سیگنال‌ها و سیستم‌ها

تمرین پنجم

دانشکده مهندسی کامپیوتر

دانشگاه صنعتی شریف

نیم سال دوم ۰۰-۹۹

استاد:

جناب آقای دکتر منظوری شلمانی

نام و نام خانوادگی:

امیرمهدی نامجو - ۹۷۱۰۷۲۱۲

۱ سری فوریه

۱.۱ سوال اول

۱.۱.۱ بخش a

$$f(x) = \begin{cases} \pi - x & 0 \le x \le \pi \\ x - \pi & -\pi \le x \le 0 \end{cases}$$

ابتدا عامل DC را بدست می‌آوریم:

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int f(x)dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{0}(x-\pi)dx + \int_{0}^{\pi}(\pi - x)dx$$

$$= \frac{1}{2\pi}(\frac{-3\pi^2}{2} - \frac{\pi^2}{2}) = \boxed{-\pi}$$

برای ضرایب کسینوسی داریم:

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int(f(x)\cos(nx))dx$$

$$= \frac{1}{\pi}(\int_{-\pi}^{0}(x-\pi)\cos(nx)dx + \int_{0}^{\pi}(\pi - x)\cos(nx)dx)$$

ابتدا لازم است اشاره کنیم که

$$\int x\cos(nx) = \frac{1}{n^2}\cos(nx) + \frac{1}{n}x\sin(nx)$$

با توجه به این موضوع، از عبارت بالا می‌توان به راحتی انتگرال گرفت:

$$= \frac{1}{\pi}((\frac{\cos(nx)}{n^2} + \frac{x\sin(nx)}{n} - \frac{\pi\sin(nx)}{n})|_{-\pi}^{0} + (-\frac{\cos(nx)}{n^2} + \frac{\pi\sin(nx)}{n} - \frac{x\sin(nx)}{n})|_{0}^{\infty})$$

بعد از ساده سازی و محاسبات داریم:

$$\boxed{a_n = -\frac{2(\pi n\sin(\pi n) + \cos(\pi n) - 1)}{\pi n^2}}$$

برای محاسبات ضریب سینوسی داریم:

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int(f(x)sin(nx))dx$$

$$= \frac{1}{\pi}(\int_{-\pi}^{0}(x-\pi)\sin(nx)dx + \int_{0}^{\pi}(\pi - x)\sin(nx)dx)$$

ابتدا لازم است اشاره کنیم که

$$\int x\sin(nx) = \frac{\sin(nx)}{n^2} - \frac{x\cos(nx)}{n}$$

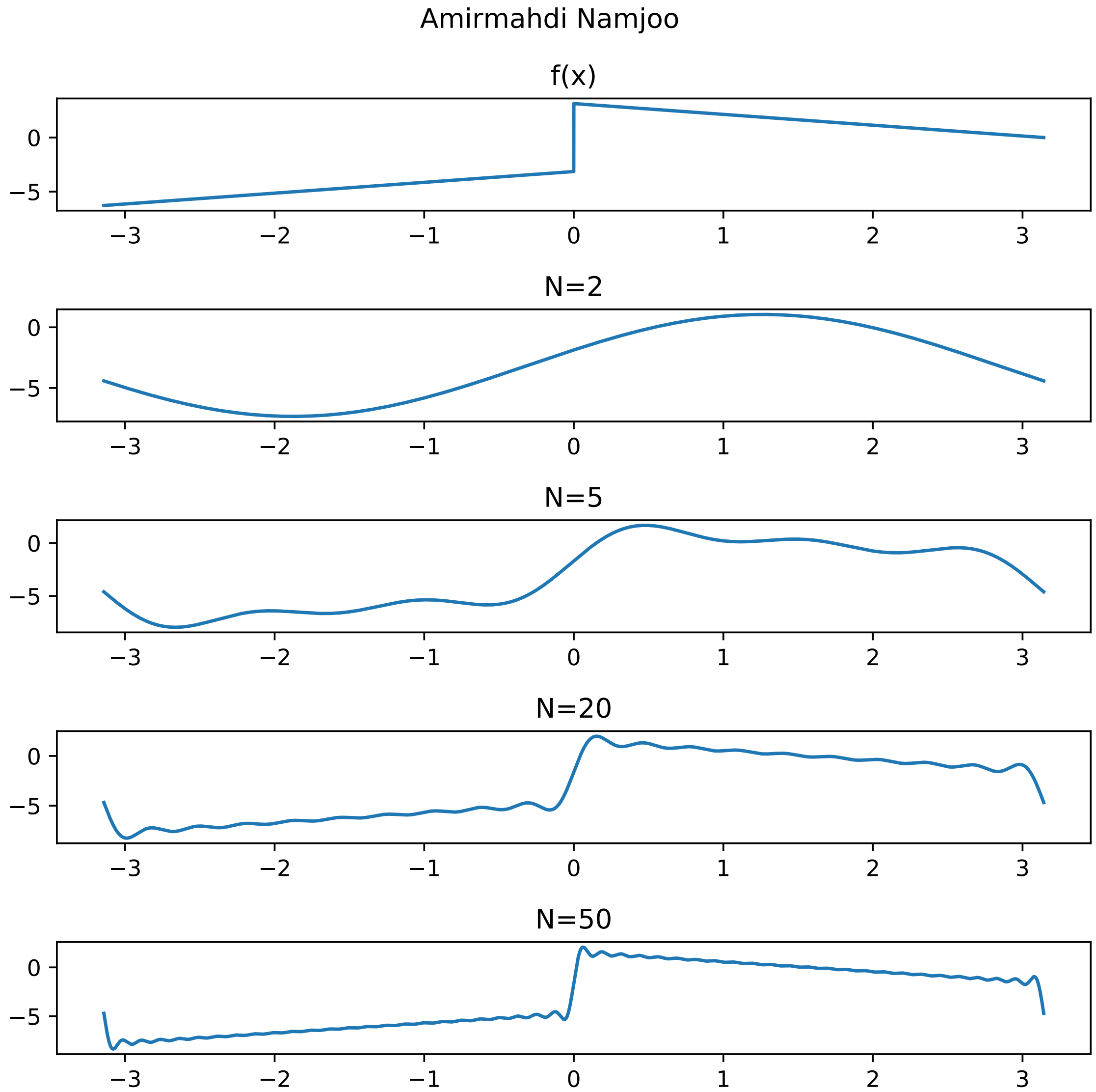
با توجه به این موضوع، عبارت بالا مانند بخش قبل به راحتی قابل محاسبه است. جوابی که در نهایت به آن می رسیم به صورت زیر است:

$$\boxed{b_n = \frac{2-2\cos(\pi n)}{n}}$$

و جواب نهایی به صورت:

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{N}(a_n\cos(nx) + b_n\sin(nx))$$

خواهد بود. (تقسیم بر ۲ فرمول a_0 را به نوعی در خود انتگرال آن تاثیر داده‌ام)
کد آن در فایل `P1_Q1_a.py` قرار دارد. نمودار در صفحه بعد قرار گرفته است. شکل بالایی خود تابع و شکل های بعدی به ازای $N = 2, 5, 20, 50$ هستند.


Amirmahdi Namjoo
f(x)
N=2
N=5
N=20
N=50
0
−5
−3
−2
−1
0
1
2
3

۲.۱.۱ بخش b

$$f(x) = \begin{cases} 1 & 0 \leq x < \frac{\pi}{2} \\ 0 & \frac{\pi}{2} \leq x < \pi \\ 0 & -\pi \leq x < 0 \end{cases}$$

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int f(x)dx = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi/2} 1dx = \boxed{\frac{1}{4}}$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int (f(x)\cos(nx))dx$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi/2} \cos(nx)dx = \frac{1}{\pi} \frac{\sin(nx)}{n} |_0^{\pi/2} = \boxed{\frac{\sin\left(\frac{\pi n}{2}\right)}{\pi n}}$$

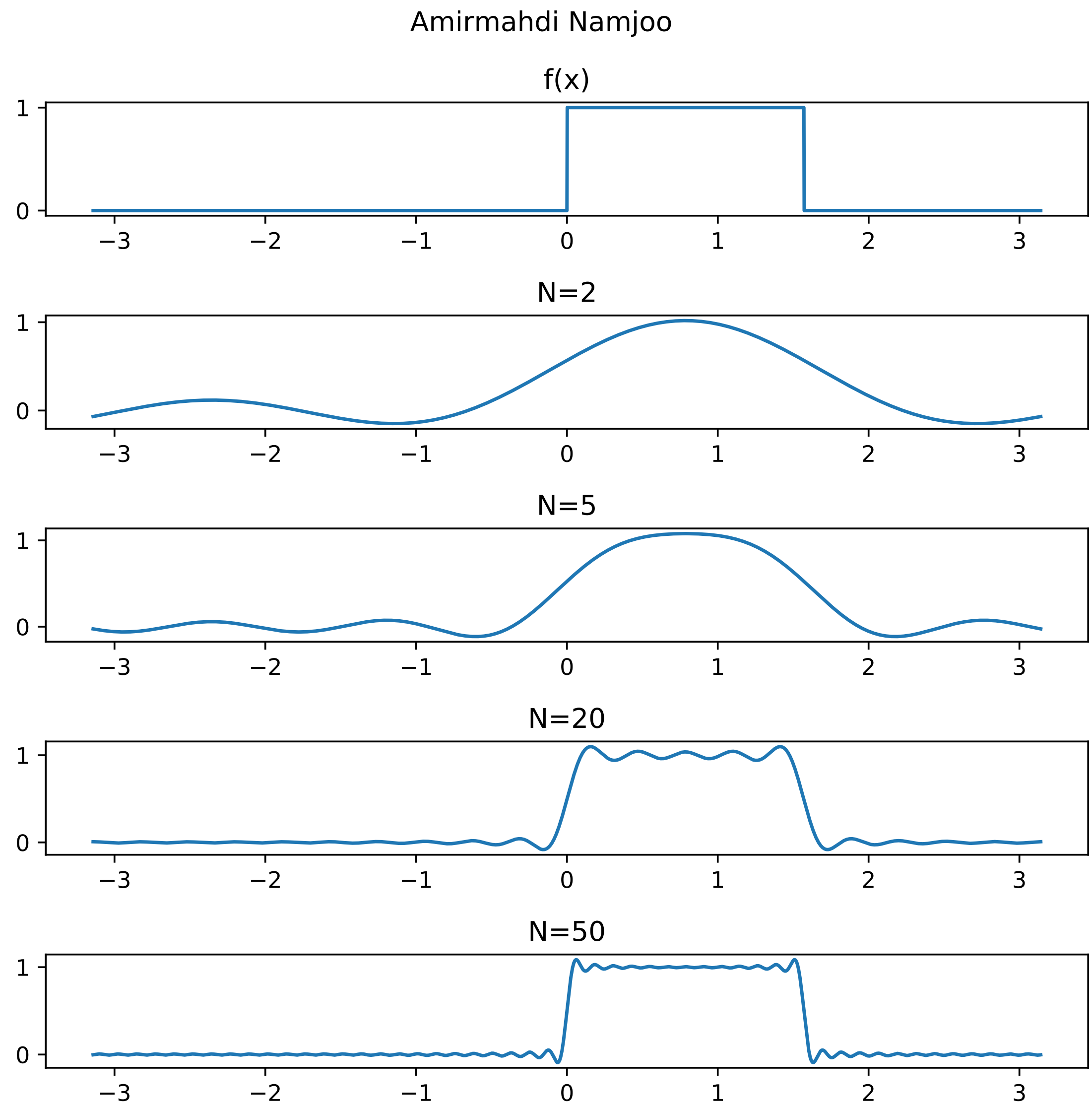
$$b_n = \frac{1}{\pi} \int (f(x)\sin(nx))dx$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi/2} \sin(nx)dx = -\frac{1}{\pi} \frac{\cos(nx)}{n} |_0^{\pi/2} = \boxed{\frac{2\sin^2\left(\frac{\pi n}{4}\right)}{\pi n}}$$

که در بالا از اتحاد $\cos(2\theta) = 1 - 2\sin^2(\theta)$ استفاده شده است.
و جواب نهایی به صورت:

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{N} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$$

کد آن در فایل `P1_Q1_b.py` قرار دارد. نمودار در صفحه بعد قرار گرفته است. شکل بالایی خود تابع و شکل های بعدی به ازای $N = 2, 5, 20, 50$ هستند.


Amirmahdi Namjoo
f(x)
N=2
N=5
N=20
N=50

۲.۱ سوال دوم

۱.۲.۱ بخش a

$$\cos(4t) = \frac{1}{2}e^{-4jt} + \frac{1}{2}e^{4jt}$$

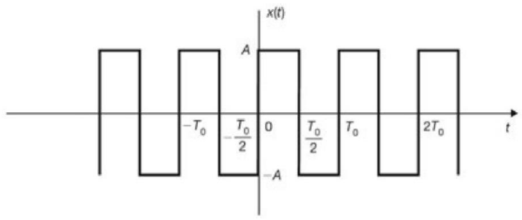
$$\sin(6t) = \frac{1}{2j}e^{6jt} - \frac{1}{2j}e^{-6jt}$$

در نتیجه ضرایب سری فوریه برای $\cos(4t) + \sin(6t)$ به صورت زیر است:

$$a_4 = \frac{1}{2}, a_{-4} = \frac{1}{2}, a_6 = \frac{1}{2j}, a_{-6} = \frac{-1}{2j}$$

و به ازای $k \neq \pm 4, \pm 6$ داریم $a_k = 0$

۲.۲.۱ بخش b



$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$$

$$a_k = \frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t)e^{-jk\frac{2\pi}{T_0}t}dt$$

برای $k = 0$ به طور جداگانه محاسبه کرده و داریم:

$$\boxed{a_0 = \frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t)dt = 0}$$

برای باقی موارد داریم:

$$a_k = \frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t)e^{-jk\frac{2\pi}{T_0}t}dt = \frac{1}{T_0}(\int_{-T_0/2}^{0}(-A)e^{-jk\frac{2\pi}{T_0}t}dt + \int_{0}^{T_0/2}(A)e^{-jk\frac{2\pi}{T_0}t}dt)$$

$$= \frac{1}{T_0}(\frac{AT_0j(-1+e^{jk\pi})}{2k\pi} + \frac{-AT_0j(1-e^{jk\pi})}{2k\pi})$$

$$\boxed{= \frac{Aje^{-jk\pi}(-1+e^{jk\pi})^2}{2k\pi}}$$

۳.۲.۱ بخش c

دوره تناوب پایه $|\sin(x)|$ برابر π است و عملا مانند $\sin$ مثبتی بین 0 تا π است که در همه تناوب‌هایش تکرار می‌شود. در نتیجه باید براساس این تناوب حل کرد.

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi |\sin(x)|e^{-2jkx}dx = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \sin(x)e^{-2jkx}dx$$

برای ضریب a_0 داریم:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \sin(x)dx = \frac{2}{\pi}$$

برای سایر ضرایب داریم:

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \frac{1}{2j}(e^{ix} - e^{-ix})e^{-2jkx}dx$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left(\frac{e^{-j(2k-1)x}}{2k-1} - \frac{e^{-j(2k+1)x}}{2k+1}\right)|_0^\pi$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2k+1} - \frac{1}{2k-1}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{e^{-j\pi(2k-1)}}{2k-1} - \frac{e^{-j\pi(2k+1)}}{2k+1}\right)$$

$$= \boxed{\frac{1+e^{-2j\pi k}}{1-4k^2}}$$

۳.۱ سوال سوم

۱.۳.۱ بخش a

$$x(t) = + - 2je^{-2j\omega_0 t} + -1je^{-1j\omega_0 t} + 1je^{1j\omega_0 t} + 2je^{2j\omega_0 t}$$

$$= -\frac{4}{2j}(e^{2j\omega_0 t} - e^{-2j\omega_0 t}) - \frac{2}{2j}(e^{j\omega_0 t} - e^{-j\omega_0 t})$$

$$\boxed{= -4\sin(2\omega_0 t) - 2\sin(\omega_0 t)}$$

۲.۳.۱ بخش b

عبارت مورد نظر باید ما را به یاد سری فوریه قطار ضربه بیندازد.

$$\delta_{T_0}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{jk\omega_0 t}$$

برای ضرایب فوریه چنین چیزی داریم:

$$c_k = \frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2} \delta(t) e^{-jk\omega_0 t} dt = \frac{1}{T_0}$$

$$\delta_{T_0}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta\left(t - kT_0\right) = \frac{1}{T_0}\sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{jk\omega_0 t} \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$$

با توجه به این موضوع برای چیزی که در صورت سوال داده شده، می‌توانیم آن را معادل با

$$z(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{jk\omega_0 t}\delta(t - T_0 k + 2k)$$

بدانیم.

در عبارت بالا $2k$ برای زوج سازی و سپس e برای شیفت فرکانسی اضافه شده است که باعث بشود که تنها عبارت‌های فرد 1 بمانند و عبارت‌های زوج 0 شوند.

۴.۱ سوال چهارم

در سوال نمادهای e_k و d_k استفاده شده است ولی برای راحتی کار و از آن جایی که کلا دو سیگنال اصلی داریم، از a_k و b_k در جواب استفاده شده است.

$$x_1[n]x_2[n] = \sum_{k=0}^{N_0-1} \sum_{l=0}^{N_0-1} a_k b_l e^{j(2\pi/N_0)(k+l)n}$$

$$x_1[n]x_2[n] = \sum_{k=0}^{(N_0-1)} \sum_{l'=k}^{(k+N_0-1)} a_k b_{l'-k} e^{j(2\pi/N_0)'n}$$

با توجه به متناوب بودن $b_{l'-k}$ و $e^{j2\pi/N_0 l'n}$ داریم:

$$x_1[n]x_2[n] = \sum_{k=0}^{N_0-1} \sum_{l'=0}^{N_0-1} a_k b_{l'-k} e^{j(2\pi/N_0)t'n} = \sum_{l=0}^{N_0-1} \left[\sum_{k=0}^{N_0-1} a_k b_{l-k} \right] e^{j(2\pi/N_0)ln}$$

پس

$$c_k = \sum_{t=0}^{N_0-1} a_k b_{l-k}$$

و معادلا:

$$c_k = \sum_{k=0}^{N_0-1} b_k a_{l-k}$$

برای اثبات رابطه پارسوال داریم:

$$N_0 \sum_{l=\langle N_0 \rangle} a_l b_{k-l} = \sum_{\langle N_0 \rangle} x_1[n]x_2[n]e^{-j(2\pi/N_0)kn}$$

با قرار دادن $k = 0$ داریم:

$$N_0 \sum_{l=\langle N_0 \rangle} a_l b_{-1} = \sum_{n=\langle N_0 \rangle} x_1[n]x_2[n]$$

در نتیجه:

$$\frac{1}{N_0} \sum_{n=0}^{N_0-1} x[n] = \sum_{k=0}^{N_0-1} a_k b_{-k}$$

۵.۱ سوال پنجم

در نتیجه سوال قبل قرار می‌دهیم:

$$x_2[n] = x_1^*[n]$$

در نتیجه این موضوع داریم:

$$b_k = a_{-k}^*$$

پس

$$\frac{1}{N_0}\sum_{n=0}^{N_0-1} x[n] = \sum_{n=0}^{N_0-1} a_k n_{-k}$$

$$\frac{1}{N_0}\sum_{n=0}^{N_0-1} x_1[n]x_1^*[n] = \sum_{k=0}^{N_0-1} a_k a_k^*$$

بنابراین:

$$\sum_{k=\langle n_0\rangle} |a_k|^2 = \frac{1}{N_0}\sum_{n=\langle N_0\rangle} |x[n]|^2.$$

۶.۱ سوال ششم

$$f(t) = \begin{cases} t+\frac{5}{3} & -1 \le t < 0 \\ -t+\frac{5}{3} & 0 \le t < 2 \\ 0 & 2 \le t < 4 \end{cases}$$

۱.۶.۱ بخش a

$$a_0 = \frac{1}{5}\int f(t)dt = \frac{1}{5}(\int_{-1}^{0} t+5/3dt + \int_{0}^{2} -t+5/3dt)$$
$$= \frac{1}{5}(\frac{7}{6}+\frac{4}{3}) = \boxed{\frac{1}{2}}$$

$$a_k = \frac{1}{5}\int_{-1}^{5} f(t)e^{-jk\frac{2\pi}{5}t}dt = \frac{1}{5}(\int_{-1}^{0}(t+\frac{5}{3})e^{-jk\frac{2\pi}{5}t}dt + \int_{0}^{2}(-t+\frac{5}{3})e^{-jk\frac{2\pi}{5}t}dt)$$

$$\frac{1}{5}(\frac{50i\pi k + e^{\frac{2i\pi k}{5}}(-75-20i\pi k)+75}{12\pi^2k^2} + \frac{-50i\pi k + e^{\frac{-4}{5}i\pi k}(-75-10i\pi k)+75}{12\pi^2k^2})$$
$$= \frac{e^{\frac{1}{5}(-4)i\pi k}\left(-2i\pi k + 30e^{\frac{4i\pi k}{5}} + e^{\frac{6i\pi k}{5}}(-15-4i\pi k)-15\right)}{12\pi^2k^2}$$

یا اگر روش فرمول کسینوس و سینوس را برویم داریم:

$$a_n = \frac{2}{5}\int(f(t)\cos(\frac{2\pi}{5}nt))dt$$
$$= \frac{2}{5}(\int_{-1}^{0}(t+5/3)\cos(\frac{2\pi}{5}nt)dt + \int_{0}^{2}(-t+5/3)\cos(\frac{2\pi}{5}nt)dt)$$
$$= \frac{\sin^2\left(\frac{\pi n}{5}\right)\left(4\pi n\sin\left(\frac{2\pi n}{5}\right)+30\cos\left(\frac{2\pi n}{5}\right)+45\right)}{3\pi^2n^2}$$

$$b_n = \frac{2}{5}(\int(f(t)\sin(\frac{2\pi}{5}nt))dt$$
$$= \frac{2}{5}(\int_{-1}^{0}(t+5/3)\sin(\frac{2\pi}{5}nt)dt + \int_{0}^{2}(-t+5/3)\sin(\frac{2\pi}{5}nt)dt)$$
$$= \frac{15\left(\sin\left(\frac{2\pi n}{5}\right)-\sin\left(\frac{4\pi n}{5}\right)\right)+4\pi n\cos\left(\frac{2\pi n}{5}\right)+2\pi n\cos\left(\frac{4\pi n}{5}\right)}{6\pi^2n^2}$$

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{N}(a_n\cos(nx)+b_n\sin(nx))$$

۲.۶.۱ بخش b

کدهای مسئله به زبان پایتون در فایل P1_Q6_b.py موجود است و جواب قسمت‌های بعد براساس آن تولید شده است:

جملات مد نظر در ادامه نوشته شده اند. توجه کنید که به دلیل ویژگی‌های اعداد Floating-Point عموما ضرایبی که صفر بوده‌اند به صورت عددی ضربدر 10^{-33} نوشته شده‌اند.

پس از آن ابتدا در یک شکل سیگنال‌ها به ازای مقادیر N به صورت جداگانه رسم شده‌اند. سپس در اشکال بعدی، به ازای هر کدام از مقادیر، نمودار آن با رنگ نارنجی روی نمودار اصلی با رنگ آبی رسم شده است.

$$a_1 = 0.772711906482877, b_1 = 0.07175375986881644$$

$$a_2 = 0.27113541693643917, b_2 = 0.028002784979373037$$

$$a_3 = -0.004852111911900812, b_3 = -0.08960735823011712$$

$$a_4 = 0.004714960180721709, b_4 = -0.010817086948420714$$

$$a_5 = 1.5195743635847465e - 33, b_5 = 0.06366197723675814$$

$$a_6 = 0.04083290139095018, b_6 = -0.0008212742065860439$$

$$a_7 = 0.04515821107548206, b_7 = -0.011886611106858576$$

$$a_8 = -0.01831062003374954, b_8 = -0.023451895441009625$$

$$a_9 = -0.007676952848145469, b_9 = -0.00338756817877342$$

$$a_{10} = 1.5195743635847456e - 33, b_{10} = 0.03183098861837907$$

$$a_{11} = 0.017911214823682062, b_{11} = -0.0010816983697769051$$

$$a_{12} = 0.023201132067024215, b_{12} = -0.008867354363816892$$

$$a_{13} = -0.013610002113093692, b_{13} = -0.012990392854308745$$

$$a_{14} = -0.006730131246383232, b_{14} = -0.0019169012948294058$$

$$a_{15} = 1.5195743635847434e-33, b_{15} = 0.021220659078919374$$

$$a_{16} = 0.01118956850490962, b_{16} = -0.000907051304878608$$

$$a_{17} = 0.015464268832541013, b_{17} = -0.006821294507069879$$

$$a_{18} = -0.010581176024894123, b_{18} = -0.008919232952258454$$

$$a_{19} = -0.005585535368095415, b_{19} = -0.0013214190722783403$$

$$a_{20} = 1.5195743635847419e-33, b_{20} = 0.015915494309189534$$

$$a_{21} = 0.008076648709406326, b_{21} = -0.0007562919849315991$$

$$a_{22} = 0.011564843734622392, b_{22} = -0.005507870241109013$$

$$a_{23} = -0.008613443680564381, b_{23} = -0.006775588961597922$$

$$a_{24} = -0.004711199325475308, b_{24} = -0.0010040831881916652$$

$$a_{25} = 1.5195743635847393e-33, b_{25} = 0.012732395447351627$$

$$a_{26} = 0.006300406249170883, b_{26} = -0.0006432609418058376$$

$$a_{27} = 0.009225781951316991, b_{27} = -0.004609416023114295$$

$$a_{28} = -0.007250921405575788, b_{28} = -0.005457578628620997$$

$$a_{29} = -0.004055794714702865, b_{29} = -0.0008081706869254678$$

$$a_{30} = 1.519574363584735e-33, b_{30} = 0.010610329539459687$$

$$a_{31} = 0.005157489248731366, b_{31} = -0.0005579230259798711$$

$$a_{32} = 0.007669732145959915, b_{32} = -0.003959686879886606$$

$$a_{33} = -0.006256136875045252, b_{33} = -0.004566755490351168$$

$$a_{34} = -0.003553802680498653, b_{34} = -0.0006755979057181989$$

$$a_{35} = 1.5195743635847316e - 33, b_{35} = 0.009094568176679736$$

$$a_{36} = 0.004362360888597353, b_{36} = -0.0004918855395621645$$

$$a_{37} = 0.006561005399865466, b_{37} = -0.0034690828700930944$$

$$a_{38} = -0.005499407016535415, b_{38} = -0.0039249666296024815$$

$$a_{39} = -0.0031594138344824 31, b_{39} = -0.0005800860028377107$$

$$a_{40} = 1.5195743635847268e - 33, b_{40} = 0.007957747154594767$$

$$a_{41} = 0.003778044173238204, b_{41} = -0.00043950225495442116$$

$$a_{42} = 0.005731421240004929, b_{42} = -0.003085957785323703$$

$$a_{43} = -0.004905005087522983, b_{43} = -0.0034408366129256586$$

$$a_{44} = -0.0028423248893797424, b_{44} = -0.0005080735752180709$$

$$a_{45} = 1.5195743635847215e - 33, b_{45} = 0.00707355302630646$$

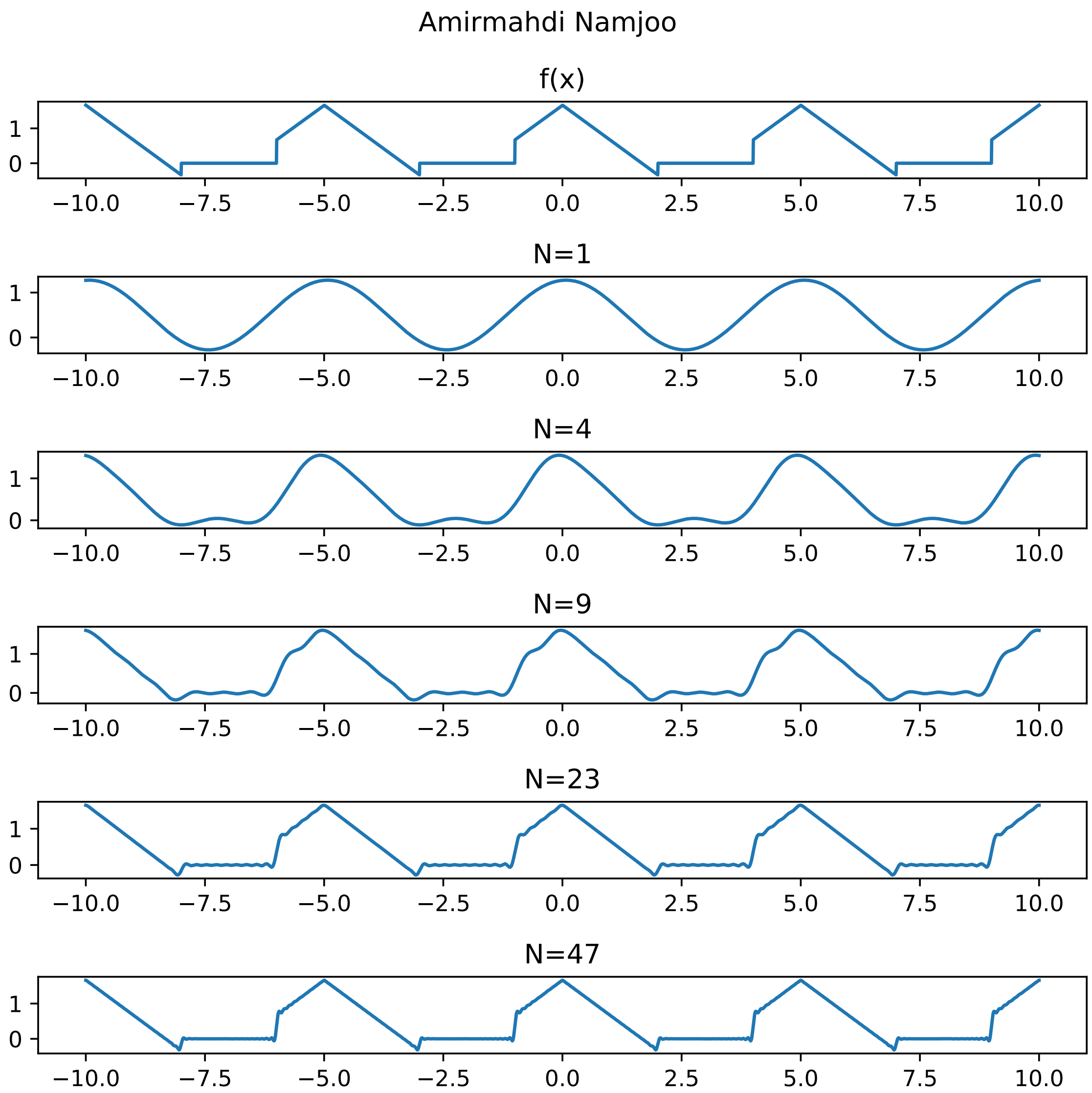
$$a_{46} = 0.0033308907366752464, b_{46} = -0.0003970335169585926 6$$

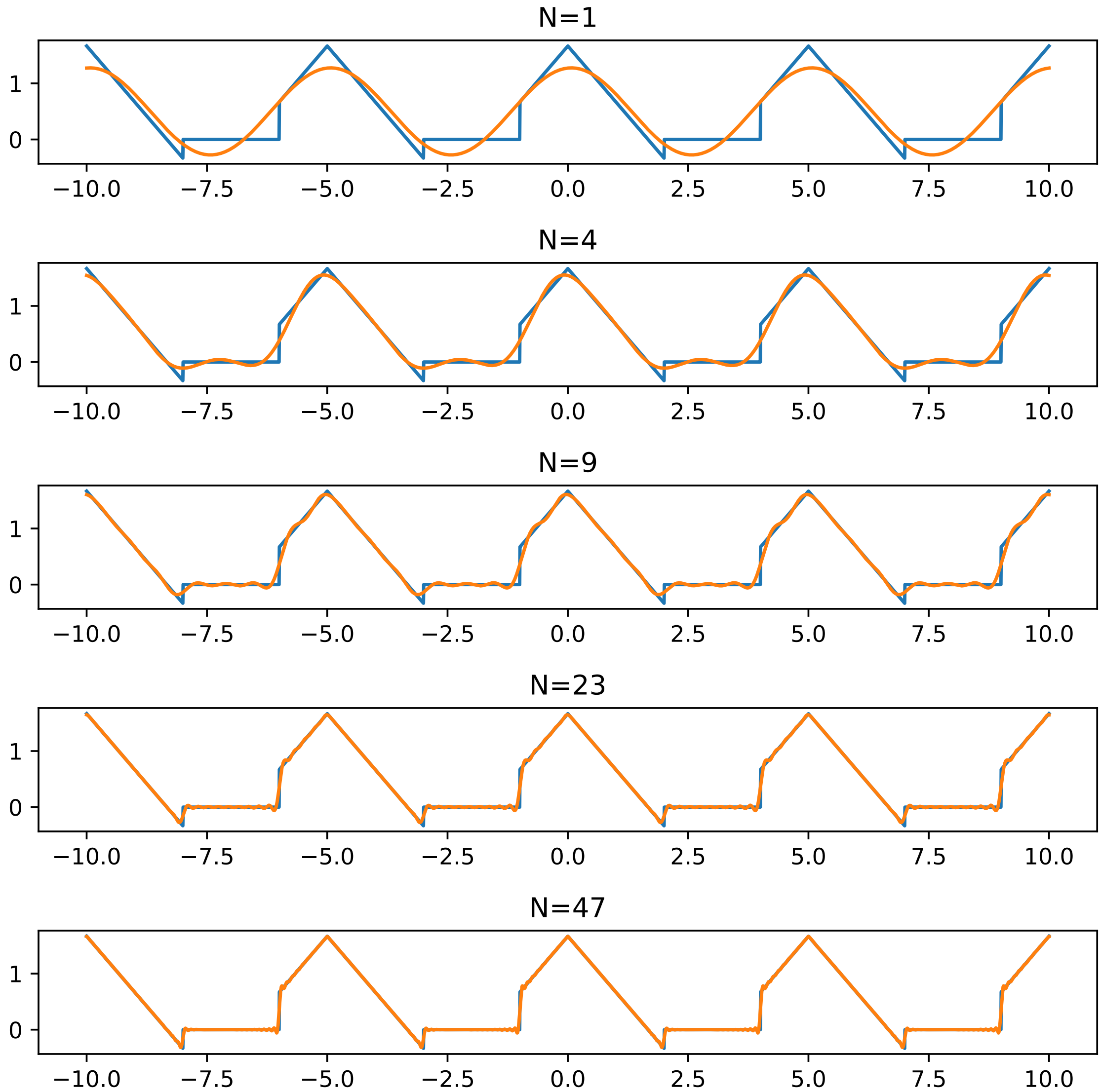
$$a_{47} = 0.0050875680137263376, b_{47} = -0.0027786711713284526$$

$$a_{48} = -0.004426026511190478, b_{48} = -0.003062743915561243$$

$$a_{49} = -0.0025822630276678576, b_{49} = -0.00045187424944944454$$

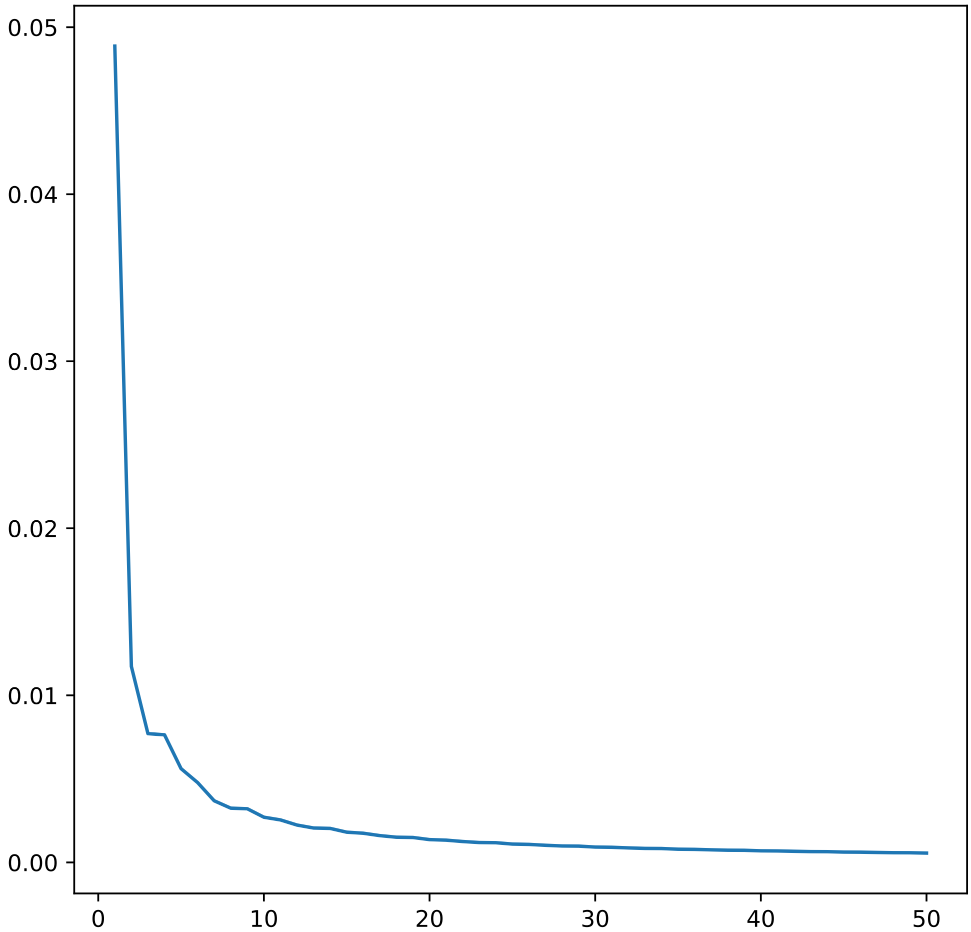
$$a_{50} = 1.5195743635847159e-33, b_{50} = 0.006366197723675813$$





۳.۶.۱ بخش c

کد این بخش در فایل P1_Q6_c قرار دارد.


0.05
0.04
0.03
0.02
0.01
0.00
0
10
20
30
40
50

۲ تبدیل فوریه

۱.۲ سوال اول

$$X(jw) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt$$

۱.۱.۲ بخش a

$$e^{-a|t|} \sin \omega_0 t$$

$$X(jw) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a|t|} \sin(\omega_0 t) e^{-j\omega t} dt$$

$$\int_{0}^{\infty} \sin(\omega_0 t) e^{(-jw-a)t} + \int_{-\infty}^{0} \sin(\omega_0 t) e^{(-jw+a)t}$$

$$= \int_{0}^{\infty} e^{-at} \sin(\omega_0 t)(e^{-jwt} - e^{jwt})$$

$$= -2j \int_{0}^{\infty} e^{at} \sin(\omega_0 t) \sin(\omega t)$$

$$= j \int_{0}^{\infty} e^{at} (\cos((\omega_0 + \omega)t) - \cos((\omega_0 - \omega)t))$$

$$= j(e^{at} \left(\frac{a \cos(t(\omega_0 - \omega)) + (\omega_0 - \omega) \sin(t(\omega_0 - \omega))}{a^2 + (\omega_0 - \omega)^2} - \frac{a \cos(t(\omega_0 + \omega)) + (\omega_0 + \omega) \sin(t(\omega_0 + \omega))}{a^2 + (\omega_0 + \omega)^2} \right))|_0^\infty$$

با شرط $a < 0$ داریم:

$$= \frac{4a\omega_0 \omega j}{\left(a^2 + \omega_0^2\right)^2 + 2\omega^2 (a - \omega_0)(a + \omega_0) + \omega^4}$$

۲.۱.۲ بخش b

$$X(j\omega) = \int_{-1}^{1}(1+\cos(\pi t))e^{-j\omega t}dt$$

$$X(j\omega) = \int_{-1}^{1} e^{-j\omega t}dt + \int_{-1}^{1} \frac{e^{j\pi t}+e^{-j\pi t}}{2}e^{-j\omega t}dt$$

$$X(j\omega) = \left.\frac{e^{-j\omega t}}{-j\omega}\right|_{-1}^{1} + \frac{1}{2}\left(\frac{e^{j(\pi-\omega)}}{j(\pi-\omega)} + \frac{e^{-j(\pi+\omega)t}}{-j(\pi+\omega)}\right)\Bigg|_{-1}^{1}$$

$$X(j\omega) = \frac{e^{-j\omega}-e^{j\omega}}{-j\omega} + \frac{1}{2}\left(\frac{e^{j(\pi-\omega)}-e^{j(\pi-\omega)}}{j(\pi-\omega)} + \frac{e^{-j(\pi+\omega)}-e^{j(\pi+\omega)}}{-j(\pi+\omega)}\right)$$

$$X(j\omega) = \frac{2}{\omega}\cdot\frac{e^{j\omega}-e^{-j\omega}}{2j} + \frac{1}{\pi-\omega}\cdot\frac{e^{j(\pi-\omega)}-e^{j(\pi-\omega)}}{2j} + \frac{1}{\pi+\omega}\cdot\frac{e^{j(\pi+\omega)}-e^{-j(\pi+\omega)}}{2j}$$

$$X(j\omega) = \frac{2\sin\omega}{\omega} + \frac{\sin(\pi-\omega)}{\pi-\omega} + \frac{\sin(\pi+\omega)}{\pi+\omega}$$

$$\boxed{X(j\omega) = \frac{2\sin\omega}{\omega} + \frac{\sin(\pi-\omega)}{\pi-\omega} + \frac{\sin(\pi+\omega)}{\pi+\omega}}$$

۳.۱.۲ بخش c

می‌دانیم تبدیل فوریه $e^{a|t|}$ به صورت $\frac{2a}{a^2+\omega^2}$ است. اثبات:

$$x(t) = e^{-dt|} = \begin{cases} e^{-at} & t>0 \\ e^{at} & t<0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} X(\omega) &= \int_{-\infty}^{0} e^{at}e^{-j\omega t}dt + \int_{0}^{\infty} e^{-at}e^{-j\omega t}dt \\ &= \int_{-\infty}^{0} e^{(a-j\omega)t}dt + \int_{0}^{\infty} e^{-(a+j\omega)t}dt \\ &= \frac{1}{a-j\omega} + \frac{1}{a+j\omega} = \frac{2a}{a^2+\omega^2} \end{aligned}$$

همچنین می دانیم که تبدیل فوریه $tf(t)$ تبدیل فوریه برابر است با: $j\frac{d}{d\omega}F(\omega)$
پس در این جا هم جواب

$$j\frac{d}{d\omega}\frac{2a}{a^2+\omega^2} = -\frac{4aj\omega}{(a^2+\omega^2)^2}$$

۴.۱.۲ بخش d

$$X(jw) = \int_{-\infty}^{\infty} \cos(\omega_0 t)u(t)e^{-j\omega t}dt$$
$$X(jw) = \int_{0}^{\infty} \cos(\omega_0 t)e^{-j\omega t}dt$$
$$X(jw) = \frac{1}{2}\int_{0}^{\infty} (e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t})e^{-j\omega t}dt$$
$$= -\frac{j\omega}{\omega^2 - {\omega_0}^2}$$

۵.۱.۲ بخش e

$$\Delta(t) = \begin{cases} 1-2|t| & 0 \le t \le 1/2 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} = \begin{cases} 1-2t & 0 \le t \le 1/2 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$
$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \Delta(t)e^{-j\omega t}dt$$
$$= \int_{0}^{1/2} (1-2t)e^{-j\omega t}dt$$
$$= \frac{j\omega(2t-1)+2}{(j\omega)^2}e^{-j\omega t}\Big|_{t=0}^{1/2}$$
$$= \frac{2 - j\omega - 2e^{-j\omega/2}}{\omega^2}$$

۶.۱.۲ بخش f

$$x(t) = \begin{cases} 1 \text{ if } 1 \le |t| \le 3 \\ -1 \text{ if } |t| < 1 \\ 0 \text{ otherwise} \end{cases}$$

می‌دانیم که تبدیل فوریه سیگنال مستطیلی بین $-1/2$ تا $1/2$ به صورت: $\frac{\sin\frac{\omega}{2}}{\frac{\omega}{2}} = sinc(\omega/2)$ است. اگر سیگنال مستطیلی ذکر شده را با نماد $\Pi(t)$ نمایش بدهیم، عبارت بالا $\Pi(t/6) - 2\Pi(t/2)$ است. در نتیجه

$$F(\omega) = 6sinc(6\omega/2) - 4sinc(2\omega/2) = 6sinc(3\omega) - 4sinc(\omega)$$

۲.۲ سوال دوم

۱.۲.۲ بخش a

$$F(\omega) = \frac{16 - 16j\omega + 4\omega^2 - 4j\omega^3}{54 + 81j\omega + 18\omega^2 + 31j\omega^3 - 6\omega^4}$$

$$F(\omega) = \frac{4(-2 + j\omega)(-1 + j\omega)(2 + j\omega)}{-(3 + j\omega)^2(-3 + 2j\omega)(2 + 3j\omega)}$$

$$= \frac{80}{63(j\omega + 3)^2} + \frac{28}{1053(2j\omega - 3)} + \frac{640}{637(3j\omega + 2)} - \frac{4028}{3969(j\omega + 3)}$$

$$\frac{80}{63}te^{-3t}u(t) + \frac{-14}{1053}e^{\frac{3}{2}t}u(-t) + \frac{640}{1911}e^{\frac{-2}{3}t}u(t) + \frac{4028}{3969}e^{-3t}u(t)$$

۲.۲.۲ بخش b

$$F(j\omega) = 2\pi j\omega e^{-|\omega|}$$

$$x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} 2\pi j\omega e^{-|\omega|}e^{j\omega t}d\omega$$

$$\int_{-\infty}^{0} j\omega e^{\omega}e^{j\omega t}d\omega + \int_{0}^{\infty} j\omega e^{-\omega}e^{j\omega t}d\omega$$

$$= \frac{i}{(t-i)^2} + (-\frac{i}{(t+i)^2})$$

$$= -\frac{4t}{\left(t^2+1\right)^2}$$

۳.۲ سوال سوم

۴.۲ سوال چهارم

$$h(t) = \frac{\sin(10\pi t) - \sin(6\pi t)}{2\pi t}$$

$$H(j\omega) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & |\omega| < 10\pi \\ 0, & |\omega| > 10\pi \end{cases} - \begin{cases} \frac{1}{2}, & |\omega| < 6\pi \\ 0, & |\omega| > 6\pi \end{cases}$$

$$x(t) = \frac{1}{2}(\cos(5\pi t) + \cos(9\pi t))$$

$$X(j\omega) = \frac{\pi}{2}(\delta(\omega - 5\pi) + \delta(\omega + 5\pi)) + \frac{\pi}{2}(\delta(\omega - 9\pi) + \delta(\omega + 9\pi))$$

با ضرب H در X ، عبارت داری 5π که فقط در 5π مقدار دارد، در هر دو حالت H شامل حالت $\frac{1}{2}$ شده و صفر می‌شود. ولی عبارت دومی فقط در حالت $|w| < 10\pi$ صدق می‌کند و نصف می‌شود. در نتیجه:

$$Y(j\omega) = \frac{\pi}{4}(\delta(\omega - 9\pi) + \delta(\omega + 9\pi))$$

پس

$$y(t) = \frac{1}{4}\cos(9\pi t)$$

۵.۲ سوال پنجم

$$2\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 3\frac{dy(t)}{dt} - 2y(t) = x(t-1)$$

با فرض شرایط اولیه صفر:

$$2(j\omega)^2Y(j\omega) + 3(j\omega)Y(j\omega) - 2Y(j\omega) = e^{-j\omega}X(j\omega)$$

$$X(j\omega) = \frac{1}{5 + j\omega} - \frac{1}{1 + j\omega}$$

$$Y(j\omega) = e^{-j\omega} \times \frac{\frac{1}{j\omega+5} - \frac{1}{j\omega+1}}{2j\omega^2 + 3j\omega - 2}$$

$$= e^{-j\omega} \times (-\frac{4}{(j\omega+1)(j\omega+5)\,(2j\omega^2 + 3j\omega - 2)})$$

$$= e^{-j\omega} \times (-\frac{4}{15(j\omega+2)} + \frac{1}{33(j\omega+5)} - \frac{32}{165(2j\omega-1)} + \frac{1}{3(j\omega+1)})$$

ابتدا قسمت درون پرانتز را تبدیل فوریه معکوس می گیریم:

$$\rightarrow \frac{-4}{15}e^{-2t}u(t)+\frac{1}{33}e^{-5t}u(t)+\frac{16}{65}e^{\frac{1}{2}t}u(-t)+\frac{1}{3}e^{-t}u(t)$$

حال اثر $e^{-j\omega}$ را که شیفت به راست می دهد را اعمال می‌کنیم:

$$y(t)=\frac{-4}{15}e^{-2(t-1)}u(t-1)+\frac{1}{33}e^{-5(t-1)}u(t-1)+\frac{16}{65}e^{\frac{1}{2}(t-1)}u(-(t-1))+\frac{1}{3}e^{-(t-1)}u(t-1)$$

$$=\frac{-4}{15}e^{-2t+2)}u(t-1)+\frac{1}{33}e^{-5t+5)}u(t-1)+\frac{16}{65}e^{\frac{1}{2}t-\frac{1}{2}}u(-t+1)+\frac{1}{3}e^{-t+1}u(t-1)$$

۶.۲ سوال ششم

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta\left(\omega - k\omega_0\right) = \frac{1}{\omega_0} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{\frac{2\pi n j \omega}{\omega_0}}$$

اگر توجه کنیم عبارت صورت سوال به شدت شبیه سری فوریه است. در اصل عبارت $\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta\left(\omega - k\omega_0\right)$ یک عبارت متناوب با دوره تناوب ω_0 است که در هر ω_0 یک تابع ضربه ایجاد کرده است. در نتیجه ضرایب فوریه آن را در یک دوره تناوب بدست می‌آوریم. البته بهتر بود به جای نماد ω_0 از نماد T_0 استفاده می‌شد چون عملا این جا ω_0 فرکانس نیست و خود دوره تناوب است ولی به هر حال با همین نماد جلو می‌رویم. عملا بهتر بود برای رعایت نمادگذاری به جای ω هم t گذاشته می‌شد ولی در صورت سوال نمادگذاری متفاوتی استفاده شده است و از آن جایی که عملا تبدیل خاصی هم خواسته نشده است، می‌توانیم به صورت سوال به چشم یک تابع معمولی نگاه کنیم که به جای نماد t نماد ω در آن گذاشته شده است.

$$a_k = \frac{1}{\omega_0} \int_{-\omega_0/2}^{\omega_0/2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - n\omega_0) e^{-jk\frac{\omega_0}{2\pi}\omega} d\omega$$

عبارت بالا فقط به ازای $n = 0$ مقدار غیر صفر دارد (در بازه انتگرال نوشته شده):

$$a_k = \frac{1}{\omega_0} \int_{-\omega_0/2}^{\omega_0/2} \delta(\omega) e^{-jk\frac{\omega_0}{2\pi}\omega} d\omega$$

عبارت بالا تنها در $\omega = 0$ ناصفر است پس:

$$a_k = \frac{1}{\omega_0} \int_{-\omega_0/2}^{\omega_0/2} \delta(\omega) d\omega = \frac{1}{\omega_0}$$

در نتیجه با توجه به رابطه سری فوریه به عبارت زیر می رسیم. توجه کنید که در این جا عملا ω_0 رابطه فوریه به صورت $\frac{\omega_0}{2\pi}$ و t آن رابطه به صورت ω است.

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta\left(\omega - k\omega_0\right) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n e^{\frac{2\pi n j \omega}{\omega_0}}$$

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta\left(\omega - k\omega_0\right) = \frac{1}{\omega_0} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{\frac{2\pi n j \omega}{\omega_0}}$$