Taki Academy
www.takiacademy.com

Physique

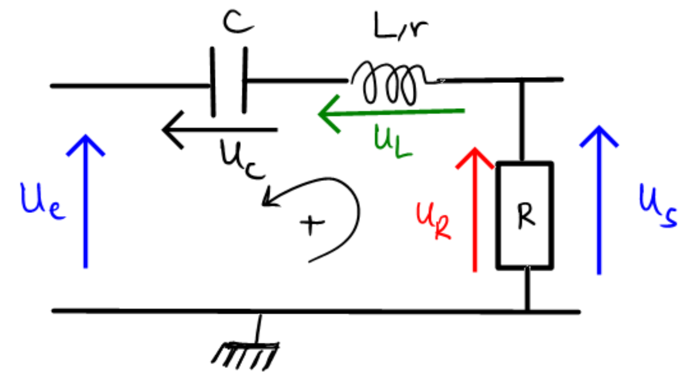
Classe : 4ème année

Chapitre : les filtres

Fiche de méthodes

Filtre passe bande

Q1 : Faire le schéma du montage :



Q2 : Etablir l'équation différentielle de $u_s(t)$:

D'aprés la loi des mailles :

$$u_R + u_L + u_C = u_e$$

$$R\,i(t) + L\frac{di}{dt} + r\,i(t) + \frac{q}{C} = u_e$$

$$(R+r)\,i(t) + L\frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{C}\int i(t)\,dt = u_e$$

$$u_R = u_s = Ri \longrightarrow i = \frac{u_s}{R}$$

$$\frac{1}{RC}\int u_s(t)\,dt + \frac{L}{R}\frac{du_s}{dt} + \frac{(R+r)}{R}u_s = u_e$$

Q_3 : Déterminer l'expression de la transmittance T et du gain G :

$$T = \frac{U_{sm}}{U_{em}} \quad (\text{Fresnel})$$

$$\underbrace{\frac{1}{RC}\int u_s(t)\,dt}_{\vec{V_3}} + \underbrace{\frac{L}{R}\frac{du_s}{dt}}_{\vec{V_2}} + \underbrace{\frac{(R+r)}{R}u_s}_{\vec{V_1}} = \underbrace{u_e}_{\vec{V}}$$

$$\vec{V_1} \rightarrow \left(\frac{R+r}{R}\right)u_s = \frac{R+r}{R}U_{sm}\sin(\omega t+\varphi_s) \rightarrow \vec{V_1}\left|\begin{array}{l}\left(\frac{R+r}{R}\right)U_{sm}\\ \varphi_s\end{array}\right.$$

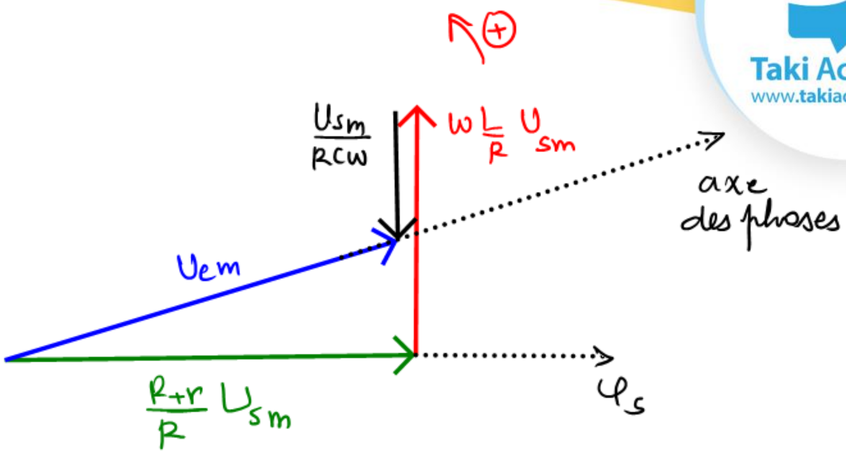
$$\vec{V_2} \rightarrow \frac{L}{R}\frac{du_s}{dt} = \frac{L}{R}\frac{d}{dt}\left(U_{sm}\sin(\omega t+\varphi_s)\right)$$

$$= \frac{L}{R}\omega U_{sm}\sin\left(\omega t+\varphi_s+\frac{\pi}{2}\right) \rightarrow \vec{V_2}\left|\begin{array}{l}\frac{\omega L}{R}U_{sm}\\ \varphi_s+\frac{\pi}{2}\end{array}\right.$$

$$\vec{V_3} \rightarrow \frac{1}{RC}\int u_s\,dt = \frac{1}{RC}\int U_{sm}\sin(\omega t+\varphi_s)$$

$$= \frac{U_{sm}}{RC\omega}\sin\left(\omega t+\varphi_s-\frac{\pi}{2}\right) \rightarrow \vec{V_3}\left|\begin{array}{l}\frac{U_{sm}}{RC\omega}\\ \varphi_s-\frac{\pi}{2}\end{array}\right.$$

$$\vec{V} \rightarrow u_e(t) = U_{em}\sin(\omega t) \longrightarrow \vec{V}\left|\begin{array}{l}U_{em}\\ \varphi_e=0\end{array}\right.$$



D'après Pythagore :

$$U_{em}^2 = \left(\frac{R+r}{R} U_{sm}\right)^2 + \left(\frac{\omega L}{R} U_{sm} - \frac{U_{sm}}{RC\omega}\right)^2$$

$$U_{em}^2 = U_{sm}^2 \left[\left(\frac{R+r}{R}\right)^2 + \left(\frac{\omega L}{R} - \frac{1}{RC\omega}\right)^2\right]$$

$$U_{em}^2 = U_{sm}^2 \left(\frac{R+r}{R}\right)^2 \left[1 + \left(\frac{\cancel{R}}{R+r}\right)^2 \left(\frac{\omega L}{\cancel{R}} - \frac{1}{\cancel{R}C\omega}\right)^2\right]$$

$$U_{em} = U_{sm}\left(\frac{R+r}{R}\right) \sqrt{1 + \left(\frac{1}{R+r}\right)^2 \left(\omega L - \frac{1}{C\omega}\right)}$$

$$\boxed{\frac{U_{sm}}{U_{em}} = \frac{1}{\left(\frac{R+r}{R}\right)\sqrt{1 + \left(\frac{1}{R+r}\right)^2 \left(\omega L - \frac{1}{C\omega}\right)^2}}}$$

$$T = \frac{\frac{R}{R+r}}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega L}{R+r} - \frac{1}{(R+r)C\omega}\right)^2}}$$

Remarque : L'expression de T doit être sous la forme suivante :

$$T = \frac{T_0}{\sqrt{1 + Q^2\left(x - \frac{1}{x}\right)^2}}$$

On pose :

$$x = \frac{\omega}{\omega_0} \quad , \quad Q = \frac{L\omega_0}{R+r} = \frac{1}{RC\omega_0} \quad \text{avec} \quad \omega_0^2 = \frac{1}{LC}$$

$$\text{et} \quad T_0 = \frac{R}{R+r}$$

donc $$T = \frac{T_0}{\sqrt{1 + \left(\frac{L\omega}{R+r} - \frac{1}{(R+r)C\omega}\right)^2}}$$

$$T = \frac{T_0}{\sqrt{1 + \left(\frac{L\omega_0}{R+r}\left(\underbrace{\frac{\omega}{\omega_0}}_{x} - \frac{1}{L\omega_0 C\omega}\right)\right)^2}} \quad , \quad \omega_0^2 = \frac{1}{LC}$$

$$\boxed{T} = \frac{T_0}{\sqrt{1 + \left(Q\left(x - \frac{1}{x}\right)\right)^2}} = \boxed{\frac{T_0}{\sqrt{1 + Q^2\left(x - \frac{1}{x}\right)^2}}}$$

* le gain G :

$$G = 20 \log T$$

$$G = 20 \log \frac{T_0}{\sqrt{1 + Q^2\left(x - \frac{1}{x}\right)^2}}$$

$$G = 20 \log T_0 - 20 \log \sqrt{1 + Q^2\left(x - \frac{1}{x}\right)^2}$$

$$\boxed{G = G_0 - 10 \log \left(1 + Q^2\left(x - \frac{1}{x}\right)^2\right)}$$

Q_4 : Déterminer la bande passante et les fréquences de coupure :

pour $N = N_c$, On a $T \geq \frac{T_0}{\sqrt{2}}$

$$\frac{\cancel{T_0}}{\sqrt{1 + Q^2\left(x - \frac{1}{x}\right)^2}} \geq \frac{\cancel{T_0}}{\sqrt{2}}$$

$$1 + Q^2\left(x - \frac{1}{x}\right)^2 \leq 2$$

$$Q^2\left(x - \frac{1}{x}\right)^2 \leq 1$$

$$\left(x - \frac{1}{x}\right)^2 \leq \frac{1}{Q^2}$$

d'où $\boxed{-\frac{1}{Q} \leq \left(x - \frac{1}{x}\right) \leq \frac{1}{Q}}$

Résolution de la 1ère inéquation

$$x - \frac{1}{x} \geq -\frac{1}{Q}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{x^2-1}{x} \geq -\frac{1}{Q}$$

$$x^2 - 1 \geq -\frac{x}{Q}$$

eqt° 2d degré $x^2 + \frac{1}{Q}x - 1 \geq 0$

$\Delta = b^2 - 4ac$

$$\Delta = \frac{1}{Q^2} + 4 \Rightarrow \Delta = \frac{4Q^2+1}{Q^2}$$

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad x_1' = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$$

- $x_1 = \dfrac{-\frac{1}{Q} - \sqrt{\frac{4Q^2+1}{Q^2}}}{2} < 0$ à rejéter
- $x_1' = \dfrac{-\frac{1}{Q} + \sqrt{\frac{4Q^2+1}{Q^2}}}{2} = \dfrac{-1+\sqrt{4Q^2+1}}{2Q} = \dfrac{1}{2Q}\left[-1+\sqrt{4Q^2+1}\right]$ $= x_b$

On a : $x_b = \frac{w}{w_0} = \frac{N_b}{N_0} \Rightarrow x_b = \frac{N_b}{N_0}$

d'où $\frac{N_b}{N_0} = \frac{1}{2Q}\left[-1+\sqrt{4Q^2+1}\right]$

$$\boxed{N_b = \frac{N_0}{2Q}\left[-1+\sqrt{4Q^2+1}\right]}$$

Résolution de la 2ème inéquation :

$$x - \frac{1}{x} \leq \frac{1}{Q}$$

$$x^2 - \frac{1}{Q}x - 1 \leq 0$$

$$\Delta = \frac{4Q^2+1}{Q^2}$$

$$x_2 = \frac{\frac{1}{Q} - \sqrt{\frac{4Q^2+1}{Q^2}}}{2} < 0 \quad \text{à rejeter}$$

$$x_2' = \frac{\frac{1}{Q} + \sqrt{\frac{4Q^2+1}{Q^2}}}{2} = \frac{1}{2Q}\left[1+\sqrt{4Q^2+1}\right]$$

$$= x_H \quad \text{avec} \quad x_H = \frac{N_H}{N_0}$$

$$\frac{N_H}{N_0} = \frac{1}{2Q}\left[1+\sqrt{4Q^2+1}\right]$$

$$\boxed{N_H = \frac{N_0}{2Q}\left[1+\sqrt{4Q^2+1}\right]}$$

* la bande passante de ce filtre : $\boxed{N \in [N_b, N_H]}$

et $\boxed{N_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}}$

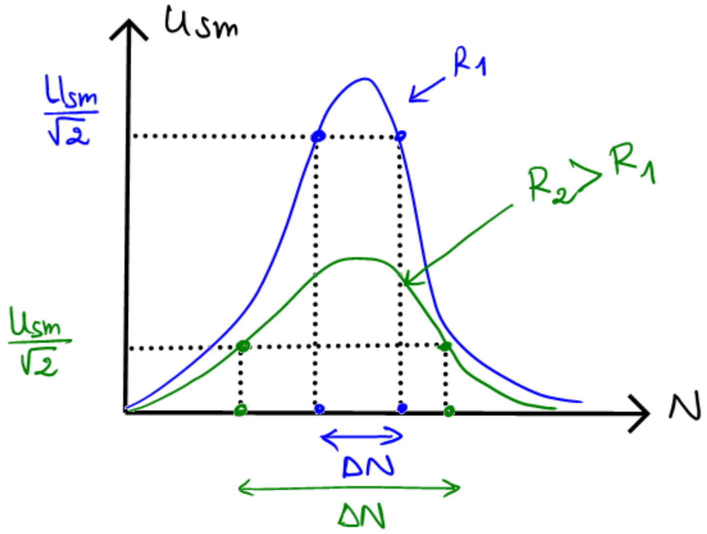
$\Delta N = N_H - N_b = \frac{N_0}{Q}$

avec Q : facteur de qualité

un filtre est dit sélectif si $Q > 1$

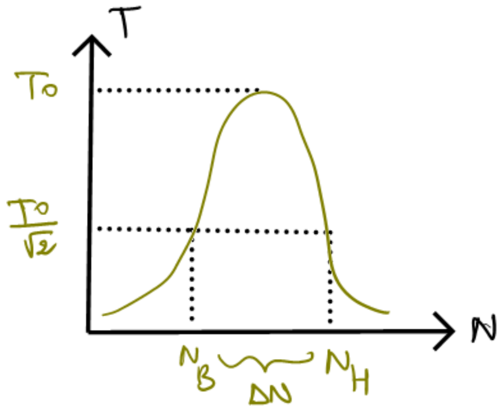
la qualité de ce filtre augmente lorsque Q augmente

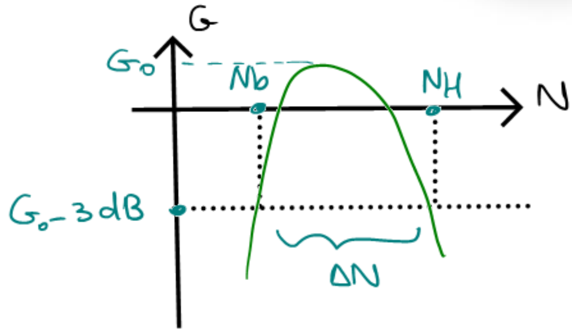
c'àd $\frac{L\omega_0}{R}$ augmente $\Rightarrow$ R diminue.



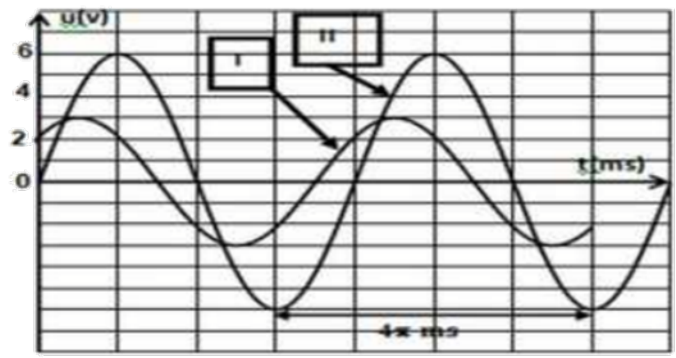
- Plus la largeur de la bande passante ΔN est petite, plus le filtre est sélectif

Q5 : Donner l'allure de $T = f(N)$ et $G = f(N)$





Q6 : Identifier la courbe de $u_e(t)$ et celle de $u_s(t)$:



* On travaille comme on a fait dans le chapitre le circuit RLC forcé

$$Z = \sqrt{(R_0+r)^2 + \left(\frac{1}{C\omega} - L\omega\right)^2} > R \quad , \; u_s = u_R$$

$$\left.\begin{array}{l} Z > R \\ Z I_m > R I_m \\ U_{em} > U_{sm} \end{array}\right\}$$

la courbe ayant l'amplitude la plus grande représente $u_e(t)$ alors la courbe II $\longrightarrow u_e(t)$.

Taki Academy
www.takiacademy.com

تهنى على قرايتك

Magazines