Ensaio Sobre a Teoria da Medida

Um olhar detalhado

Pedro Vital

Universidade Federal de Pernambuco (UFPE)

Departamento de Matemática

September 10, 2024

Versão Preliminar
Passivo de erros de digitação e de teoria

Sobre Este Material

Estas notas foram escritas ao longo de 2024 para complementar as reuniões da Iniciação Científica. Referem-se principalmente ao livro “The Elements of Integration and Lebesgue Measure” de Robert G. Bartle e “Real Analysis: Modern Techniques and Their Applications” de Geral B. Folland. Além disso, foram usadas como referências as notas de aula de Daniel Pellegrino da UFPB e Daniel Tausk da USP.

A motivação para estas notas é fornecer uma compreensão clara e concisa dos conceitos fundamentais de Medida e Integração, que são cruciais para várias áreas da matemática e suas aplicações.

Objetivos

Os principais objetivos destas notas são:

1. Complementar o material apresentado nas reuniões da Iniciação Científica.

2. Fornecer uma base sólida para estudos mais avançados.

3. Facilitar a compreensão dos conceitos através de teoremas e demonstrações bem detalhadas.

4. Servir como um recurso de referência para futuros estudos e pesquisas na área.

Estrutura das Notas

Estas notas estão organizadas em capítulos que seguem a estrutura lógica do estudo de Medida e Integração adotada pelo Bartle. Em alguns momentos, a ordem foi substituída por fins didáticos.

Estas notas assumem o domínio de alguns assuntos como Teoria dos Conjuntos, Análise da Reta e noções de topologia.

A fim de tornar a leitura mais dinâmica, conhecimentos necessários foram colocados na Seção XXX, as demonstrações mais extensas foram movidas para a Seção XXX e soluções para vários exercícios podem ser encontradas na Seção XXX.

Versionamento

Estas notas estão na sua versão 0.1. Elas cobrem aproximadamente 50% do curso de medida.

Contents

Chapter 1

Medidas

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Ut purus elit, vestibulum ut, placerat ac, adipiscing vitae, felis. Curabitur dictum gravida mauris. Nam arcu libero, nonummy eget, consectetuer id, vulputate a, magna. Donec vehicula augue eu neque. Pellentesque habitant morbi tristique senectus et netus et malesuada fames ac turpis egestas. Mauris ut leo. Cras viverra metus rhoncus sem. Nulla et lectus vestibulum urna fringilla ultrices. Phasellus eu tellus sit amet tortor gravida placerat. Integer sapien est, iaculis in, pretium quis, viverra ac, nunc. Praesent eget sem vel leo ultrices bibendum. Aenean faucibus. Morbi dolor nulla, malesuada eu, pulvinar at, mollis ac, nulla. Curabitur auctor semper nulla. Donec varius orci eget risus. Duis nibh mi, congue eu, accumsan eleifend, sagittis quis, diam. Duis eget orci sit amet orci dignissim rutrum.

Nam dui ligula, fringilla a, euismod sodales, sollicitudin vel, wisi. Morbi auctor lorem non justo. Nam lacus libero, pretium at, lobortis vitae, ultricies et, tellus. Donec aliquet, tortor sed accumsan bibendum, erat ligula aliquet magna, vitae ornare odio metus a mi. Morbi ac orci et nisl hendrerit mollis. Suspendisse ut massa. Cras nec ante. Pellentesque a nulla. Cum sociis natoque penatibus et magnis dis parturient montes, nascetur ridiculus mus. Aliquam tincidunt urna. Nulla ullamcorper vestibulum turpis. Pellentesque cursus luctus mauris.

1.1 Estruturas Algébricas

Definição 1.1.1: Família Hereditária

Dizemos que uma família de conjuntos $\mathcal{H}$ é um **hereditária** quando ela possui todos os subconjuntos dos seus elementos, isto é,

$$A \in \mathcal{H}, B \subset A \implies B \in \mathcal{H}.$$

Definição 1.1.2: Anel de Conjuntos

Dizemos que uma família de conjuntos $\mathcal{R}$ é um **anel** quando ela é fechada pela união e pela diferença, isto é,

(A1) Se $A, B \in \mathcal{R}$, então $A \bigcup B \in \mathcal{R}$.

(A2) Se $A, B \in \mathcal{R}$, então $A \setminus B \in \mathcal{R}$.

Definição 1.1.3: σ-anel

Dizemos que uma família de conjuntos Σ é um **σ-anel** quando ela é um **??** fechado pela união enumerável, isto é,

$$(A_n)_{n=1}^{\infty} \subset \Sigma \Longrightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \Sigma.$$

Definição 1.1.4: Álgebra de Conjuntos

Seja X um conjunto não vazio e $\mathcal{A} \subset 2^X$. Dizemos que $\mathcal{A}$ é uma **Álgebra de Conjuntos** quando $\mathcal{A}$ é um **??** com unidade, isto é, $X \in \mathcal{A}$.

Definição 1.1.5: σ-álgebra

Seja X um conjunto não vazio e $\Sigma \subset 2^X$. Dizemos que Σ é uma **σ-álgebra** quando Σ é um **??** com unidade.

Definição 1.1.6: Espaço Mensurável

Seja X um conjunto não vazio e Σ uma **??** no conjunto X. Então o par ordenado (X, Σ) é chamado de **espaço mensurável** e cada elemento de Σ é dito um conjunto **Σ-mensurável**.