سیگنال‌ها و سیستم‌ها

تمرین پنجم

دانشکده مهندسی کامپیوتر

دانشگاه صنعتی شریف

نیم سال دوم ۰۰-۹۹

استاد:

جناب آقای دکتر منظوری شلمانی

نام و نام خانوادگی:

امیرمهدی نامجو - ۹۷۱۰۷۲۱۲

۱ سری فوریه

۱.۱ سوال اول

۱.۱.۱ بخش a

$$f(x) = \begin{cases} \pi - x & 0 \leq x \leq \pi \\ x - \pi & -\pi \leq x \leq 0 \end{cases}$$

ابتدا عامل DC را بدست می‌آوریم:

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int f(x)dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{0}(x-\pi)dx + \int_{0}^{\pi}(\pi - x)dx$$

$$= \frac{1}{2\pi}(\frac{-3\pi^2}{2} - \frac{\pi^2}{2}) = \boxed{-\pi}$$

برای ضرایب کسینوسی داریم:

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int(f(x)\cos(nx))dx$$

$$= \frac{1}{\pi}(\int_{-\pi}^{0}(x-\pi)\cos(nx)dx + \int_{0}^{\pi}(\pi - x)\cos(nx)dx)$$

ابتدا لازم است اشاره کنیم که

$$\int x\cos(nx) = \frac{1}{n^2}\cos(nx) + \frac{1}{n}x\sin(nx)$$

با توجه به این موضوع، از عبارت بالا می‌توان به راحتی انتگرال گرفت:

$$= \frac{1}{\pi}((\frac{\cos(nx)}{n^2} + \frac{x\sin(nx)}{n} - \frac{\pi\sin(nx)}{n})|_{-\pi}^{0} + (-\frac{\cos(nx)}{n^2} + \frac{\pi\sin(nx)}{n} - \frac{x\sin(nx)}{n})|_{0}^{\infty})$$

بعد از ساده سازی و محاسبات داریم:

$$\boxed{a_n = -\frac{2(\pi n\sin(\pi n) + \cos(\pi n) - 1)}{\pi n^2}}$$

برای محاسبات ضریب سینوسی داریم:

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int(f(x)sin(nx))dx$$

$$= \frac{1}{\pi}(\int_{-\pi}^{0}(x-\pi)\sin(nx)dx + \int_{0}^{\pi}(\pi - x)\sin(nx)dx)$$

ابتدا لازم است اشاره کنیم که

$$\int x\sin(nx) = \frac{\sin(nx)}{n^2} - \frac{x\cos(nx)}{n}$$

با توجه به این موضوع، عبارت بالا مانند بخش قبل به راحتی قابل محاسبه است. جوابی که در نهایت به آن می رسیم به صورت زیر است:

$$\boxed{b_n = \frac{2-2\cos(\pi n)}{n}}$$

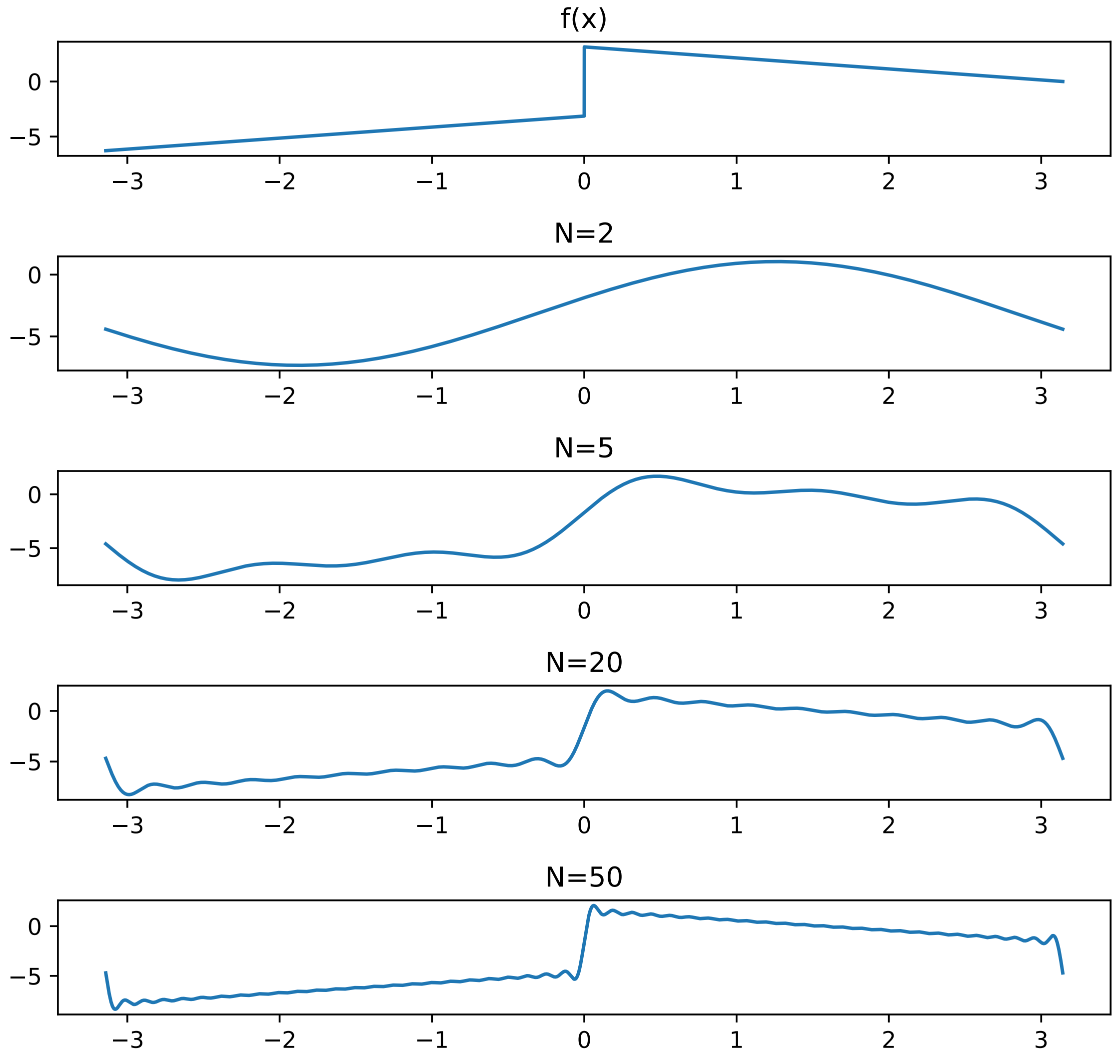
و جواب نهایی به صورت:

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{N}(a_n\cos(nx) + b_n\sin(nx))$$

خواهد بود.

کد آن در فایل P1_Q1_a.py قرار دارد. نمودار در صفحه بعد قرار گرفته است. شکل بالایی خود تابع و شکل های بعدی به ازای $N = 2, 5, 20, 50$ هستند.

Amirmahdi Namjoo



۲.۱.۱ بخش b

$$f(x) = \begin{cases} 1 & 0 \leq x < \frac{\pi}{2} \\ 0 & \frac{\pi}{2} \leq x < \pi \\ 0 & -\pi \leq x < 0 \end{cases}$$

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int f(x) dx = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi/2} 1 dx = \boxed{\frac{1}{4}}$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int (f(x) \cos(nx)) dx$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi/2} \cos(nx) dx = \frac{1}{\pi} \frac{\sin(nx)}{n} |_0^{\pi/2} = \boxed{\frac{\sin\left(\frac{\pi n}{2}\right)}{\pi n}}$$

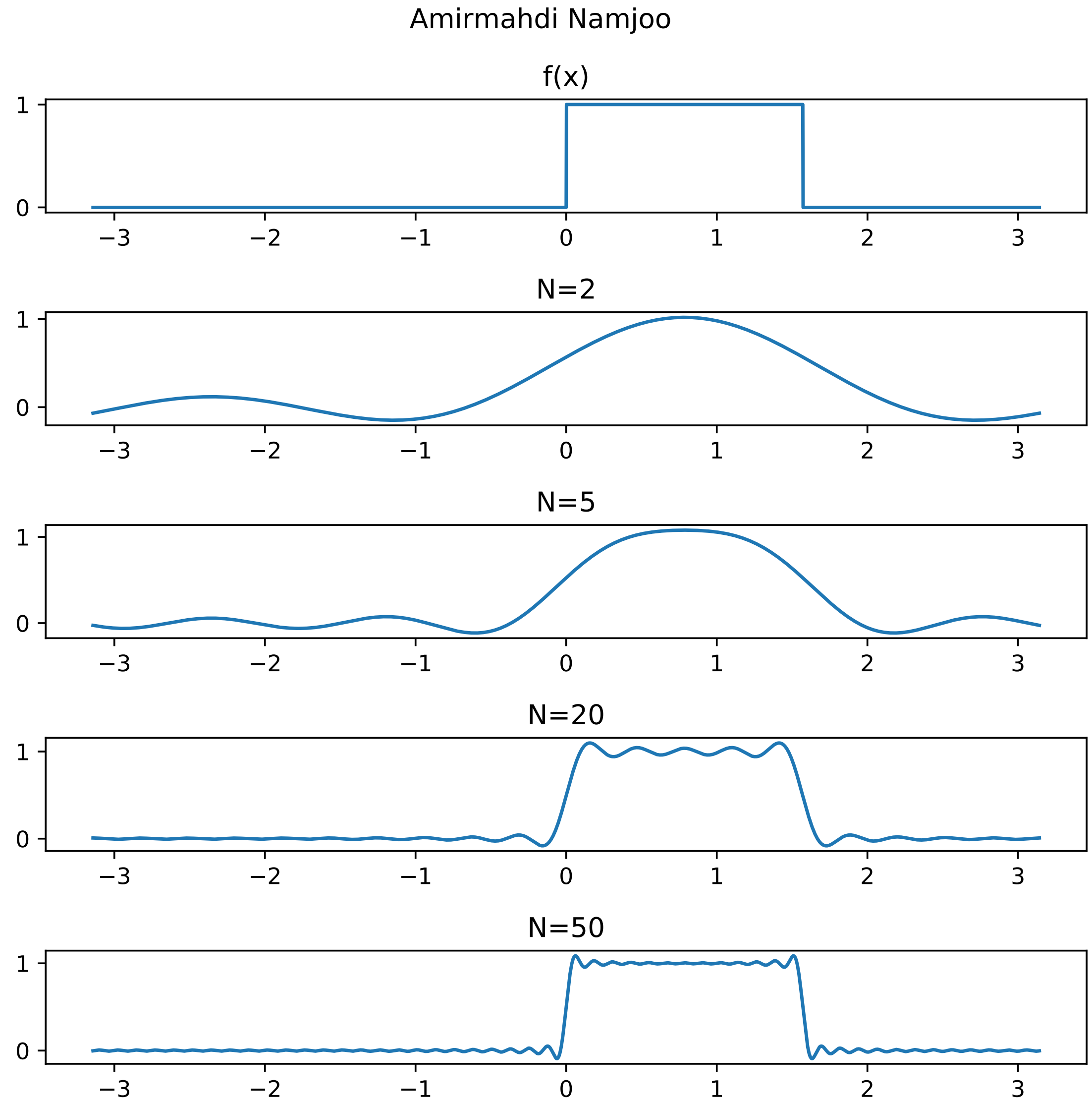
$$b_n = \frac{1}{\pi} \int (f(x) \sin(nx)) dx$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi/2} \sin(nx) dx = -\frac{1}{\pi} \frac{\cos(nx)}{n} |_0^{\pi/2} = \boxed{\frac{2\sin^2\left(\frac{\pi n}{4}\right)}{\pi n}}$$

که در بالا از اتحاد $\cos(2\theta) = 1 - 2\sin^2(\theta)$ استفاده شده است.
و جواب نهایی به صورت:

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{N} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$$

کد آن در فایل `P1_Q1_b.py` قرار دارد. نمودار در صفحه بعد قرار گرفته است. شکل بالایی خود تابع و شکل های بعدی به ازای $N = 2, 5, 20, 50$ هستند.


Amirmahdi Namjoo
f(x)
N=2
N=5
N=20
N=50

۲.۱ سوال دوم

۱.۲.۱ بخش a

$$\cos(4t) = \frac{1}{2}e^{-4jt} + \frac{1}{2}e^{4jt}$$

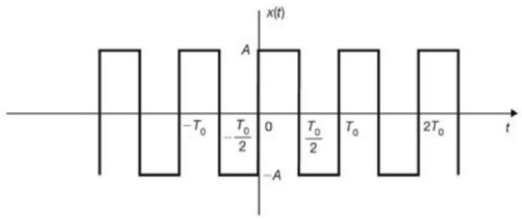
$$\sin(6t) = \frac{1}{2j}e^{6jt} - \frac{1}{2j}e^{-6jt}$$

در نتیجه ضرایب سری فوریه برای $\cos(4t) + \sin(6t)$ به صورت زیر است:

$$a_4 = \frac{1}{2}, a_{-4} = \frac{1}{2}, a_6 = \frac{1}{2j}, a_{-6} = \frac{-1}{2j}$$

و به ازای $k \neq \pm 4, \pm 6$ داریم $a_k = 0$

۲.۲.۱ بخش b



$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$$

$$a_k = \frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t)e^{-jk\frac{2\pi}{T_0}t}dt$$

برای $k = 0$ به طور جداگانه محاسبه کرده و داریم:

$$\boxed{a_0 = \frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t)dt = 0}$$

برای باقی موارد داریم:

$$a_k = \frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t)e^{-jk\frac{2\pi}{T_0}t}dt = \frac{1}{T_0}(\int_{-T_0/2}^{0}(-A)e^{-jk\frac{2\pi}{T_0}t}dt + \int_{0}^{T_0/2}(A)e^{-jk\frac{2\pi}{T_0}t}dt)$$

$$= \frac{1}{T_0}(\frac{AT_0 j(-1+e^{jk\pi})}{2k\pi} + \frac{-AT_0 j(1-e^{jk\pi})}{2k\pi})$$

$$\boxed{= \frac{Aje^{-jk\pi}(-1+e^{jk\pi})^2}{2k\pi}}$$

۳.۲.۱ بخش c

دوره تناوب پایه $|\sin(x)|$ برابر π است و عملا مانند $\sin$ مثبتی بین 0 تا π است که در همه تناوب‌هایش تکرار می‌شود. در نتیجه باید براساس این تناوب حل کرد.

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi |\sin(x)|e^{-2jkx}dx = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \sin(x)e^{-2jkx}dx$$

برای ضریب a_0 داریم:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \sin(x)dx = \frac{2}{\pi}$$

برای سایر ضرایب داریم:

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \frac{1}{2j}(e^{ix}-e^{-ix})e^{-2jkx}dx$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left(\frac{e^{-j(2k-1)x}}{2k-1} - \frac{e^{-j(2k+1)x}}{2k+1}\right)|_0^\pi$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2k+1} - \frac{1}{2k-1}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{e^{-j\pi(2k-1)}}{2k-1} - \frac{e^{-j\pi(2k+1)}}{2k+1}\right)$$

$$= \boxed{\frac{1+e^{-2j\pi k}}{1-4k^2}}$$

۳.۱ سوال سوم

۱.۳.۱ بخش a

$$x(t) = + -2je^{-2j\omega_0 t} + -1je^{-1j\omega_0 t} + 1je^{1j\omega_0 t} + 2je^{2j\omega_0 t}$$

$$= -\frac{4}{2j}(e^{2j\omega_0 t} - e^{-2j\omega_0 t}) - \frac{2}{2j}(e^{j\omega_0 t} - e^{-j\omega_0 t})$$

$$\boxed{= -4\sin(2\omega_0 t) - 2\sin(\omega_0 t)}$$

۲.۳.۱ بخش b

عبارت مورد نظر باید ما را به یاد سری فوریه قطار ضربه بیندازد.

$$\delta_{T_0}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{jk\omega_0 t}$$

برای ضرایب فوریه چنین چیزی داریم:

$$c_k = \frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2} \delta(t) e^{-jk\omega_0 t} dt = \frac{1}{T_0}$$

$$\delta_{T_0}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta\left(t - kT_0\right) = \frac{1}{T_0}\sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{jk\omega_0 t} \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$$

با توجه به این موضوع برای چیزی که در صورت سوال داده شده، می‌توانیم آن را معادل با

$$z(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{jk\omega_0 t}\delta(t - T_0 k + 2k)$$

بدانیم.

در عبارت بالا $2k$ برای زوج سازی و سپس e برای شیفت فرکانسی اضافه شده است که باعث بشود که تنها عبارت‌های فرد 1 بمانند و عبارت‌های زوج 0 شوند.

۴.۱ سوال چهارم

در سوال نمادهای e_k و d_k استفاده شده است ولی برای راحتی کار و از آن جایی که کلا دو سیگنال اصلی داریم، از a_k و b_k در جواب استفاده شده است.

$$x_1[n]x_2[n] = \sum_{k=0}^{N_0-1}\sum_{l=0}^{N_0-1} a_k b_l e^{j(2\pi/N_0)(k+l)n}$$

$$x_1[n]x_2[n] = \sum_{k=0}^{(N_0-1)}\sum_{l'=k}^{(k+N_0-1)} a_k b_{l'-k} e^{j(2\pi/N_0)'n}$$

با توجه به متناوب بودن $b_{l'-k}$ و $e^{j2\pi/N_0 l'n}$ داریم:

$$x_1[n]x_2[n] = \sum_{k=0}^{N_0-1}\sum_{l'=0}^{N_0-1} a_k b_{l'-k} e^{j(2\pi/N_0)t'n} = \sum_{l=0}^{N_0-1}\left[\sum_{k=0}^{N_0-1} a_k b_{l-k}\right] e^{j(2\pi/N_0)ln}$$

پس

$$c_k = \sum_{t=0}^{N_0-1} a_k b_{l-k}$$

و معادلا:

$$c_k = \sum_{k=0}^{N_0-1} b_k a_{l-k}$$

برای اثبات رابطه پارسوال داریم:

$$N_0 \sum_{l=\langle N_0\rangle} a_l b_{k-l} = \sum_{\langle N_0\rangle} x_1[n]x_2[n]e^{-j(2\pi/N_0)kn}$$

با قرار دادن $k=0$ داریم:

$$N_0 \sum_{l=\langle N_0\rangle} a_l b_{-1} = \sum_{n=\langle N_0\rangle} x_1[n]x_2[n]$$

در نتیجه:

$$\frac{1}{N_0}\sum_{n=0}^{N_0-1} x[n] = \sum_{k=0}^{N_0-1} a_k b_{-k}$$

۵.۱ سوال پنجم

در نتیجه سوال قبل قرار می‌دهیم:

$$x_2[n] = x_1^*[n]$$

در نتیجه این موضوع داریم:

$$b_k = a_{-k}^*$$

پس

$$\frac{1}{N_0}\sum_{n=0}^{N_0-1} x[n] = \sum_{n=0}^{N_0-1} a_k n_{-k}$$

$$\frac{1}{N_0}\sum_{n=0}^{N_0-1} x_1[n]x_1^*[n] = \sum_{k=0}^{N_0-1} a_k a_k^*$$

بنابراین:

$$\sum_{k=\langle n_0\rangle} |a_k|^2 = \frac{1}{N_0}\sum_{n=\langle N_0\rangle} |x[n]|^2.$$