سیگنال‌ها و سیستم‌ها

تمرین پنجم

دانشکده مهندسی کامپیوتر

دانشگاه صنعتی شریف

نیم سال دوم ۰۰-۹۹

استاد:

جناب آقای دکتر منظوری شلمانی

نام و نام خانوادگی:

امیرمهدی نامجو - ۹۷۱۰۷۲۱۲

۱ سری فوریه

۱.۱ سوال اول

۱.۱.۱ بخش a

$$f(x) = \begin{cases} \pi - x & 0 \le x \le \pi \\ x - \pi & -\pi \le x \le 0 \end{cases}$$

ابتدا عامل DC را بدست می‌آوریم:

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int f(x)dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{0}(x-\pi)dx + \int_{0}^{\pi}(\pi - x)dx$$
$$= \frac{1}{2\pi}(\frac{-3\pi^2}{2} - \frac{\pi^2}{2}) = \boxed{-\pi}$$

برای ضرایب کسینوسی داریم:

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int (f(x)\cos(nx))dx$$

$$= \frac{1}{\pi}(\int_{-\pi}^{0}(x-\pi)\cos(nx)dx + \int_{0}^{\pi}(\pi - x)\cos(nx)dx)$$

ابتدا لازم است اشاره کنیم که

$$\int x\cos(nx) = \frac{1}{n^2}\cos(nx) + \frac{1}{n}x\sin(nx)$$

با توجه به این موضوع، از عبارت بالا می‌توان به راحتی انتگرال گرفت:

$$= \frac{1}{\pi}((\frac{\cos(nx)}{n^2} + \frac{x\sin(nx)}{n} - \frac{\pi\sin(nx)}{n})|_{-\pi}^{0} + (-\frac{\cos(nx)}{n^2} + \frac{\pi\sin(nx)}{n} - \frac{x\sin(nx)}{n})|_{0}^{\infty})$$

بعد از ساده سازی و محاسبات داریم:

$$\boxed{a_n = -\frac{2(\pi n\sin(\pi n) + \cos(\pi n) - 1)}{\pi n^2}}$$

برای محاسبات ضریب سینوسی داریم:

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int (f(x)sin(nx))dx$$

$$= \frac{1}{\pi}(\int_{-\pi}^{0}(x-\pi)\sin(nx)dx + \int_{0}^{\pi}(\pi - x)\sin(nx)dx)$$

ابتدا لازم است اشاره کنیم که

$$\int x\sin(nx) = \frac{\sin(nx)}{n^2} - \frac{x\cos(nx)}{n}$$

با توجه به این موضوع، عبارت بالا مانند بخش قبل به راحتی قابل محاسبه است. جوابی که در نهایت به آن می رسیم به صورت زیر است:

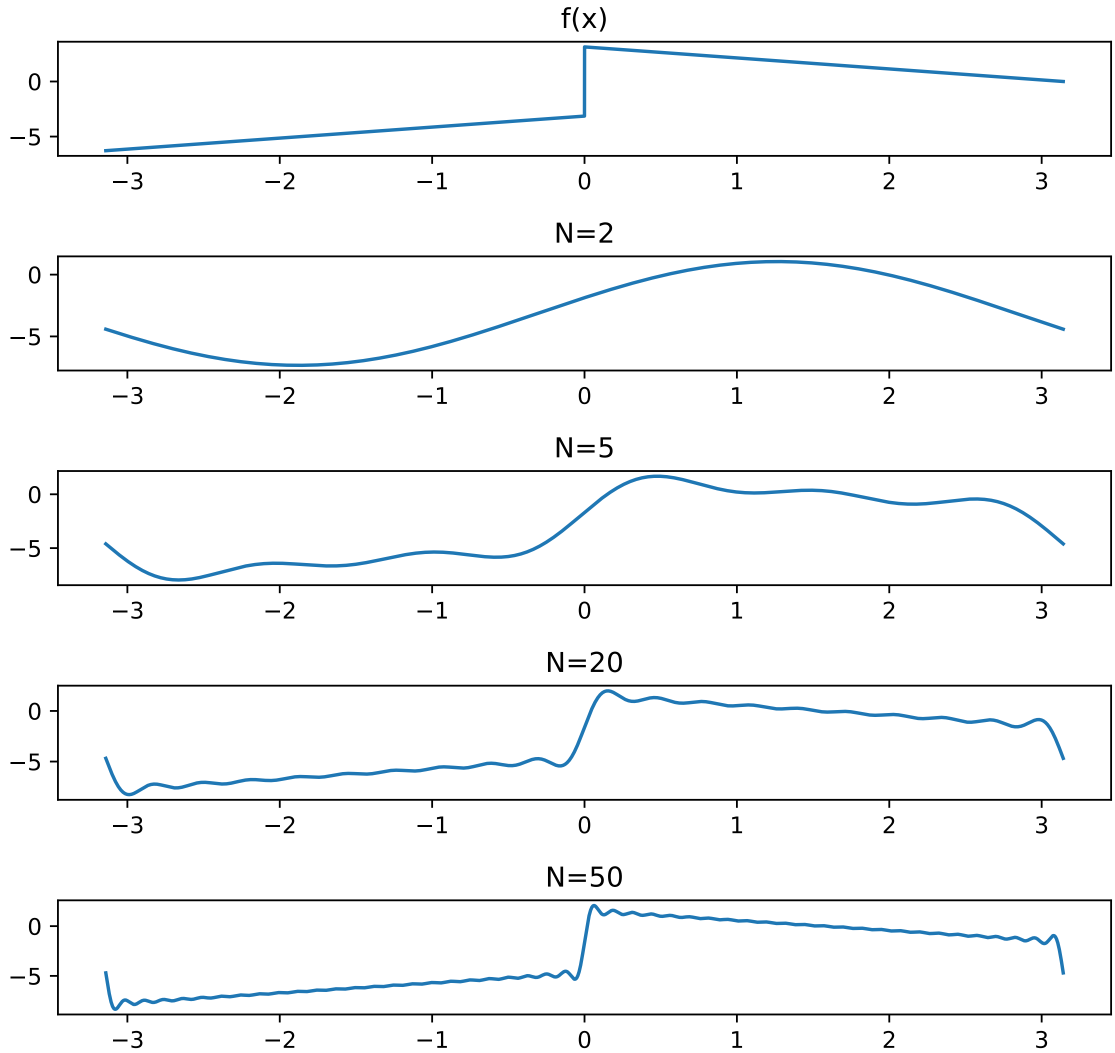
$$\boxed{b_n = \frac{2-2\cos(\pi n)}{n}}$$

و جواب نهایی به صورت:

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{N}(a_n\cos(nx) + b_n\sin(nx))$$

خواهد بود. (تقسیم بر ۲ فرمول a_0 را به نوعی در خود انتگرال آن تاثیر داده‌ام)
کد آن در فایل `P1_Q1_a.py` قرار دارد. نمودار در صفحه بعد قرار گرفته است. شکل بالایی خود تابع و شکل های بعدی به ازای $N = 2, 5, 20, 50$ هستند.

Amirmahdi Namjoo



۲.۱.۱ بخش b

$$f(x) = \begin{cases} 1 & 0 \le x < \frac{\pi}{2} \\ 0 & \frac{\pi}{2} \le x < \pi \\ 0 & -\pi \le x < 0 \end{cases}$$

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int f(x)dx = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi/2} 1dx = \boxed{\frac{1}{4}}$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int (f(x)\cos(nx))dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi/2}\cos(nx)dx = \frac{1}{\pi}\frac{\sin(nx)}{n}|_0^{\pi/2} = \boxed{\frac{\sin\left(\frac{\pi n}{2}\right)}{\pi n}}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int (f(x)\sin(nx))dx$$

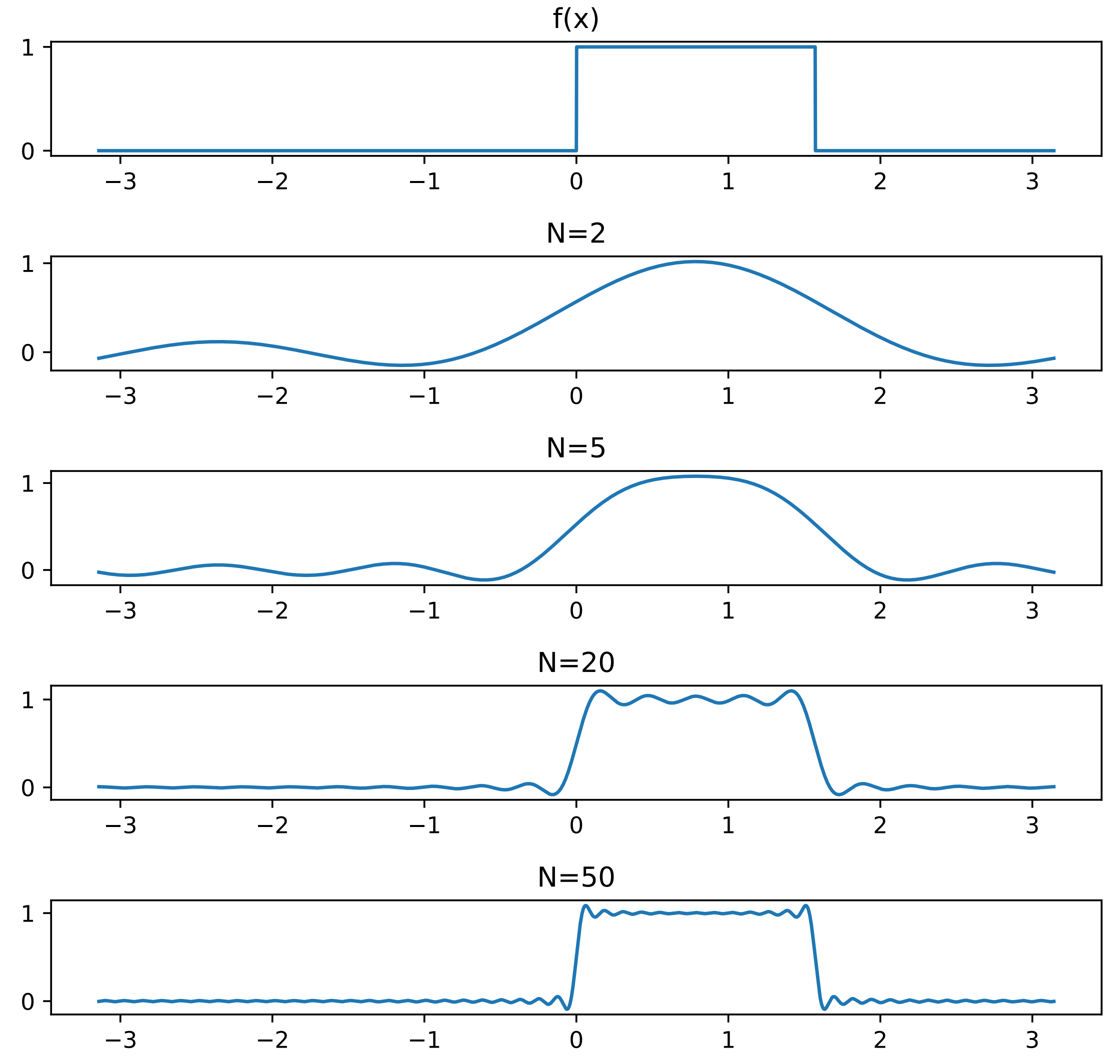
$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi/2}\sin(nx)dx = -\frac{1}{\pi}\frac{\cos(nx)}{n}|_0^{\pi/2} = \boxed{\frac{2\sin^2\left(\frac{\pi n}{4}\right)}{\pi n}}$$

که در بالا از اتحاد $\cos(2\theta) = 1 - 2\sin^2(\theta)$ استفاده شده است.
و جواب نهایی به صورت:

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{N}(a_n\cos(nx) + b_n\sin(nx))$$

کد آن در فایل `P1_Q1_b.py` قرار دارد. نمودار در صفحه بعد قرار گرفته است. شکل بالایی خود تابع و شکل های بعدی به ازای $N = 2, 5, 20, 50$ هستند.

Amirmahdi Namjoo



۲.۱ سوال دوم

۱.۲.۱ بخش a

$$\cos(4t) = \frac{1}{2}e^{-4jt} + \frac{1}{2}e^{4jt}$$

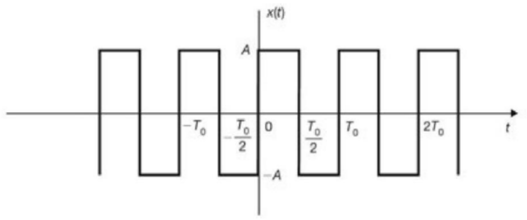
$$\sin(6t) = \frac{1}{2j}e^{6jt} - \frac{1}{2j}e^{-6jt}$$

در نتیجه ضرایب سری فوریه برای $\cos(4t) + \sin(6t)$ به صورت زیر است:

$$a_4 = \frac{1}{2}, a_{-4} = \frac{1}{2}, a_6 = \frac{1}{2j}, a_{-6} = \frac{-1}{2j}$$

و به ازای $k \neq \pm 4, \pm 6$ داریم $a_k = 0$

۲.۲.۱ بخش b



$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$$

$$a_k = \frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t)e^{-jk\frac{2\pi}{T_0}t}dt$$

برای $k = 0$ به طور جداگانه محاسبه کرده و داریم:

$$\boxed{a_0 = \frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t)dt = 0}$$

برای باقی موارد داریم:

$$a_k = \frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t)e^{-jk\frac{2\pi}{T_0}t}dt = \frac{1}{T_0}(\int_{-T_0/2}^{0} (-A)e^{-jk\frac{2\pi}{T_0}t}dt + \int_{0}^{T_0/2} (A)e^{-jk\frac{2\pi}{T_0}t}dt)$$

$$= \frac{1}{T_0}(\frac{AT_0j(-1+e^{jk\pi})}{2k\pi} + \frac{-AT_0j(1-e^{jk\pi})}{2k\pi})$$

$$\boxed{= \frac{Aje^{-jk\pi}(-1+e^{jk\pi})^2}{2k\pi}}$$

۳.۲.۱ بخش c

دوره تناوب پایه $|\sin(x)|$ برابر π است و عملا مانند $\sin$ مثبتی بین 0 تا π است که در همه تناوب‌هایش تکرار می‌شود. در نتیجه باید براساس این تناوب حل کرد.

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} |\sin(x)|e^{-2jkx}dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \sin(x)e^{-2jkx}dx$$

برای ضریب a_0 داریم:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \sin(x)dx = \frac{2}{\pi}$$

برای سایر ضرایب داریم:

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{1}{2j}(e^{ix} - e^{-ix})e^{-2jkx}dx$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left(\frac{e^{-j(2k-1)x}}{2k-1} - \frac{e^{-j(2k+1)x}}{2k+1}\right)|_0^{\pi}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2k+1} - \frac{1}{2k-1}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{e^{-j\pi(2k-1)}}{2k-1} - \frac{e^{-j\pi(2k+1)}}{2k+1}\right)$$

$$= \boxed{\frac{1+e^{-2j\pi k}}{1-4k^2}}$$

۳.۱ سوال سوم

۱.۳.۱ بخش a

$$x(t) = + -2je^{-2j\omega_0 t} + -1je^{-1j\omega_0 t} + 1je^{1j\omega_0 t} + 2je^{2j\omega_0 t}$$

$$= -\frac{4}{2j}(e^{2j\omega_0 t} - e^{-2j\omega_0 t}) - \frac{2}{2j}(e^{j\omega_0 t} - e^{-j\omega_0 t})$$

$$\boxed{= -4\sin(2\omega_0 t) - 2\sin(\omega_0 t)}$$

۲.۳.۱ بخش b

عبارت مورد نظر باید ما را به یاد سری فوریه قطار ضربه بیندازد.

$$\delta_{T_0}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{jk\omega_0 t}$$

برای ضرایب فوریه چنین چیزی داریم:

$$c_k = \frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2} \delta(t) e^{-jk\omega_0 t} dt = \frac{1}{T_0}$$

$$\delta_{T_0}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta\left(t - kT_0\right) = \frac{1}{T_0}\sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{jk\omega_0 t} \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$$

با توجه به این موضوع برای چیزی که در صورت سوال داده شده، می‌توانیم آن را معادل با

$$z(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{jk\omega_0 t}\delta(t - T_0 k + 2k)$$

بدانیم.

در عبارت بالا $2k$ برای زوج سازی و سپس e برای شیفت فرکانسی اضافه شده است که باعث بشود که تنها عبارت‌های فرد 1 بمانند و عبارت‌های زوج 0 شوند.

۴.۱ سوال چهارم

در سوال نمادهای e_k و d_k استفاده شده است ولی برای راحتی کار و از آن جایی که کلا دو سیگنال اصلی داریم، از a_k و b_k در جواب استفاده شده است.

$$x_1[n]x_2[n] = \sum_{k=0}^{N_0-1} \sum_{l=0}^{N_0-1} a_k b_l e^{j(2\pi/N_0)(k+l)n}$$

$$x_1[n]x_2[n] = \sum_{k=0}^{(N_0-1)} \sum_{l'=k}^{(k+N_0-1)} a_k b_{l'-k} e^{j(2\pi/N_0)'n}$$

با توجه به متناوب بودن $b_{l'-k}$ و $e^{j2\pi/N_0 l'n}$ داریم:

$$x_1[n]x_2[n] = \sum_{k=0}^{N_0-1} \sum_{l'=0}^{N_0-1} a_k b_{l'-k} e^{j(2\pi/N_0)t'n} = \sum_{l=0}^{N_0-1} \left[\sum_{k=0}^{N_0-1} a_k b_{l-k} \right] e^{j(2\pi/N_0)ln}$$

پس

$$c_k = \sum_{t=0}^{N_0-1} a_k b_{l-k}$$

و معادلا:

$$c_k = \sum_{k=0}^{N_0-1} b_k a_{l-k}$$

برای اثبات رابطه پارسوال داریم:

$$N_0 \sum_{l=\langle N_0 \rangle} a_l b_{k-l} = \sum_{\langle N_0 \rangle} x_1[n]x_2[n] e^{-j(2\pi/N_0)kn}$$

با قرار دادن $k=0$ داریم:

$$N_0 \sum_{l=\langle N_0 \rangle} a_l b_{-1} = \sum_{n=\langle N_0 \rangle} x_1[n]x_2[n]$$

در نتیجه:

$$\frac{1}{N_0} \sum_{n=0}^{N_0-1} x[n] = \sum_{k=0}^{N_0-1} a_k b_{-k}$$

۵.۱ سوال پنجم

در نتیجه سوال قبل قرار می‌دهیم:

$$x_2[n] = x_1^*[n]$$

در نتیجه این موضوع داریم:

$$b_k = a^*_{-k}$$

پس

$$\frac{1}{N_0}\sum_{n=0}^{N_0-1} x[n] = \sum_{n=0}^{N_0-1} a_k n_{-k}$$

$$\frac{1}{N_0}\sum_{n=0}^{N_0-1} x_1[n]x_1^*[n] = \sum_{k=0}^{N_0-1} a_k a_k^*$$

بنابراین:

$$\sum_{k=\langle n_0\rangle} |a_k|^2 = \frac{1}{N_0}\sum_{n=\langle N_0\rangle} |x[n]|^2.$$

۶.۱ سوال ششم

$$f(t) = \begin{cases} t + \frac{5}{3} & -1 \le t < 0 \\ -t + \frac{5}{3} & 0 \le t < 2 \\ 0 & 2 \le t < 4 \end{cases}$$

۱.۶.۱ بخش a

$$a_0 = \frac{1}{5}\int f(t)dt = \frac{1}{5}(\int_{-1}^{0} t + 5/3dt + \int_{0}^{2} -t + 5/3dt)$$
$$= \frac{1}{5}(\frac{7}{6} + \frac{4}{3}) = \boxed{\frac{1}{2}}$$

$$a_k = \frac{1}{5}\int_{-1}^{5} f(t)e^{-jk\frac{2\pi}{5}t}dt = \frac{1}{5}(\int_{-1}^{0}(t+\frac{5}{3})e^{-jk\frac{2\pi}{5}t}dt + \int_{0}^{2}(-t+\frac{5}{3})e^{-jk\frac{2\pi}{5}t}dt)$$

$$\frac{1}{5}(\frac{50i\pi k + e^{\frac{2i\pi k}{5}}(-75-20i\pi k)+75}{12\pi^2k^2} + \frac{-50i\pi k + e^{\frac{-4}{5}i\pi k}(-75-10i\pi k)+75}{12\pi^2k^2})$$
$$= \frac{e^{\frac{1}{5}(-4)i\pi k}\left(-2i\pi k + 30e^{\frac{4i\pi k}{5}} + e^{\frac{6i\pi k}{5}}(-15-4i\pi k) - 15\right)}{12\pi^2k^2}$$

یا اگر روش فرمول کسینوس و سینوس را برویم داریم:

$$a_n = \frac{2}{5}\int (f(t)\cos(\frac{2\pi}{5}nt))dt$$
$$= \frac{2}{5}\int_{-1}^{0}(t+5/3)\cos(\frac{2\pi}{5}nt)dt + \int_{0}^{2}(-t+5/3)\cos(\frac{2\pi}{5}nt)dt$$
$$= \frac{\sin^2\left(\frac{\pi n}{5}\right)\left(4\pi n\sin\left(\frac{2\pi n}{5}\right) + 30\cos\left(\frac{2\pi n}{5}\right) + 45\right)}{3\pi^2n^2}$$

$$b_n = \frac{2}{5}\int (f(t)\sin(\frac{2\pi}{5}nt))dt$$
$$= \frac{2}{5}\int_{-1}^{0}(t+5/3)\sin(\frac{2\pi}{5}nt)dt + \int_{0}^{2}(-t+5/3)\sin(\frac{2\pi}{5}nt)dt$$
$$= \frac{15\left(\sin\left(\frac{2\pi n}{5}\right) - \sin\left(\frac{4\pi n}{5}\right)\right) + 4\pi n\cos\left(\frac{2\pi n}{5}\right) + 2\pi n\cos\left(\frac{4\pi n}{5}\right)}{6\pi^2n^2}$$

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{N} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$$

کدهای مسئله به زبان پایتون در فایل `P1_Q6.py` موجود است و جواب قسمت‌های بعد براساس آن تولید شده است:

۷.۱ بخش b

جملات مد نظر در ادامه نوشته شده اند. توجه کنید که به دلیل ویژگی‌های اعداد Floating-Point عموما ضرایبی که صفر بوده‌اند به صورت عددی ضربدر 10^{-33} نوشته شده‌اند.

پس از آن ابتدا در یک شکل سیگنال‌ها به ازای مقادیر N به صورت جداگانه رسم شده‌اند. سپس در اشکال بعدی، به ازای هر کدام از مقادیر، نمودار آن با رنگ نارنجی روی نمودار اصلی با رنگ آبی رسم شده است.

$$a_1 = 0.772711906482877, b_1 = 0.07175375986881644$$

$$a_2 = 0.27113541693643917, b_2 = 0.028002784979373037$$

$$a_3 = -0.004852111911900812, b_3 = -0.08960735823011712$$

$$a_4 = 0.004714960180721709, b_4 = -0.010817086948420714$$

$$a_5 = 1.5195743635847465e - 33, b_5 = 0.06366197723675814$$

$$a_6 = 0.04083290139095018, b_6 = -0.0008212742065860439$$

$$a_7 = 0.04515821107548206, b_7 = -0.011886611106858576$$

$$a_8 = -0.01831062003374954, b_8 = -0.023451895441009625$$

$$a_9 = -0.007676952848145469, b_9 = -0.00338756817877342$$

$$a_{10} = 1.5195743635847456e - 33, b_{10} = 0.03183098861837907$$

$$a_{11} = 0.017911214823682062, b_{11} = -0.0010816983697769051$$

$$a_{12} = 0.023201132067024215, b_{12} = -0.008867354363816892$$

$$a_{13} = -0.013610002113093692, b_{13} = -0.012990392854308745$$

$$a_{14} = -0.006730131246383232, b_{14} = -0.0019169012948294058$$

$$a_{15} = 1.5195743635847434e - 33, b_{15} = 0.021220659078919374$$

$$a_{16} = 0.01118956850490962, b_{16} = -0.000907051304878608$$

$$a_{17} = 0.015464268832541013, b_{17} = -0.006821294507069879$$

$$a_{18} = -0.010581176024894123, b_{18} = -0.008919232952258454$$

$$a_{19} = -0.005585535368095415, b_{19} = -0.0013214190722783403$$

$$a_{20} = 1.5195743635847419e - 33, b_{20} = 0.015915494309189534$$

$$a_{21} = 0.008076648709406326, b_{21} = -0.0007562919849315991$$

$$a_{22} = 0.011564843734622392, b_{22} = -0.005507870241109013$$

$$a_{23} = -0.008613443680564381, b_{23} = -0.006775588961597922$$

$$a_{24} = -0.004711199325475308, b_{24} = -0.0010040831881916652$$

$$a_{25} = 1.5195743635847393e - 33, b_{25} = 0.012732395447351627$$

$$a_{26} = 0.006300406249170883, b_{26} = -0.0006432609418058376$$

$$a_{27} = 0.009225781951316991, b_{27} = -0.004609416023114295$$

$$a_{28} = -0.007250921405575788, b_{28} = -0.005457578628620997$$

$$a_{29} = -0.004055794714702865, b_{29} = -0.0008081706869254678$$

$$a_{30} = 1.519574363584735e-33, b_{30} = 0.010610329539459687$$

$$a_{31} = 0.005157489248731366, b_{31} = -0.0005579230259798711$$

$$a_{32} = 0.007669732145959915, b_{32} = -0.003959686879886606$$

$$a_{33} = -0.006256136875045252, b_{33} = -0.004566755490351168$$

$$a_{34} = -0.003553802680498653, b_{34} = -0.0006755979057181989$$

$$a_{35} = 1.5195743635847316e-33, b_{35} = 0.009094568176679736$$

$$a_{36} = 0.004362360888597353, b_{36} = -0.0004918855395621645$$

$$a_{37} = 0.006561005399865466, b_{37} = -0.0034690828700930944$$

$$a_{38} = -0.005499407016535415, b_{38} = -0.0039249666296024815$$

$$a_{39} = -0.0031594138344824431, b_{39} = -0.0005800860028377107$$

$$a_{40} = 1.5195743635847268e-33, b_{40} = 0.007957747154594767$$

$$a_{41} = 0.003778044173238204, b_{41} = -0.00043950225495442116$$

$$a_{42} = 0.005731421240004929, b_{42} = -0.003085957785323703$$

$$a_{43} = -0.004905005087522983, b_{43} = -0.0034408366129256586$$

$$a_{44} = -0.0028423248893797424, b_{44} = -0.0005080735752180709$$

$$a_{45} = 1.5195743635847215e-33, b_{45} = 0.00707355302630646$$

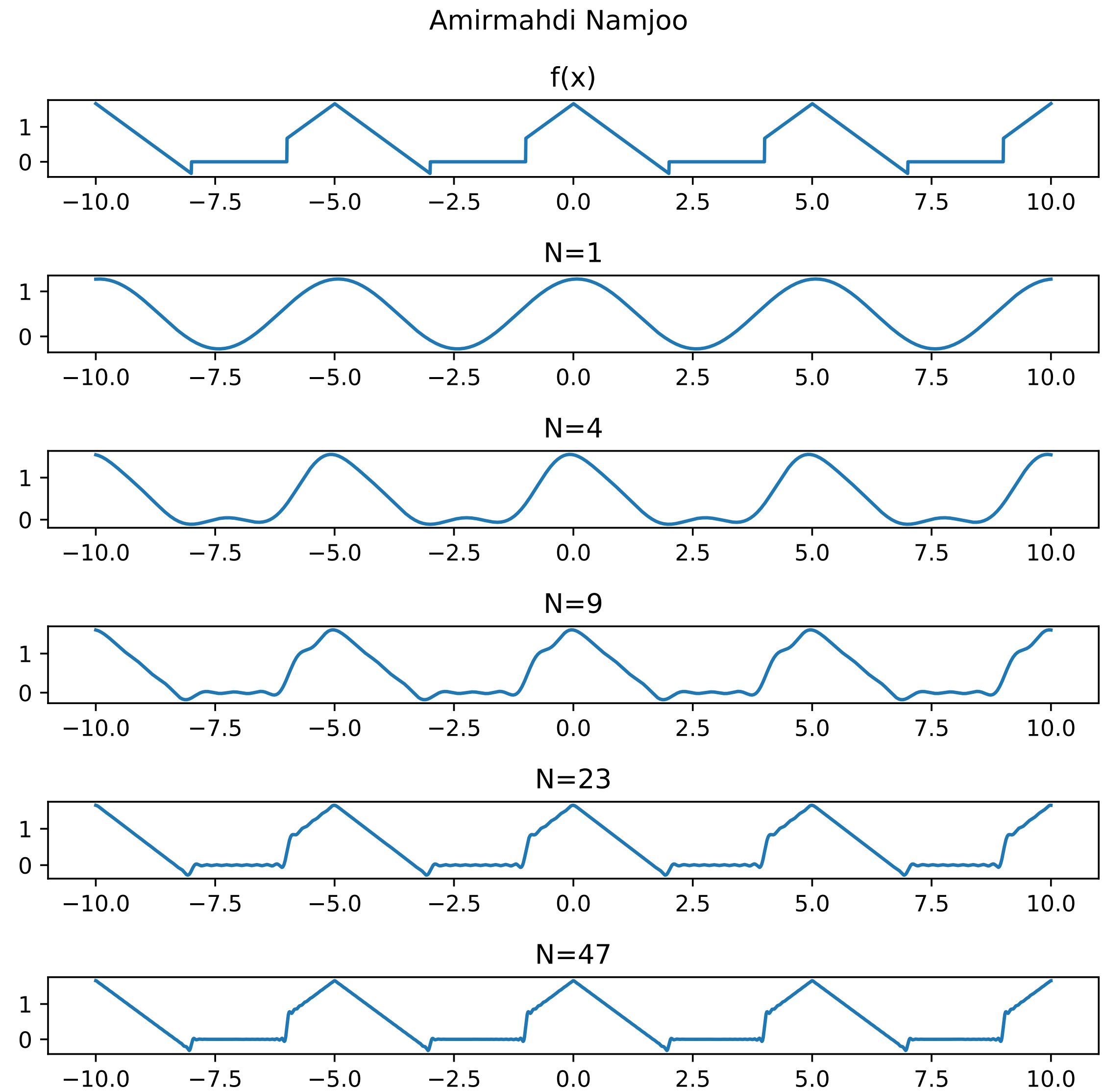
$$a_{46} = 0.0033308907366752464, b_{46} = -0.00039703351695859266$$

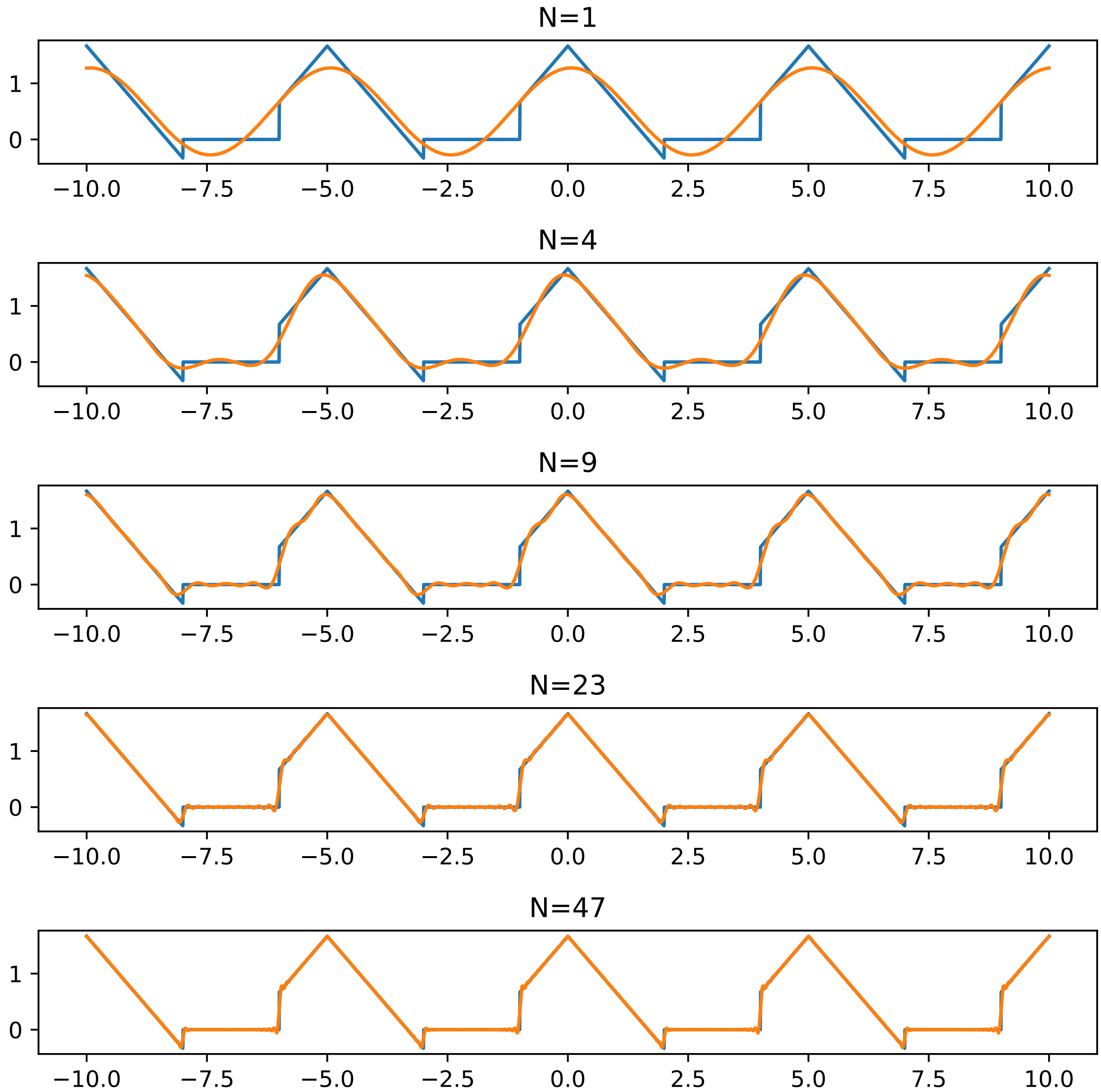
$$a_{47} = 0.0050875680137263376, b_{47} = -0.0027786711713284526$$

$$a_{48} = -0.004426026511190478, b_{48} = -0.003062743915561243$$

$$a_{49} = -0.0025822630276678576, b_{49} = -0.0004518742494494454$$

$$a_{50} = 1.5195743635847159e - 33, b_{50} = 0.006366197723675813$$




N=1
N=4
N=9
N=23
N=47
1
0
−10.0
−7.5
−5.0
−2.5
0.0
2.5
5.0
7.5
10.0