{array}{l} L I_m \omega \\ \varphi_i + \frac{\pi}{2} \end{array} \right.$$

$* \ \vec{V}_3 \rightarrow \frac{1}{C}\int i(t)\,.dt = \frac{1}{C}\int I_m \sin(\omega t + \varphi_i) = \frac{I_m}{C\omega} \sin\left(\omega t + \varphi_i - \frac{\pi}{2}\right)$

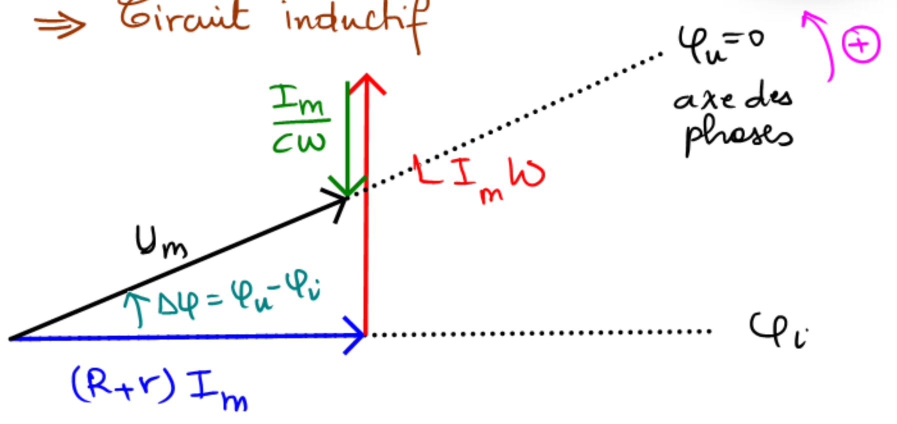
$$\Rightarrow \vec{V}_3 \left| \begin{array}{l} \frac{I_m}{C\omega} \\ \varphi_i - \frac{\pi}{2} \end{array} \right.$$

$* \ \vec{V} \rightarrow u(t) = U_m \sin(\omega t + \varphi_u)$, soit $\varphi_u = 0$

$$\Rightarrow \vec{V} \left| \begin{array}{l} U_m \\ \varphi_u = 0 \end{array} \right.$$

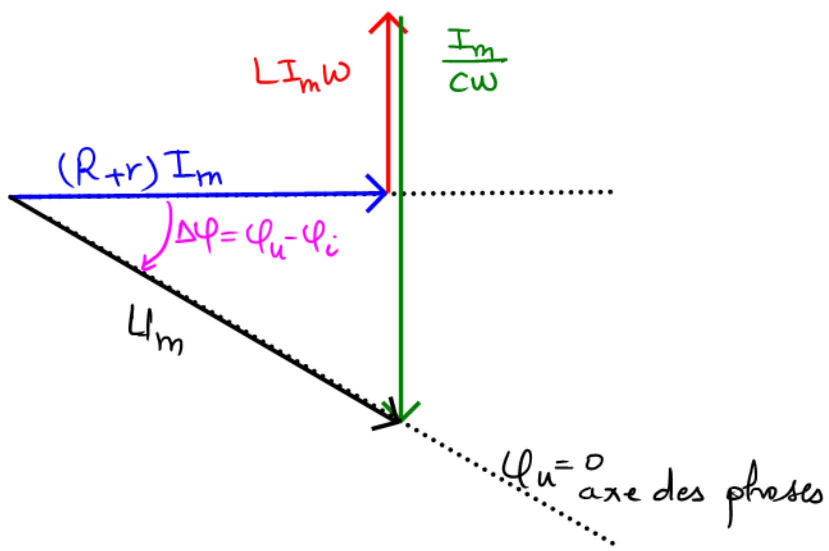
$\boxed{1^{er}\text{ cas}}$: $\omega > \omega_0 \Rightarrow L\omega I_m > \dfrac{I_m}{C\omega}$

$\Rightarrow$ Circuit inductif



* $\Delta\varphi = \varphi_u - \varphi_i > 0 \Rightarrow \varphi_u > \varphi_i$
* $u(t)$ est en avance de phase par rapport à $i(t)$.

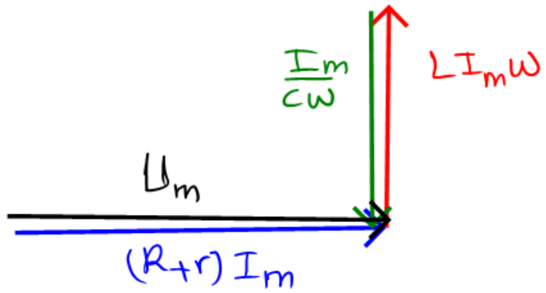
$\boxed{2^{ème}\text{ cas}}$: $\omega < \omega_0 \Rightarrow L I_m \omega < \dfrac{I_m}{C\omega} \Rightarrow$ Circuit capacitif



* $\Delta\varphi = \varphi_u - \varphi_i < 0 \Rightarrow \varphi_u < \varphi_i$

$u(t)$ est en retard de phase par rapport à $i(t)$. $\Rightarrow$ $i(t)$ est en avance de phase par rapport $u(t)$.

$3^{ème}$ cas : $\omega = \omega_0 \Rightarrow L I_m \omega = \frac{I_m}{C\omega} \Rightarrow$ Circuit résitif

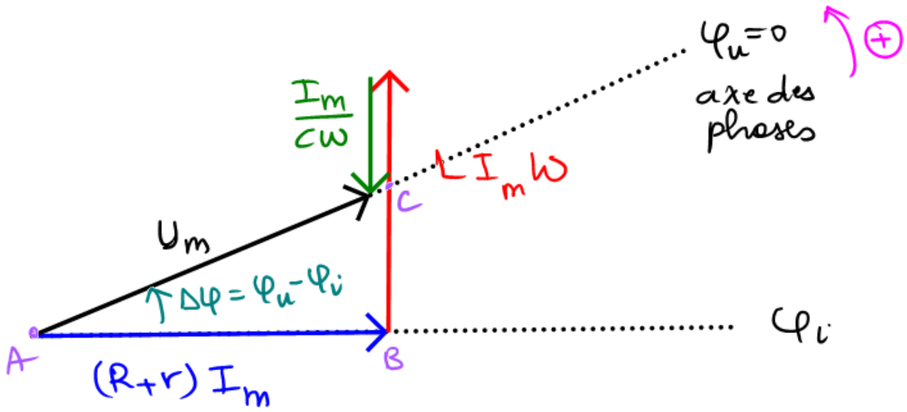


* $\Delta\varphi = \varphi_u - \varphi_i = 0 \Rightarrow \varphi_u = \varphi_i$

u(t) et i(t) sont en phase

Dans ce cas, On parle d'une résonance d'intensité

Q₃ : Déterminer l'expression de I_m :



D'après Pytagore : $AC^2 = AB^2 + BC^2$

$$U_m^2 = \left[(R+r) I_m\right]^2 + \left[L I_m \omega - \frac{I_m}{C\omega}\right]^2$$

$$U_m^2 = (R+r)^2 I_m^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2 I_m^2$$

$$U_m^2 = I_m^2 \left[(R+r)^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2\right]$$

$$\Rightarrow \boxed{I_m = \frac{U_m}{\sqrt{(R+r)^2+\left(L\omega-\frac{1}{C\omega}\right)^2}}}$$

avec : $Z = \sqrt{(R+r)^2+\left(L\omega-\frac{1}{C\omega}\right)^2}$: l'impédance électrique (Ω)

$$\Rightarrow I_m = \frac{U_m}{Z} \Rightarrow \boxed{U_m = Z \cdot I_m}$$

Q4 : Calculer la puissance moyenne consommée par le circuit

$$\boxed{\mathcal{P} = UI\cos(\varphi_u-\varphi_i) = (R+r)\,I^2}$$

avec ;
- $U = U_{eff}$: tension efficace (voltmètre)
- $I = I_{eff}$: intensité efficace (ampermètre)
- U_m : tension maximale
- I_m : intensité maximale

} oscilloscope

avec ; $I_{eff} = \frac{I_m}{\sqrt{2}}$ et $U_{eff} = \frac{U_m}{\sqrt{2}}$.

Aussi : $\boxed{\mathcal{P} = \frac{U_m I_m}{2}\cos(\varphi_u-\varphi_i)}$

Q_5 : Calculer le facteur de surtension :

* Le facteur de résonance Q se calcule à la résonance ;

$$Q = \frac{U_{Cm}}{U_m} = \frac{\frac{\cancel{I_m}}{C\omega}}{\cancel{I_m} \cdot Z} = \frac{1}{(R+r)C\omega_0} \quad , \quad \omega = \omega_0$$

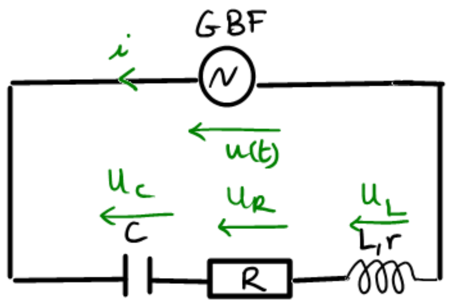
aussi $\boxed{Q = \frac{L\omega_0}{(R+r)} = \frac{1}{R+r}\sqrt{\frac{L}{C}}}$

Rque :

- À la resonance $L\omega = \frac{1}{C\omega} \Rightarrow Z = R + r$
- si $Q > 1 \Rightarrow$ il y a surtension

Q_6 : Déterminer l'équation différentielle rélative à $q(t)$:

D'après la loi des mailles ;



$$u_C + u_R + u_L - u = 0$$

$$\frac{q}{C} + Ri + L\frac{di}{dt} + ri = u(t)$$

$$\frac{1}{C}q(t) + (R+r)i + L\frac{di}{dt} = u(t) \quad ; \quad i = \frac{dq}{dt}$$

$$\boxed{\frac{1}{C}q(t) + (R+r)\frac{dq}{dt} + L\frac{d^2q}{dt^2} = u(t)}$$

la solution de cette équation est :

$$\boxed{q(t) = Q_m \sin(\omega t + \varphi_q)}$$

Q_7 : Faire la construction de Fresnel pour les différents cas :

$\omega < \omega_0$; $\omega > \omega_0$; $\omega = \omega_0$

$$\underbrace{\frac{1}{C} q}_{\vec{V_1}} + \underbrace{(R+r)\frac{dq}{dt}}_{\vec{V_2}} + \underbrace{L\frac{d^2q}{dt^2}}_{\vec{V_3}} = \underbrace{u(t)}_{\vec{V}}$$

$$\vec{V_1} \rightarrow \frac{1}{C} q = \frac{Q_m}{C} \sin(\omega t + \varphi_q) \rightarrow \vec{V_1} \left| \begin{array}{l} \frac{Q_m}{C\omega} \\ \varphi_q \end{array} \right.$$

$$\vec{V_2} \rightarrow (R+r)\frac{dq}{dt} = Q_m \omega (R+r) \sin\left(\omega t + \varphi_q + \frac{\pi}{2}\right) \rightarrow \vec{V_2} \left| \begin{array}{l} Q_m (R+r)\omega \\ \varphi_q + \frac{\pi}{2} \end{array} \right.$$

$$\vec{V_3} \rightarrow L\frac{d^2q}{dt^2} = L\frac{d}{dt}\left(\frac{d}{dt} Q_m \sin(\omega t + \varphi_q)\right)$$

$$= L\frac{d}{dt}\left(Q_m \cdot \omega \sin\left(\omega t + \varphi_q + \frac{\pi}{2}\right)\right)$$

$$= L Q_m \omega^2 \sin\left(\omega t + \varphi_q + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$= L Q_m \omega^2 \sin(\omega t + \varphi_q + \pi)$$

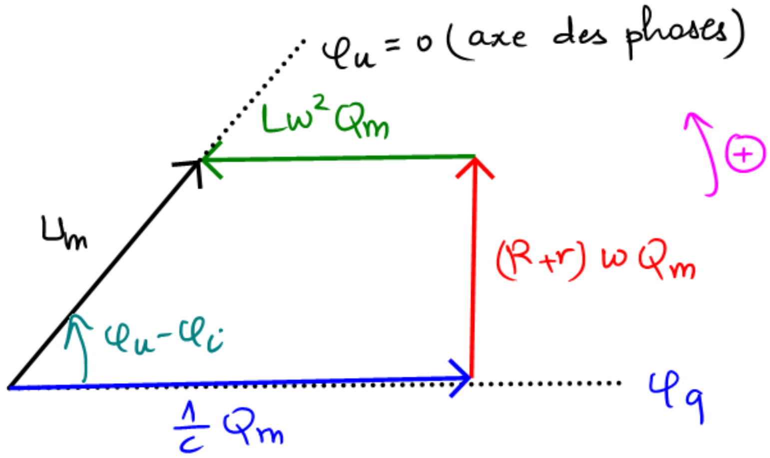
$$\longrightarrow \vec{V_3} \left| \begin{array}{l} L Q_m \omega^2 \\ \varphi_q + \pi . \end{array} \right.$$

$$\vec{V} \longrightarrow u(t) = U_m \sin(\omega t) \Longrightarrow \vec{V} \left| \begin{matrix} U_m \\ \varphi_u = 0 \end{matrix} \right.$$

D'où :

$$\vec{V_1} \left| \begin{matrix} \frac{Q_m}{C} \\ \varphi_q \end{matrix} \right. + \vec{V_2} \left| \begin{matrix} (R+r)\omega Q_m \\ \varphi_q + \frac{\pi}{2} \end{matrix} \right. + \vec{V_3} \left| \begin{matrix} L Q_m \omega^2 \\ \varphi_q + \pi \end{matrix} \right. = \vec{V} \left| \begin{matrix} U_m \\ \varphi_u = 0 \end{matrix} \right.$$

1er cas : $\omega < \omega_0$



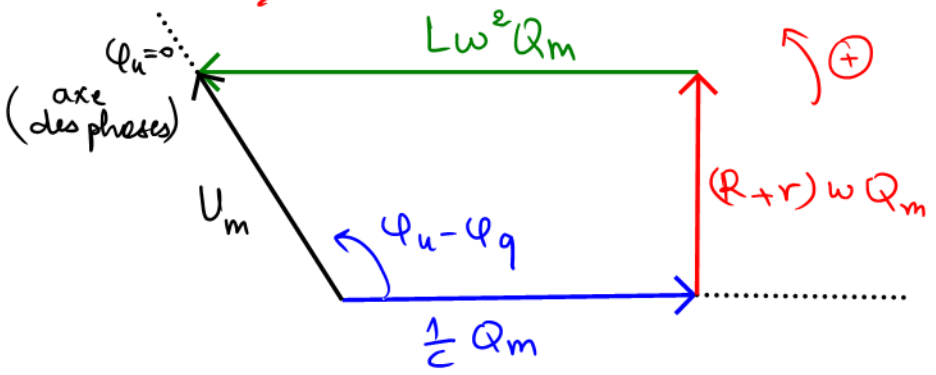
- $L\omega^2 Q_m < \frac{1}{C} Q_m$

- $\varphi_u - \varphi_q > 0 \Rightarrow \varphi_u > \varphi_q$

$\Rightarrow$ $u(t)$ est en avance de phase par rapport à $q(t)$.

Dans ce cas, On a $\boxed{\varphi_u - \varphi_q < \frac{\pi}{2}}$

2ème cas : $\omega > \omega_0$

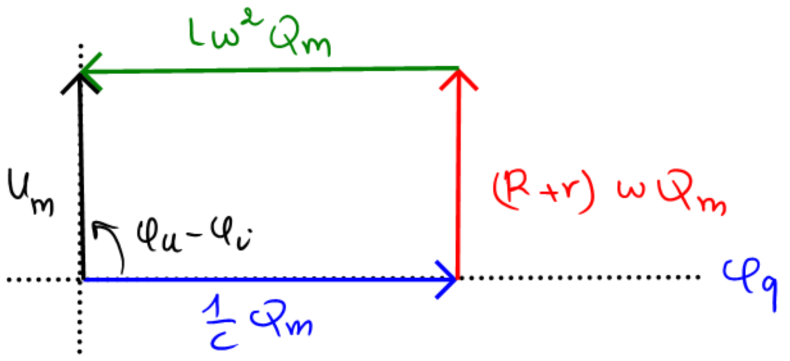


- $L\omega^2 Q_m > \frac{1}{C} Q_m$
- $\Delta\varphi = \varphi_u - \varphi_q > 0 \Rightarrow \varphi_u > \varphi_q$

$\Rightarrow$ u(t) est en avance de phase par rapport à q(t).

Rque : • Dans ce cas, One $\varphi_u - \varphi_q > \frac{\pi}{2}$ et u(t) tjrs en avance de phase par rapport à q(t).

3ème cas : $\omega = \omega_0$



$* \; L\omega^2 Q_m = \frac{1}{C} Q_m$

$* \; \Delta\varphi = \varphi_u - \varphi_q = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \Delta\varphi > 0$

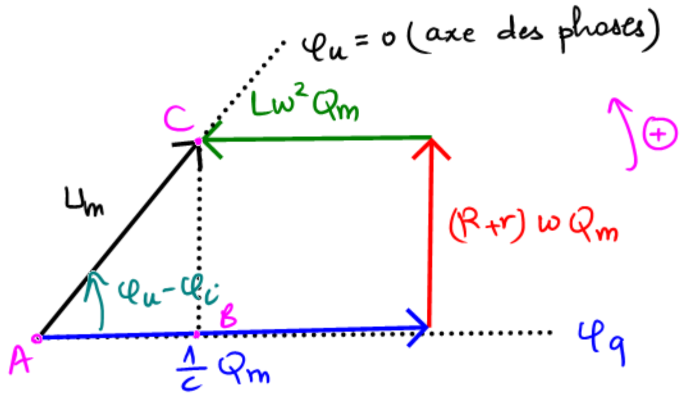
Remarque :

- Dans les 3 cas, On a trouvé que $u(t)$ est en avance de phase par rapport à $q(t)$.

$\Rightarrow$ $u(t)$ est toujours en avance de phase par rapport $q(t)$.

Q_8 : Déterminer l'expression de Q_m par 2 méthodes :

1ère méthode :



D'après Pythagore :

$$AC^2 = BC^2 + AB^2$$

$$U_m^2 = \left[(R+r)\,\omega\, Q_m\right]^2 + \left[\frac{1}{C} Q_m - L\omega^2 Q_m\right]^2$$

$$U_m^2 = Q_m^2 \left[(R+r)\,\omega\right]^2 + \left[\frac{1}{C} - L\omega^2\right] Q_m^2$$

$$Q_m^2 = \frac{U_m^2}{[(R+r)\omega]^2 + [\frac{1}{C} - L\omega^2]^2}$$

$$\boxed{Q_m = \frac{U_m}{\sqrt{[(R+r)\omega]^2 + [\frac{1}{C} - L\omega^2]^2}}}$$

2ème méthode :

$$Q = C\,U_c$$

$$Q_{max} = C\,U_{c\,max}$$

$$Q_{max} = \cancel{C}\,\frac{I_m}{\cancel{C}\omega}$$

$$Q_{max} = \frac{U_m}{\omega\sqrt{(R+r)^2 + (L\omega - \frac{1}{C\omega})^2}}$$

$$Q_{max} = \frac{U_m}{\sqrt{\omega^2(R+r)^2 + (L\omega - \frac{1}{C\omega})^2\omega^2}}$$

$$\boxed{Q_{max} = \frac{U_m}{\sqrt{[\omega(R+r)]^2 + (L\omega^2 - \frac{1}{C})^2}}}$$

Q_3 : Déterminer l'expression de la pulsation à la résonance de charge (ω_r) :

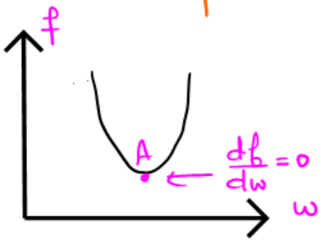
Résonance de charge $\Rightarrow$ Q_m est maximale

$$Q_m = \frac{U_m}{\sqrt{[(R+r)\,\omega]^2 + \left[\frac{1}{C} - L\omega^2\right]^2}}$$

- Pour que Q_{max} soit maximale, il faut que :

$$f(\omega) = [(R+r)\omega]^2 + \left[\frac{1}{C} - L\omega^2\right]^2 \text{ soit } \boxed{\text{minimale}}.$$

Rappel mathématique



- au point A ; f est minimale donc $\frac{df}{d\omega} = 0$

- Pour que $f(\omega)$ soit minimale, il faut que :

$$* \ \frac{df(\omega)}{d\omega} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{d}{d\omega}\left[(R+r)^2\,\omega_r^2 + \left(\frac{1}{C} - L\omega_r^2\right)^2\right] = 0$$

$$\frac{d}{d\omega}\,\underbrace{(R+r)^2}_{a}\,\underbrace{\omega_r^2}_{\omega} + \frac{d}{d\omega}\left(\underbrace{\frac{1}{C} - L\omega_r^2}_{f}\right)^2 = 0$$

On a :

$$\frac{d}{dw} a w = a \frac{d}{dw} w \quad \text{et} \quad \frac{d}{dw} f^2(w) = 2 f(w) \frac{d}{dw} f(w)$$

$$\Rightarrow (R+r)^2 \frac{d}{dw} w_r^2 + 2\left(\frac{1}{C} - L w_r^2\right) \frac{d}{dw}\left(\frac{1}{C} - L w_r^2\right) = 0$$

$$(R+r)^2 2 . w_r + 2\left(\frac{1}{C} - L w_r^2\right)\left[\cancel{\frac{d}{dw}\left(\frac{1}{C}\right)}^{0} - \frac{d}{dw} L w_r^2\right] = 0$$

$$\Rightarrow (R+r)^2 \cancel{2} . \cancel{w_r} - 2\left(\frac{1}{C} - L w_r^2\right) \cancel{2} L \cancel{w_r} = 0$$

$$\Rightarrow (R+r)^2 - 2\left(\frac{L}{C} - L^2 w_r^2\right) = 0$$

$$\Rightarrow (R+r)^2 - \frac{2L}{C} + 2L^2 w_r^2 = 0$$

$$\Rightarrow 2L^2 w_r^2 = \frac{2L}{C} - (R+r)^2$$

$$w_r^2 = \frac{\cancel{2}\cancel{L}}{\cancel{2}L^{\cancel{2}}C} - \frac{(R+r)^2}{2L^2}$$

$$w_r^2 = \frac{1}{LC} - \frac{(R+r)^2}{2L^2}$$

$$\boxed{w_r^2 = w_0^2 - \frac{(R+r)^2}{2L^2}}$$

En déduire N_r ??

$$w_r^2 = w_0^2 - \frac{(R+r)^2}{2L^2} \quad \text{avec} \quad w_r = 2\pi N_r$$

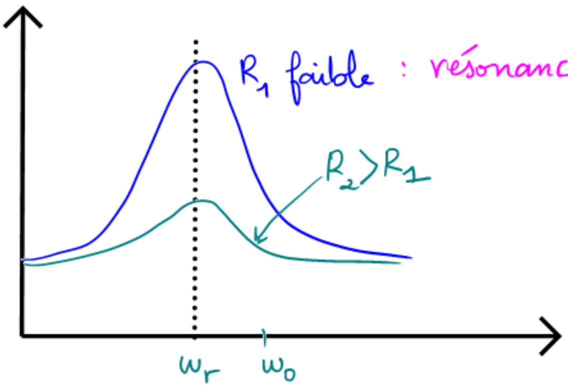
$$\Rightarrow (2\pi N_r)^2 = (2\pi N_0)^2 - \frac{(R+r)^2}{2L^2}$$

$$\Rightarrow 4\pi^2 N_r^2 = 4\pi^2 N_0^2 - \frac{(R+r)^2}{2L^2}$$

$$\boxed{N_r^2 = N_0^2 - \frac{(R+r)^2}{8\pi^2 L^2}}$$

Q_{10} : Donner l'allure de $Q_m = f(\omega)$

(*)



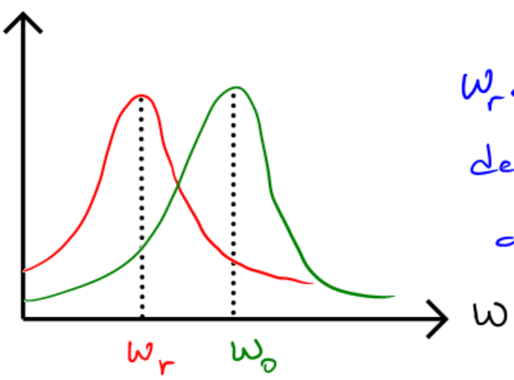
R_1 : résonance aigue

R_2 : résonance floue.

Rque :

$$\omega_r^2 = \omega_0^2 - \frac{(R+r)^2}{2L^2} \Rightarrow \omega_r < \omega_0$$

Q_{11} : Donner l'allure de $I_m = f(\omega)$ et $Q_m = f(\omega)$ dans le même repère :



$\omega_r < \omega_0$: la résonance de charge se produit avant la résonance d'intensité

Astuces :

1. Déterminer les tensions maximales U_m, U_{Rm}, U_{Lm}, U_{Cm}, U_{Dm} :

$$Z = \sqrt{(R+r)^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2}$$

* $U_m = Z I_m$
* $U_{Rm} = R I_m$
* $U_{Cm} = \frac{1}{C\omega} I_m$
* $U_{Lm} = \sqrt{r^2 + (L\omega)^2}\, I_m$
* $U_{Dm} = \sqrt{r^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2}\, I_m$

avec $\boxed{U_D = U_C + U_L}$

2. Relations entre les phases :

* $q = C U_c \Rightarrow \varphi_q = \varphi_{uc}$
* $i = C \frac{du_c}{dt} \Rightarrow \varphi_i = \varphi_{uc} + \frac{\pi}{2}$

$\varphi_i = \varphi_q + \frac{\pi}{2}$

* si $r = 0$; $U_L = L \frac{di}{dt} \Rightarrow \varphi_L = \varphi_i + \frac{\pi}{2}$

3. Identification des courbes :

* $u(t)$ et $u_L(t)$:

$u_L(t)$ est toujours en avance de phase par rapport à $u(t)$.

* $u(t)$ et $u_c(t)$:

$u_c(t)$ est toujours en retard de phase par rapport à $u(t)$.

* $u(t)$ et $u_R(t)$:

$$Z > R$$

$$Z I_m > R I_m$$

$$U_m > U_{Rm}$$

$\rightarrow$ $u(t)$ correspond à la courbe ayant l'amplitude maximale la plus grande.

* $\sqrt{r^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2}\, I_m < \sqrt{(R+r)^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2}\, I_m$

$$\Rightarrow U_{Dm} < U_m .$$

4. Montrer que le circuit est en état de résonance d'intensité dans les cas suivants :

* $\varphi_{u_C} - \varphi_u = \frac{-\pi}{2}$ (1)

On a $i = \frac{du_C}{dt} \rightarrow \varphi_i = \varphi_{u_C} + \pi/2 \Rightarrow \varphi_{u_C} = \varphi_i - \pi/2$ (2)

(2) dans (1) $\varphi_i - \frac{\pi}{2} - \varphi_u = -\frac{\pi}{2} \Rightarrow \varphi_i - \varphi_u = \cancel{-\frac{\pi}{2}} + \cancel{\frac{\pi}{2}} = 0$

$$\boxed{\varphi_i - \varphi_u = 0}$$

$* \quad \varphi_L - \varphi_u = \frac{\pi}{2} \quad (r=0) \quad (*)$

$$u_L = L\frac{di}{dt} \Rightarrow \varphi_L = \varphi_i + \frac{\pi}{2} \quad (**)$$

$(**)$ dans $(*)$ $\Rightarrow \varphi_i + \frac{\pi}{2} - \varphi_u = \frac{\pi}{2}$

$$\Rightarrow \varphi_i - \varphi_u = \cancel{\pi/2} - \cancel{\pi/2} = 0$$

$$\boxed{\varphi_i - \varphi_u = 0}$$