Ensaio Sobre a Teoria da Medida

Um olhar detalhado

Pedro Vital

Universidade Federal de Pernambuco (UFPE)

Departamento de Matemática

September 24, 2024

Versão Preliminar
Passivo de erros de digitação e de teoria

Sobre Este Material

Estas notas foram escritas ao longo de 2024 para complementar as reuniões da Iniciação Científica. Referem-se principalmente ao livro "The Elements of Integration and Lebesgue Measure" de Robert G. Bartle e "Real Analysis: Modern Techniques and Their Applications" de Geral B. Folland. Além disso, foram usadas como referências as notas de aula de Daniel Pellegrino da UFPB e Daniel Tausk da USP.

A motivação para estas notas é fornecer uma compreensão clara e concisa dos conceitos fundamentais de Medida e Integração, que são cruciais para várias áreas da matemática e suas aplicações.

Objetivos

Os principais objetivos destas notas são:

1. Complementar o material apresentado nas reuniões da Iniciação Científica.
2. Fornecer uma base sólida para estudos mais avançados.
3. Facilitar a compreensão dos conceitos através de teoremas e demonstrações bem detalhadas.
4. Servir como um recurso de referência para futuros estudos e pesquisas na área.

Estrutura das Notas

Estas notas estão organizadas em capítulos que seguem a estrutura lógica do estudo de Medida e Integração adotada pelo Bartle. Em alguns momentos, a ordem foi substituída por fins didáticos.

Estas notas assumem o domínio de alguns assuntos como Teoria dos Conjuntos, Análise da Reta e noções de topologia.

A fim de tornar a leitura mais dinâmica, conhecimentos necessários foram colocados na Seção XXX, as demonstrações mais extensas foram movidas para a Seção XXX e soluções para vários exercícios podem ser encontradas na Seção XXX.

Versionamento

Estas notas estão na sua versão 0.1. Elas cobrem aproximadamente 50% do curso de medida.

Contents

Chapter 1

Medidas

O nosso objetivo é generalizar a idea de volumes. De forma bem superficial, existe um problema com a nossa intuição de "mensurabilidade". Em particular, existem conjuntos bem patológicos que não conseguimos "medir". Uso aspas aqui para explicitar a informalidade do termo até aqui. Para resolver o problema mencionado, podemos construir uma estrutura chamada de σ-álgebra que definirá o conceito de mensurabilidade.

Com esta estrutura em maõs, vamos discutir algumas das suas propriedades e estudar a sua relação com a topologia de um espaço. Depois disso, construiremos uma função que chamaremos de medida. Esta é a função que vai associar um número a cada conjunto mensurável. Na prática, esta será a nossa generalização para volumes. Por fim, trataremos dos teoremas que nos permitem estender medidas "ruins" para criar medidas bem comportadas.

Dessa forma, podemos resumir os conceitos mais importantes deste capítulo na seguinte lista:

1. Espaços Mensuráveis
2. Medidas
3. Teoremas de Extensão
4. Construção de Medidas

1.1 Espaços Mensuráveis

O que são σ-álgebras ?

Como prometido, vamos definir o que são as **σ-álgebras** . Poderíamos passar o dia todo falando de estruturas algébricas que antecedem esta construção, mas, para os nossos fins, tudo o que precisamos saber é que uma σ-álgebra de um conjunto é uma família de subconjuntos *fechada pelas operações de complemento e união enumerável. Também pedimos que o conjunto todo pertença a esta família.* Veja a definição rigorosa abaixo.

Definição 1.1.1: σ-álgebra

Seja X um conjunto não vazio e $\Sigma \subset 2^X$. Dizemos que Σ é uma **σ-álgebra** quando Σ é um σ-anel com unidade.

Algumas propriedades que decorrem da 1.1.1 são importantes, como, por exemplo, o fato de que as σ-álgebras são *fechadas por interseção enumerável.* Para mostrar isso, basta aplicar as Leis de De Morgan. Desse conjunto extenso de propriedades vindas da teoria dos conjuntos, precisamos de duas, que estão enunciadas abaixo.

Teorema 1.1.1: Leis de De Morgan

Seja X um conjunto e $\{O_i\}_{i\in\mathcal{I}} \subset 2^X$. Então,

1. $$\complement\left(\bigcup_{i\in\mathcal{I}} O_i\right) = \bigcap_{i\in\mathcal{I}} \complement\left(O_i\right),$$

2. $$\complement\left(\bigcap_{i\in\mathcal{I}} O_i\right) = \bigcup_{i\in\mathcal{I}} \complement\left(O_i\right).$$

Exemplos de σ-álgebras

Vamos ver vários exemplos de σ-álgebras . Pule se já estiver familiarizado com o assunto. No apêndice de exercícios resolvidos é provado que cada um destes exemplos é, de fato, uma σ-álgebra .

Exemplo 1.1.1: σ-álgebra Trivial

Seja X um conjunto. Então $\Sigma = \{\varnothing, X\}$ é uma σ-álgebra conhecida como a **σ-álgebra trivial de X.**

Exemplo 1.1.2: σ-álgebra das Partes

Seja X um conjunto. Então $\Sigma = 2^X$ é uma σ-álgebra conhecida como a **σ-álgebra das partes de X.**

Exemplo 1.1.3: σ-álgebra dos Conjuntos Enumeráveis

Seja X um conjunto não enumerável. Então

$$\Sigma = \{E \in X;\ E \text{ é enumerável ou } \complement(E) \text{ é enumerável}\}$$

é uma σ-álgebra conhecida como a **σ-álgebra dos conjuntos enumeráveis e co-enumeráveis de X**.

Como criar σ-álgebras ?

Para partir para problemas mais interessantes precisamos de uma forma de criar σ-álgebras . Fazemos isso com o conceito de **σ-álgebra gerada por conjuntos.** Intuitivamente, esta será a menor σ-álgebra que contém os elementos. Formalizamos esta ideia com a definição abaixo.

Definição 1.1.2: σ-álgebra gerada

Seja $\mathcal{C} \subset 2^X$ uma família de subconjuntos de X. Dizemos que a σ-álgebra $\sigma[\mathcal{C}]$ é a **σ-álgebra gerada por** A quando

1. $\mathcal{C} \subset \sigma[\mathcal{C}]$;
2. Se Σ é uma σ-álgebra de X tal que $\mathcal{C} \subset \Sigma$, então $\sigma[\mathcal{C}] \subset \Sigma$.

A definição acima pode ser bem abstrata e difícil de trabalhar. Assim, introduziremos uma caracterização mais tangível. A fim de chegar nesta caracterização, provemos dois lemas.

Lema 1.1.1: Interseção de σ-álgebras é σ-álgebra

Seja X um conjunto e $\{\Sigma_i\}_{i\in\mathcal{I}}$ uma família de σ-álgebra de X. Então, $\cap_{i\in\mathcal{I}}\Sigma_i$ é uma σ-álgebra de X.

Lema 1.1.2: Unicidade da σ-álgebra gerada

Seja X um conjunto e $\mathcal{C} \subset 2^X$. Então, a σ-álgebra gerada por $\mathcal{C}$ é única.

Com esta ferramenta em mãos, vamos introduzir a Caracterização da σ-álgebra gerada.

Proposição 1.1.1: Caracterização da σ-álgebra gerada

Sejam X um conjunto, $\mathcal{C} \subset 2^X$ e $\mathcal{J} = \{\Sigma_j\}$ a família de todas as σ-álgebras de X que contém $\mathcal{C}$. Então,

$$\sigma[\mathcal{C}] = \bigcap_{\Sigma_j \in \mathcal{J}} \Sigma_j.$$

O resultado abaixo é bem direto, mas útil.

Lema 1.1.3: σ-álgebra Gerada Por Subconjunto

Seja $\mathcal{C} \in 2^X$. Se $E \in \sigma[\mathcal{C}]$, então $\sigma[E] \subset \sigma[\mathcal{C}]$.

σ-álgebras de Borel

Agora que temos uma ferramenta poderosa para criar σ-álgebras , vamos estudar o que acontece quando estudamos espaços com mais estrutura, como a reta. Lembre que o nosso objetivo é generalizar a ideia do que é uma "medida" ou "volume", portanto, é bastante natural estudar σ-álgebras em $\mathbb{R}$ e $\mathbb{R}^n$.

Definição 1.1.3: σ-álgebra de Borel

Seja (X, τ) um Espaço Topológico. Então $\mathcal{B}(X) = \sigma[\tau]$ é a **σ-álgebra de Borel**. Os elementos de $\mathcal{B}(X)$ são chamados de **boreleanos**.

Pela Definição 1.1.3, podemos tomar qualquer base da reta para formar os boreleanos em $\mathbb{R}$. Veja o exercício X. Criar uma σ-álgebra de $\mathbb{R}$ (ou em $\overline{\mathbb{R}}$) é bem direto, mas dependemos de uma abordagem mais cautelosa para construir uma σ-álgebra em R^n.

Para fazer essa construção, vamos começar definindo um **espaço mensurável**. Da mesma forma que podemos tomar um par ordenado de conjunto e subconjuntos para formar um Espaço Topológico, podemos tomar um par ordenado para formar um Espaço Mensurável.

Definição 1.1.4: Espaço Mensurável

Seja X um conjunto não vazio e Σ uma σ-álgebra no conjunto X. Então o par ordenado (X, Σ) é chamado de **espaço mensurável** e cada elemento de Σ é dito um conjunto **Σ-mensurável**.

A construção geral é bem parecida com a definição da topologia produto.

Definição 1.1.5: σ-álgebra Produto

Seja $\{(X_i, \Sigma_i)\}_{i\in I}$ uma família de Espaço Mensurável indexada por I. Considere a família

$$\mathcal{C} := \left\{\pi_i^{-1}(E_i); E_i \in \Sigma_i, i \in I\right\}.$$

Chamamos $\mathcal{C}$ de **σ-álgebra produto** em $\Pi_{i\in I} X_i$. Denotaremos esta σ-álgebra por $\bigotimes_{i\in I} \Sigma_i$.

Esta primeira definição é bastante abstrata. Por um lado, as abstrações nos permitem trabalhar em casos gerais que podem nos revelar propriedades universais. Por outro lado, essas abstrações também criam obstáculos quanto a manipulação dessas estruturas.

A fim de recuperar alguma estrutura, vamos dar uma olhada de perto no que acontece quando a família é indexada por um conjunto enumerável.

Proposição 1.1.2: σ-álgebra produto de família enumerável

Seja I um conjunto enumerável e $\{X_i\}_{i\in I}$ uma família de espaços mensuráveis. Então

$$\bigotimes_{i\in I} \Sigma_i = \sigma\left[\left\{\prod_{i\in I} E_i; E_i \in \Sigma_i\right\}\right].$$

A proposição abaixo nos garante que podemos olhar apenas para os geradores das σ-álgebras para construir o produto.

Proposição 1.1.3: σ-álgebra produto de famílias geradas por conjuntos

Seja $\{X_i\}_{i\in I}$ uma família de espaços mensuráveis tal que cada $\Sigma_i = \sigma[\mathcal{C}_i]$. Então

$$\bigotimes_{i\in I} \Sigma_i = \sigma\left[\left\{\pi_i^{-1}(E_i); E_i \in \mathcal{C}_i, i \in I\right\}\right].$$

Corolário 1.1.1: σ-álgebra produto de família enumerável geradas

Seja I um conjunto enumerável e $\{X_i\}_{i\in I}$ uma família de espaços mensuráveis tal que cada $\Sigma_i = \sigma[\mathcal{C}_i]$. Então $\bigotimes_{i\in I} \Sigma_i$ é a σ-álgebra gerada por

$$\bigotimes_{i\in I} \Sigma_i = \sigma\left[\left\{\prod_{i\in I} E_i; E_i \in \mathcal{C}_i\right\}\right].$$

Estamos descendo o grau de generalidade para chegar em coisas cada vez mais concretas. Vamos passar agora de espaços mensuráveis abstratos para espaços métricos. Aqui, entenderemos os espaços métricos como espaços mensuráveis onde a distância induz uma topologia, dando origem a um espaço topológico, e a topologia induz uma σ-álgebra de Borel, dando origem a um espaço mensurável.

Proposição 1.1.4: σ-álgebra produto de família de espaços métricos

Seja $\{X_i\}_{i=1}^n$ uma família finita de espaços métricos com a topologia, τ_i, induzida pela distância. Então

$$\bigotimes_{i=1}^n \mathcal{B}(X_i) \subseteq \mathcal{B}\left(\prod_{i=1}^n X_i\right).$$

Se colocarmos uma hipótese a mais conseguimos garantir a igualdade. Veja o corolário abaixo.

Corolário 1.1.2: σ-álgebra produto de espaços métricos separáveis

Sejam $\{X_i\}_{i=1}^n$ e X como na Proposição 1.1.4. Se cada X_i for separável, então $\bigotimes_{i=1}^n \mathcal{B}(X_i) = \mathcal{B}(X)$.

$$\bigotimes_{i=1}^n \mathcal{B}(X_i) = \mathcal{B}\left(\prod_{i=1}^n X_i\right).$$

Toda essa construção nos leva a um resultado importante.

Corolário 1.1.3: σ-álgebra produto de $\mathbb{R}^n$

$$\mathcal{B}(\mathbb{R}^n) = \bigotimes_{i=1}^n \mathcal{B}(\mathbb{R}).$$

Revisitando os Resultados

Desta seção, podemos destacar algumas definições e resultados essenciais. Quanto a σ-álgebra, destacamos as operações pelas quais esta família é fechada: complemento, união enumerável, interseção enumerável. Além disso, lembramos da importância do conceito da σ-álgebra gerada, principalmente no que tange a definição da σ-álgebra de Borel. Por fim, o resultado mais importante desta seção, a construção da σ-álgebra produto de $\mathbb{R}^n$, nos diz que os conjuntos mensuráveis de $\mathbb{R}^n$ são gerados pelo produto cartesiano de conjuntos mensuráveis de $\mathbb{R}$.

1.2 Medidas

O que são medidas?

Com a estrutura dos Espaço Mensurável em mãos, vamos construir os espaços de medida, isto é, aqueles conjuntos onde, além da noção de mensurabilidade, é possível atribuir um valor a um dado conjunto. Futuramente, isto nos permitirá atribuir um valor a uma função mensurável.

Em linhas gerais, uma **medida** é uma Função Aditiva Contável não negativa onde o domínio é uma σ-álgebra. Existe uma função mais fraca que esta, chamada de **pré-medida**. Observe as definições abaixo.

Definição 1.2.1: Pré-medida

Seja X um conjunto não vazio e $\mathcal{R} \subset 2^X$ um Anel de Conjuntos. Dizemos que uma função $\mu_0 : \mathcal{R} \to [0, \infty]$ é uma **pré-medida** quando $\mu_0(\varnothing) = 0$ e ela é uma Função Aditiva Contável.

Definição 1.2.2: Medida

Dizemos que uma Pré-medida é uma **medida** quando o domínio é uma σ-álgebra.

Anteriomente, definimos os Espaço Mensurável com um par ordenado. Desta vez, vamos definir os Espaço de Medida a partir de uma tripla dada por um conjunto, uma família de subconjuntos e uma Medida.

Definição 1.2.3: Espaço de Medida

Seja X um conjunto não vazio, Σ uma σ-álgebra no conjunto X e μ uma Medida definida em Σ. Então a tripla ordenada (X, Σ, μ) é chamada de **espaço de medida**.

Exemplos de Medidas

Vamos ver alguns exemplos de medidas que serão úteis mais tarde. Pule se estiver familiarizado com o assunto. No apêndice de exercícios resolvidos é provado que cada um destes exemplos é, de fato, uma medida.

Exemplo 1.2.1: Medida de Contagem

Seja (X, Σ) um Espaço de Medida onde X é um conjunto não enumerável e Σ é a σ-álgebra dos Conjuntos Enumeráveis. A função

$$\mu(E) = \begin{cases} \#E, & \text{se } E \text{ é finito,} \\ +\infty, & \text{se } E \text{ é infinito,} \end{cases}$$

é uma medida em X.

Exemplo 1.2.2: Medida de Dirac

Sejam $(X, 2^X)$ um Espaço de Medida e $x_0 \in X$ um ponto fixado. A função

$$\mu(E) = \begin{cases} 1, & \text{se } x_0 \in E, \\ 0, & \text{se } x_0 \notin E, \end{cases}$$

é uma medida em X.

Propriedades das Medidas

As medidas obedecem a algumas propriedades naturais que serão úteis no futuro. Elas são naturais no sentido de que seguem uma lógica intuitiva como, por exemplo, um conjunto que contém outro possui uma medida maior que este. Estudemos estas propriedades.

Medidas têm 4 propriedades importantes que serão enunciadas: medidas são funções monotônicas crescentes e subaditivas contáveis. Além disso, elas satisfazem duas propriedades conhecidas como continuitdade por baixo e por cima.

Proposição 1.2.1: Monotonicidade da Medida

Seja (X, Σ, μ) um espaço de medida. Então, μ é uma Função Monotônica.

Corolário 1.2.1: Medida da Diferença

Nas condições da Proposição 1.2.1, se $E, F \in \Sigma$ e $\mu(E) < \infty$, então

$$\mu(F \setminus E) = \mu(F) - \mu(E).$$

Proposição 1.2.2: Subaditividade da medida

Seja (X, Σ, μ) um espaço de medida. Então μ é uma Função Subaditiva Contável.

Proposição 1.2.3: Continuidade por baixo

Seja (X, Σ, μ) um espaço de medida. Se $(E_n)_{n=1}^{\infty} \subset \Sigma$ é uma sequência crescente, então

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \lim \mu(E_n).$$

Proposição 1.2.4: Continuidade por cima

Seja (X, Σ, μ) um espaço de medida. Se $(F_n)_{n=1}^{\infty} \subset \Sigma$ é uma sequência decrescente e a medida de $\mu(F_1)$ é finita, então

$$\mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n\right) = \lim \mu(F_n).$$

Conjuntos de Medida Nula e Medidas Completas

Na hora de trabalhar com integrais e espaços de funções, uma categoria bem particular de conjuntos costuma gerar problemas. Estes são os conjuntos de medida nula, aqueles com uma medida insignificante. Pense, por exemplo na medida de um único ponto na reta real. A fim de evitar problemas técnicos mais adiante, mostraremos que existe uma medida que lida com esses pontos problemáticos de uma forma melhor. Mais ainda, veremos que qualquer medida pode ser estendida de forma a evitar esses problemas técnicos.

Vamos começar definindo o que é um conjunto de medida nula.

Definição 1.2.4: Conjunto de Medida Nula

Seja (X, Σ, μ) um Espaço de Medida. Se $N \in \Sigma$ é tal que $\mu(N) = 0$, então dizemos que N é um **conjunto de medida nula**.

Paremos para refletir um pouco. Se um conjunto tem medida nula, ele não deveria afetar em nada o comportamento do nosso objeto de estudo. Assim, se uma certa propriedade vale dentro desse conjunto, é como se ela não existisse. Da mesma forma, se uma propriedade não vale sempre, mas vale nos pontos de interesse, então é como se ela valesse sempre. De fato, diremos que ela vale quase sempre ou para quase todo ponto.

Definição 1.2.5: Para Quase Todo Ponto

Seja (X, Σ, μ) um Espaço de Medida e $P(x)$ uma propriedade dos elementos de X. Se existe um conjunto $N \in \Sigma$ de medida nula tal que P vale para todo $x \in N^{\complement}$, então dizemos que P vale **para quase todo ponto**, o que abreviaremos para (μ-qtp).

Observação 1.2.1: Subconjuntos podem não ser mensuráveis

Seja $N \in \Sigma$ um conjunto de medida nula. Então, todo $A \subset N$, pela monotonicidade da medida, também tem medida nula. No entanto, A não precisa pertencer a Σ.

Isto pode ser um problema na demonstração de algumas proposições. Existem medidas bem comportadas que evitam esses problemas. Elas são chamadas de medidas completetas.

Definição 1.2.6: Espaço de Medida Completa

Seja (X, Σ, μ) um Espaço de Medida. Dizemos que ele é um **espaço de medida completa** quando a família dos Conjunto de Medida Nula, $\mathcal{N}_\mu$, é Família Hereditária.

Nesta última etapa do capítulo, vamos estudar formas de estender uma dada medida (ou pré-medida) para criar uma medida bem comportada.

Revisitando os Resultados

Antes disso, vamos rever os principais conceitos sobre as medidas. Vimos que medidas são funções não negativas, monotônicas crescente, aditiva e subaditiva contaveis que satisfazem mais duas propriedades de continuidade. Em linhas gerais, estas medidas reproduzem a nossa intuição do que seria o tamanho de um conjunto. Também vimos que alguns conjuntos podem ter medida nula e que certos espaços de medida podem ser completos. O que vamos ver agora é como podemos estender as medidas para criar uma medida bem comportada.

1.3 Teoremas de Extensão

Completamento de Medida

O nosso objetivo aqui vai ser partir de um espaço de medida “ruim” e estender a sua σ-álgebra para que ela inclua todos os subconjuntos dos Conjunto de Medida Nula. Claro, também precisaremos definir uma nova medida para o novo domínio. Essa função será uma extensão da primeira no sentido de que, quando ela estiver restrita a σ-álgebra inicial, ela coincide com a primeira medida. Vejamos o teorema.

Teorema 1.3.1: Completamento de Medida

Seja (X, Σ, μ) um espaço de medida. Existe uma única $\overline{\mu}$, extensão de μ a uma σ-álgebra $\overline{\Sigma}$, tal que $(X, \overline{\Sigma}, \overline{\mu})$ é um Espaço de Medida Completa .

1.4 Construção de Medidas

Definições Adicionais

Definição 1.4.1: Família Hereditária

Dizemos que uma família de conjuntos $\mathcal{H}$ é um **hereditária** quando ela possui todos os subconjuntos dos seus elementos, isto é,

$$A \in \mathcal{H}, B \subset A \Longrightarrow B \in \mathcal{H}.$$

Definição 1.4.2: Anel de Conjuntos

Dizemos que uma família de conjuntos $\mathcal{R}$ é um **anel** quando ela é fechada pela união e pela diferença, isto é,

(A1) Se $A, B \in \mathcal{R}$, então $A \bigcup B \in \mathcal{R}$.

(A2) Se $A, B \in \mathcal{R}$, então $A \setminus B \in \mathcal{R}$.

Definição 1.4.3: σ-anel

Dizemos que uma família de conjuntos Σ é um **σ-anel** quando ela é um Anel de Conjuntos fechado pela união enumerável, isto é,

$$(A_n)_{n=1}^{\infty} \subset \Sigma \Longrightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \Sigma.$$

Definição 1.4.4: Álgebra de Conjuntos

Seja X um conjunto não vazio e $\mathcal{A} \subset 2^X$. Dizemos que $\mathcal{A}$ é uma **Álgebra de Conjuntos** quando $\mathcal{A}$ é um Anel de Conjuntos com unidade, isto é, $X \in \mathcal{A}$.

Definição 1.4.5: Topologia

Seja X um conjunto não vazio e $\tau \subset 2^X$. Dizemos que τ é uma **topologia** quando ela contém o conjunto vazio e X, é fechada pela união arbitrária e pela interseção finita, isto é,

(A1) $\varnothing, X \in \tau$.

(A2) Se $\{O_i\}_{i\in\mathcal{I}}$, então $\bigcup_{i\in\mathcal{I}} O_i \in \tau$.

(A3) Se $(O_i)_{i=1}^n$, então $\bigcap_{i=1}^n O_i \in \tau$.

Definição 1.4.6: Espaço Topológico

Seja X um conjunto não vazio e τ uma Topologia no conjunto X. Então o par ordenado (X, τ) é chamado de **espaço topológico** e cada elemento de τ é dito um conjunto **aberto** em X.

Definição 1.4.7: Produto Cartesiano

Seja $\{X_i\}_{i\in\mathcal{I}}$ uma família de conjuntos indexada por $\mathcal{I}$. Definimos o **produto cartesiano** da seguinte forma:

$$\prod_{i\in\mathcal{I}} X_i := \left\{ f : \mathcal{I} \to \bigcup_{i\in\mathcal{I}} X_i ; \forall i \in \mathcal{I}, f(i) \in X_i \right\}.$$

Definição 1.4.8: Projeção

Seja $\{X_i\}_{i\in\mathcal{I}}$ uma família de conjuntos indexada por $\mathcal{I}$. Considere a função

$$\pi_j : \prod_{i\in\mathcal{I}} X_i \to X_j$$

definida por $\pi_j(f) = f(j)$. Chamamos esta função de j**-ésima projeção**.

Definição 1.4.9: Função Aditiva Contável

Uma função real cujo domínio é uma família de conjuntos, $f : \mathcal{R} \to \overline{\mathbb{R}}$, é dita uma **função aditiva contável** quando satisfaz a seguinte propriedade:

$$\text{Se } (A_i)_{i=1}^\infty \subset \mathcal{R} \text{ é dois a dois disjunta, então } f\left(\bigcup_{i=1}^\infty A_1\right) = \sum_{i=1}^\infty f(A_i).$$

Definição 1.4.10: Função Subaditiva Contável

Uma função real cujo domínio é uma família de conjuntos, $f : \mathcal{R} \to \overline{\mathbb{R}}$, é dita uma **função subaditiva contável** quando satisfaz a seguinte propriedade:

$$\text{Se } (A_i)_{i=1}^{\infty} \subset \mathcal{R}\ , \text{ então } f\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_1\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} f(A_i).$$

Definição 1.4.11: Função Monotônica

Uma função real cujo domínio é uma família de conjuntos, $f : \mathcal{R} \to \overline{\mathbb{R}}$, é dita uma **função monotônica** quando satisfaz a seguinte propriedade:

$$\text{Se } A, B \subset \mathcal{R} \text{ e } A \subseteq B, \text{ então } f(A) \leq f(B).$$

Definição 1.4.12: Medida Exterior

Seja $\mathcal{H}$ um Anel de Conjuntos que é Família Hereditária. Dizemos que uma função $\mu^* : \mathcal{H} \to [0, \infty]$ é uma **medida exterior** quando $\mu^*(\varnothing) = 0$, ela é Função Monotônica e Função Subaditiva Contável .

Definição 1.4.13: Medida Finita

Seja μ uma Medida em um Espaço de Medida (X, Σ). Dizemos que μ é uma **medida finita** quando $\mu(X) < \infty$.

Definição 1.4.14: Medida σ-finita

Seja μ uma Medida em um Espaço de Medida (X, Σ). Dizemos que μ é uma **medida σ-finita** quando existe $(E_i)_{i=1}^{\infty}$ com $\mu(E_i) < \infty$ para todo $i \geq 1$ tal que $X = \cup_{i=1}^{\infty} E_i$.