Section : informatique   matière : mathématiques   session principale Juin 2019

Exercice 1 :

1) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \ln(1+x^2) = +\infty$ car $\lim\limits_{x\to+\infty} (1+x^2) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln\left(1+x^2\right)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln\left(x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)\right)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x^2)}{x} + \frac{\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}{x}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} 2\frac{\ln(x)}{x} + \frac{\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}{x} = 0$$

Donc (C) admet une branche parabolique de direction l'axe des abscisses au voisinage de $+\infty$

2) a) Pour tout réel $x \geq 0$; $f'(x) = \dfrac{2x}{1+x^2}$

b) Pour tout réel $x \geq 0$; $f''(x) = \dfrac{2(1+x^2)-2x(2x)}{(1+x^2)^2} = \dfrac{2+2x^2-4x^2}{(1+x^2)^2} = \dfrac{2(1-x^2)}{(1+x^2)^2}$

c) Pour tout réel x≥0 on a : f''(x)=0 sig $2(1-x^2)=0$ sig $1-x^2=0$ sig x=1.

x	0		1		$+\infty$
Signe de f''(x)		**+**	**0**	**-**	

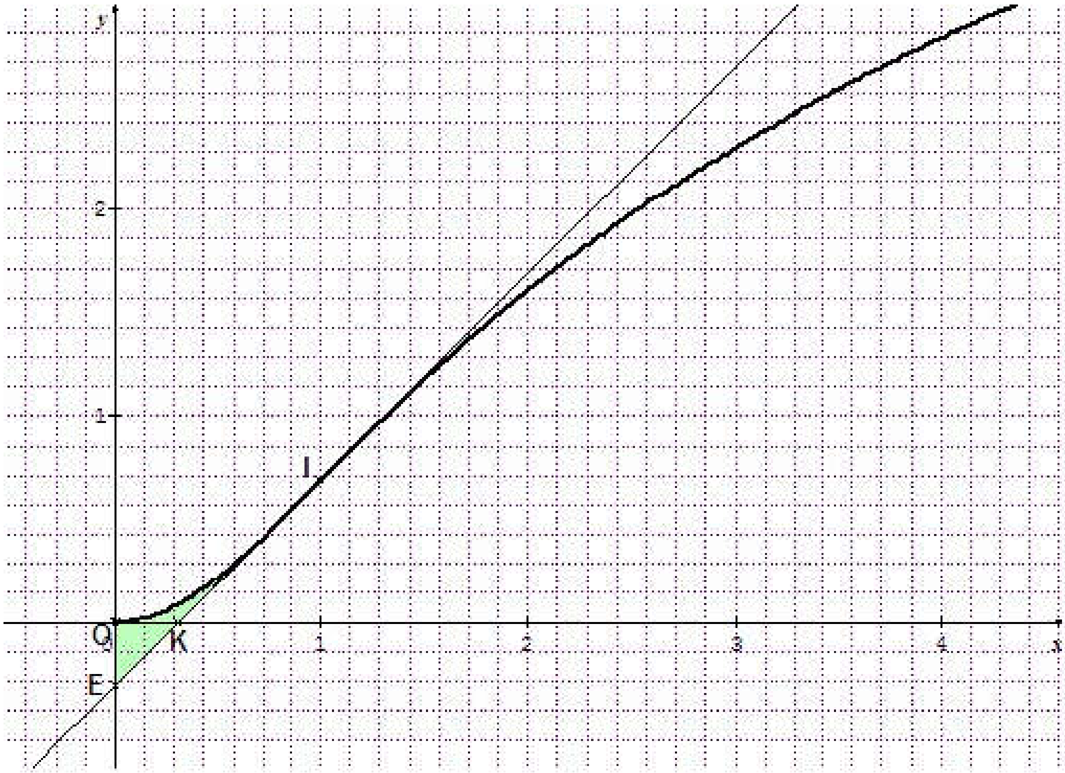
f'' s'annule en 1 enchangeantde signe donc $I(1, \ln 2)$ est un point d'inflexion de (C).

3) a) La tangente à (C) au point I a pour équation : $T : y = f'(1)(x-1) + f(1)$ donc $T : y = 1(x-1) + \ln 2$

donc T : y = x – 1 +ln2

b)M(x,y)∈(O,$\vec{\imath}$)∩T éq$\begin{cases} y = 0 \\ y = x - 1 + \ln 2 \end{cases}$ éq$\begin{cases} y = 0 \\ x = 1 - \ln 2 \end{cases}$d'où K(1-ln2,0) est le point d'intersection de T et l'axe des abscisses.

M(x,y)∈(O,$\vec{\jmath}$)∩T éq$\begin{cases} x = 0 \\ y = x - 1 + \ln 2 \end{cases}$ éq$\begin{cases} x = 0 \\ y = -1 + \ln 2 \end{cases}$d'où E(0,-1+ln2) est le point d'intersection de T et l'axe des ordonnées.

c) 

4) a) le triangle OHE est rectangle en O donc $L=\dfrac{OE\times OK}{2}=\dfrac{(1-\ln 2)\left|\ln 2-1\right|}{2}=\dfrac{(1-\ln 2)^2}{2}$

b) Pour tout $x\in[0,1]$, $0\le x^2\le x$ donc $0<1+x^2\le 1+x$

D'où $\ln(1+x^2)\le\ln(1+x)$ (car la fonction ln est croissante)

c) Pour tout réel $x\ge 0$, $\dfrac{x}{1+x}=\dfrac{x+1-1}{1+x}=\dfrac{x+1}{1+x}-\dfrac{1}{1+x}=1-\dfrac{1}{1+x}$

d) On pose $u(x)=\ln(1+x)$ $u'(x)=\dfrac{1}{1+x}$

$v'(x)=1$ $v(x)=x$

Donc $\int_0^1 \ln(1+x)\,dx=\left[x\ln(1+x)\right]_0^1-\int_0^1\dfrac{x}{1+x}\,dx=\ln 2-\int_0^1(1-\dfrac{1}{1+x})\,dx$

$=\ln 2-\left[x-\ln(1+x)\right]_0^1$

$=2\ln 2-1$

e) La courbe C étant au dessus de T sur l'intervalle $[0,1]$

donc $S=\int_0^1 \ln(1+x^2)-(x-1+\ln 2)\,dx$

D'autre part : pour tout $x\in[0,1]$

$\ln(1+x^2)\le\ln(1+x)$ donc $\ln(1+x^2)-(x-1+\ln 2)\le\ln(1+x)-(x-1+\ln 2)$

or les fonctions $x\mapsto\ln(1+x^2)-(x-1+\ln 2)$ et $x\mapsto\ln(1+x)-(x-1+\ln 2)$ sont continues sur $[0,1]$ donc $\int_0^1 \ln(1+x^2)-(x-1+\ln 2)\,dx\le\int_0^1 \ln(1+x)-(x-1+\ln 2)\,dx$

donc $S\le\int_0^1 \ln(1+x)\,dx-\left[\dfrac{1}{2}x^2-x+x\ln 2\right]_0^1$

d'où $S\le(2\ln 2-1)-(\dfrac{1}{2}-1+\ln 2)$ et par suite $S\le\ln 2-\dfrac{1}{2}$

On remarque graphiquement que $L \le S$ donc $\frac{(1-\ln 2)^2}{2} \le S \le \ln 2 - \frac{1}{2}$

Exercice 2 :

1) a) $\text{dét}(M_\alpha) = \alpha\begin{bmatrix}-4 & 0\\ 1 & -1\end{bmatrix} - (-2\alpha)\begin{vmatrix}2 & 2\\ 1 & -1\end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix}2 & 2\\ -4 & 0\end{vmatrix} = \alpha(4-0) + 2\alpha(-2-2) + (0+8)$
$= 4\alpha - 8\alpha + 8 = -4\alpha + 8$

b) M_α n'est pas inversible si $\text{dét}(M_\alpha) = 0$ c'est-à-dire pour $\alpha = 2$

2)

3) $C\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4\\-4\\-4\end{pmatrix}$ éq $\begin{pmatrix}2 & 2 & 2\\ -4 & -4 & 0\\ 1 & 1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4\\-4\\-4\end{pmatrix}$ éq $\begin{cases}2x+2y+2z=4\\ -4x-4y=-4\\ x+y-z=-4\end{cases}$ éq $\begin{cases}x+y+z=2\\ x+y=1\\ x+y-z=-4\end{cases}$

D'après (1)-(2) on obtient z=1 et d'après (2)-(3) on obtient z=5 ce qui est impossible Donc $S_{IR^3} = \varnothing$

4) a)

$$A \times B = \begin{pmatrix}-2 & 2 & 2\\ 4 & -4 & 0\\ 1 & 1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1 & 2\\ 1 & 0 & 2\\ 2 & 1 & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2x1+2x1+2x2 & -2x1+2x0+2x1 & (-2)x2+2x2+2x0\\ 4x1+(-4)x1+0x2 & 4x1+(-4)x0+0x1 & 4x2+(-4)x2+0x0\\ 1x1+1x1+(-1)x2 & 1x1+1x0+(-1)x1 & 1x2+1x2+(-1)x0\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}4 & 0 & 0\\ 0 & 4 & 0\\ 0 & 0 & 4\end{pmatrix} = 4I$$

b) $A \times B = 4I$ donc $A \times \frac{1}{4}B = I$ et par suite $A^{-1} = \frac{1}{4}B = \begin{pmatrix}\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0\end{pmatrix}$

c) $A\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4\\-4\\-4\end{pmatrix}$ éq $\cdot A^{-1}xA\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = A^{-1}x\begin{pmatrix}4\\-4\\-4\end{pmatrix}$ éq $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \frac{1}{4}B\begin{pmatrix}4\\-4\\-4\end{pmatrix}$

éq $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0\end{pmatrix} x \begin{pmatrix}4\\-4\\-4\end{pmatrix}$ éq $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{1}{4}x4+\frac{1}{4}x(-4)+\frac{1}{2}x(-4)\\ \frac{1}{4}x4+0x(-4)+\frac{1}{2}x(-4)\\ \frac{1}{2}x4+\frac{1}{4}x(-4)+0x(-4)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2\\-1\\1\end{pmatrix}$ d'où $S_{IR^3} = \{(-2,-1,1)\}$

Exercice 3 :

1) a) Pour $n = 0$, $0 \le u_0 = 1 \le 1$ vrai

Soit $n \ge 0$ supposons que $0 \le u_n \le 1$ et montrons que $0 \le u_{n+1} \le 1$.

On a $0 \le u_n \le 1$ donc $1 \le 1 + u_n \le 2$ d'où $1 \le \sqrt{1+u_n} \le \sqrt{2}$ et par suite $1 - 1 \le \sqrt{1+u_n} - 1 \le \sqrt{2} - 1$ d'où $0 \le u_{n+1} \le \sqrt{2} - 1 \le 1$

Conclusion : Pour tout entier naturel n : $0 \le u_n \le 1$

b) Pour tout entier naturel n : $u_{n+1}-u_n=\sqrt{1+u_n}-1-u_n=\sqrt{1+u_n}\left(1-\sqrt{1+u_n}\right)$

On a : $u_n\geq 0$ donc $\sqrt{1+u_n}\geq 1$ d'où $1-\sqrt{1+u_n}\leq 0$ et par suite $u_{n+1}\leq u_n$

Ainsi la suite (u_n) est décroissante.

c) (u_n) est décroissante et minorée par 0 donc elle converge vers un réel $l\in[0,1]$

On a : $u_{n+1}=f(u_n)$ avec $f(x)=\sqrt{1+x}$ -1

(u_n) converge vers $l\in[0,1]$

f est continue sur $[-1,+\infty[$ et en particulier en l

donc l est solution de l'équation $f(l)=l$

f(l)=l éq $\sqrt{1+l}-1=l$ éq $\sqrt{1+l}=l+1$ éq $\sqrt{1+l}(1-\sqrt{1+l})=0$ éq $\sqrt{1+l}=1$ éq 1 + l = 0 éq $l=0$

2) a) Pour tout entier naturel n, $v_{n+1}=\ln(1+u_{n+1})=\ln\left(\sqrt{1+u_n}\right)=\frac{1}{2}\ln(1+u_n)=\frac{1}{2}v_n$

Donc (v_n) est géométrique de raison $\frac{1}{2}$ et de premier terme $v_0=\ln(1+u_0)=\ln 2$ b) Pour tout entier naturel n, $v_n=\left(\frac{1}{2}\right)^n\ln 2=\frac{\ln 2}{2^n}$

On a $v_n = \ln(1+u_n)$ éq $1+u_n = e^{v_n}$ éq $u_n=e^{\frac{\ln 2}{2^n}}-1$

Exercice 4 :

1) a) $(2-2i)^2=4-4-8i=-8i$

b) $\Delta=(2+8i)^2+60-40i=-8i=(2-2i)^2$

donc $z'=\frac{2+8i-2+2i}{2}=5i$ et $z''=\frac{2+8i+2-2i}{2}=2+3i$

$S_{\mathbb{C}}=\{5i,2+3i\}$

2) a) $(z_B-z_A)\left(\overline{z_C-z_A}\right)=(-3-3i)(-2-2i)=6+6i+6i-6=12i$

b) $(z_B-z_A)\left(\overline{z_C-z_A}\right)$ est imaginaire pur donc les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont orthogonauxpar suite le triangle ABC est rectangle en A.

3) a) $(z_M-z_A)\left(\overline{z_N-z_A}\right)=(x-2-3i)(-iy-2+3i)=(-2x-3y+13)+i(-xy+3x+2y)$

b) Les points A ,M et N sont deux à deux distincts donc (-2x-3y+13)+i(-xy+3x+2y) ≠0 Deuxième méthode :

Supposons qu'il existe un couple de réels (x , y) tel que

$(-2x-3y+13)+i(-xy+3x+2y)=0$

$(-2x-3y+13)+i(-xy+3x+2y)=0\cdot$ éq $\begin{cases}-2x-3y+13=0\\-xy+3x+2y=0\end{cases}$ éq $\begin{cases}y=\frac{13-2x}{3}\\3x+y(2-x)=0 \quad (**)\end{cases}$

L'équation (**) devient $3x+\frac{13-2x}{3}(2-x)=0$ ou encore $2x^2-8x+26=0$ qui a pour discriminant $\Delta<0$, donc x n'existe pas.

Conclusion : $(-2x-3y+13)+i(-xy+3x+2y)\neq 0$

c) AMN est rectangle en A si et seulement si $(z_M-z_A)\left(\overline{z_N-z_A}\right)$ est imaginaire pur ce qui équivaut à $-2x-3y+13=0$ (on a : $-xy+3x+2y\neq 0$ d'après b))

4) a) Le triangle ABC est rectangle en A donc pour x=-1 et y= 5 le couple (-1,5) est une solution de (E).

b) On a 2x + 3y = 13éq $2x+3y=2\times(-1)+3\times 5$ éq $2(x+1)=3(5-y)$ (*)

donc 2 divise $3(5-y)$ or $2\wedge 3=1$ donc d'après le lemme de Gauss, 2 divise $(5-y)$

donc $5-y=2k$; $k\in\mathbb{Z}$ d'où y=5-2k.

D'après (*) on a 2(x+1)= 3(2k) sig x=3k-1 ;k$\in\mathbb{Z}$

Réciproquement, pour $(x,y)=(-1+3k\ ,\ 5-2k)$ on a $2(-1+3k)+3(5-2k)=13$

Donc $S_{\mathbb{Z}^2}=\{(-1+3k\ ,\ 5-2k);\ \text{avec}\ k\in\mathbb{Z}\}$.

Ou bien directement : comme (-1,5) est une solution particulière de (E) alors l'ensemble des solutions de (E) est : $S_{\mathbb{Z}^2}=\{(-3k-1\ ,\ 5+2k)\ \ \text{avec}\ k\in\mathbb{Z}\}$

c) AMN est rectangle en A si et seulement si $2x+3y=13$ éq $(x,y)=(-1+3k,5-2k)$; $(k\in\mathbb{Z})$

si de plus $-4\leq x\leq 4$ alors $-4\leq -1+3k\leq 4\cdot\text{sig}-1\leq k\leq\frac{5}{3}$, donc $k\in\{-1,0,1\}$

Par suite $(x,y)\in\{(-4,7),(-1,5),(2,3)\}$

Ainsi AMN est rectangle en A (et $-4\leq x\leq 4$) pour :

$[M(-4)\ \text{et}\ N(7i)]$, pour $[M(-1)\ \text{et}\ N(5i)]$ et pour $[M(2)\ \text{et}\ N(3i)]$