سیگنال‌ها و سیستم‌ها

تمرین سوم

دانشکده مهندسی کامپیوتر

دانشگاه صنعتی شریف

نیم سال دوم ۰۰-۹۹

استاد:

جناب آقای دکتر منظوری شلمانی

نام و نام خانوادگی:

امیرمهدی نامجو - ۹۷۱۰۷۲۱۲

۱ سوال اول

$$x[n] = u[n-1] + u[n-2] + ...u[n-N]$$

$$H(z) = \frac{z^{-1}}{1-z^{-1}} + \frac{z^{-2}}{1-z^{-1}} + \frac{z^{-3}}{1-z^{-1}} + \cdots + \frac{z^{-N}}{1-z^{-1}}$$

$$= \frac{z^{-N}}{1-z^{-1}}(1 + z + z^2 + \cdots + z^{N-1}) = \frac{z^{-N}}{1-z^{-1}}(\frac{1-z^N}{1-z})$$

$$= \frac{z - z^{1-N}}{(z-1)^2}$$

۲ سوال دوم

$$X(z) = (1+2z)\left(1+3z^{-1}\right)\left(1-z^{-1}\right)$$

$$X(z) = -3z^{-2} - 4z^{-1} + 5 + 2z$$

در نتیجه اگر تبدیل معکوس بگیریم داریم:

$$x(-1) = 2 \ , \ \ x(0) = 5 \ , \ \ x(1) = -4, \ \ x(2) = -3$$

و برای سایر نقاط هم $x(n) = 0$ است.
این تبدیل معکوس براساس ضرایب موجود در $X(z)$ بدست آمده است.

۳ سوال سوم

$$H(z) = \frac{1-z^{-1}}{1+\frac{3}{4}z^{-1}}; ROC : |z| > \frac{3}{4}$$

دلیل ROC ذکر شده به خاطر LTI و علی بودن است.

آ)

$$H(z) = \frac{-4}{3} + \frac{\frac{7}{3}}{1+\frac{3}{4}z^{-1}}$$

$$\mathcal{Z}^{-1}(H(z))(n) = h[n] = \frac{-4}{3}\delta[n] + \frac{7}{3}(\frac{-3}{4})^n u[n]$$

ب)

$$x[n] = (1/3)^n u[n] + u[-n-1]$$

$$X(z) = \frac{1}{1-(1/3)z^{-1}} - \frac{1}{1-z^{-1}}; ROC : 1/3 < |z| < 1$$

$$Y(z) = X(z)H(z) = (\frac{1}{1-(1/3)z^{-1}} - \frac{1}{1-z^{-1}})(\frac{-4}{3} + \frac{\frac{7}{3}}{1+\frac{3}{4}z^{-1}})$$

$$= \frac{\frac{-8}{13}}{1-1/3z^{-1}} + \frac{\frac{8}{13}}{1+3/4z^{-1}}; ROC : |z| > \frac{3}{4}$$

$$y[n] = \frac{-8}{13}(1/3)^n u[n] + \frac{8}{13}(-3/4)^n u[n]$$

اشتراک ROC های X و H برابر $\frac{3}{4} < |z|$ است. و این ناحیه باید زیر مجموعه ROC نهایی ما باشد. با توجه به قطب‌های عبارت نهایی، ROC آن به صورت $\frac{3}{4} < |z|$ خواهد بود.

ج) سیستم LTI علی پایدار است اگر و تنها اگر قطب هایش از نظر اندازه کمتر مساوی 1 باشند. در این مورد قطب $|z| = 3/4$ است که کمتر از یک است. پس پایدار است.

۴ سوال چهارم

$$x[n] = \left(\frac{1}{3}\right)^n u[n] + 2^n u[-n-1]$$
$$y[n] = 5\left(\frac{1}{3}\right)^n u[n] - 5\left(\frac{2}{3}\right)^n u[n]$$

آ)

$$X(z) = \frac{1}{1-1/3z^{-1}} - \frac{1}{1-2z^{-1}}; ROC : 1/3 < |z| < 2$$

$$Y(z) = \frac{5}{1-1/3z^{-1}} - \frac{5}{1-2/3z^{-1}}; ROC : |z| > 2/3$$

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\frac{5}{1-\frac{1}{3z}} - \frac{5}{1-\frac{2}{3z}}}{\frac{1}{1-\frac{1}{3z}} - \frac{1}{1-\frac{2}{z}}} = \frac{3(z-2)}{3z-2}$$

$$= 3 - \frac{2}{1-2/3z^{-1}}; ROC : |z| > 2/3$$

قطب سیستم $a = 2/3$ و صفر آن $z = 2$ است.

ب)

$$h[n] = 3\delta[n] - 2(2/3)^n u[n]$$

ج)

$$3zY(z) - 2Y(z) = 3(zX(z) - 2X(z))) \rightarrow$$
$$3y[n+1] - 2y[n] = 3(x[n+1] - 2x[n])$$

د) بله چون ROC تابع $H(z)$ آن شامل دایره واحد می شود.

ه) علی است. با توجه به این که ناحیه همگرایی $H(z)$ ناحیه بیرونی یک دایره است و شامل ∞ می شود.

۵ سوال پنجم

آ)

$$h[n] = \begin{cases} a^n, & n \geq 0 \\ 0, & n < 0 \end{cases}$$
$$x[n] = \begin{cases} 1, & 0 \leq n \leq N-1 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$h[n] = a^n u[n] \quad , \quad x[n] = u[n] - u[n-N]$$

$$y[n] = x[n] \star h[n]$$
$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[n]h[n-k] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (u[k] - u[k-N])a^{n-k}u[n-k] =$$
$$\sum_{k=0}^{N-1} a^{n-k}u[n-k]$$

$$= \begin{cases} 0 & n < 0 \\ \sum_{k=0}^{n} a^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} a^n \left(\frac{1}{a}\right)^k & 0 \leq n \leq N-1 \\ \sum_{k=0}^{N-1} a^{n-k} = \sum_{k=0}^{N-1} a^n \left(\frac{1}{a}\right)^k & n > N-1 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 0 & n < 0 \\ a^n \cdot \frac{1-\left(\frac{1}{a}\right)^{n+1}}{1-\left(\frac{1}{a}\right)} = a^n \cdot \frac{1-a^{-(n+1)}}{1-a^{-1}} & 0 \leq n \leq N-1 \\ a^n \cdot \frac{1-\left(\frac{1}{a}\right)^{N}}{1-\left(\frac{1}{a}\right)} = a^n \cdot \frac{1-a^{-N}}{1-a^{-1}} & n > N-1 \end{cases}$$

$$y[n] = \frac{a^n - a^{-1}}{1-a^{-1}}(u[n] - u[n-N]) + \frac{a^n - a^{(n-N)}}{1-a^{-1}}u[n-N]$$

ب)

$$X(z) = \frac{1}{1-z^{-1}} - \frac{z^{-N}}{1-z^{-1}} = \frac{1-z^{-N}}{1-z^{-1}} \quad , \quad \text{ROC: } |z| > 1$$

$$h[n] = a^n u[n] \rightarrow H(z) = \frac{1}{1-az^{-1}} \quad , \quad \text{ROC } : |z| > a$$

$$Y(z) = \frac{1-z^{-N}}{(1-z^{-1})(1-az^{-1})} = (1-z^{-N})\left(\frac{\frac{1}{1-a}}{1-z^{-1}} + \frac{\frac{1}{1-a^{-1}}}{1-az^{-1}}\right) = (1-z^{-N})M(z)$$

$$m[n] = \frac{1}{1-a}u[n] + \frac{1}{1-a^{-1}}a^n u[n]$$

$$y[n] = m[n] - m[n-N] = \left(\frac{1}{1-a}u[n] + \frac{1}{1-a^{-1}}a^n u[n]\right) - \left(\frac{1}{1-a}u[n-N] + \frac{1}{1-a^{-1}}a^{n-N}u[n-N]\right)$$

و با حالت بندی داریم:

$$y[n] = \begin{cases} 0 & n < 0 \\ a^n \cdot \frac{1-\left(\frac{1}{a}\right)^{n+1}}{1-\left(\frac{1}{a}\right)} = a^n \cdot \frac{1-a^{-(n+1)}}{1-a^{-1}} & 0 \leq n \leq N-1 \\ a^n \cdot \frac{1-\left(\frac{1}{a}\right)^{N}}{1-\left(\frac{1}{a}\right)} = a^n \cdot \frac{1-a^{-N}}{1-a^{-1}} & n > N-1 \end{cases}$$

پس جواب هر دو حالت یکسان است.