Ensaio Sobre a Teoria da Medida

Um olhar detalhado

Pedro Vital

Universidade Federal de Pernambuco (UFPE)

Departamento de Matemática

September 23, 2024

Versão Preliminar
Passivo de erros de digitação e de teoria

Sobre Este Material

Estas notas foram escritas ao longo de 2024 para complementar as reuniões da Iniciação Científica. Referem-se principalmente ao livro “The Elements of Integration and Lebesgue Measure” de Robert G. Bartle e “Real Analysis: Modern Techniques and Their Applications” de Geral B. Folland. Além disso, foram usadas como referências as notas de aula de Daniel Pellegrino da UFPB e Daniel Tausk da USP.

A motivação para estas notas é fornecer uma compreensão clara e concisa dos conceitos fundamentais de Medida e Integração, que são cruciais para várias áreas da matemática e suas aplicações.

Objetivos

Os principais objetivos destas notas são:

1. Complementar o material apresentado nas reuniões da Iniciação Científica.

2. Fornecer uma base sólida para estudos mais avançados.

3. Facilitar a compreensão dos conceitos através de teoremas e demonstrações bem detalhadas.

4. Servir como um recurso de referência para futuros estudos e pesquisas na área.

Estrutura das Notas

Estas notas estão organizadas em capítulos que seguem a estrutura lógica do estudo de Medida e Integração adotada pelo Bartle. Em alguns momentos, a ordem foi substituída por fins didáticos.

Estas notas assumem o domínio de alguns assuntos como Teoria dos Conjuntos, Análise da Reta e noções de topologia.

A fim de tornar a leitura mais dinâmica, conhecimentos necessários foram colocados na Seção XXX, as demonstrações mais extensas foram movidas para a Seção XXX e soluções para vários exercícios podem ser encontradas na Seção XXX.

Versionamento

Estas notas estão na sua versão 0.1. Elas cobrem aproximadamente 50% do curso de medida.

Contents

Chapter 1

Medidas

O nosso objetivo é generalizar a idea de volumes. De forma bem superficial, existe um problema com a nossa intuição de "mensurabilidade". Em particular, existem conjuntos bem patológicos que não conseguimos "medir". Uso aspas aqui para explicitar a informalidade do termo até aqui. Para resolver o problema mencionado, podemos construir uma estrutura chamada de σ-álgebra que definirá o conceito de mensurabilidade.

Com esta estrutura em maõs, vamos discutir algumas das suas propriedades e estudar a sua relação com a topologia de um espaço. Depois disso, construiremos uma função que chamaremos de medida. Esta é a função que vai associar um número a cada conjunto mensurável. Na prática, esta será a nossa generalização para volumes. Por fim, trataremos dos teoremas que nos permitem estender medidas "ruins" para criar medidas bem comportadas.

Dessa forma, podemos resumir os conceitos mais importantes deste capítulo na seguinte lista:

1. Espaços Mensuráveis
2. Medidas
3. Teoremas de Extensão
4. Construção de Medidas

1.1 Estruturas Algébricas

Como prometido, vamos definir o que são as **σ-álgebras**. Poderíamos passar o dia todo falando de estruturas algébricas que antecedem esta construção, mas, para os nossos fins, tudo o que precisamos saber é que uma σ-álgebra de um conjunto é uma família de subconjuntos *fechada pelas operações de complemento e união enumerável. Também pedimos que o conjunto todo pertença a esta família.* Veja a definição rigorosa abaixo.

Definição 1.1.1: σ-álgebra

Seja X um conjunto não vazio e $\Sigma \subset 2^X$. Dizemos que Σ é uma **σ-álgebra** quando Σ é um σ-anel com unidade.

Algumas propriedades são importante, como, por exemplo, o fato de que as σ-álgebras são *fechadas por interseção enumerável.* Para mostrar isso, basta aplicar as Leis de De Morgan. Desse conjunto extenso de propriedades vindas da teoria dos conjuntos, precisamos de duas, que estão enunciadas abaixo.

Teorema 1.1.1: Leis de De Morgan

Seja X um conjunto e $\{O_i\}_{i\in\mathcal{I}} \subset 2^X$. Então,

1. $$\complement\left(\bigcup_{i\in\mathcal{I}} O_i\right) = \bigcap_{i\in\mathcal{I}} \complement\left(O_i\right),$$

2. $$\complement\left(\bigcap_{i\in\mathcal{I}} O_i\right) = \bigcup_{i\in\mathcal{I}} \complement\left(O_i\right).$$

Vamos ver vários exemplos de σ-álgebras. Pule se já estiver familiarizado com o assunto. No apêndice de exercícios resolvidos é provado que cada um destes exemplos é, de fato, uma σ-álgebra.

Exemplo 1.1.1: σ-álgebra Trivial

Seja X um conjunto. Então $\Sigma = \{\varnothing, X\}$ é uma σ-álgebra conhecida como a **σ-álgebra trivial de X.**

Exemplo 1.1.2: σ-álgebra das Partes

Seja X um conjunto. Então $\Sigma = 2^X$ é uma σ-álgebra conhecida como a **σ-álgebra das partes de X.**

Exemplo 1.1.3: σ-álgebra dos Conjuntos Enumeráveis

Seja X um conjunto não enumerável. Então

$$\Sigma = \{E \in X;\ E \text{ é enumerável ou } \complement(E) \text{ é enumerável}\}$$

é uma σ-álgebra conhecida como a **σ-álgebra dos conjuntos enumeráveis e co-enumeráveis de X.**

Para partir para problemas mais interessantes precisamos de uma forma de criar σ-álgebras. Fazemos isso com o conceito de **σ-algebra gerada por conjuntos.** Intuitivamente, esta será a menor σ-álgebra que contém os elementos. Formalizamos esta ideia com a definição abaixo.

Definição 1.1.2: σ-álgebra gerada

Seja $\mathcal{C} \subset 2^X$ uma família de subconjuntos de X. Dizemos que a σ-álgebra $\sigma[\mathcal{C}]$ é a **σ-álgebra gerada por** A quando

1. $\mathcal{C} \subset \sigma[\mathcal{C}]$;
2. Se Σ é uma σ-álgebra de X tal que $\mathcal{C} \subset \Sigma$, então $\sigma[\mathcal{C}] \subset \Sigma$.

A definição acima pode ser bem abstrata e difícil de trabalhar. Assim, introduziremos uma caracterização mais tangível. A fim de chegar nesta caracterização, provemos dois lemas.

Lema 1.1.1: Interseção de σ-álgebras é σ-álgebra

Seja X um conjunto e $\{\Sigma_i\}_{i\in\mathcal{I}}$ uma família de σ-álgebra de X. Então, $\cap_{i\in\mathcal{I}}\Sigma_i$ é uma σ-álgebra de X.

Lema 1.1.2: Unicidade da σ-álgebra gerada

Seja X um conjunto e $\mathcal{C} \subset 2^X$. Então, a σ-álgebra gerada por $\mathcal{C}$ é única.

Com esta ferramenta em mãos, vamos introduzir a Caracterização da σ-álgebra gerada.

Proposição 1.1.1: Caracterização da σ-álgebra gerada

Sejam X um conjunto, $\mathcal{C} \subset 2^X$ e $\mathcal{J} = \{\Sigma_j\}$ a família de todas as σ-álgebras de X que contém $\mathcal{C}$. Então,

$$\sigma[\mathcal{C}] = \bigcap_{\Sigma_j\in\mathcal{J}} \Sigma_j.$$

O resultado abaixo é bem direto, mas útil.

Lema 1.1.3: σ-álgebra Gerada Por Subconjunto

Seja $\mathcal{C} \in 2^X$. Se $E \in \sigma[\mathcal{C}]$, então $\sigma[E] \subset \sigma[\mathcal{C}]$.

Definições Adicionais

Definição 1.1.3: Família Hereditária

Dizemos que uma família de conjuntos $\mathcal{H}$ é um **hereditária** quando ela possui todos os subconjuntos dos seus elementos, isto é,

$$A \in \mathcal{H}, B \subset A \Longrightarrow B \in \mathcal{H}.$$

Definição 1.1.4: Anel de Conjuntos

Dizemos que uma família de conjuntos $\mathcal{R}$ é um **anel** quando ela é fechada pela união e pela diferença, isto é,

(A1) Se $A, B \in \mathcal{R}$, então $A \bigcup B \in \mathcal{R}$.

(A2) Se $A, B \in \mathcal{R}$, então $A \setminus B \in \mathcal{R}$.

Definição 1.1.5: σ-anel

Dizemos que uma família de conjuntos Σ é um **σ-anel** quando ela é um Anel de Conjuntos fechado pela união enumerável, isto é,

$$(A_n)_{n=1}^{\infty} \subset \Sigma \Longrightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \Sigma.$$

Definição 1.1.6: Álgebra de Conjuntos

Seja X um conjunto não vazio e $\mathcal{A} \subset 2^X$. Dizemos que $\mathcal{A}$ é uma **Álgebra de Conjuntos** quando $\mathcal{A}$ é um Anel de Conjuntos com unidade, isto é, $X \in \mathcal{A}$.

Definição 1.1.7: Espaço Mensurável

Seja X um conjunto não vazio e Σ uma σ-álgebra no conjunto X. Então o par ordenado (X, Σ) é chamado de **espaço mensurável** e cada elemento de Σ é dito um conjunto **Σ-mensurável**.

Definição 1.1.8: Topologia

Seja X um conjunto não vazio e $\tau \subset 2^X$. Dizemos que τ é uma **topologia** quando ela contém o conjunto vazio e X, é fechada pela união arbitrária e pela interseção finita, isto é,

(A1) $\varnothing, X \in \tau$.

(A2) Se $\{O_i\}_{i\in\mathcal{I}}$, então $\bigcup_{i\in\mathcal{I}} O_i \in \tau$.

(A3) Se $(O_i)_{i=1}^n$, então $\bigcap_{i=1}^n O_i \in \tau$.

Definição 1.1.9: Espaço Topológico

Seja X um conjunto não vazio e τ uma Topologia no conjunto X. Então o par ordenado (X, τ) é chamado de **espaço topológico** e cada elemento de τ é dito um conjunto **aberto** em X.

Definição 1.1.10: σ-álgebra de Borel

Seja (X, τ) um Espaço Topológico. Então $\mathcal{B}(X) = \sigma[\tau]$ é a **σ-álgebra de Borel**. Os elementos de $\mathcal{B}(X)$ são chamados de **boreleanos**.

Definição 1.1.11: Produto Cartesiano

Seja $\{X_i\}_{i\in\mathcal{I}}$ uma família de conjuntos indexada por $\mathcal{I}$. Definimos o **produto cartesiano** da seguinte forma:

$$\prod_{i\in\mathcal{I}} X_i := \left\{ f : \mathcal{I} \to \bigcup_{i\in\mathcal{I}} X_i ; \forall i \in \mathcal{I}, f(i) \in X_i \right\}.$$

Definição 1.1.12: Projeção

Seja $\{X_i\}_{i\in\mathcal{I}}$ uma família de conjuntos indexada por $\mathcal{I}$. Considere a função

$$\pi_j : \prod_{i\in\mathcal{I}} X_i \to X_j$$

definida por $\pi_j(f) = f(j)$. Chamamos esta função de **j-ésima projeção**.

Definição 1.1.13: σ-álgebra Produto

Seja $\{(X_i, \Sigma_i)\}_{i\in I}$ uma família de Espaço Mensurável indexada por I. Considere a família

$$\mathcal{C} := \left\{\pi_i^{-1}(E_i); E_i \in \Sigma_i, i \in I\right\}.$$

Chamamos $\mathcal{C}$ de **σ-álgebra produto** em $\Pi_{i\in I}X_i$. Denotaremos esta σ-álgebra por $\bigotimes_{i\in I}\Sigma_i$.

Definição 1.1.14: Função Aditiva Contável

Uma função real cujo domínio é uma família de conjuntos, $f : \mathcal{R} \to \overline{\mathbb{R}}$, é dita uma **função aditiva contável** quando satisfaz a seguinte propriedade:

$$\text{Se } (A_i)_{i=1}^{\infty} \subset \mathcal{R} \text{ é dois a dois disjunta, então } f\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_1\right) = \sum_{i=1}^{\infty} f(A_i).$$

Definição 1.1.15: Função Subaditiva Contável

Uma função real cujo domínio é uma família de conjuntos, $f : \mathcal{R} \to \overline{\mathbb{R}}$, é dita uma **função subaditiva contável** quando satisfaz a seguinte propriedade:

$$\text{Se } (A_i)_{i=1}^{\infty} \subset \mathcal{R} \text{ , então } f\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_1\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} f(A_i).$$

Definição 1.1.16: Função Monotônica

Uma função real cujo domínio é uma família de conjuntos, $f : \mathcal{R} \to \overline{\mathbb{R}}$, é dita uma **função monotônica** quando satisfaz a seguinte propriedade:

$$\text{Se } A, B \subset \mathcal{R} \text{ e } A \subseteq B, \text{ então } f(A) \leq f(B).$$

Definição 1.1.17: Pré-medida

Seja X um conjunto não vazio e $\mathcal{R} \subset 2^X$ um Anel de Conjuntos. Dizemos que uma função $\mu_0 : \mathcal{R} \to [0, \infty]$ é uma **pré-medida** quando $\mu_0(\varnothing) = 0$ e ela é uma Função Aditiva Contável.

Definição 1.1.18: Medida

Dizemos que uma Pré-medida é uma **medida** quando o domínio é uma σ-álgebra.

Definição 1.1.19: Espaço de Medida

Seja X um conjunto não vazio, Σ uma σ-álgebra no conjunto X e μ uma Medida definida em Σ. Então a tripla ordenada (X, Σ, μ) é chamada de **espaço de medida**.

Definição 1.1.20: Conjunto de Medida Nula

Seja (X, Σ, μ) um Espaço de Medida. Se $N \in \Sigma$ é tal que $\mu(N) = 0$, então dizemos que N é um **conjunto de medida nula**.

Definição 1.1.21: Para Quase Todo Ponto

Seja (X, Σ, μ) um Espaço de Medida e $P(x)$ uma propriedade dos elementos de X. Se existe um conjunto $N \in \Sigma$ de medida nula tal que P vale para todo $x \in N^{\complement}$, então dizemos que P vale **para quase todo ponto**, o que abreviaremos para (μ-qtp).

Definição 1.1.22: Espaço de Medida Completa

Seja (X, Σ, μ) um Espaço de Medida. Dizemos que ele é um **espaço de medida completa** quando a família dos Conjunto de Medida Nula, $\mathcal{N}_\mu$, é Família Hereditária.

Definição 1.1.23: Espaço de Medida Completa

Seja $\mathcal{H}$ um Anel de Conjuntos que é Família Hereditária. Dizemos que uma função $\mu^* : \mathcal{H} \to [0, \infty]$ é uma **medida exterior** quando $\mu^*(\varnothing) = 0$, ela é Função Monotônica e Função Subaditiva Contável .

Definição 1.1.24: Medida Finita

Seja μ uma Medida em um Espaço de Medida (X, Σ). Dizemos que μ é uma **medida finita** quando $\mu(X) < \infty$.

Definição 1.1.25: Medida σ-finita

Seja μ uma Medida em um Espaço de Medida (X, Σ). Dizemos que μ é uma **medida σ-finita** quando existe $(E_i)_{i=1}^{\infty}$ com $\mu(E_i) < \infty$ para todo $i \geq 1$ tal que $X = \cup_{i=1}^{\infty} E_i$.