



سیگنال‌ها و سیستم‌ها

تمرین دوم

دانشکده مهندسی کامپیوتر

دانشگاه صنعتی شریف

نیم سال دوم ۹۹-۰۰

استاد:

جناب آقای دکتر منظوری شلمانی

نام و نام خانوادگی:

امیرمهدی نامجو - ۹۷۱۰۷۲۱۲



۱ سوال اول

$$x(t) = e^{3|t|} \quad (\bar{A})$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(x(t)) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{3|t|} e^{-st} dt = \int_0^{\infty} e^{(3-s)t} dt + \int_{-\infty}^0 e^{(-3-s)t} dt \\ &= \frac{e^{(3-s)t}}{3-s} \Big|_0^{\infty} + \frac{e^{(-3-s)t}}{-3-s} \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{s-3} + \frac{-1}{s+3} = \frac{6}{s^2-9} \end{aligned}$$

با این حال باید توجه کرد که ناحیه همگرایی عامل اول برای $Re(s) > 3$ بوده و ناحیه همگرایی عامل دوم جمع $-3 - Re(s) > 0 \rightarrow Re(s) < -3$ است. در نتیجه این عبارت تبدیل لاپلاس ندارد چون ناحیه همگرایی کلی آن تهی است.

$$x(t) = e^{-3|t|} \quad (\text{ب})$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(x(t)) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-3|t|} e^{-st} dt = \int_0^{\infty} e^{(-3-s)t} dt + \int_{-\infty}^0 e^{(3-s)t} dt \\ &= \frac{e^{(-3-s)t}}{-3-s} \Big|_0^{\infty} + \frac{e^{(3-s)t}}{3-s} \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{s+3} + \frac{-1}{s-3} = \frac{6}{s^2-9} \end{aligned}$$

در این مورد ناحیه همگرایی عامل اول $Re(s) > -3$ و برای عامل دوم $Re(s) < 3$ است که باعث می شود تبدیل لاپلاس درستی با ناحیه همگرایی $-3 < Re(s) < 3$ داشته باشیم.

(ج)

$$x(t) = e^{(-1+j)t} \cos(3t) u(t)$$

براساس جدول تبدیل لاپلاس:

$$\mathcal{L}(x(t)) = \frac{s - (-1 + j)}{(s - (-1 + j))^2 + 9} = \frac{s + 1 - j}{9 + s^2 + (2 - 2j)s - 2j}$$

برای ناحیه همگرایی عامل کسینوس صرفاً نوسان ساز است و تاثیری ندارد. توان موهومی هم ایجاد کننده عوامل نوسان ساز است. تنها توان حقیقی مهم است. با توجه به Right-Side بودن سیگنال، ناحیه همگرایی

$$Re(s) > -1$$

است.



۲ سوال دوم

(آ)

$$\frac{s}{s^2 + 4} - \frac{5}{s + 2} - \frac{1}{s - 2}, 0 < \operatorname{Re}(s) < 2$$

برای عبارت اول، معکوس آن $\cos(2t)$ خواهد بود. برای عبارت دوم معکوس آن $5e^{-2t}$ و برای عبارت سوم معکوس آن e^{2t} خواهد بود.

با توجه به ناحیه همگرایی متوجه می شویم که عبارت $\cos(2t)$ که ناحیه همگرایی مربوط به صفر را ایجاد کرده باید Right-Sided باشد و در نتیجه e^{2t} هم Right-Sided خواهد بود. اما عبارت e^{-2t} به صورت Left-Sided خواهد بود.

$$\mathcal{L}^{-1}(X(s)) = \cos(2t)u(t) - 5e^{-2t}u(t) - (-e^{2t}u(-t)) = \cos(2t)u(t) - 5e^{-2t}u(t) + e^{2t}u(-t)$$

(ب)

$$X(s) = \frac{s + 2}{s^2 + 7s + 12}, -4 < \operatorname{Re}(s) < -3$$

$$\frac{s + 2}{s^2 + 7s + 12} = \frac{2}{s + 4} - \frac{1}{s + 3}$$

عامل اصلی تبدیل لاپلاس اولی e^{-4t} و دومی e^{-3t} است. با توجه به ناحیه همگرایی داده شده، برای -4 باید Right-Sided داشته باشیم و برای -3 عبارت Left-Sided پس:

$$\mathcal{L}^{-1}(X(s)) = 2e^{-4t}u(t) - (-e^{-3t}u(-t)) = 2e^{-4t}u(t) + e^{-3t}u(-t)$$

۳ سوال سوم

با توجه به شکل داده شده و این که صفر نداریم، یعنی صورت عبارت تبدیل لاپلاس یک عدد ثابت است. از طرفی با توجه به نقاط قطب ها، عامل مختلط $s^2 - 2s + 2$ و عوامل $s + 2$ و $s + 1$ وجود دارند. یعنی عبارت اصلی به شکل زیر است:

$$\frac{a}{(s^2 - 2s + 2)(s + 2)(s + 1)}$$

است. عبارت اول مخرج براساس $(s - (1 + j))(s - (1 - j))$ بدست آمده است. این عبارت را اگر تبدیل به کسرهای جزئی کنیم به عبارت زیر می رسیم:

$$\begin{aligned} X(s) &= \frac{a}{10} \left(\frac{2}{s + 1} + \frac{-1}{s + 2} + \frac{2}{(s - 1)^2 + 1} + \frac{-s}{(s - 1)^2 + 1} \right) \\ &= \frac{a}{10} \left(\frac{2}{s + 1} + \frac{-1}{s + 2} + \frac{1}{(s - 1)^2 + 1} + \frac{-(s - 1)}{(s - 1)^2 + 1} \right) \end{aligned}$$



با توجه به ناحیه همگرایی داده شده، یعنی عبارت های سینوسی و کسینوسی که از دو بخش آخر بدست می آیند هر دو باید Left-Sided باشند زیرا بخش حقیقی قطب آن ها 1 است و ناحیه همگرایی در سمت چپ آن اتفاق افتاده است. عبارت مربوط به $s + 1$ هم باید Left-Sided باشد و عبارت مربوط به $s + 2$ باید Right-Sided باشد.

با توجه به این مسائل و طبق جدول تبدیل لاپلاس داریم:

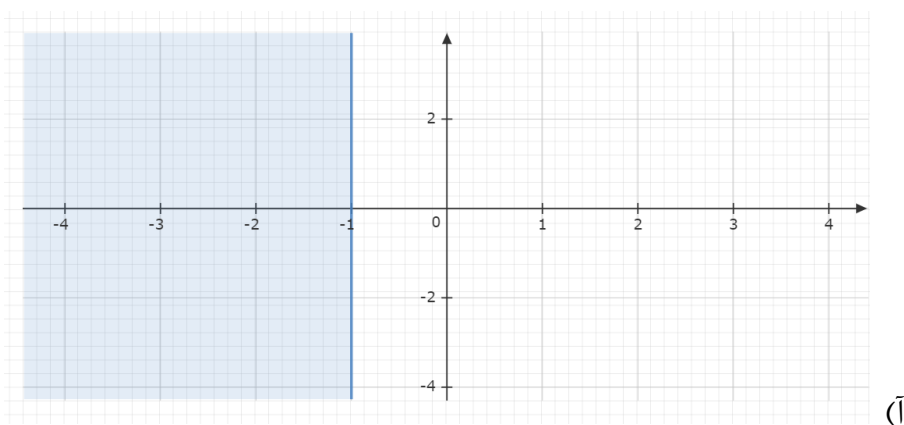
$$\mathcal{L}^{-1}(X(s)) = \frac{a}{10} ((-2e^{-t}u(-t)) + (-e^{-2t}u(t)) + (-e^t \sin(t)u(-t)) + (e^t \cos(t)u(-t)))$$

۴ سوال چهارم

با توجه به این که $-1 + i$ جزو قطب هاست پس $-1 - i$ هم جزو قطب هاست پس در مخرج $(s - (-1 + i))(s - (-1 - i)) = s^2 + 2s + 2$ را داریم.

همچنین با توجه به عبارت بالا ناحیه همگرایی یا $Re(s) > -1$ یا $Re(s) < -1$ را شامل خواهد شد. از طرفی از آن جایی که گفته شده $x(t)e^{-2t}$ انتگرال پذیر نیست و عبارتی با توان نمایی منفی ممکن است در سمت راست انتگرال پذیر بشود، می توانیم نتیجه بگیریم که عبارت ما قطعاً چپ سو بوده که عبارت منفی ضرب شده، باعث شده که انتگرال ناپذیر بماند.

با توجه به این موارد داریم:



(آ)

(ب) با توجه به توضیحات بالا چپ سو است.

در نهایت توجه کنید که عبارت $X(0) = 8$ تنها می تواند در تعیین ضریب صورت تاثیر گذار باشد و برای مواردی که در سوال گفته شده، به طور مستقیم نقشی ندارد. اگر سوال می خواست که به طور دقیق تر خود $X(s)$ را مشخص کنیم آن گاه این عبارت هم تاثیر گذار می شد.