Ensaio Sobre a Teoria da Medida

Um olhar detalhado

Pedro Vital

Universidade Federal de Pernambuco (UFPE)

Departamento de Matemática

September 11, 2024

Versão Preliminar
Passivo de erros de digitação e de teoria

Sobre Este Material

Estas notas foram escritas ao longo de 2024 para complementar as reuniões da Iniciação Científica. Referem-se principalmente ao livro “The Elements of Integration and Lebesgue Measure” de Robert G. Bartle e “Real Analysis: Modern Techniques and Their Applications” de Geral B. Folland. Além disso, foram usadas como referências as notas de aula de Daniel Pellegrino da UFPB e Daniel Tausk da USP.

A motivação para estas notas é fornecer uma compreensão clara e concisa dos conceitos fundamentais de Medida e Integração, que são cruciais para várias áreas da matemática e suas aplicações.

Objetivos

Os principais objetivos destas notas são:

1. Complementar o material apresentado nas reuniões da Iniciação Científica.

2. Fornecer uma base sólida para estudos mais avançados.

3. Facilitar a compreensão dos conceitos através de teoremas e demonstrações bem detalhadas.

4. Servir como um recurso de referência para futuros estudos e pesquisas na área.

Estrutura das Notas

Estas notas estão organizadas em capítulos que seguem a estrutura lógica do estudo de Medida e Integração adotada pelo Bartle. Em alguns momentos, a ordem foi substituída por fins didáticos.

Estas notas assumem o domínio de alguns assuntos como Teoria dos Conjuntos, Análise da Reta e noções de topologia.

A fim de tornar a leitura mais dinâmica, conhecimentos necessários foram colocados na Seção XXX, as demonstrações mais extensas foram movidas para a Seção XXX e soluções para vários exercícios podem ser encontradas na Seção XXX.

Versionamento

Estas notas estão na sua versão 0.1. Elas cobrem aproximadamente 50% do curso de medida.

Contents

Chapter 1

Medidas

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Ut purus elit, vestibulum ut, placerat ac, adipiscing vitae, felis. Curabitur dictum gravida mauris. Nam arcu libero, nonummy eget, consectetuer id, vulputate a, magna. Donec vehicula augue eu neque. Pellentesque habitant morbi tristique senectus et netus et malesuada fames ac turpis egestas. Mauris ut leo. Cras viverra metus rhoncus sem. Nulla et lectus vestibulum urna fringilla ultrices. Phasellus eu tellus sit amet tortor gravida placerat. Integer sapien est, iaculis in, pretium quis, viverra ac, nunc. Praesent eget sem vel leo ultrices bibendum. Aenean faucibus. Morbi dolor nulla, malesuada eu, pulvinar at, mollis ac, nulla. Curabitur auctor semper nulla. Donec varius orci eget risus. Duis nibh mi, congue eu, accumsan eleifend, sagittis quis, diam. Duis eget orci sit amet orci dignissim rutrum.

Nam dui ligula, fringilla a, euismod sodales, sollicitudin vel, wisi. Morbi auctor lorem non justo. Nam lacus libero, pretium at, lobortis vitae, ultricies et, tellus. Donec aliquet, tortor sed accumsan bibendum, erat ligula aliquet magna, vitae ornare odio metus a mi. Morbi ac orci et nisl hendrerit mollis. Suspendisse ut massa. Cras nec ante. Pellentesque a nulla. Cum sociis natoque penatibus et magnis dis parturient montes, nascetur ridiculus mus. Aliquam tincidunt urna. Nulla ullamcorper vestibulum turpis. Pellentesque cursus luctus mauris.

1.1 Estruturas Algébricas

Definição 1.1.1: Família Hereditária

Dizemos que uma família de conjuntos $\mathcal{H}$ é um **hereditária** quando ela possui todos os subconjuntos dos seus elementos, isto é,

$$A \in \mathcal{H}, B \subset A \implies B \in \mathcal{H}.$$

Definição 1.1.2: Anel de Conjuntos

Dizemos que uma família de conjuntos $\mathcal{R}$ é um **anel** quando ela é fechada pela união e pela diferença, isto é,

(A1) Se $A, B \in \mathcal{R}$, então $A \bigcup B \in \mathcal{R}$.

(A2) Se $A, B \in \mathcal{R}$, então $A \setminus B \in \mathcal{R}$.

Definição 1.1.3: σ-anel

Dizemos que uma família de conjuntos Σ é um **σ-anel** quando ela é um Anel de Conjuntos fechado pela união enumerável, isto é,

$$(A_n)_{n=1}^{\infty} \subset \Sigma \Longrightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \Sigma.$$

Definição 1.1.4: Álgebra de Conjuntos

Seja X um conjunto não vazio e $\mathcal{A} \subset 2^X$. Dizemos que $\mathcal{A}$ é uma **Álgebra de Conjuntos** quando $\mathcal{A}$ é um Anel de Conjuntos com unidade, isto é, $X \in \mathcal{A}$.

Definição 1.1.5: σ-álgebra

Seja X um conjunto não vazio e $\Sigma \subset 2^X$. Dizemos que Σ é uma **σ-álgebra** quando Σ é um σ-anel com unidade.

Definição 1.1.6: Espaço Mensurável

Seja X um conjunto não vazio e Σ uma σ-álgebra no conjunto X. Então o par ordenado (X, Σ) é chamado de **espaço mensurável** e cada elemento de Σ é dito um conjunto **Σ-mensurável**.

Definição 1.1.7: σ-álgebra gerada por $\mathcal{C}$

Seja $\mathcal{C} \subset 2^X$ uma família de subconjuntos de X. Dizemos que a σ-álgebra $\sigma[\mathcal{C}]$ é a **σ-álgebra gerada por** A quando

1. $\mathcal{C} \subset \sigma[\mathcal{C}]$;
2. Se Σ é uma σ-álgebra de X tal que $\mathcal{C} \subset \Sigma$, então $\sigma[\mathcal{C}] \subset \Sigma$.

Definição 1.1.8: Topologia

Seja X um conjunto não vazio e $\tau \subset 2^X$. Dizemos que τ é uma **topologia** quando ela contém o conjunto vazio e X, é fechada pela união arbitrária e pela interseção finita, isto é,

(A1) $\varnothing, X \in \tau$.

(A2) Se $\{O_i\}_{i\in\mathcal{I}}$, então $\bigcup_{i\in\mathcal{I}} O_i \in \tau$.

(A3) Se $(O_i)_{i=1}^n$, então $\bigcap_{i=1}^n O_i \in \tau$.

Definição 1.1.9: Espaço Topológico

Seja X um conjunto não vazio e τ uma Topologia no conjunto X. Então o par ordenado (X, τ) é chamado de **espaço topológico** e cada elemento de τ é dito um conjunto **aberto** em X.

Definição 1.1.10: σ-álgebra de Borel

Seja (X, τ) um Espaço Topológico. Então $\mathcal{B}(X) = \sigma[\tau]$ é a **σ-álgebra de Borel**. Os elementos de $\mathcal{B}(X)$ são chamados de **boreleanos**.

Definição 1.1.11: Produto Cartesiano

Seja $\{X_i\}_{i\in\mathcal{I}}$ uma família de conjuntos indexada por $\mathcal{I}$. Definimos o **produto cartesiano** da seguinte forma:

$$\prod_{i\in\mathcal{I}} X_i \coloneqq \left\{ f : \mathcal{I} \to \bigcup_{i\in\mathcal{I}} X_i ; \forall i \in \mathcal{I}, f(i) \in X_i \right\}.$$

Definição 1.1.12: Projeção

Seja $\{X_i\}_{i\in\mathcal{I}}$ uma família de conjuntos indexada por $\mathcal{I}$. Considere a função

$$\pi_j : \prod_{i\in\mathcal{I}} X_i \to X_j$$

definida por $\pi_j(f) = f(j)$. Chamamos esta função de **j-ésima projeção**.

Definição 1.1.13: σ-álgebra Produto

Seja $\{(X_i, \Sigma_i)\}_{i\in I}$ uma família de Espaço Mensurável indexada por I. Considere a família

$$\mathcal{C} := \left\{\pi_i^{-1}(E_i); E_i \in \Sigma_i, i \in I\right\}.$$

Chamamos $\mathcal{C}$ de **σ-álgebra produto** em $\Pi_{i\in I} X_i$. Denotaremos esta σ-álgebra por $\bigotimes_{i\in I} \Sigma_i$.

Definição 1.1.14: Função Aditiva Contável

Uma função real cujo domínio é uma família de conjuntos, $f : \mathcal{R} \to \overline{\mathbb{R}}$, é dita uma **função aditiva contável** quando satisfaz a seguinte propriedade:

$$\text{Se } (A_i)_{i=1}^{\infty} \subset \mathcal{R} \text{ é dois a dois disjunta, então } f\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_1\right) = \sum_{i=1}^{\infty} f(A_i).$$

Definição 1.1.15: Função Subaditiva Contável

Uma função real cujo domínio é uma família de conjuntos, $f : \mathcal{R} \to \overline{\mathbb{R}}$, é dita uma **função subaditiva contável** quando satisfaz a seguinte propriedade:

$$\text{Se } (A_i)_{i=1}^{\infty} \subset \mathcal{R} \text{ , então } f\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_1\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} f(A_i).$$

Definição 1.1.16: Função Monotônica

Uma função real cujo domínio é uma família de conjuntos, $f : \mathcal{R} \to \overline{\mathbb{R}}$, é dita uma **função monotônica** quando satisfaz a seguinte propriedade:

$$\text{Se } A, B \subset \mathcal{R} \text{ e } A \subseteq B, \text{ então } f(A) \leq f(B).$$

Definição 1.1.17: Pré-medida

Seja X um conjunto não vazio e $\mathcal{R} \subset 2^X$ um Anel de Conjuntos. Dizemos que uma função $\mu_0 : \mathcal{R} \to [0, \infty]$ é uma **pré-medida** quando $\mu_0(\varnothing) = 0$ e ela é uma Função Aditiva Contável.

Definição 1.1.18: Medida

Dizemos que uma Pré-medida é uma **medida** quando o domínio é uma σ-álgebra.

Definição 1.1.19: Espaço de Medida

Seja X um conjunto não vazio, Σ uma σ-álgebra no conjunto X e μ uma Medida definida em Σ. Então a tripla ordenada (X, Σ, μ) é chamada de **espaço de medida**.

Definição 1.1.20: Conjunto de Medida Nula

Seja (X, Σ, μ) um Espaço de Medida. Se $N \in \Sigma$ é tal que $\mu(N) = 0$, então dizemos que N é um **conjunto de medida nula**.

Definição 1.1.21: Para Quase Todo Ponto

Seja (X, Σ, μ) um Espaço de Medida e $P(x)$ uma propriedade dos elementos de X. Se existe um conjunto $N \in \Sigma$ de medida nula tal que P vale para todo $x \in N^{\complement}$, então dizemos que P vale **para quase todo ponto**, o que abreviaremos para (μ-qtp).

Definição 1.1.22: Espaço de Medida Completa

Seja (X, Σ, μ) um Espaço de Medida. Dizemos que ele é um **espaço de medida completa** quando a família dos Conjunto de Medida Nula, $\mathcal{N}_\mu$, é Família Hereditária.

Definição 1.1.23: Espaço de Medida Completa

Seja $\mathcal{H}$ um Anel de Conjuntos que é Família Hereditária. Dizemos que uma função $\mu^* : \mathcal{H} \to [0, \infty]$ é uma **medida exterior** quando $\mu^*(\varnothing) = 0$, ela é Função Monotônica e Função Subaditiva Contável .

Definição 1.1.24: Medida Finita

Seja μ uma Medida em um Espaço de Medida (X, Σ). Dizemos que μ é uma **medida finita** quando $\mu(X) < \infty$.

Definição 1.1.25: Medida σ-finita

Seja μ uma Medida em um Espaço de Medida (X, Σ). Dizemos que μ é uma **medida σ-finita** quando existe $(E_i)_{i=1}^{\infty}$ com $\mu(E_i) < \infty$ para todo $i \geq 1$ tal que $X = \cup_{i=1}^{\infty} E_i$.