Taki Academy
www.takiacademy.com

Physique

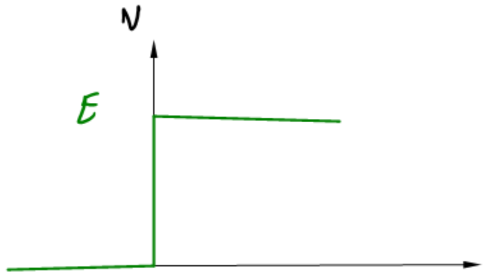
Réponse d'un dipôle RC à un échelon de Tension

Fiche Méthode

Résumé: Le dipôle RC

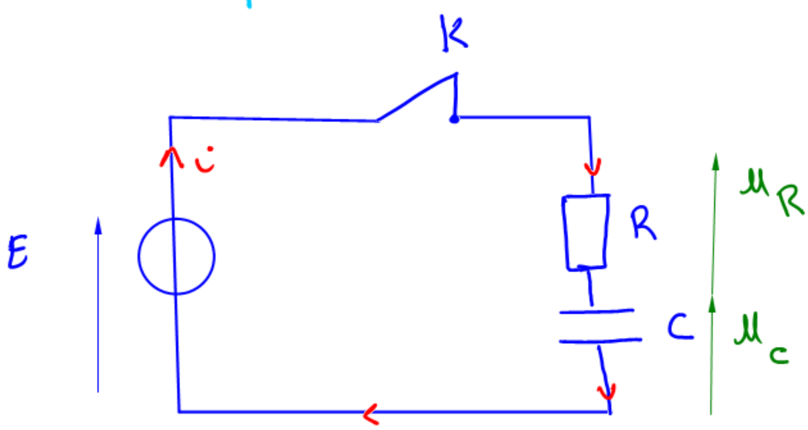
Réponse d'un dipôle RC à un échelon de tension.

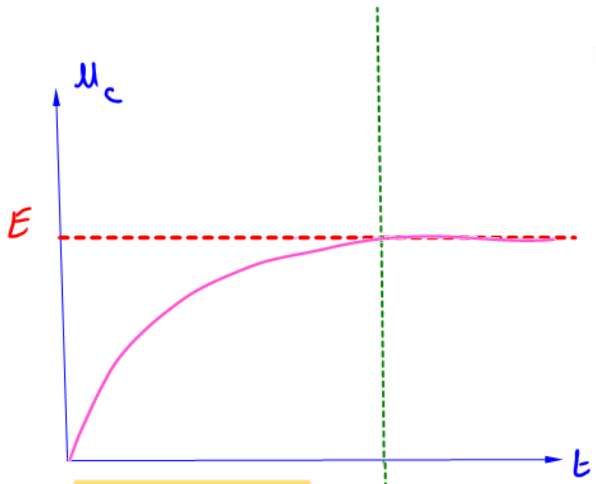
Echelon de tension : c'est une tension qui passe brutalement de 0V à une valeur constante E.



Réponse d'un dipôle : comportement de la tension aux bornes du dipôle suite à l'application d'une tension.

Etude expérimentale :





Régime transitoire

Régime permanent

Etude théorique :

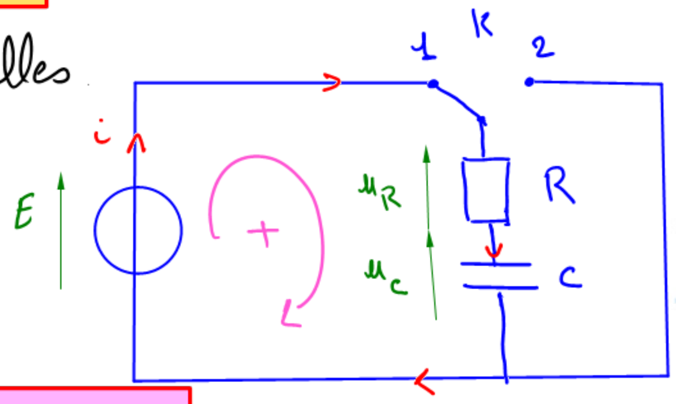
Question : Etabli l'équation différentielle en fonction de : u_c, q ou i.

Démarche :

1 - Représenter le courant et les tensions par des flèches

2 - $$\boxed{\begin{cases} u_R = R \cdot i \\ i = \dfrac{dq}{dt} \Rightarrow q = \int i \, dt \\ q = C \cdot u_c \end{cases}}$$

3 - Appliquer la loi des mailles



$E - u_R - u_c = 0 \quad (K = 1)$

$\Rightarrow \boxed{u_R + u_c = E}$

Equation différentielle en fonction de u_c :

$u_R + u_c = E$

$\Rightarrow R i + u_c = E$

$\Rightarrow R \dfrac{dq}{dt} + u_c = E$

$\Rightarrow R \cdot \dfrac{d\, C u_c}{dt} + u_c = E$

$$\boxed{\begin{aligned} u_R &= R\, i \\ i &= \frac{dq}{dt} \\ q &= C \cdot u_c \end{aligned}}$$

⚠

$\Rightarrow \left(RC \dfrac{du_c}{dt} + u_c = E \right) \times \dfrac{1}{RC}$

$$\boxed{\frac{du_C}{dt} + \frac{1}{RC} \cdot u_C = \frac{E}{RC}}$$

Equation différentielle en fonction de q :

$u_R + u_C = E$

$\Rightarrow Ri + \frac{q}{C} = E$

$\Rightarrow \left(R \cdot \frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = E\right) \times \frac{1}{R}$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{dq}{dt} + \frac{q}{RC} = \frac{E}{R}}$$

Equation différentielle en fonction de i :

$u_R + u_C = E$

$\Rightarrow Ri + u_C = E$

$\Rightarrow Ri + \frac{q}{C} = E$

$\Rightarrow \frac{d}{dt}\left(R \cdot i + \frac{1}{C} \cdot \int i \, dt\right) = \frac{dE}{dt}$ (On dérive cette équation)

$\Rightarrow \left(R \cdot \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} \cdot i = 0\right) \times \frac{1}{R}$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{di}{dt} + \frac{1}{RC} \cdot i = 0}$$

Equation différentielle en fonction de u_R :

$$u_R + u_C = E$$

$$\Rightarrow u_R + \frac{q}{C} = E$$

$$\Rightarrow \frac{d\left(u_R + \frac{1}{C}\int i\,dt\right)}{dt} = \frac{dE}{dt}$$ (On dérive l'équation)

$$\Rightarrow \frac{du_R}{dt} + \frac{1}{C}\cdot i = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{du_R}{dt} + \frac{1}{RC}\cdot u_R = 0}$$

Solution de l'équation différentielle :

$$\frac{du_C}{dt} + \frac{1}{RC}u_C = \frac{E}{RC}$$

$u_C(t)$ est la solution de l'équation différentielle, elle s'écrit sous la forme :

$$\boxed{u_C(t) = A\,e^{-\alpha t} + B}$$

A, B et α sont des constantes.

Question ? Déterminer A, B et α.

⚠ $u_C(t)$ a une forme exponentielle

caractéristique de la fonction e^t

1 - $e^0 = 1$

2 - $\dfrac{d\, e^{at}}{dt} = \left(e^{at}\right)' = a \cdot e^{at}$

3 - $e^{+\infty} = +\infty$

4 - $e^{-\infty} = 0$

$$\boxed{\dfrac{d u_c}{dt} + \dfrac{1}{Rc} \cdot u_c = \dfrac{E}{Rc}}$$

: c'est l'équation différentielle en fonction de u_c

1 Déterminer A, B et α

$$u_c(t) = A e^{-\alpha t} + B$$

1 - Conditions aux limites (à $t = 0$ et à $t = +\infty$)

à $t = 0$, le condensateur est déchargé ; $u_c(t) = 0$

$u_c(t=0) = 0 \Rightarrow A e^0 + B = 0$

$A + B = 0$

$\Rightarrow \boxed{A = -B}$

à $t \to +\infty$, le condensateur est totalement chargé

donc $u_c = E$

$u_c(t \to +\infty) = E$ d'où $A \cancel{e^{-\alpha t}} + B = E$

$\Rightarrow \boxed{B = E}$

donc $\begin{cases} B = E \\ \text{et} \\ A = -E \end{cases}$ d'où $u_c(t) = -E e^{-\alpha t} + E$

$$\boxed{u_c(t) = E\left(1 - e^{-\alpha t}\right)}$$

2. Calculer $\frac{du_c}{dt}$

$$\frac{du_c}{dt} = \left(E - E e^{-\alpha t}\right)' = 0 - \left(E e^{-\alpha t}\right)'$$

$$= \alpha E e^{-\alpha t}$$

$$\boxed{\frac{du_c}{dt} = \alpha E e^{-\alpha t}}$$

3. On remplace dans l'équation différentielle:

$$\frac{du_c}{dt} + \frac{1}{RC} \cdot u_c = \frac{E}{RC} \Rightarrow \alpha \cancel{E} e^{-\alpha t} + \frac{\cancel{E}}{RC}\left(1 - e^{-\alpha t}\right) = \frac{\cancel{E}}{RC}$$

$$\Rightarrow \alpha e^{-\alpha t} + \cancel{\frac{1}{RC}} - \frac{1}{RC} e^{-\alpha t} = \cancel{\frac{1}{RC}}$$

$$\Rightarrow \underset{\neq 0}{e^{-\alpha t}} \cdot \left(\alpha - \frac{1}{RC}\right) = 0$$

d'où $\alpha - \frac{1}{RC} = 0$ donc $\boxed{\alpha = \frac{1}{RC} = \frac{1}{\tau}}$

Conclusion:

$$\boxed{u_c(t) = E\left(1 - e^{-t/\tau}\right)}$$

La solution de l'équation différentielle : $\frac{du_c}{dt} + \frac{1}{RC} u_c = \frac{E}{RC}$

La constante du temps (τ) :

Définition : On définit la constante du temps τ, une grandeur qui caractérise la rapidité de la charge du condensateur d'un dipôle RC

$$\boxed{\tau = R\,C}$$

τ : (s) un temps ; R : (Ω) ; C : (F)

⚠

τ peut être determinée par :

1 - un calcul direct ⟶ AN : $\tau = R.C$

2 - Méthode graphique : La tangente à l'origine

La méthode de 63%

Méthode de 63%

$$u_c(t) = E\left(1 - e^{-t/\tau}\right)$$

si $t = \tau$ alors : $u_c(\tau) = E\left(1 - e^{-\tau/\tau}\right)$

$$= E\left(1 - e^{-1}\right) \quad e^{-1} \approx 0{,}37$$

$$= 0{,}63 . E$$

d'où $\boxed{u_c = 0{,}63 . E}$

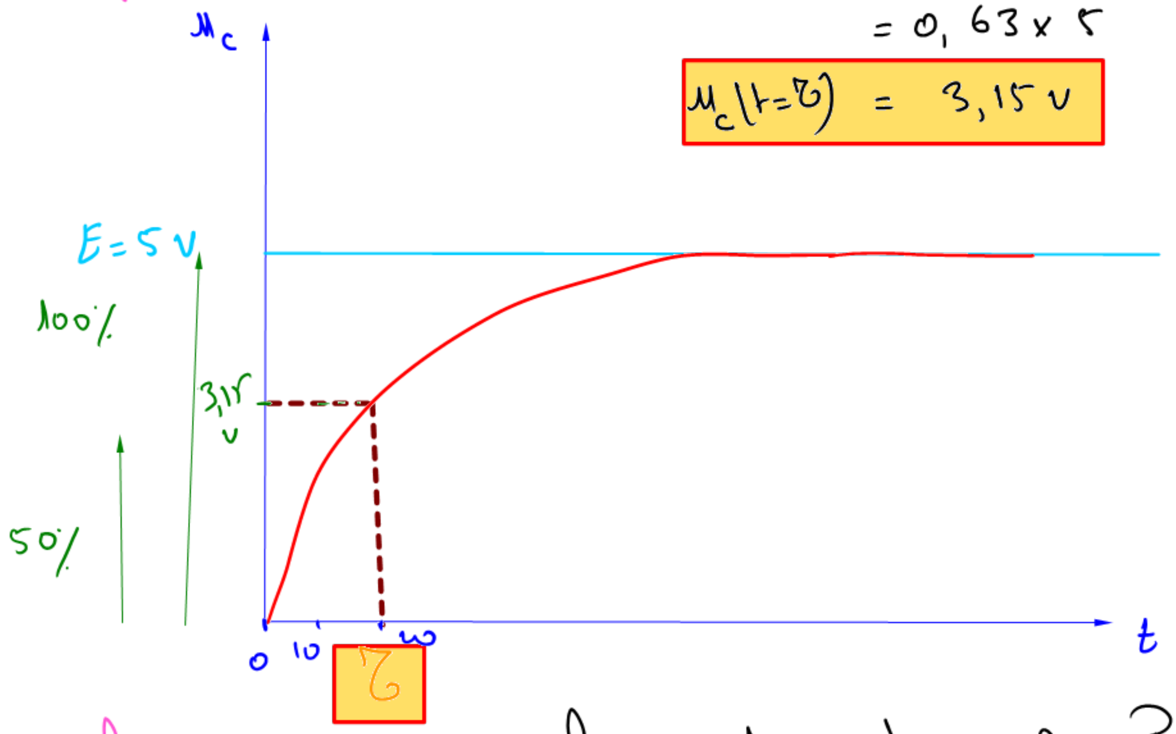
si $E = 5V$

$u_c(t=\tau) = 0{,}63\, E$

$= 0{,}63 \times 5$

$\boxed{u_c(t=\tau) = 3{,}15\, V}$

Exemple :



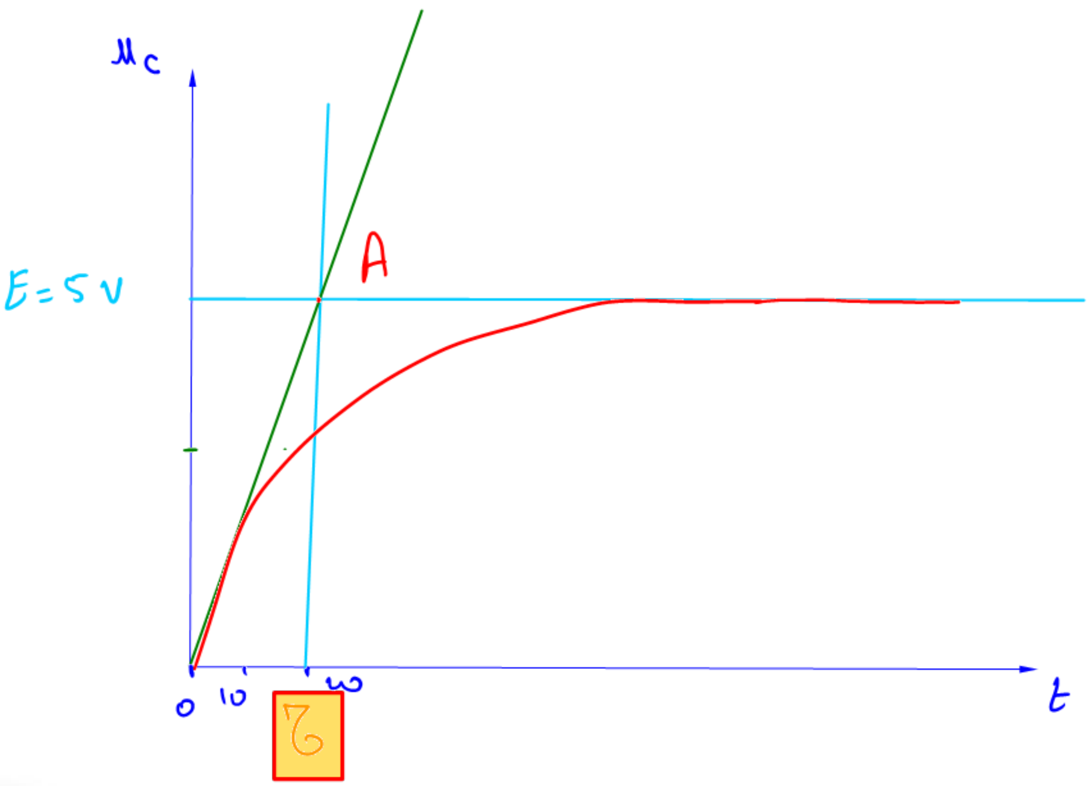
conclusion : à τ ; le condensateur se charge de 3,15 V c.à.d 63% de sa charge complète (5 V) donc $\boxed{\tau = 20\, ms}$

Méthode de la tangente

1 - On trace la tangente à la courbe à l'origine (çad au point de démarrage de la courbe)

2 - L'intersection de la tangente avec l'asymptote E est un point A.

3 - On projète le point A sur l'axe des temps t pour trouver directement le point τ



Remarque ⚠

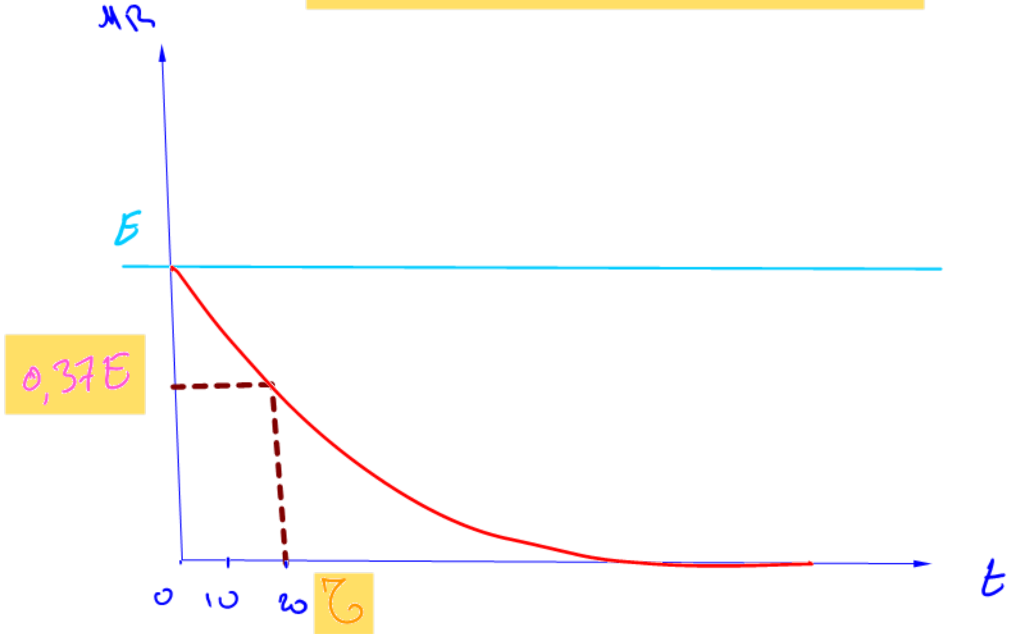
Déterminer la valeur de τ à partir de la courbe $u_R(t)$ (même cas pour $i(t)$)

On sait que $u_R(t) + u_C(t) = E$ (D'après la loi des mailles)

D'où à $t = \tau$; $u_R(\tau) = E - u_C(\tau)$

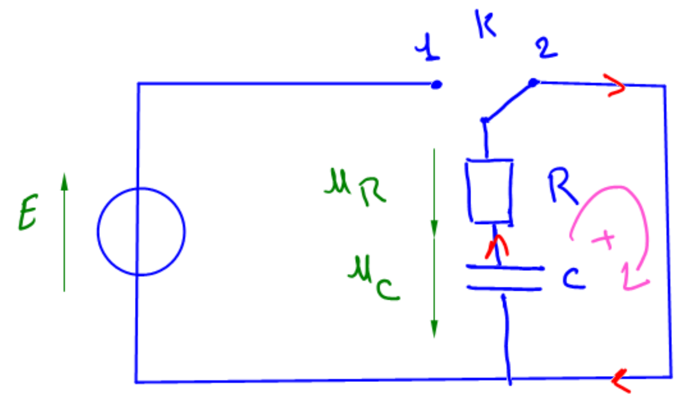
$= E - 0,63.E$

$$\boxed{u_R(\tau) = 0,37.E}$$

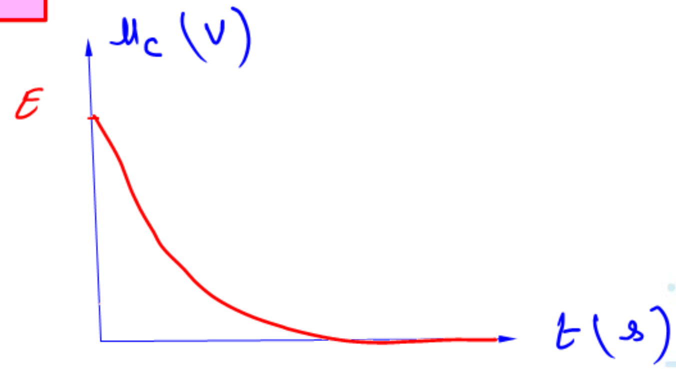


conclusion : à τ ; la tension aux bornes du résistor est $\boxed{u_R = 0,37\ E}$

Décharge du condensateur



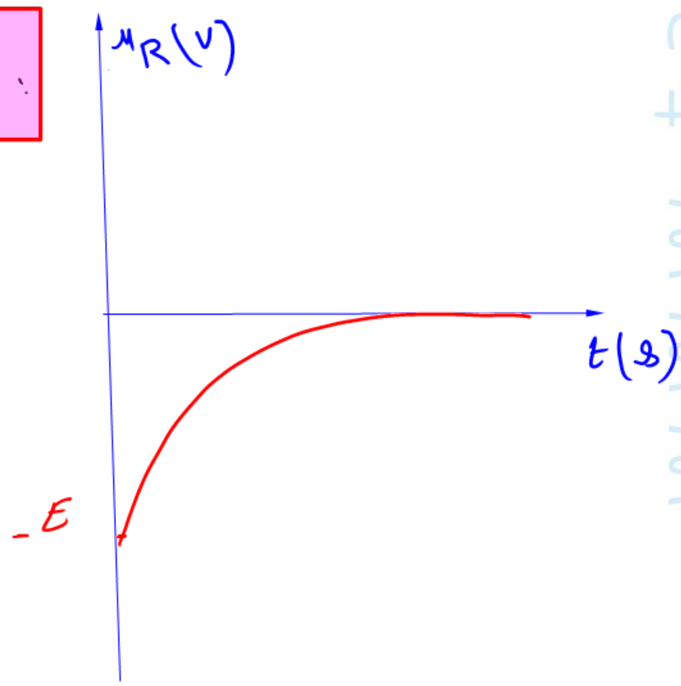
Allure de la courbe $u_C(t)$:



à $t = 0\,s$, $u_C(t) = E$

à $t \to +\infty$ $u_C(t) = 0\,V$

Allure de la courbe $u_R(t)$:



à $t = 0\,s$, $u_R(t) = -E$

à $t \to +\infty$, $u_R(t) = 0\,V$

Taki Academy
www.takiacademy.com

ترهني على قرايتك

Sousse (Khezama - Sahloul) Nabeul / Sfax / Bardo / Menzah El Aouina / Ezzahra / CUN / Bizerte / Gafsa / Kairouan / Medenine / Kébili / Monastir / Gabes / Djerba

www.takiacademy.com 73.832.000