



سیگنال‌ها و سیستم‌ها

تمرین چهارم
دانشکده مهندسی کامپیوتر
دانشگاه صنعتی شریف
نیم سال دوم ۹۹-۰۰

استاد:

جناب آقای دکتر منظوری شلمانی

نام و نام خانوادگی:

امیرمهدی نامجو - ۹۷۱۰۷۲۱۲



۱ سوال اول

.۱

$$H_1(e^{j\omega}) = \frac{1 + \frac{1}{2}e^{-j\omega}}{1 + \frac{1}{4}e^{-j\omega}} = \frac{1 + \frac{1}{2}\cos(\omega) - j\frac{1}{2}\sin(\omega)}{1 + \frac{1}{4}\cos(\omega) - j\frac{1}{4}\sin(\omega)}$$

$$\begin{aligned} |H_1(e^{j\omega})| &= \frac{(1 + \frac{1}{2}\cos(\omega))^2 + (\frac{1}{2}\sin(\omega))^2}{(1 + \frac{1}{4}\cos(\omega))^2 + (\frac{1}{4}\sin(\omega))^2} \\ &= \frac{\frac{5}{4} + \cos(\omega)}{\frac{17}{16} + \frac{1}{2}\cos(\omega)} \end{aligned}$$

$$H_2(e^{j\omega}) = \frac{\frac{1}{2} + e^{-j\omega}}{1 + \frac{1}{4}e^{-j\omega}} = \frac{\frac{1}{2} + \cos(\omega) - j\sin(\omega)}{1 + \frac{1}{4}\cos(\omega) - j\frac{1}{4}\sin(\omega)}$$

$$\begin{aligned} |H_2(e^{j\omega})| &= \frac{(\frac{1}{2} + \cos(\omega))^2 + \sin^2(\omega)}{(1 + \frac{1}{4}\cos(\omega))^2 + (\frac{1}{4}\sin(\omega))^2} \\ &= \frac{\frac{5}{4} + \cos(\omega)}{\frac{17}{16} + \frac{1}{2}\cos(\omega)} \end{aligned}$$

$$|H_1(e^{j\omega})| = |H_2(e^{j\omega})|$$

یعنی برابرند.

.۲

$$\angle H_1(e^{j\omega}) = -\tan^{-1}\left(\frac{\frac{1}{2}\sin(\omega)}{1 + \frac{1}{2}\cos(\omega)}\right) - \left(-\tan^{-1}\left(\frac{\frac{1}{4}\sin(\omega)}{1 + \frac{1}{4}\cos(\omega)}\right)\right)$$

$$= -\tan^{-1}\left(\frac{\frac{1}{2}\sin(\omega)}{1 + \frac{1}{2}\cos(\omega)}\right) + \tan^{-1}\left(\frac{\frac{1}{4}\sin(\omega)}{1 + \frac{1}{4}\cos(\omega)}\right)$$

$$\angle H_2(e^{j\omega}) = -\tan^{-1}\left(\frac{\sin(\omega)}{\frac{1}{2} + \cos(\omega)}\right) - \left(-\tan^{-1}\left(\frac{\frac{1}{4}\sin(\omega)}{1 + \frac{1}{4}\cos(\omega)}\right)\right)$$

$$= -\tan^{-1}\left(\frac{\sin(\omega)}{\frac{1}{2} + \cos(\omega)}\right) + \tan^{-1}\left(\frac{\frac{1}{4}\sin(\omega)}{1 + \frac{1}{4}\cos(\omega)}\right)$$

تاخیر گروه به نوعی منفی نرخ تغییرات فاز نسبت به ω است.

اگر از عامل مشترک دوم در هر دو عبارت برای سادگی محاسبات صرف نظر کنیم و با $\xi(\omega)$ نمایش بدهیم، داریم:



$$\tau_1 = \frac{1 + 2 \cos(\omega)}{5 + 4 \cos(\omega)} + \xi(\omega)$$

$$\tau_2 = \frac{2(2 + \cos(\omega))}{5 + 4 \cos(\omega)}$$

به راحتی با عدد گذاری ساده می توان متوجه شد که در بازه $[-\pi, \pi]$:

$$\tau_2 > \tau_1$$

و این موضوع برای سایر تناوب ها هم برقرار است. یعنی تاخیر گروه H_2 بزرگتر از H_1 است.