MATHÉMATIQUES
Section : Sciences de l'informatique
Session de contrôle 2022

Exercice 1 :

1) a) $(1-3i)^2 = 1^2 - 2\times 1\times 3i + (3i)^2 = 1 - 6i - 9 = -8 - 6i$

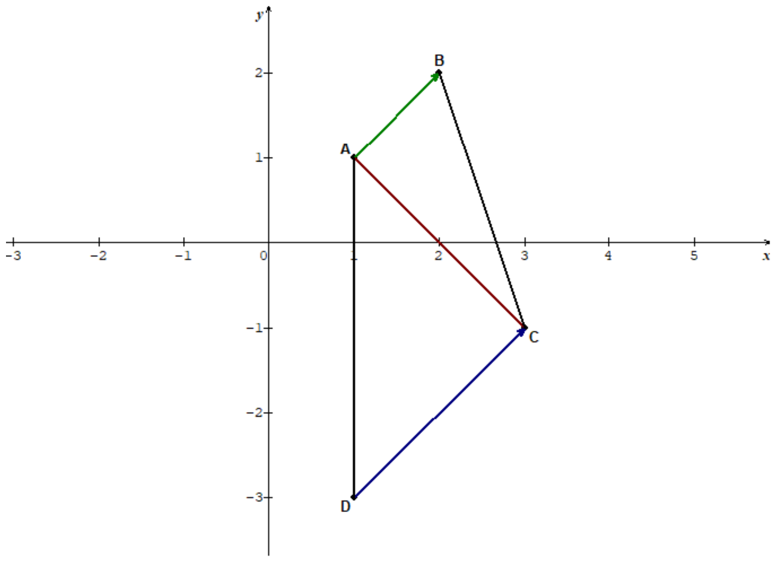
b) $\Delta = [-(5+i)]^2 - 4\times 1\times (8+4i) = 5^2 + 2\times 5\times i + (i)^2 - 32 - 16i$

$= 25 + 10i - 1 - 32 - 16i = -8 - 6i = (1-3i)^2$

Par suite $z_1 = \frac{(5+i)-(1-3i)}{2} = \frac{4+4i}{2} = 2+2i$ et $z_2 = \frac{(5+i)+(1-3i)}{2} = \frac{6-2i}{2} = 3 - i$

Ainsi $S_{\mathbb{C}} = \{\, (2+2i)\ ;\ (3-i)\,\}$

2) a)



b) $(Z_A - Z_C)\ \overline{(Z_A - Z_B)} = (1 + i - 3 + i)\ \overline{(1 + i - 2 - 2i)} = (-2+2i)\ (-1+i) = -4i$

Donc $(Z_A - Z_C)\ \overline{(Z_A - Z_B)} = -4i$

c) On a : $(Z_A - Z_C)\ \overline{(Z_A - Z_B)} = -4i \in i\,\mathbb{R}^*$ donc les vecteurs $\overrightarrow{CA}$ et $\overrightarrow{BA}$ sont orthogonaux

Par suite le triangle ABC est rectangle en A.

3) a) $\mathrm{Aff}(\overrightarrow{DC}) = (Z_C - Z_D) = (3 - i - 1 + 3i) = (2+2i) = 2(1+i)$

$\mathrm{Aff}(\overrightarrow{AB}) = (Z_B - Z_A) = (2 + 2i - 1 - i) = (1+i)$

Donc $\mathrm{Aff}(\overrightarrow{DC}) = 2\ \mathrm{Aff}(\overrightarrow{AB})$

b) $\mathrm{Aff}(\overrightarrow{DC}) = 2\ \mathrm{Aff}(\overrightarrow{AB})$ donc $\overrightarrow{DC} = 2\,\overrightarrow{AB}$

D'où les vecteurs $\overrightarrow{DC}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires et par suite les droites (DC) et (AB) sont parallèles.

c) $AB = |Z_B - Z_A| = |1 + i| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$

$CD = 2\,AB = 2\sqrt{2}$

4) (AB)et (CD) sont paralléles et $C \notin (AB)$ donc ABCD est un trapéze

Or ABC est un triangle rectangle en A donc [AC] est un hauteur du trapéze

$AC = |Z_C - Z_A| = |3 - i - 1 - i| = |2 - 2i| = \sqrt{2^2 + 2^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

D'où l'aire du trapéze ABCD est : $S_{ABCD} = \frac{(AB+CD)\times AC}{2} = \frac{(\sqrt{2}+2\sqrt{2})\times 2\sqrt{2}}{2} = 6$ (ua)

<u>Exercice 2 :</u>

1) a) $\text{dét}(M) = \begin{vmatrix} \alpha & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & -2 \end{vmatrix} = \alpha \times \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} - 2 \times \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} + (-2) \times \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix}$

$$= \alpha \times [(-2)\times(-2) - 1 \times 1] - 2 \times [2 - 1] - 2 \times [-1 + 2]$$

$$= 3\alpha - 4$$

Par suite $\text{dét}(M) = 3\alpha - 4$

b) La matrice M n'estpas inversible si seulement si $\text{dét}(M) = 0$ ssi $\alpha = \frac{4}{3}$

2) a) $M^2 = M \times M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & -2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} 1\times 1 + (-1)\times 2 + 1 \times (-2) & 2 & -2 \\ -4 & 3 & -2 \\ -4 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 2 & -2 \\ -4 & 3 & -2 \\ -4 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Or $2\,M = 2 \times \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 4 & -4 & 2 \\ -4 & 2 & -4 \end{pmatrix}$

Donc $M^2 + 2\,M = \begin{pmatrix} -3 & 2 & -2 \\ -4 & 3 & -2 \\ -4 & 2 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 4 & -4 & 2 \\ -4 & 2 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = -I_3$

Par suite $M^2 + 2\,M = -I_3$

b) $M^2 + 2\,M = -I_3 \iff -M^2 - 2\,M = I_3 \iff M \times (-M - 2\,I_3) = I_3$

Or $\alpha = 1 \neq \frac{4}{3}$ donc M est inversible et sa matrice inverse $M^{-1} = -M - 2\,I_3$

3) a) $(S): \begin{cases} x - y + z = 1 \\ 2x - 2y + z = 1 \\ -2x + y - 2z = -3 \end{cases} \iff (S) : \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & -2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$

$$\iff (S) : M \times X = R \text{ avec } X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \text{ et } R = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

b) On a : $M^{-1} = -M - 2\,I_3 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

$(S) : M \times X = R \Leftrightarrow \quad (S) : X = M^{-1} \times R$

$$\Leftrightarrow \quad (S) : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \quad (S) : \begin{cases} x = (-3) \times 1 + 1 \times 1 + (-1) \times (-3) \\ y = (-2) \times 1 + 0 \times 1 + (-1) \times (-3) \\ z = 2 \times 1 + (-1) \times 1 + 0 \times (-3) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \quad (S) : \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \\ z = 1 \end{cases}$$

Ainsi $S_{R^3} = \{ (1; 1; 1) \}$

<u>Exercice 3 :</u>

1) a) $2 \times 3 - (-1) = 6 + 1 = 7$ donc $(3; -1)$ est une solution de (E')

b) On a : $2 \wedge 1 = 1$ donc l'équation admet des solutions

Comme $(3; -1)$ est une solution de (E') alors on a :

$2x - y = 2 \times 3 - (-1) \quad \Leftrightarrow \quad 2x - 2 \times 3 = y + 1 \Leftrightarrow \quad 2\,(x - 3) = (y + 1)$

2 divise $(y + 1) \quad \Rightarrow \quad y + 1 = 2\,k$ avec $k \in \mathbb{Z} \Rightarrow y = 2\,k - 1$ avec $k \in \mathbb{Z}$

$2\,(x - 3) = (2k - 1 + 1) \quad \Rightarrow \quad 2 \times (x - 3) = 2k \Rightarrow \quad x - 3 = k \Rightarrow x = k + 3$ avec $k \in \mathbb{Z}$

$2x - y = 2 \times (k + 3) - (2k - 1) = 2k + 6 - 2k + 1 = 7$

Par suite $S_{\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}} = \{ (3 + k; -1 + 2k)$ avec $k \in Z \}$

2) a) $5^6 = 15625 = 7 \times 2232 + 1 \quad \Rightarrow \quad 5^6 \equiv 1 (\mathrm{mod}7)$

b) Si $n = 6q$ alors $5^{6q} = (5^6)^q \quad \Rightarrow \quad 5^6 \equiv 1\ (\mathrm{mod}7)$ alors $5^{6q} \equiv 1\ (\mathrm{mod}7)$

Si $n = 6q + 1$ alors $5^{6q+1} = 5^{6q} \times 5 \quad \Rightarrow \quad 5^{6q+1} \equiv 5\ (\mathrm{mod}7)$

Si $n = 6q + 2$ alors $5^{6q+2} = 5^{6q} \times 25 \quad \Rightarrow \quad 5^{6q+2} \equiv 25\ (\mathrm{mod}7) \Rightarrow \quad 5^{6q+2} \equiv 4\ (\mathrm{mod}7)$

Si $n = 6q + 3$ alors $5^{6q+3} = 5^{6q} \times 125 \Rightarrow 5^{6q+3} \equiv 125\ (\mathrm{mod}7) \Rightarrow \quad 5^{6q+3} \equiv 6\ (\mathrm{mod}7)$

Si $n = 6q + 4$ alors $5^{6q+4} = 5^{6q} \times 625 \Rightarrow 5^{6q+4} \equiv 625\ (\mathrm{mod}7) \Rightarrow \quad 5^{6q+4} \equiv 2\ (\mathrm{mod}7)$

Si $n = 6q + 5$ alors $5^{6q+5} = 5^{6q+4} \times 5 \quad \Rightarrow \quad 5^{6q+5} \equiv 10\ (\mathrm{mod}7) \Rightarrow \quad 5^{6q+5} \equiv 3\ (\mathrm{mod}7$

3) a) $a_n = 5^n + 3$ donc $a_n = k_0 + 3$ tel que $k_0 = 5^n$ ou $n \in \mathbb{N}$

$b_n = 2 \times 5^n - 1$ donc $b_n = 2k_0 - 1$ tel que $k_0 = 5^n$ ou $n \in \mathbb{N}$

D'où $(a_n; b_n)$ est une solution de (E')

b) $(a_n; b_n)$ est une solution de (E') donc $2a_n - b_n = 7$

$$\left.\begin{array}{l} a_n \wedge b_n \text{ divise } a_n \\ a_n \wedge b_n \text{ divise } b_n \end{array}\right\} \Rightarrow \quad a_n \wedge b_n \text{ divise } 2a_n - b_n = 7$$

$$\Rightarrow \quad a_n \wedge b_n \in D_7 = \{-7; -1; 1; 7\}$$

Or $a_n \wedge b_n > 0$ donc $a_n \wedge b_n = 1$ ou $a_n \wedge b_n = 7$

c) $(\Leftarrow)$ $n \equiv 2 (\mathrm{mod}\, 6) \Rightarrow 5^n \equiv 4 (\mathrm{mod}\, 7)$ donc $5^n + 3 \equiv 7 (\mathrm{mod}\, 7)$ et par suite $a_n \equiv 0 (\mathrm{mod}\, 7)$

$n \equiv 2 (\mathrm{mod}\, 6) \Rightarrow 5^n \equiv 4 (\mathrm{mod}\, 7)$ donc $2 \times 5^n - 1 \equiv 7 (\mathrm{mod}\, 7)$ et par suite $b_n \equiv 0 (\mathrm{mod}\, 7)$

$$\left.\begin{array}{l} 7 \text{ divise } a_n \\ 7 \text{ divise } b_n \end{array}\right\} \Rightarrow 7 \text{ divise } a_n \wedge b_n \quad \text{d'ou } a_n \wedge b_n = 7$$

$(\Rightarrow)$ $a_n \wedge b_n = 7 \Rightarrow 7$ divise $a_n \Rightarrow a_n \equiv 0 \ (\mathrm{mod}\, 7) \Rightarrow 5^n + 3 \equiv 0 \ (\mathrm{mod}\, 7)$

$\Rightarrow 5^n \equiv -3 \ (\mathrm{mod}\, 7) \Rightarrow 5^n \equiv 4 \ (\mathrm{mod}\, 7)$

$\Rightarrow n = 6q + 2$ avec $q \in \mathbb{Z}$ { question 2) b }

$\Rightarrow n \equiv 2 \ (\mathrm{mod}\, 6)$

Ainsi $a_n \wedge b_n = 7 \Leftrightarrow n \equiv 2 \ (\mathrm{mod}\, 6)$

Exercice 4 :

1) a) $r_{(x,y)} = \frac{\mathrm{cov}(x,y)}{\delta(x) \times \delta(y)} = 0{,}9948$

On a : $r_{(x,y)} 0{,}9948 > 0{,}75$ donc il y a une forte corrélation.

b) Soit D la droite de régression de y en x. On a : $D: y = ax + b$

avec $a = \frac{\mathrm{cov}(x,y)}{v(x)} = 1775{,}5633$ et $b = \bar{y} - a\,\bar{x} = 2089{,}2548$

Par suite $D: y = 1775{,}5633\, x + 2089{,}2548$

2) a) Le cout de formation des 17 ingénieurs est y = 17775,5633x17 + 2089,2548 = 37292,895

b) $x = 0{,}0006 \times 30096{,}500 - 1{,}0579 = 17$

La somme de 30096,500 dinars permet de former les ingénieurs de la société selon cet ajustement.

Exercice 5 :

1) $g(1) = -4 \ln(1) = 0$

x	0		$\frac{1}{e}$		1		$+\infty$
$g'(x)$	||	$+$	0	$-$			
g	|| 0	$\nearrow$	$\frac{4}{e}$	$\searrow$		$\searrow$	$-\infty$

Par suite

x	0		1		$+\infty$
$g(x)$	||	$+$	0	$-$	

2) a) $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim\limits_{x \to 0^+} \frac{x^2(1 - 2\ln x)}{x} = \lim\limits_{x \to 0^+} x\,(1 - 2\ln x) = \lim\limits_{x \to 0^+} x - 2\,x\ln x = 0$

donc f est dérivable à droite en 0 et $f'_d(0) = 0$ et (C)admet une demi − tangente horizontale à l'origine O(0,0)

b) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} x^2\,(1-2\ln x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^2(1-2\ln x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} x\,(1-2\ln x) = -\infty$

Donc (C)admet une branche parabolique de direction celle de l'axe$(O,\vec{j})$ au voisinage de $(+\infty)$

3) a) Pour tout réel $x > 0$ on a : $f'(x) = 2x\,(1-2\ln x) + x^2\left(-2\frac{1}{x}\right) = 2x - 4x\ln x - 2x$

$$= -4x\ln x = g(x)$$

b) $f'(x)$ a le même signe que $g(x)$ sur $]0\,;\,+\infty[$

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	$-\infty$

$f(1) = 1^2\,(1-2\ln 1) = 1$

4) a) Pour tout réel $x > 0$ on a : $f'(x) = g(x)$

Donc f'est dérivable sur $]0\,;\,+\infty[$ et que $f''(x) = g'(x)$

Par suite

x	0		$\frac{1}{e}$		$+\infty$
$f''(x)$		$+$	0	$-$	

$f''(x)$ s'annule est change de signe en $\frac{1}{e}$

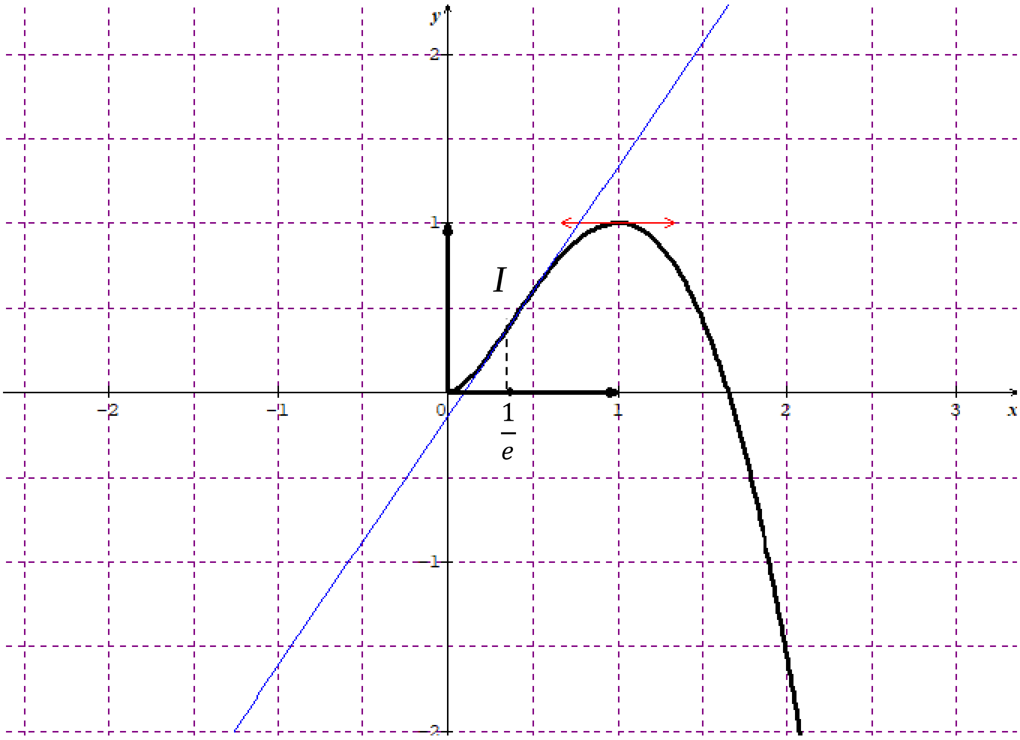
Donc $I\left(\frac{1}{e}, f\left(\frac{1}{e}\right)\right)$ est un point d'inflexionde (C)

b) $f\left(\frac{1}{e}\right) = \frac{1}{e^2}\left(1-2\ln\left(\frac{1}{e}\right)\right) = \frac{1}{e^2}\,(1+2) = \frac{3}{e^2}$ et $f'\left(\frac{1}{e}\right) = g\left(\frac{1}{e}\right) = \frac{4}{e}$

Donc $\Delta : y = f'\left(\frac{1}{e}\right)\left(x-\frac{1}{e}\right) + f\left(\frac{1}{e}\right) = \frac{4}{e}\left(x-\frac{1}{e}\right) + \frac{3}{e^2} = \frac{4}{e}\,x - \frac{4}{e^2} + \frac{3}{e^2} = \frac{4}{e}\,x - \frac{1}{e^2}$

D'où $\Delta: y = \frac{4}{e}\,x - \frac{1}{e^2}$

5) a) $f(\sqrt{e}) = \frac{1}{e}\left(1-2\ln(\sqrt{e})\right) = \frac{1}{e}\left(1-2\times\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{e}\,(1-1) = 0$



b) $A = \int_1^{\sqrt{e}} |f(x)|\ dx\ \text{ua} = \int_1^{\sqrt{e}} f(x)\ dx\ = \int_1^{\sqrt{e}} x^2\ (1 - 2\ln x)\ dx$

$$\text{On pose} \begin{cases} u(x) = 1 - 2\ln x \quad \Rightarrow \quad u'(x) = -\dfrac{2}{x} \\ v'(x) = x^2 \quad \Rightarrow \quad v(x) = \dfrac{x^3}{3} \end{cases}$$

$$A = \left[\frac{x^3}{3}(1 - 2\ln x)\right]_1^{\sqrt{e}} - \int_1^{\sqrt{e}} \frac{x^3}{3}\left(-\frac{2}{x}\right)\ dx$$

$$= \left[\left(\frac{(\sqrt{e})^3}{3}(1 - 2\ln\sqrt{e}\right) - \frac{1^3}{3}(1 - 2\ln 1)\right] + \int_1^{\sqrt{e}} \frac{2\,x^2}{3}\ dx\ = \left[0 - \frac{1}{3}\right] + \left[\frac{2x^3}{9}\right]_1^{\sqrt{e}} = -\frac{1}{3} + \frac{2(\sqrt{e})^3}{9} - \frac{2}{9}$$

Par suite $A = (\frac{2}{9} e\sqrt{e} - \frac{5}{9})\ \ (\text{ua})$