



# سیگنال‌ها و سیستم‌ها

تمرین پنجم

دانشکده مهندسی کامپیوتر

دانشگاه صنعتی شریف

نیم سال دوم ۹۹-۰۰

---

استاد:

جناب آقای دکتر منظوری شلمانی

نام و نام خانوادگی:

امیرمهدی نامجو - ۹۷۱۰۷۲۱۲



## ۱ سری فوریه

## ۱.۱ سوال اول

## ۱.۱.۱ بخش a

$$f(x) = \begin{cases} \pi - x & 0 \leq x \leq \pi \\ x - \pi & -\pi \leq x \leq 0 \end{cases}$$

ابتدا عامل DC را بدست می‌آوریم:

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{2\pi} \int f(x) dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^0 (x - \pi) dx + \int_0^{\pi} (\pi - x) dx \\ &= \frac{1}{2\pi} \left( \frac{-3\pi^2}{2} - \frac{\pi^2}{2} \right) = \boxed{-\pi} \end{aligned}$$

برای ضرایب کسینوسی داریم:

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi} \int (f(x) \cos(nx)) dx \\ &= \frac{1}{\pi} \left( \int_{-\pi}^0 (x - \pi) \cos(nx) dx + \int_0^{\pi} (\pi - x) \cos(nx) dx \right) \end{aligned}$$

ابتدا لازم است اشاره کنیم که

$$\int x \cos(nx) = \frac{1}{n^2} \cos(nx) + \frac{1}{n} x \sin(nx)$$

با توجه به این موضوع، از عبارت بالا می‌توان به راحتی انتگرال گرفت:

$$= \frac{1}{\pi} \left( \left( \frac{\cos(nx)}{n^2} + \frac{x \sin(nx)}{n} - \frac{\pi \sin(nx)}{n} \right) \Big|_{-\pi}^0 + \left( -\frac{\cos(nx)}{n^2} + \frac{\pi \sin(nx)}{n} - \frac{x \sin(nx)}{n} \right) \Big|_0^{\pi} \right)$$

بعد از ساده سازی و محاسبات داریم:

$$a_n = -\frac{2(\pi n \sin(\pi n) + \cos(\pi n) - 1)}{\pi n^2}$$

برای محاسبات ضریب سینوسی داریم:

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{\pi} \int (f(x) \sin(nx)) dx \\ &= \frac{1}{\pi} \left( \int_{-\pi}^0 (x - \pi) \sin(nx) dx + \int_0^{\pi} (\pi - x) \sin(nx) dx \right) \end{aligned}$$



ابتدا لازم است اشاره کنیم که

$$\int x \sin(nx) = \frac{\sin(nx)}{n^2} - \frac{x \cos(nx)}{n}$$

با توجه به این موضوع، عبارت بالا مانند بخش قبل به راحتی قابل محاسبه است. جوابی که در نهایت به آن می‌رسیم به صورت زیر است:

$$b_n = \frac{2 - 2 \cos(\pi n)}{n}$$

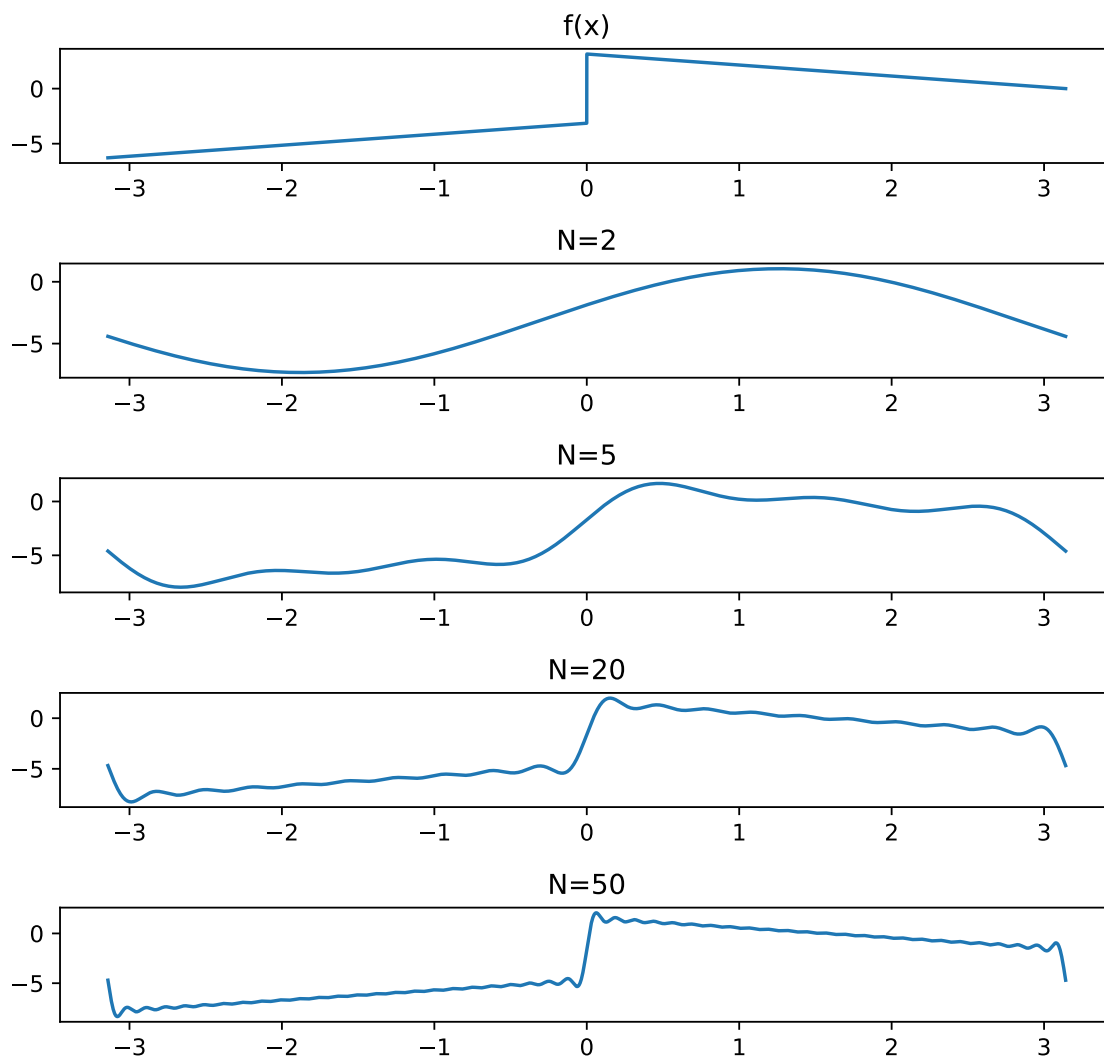
و جواب نهایی به صورت:

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^N (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$$

خواهد بود. کد آن در فایل P1\_Q1\_a.py قرار دارد. نمودار در صفحه بعد قرار گرفته است. شکل بالایی خود تابع و شکل های بعدی به ازای  $N = 2, 5, 20, 50$  هستند.



Amirmahdi Namjoo





## ۲.۱.۱ بخش b

$$f(x) = \begin{cases} 1 & 0 \leq x < \frac{\pi}{2} \\ 0 & \frac{\pi}{2} \leq x < \pi \\ 0 & -\pi \leq x < 0 \end{cases}$$

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int f(x) dx = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi/2} 1 dx = \boxed{\frac{1}{4}}$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int (f(x) \cos(nx)) dx$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi/2} \cos(nx) dx = \frac{1}{\pi} \frac{\sin(nx)}{n} \Big|_0^{\pi/2} = \boxed{\frac{\sin\left(\frac{\pi n}{2}\right)}{\pi n}}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int (f(x) \sin(nx)) dx$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi/2} \sin(nx) dx = -\frac{1}{\pi} \frac{\cos(nx)}{n} \Big|_0^{\pi/2} = \boxed{\frac{2 \sin^2\left(\frac{\pi n}{4}\right)}{\pi n}}$$

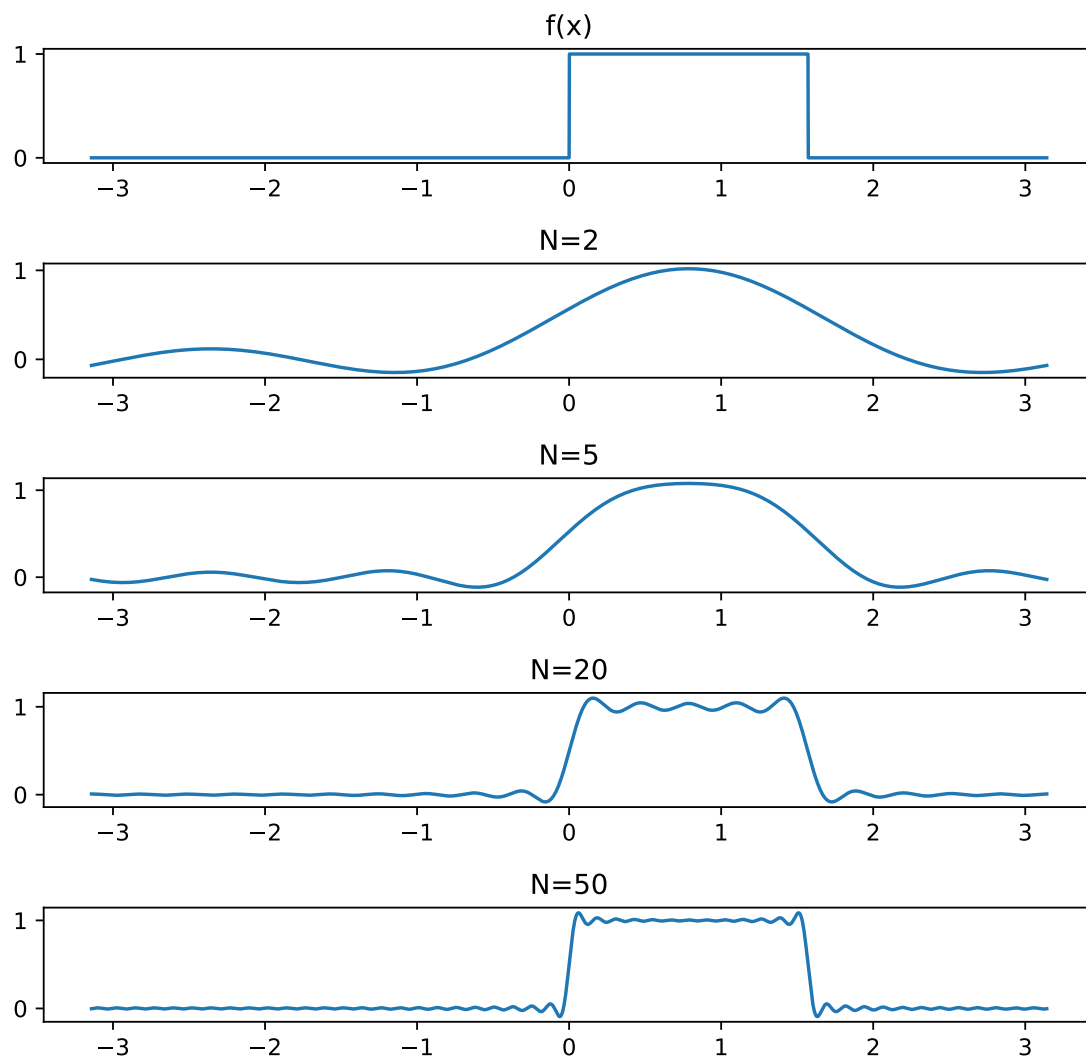
که در بالا از اتحاد  $\cos(2\theta) = 1 - 2\sin^2(\theta)$  استفاده شده است.  
و جواب نهایی به صورت:

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^N (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$$

کد آن در فایل P1\_Q1\_b.py قرار دارد. نمودار در صفحه بعد قرار گرفته است. شکل بالایی خود تابع و شکل های بعدی به ازای  $N = 2, 5, 20, 50$  هستند.



Amirmahdi Namjoo





امیرمہدی نامجو

تمرین پنجم

۲.۱ سوال دوم