سیگنال‌ها و سیستم‌ها

تمرین چهارم

دانشکده مهندسی کامپیوتر

دانشگاه صنعتی شریف

نیم سال دوم ۰۰-۹۹

استاد:

جناب آقای دکتر منظوری شلمانی

نام و نام خانوادگی:

امیرمهدی نامجو - ۹۷۱۰۷۲۱۲

۱ سوال اول

.۱

$$H_1(e^{j\omega}) = \frac{1+\frac{1}{2}e^{-j\omega}}{1+\frac{1}{4}e^{-j\omega}} = \frac{1+\frac{1}{2}\cos(\omega) - j\frac{1}{2}\sin(\omega)}{1+\frac{1}{4}\cos(\omega) - j\frac{1}{4}\sin(\omega)}$$

$$|H_1(e^{jw})| = \frac{(1+\frac{1}{2}\cos(\omega))^2 + (\frac{1}{2}\sin(\omega))^2}{(1+\frac{1}{4}\cos(\omega))^2 + (\frac{1}{4}\sin(\omega))^2}$$

$$= \frac{\frac{5}{4}+\cos(\omega)}{\frac{17}{16}+\frac{1}{2}\cos(\omega)}$$

$$H_2\left(e^{j\omega}\right) = \frac{\frac{1}{2}+e^{-j\omega}}{1+\frac{1}{4}e^{-j\omega}} = \frac{\frac{1}{2}+\cos(\omega) - j\sin(\omega)}{1+\frac{1}{4}\cos(\omega) - j\frac{1}{4}\sin(\omega)}$$

$$\left|H_2\left(e^{j\omega}\right)\right| = \frac{\left(\frac{1}{2}+\cos(\omega)\right)^2 + \sin^2(\omega)}{\left(1+\frac{1}{4}\cos(\omega)\right)^2 + \left(\frac{1}{4}\sin(\omega)\right)^2}$$

$$= \frac{\frac{5}{4}+\cos(\omega)}{\frac{17}{16}+\frac{1}{2}\cos(\omega)}$$

$$|H_1(e^{j\omega})| = |H_2(e^{j\omega})|$$

یعنی برابرند.

.۲

$$\angle H_1(e^{j\omega}) = -\tan^{-1}(\frac{\frac{1}{2}\sin(\omega)}{1+\frac{1}{2}\cos(\omega)}) - (-\tan^{-1}(\frac{\frac{1}{4}\sin(\omega)}{1+\frac{1}{4}\cos(\omega)}))$$

$$= -\tan^{-1}(\frac{\frac{1}{2}\sin(\omega)}{1+\frac{1}{2}\cos(\omega)}) + \tan^{-1}(\frac{\frac{1}{4}\sin(\omega)}{1+\frac{1}{4}\cos(\omega)}))$$

$$\angle H_2(e^{j\omega}) = -\tan^{-1}(\frac{\sin(\omega)}{\frac{1}{2}+\cos(\omega)}) - (-\tan^{-1}(\frac{\frac{1}{4}\sin(\omega)}{1+\frac{1}{4}\cos(\omega)}))$$

$$= -\tan^{-1}(\frac{\sin(\omega)}{\frac{1}{2}+\cos(\omega)}) + \tan^{-1}(\frac{\frac{1}{4}\sin(\omega)}{1+\frac{1}{4}\cos(\omega)}))$$

تاخیر گروه به نوعی منفی نرخ تغییرات فاز نسبت به ω است.

اگر از عامل مشترک دوم در هر دو عبارت برای سادگی محاسبات صرف نظر کنیم و با $\xi(\omega)$ نمایش بدهیم، داریم:

$$\tau_1 = \frac{1 + 2\cos(\omega)}{5 + 4\cos(\omega)} + \xi(\omega)$$

$$\tau_2 = \frac{2(2 + \cos(\omega))}{5 + 4\cos(\omega)} + \xi(\omega)$$

به راحتی با عدد گذاری ساده می‌توان متوجه شد که در بازه $[-\pi, \pi]$:

$$\tau_2 > \tau_1$$

و این موضوع برای سایر تناوب‌ها هم برقرار است. یعنی تاخیر گروه H_2 بزرگتر از H_1 است.

.۳

$$H_1(e^{j\omega}) = \frac{1}{1 + \frac{1}{4}e^{-j\omega}} + \frac{\frac{1}{2}e^{-j\omega}}{1 + \frac{1}{4}e^{-j\omega}}$$

$$h_1[n] = \mathcal{F}^{-1}(H_1(e^{j\omega})) = (-\frac{1}{4})^n u[n] + \frac{1}{2}(-\frac{1}{4})^{n-1}u[n-1]$$

$$H_2(e^{j\omega}) = \frac{1}{2}\frac{1}{1 + \frac{1}{4}e^{-j\omega}} + \frac{e^{-j\omega}}{1 + \frac{1}{4}e^{-j\omega}}$$

$$h_2[n] = \mathcal{F}^{-1}(H_2(e^{j\omega})) = \frac{1}{2}(-\frac{1}{4})^n u[n] + (-\frac{1}{4})^{n-1}u[n-1]$$

برای پاسخ پله داریم:

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty}(-1/4)^m u[m]u[n-m] = \sum_{m=0}^{n}(-1/4)^m = \frac{4 + (-\frac{1}{4})^n}{5}$$

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty}(-1/4)^{m-1} u[m-1]u[n-m] = \sum_{m=1}^{n}(-1/4)^{m-1} = \frac{4 - (-\frac{1}{4})^n}{5}$$

$$s_1[n] = \frac{4 + (-\frac{1}{4})^n}{5} + \frac{1}{2} \times \frac{4 - (-\frac{1}{4})^n}{5}, n \geq 0$$

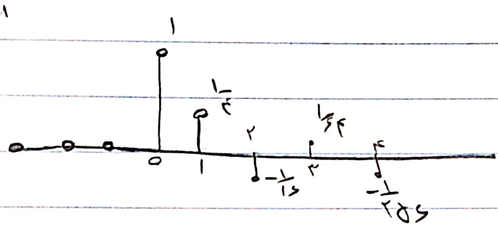
$$s_2[n] = \frac{1}{2} \times \frac{4 + (-\frac{1}{4})^n}{5} + \frac{4 - (-\frac{1}{4})^n}{5}, n \geq 0$$

هر دو مورد برای مقادیر کمتر از 0 برابر 0 هستند.

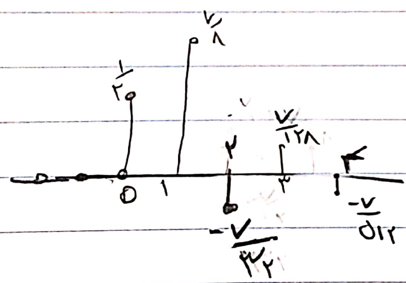
شکل در صفحه بعد قرار دارد. به دلیل کوچک بودن مقادیر، طول خطوط به مقیاس نیست تا بتوان آنان را در صفحه نمایش داد. به همین دلیل هم شکل به صورت کامپیوتری رسم نشده و دستی رسم شده است.

امیرمهدی نامجو ۹۷۱۰۷۲۱۲

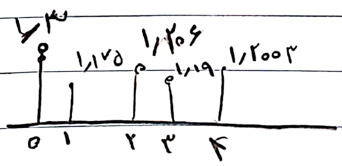
h_1



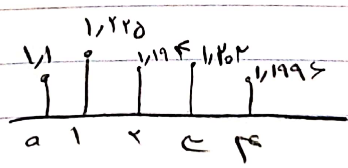
h_2



S_1



S_2



۲ سوال دوم

۱. می‌توانیم فیلتر بالاگذر را به صورت زیر بنویسیم:

$$H(j\omega) = 1 - H_0(j\omega)$$

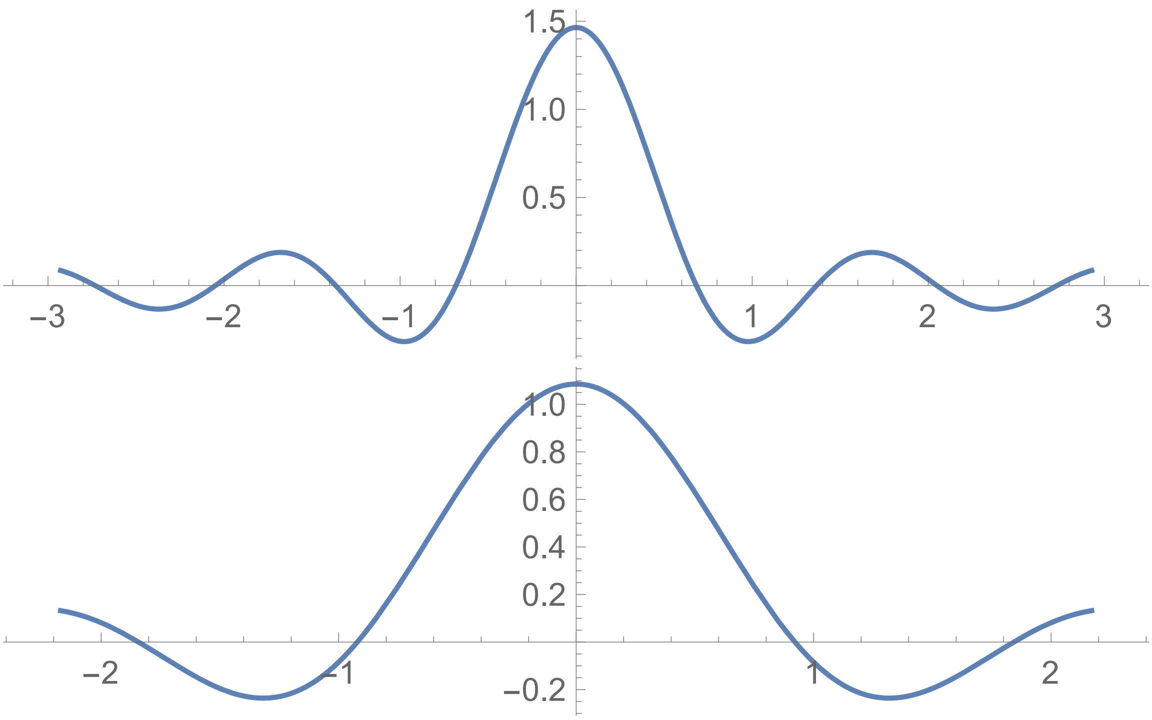
که H_0 مربوط به فیلتر پایین گذر است. با توجه به این که طبق کتاب فرمول مربوط به فیلتر پایین گذر را می‌دانیم داریم:

$$h[n] = \delta(t) - h_0(t) = \delta(t) - \frac{\sin \omega_c t}{\pi t}$$

۲. برای فشردگی نمودار کافیست به رفتار

$$\frac{\sin \omega_c t}{\pi t}$$

نگاه کنیم. دو شکل زیر اولی برای $\omega_c = 4.6$ و دومی برای $\omega_c = 3.41$ هستند. اولین نقاط برخورد نمودار با محور t برابر $\pm\frac{\pi}{\omega_c}$ هستند. با توجه به این موضوع با افزایش ω_c متمرکزتر می‌شود.



۳.

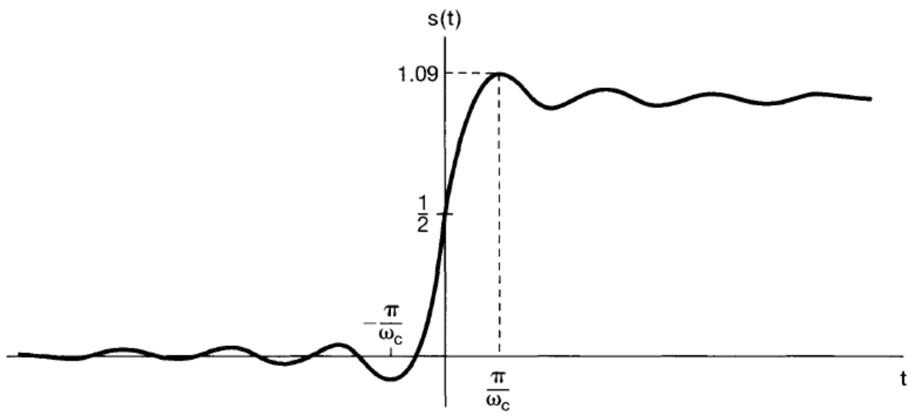
$$s(t) = h(t) \star u(t) = [\delta(t) - h_0(t)] \star u(t) = u(t) - s_0(t)$$

که $s_0(t)$ به شکل کامل در شکل 6.14 کتاب رسم شده است.

$$s(0+) = u(0+) - s_0(0+) = 1 - 0.5 = 0.5$$

$$s(\infty) = u(\infty) - s_0(\infty) = 1 - 1 = 0$$

مقدار $s_0(0+), s_0(\infty)$ از شکل کتاب استخراج شده‌اند.
شکل کتاب در تصویر زیر هم قرار گرفته است:



(a)

۳ سوال سوم

۱. به نظر می‌رسد جزئیات رسم این سوال مربوط به فصل ۱۱ باشد. به هر حال با مطالعه جزوه دینامیک و کنترل ۲ دانشگاه MIT ، به جواب زیر برای این سوال می‌رسیم:

$$\frac{s-2}{(s+3)\left(s^2+2s+17\right)}$$

$$P_1 = -3$$
$$P_{2,3} = -1 \pm 4j$$
$$z_1 = 2$$

مقدار مماس عمودی به صورت زیر است:

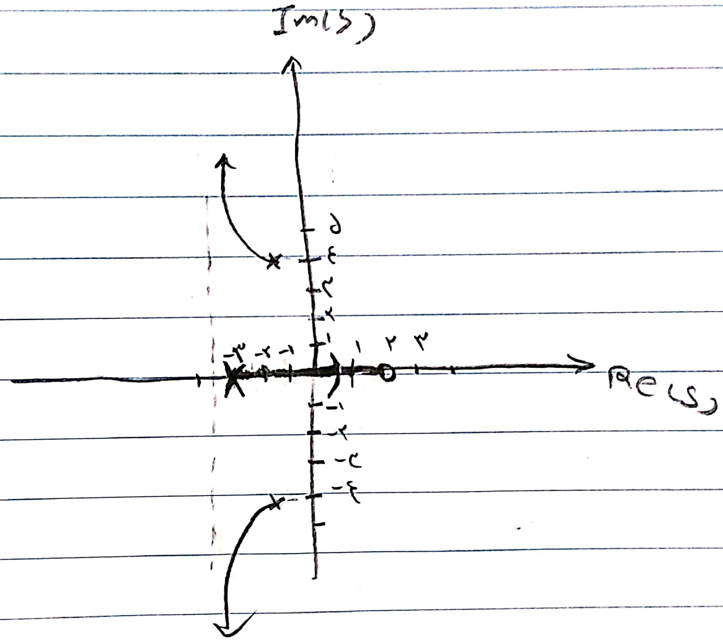
$$\alpha = \frac{\sum Pole - \sum Zero}{Num\ Pole - Num\ Zero} = \frac{(-3-1-1)-(2)}{3-1} = -3.5$$

زاویه مماس به صورت زیر است:

$$\angle\alpha = \frac{(2m+1)\pi}{Num\ Pole - Num\ Zero}; m = 0, \pm1, \pm2, \ldots$$
$$\angle\alpha = \frac{(2m+1)\pi}{2} = \pm\frac{\pi}{2}$$

شکل در صفحه بعد:

۹۷۱۰۷۲۱۲ امیرمهدی نامجو



۲. مخرج کسر Closed Loop تابع انتقال (معادله مشخصه) به صورت زیر است:

$$1+KH(s)=0$$
$$1+K\frac{s-2}{(s+3)\left(s^2+2s+17\right)}=0$$
$$(s+3)\left(s^2+2s+17\right)+K(s-2)=0$$
$$s^3+5s^2+(23+K)s+(51-2K)=0$$

برای معادله

$$s^3+a_2s^2+a_1s+a_0=0$$

شرط پایداری روث-هورویتز به صورت:

$$a_0, a_1, a_2, a_2a_1-a_0>0$$

است.

$$a_0=51-2K>0\to K<25.5$$
$$a_1=23+K>0\to K>-23$$
$$a_1a_2-a_0=7K+64>0\to K>\frac{-64}{7}$$

از صورت سوال هم داشتیم که $K>0$ پس در کل داریم:

$$0<K<25.5$$

۳.

$$H(s)=\frac{2}{51}\left(\frac{s}{2}-1\right)^1\left(\frac{s}{3}+1\right)^{-1}\left[\left(\frac{s}{\sqrt{17}}\right)^2+\frac{2}{17}s+1\right]^{-1}$$

$$Gain=\frac{2}{51}\approx -28dB$$

در بازه $\omega=0$ تا $\omega=2$ زاویه π است و مقدار ثابت.

برای بازه 2 تا 3 ریشه داریم که شیب $20dB/dec$ و زاویه $\pi/2$ دارد.

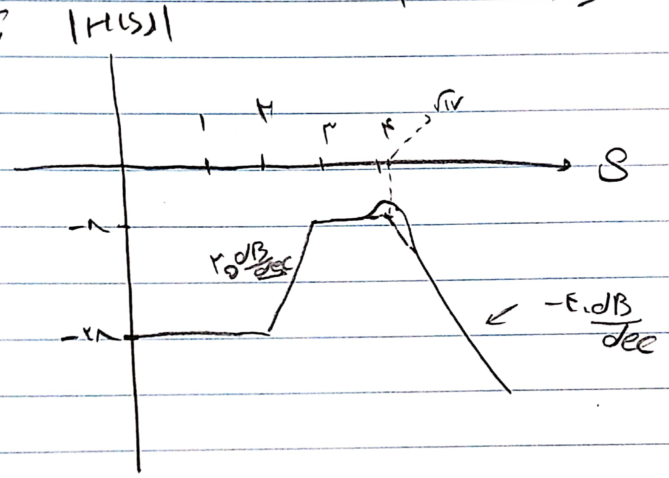
برای بازه 3 تا $\sqrt{17}$ قطب داریم که شیب را $20dB/dec$ پایین آورده و 0 می کند و زاویه هم 0 رادیان.

برای بازه $\sqrt{17}$ تا بی نهایت، قطب Underdamp شده مختلط داریم که $40dB/dec$ شیب را پایین آورده و زاویه $-\pi$ دارد.

شکل اغراق شده رسم شده است تا تغییرات مشخص باشد. سعی شده شکل ها طوری رسم شود که تقریبا نقطه گذار $\sqrt{2}/2$ برای اندازه و نقطه وسط برای زاویه بر اعداد ریشه‌ها و قطب ها که در بالا آورده شده است، منطبق بشود. قطعا ولی به دلیل رسم شدن با دست شکل کاملا دقیق نیست.

امیرمهدی نامجو ۹۷۱۰۷۲۱۲

شکل اصلاح شده



شکل اصلاح شده