سیگنال‌ها و سیستم‌ها

تمرین دوم

دانشکده مهندسی کامپیوتر

دانشگاه صنعتی شریف

نیم سال دوم ۰۰-۹۹

استاد:

جناب آقای دکتر منظوری شلمانی

نام و نام خانوادگی:

امیرمهدی نامجو - ۹۷۱۰۷۲۱۲

۱ سوال اول

آ) $x(t) = e^{3|t|}$

$$\mathcal{L}(x(t)) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{3|t|}e^{-st}dt = \int_{0}^{\infty} e^{(3-s)t}dt + \int_{-\infty}^{0} e^{(-3-s)t}dt$$

$$= \frac{e^{(3-s)t}}{3-s}|_0^\infty + \frac{e^{(-3-s)t}}{-3-s}|_{-\infty}^0 = \frac{1}{s-3} + \frac{-1}{s+3} = \frac{6}{s^2-9}$$

با این حال باید توجه کرد که ناحیه همگرایی عامل اول برای $Re(s) > 3$ بوده و ناحیه همگرایی عامل دوم جمع $-3 > -3 - Re(s) > 0 \rightarrow Re(s) < -3$ است. در نتیجه این عبارت تبدیل لاپلاس ندارد چون ناحیه همگرایی کلی آن تهی است.

ب) $x(t) = e^{-3|t|}$

$$\mathcal{L}(x(t)) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-3|t|}e^{-st}dt = \int_{0}^{\infty} e^{(-3-s)t}dt + \int_{-\infty}^{0} e^{(3-s)t}dt$$

$$= \frac{e^{(-3-s)t}}{-3-s}|_0^\infty + \frac{e^{(3-s)t}}{3-s}|_{-\infty}^0 = \frac{1}{s+3} + \frac{-1}{s-3} = \frac{6}{s^2-9}$$

در این مورد ناحیه همگرایی عامل اول $Re(s) > -3$ و برای عامل دوم $Re(s) < 3$ است که باعث می شود تبدیل لاپلاس درستی با ناحیه همگرایی $-3 < Re(s) < 3$ داشته باشیم.

ج)

$$x(t) = e^{(-1+j)t}\cos(3t)u(t)$$

براساس جدول تبدیل لاپلاس:

$$\mathcal{L}(x(t)) = \frac{s-(-1+j)}{(s-(-1+j))^2+9)} = \frac{s+1-j}{9+s^2+(2-2j)s-2j}$$

برای ناحیه همگرایی عامل کسینوس صرفا نوسان ساز است و تاثیری ندارد. توان موهومی هم ایجاد کننده عوامل نوسان ساز است. تنها توان حقیقی مهم است. با توجه به Right-Side بودن سیگنال، ناحیه همگرایی

$$Re(s) > -1$$

است.

۲ سوال دوم

آ)

$$\frac{s}{s^2+4} - \frac{5}{s+2} - \frac{1}{s-2}, 0 < Re(s) < 2$$

برای عبات اول، معکوس آن $\cos(2t)$ خواهد بود. برای عبارت دوم معکوس آن $5e^{-2t}$ و برای عبارت سوم معکوس آن e^{2t} خواهد بود.

با توجه به ناحیه همگرایی متوجه می شویم که عبارت $\cos(2t)$ که ناحیه همگرایی مربوط به صفر را ایجاد کرده باید Right-Sided باشد و در نتیجه e^{2t} هم Right-Sided خواهد بود. اما عبارت e^{-2t} به صورت Left-Sided خواهد بود.

$$\mathcal{L}^{-1}(X(s)) = \cos(2t)u(t) - 5e^{-2t}u(t) - (-e^{2t}u(-t)) = \cos(2t)u(t) - 5e^{-2t}u(t) + e^{2t}u(-t)$$

ب)

$$X(s) = \frac{s+2}{s^2+7s+12}, -4 < Re(s) < -3$$

$$\frac{s+2}{s^2+7s+12} = \frac{2}{s+4} - \frac{1}{s+3}$$

عامل اصلی تبدیل لاپلاس اولی e^{-4t} و دومی e^{-3t} است. با توجه به ناحیه همگرایی داده شده، برای -4 باید Right-Sided داشته باشیم و برای -3 عبارت Left-Sided پس:

$$\mathcal{L}^{-1}(X(s)) = 2e^{-4t}u(t) - (-e^{-3t}u(-t)) = 2e^{-4t}u(t) + e^{-3t}u(-t)$$

۳ سوال سوم

با توجه به شکل داده شده و این که صفر نداریم، یعنی صورت عبارت تبدیل لاپلاس یک عدد ثابت است. از طرفی با توجه به نقاط قطب ها، عامل مختلط $s^2 - 2s + 2$ و عوامل $s+2$ و $s+1$ وجود دارند. یعنی عبارت اصلی به شکل زیر است:

$$\frac{a}{(s^2-2s+2)(s+2)(s+1)}$$

است. عبارت اول مخرج براساس $(s-(1+j))(s-(1-j))$ بدست آمده است.
این عبارت را اگر تبدیل به کسر های جزئی کنیم به عبارت زیر می رسیم:

$$X(S) = \frac{a}{10}\left(\frac{2}{s+1} + \frac{-1}{s+2} + \frac{2}{(s-1)^2+1} + \frac{-s}{(s-1)^2+1}\right)$$
$$= \frac{a}{10}\left(\frac{2}{s+1} + \frac{-1}{s+2} + \frac{1}{(s-1)^2+1} + \frac{-(s-1)}{(s-1)^2+1}\right)$$

با توجه به ناحیه همگرایی داده شده، یعنی عبارت های سینوسی و کسینوسی که از دو بخش آخر بدست می آیند هر دو باید Left-Sided باشند زیرا بخش حقیقی قطب آن ها 1 است و ناحیه همگرایی در سمت چپ آن اتفاق افتاده است. عبارت مربوط به $s+1$ هم باید Left-Sided باشد و عبارت مربوط به $s+2$ باید Right-Sided باشد.

با توجه به این مسائل و طبق جدول تبدیل لاپلاس داریم:

$$\mathcal{L}^{-1}(X(s))) = \frac{a}{10}\left((-2e^{-t}u(-t)) + (-e^{-2t}u(t)) + (-e^{t}\sin(t)u(-t)) + (e^{t}\cos(t)u(-t))\right)$$