



# سیگنال‌ها و سیستم‌ها

تمرین پنجم

دانشکده مهندسی کامپیوتر

دانشگاه صنعتی شریف

نیم سال دوم ۹۹-۰۰

---

استاد:

جناب آقای دکتر منظوری شلمانی

نام و نام خانوادگی:

امیرمهدی نامجو - ۹۷۱۰۷۲۱۲



## ۱ سری فوریه

## ۱.۱ سوال اول

## ۱.۱.۱ بخش a

$$f(x) = \begin{cases} \pi - x & 0 \leq x \leq \pi \\ x - \pi & -\pi \leq x \leq 0 \end{cases}$$

ابتدا عامل DC را بدست می‌آوریم:

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{2\pi} \int f(x) dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^0 (x - \pi) dx + \int_0^{\pi} (\pi - x) dx \\ &= \frac{1}{2\pi} \left( \frac{-3\pi^2}{2} - \frac{\pi^2}{2} \right) = \boxed{-\pi} \end{aligned}$$

برای ضرایب کسینوسی داریم:

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi} \int (f(x) \cos(nx)) dx \\ &= \frac{1}{\pi} \left( \int_{-\pi}^0 (x - \pi) \cos(nx) dx + \int_0^{\pi} (\pi - x) \cos(nx) dx \right) \end{aligned}$$

ابتدا لازم است اشاره کنیم که

$$\int x \cos(nx) = \frac{1}{n^2} \cos(nx) + \frac{1}{n} x \sin(nx)$$

با توجه به این موضوع، از عبارت بالا می‌توان به راحتی انتگرال گرفت:

$$= \frac{1}{\pi} \left( \left( \frac{\cos(nx)}{n^2} + \frac{x \sin(nx)}{n} - \frac{\pi \sin(nx)}{n} \right) \Big|_{-\pi}^0 + \left( -\frac{\cos(nx)}{n^2} + \frac{\pi \sin(nx)}{n} - \frac{x \sin(nx)}{n} \right) \Big|_0^{\pi} \right)$$

بعد از ساده سازی و محاسبات داریم:

$$a_n = -\frac{2(\pi n \sin(\pi n) + \cos(\pi n) - 1)}{\pi n^2}$$

برای محاسبات ضریب سینوسی داریم:

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{\pi} \int (f(x) \sin(nx)) dx \\ &= \frac{1}{\pi} \left( \int_{-\pi}^0 (x - \pi) \sin(nx) dx + \int_0^{\pi} (\pi - x) \sin(nx) dx \right) \end{aligned}$$



ابتدا لازم است اشاره کنیم که

$$\int x \sin(nx) = \frac{\sin(nx)}{n^2} - \frac{x \cos(nx)}{n}$$

با توجه به این موضوع، عبارت بالا مانند بخش قبل به راحتی قابل محاسبه است. جوابی که در نهایت به آن می‌رسیم به صورت زیر است:

$$b_n = \frac{2 - 2 \cos(\pi n)}{n}$$

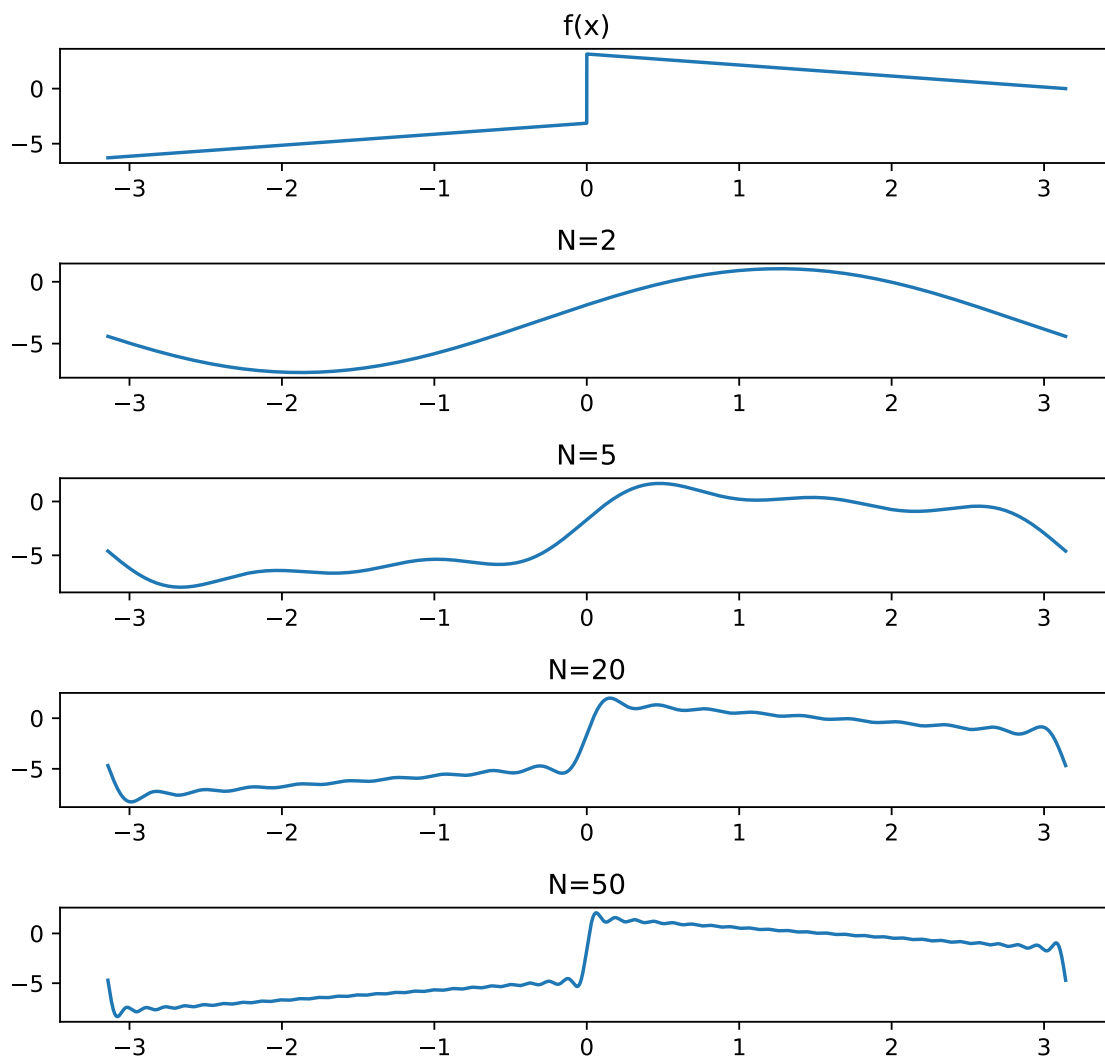
و جواب نهایی به صورت:

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^N (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$$

خواهد بود.  
کد آن در فایل P1\_Q1\_a.py قرار دارد. نمودار در صفحه بعد قرار گرفته است. شکل بالایی خود تابع و شکل‌های بعدی به ازای  $N = 2, 5, 20, 50$  هستند.



Amirmahdi Namjoo





## ۲.۱.۱ بخش b

$$f(x) = \begin{cases} 1 & 0 \leq x < \frac{\pi}{2} \\ 0 & \frac{\pi}{2} \leq x < \pi \\ 0 & -\pi \leq x < 0 \end{cases}$$

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int f(x) dx = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi/2} 1 dx = \boxed{\frac{1}{4}}$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int (f(x) \cos(nx)) dx$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi/2} \cos(nx) dx = \frac{1}{\pi} \frac{\sin(nx)}{n} \Big|_0^{\pi/2} = \boxed{\frac{\sin\left(\frac{\pi n}{2}\right)}{\pi n}}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int (f(x) \sin(nx)) dx$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi/2} \sin(nx) dx = -\frac{1}{\pi} \frac{\cos(nx)}{n} \Big|_0^{\pi/2} = \boxed{\frac{2 \sin^2\left(\frac{\pi n}{4}\right)}{\pi n}}$$

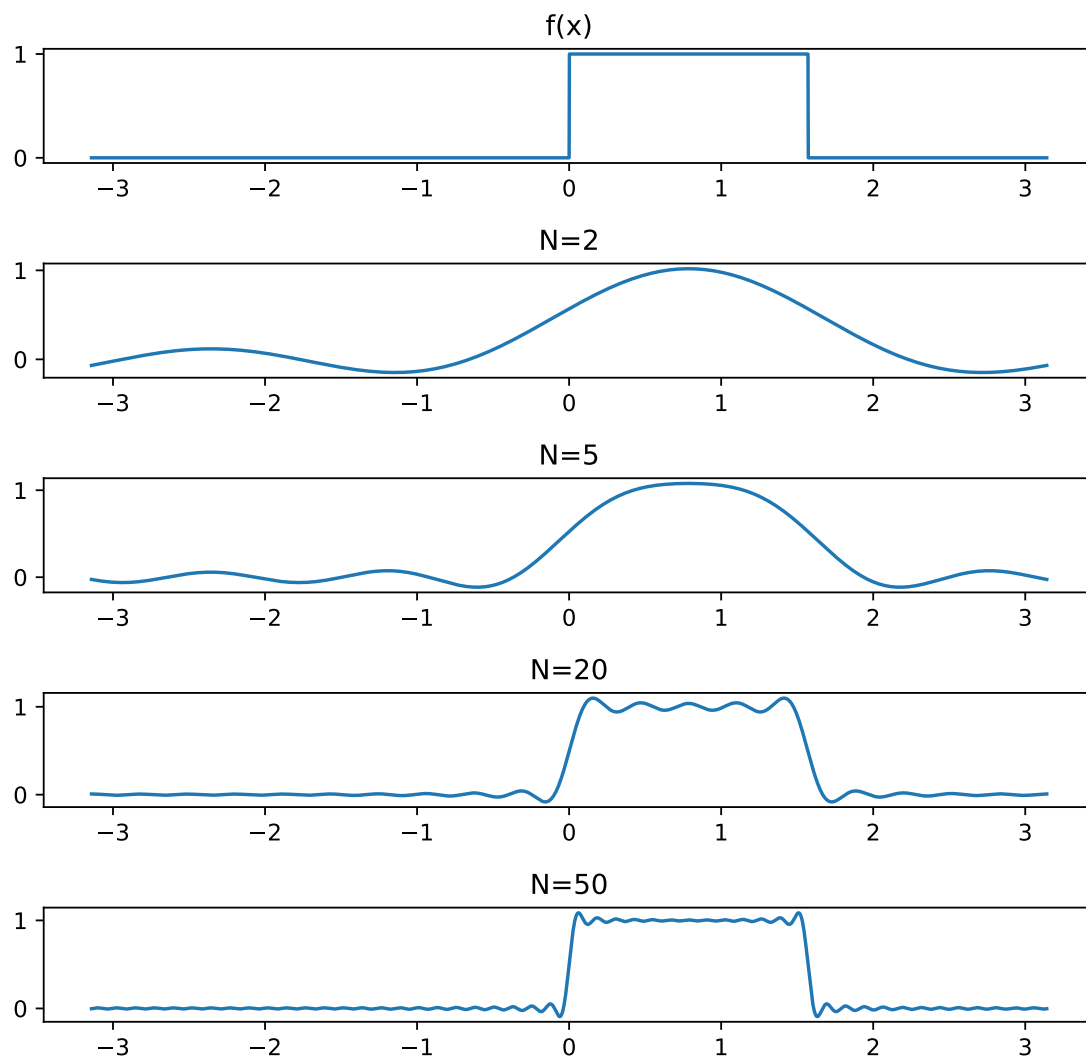
که در بالا از اتحاد  $\cos(2\theta) = 1 - 2\sin^2(\theta)$  استفاده شده است.  
و جواب نهایی به صورت:

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^N (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$$

کد آن در فایل P1\_Q1\_b.py قرار دارد. نمودار در صفحه بعد قرار گرفته است. شکل بالایی خود تابع و شکل های بعدی به ازای  $N = 2, 5, 20, 50$  هستند.



Amirmahdi Namjoo





## ۲.۱ سوال دوم

## ۱.۲.۱ بخش a

$$\cos(4t) = \frac{1}{2}e^{-4jt} + \frac{1}{2}e^{4jt}$$

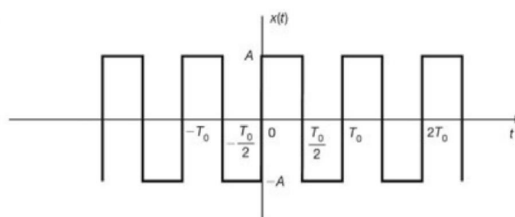
$$\sin(6t) = \frac{1}{2j}e^{6jt} - \frac{1}{2j}e^{-6jt}$$

در نتیجه ضرایب سری فوریه برای  $\cos(4t) + \sin(6t)$  به صورت زیر است:

$$a_4 = \frac{1}{2}, a_{-4} = \frac{1}{2}, a_6 = \frac{1}{2j}, a_{-6} = \frac{-1}{2j}$$

و به ازای  $k \neq \pm 4, \pm 6$  داریم  $a_k = 0$

## ۲.۲.۱ بخش b



$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$$

$$a_k = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t) e^{-jk \frac{2\pi}{T_0} t} dt$$

برای  $k = 0$  به طور جداگانه محاسبه کرده و داریم:

$$a_0 = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t) dt = 0$$

برای باقی موارد داریم:

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t) e^{-jk \frac{2\pi}{T_0} t} dt = \frac{1}{T_0} \left( \int_{-T_0/2}^0 (-A) e^{-jk \frac{2\pi}{T_0} t} dt + \int_0^{T_0/2} (A) e^{-jk \frac{2\pi}{T_0} t} dt \right) \\ &= \frac{1}{T_0} \left( \frac{AT_0 j (-1 + e^{jk\pi})}{2k\pi} + \frac{-AT_0 j (1 - e^{jk\pi})}{2k\pi} \right) \end{aligned}$$



$$= \frac{Aje^{-jk\pi}(-1 + e^{jk\pi})^2}{2k\pi}$$

## ۳.۲.۱ بخش c

دوره تناوب پایه  $|\sin(x)|$  برابر  $\pi$  است و عملاً مانند  $\sin$  مثبتی بین 0 تا  $\pi$  است که در همه تناوب‌هایش تکرار می‌شود. در نتیجه باید براساس این تناوب حل کرد.

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi |\sin(x)| e^{-2jkx} dx = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \sin(x) e^{-2jkx} dx$$

برای ضریب  $a_0$  داریم:

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \sin(x) dx = \frac{2}{\pi}$$

برای سایر ضرایب داریم:

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{1}{2j} (e^{ix} - e^{-ix}) e^{-2jkx} dx \\ &= \frac{1}{2\pi} \left( \frac{e^{-j(2k-1)x}}{2k-1} - \frac{e^{-j(2k+1)x}}{2k+1} \right) \Big|_0^\pi \\ &= \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2k+1} - \frac{1}{2k-1} \right) + \frac{1}{2} \left( \frac{e^{-j\pi(2k-1)}}{2k-1} - \frac{e^{-j\pi(2k+1)}}{2k+1} \right) \\ &= \frac{1 + e^{-2j\pi k}}{1 - 4k^2} \end{aligned}$$

## ۳.۱ سوال سوم

## ۱.۳.۱ بخش a

$$x(t) = + - 2je^{-2j\omega_0 t} + -1je^{-1j\omega_0 t} + 1je^{1j\omega_0 t} + 2je^{2j\omega_0 t}$$

$$= -\frac{4}{2j} (e^{2j\omega_0 t} - e^{-2j\omega_0 t}) - \frac{2}{2j} (e^{j\omega_0 t} - e^{-j\omega_0 t})$$

$$= -4 \sin(2\omega_0 t) - 2 \sin(\omega_0 t)$$





## ۴.۱ بخش b

عبارت مورد نظر باید ما را به یاد سری فوریه قطار ضربه بیندازد.

$$\delta_{T_0}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{jk\omega_0 t}$$

برای ضرایب فوریه چنین چیزی داریم:

$$c_k = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} \delta(t) e^{-jk\omega_0 t} dt = \frac{1}{T_0}$$

$$\delta_{T_0}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT_0) = \frac{1}{T_0} \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{jk\omega_0 t} \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$$

با توجه به این موضوع برای چیزی که در صورت سوال داده شده، می‌توانیم آن را معادل با

$$z(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{jk\omega_0 t} \delta(t - T_0 k + 2k)$$

بدانیم.