



سیگنال‌ها و سیستم‌ها

تمرین اول

دانشکده مهندسی کامپیوتر

دانشگاه صنعتی شریف

نیم سال دوم ۹۹-۰۰

استاد:

جناب آقای دکتر منظوری شلمانی

نام و نام خانوادگی:

امیرمهدی نامجو - ۹۷۱۰۷۲۱۲



۱ سوال اول

(آ) خیر متناوب نیست. زیرا در $t < 0$ دائما صفر است. هر چند در بعد از آن دوره تناوب 2π پیدا می کند اما در کل متناوب نیست.

(ب) خیر متناوب نیست. دلیل این موضوع به خاطر این است که این تابع در همه نقاط برابر 1 است به جز در نقطه 0 که برابر 2 است. در نتیجه نمی توان دوره تناوبی برای آن ارائه داد. اگر در نقطه 0 هم برابر 1 بود دوره تناوب آن 1 می شد ولی به هر حال این طور نیست.

(ج) بله. تابع داده شده به این صورت رفتار می کند:

$$x[0] = \sum \delta[0 - 4k] - \delta[-1 - 4k] = 1$$

به خاطر نقطه $k = 0$

$$x[1] = \sum \delta[1 - 4k] - \delta[0 - 4k] = -1$$

به خاطر نقطه $k = 0$

$$x[2] = \sum \delta[2 - 4k] - \delta[1 - 4k] = 0$$

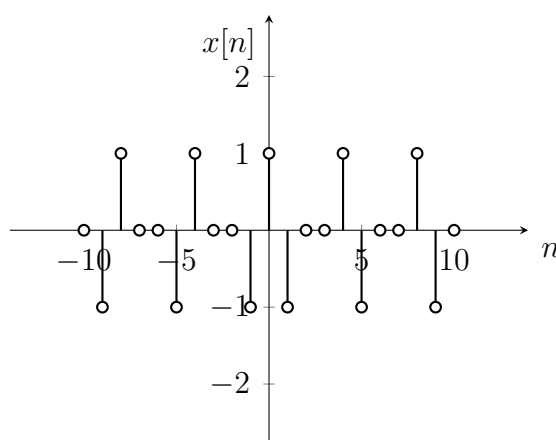
در هیچ k ای درون پرانتز دلتا صفر نمی شود.

$$x[3] = \sum \delta[3 - 4k] - \delta[2 - 4k] = 0$$

در هیچ k ای درون پرانتز دلتا صفر نمی شود.

پس از این، دوباره همین روند با استدلال مشابه برای k های یکی بیش تر تکرار می شود. (برای قبل از 0 هم همین طور)

در نتیجه متناوب بوده و دوره تناوب 4 است.





۲ سوال دوم

سیگنال داده شده به این صورت رفتار می کند که عبارت جمعی جلوی آن به ازای $n \leq 3$ برابر 1 است و به ازای $n \geq 4$ برابر 0 می شود.

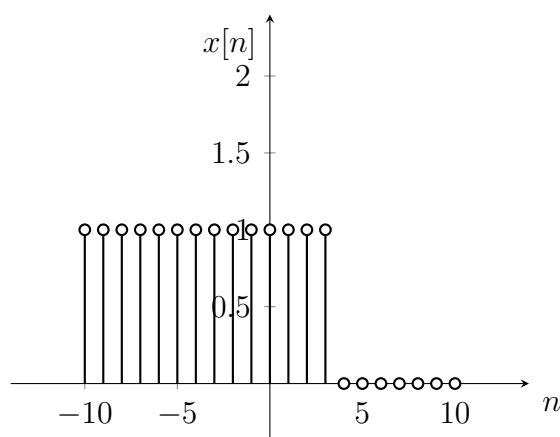
$$x[n] = \begin{cases} 1 & n \leq 3 \\ 0 & n > 3 \end{cases}$$

در نتیجه ظاهر تابع مشابه یک تابع پله واحد است که حول محور y دوران یافته و پس از دوران 3 واحد هم شیفست به راست خورده است.

$$x[n] = u[-(x - 3)] = u[-x + 3]$$

پس

$$M = -1, n_0 = -3$$





۳ سوال سوم

(آ) خیر بی حافظه نیست چون مقدار $y[n]$ به مقادیر قبلی $x[n]$ یعنی در این جا $x[n-2]$ بستگی دارد.

(ب)

$$y[n] = A^2 \delta[n] \delta[n-2]$$

حاصل ضرب دو دلتا در نقاط مختلف با یکدیگر همواره صفر است. در هر نقطه‌ای که در نظر بگیریم، یکی از دو دلتای نوشته شده صفر خواهد بود. در نتیجه

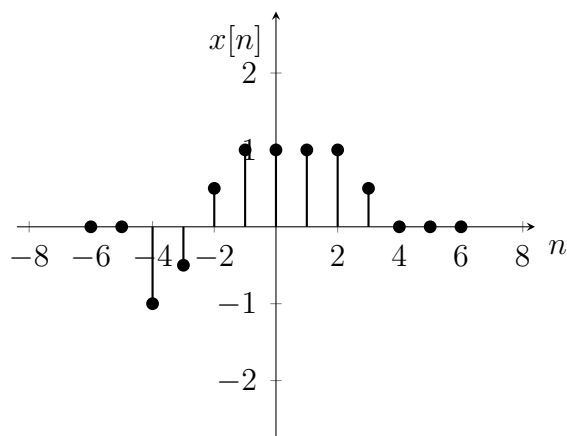
$$y[n] = 0 \quad ; \forall n \in \mathbb{Z}$$

(ج) خیر معکوس پذیر نیست. با توجه به نتیجه بخش قبل، می‌توان به این نتیجه رسید که این سیستم به ازای تمامی ورودی‌ها به فرم $A\delta[n-k]$ مقدار صفر را خروجی می‌دهد. در نتیجه نمی‌توان از روی خروجی، به طور یکتا ورودی را تعیین کرد. در نتیجه معکوس پذیر نیست.

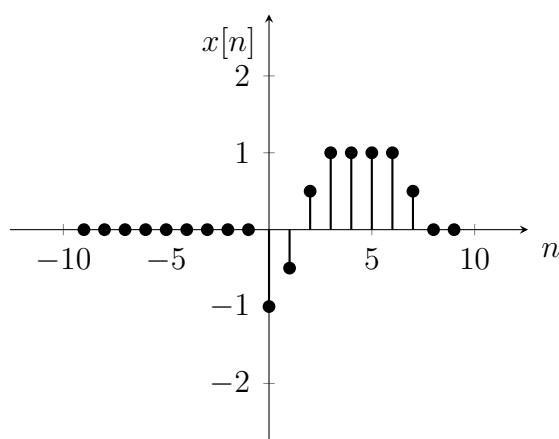


۴ سوال چهارم

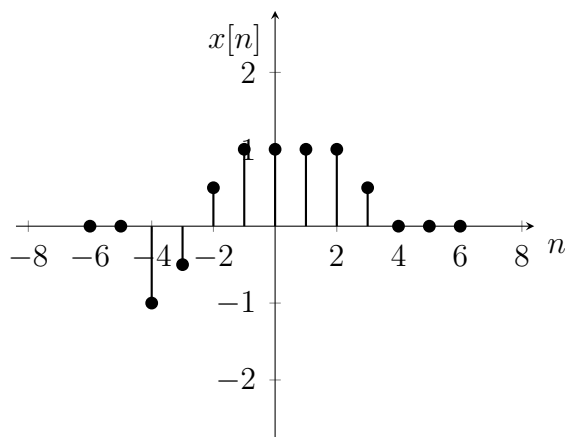
سیگنال مرجع:



(آ) $x[n-4]$

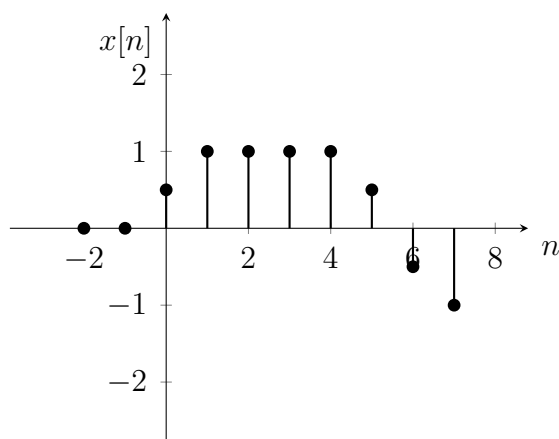


(ب) $x[n]u[3-n] = x[n]$

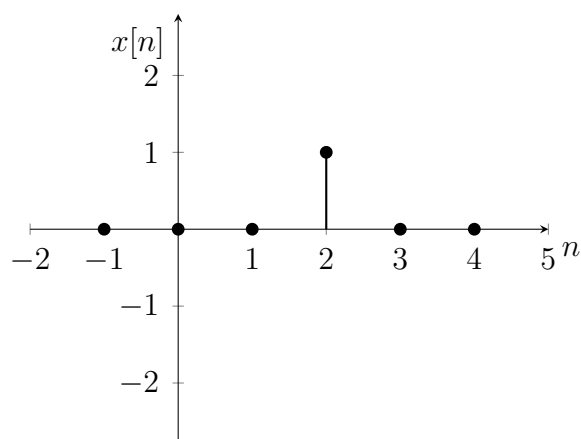




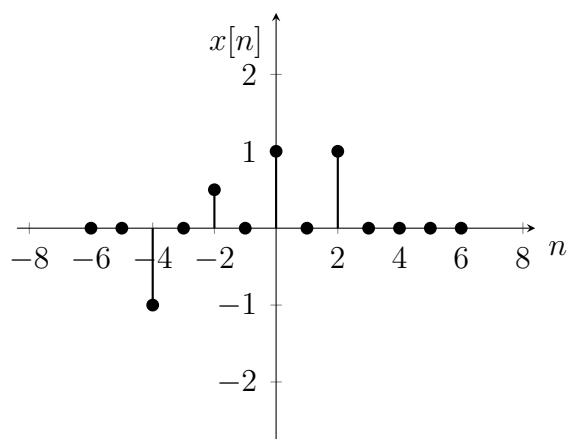
پ) $x[3-n]$



ت) $x[n-2]\delta[n-2]$

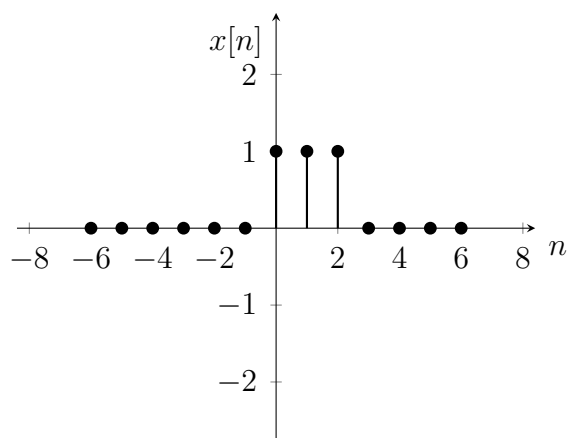


ث) $\frac{1}{2}x[n] + \frac{1}{2}(-1)^n x[n]$





ج) $x[(n-1)^2]$





۵ سوال پنجم

(آ)

$$y(t) = \int_{-\infty}^{2t} x(\tau) d\tau$$

- بی حافظه: خیر. با توجه به این که انتگرال گرفته شده است، یعنی مقادیر در زمان های قبلی هم اهمیت داشته اند. پس حافظه دار است.
- تغییرناپذیر با زمان: خیر. با توجه به نقش زمان در خود حدود انتگرال، تغییرپذیر با زمان است. مثلا اگر ورودی اول ما $x(\tau)$ باشد و خروجی آن $y(t)$ باشد و ورودی را شیفت بدهیم به صورت $x(\tau - T)$ در آن صورت خروجی $\int_{-\infty}^{2t} x(\tau - T) d\tau$ خواهد بود که برابر با $y(t - T)$ نیست.
- خطی: بله. با توجه به خطی بودن انتگرال و این که درون انتگرال هم عبارت غیر خطی ظاهر نشده، خطی است.
- علی: خیر. در زمان t به مقادیر سیگنال در زمان های بعدتر یعنی t تا $2t$ هم نیاز داشته ایم. یعنی سیستم از آینده هم تاثیر می بیند. در نتیجه دو ورودی یکسان که تا نقطه ای خاص با هم برابر باشند، لزوماً تا همان نقطه خروجی برابری تولید نمی کنند و بسته به آینده خود خروجی هر یک متفاوت خواهد بود.
- پایدار: خیر. پایدار هم نیست. مثلا تابع $u[-t]$ را به آن بدهید. با توجه به وجود انتگرال از $-\infty$ خروجی آن بی کران خواهد بود.

(ب)

$$y(t) = \frac{dx(t)}{t}$$

- بی حافظه: خیر. در تعریف مشتق چنین چیزی را داریم:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{x(t) - x(t - h)}{h}$$

- در نتیجه هرچند کوچک، اما مقدار مشتق به مقادیر قبلی سیگنال بستگی دارد و به طور مستقل صرفاً براساس زمان فعلی تعیین نمی شود.
- تغییرناپذیر با زمان: بله. خود زمان نقشی در تابع ندارد. در نتیجه تغییرناپذیر در زمان است. به بیان دیگر اگر مثلاً ورودی را برای زمان $x(t - T)$ به سیستم بدهیم خروجی هم $\frac{dx(t-T)}{dt} = y(t - T)$ خواهد بود و به همان اندازه شیفت می خورد.
- خطی: بله. خطی است. به طور کلی مشتق با توجه به آن چه از حساب دیفرانسیل و انتگرال می دانیم رفتار خطی دارد و از آن جایی که المان غیرخطی در این جا وارد نشده و صرفاً یک مشتق ساده است، خطی خواهد بود.
- علی: بله علی است.

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{x(t) - x(t - h)}{h}$$



یعنی صرفا با مقادیر قبلی سیگنال ورودی می توان مشتق را بدست آورد. البته در تعاریف دیگری از مشتق، براساس مقدار بعدی سیگنال هم می توان این کار را کرد اما همین که براساس مقادیر قبلی هم می توان تعیین کرد نشان دهنده علی بودن است.

- پایدار: خیر. پایدار نیست. مثلا سیگنالی را در نظر بگیرید که برای $-1 < t < 1$ مقدار آن $\frac{-t}{\sqrt{1-t^2}}$ و در غیر این صورت 0 باشد. این سیگنال کران دار است اما مشتق آن در نزدیکی 1 کران دار نیست. پس پایدار نیست.

(پ)

$$y(t) = \begin{cases} 0, & x(t) < 0 \\ x(t) + x(t-2), & x(t) \geq 0 \end{cases}$$

- بی حافظه: خیر. به وضوح بی حافظه نیست. در $x(t) \geq 0$ به مقادیر قبلی وابسته است.
- تغییرناپذیر با زمان: بله.
- یک شیفت به اندازه t_0 آن را به این شکل در می آورد:

$$y(t-t_0) = \begin{cases} 0, & x(t-t_0) < 0 \\ x(t-t_0) + x(t-t_0-2), & x(t-t_0) \geq 0 \end{cases}$$

این دقیقا معادل این است که $x(t-t_0)$ را به عنوان ورودی به مسئله بدهیم. در نتیجه تغییرناپذیر در زمان است.

- خطی: بله خطی است. فرض کنید پاسخ برای x_1 و x_2 به صورت زیر باشد:

$$\begin{aligned} y_1(t) &= \begin{cases} 0, & x_1(t) < 0 \\ x_1(t) + x_1(t-2), & x_1(t) \geq 0 \end{cases} \\ y_2(t) &= \begin{cases} 0, & x_2(t) < 0 \\ x_2(t) + x_2(t-2), & x_2(t) \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

همچنین تعریف می کنیم:

$$x_3(t) = \alpha x_1(t) + \beta x_2(t)$$

در نتیجه

$$\begin{aligned} y_3(t) &= \begin{cases} 0, & x_3(t) < 0 \\ x_3(t) + x_3(t-2), & x_3(t) \geq 0 \end{cases} \\ y_3(t) &= \begin{cases} 0, & x_3(t) < 0 \\ \alpha x_1(t) + \beta x_2(t) + \alpha x_1(t-2) + \beta x_2(t-2), & x_3(t) \geq 0 \end{cases} \\ y_3(t) &= \begin{cases} 0, & \{\alpha x_1(t) + \beta x_2(t)\} < 0 \\ \alpha x_1(t) + \alpha x_1(t-2) + \beta x_2(t) + \beta x_2(t-2), & \{\alpha x_1(t) + \beta x_2(t)\} \geq 0 \end{cases} \\ y_3(t) &= \begin{cases} 0, & \{\alpha x_1(t) + \beta x_2(t)\} < 0 \\ \alpha y_1(t) + \beta y_2(t), & \{\alpha x_1(t) + \beta x_2(t)\} \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$



- علی: بله. به وضوح علی است چون وابستگی به مقادیر بعدی یک سیگنال برای بدست آوردن پاسخ آن در لحظه‌ای خاص نداریم.
- پایدار: به صورت قدر مطلق در نظر می‌گیریم. اگر $\forall t; |x(t)| < \infty$ آن گاه:

$$|y(t)| \leq \begin{cases} 0, & |x(t)| < 0 \\ |x(t)| + |x(t-2)|, & |x(t)| \geq 0 \end{cases}$$

و از آن جایی که جمع دو مقدار کران‌دار، کران‌دار است پس $|y(t)|$ هم کران‌دار بوده و خود $y(t)$ هم کران‌دار خواهد بود.

$$y[n] = nx[n] \quad (\text{ت})$$

- بی‌حافظه: بله. واضح است که وابستگی به زمان‌های قبلی وجود ندارد. در نتیجه بی‌حافظه است.

- تغییرناپذیر با زمان: خیر. مثلاً $y[n - n_0] = (n - n_0)x[n - n_0]$ اما در صورتی که ورودی صرفاً شیفت بخورد و تبدیل به $x[n - n_0]$ بشود و به عنوان ورودی سیستم داده بشود، خروجی به صورت $y[n] = nx[n - n_0]$ خواهد بود که این دو حالت برابر نیستند.

در

- خطی: بله. مثلاً دو سیگنال $x_1[n], x_2[n]$ را در نظر بگیرید.

$$y_1[n] = nx_1[n], \quad y_2[n] = nx_2[n]$$

حال سیگنال سوم $x_3[n] = \alpha x_1[n] + \beta x_2[n]$ را در نظر بگیرید.

$$y_3[n] = nx_3[n] = n\alpha x_1[n] + n\beta x_2[n] = \alpha y_1[n] + \beta y_2[n]$$

پس خطی است.

- علی: بله. هیچ وابستگی به مقادیر سیگنال ورودی در آینده وجود ندارد. به عبارتی به وضوح اگر دو سیگنال ورودی از $-\infty$ تا n_0 با هم برابر باشند، خروجی آن‌ها هم تا آن لحظه با هم برابر خواهد بود.

- پایدار: خیر پایدار نیست. حتی با وجود کران‌دار در نظر گرفتن $x[n]$ به دلیل وجود ضریب n ، اگر مثلاً یک سیگنال ثابت نظیر $x[n] = 1$ را هم بدهیم، خروجی کران‌دار نخواهد بود.

$$y[n] = x[n-2] - 2x[n-8] \quad (\text{ث})$$

- بی‌حافظه: به وضوح بی‌حافظه نیست چون به مقادیر قبلی سیگنال در لحظات قبلی وابسته است.

- تغییرناپذیر با زمان: بله. مثلاً سیگنال شیفت یافته خروجی می‌شود: $y[n - n_0] = x[n - n_0 - 2] - 2x[n - n_0 - 8]$ از طرفی اگر خود ورودی را هم شیفت بدهیم و به سیستم ورودی $x[n]$ را بدهیم، خروجی می‌شود: $y[n] = x[n - n_0 - 2] - 2x[n - n_0 - 8]$ که این دو با هم برابر هستند. پس تغییرناپذیر در زمان است.



- خطی: بله خطی است. مثلاً دو سیگنال $x_1[n], x_2[n]$ را در نظر بگیرید.

$$y_1[n] = x_1[n-2] - 2x_1[n-8]$$

$$y_2[n] = x_2[n-2] - 2x_2[n-8]$$

حال سیگنال $x_3[n] = \alpha x_1[n] + \beta x_2[n]$ را در نظر بگیرید.

$$y_3[n] = x_3[n-2] - 2x_3[n-8]$$

$$y_3[n] = \alpha x_1[n-2] + \beta x_2[n-2] - 2\alpha x_1[n-8] - 2\beta x_2[n-8]$$

$$y_3[n] = \alpha y_1[n] + \beta y_2[n]$$

پس خطی است.

- علی: بله. علی است. چون به مقادیر سیگنال در آینده وابسته نیست.
- پایدار: بله. اگر $x[n]$ را در همه نقاط کراندار در نظر بگیریم، به وضوح $x[n-2]$ و $x[n-8]$ هم جزو همین نقاط هستند و کراندار هستند. و جمع و تفریق دو عدد کراندار هم همواره کراندار خواهد بود. در نتیجه $y[n]$ هم کراندار است. به شکل ریاضیاتی اگر $\forall n; |x[n]| < \infty$ آنگاه

$$|y[n]| = |x[n-2] - 2x[n-8]| \leq |x[n-2]| + 2|x[n-8]| \leq \infty$$

(ج)

$$y[n] = \begin{cases} x[n], & n \geq 1 \\ 0, & n = 0 \\ x[n+1], & n \leq -1 \end{cases}$$

- بی حافظه: خیر. سیستمی بی حافظه است که مقدار آن در یک لحظه فقط به مقدار ورودی در آن لحظه بستگی داشته باشد. در این جا مثلاً برای $n = -2$ مقدار $y[-2]$ به $x[-1]$ در آینده بستگی دارد. در نتیجه بی حافظه نیست.
- تغییرناپذیر با زمان: خیر. شیفت داده شده خروجی به صورت زیر می شود:

$$y[n-n_0] = \begin{cases} x[n-n_0], & n-n_0 \geq 1 \\ 0, & n-n_0 = 0 \\ x[n+1], & n-n_0 \leq -1 \end{cases}$$

در حالی که اگر صرفاً سیگنال ورودی را شیفت دهیم و مقدار $x[n-n_0]$ را ورودی دهیم به این صورت در می آید:

$$y[n-n_0] = \begin{cases} x[n-n_0], & n \geq 1 \\ 0, & n = 0 \\ x[n+1], & n \leq -1 \end{cases}$$



- که با قبلی برابر نیست. در نتیجه تغییرپذیر با زمان است.
- خطی: بله. فرض کنید دو سیگنال ورودی $x_1[n]$, $x_2[n]$ را داشته باشیم.

$$y_1[n] = \begin{cases} x_1[n], & n \geq 1 \\ 0, & n = 0 \\ x_1[n+1], & n \leq -1 \end{cases}$$

$$y_2[n] = \begin{cases} x_2[n], & n \geq 1 \\ 0, & n = 0 \\ x_2[n+1], & n \leq -1 \end{cases}$$

سیگنال سوم $x_3[n] = \alpha x_1[n] + \beta x_2[n]$ را در نظر بگیرید.

$$y_3[n] = \begin{cases} x_3[n], & n \geq 1 \\ 0, & n = 0 \\ x_3[n+1], & n \leq -1 \end{cases} = \begin{cases} \alpha x_1[n] + \beta x_2[n], & n \geq 1 \\ 0, & n = 0 \\ \alpha x_1[n+1] + \beta x_2[n+1], & n \leq -1 \end{cases}$$

و این معادل با این است که

$$y_3[n] = \alpha y_1[n] + \beta y_2[n]$$

در نتیجه خطی است.

- علی: خیر. به وضوح برای $y[-2]$ به مقدار $x[-1]$ نیاز داریم که در آینده قرار دارد.
- پایدار: بله. اگر $x[n]$ در همه n ها کراندار باشد، به وضوح $y[n]$ هم کراندار است. زیرا در همه نقاط یا صفر است یا برابر $x[n]$ یا $x[n+1]$ در نتیجه کراندار خواهد بود.



۶ سوال ششم

$$y(t) = \cos[x(t)] \quad (\text{آ})$$

خیر معکوس پذیر نیست. دو سیگنال $x_1(t)$ و $x_2(t) = x_1(t) + 2\pi$ یک خروجی را تولید می کنند.

$$y(t) = \int_{-\infty}^t e^{-(t-\tau)} x(\tau) d\tau \quad (\text{ب})$$

وارون پذیر است. به طور کلی عموماً انتگرال گیری عمل وارون پذیری است. و وارون آن مشتق است. با استفاده از قانون مشتق انتگرال لایبنیتز، مشتق این انتگرال را حساب می کنیم:

$$\frac{d}{dt} \int_{-\infty}^t e^{-(t-\tau)} x(\tau) d\tau = e^{-(t-t)} x(t) \frac{dt}{dt} - \frac{d(-\infty)}{dt} \dots + \int_{-\infty}^t \frac{d}{dt} e^{-(t-\tau)} x(\tau) d\tau$$

مشتق منفی بی نهایت (صفر در نظر گرفته می شود).

$$= x(t) + \int_{-\infty}^t e^{-(t-\tau)} x(\tau) d\tau$$

در نتیجه معکوس سیستم به صورت زیر است:

$$w(t) = x(t) = y(t) + \frac{dy(t)}{dt}$$

$$y[n] = x[2n] \quad (\text{پ})$$

خیر. دلیل این موضوع هم گسسته بودن سیگنال است. اگر سیگنال پیوسته بود وارون پذیر می شد. اما در حالت گسسته، مثلاً دو سیگنال $x[n] = \delta[n]$ و $x[n] = \delta[n] + \delta[n-1]$ در صورتی که به عنوان ورودی داده شوند خروجیشان به این صورت می شود:

$$\delta[n] \rightarrow y[n] = \delta[2n] = \delta[n]$$

$$\delta[2n] \rightarrow y[n] = \delta[2n] + \delta[2n-1] = \delta[n]$$

در نتیجه وارون پذیر نیست. توجه کنید که $2n-1$ به ازای هیچ مقدار صحیحی برابر 0 نمی شود.

(ت)

$$\sum_{k=-\infty}^n \left(\frac{1}{2}\right)^{n-k} x[k]$$



$$\begin{aligned}
 y[n] &= \sum_{k=-\infty}^{n-1} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-k} x[k] + \left(\frac{1}{2}\right)^{n-n} x[n] \\
 &= \frac{2}{2} \sum_{k=-\infty}^{n-1} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-k} x[k] + x[n] \\
 &= \frac{1}{2} \sum_{k=-\infty}^{n-1} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1-k} x[k] + x[n] \\
 y[n] &= \frac{1}{2} y[n-1] + x[n]
 \end{aligned}$$

در نتیجه تابع معکوس به این صورت است:

$$x[n] = y[n] - \frac{1}{2} y[n-1]$$

البته در صورت سوال حدود بی‌نهایت گذاشته شده‌اند. در صورتی که سوال به این صورت باشد

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-k} x[k]$$

وارون پذیر نخواهد بود. مثلاً فرض کنید که $x[n] = \delta[n]$ باشد. در آن صورت:

$$y[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

خواهد بود.

حال فرض کنید $x[n] = \frac{1}{2} \delta[n-1]$ باشد.

در این صورت:

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-k} \times \frac{1}{2} \delta[k-1] = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \times \frac{1}{2} \delta[1-1] = \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

خواهد بود. یعنی دو سیگنال مختلف خروجی یکسان دادند.



۷ سوال هفتم

$$x(t) = 3 \cos\left(4t + \frac{\pi}{3}\right) \quad (\text{آ})$$

دوره تناوب:

$$T = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$$

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-(2t-n)} \quad (\text{ب})$$

داریم:

$$x(t+T) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-(2(t+T)-n)} = e^{-2T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-(2t-n)}$$

واضح است که این سیگنال یک سیگنال نمایی با مقادیر حقیقی است و j هم در توان آن ظاهر نشده است. در نتیجه متناوب نیست.

$$x(t) = \text{Even}(\cos(4\pi t)u(t)) \quad (\text{پ})$$

$$x(t) = \frac{\cos(4\pi t)u(t) + \cos(-4\pi t)u(-t)}{2} = \cos(4\pi t) \frac{u(t) + u(-t)}{2} = \frac{\cos(4\pi t)}{2}$$

در نتیجه به یک عبارت کسینوسی ساده رسیدیم.

$$T = \frac{2\pi}{4\pi} = \frac{1}{2}$$

$$x[n] = \sin\left(\frac{6\pi}{7}n + 1\right) \quad (\text{ت})$$

باید به گسسته بودن سیگنال توجه کرد.

$$\frac{\frac{2\pi}{1}}{\frac{6\pi}{7}} = \frac{7}{3}$$

از آن جایی که کسر بالا ساده‌ترین شکل این کسر است، دوره تناوب صورت آن یعنی $N = 7$ خواهد بود.

شکل دیگر حل سوال به این صورت است:

$$\frac{6\pi}{7}N = 2\pi m$$

که ساده‌ترین اعدادی که به دست می‌آید $N = 7, m = 3$ است که یعنی دوره تناوب $N = 7$ است.



$$x[n] = 2 \cos\left(\frac{\pi}{4}n\right) + \sin\left(\frac{\pi}{8}n\right) - 2 \cos\left(\frac{\pi}{2}n + \frac{\pi}{6}\right) \quad (\text{ث})$$

$$T_1 = \frac{2\pi}{\frac{\pi}{4}} = 8, T_2 = \frac{2\pi}{\frac{\pi}{8}} = 16, T_3 = \frac{2\pi}{\frac{\pi}{2}} = 4$$

$$N = \text{lcm}(4, 8, 16) = 16$$