RÉPUBLIQUE TUNISIENNE MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION	EXAMEN DU BACCALAURÉAT SESSION 2021	Session principale
	Épreuve : **Mathématiques**	Section : **Sciences de l'informatique**
	Durée : **3h**	Coefficient de l'épreuve: **3**

✱✱✱✱✱

N° d'inscription | | | | | | |

Le sujet comporte 4 pages. ***La page 4 sur 4 est à rendre avec la copie.***

Exercice N°1: (5 points)

1) On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) : $z^2-(5-3i)z+2-9i=0$.

   a) Vérifier que $(3+i)^2=8+6i$.

   b) Résoudre l'équation (E).

2) Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$, on considère les points A , B et K d'affixes respectives $z_A=1-2i$, $z_B=4-i$ et $z_K=2$.

   a) Soit C le symétrique de A par rapport à K. Montrer que $z_C=3+2i$.

   b) Dans l'annexe ci-jointe figure 1, placer les points A, B, C et K.

   c) Calculer $\overline{(z_B-z_A)}(z_B-z_C)$.

   d) Montrer que le triangle ABC est rectangle isocèle.

3) La droite (AB) coupe l'axe $(O,\vec{u})$ en un point F. On pose $z_F=\alpha$ où α est un réel.

   a) Montrer que $\overline{(z_B-z_A)}(z_F-z_A)=3\alpha-1+(7-\alpha)i$.

   b) Déterminer alors le réel α.

   c) Vérifier que B est le milieu du segment [AF].

   d) Soit G le point d'intersection des droites (FK) et (BC). Déterminer l'affixe du point G.

Exercice N°2 : (4,5 points)

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $\begin{cases} u_0 = 0\ , \\ u_{n+1} = \dfrac{3+5u_n}{5+3u_n} \end{cases}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1) a) Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \le u_n < 1$.

b) Vérifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = \dfrac{3(1-u_n^2)}{5+3u_n}$. Déduire que la suite (u_n) est croissante.

c) Montrer que la suite (u_n) est convergente puis calculer sa limite.

2) Soit la suite (v_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $v_n = \dfrac{1-u_n}{1+u_n}$.

a) Montrer que (v_n) est une suite géométrique de raison $q = \dfrac{1}{4}$

b) Exprimer v_n en fonction de n puis montrer que $u_n = \dfrac{4^n - 1}{4^n + 1}$.

c) A partir de quelle valeur de n, $u_n \ge 0{,}99$?

Exercice N° 3 : (4,5 points)

1) On considère dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ l'équation $(E) : -2x + 3y = 10$.

a) Vérifier que le couple $(7,8)$ est solution de l'équation (E).

b) Résoudre l'équation (E).

On désigne par n un entier naturel supérieur ou égal à 1.

On pose $a_n = 7 + 3 \times 6^n$, $b_n = 8 + 2 \times 6^n$ et $d_n = \mathrm{PGCD}(a_n, b_n)$.

2) a) Vérifier que le couple (a_n, b_n) est solution de l'équation (E).

b) En déduire que d_n divise 10.

3) a) Montrer que $6^n \equiv 1[5]$.

b) Prouver que $a_n \equiv 0[5]$ et $b_n \equiv 0[5]$.

c) Déduire que $d_n = 5$ ou $d_n = 10$.

4) a) Montrer par récurrence que $6^n \equiv 6[10]$.

b) En déduire que $a_n \equiv 5[10]$.

c) Montrer que $d_n = 5$.

Exercice N°4 : (6 points)

Soit f la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par $f(x)=\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}+\ln x$ et on désigne par (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1) a) Déterminer $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$. Interpréter graphiquement le résultat.

b) Déterminer $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{f(x)}{x}$. Interpréter graphiquement le résultat.

2) a) Montrer que pour tout $x\in]0,+\infty[$, $f'(x)>0$.

b) Dresser le tableau de variation de f.

c) Montrer que l'équation $f(x)=0$ admet dans $]0,+\infty[$ une unique solution α et que $0,5<\alpha<0,6$.

3) a) Montrer que pour tout $x\in]0,+\infty[$, $f''(x)=1-\frac{1}{x^2}$.

b) Montrer que le point $G(1,1)$ est un point d'inflexion de la courbe (C).

c) Montrer que la droite $T : y=2x-1$ est la tangente à (C) au point G.

4) Soit g la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par $g(x)=f(x)-(2x-1)$.

a) Montrer que pour tout $x\in]0,+\infty[$, $g'(x)=\frac{(x-1)^2}{x}$ et en déduire que la fonction g est croissante.

b) Calculer g(1) et déterminer le signe de g sur $]0,+\infty[$.

c) Déduire la position relative de T et (C).

5) Dans l'annexe ci-jointe figure 2, Tracer T et (C).

Section : .... N° d'inscription : .... Série : ....

Nom et Prénom : ....

Date et lieu de naissance : ....

Signatures des surveillants

....

....

Épreuve: Mathématiques - Section : Sciences de l'informatique
Session principale (2021)
Annexe à rendre avec la copie

Figure 1

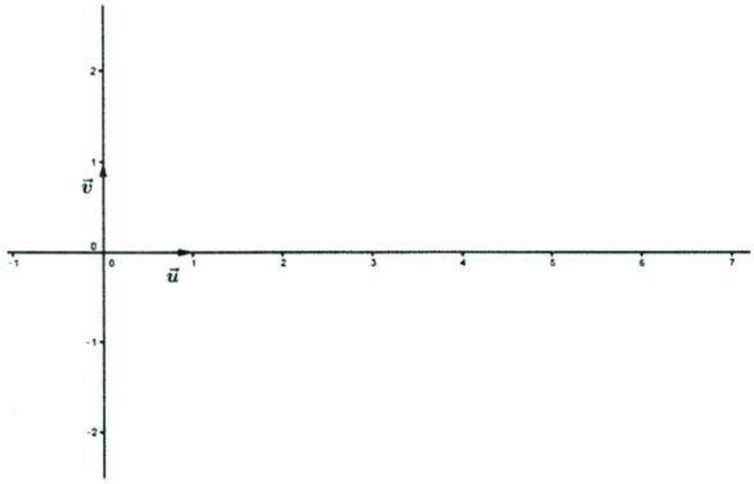

Figure 2