Teoria da Medida

Notas de Aula e Solucionário

Pedro Vital
Roberto Capistrano Filho

Universidade Federal de Pernambuco (UFPE)

Departamento de Matemática

November 21, 2024

Versão Preliminar
Sujeito a revisões

Capítulo 0

Sobre Este Material

Estas notas foram escritas ao longo de 2024 para complementar as reuniões da Iniciação Científica e Aulas do Professor Roberto Capistrano no Curso Teoria da Medida e Integração para o mestrado do PPGDMAT-UFPE.

Estamos utilizando como referências principais o livro "The Elements of Integration and Lebesgue Measure" de Robert G. Bartle e "Real Analysis: Modern Techniques and Their Applications" de Geral B. Folland. Além disso, utilizamos de apoio os materiais (notas de aula) do Professor Daniel Pellegrino da UFPB e do Professor Daniel Tausk da USP.

A motivação para estas notas é fornecer uma compreensão clara e concisa dos conceitos fundamentais de Medida e Integração, que são cruciais para várias áreas da matemática e suas aplicações.

Objetivos

Os principais objetivos destas notas são:

1. Complementar o material apresentado nas reuniões da Iniciação Científica.
2. Fornecer uma base sólida para estudos mais avançados.
3. Facilitar a compreensão dos conceitos através de teoremas e demonstrações bem detalhadas.
4. Servir como um recurso de referência para futuros estudos e pesquisas na área.

Estrutura das Notas

Estas notas estão organizadas em capítulos que seguem a estrutura lógica do estudo de Medida e Integração adotada pelo Folland nos primeiros capítulos e pelo Bartle nos demais. Em alguns momentos, a ordem foi substituída por fins didáticos.

Estas notas assumem o domínio de alguns assuntos como Teoria dos Conjuntos, Análise da Reta e noções de topologia.

A fim de tornar a leitura mais dinâmica, conhecimentos necessários foram colocados no Apêndice Definições Adicionais, as proposições sem demonstrações (de conhecimentos preliminares) foram movidas para a o Apêndice Teoremas e Proposições Adicionais e soluções para vários exercícios podem ser encontradas na Apêndice Exercícios e Detalhamentos.

Versionamento

Estas notas estão na sua versão 0.1. Elas cobrem aproximadamente 50% do curso de medida.

Capítulo 0

Contents

1 Medidas **1**
- 1.1 Espaços Mensuráveis . . . 1
  - 1.1.1 O que são σ-álgebras ? . . . 1
  - 1.1.2 Como gerar σ-álgebras ? . . . 3
  - 1.1.3 σ-álgebras de Borel . . . 4
- 1.2 Medidas . . . 9
  - 1.2.1 O que são medidas? . . . 9
  - 1.2.2 Propriedades das Medidas . . . 10
  - 1.2.3 Conjuntos de Medida Nula e Medidas Completas . . . 13
- 1.3 Teoremas de Extensão . . . 14
  - 1.3.1 Teorema de Completamento de Medida . . . 14
  - 1.3.2 Teorema de Extensão de Carathéodory . . . 15

2 Integração **17**
- 2.1 Funções Mensuráveis . . . 17
  - 2.1.1 Quando podemos medir funções? . . . 17
  - 2.1.2 Operando com funções mensuráveis . . . 19
  - 2.1.3 Sequências de funções mensuráveis . . . 21
- 2.2 Integração . . . 22
  - 2.2.1 Funções Simples . . . 22
  - 2.2.2 A Integral de Lebesgue . . . 25
- 2.3 Teoremas de Convergência (Parte 1) . . . 27
  - 2.3.1 Teorema da Convergência Monótona . . . 27
  - 2.3.2 Teorema da Convergência Dominada . . . 30

3 Os Espaços de Lebesgue **35**
- 3.1 Espaços L^p . . . 35
  - 3.1.1 Construção de um espaço vetorial normado . . . 35
  - 3.1.2 Desigualdades de Hölder e Minkowski . . . 36
  - 3.1.3 Teorema de Riesz-Fischer . . . 39
- 3.2 Teoremas de Decomposição . . . 40

4 Modos de Convergência **41**
- 4.1 Modos de Convergência . . . 41
  - 4.1.1 Convergência de funções . . . 41

4.1.2 Convergência em L_p 41
4.1.3 Convergência na Medida 44
4.2 Teoremas de Convergência (Parte 2) 48
4.2.1 Teorema de Egoroff 48

5 Decomposição de Medidas **51**
5.1 Decomposição de Hahn e Jordan 51
5.2 Decomposição de Lebesgue-Radon-Nikodým 51

6 Medidas Produto **59**
6.1 Teorema da Medida Produto 59
6.2 Lema da Classe Monótona 59
6.3 Os Teoremas de Tonelli e Fubini 59

Definições Adicionais **61**

Teoremas e Proposições Adicionais **65**

Exercícios e Detalhamentos **67**

Capítulo 1

Medidas

O nosso objetivo é generalizar a idea de volumes. De forma bem superficial, existe um problema com a nossa intuição de "mensurabilidade". Em particular, existem conjuntos bem patológicos que não conseguimos "medir". Uso aspas aqui para explicitar a informalidade do termo até aqui. Para resolver o problema mencionado, podemos construir uma estrutura chamada de σ-álgebra que definirá o conceito de mensurabilidade.

Com esta estrutura em maõs, vamos discutir algumas das suas propriedades e estudar a sua relação com a topologia de um espaço. Depois disso, construiremos uma função que chamaremos de medida. Esta é a função que vai associar um número a cada conjunto mensurável. Na prática, esta será a nossa generalização para volumes. Por fim, trataremos dos teoremas que nos permitem estender medidas "ruins" para criar medidas bem comportadas.

Dessa forma, podemos resumir os conceitos mais importantes deste capítulo na seguinte lista:

1. Espaços Mensuráveis

2. Medidas

3. Teoremas de Extensão

1.1 Espaços Mensuráveis

1.1.1 O que são σ-álgebras ?

Como prometido, vamos definir o que são as **σ-álgebras** . Poderíamos passar o dia todo falando de estruturas algébricas que antecedem esta construção, mas, para os nossos fins, tudo o que precisamos saber é que uma σ-álgebra de um conjunto é uma família de subconjuntos *fechada pelas operações conjuntistas*, isto é, interseção, união e complemento de elementos dessa família ainda pertence a família. Veja a definição rigorosa abaixo.

Definição 1.1.1: σ-álgebra

Seja X um conjunto não vazio e $\Sigma \subset 2^X$. Dizemos que Σ é uma **σ-álgebra** quando Σ é um σ-anel com unidade.

Dessa definição, já ganhamos o fechamento por união enumerável e complemento. O fato de que as σ-álgebras são *fechadas por interseção enumerável* é provado a partir da Definição 1.1.1. Para mostrar isso, basta aplicar as Teorema de De Morgan. Desse conjunto extenso de propriedades vindas da teoria dos conjuntos, precisamos de duas, que estão enunciadas abaixo.

Teorema 1.1.1: Teorema de De Morgan

Seja X um conjunto e $\{O_i\}_{i\in\mathcal{I}} \subset 2^X$. Então,

1.
$$\complement\left(\bigcup_{i\in\mathcal{I}} O_i\right) = \bigcap_{i\in\mathcal{I}} \complement\left(O_i\right),$$

2.
$$\complement\left(\bigcap_{i\in\mathcal{I}} O_i\right) = \bigcup_{i\in\mathcal{I}} \complement\left(O_i\right).$$

Lema 1.1.1: Interseção de σ-álgebras é σ-álgebra

Seja X um conjunto e $\{\Sigma_i\}_{i\in\mathcal{I}}$ uma família de σ-álgebra de X. Então, $\cap_{i\in\mathcal{I}}\Sigma_i$ é uma σ-álgebra de X.

Demonstração. Denotemos $\Sigma = \cap_{i\in\mathcal{I}}\Sigma_i$. Como $A_n \in \Sigma$ para todo $n \in \mathbb{N}$, então $A_n^c \in \Sigma$ para todo n e $(A_n^c)_{n=1}^{\infty} \subset \Sigma$. Assim $\bigcup_{n=1}^{\infty}(A_n^c) \in \Sigma$. Note bem, pelo Teorema de De Morgan,

$$\bigcup_{n=1}^{\infty}(A_n^c) = \left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right)^c \in \Sigma.$$

Portanto $\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}(A_n^c)\right)^c = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \in \Sigma$. ■

Exemplos de σ-álgebras

Vamos ver vários exemplos de σ-álgebras . Pule se já estiver familiarizado com o assunto. No apêndice de exercícios resolvidos é provado que cada um destes exemplos é, de fato, uma σ-álgebra .

Exemplo 1.1.1: σ-álgebra Trivial

Seja X um conjunto. Então $\Sigma = \{\varnothing, X\}$ é uma σ-álgebra conhecida como a **σ-álgebra trivial de X.**

Exemplo 1.1.2: σ-álgebra das Partes

Seja X um conjunto. Então $\Sigma = 2^X$ é uma σ-álgebra conhecida como a **σ-álgebra das partes de X.**

Exemplo 1.1.3: σ-álgebra dos Conjuntos Enumeráveis

Seja X um conjunto não enumerável. Então

$$\Sigma = \{E \in X;\ E \text{ é enumerável ou } \complement(E) \text{ é enumerável}\}$$

é uma σ-álgebra conhecida como a **σ-álgebra dos conjuntos enumeráveis e co-enumeráveis de X**.

1.1.2 Como gerar σ-álgebras ?

Para partir para problemas mais interessantes precisamos de uma forma de criar σ-álgebras . Fazemos isso com o conceito de **σ-álgebra gerada por conjuntos.** Intuitivamente, esta será a menor σ-álgebra que contém os elementos. Formalizamos esta ideia com a definição abaixo.

Definição 1.1.2: σ-álgebra gerada

Seja $\mathcal{C} \subset 2^X$ uma família de subconjuntos de X. Dizemos que a σ-álgebra $\sigma[\mathcal{C}]$ é a **σ-álgebra gerada por** A quando

1. $\mathcal{C} \subset \sigma[\mathcal{C}]$;
2. Se Σ é uma σ-álgebra de X tal que $\mathcal{C} \subset \Sigma$, então $\sigma[\mathcal{C}] \subset \Sigma$.

A definição acima pode ser bem abstrata e difícil de trabalhar. Assim, introduziremos uma caracterização mais tangível. A fim de chegar nesta caracterização, provemos o lema abaixo.

Lema 1.1.2: Unicidade da σ-álgebra gerada

Seja X um conjunto e $\mathcal{C} \subset 2^X$. Então, a σ-álgebra gerada por $\mathcal{C}$ é única.

Demonstração. Sejam $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ duas σ-álgebras geradas por $\mathcal{C}$. Então, pelo primeiro item da definição de $\mathcal{A}$, temos que $\mathcal{C} \subset \mathcal{A}$. Por outro lado, usando o segundo item da definição de $\mathcal{B}$, temos que $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$. Analogamente, mostramos que $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$ e $\mathcal{A} = \mathcal{B}$. ■

Com esta ferramenta em mãos, vamos introduzir a Caracterização da σ-álgebra gerada.

Proposição 1.1.1: Caracterização da σ-álgebra gerada

Sejam X um conjunto, $\mathcal{C} \subset 2^X$ e $\mathcal{J} = \{\Sigma_j\}$ a família de todas as σ-álgebras de X que contém $\mathcal{C}$. Então,

$$\sigma[\mathcal{C}] = \bigcap_{\Sigma_j \in \mathcal{J}} \Sigma_j.$$

Demonstração. Primeiramente, note que $\mathcal{J}$ não é uma família vazia, pois 2^X é uma σ-álgebra (Exemplo 1.1.2) que contém $\mathcal{C}$ trivialmente, logo $\mathcal{C}$ está na interseção. Em segundo lugar, observe que, pelo Lema 1.1.1, a interseção dos elementos de $\mathcal{J}$ é uma σ-álgebra. Por último, verifique que $\bigcap_{\Sigma_j \in \mathcal{J}} \Sigma_j \subseteq \Sigma_j$ para todo $\Sigma_j \in \mathcal{J}$. Portanto, $\bigcap_{\Sigma_j \in \mathcal{J}} \Sigma_j$ é uma σ-álgebra gerada por $\mathcal{C}$ e, pelo Lema 1.1.2, concluímos que $\sigma[\mathcal{C}] = \bigcap_{\Sigma_j \in \mathcal{J}} \Sigma_j$. ∎

O resultado abaixo é bem direto, mas útil.

Lema 1.1.3: σ-álgebra Gerada Por Subconjunto

Seja $\mathcal{C} \in 2^X$. Se $E \in \sigma[\mathcal{C}]$, então $\sigma[E] \subset \sigma[\mathcal{C}]$.

Demonstração. Temos, por hipótese que $\sigma[\mathcal{C}]$ é uma σ-álgebra de X que contém E. Logo, pelo segundo item da Definição 1.1.2, $\sigma[E] \subset \sigma[\mathcal{C}]$. ∎

1.1.3 σ-álgebras de Borel

Agora que temos uma ferramenta poderosa para criar σ-álgebras , vamos estudar o que acontece quando estudamos espaços com mais estrutura, como a reta. Lembre que o nosso objetivo é generalizar a ideia do que é uma "medida" ou "volume", portanto, é bastante natural estudar σ-álgebras em $\mathbb{R}$ e $\mathbb{R}^n$.

Definição 1.1.3: σ-álgebra de Borel

Seja (X, τ) um Espaço Topológico. Então $\mathcal{B}(X) = \sigma[\tau]$ é a **σ-álgebra de Borel**. Os elementos de $\mathcal{B}(X)$ são chamados de **boreleanos**.

Pela Definição 1.1.3, podemos tomar qualquer base da reta para formar os boreleanos em $\mathbb{R}$. Veja o Exercício 6.3.7 e Fato 6.3.4. Criar uma σ-álgebra de $\mathbb{R}$ (ou em $\overline{\mathbb{R}}$) é bem direto, mas dependemos de uma abordagem mais cautelosa para construir uma σ-álgebra em $\mathbb{R}^n$.

Para fazer essa construção, vamos começar definindo um **espaço mensurável**. Da mesma forma que podemos tomar um par ordenado de conjunto e subconjuntos para formar um Espaço Topológico, podemos tomar um par ordenado para formar um Espaço Mensurável.

Definição 1.1.4: Espaço Mensurável

Seja X um conjunto não vazio e Σ uma σ-álgebra no conjunto X. Então o par ordenado (X, Σ) é chamado de **espaço mensurável** e cada elemento de Σ é dito um conjunto **Σ-mensurável**.

A construção geral é bem parecida com a definição da topologia produto.

Definição 1.1.5: σ-álgebra Produto

Seja $\{(X_i, \Sigma_i)\}_{i\in I}$ uma família de Espaço Mensurável indexada por I. Considere a família

$$\mathcal{C} := \left\{\pi_i^{-1}(E_i); E_i \in \Sigma_i, i \in I\right\}.$$

Chamamos $\sigma[\mathcal{C}]$ de **σ-álgebra produto** em $\Pi_{i\in I}X_i$. Denotaremos esta σ-álgebra por $\bigotimes_{i\in I}\Sigma_i$.

Esta primeira definição é bastante abstrata. Por um lado, as abstrações nos permitem trabalhar em casos gerais que podem nos revelar propriedades universais. Por outro lado, essas abstrações também criam obstáculos quanto a manipulação dessas estruturas.

A fim de recuperar alguma estrutura, vamos dar uma olhada de perto no que acontece quando a família é indexada por um conjunto enumerável.

Proposição 1.1.2: σ-álgebra produto de família enumerável

Seja I um conjunto enumerável e $\{X_i\}_{i\in I}$ uma família de espaços mensuráveis. Então

$$\bigotimes_{i\in I}\Sigma_i = \sigma\left[\left\{\prod_{i\in I} E_i; E_i \in \Sigma_i\right\}\right].$$

Demonstração. Vamos denotar por $\mathcal{F}$ a família de conjuntos do enunciado. Considere $\mathcal{C}$ a família como na Definição 1.1.5. Assim,

$$\begin{aligned}
\mathcal{F} &:= \left\{\prod_{i\in I} E_i; E_i \in \Sigma_i\right\}\\
\mathcal{C} &:= \left\{\pi_i^{-1}(E_i); E_i \in \Sigma_i, i \in I\right\}
\end{aligned}$$

Pretendemos mostrar que $\bigotimes_{i\in I}\Sigma_i = \sigma[\mathcal{C}] = \sigma[\mathcal{F}]$. Uma forma natural de chegar nesse resultado é mostrar que $\sigma[\mathcal{C}] \subseteq \sigma[\mathcal{F}]$ e $\sigma[\mathcal{F}] \subseteq \sigma[\mathcal{C}]$.

Por um lado, dado $\prod_{i\in I} E_i \in \mathcal{F}$, podemos mostrar (ver Exercício 6.3.5) que

$$\prod_{i\in I} E_i = \bigcap_{i\in I} \pi_i^{-1}(E_i).$$

Como a interseção de conjuntos mensuráveis é mensurável, então $\bigcap_{i\in I}\pi_i^{-1}(E_i) \in \sigma[\mathcal{C}]$. Por consequência, $\prod_{i\in I} E_i \in \sigma[\mathcal{C}]$. Com isso, concluímos que $\mathcal{F} \subseteq \sigma[\mathcal{C}]$ e, pelo Lema 1.1.3, $\sigma[\mathcal{F}] = \sigma[\mathcal{C}]$.

Resta mostrar a segunda inclusão. Usaremos a mesma ideia. Para tanto, precisamos mostrar (ver Exercício 6.3.6) que, para todo $E_i \in \Sigma_i$ onde $i \in I$,

$$\begin{aligned}
\pi_i^{-1}(E_i) &= X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_{i-1} \times E_i \times X_{i+1} \times \ldots\\
&= \prod_{j\in I} E_j, \text{onde } j \neq i \Rightarrow E_j = X_j.
\end{aligned}$$

Sabemos que cada $X_j \in \Sigma_j$ pela definição de σ-álgebra e $E_i \in \Sigma_i$ por hipótese. Assim, temos que todo elemento $\pi_i^{-1}(E_i) \in \mathcal{C}$ pertence também a $\mathcal{F}$. Logo, $\pi_i^{-1}(E_i) \in \mathcal{F} \subset \sigma[\mathcal{F}]$. Isso nos permite concluir que $\mathcal{C} \subseteq \sigma[\mathcal{F}]$. Usamos o Lema 1.1.3 mais uma vez para concluir que $\sigma[\mathcal{C}] \subseteq \sigma[\mathcal{F}]$.

Podemos, por fim, concluir que $\sigma[\mathcal{C}] = \sigma[\mathcal{F}]$, isto é,

$$\bigotimes_{i\in I} \Sigma_i = \sigma[\mathcal{C}] = \sigma[\mathcal{F}] = \sigma\left[\left\{\prod_{i\in I} E_i; E_i \in \Sigma_i\right\}\right].$$

■

A proposição abaixo nos garante que podemos olhar apenas para os geradores das σ-álgebras para construir o produto.

Proposição 1.1.3: σ-álgebra produto de famílias geradas por conjuntos

Seja $\{X_i\}_{i\in I}$ uma família de espaços mensuráveis tal que cada $\Sigma_i = \sigma[\mathcal{C}_i]$. Então

$$\bigotimes_{i\in I} \Sigma_i = \sigma\left[\left\{\pi_i^{-1}(E_i); E_i \in \mathcal{C}_i, i \in I\right\}\right].$$

Demonstração. Vamos denotar por $\mathcal{F}$ a família de conjuntos do enunciado. Considere $\mathcal{C}$ a família como na Definição 1.1.5. Assim,

$$\begin{aligned} \mathcal{F} &:= \left\{\pi_i^{-1}(E_i); E_i \in \mathcal{C}_i, i \in I\right\} \\ \mathcal{C} &:= \left\{\pi_i^{-1}(E_i); E_i \in \Sigma_i, i \in I\right\} \end{aligned}$$

Pretendemos mostrar que $\bigotimes_{i\in I} \Sigma_i = \sigma[\mathcal{C}] = \sigma[\mathcal{F}]$. Uma forma natural de chegar nesse resultado é mostrar que $\sigma[\mathcal{C}] \subseteq \sigma[\mathcal{F}]$ e $\sigma[\mathcal{F}] \subseteq \sigma[\mathcal{C}]$.

Por um lado, $\mathcal{F} \subset \mathcal{C} \subset \sigma[\mathcal{C}]$. Usando o Lema 1.1.3, mostramos que $\sigma[\mathcal{F}] \subseteq \sigma[\mathcal{C}]$.

Vamos mostrar o outro lado da continência. A estratégia aqui é construir uma σ-álgebra que esteja contida em $\sigma[\mathcal{F}]$. Fixe um $i \in \mathcal{I}$ e considere a família de conjuntos

$$\mathcal{A}_i = \{E \subseteq X_i; \pi_i^{-1}(E) \in \sigma[\mathcal{F}]\}.$$

Note que $\mathcal{A}_i$ é uma σ-álgebra . De fato, se $(A_n)_n^\infty \subseteq \mathcal{A}_i$ é uma sequência enumerável de conjuntos da família $\mathcal{A}_i$, então

$$\pi_i^{-1}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \pi_i^{-1}(A_n).$$

Como $\pi_i^{-1}(A_n) \in \sigma[\mathcal{F}]$ por hipótese, então a união também pertence a $\sigma[\mathcal{F}]$.

Para mostrar que esta família é fechada pelo complemento, o argumento é parecido. Tome $A \in \mathcal{A}_i$, então

$$\pi_i^{-1}\left(\complement(A)\right) = \complement\left(\pi_i^{-1}(A)\right) \in \sigma[\mathcal{F}].$$

Portanto, $\mathcal{A}_i$ é uma σ-álgebra em X_i para cada $i \in \mathcal{I}$. Observe que cada $E_i \in \mathcal{C}_i$ é um conjunto tal que $\pi_i^{-1}(E_i) \in \sigma[\mathcal{F}]$. Portanto, cada $E_i \in \mathcal{A}_i$ e $\mathcal{C}_i \subset \mathcal{A}_i$. No entanto, pela definição de σ-álgebra gerada, temos que $\sigma[\mathcal{C}_i] = \Sigma_i \subseteq \mathcal{A}_i$ para todo $i \in \mathcal{I}$. Isto nos diz que todo $E \in \Sigma_i$ é tal que $\pi_i^{-1}(E) \in \sigma[\mathcal{F}]$ para todo $i \in \mathcal{I}$. Portanto, $\sigma[\mathcal{F}] \supseteq \sigma[\mathcal{C}]$.

Em conclusão,

$$\bigotimes_{i\in I} \Sigma_i = \sigma[\mathcal{C}] = \sigma[\mathcal{F}] = \sigma\left[\left\{\pi_i^{-1}(E_i); E_i \in \mathcal{C}_i, i \in I\right\}\right].$$

■

Corolário 1.1.1: σ-álgebra produto de família enumerável geradas

Seja I um conjunto enumerável e $\{X_i\}_{i\in I}$ uma família de espaços mensuráveis tal que cada $\Sigma_i = \sigma[\mathcal{C}_i]$. Então $\bigotimes_{i\in I} \Sigma_i$ é a σ-álgebra gerada por

$$\bigotimes_{i\in I} \Sigma_i = \sigma\left[\left\{\prod_{i\in I} E_i; E_i \in \mathcal{C}_i\right\}\right].$$

Demonstração. Este corolário é uma consequência direta das aplicações das Proposições 1.1.2 e 1.1.3. ■

Estamos descendo o grau de generalidade para chegar em coisas cada vez mais concretas. Vamos passar agora de espaços mensuráveis abstratos para espaços métricos. Aqui, entenderemos os espaços métricos como espaços mensuráveis onde a distância induz uma topologia, dando origem a um espaço topológico, e a topologia induz uma σ-álgebra de Borel, dando origem a um espaço mensurável.

Proposição 1.1.4: σ-álgebra produto de família de espaços métricos

Seja $\{X_i\}_{i=1}^n$ uma família finita de espaços métricos com a topologia, τ_i, induzida pela distância. Então

$$\bigotimes_{i=1}^{n} \mathcal{B}(X_i) \subseteq \mathcal{B}\left(\prod_{i=1}^{n} X_i\right).$$

Demonstração. Note bem, estamos trabalhando com um número finito de espaços métricos, cuja σ-álgebra é gerada pelos abertos de cada conjunto. Assim, valem, as hipóteses do Corolário 1.1.1. Com isso, ganhamos que a σ-álgebra produto de X é gerada pelo produto de todos os abertos.

$$\mathcal{C} \coloneqq \left\{\prod_{i=1}^{n} E_i; E_i \in \tau_i\right\} \Longrightarrow \sigma[\mathcal{C}] = \bigotimes_{i=1}^{n} \mathcal{B}(X_i)$$

Por outro lado, o produto cartesiano de finitos abertos na Topologia Produto (ver Proposição 6.3.1) e, portanto, pertence a $\mathcal{B}(X)$. Portanto, $\mathcal{C} \in \mathcal{B}(X)$ e, pelo Lema

1.1.3, temos que

$$\sigma\left[\mathcal{C}\right] = \bigotimes_{i=1}^{n} \mathcal{B}(X_i) \subseteq \mathcal{B}\left(X\right).$$

■

Se colocarmos uma hipótese a mais conseguimos garantir a igualdade. Veja o corolário abaixo.

Corolário 1.1.2: σ-álgebra produto de espaços métricos separáveis

Sejam $\{X_i\}_{i=1}^{n}$ e X como na Proposição 1.1.4. Se cada X_i for separável, então $\bigotimes_{i=1}^{n} \mathcal{B}(X_i) = \mathcal{B}(X)$.

$$\bigotimes_{i=1}^{n} \mathcal{B}\left(X_i\right) = \mathcal{B}\left(\prod_{i=1}^{n} X_i\right).$$

Demonstração. Pela Proposição 1.1.4, temos a primeira inclusão. Queremos mostrar que $\mathcal{B}\left(X\right) \subseteq \bigotimes_{i=1}^{n} \mathcal{B}(X_i)$.

Como cada X_i é separável por hipótese, então existe $E_i \subset X_i$ denso e enumerável. É possível mostrar que existe uma base enumerável B_i para cada X_i (ver Proposição 6.3.2). Por outro lado, $\mathcal{B}\left(X\right)$ é gerado por $\{\prod_{i=1}^{n} A_i; A_i \in B_i\} \subseteq \mathcal{C}$ (definido como na Proposição 1.1.4). Logo, pelo Lema 1.1.3, temos que $\mathcal{B}\left(X\right) \subseteq \bigotimes_{i=1}^{n} \mathcal{B}(X_i)$. ■

Toda essa construção nos leva a um resultado importante.

Corolário 1.1.3: σ-álgebra produto de $\mathbb{R}^n$

$$\mathcal{B}(\mathbb{R}^n) = \bigotimes_{i=1}^{n} \mathcal{B}(\mathbb{R}).$$

Demonstração. Usando o Fato 6.3.3 de que $\mathbb{R}$ é separável, podemos aplicar diretamente o Corolário 1.1.1 para provar o resultado. ■

Revisitando os Resultados

Desta seção, podemos destacar algumas definições e resultados essenciais. Quanto a σ-álgebra, destacamos as operações pelas quais esta família é fechada: complemento, união enumerável, interseção enumerável. Além disso, lembramos da importância do conceito da σ-álgebra gerada, principalmente no que tange a definição da σ-álgebra de Borel. Por fim, o resultado mais importante desta seção, a construção da σ-álgebra produto de $\mathbb{R}^n$, nos diz que a σ-álgebra de Borel de $\mathbb{R}^n$ é o Produto Cartesiano de n σ-álgebras de Borel de $\mathbb{R}$.

1.2 Medidas

1.2.1 O que são medidas?

Com a estrutura dos Espaço Mensurável em mãos, vamos construir os espaços de medida, isto é, aqueles conjuntos onde, além da noção de mensurabilidade, é possível atribuir um valor a um dado conjunto. Futuramente, isto nos permitirá atribuir um valor a uma função mensurável.

Em linhas gerais, uma **medida** é uma Função Aditiva Contável não negativa onde o domínio é uma σ-álgebra. Existe uma função mais fraca que esta, chamada de **pré-medida**. Observe as definições abaixo.

Definição 1.2.1: Pré-medida

Seja X um conjunto não vazio e $\mathcal{R} \subset 2^X$ um Anel de Conjuntos. Dizemos que uma função $\mu_0 : \mathcal{R} \to [0, \infty]$ é uma **pré-medida** quando $\mu_0(\varnothing) = 0$ e ela é uma Função Aditiva Contável.

Definição 1.2.2: Medida

Dizemos que uma Pré-medida é uma **medida** quando o domínio é uma σ-álgebra.

Anteriomente, definimos os Espaço Mensurável com um par ordenado. Desta vez, vamos definir os Espaço de Medida a partir de uma tripla dada por um conjunto, uma família de subconjuntos e uma Medida.

Definição 1.2.3: Espaço de Medida

Seja X um conjunto não vazio, Σ uma σ-álgebra no conjunto X e μ uma Medida definida em Σ. Então a tripla ordenada (X, Σ, μ) é chamada de **espaço de medida**.

Exemplos de Medidas

Vamos ver alguns exemplos de medidas que serão úteis mais tarde. Pule se estiver familiarizado com o assunto. No apêndice de exercícios resolvidos é provado que cada um destes exemplos é, de fato, uma medida.

Exemplo 1.2.1: Medida de Contagem

Seja (X, Σ) um Espaço de Medida onde X é um conjunto não enumerável e Σ é a σ-álgebra dos Conjuntos Enumeráveis. A função

$$\mu(E) = \begin{cases} \#E, & \text{se } E \text{ é finito}, \\ +\infty, & \text{se } E \text{ é infinito}, \end{cases}$$

é uma medida em X.

Exemplo 1.2.2: Medida de Dirac

Sejam $(X, 2^X)$ um Espaço de Medida e $x_0 \in X$ um ponto fixado. A função

$$\mu(E) = \begin{cases} 1, & \text{se } x_0 \in E, \\ 0, & \text{se } x_0 \notin E, \end{cases}$$

é uma medida em X.

1.2.2 Propriedades das Medidas

As medidas obedecem a algumas propriedades naturais que serão úteis no futuro. Elas são naturais no sentido de que seguem uma lógica intuitiva como, por exemplo, um conjunto que contém outro possui uma medida maior que este. Estudemos estas propriedades.

Medidas têm 4 propriedades importantes que serão enunciadas: medidas são funções monotônicas crescentes e subaditivas contáveis. Além disso, elas satisfazem duas propriedades conhecidas como continuitdade por baixo e por cima.

Proposição 1.2.1: Monotonicidade da Medida

Seja (X, Σ, μ) um espaço de medida. Então, μ é uma Função Monotônica.

Demonstração. Sejam $E, F \in \Sigma$ tais que $E \subset F$. Podemos escrever F como a união disjunta entre E e $F \setminus E$. Como a medida μ é aditiva contável, então $\mu(F) = \mu(E) + \mu(F \setminus E)$. Note que $F \setminus E = F \cap E^c$, logo $F \setminus E \in \Sigma$. Como, $\mu(A) \geq 0$ para todo $A \in \Sigma$, temos que $\mu(E) \leq \mu(E) + \mu(F \setminus E) = \mu(F)$. ■

s

Corolário 1.2.1: Medida da Diferença

Nas condições da Proposição 1.2.1, se $E, F \in \Sigma$ e $\mu(E) < \infty$, então

$$\mu(F \setminus E) = \mu(F) - \mu(E).$$

Demonstração. Se $\mu(E) < \infty$, então podemos subtrair este valor dos dois lados sem correr o risco de chegar em uma diferença de infinitos. Portanto, $\mu(F \setminus E) = \mu(F) - \mu(E)$. ■

Proposição 1.2.2: Subaditividade da medida

Seja (X, Σ, μ) um espaço de medida. Então μ é uma Função Subaditiva Contável.

Demonstração. Vamos construir uma sequência disjunta (F_n) a partir da sequência (E_n) dada. Seja $F_1 = E_1$ e defina

$$F_k = E_k \setminus \left(\bigcup_{n=1}^{k-1} E_n \right).$$

Por construção, $F_i \cap F_j = \varnothing$ para quaisquer $i, j \in \mathbb{N}$ tais que $i \neq j$. Também temos que $F_n \subset E_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Por último, notamos que

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n \Longrightarrow \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \right) = \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n \right). \tag{1.1}$$

Como (F_n) é disjunta e μ é Função Aditiva Contável, concluímos, a partir da Equação (1.1) que

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \right) = \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(F_n). \tag{1.2}$$

Agora, aplicando o fato de que $F_n \subset E_n$ medida é uma função monotônica, temos que $\mu(F_n) \leq \mu(E_n)$ para todo $n \in N$. Assim, as séries também seguem esta desigualdade. Portanto, pela Equação (1.2),

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(F_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n).$$

■

Proposição 1.2.3: Continuidade por baixo

Seja (X, Σ, μ) um espaço de medida. Se $(E_n)_{n=1}^{\infty} \subset \Sigma$ é uma sequência crescente, então

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \right) = \lim \mu(E_n).$$

Demonstração. Vamos começar mostrando o primeiro item. Seja $(E_n)_{n=1}^{\infty} \subset \Sigma$ uma sequência crescente, isto é, $E_n \subset E_{n+1}$ para todo n natural. Então, como na demonstração da Proposição 1.2.1, $E_n = E_{n-1} \cup (E_n \setminus E_{n-1})$ para todo n natural.

Se definirmos $A_1 = E_1$ e $A_n = E_n \setminus E_{n-1}$ para todo $n \geq 2$, então a sequência (A_j) é disjunta. Para provar esta afirmação basta tomar A_i e A_j com $i \neq j$. Suponha, sem perda de generalidade, que $i < j$. Neste caso, $A_i = E_i \setminus E_{i-1}$ e $A_j = E_j \setminus E_{j-1}$ mas, por hipótese, $E_i \subseteq E_{j-1}$. Portanto, nenhum elemento de A_i pode pertencer a A_j.

Mostrado isso, podemos reescrever E_n como a união de todos os A_j até n.

$$E_n = \bigcup_{j=1}^{n} A_j.$$

De fato, se $x \in E_n$ então $x \in E_{n-1} \cup A_n$. Por indução, $x \in \cup_{j=1}^{n} A_j$. Por outro lado, se $x \in \cup_{j=1}^{n} A_j$, então existe j entre 1 e n tal que $x \in A_j = E_j \setminus E_{j-1} = E_j \cap E_{j-1}^c$. Logo, $x \in E_j \subseteq E_n$.

Por fim, podemos concluir que

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \mu\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu(A_j) = \lim_{k\to\infty} \sum_{j=1}^{k} \mu(A_j).$$

Pela Proposição 1.2.1, temos que

$$\sum_{j=1}^{k} \mu(A_j) = \sum_{j=1}^{k} (\mu(E_j) - \mu(E_{j-1})) = \mu(E_k) \Longrightarrow \lim_{k\to\infty} \sum_{j=1}^{k} \mu(A_j) = \lim_{n\to\infty} \mu(E_n).$$

Note que, como a sequência (E_n) é estritamente crescente, podemos nos certificar que cada A_j é finito. Assim vale a Continuidade por baixo.

■

Proposição 1.2.4: Continuidade por cima

Seja (X, Σ, μ) um espaço de medida. Se $(F_n)_{n=1}^{\infty} \subset \Sigma$ é uma sequência decrescente e a medida de $\mu(F_1)$ é finita, então

$$\mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n\right) = \lim \mu(F_n).$$

Demonstração. Para provar, vamos usar o resultado da Proposição 1.2.3. A ideia é criar uma sequência crescente. Note bem, se a sequência é decrescente e o primeiro conjunto é finito, então todos os outros também são. Definimos, assim, os conjuntos $E_n = F_1 \setminus F_n$ para formar a sequência crescente (E_n).

Por um lado, por Continuidade por baixo temos que

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \lim \mu(E_n) = \mu(F_1) - \lim \mu(F_n).$$

Por outro lado,

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \mu\left(F_1 \setminus \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n\right) = \mu(F_1) - \mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n\right).$$

Igualando as duas equações e cancelando o termo $\mu(F_1)$ temos que $\mu(\cap F_n) = \lim \mu(F_n)$.

■

1.2.3 Conjuntos de Medida Nula e Medidas Completas

Na hora de trabalhar com integrais e espaços de funções, uma categoria bem particular de conjuntos costuma gerar problemas. Estes são os conjuntos de medida nula, aqueles com uma medida insignificante. Pense, por exemplo na medida de um único ponto na reta real. A fim de evitar problemas técnicos mais adiante, mostraremos que existe uma medida que lida com esses pontos problemáticos de uma forma melhor. Mais ainda, veremos que qualquer medida pode ser estendida de forma a evitar esses problemas técnicos.

Vamos começar definindo o que é um conjunto de medida nula.

Definição 1.2.4: Conjunto de Medida Nula

Seja (X, Σ, μ) um Espaço de Medida. Se $N \in \Sigma$ é tal que $\mu(N) = 0$, então dizemos que N é um **conjunto de medida nula**.

Paremos para refletir um pouco. Se um conjunto tem medida nula, ele não deveria afetar em nada o comportamento do nosso objeto de estudo. Assim, se uma certa propriedade vale dentro desse conjunto, é como se ela não existisse. Da mesma forma, se uma propriedade não vale sempre, mas vale nos pontos de interesse, então é como se ela valesse sempre. De fato, diremos que ela vale quase sempre ou para quase todo ponto.

Definição 1.2.5: Para Quase Todo Ponto

Seja (X, Σ, μ) um Espaço de Medida e $P(x)$ uma propriedade dos elementos de X. Se existe um conjunto $N \in \Sigma$ de medida nula tal que P vale para todo $x \in N^{\complement}$, então dizemos que P vale **para quase todo ponto**, o que abreviaremos para (μ-qtp).

Observação 1.2.1: Subconjuntos podem não ser mensuráveis

Seja $N \in \Sigma$ um conjunto de medida nula. Então, todo $A \subset N$, pela monotonicidade da medida, também tem medida nula. No entanto, A não precisa pertencer a Σ.

Isto pode ser um problema na demonstração de algumas proposições. Existem medidas bem comportadas que evitam esses problemas. Elas são chamadas de medidas completas.

Definição 1.2.6: Espaço de Medida Completa

Seja (X, Σ, μ) um Espaço de Medida. Dizemos que ele é um **espaço de medida completa** quando a família dos Conjunto de Medida Nula, $\mathcal{N}_\mu$, é Família Hereditária.

Nesta última etapa do capítulo, vamos estudar formas de estender uma dada medida (ou pré-medida) para criar uma medida bem comportada.

Revisitando os Resultados

Antes disso, vamos rever os principais conceitos sobre as medidas. Vimos que medidas são funções não negativas, monotônicas crescente, aditiva e subaditiva contaveis que satisfazem mais duas propriedades de continuidade. Em linhas gerais, estas medidas reproduzem a nossa intuição do que seria o tamanho de um conjunto. Também vimos que alguns conjuntos podem ter medida nula e que certos espaços de medida podem ser completos. O que vamos ver agora é como podemos estender as medidas para criar uma medida bem comportada.

1.3 Teoremas de Extensão

1.3.1 Teorema de Completamento de Medida

O nosso objetivo aqui vai ser partir de um espaço de medida “ruim” e estender a sua σ-álgebra para que ela inclua todos os subconjuntos dos Conjunto de Medida Nula. Claro, também precisaremos definir uma nova medida para o novo domínio. Essa função será uma extensão da primeira no sentido de que, quando ela estiver restrita a σ-álgebra inicial, ela coincide com a primeira medida. Vejamos o teorema.

Teorema 1.3.1: Completamento de Medida

Seja (X, Σ, μ) um espaço de medida. Existe uma única $\overline{\mu}$, extensão de μ a uma σ-álgebra $\overline{\Sigma}$, tal que $(X, \overline{\Sigma}, \overline{\mu})$ é um Espaço de Medida Completa .

Demonstração. Denotemos por $\mathcal{N}$ a família de todos os conjuntos de medida nula.

$$\mathcal{N} := \{N \in \Sigma;\ \mu(N) = 0\}.$$

Agora vamos expandir a nossa σ-álgebra original para incluir todos os subconjuntos de conjuntos de medida nula.

$$\overline{\Sigma} := \{E \cup F;\ E \in \Sigma \text{ e } F \subset N \in \mathcal{N}\}.$$

A ideia aqui é criar uma segunda função $\overline{\mu} : \overline{\Sigma} \to [0, +\infty]$ tal que $\overline{\mu}$ restrita a Σ coincida com μ, uma extensão da medida original. Como queremos que $\overline{\mu}$ seja uma medida, é preciso mostrar que $\overline{\Sigma}$ é uma σ-álgebra (Exercício 6.3.1).

Como argumentamos anteriormente, para $\overline{\mu}$ ser extensão μ, ela deve coincidir com o valor assumido por μ para conjuntos em Σ. Definiremos, então

$$\overline{\mu}(E \cup F) = \mu(E) \text{ para todo } E \cup F \in \overline{\Sigma}.$$

Para que isso funcione, é preciso mostrar que a função está bem definida (Exercício 6.3.2). Também precisamos mostrar que $\overline{\mu}$ satisfaz a definição de medida (Exercício 6.3.3), além de mostrar que ela é a única extensão existente (Exercício 6.3.4).

Assim, mostramos que sempre podemos considerar um espaço de medida maior do que o original onde a nova medida será completa. ■

1.3.2 Teorema de Extensão de Carathéodory

Os teoremas desta seção nos dão as ferramentas necessárias para construir medidas boas a partir de domínios que não são σ-álgebras . De fato, estas são as ferramentas que formalizam a construção da medida de Lebesgue.

Começaremos definindo o que é uma medida exterior, uma função mais geral do que a medida que desejamos.

Definição 1.3.1: Medida Exterior

Seja $\mathcal{H}$ um Anel de Conjuntos que é Família Hereditária. Dizemos que uma função $\mu^* : \mathcal{H} \to [0, \infty]$ é uma **medida exterior** quando $\mu^*(\varnothing) = 0$, ela é Função Monotônica e Função Subaditiva Contável .

Note que $\mathcal{H}$ não é uma σ-álgebra , ou seja, μ^* é uma Pré-medida. Aqui, vamos criar uma nova noção de mensurabilidade.

Definição 1.3.2: Conjunto μ^*-mensurável

Seja $\mathcal{H}$ um σ-anel Família Hereditária e $\mu^* : \mathcal{H} \to [0, +\infty]$ uma Medida Exterior em $\mathcal{H}$. Dizemos que $E \in \mathcal{H}$ é **μ^*-mensurável** quando, para todo $A \in \mathcal{H}$, vale a igualdade:

$$\mu^*(A) = \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \cap \complement(E))$$

Com isso em mãos, podemos enunciar o seguinte teorema.

Teorema 1.3.2: Teorema de Extensão de Carathéodory

Sejam $\mathcal{H}$ um σ-anel hereditário e μ^* uma medida exterior em $\mathcal{H}$. Então:

1. A coleção $\mathfrak{M} \subset \mathcal{H}$ dos conjuntos μ^*-mensuráveis é um σ-anel.
2. Dados $A \in \mathcal{H}$ e uma sequência $(E_n)_{n=1}^{\infty} \subset \mathfrak{M}$ de elementos dois a dois disjuntos, então
$$\mu^*\left(A \cap \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*\left(A \cap E_n\right).$$
3. A restrição de μ^* a $\mathfrak{M}$ é Função Aditiva Contável, uma medida.
4. Se $E \in \mathcal{H}$ é tal que $\mu^*(E) = 0$ então $E \in \mathfrak{M}$.

Demonstração. Para demonstrar o teorema, precisamos mostrar vários resultados. Aqui serão apresentadas as ideias gerais. Você poderá seguir até o Apêndice para conferir a demonstração passo a passo.

Para mostrar o item 1, precisamos provar que $\mathfrak{M}$ é fechado para a união enumerável e para a diferença de conjuntos (Exercício 6.3.8).

A fim de verificar o item 2, podemos usar indução para mostrar que, para algum $t \in \mathbb{N}$,

$$\mu^*\left(A \cap \bigcup_{n=1}^{t} E_n\right) = \sum_{n=1}^{t} \mu^*\left(A \cap E_n\right).$$

Depois, podemos usar a monotonicidade em

$$A \cap \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right)^{\complement} \subset A \cap \left(\bigcup_{n=1}^{t} E_n\right)^{\complement}$$

para mostrar que

$$\mu^*(A) \geq \left(\sum_{n=1}^{t} \mu^*(A \cap E_n)\right) + \mu^*\left(A \cap \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right)^{\complement}\right).$$

Por fim, usamos a subaditividade e tomamos o limite $t \to \infty$ para concluir que

$$\mu^*(A) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(A \cap E_n)\right) + \mu^*\left(A \cap \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right)^{\complement}\right).$$

Chegamos no resultado desejado substituindo A por $A \cap (\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n)$.

Os últimos dois itens são mais simples.

Para mostrar o Item 3, tome $A = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$ e aplique no Item 2. Temos, então

$$\mu^*\left(A \cap \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \mu^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*\left(E_n\right).$$

Para mostrar o Item 4, tome um conjunto $E \in \mathcal{H}$ de medida nula e um outro $A \in \mathcal{H}$ qualquer. Pela monotonicidade da medida,

$$\mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \cap \complement E) \leq \mu^*(E) + \mu^*(A) = \mu^*(A).$$

Logo, E é μ^*-mensurável. ■

Capítulo 2

Integração

Como prometido, temos agora um espaço onde faz sentido falar de conjuntos mensuráveis. Em algum sentido, precisamos de uma forma de medir funções para chegar na integral que desejamos definir. Portanto, vamos definir o que seria uma função mensurável.

Dessa forma, podemos resumir os conceitos mais importantes deste capítulo na seguinte lista:

1. Funções Mensuráveis
2. Como Operar com Funções Mensuráveis
3. Como Operar com Funções Mensuráveis no Limite

2.1 Funções Mensuráveis

2.1.1 Quando podemos medir funções?

Definição 2.1.1: Funções Mensuráveis

Sejam (X, Σ) e (Y, Σ') Espaço Mensurável. Seja $f : (X, \Sigma) \to (Y, \Sigma')$ uma função tal que, para todo $E \in \Sigma'$, $f^{-1}(E) \in \Sigma$. Então, a função $f : (X, \Sigma) \to (Y, \Sigma')$ é chamada de **função mensurável**.

Neste curso, serão estudadas as funções reais. Dito isso, a proposição abaixo caracteriza a mensurabilidade destas funções de uma forma mais tangível.

Proposição 2.1.1: Funções mensuráveis e σ-álgebras geradas por $\mathcal{C}$

Sejam (X, Σ), $(Y, \sigma[\mathcal{C}])$ Espaço Mensurável para algum $\mathcal{C} \subset \mathcal{P}(Y)$ e $f : (X, \Sigma) \to (Y, \sigma[\mathcal{C}])$. Então f é mensurável se, e somente se, $f^{-1}(E) \in \Sigma$ para todo $E \in \mathcal{C}$.

Demonstração. A ida é imediata, segue da Definição 2.1.1. Para mostrar a volta, precisamos provar que $f^{-1}(E) \in \Sigma$ para cada $E \in \sigma(\mathcal{C})$. Definamos o conjunto abaixo.

$$\mathcal{S} = \{E \in \sigma(\mathcal{C});\ f^{-1}(E) \in \Sigma\}.$$

Note bem, temos, por hipótese, que $\mathcal{C} \subset \mathcal{S}$ por hipótese. Se este conjunto for uma σ-álgebra, então $\sigma(\mathcal{C}) \subset \mathcal{S}$, Logo, $\mathcal{S} = \mathcal{C}$ e f é mensurável. Vamos provar, portanto, que $\mathcal{S}$ é uma σ-álgebra.

Primeiramente, note que $\varnothing$ e X pertencem a $\mathcal{S}$ pois $f^{-1}(\varnothing) = \varnothing$ e $f^{-1}(Y) = X$. Em segundo lugar, perceba que se $A \in \mathcal{S}$ então $f^{-1}(A) \in \Sigma$. Como Σ é σ-álgebra, então $(f^{-1}(A))^c = f^{-1}(A^c) \in \Sigma$. Assim, $A^c \in \mathcal{S}$. Por último, verifique que:

$$(A_n)_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{S} \Rightarrow \left(f^{-1}(A_n)\right)_{n=1}^{\infty} \in \Sigma \Rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} f^{-1}(A_n) = f^{-1}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \in \Sigma \Rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in S.$$

Mostrado que S é uma σ-álgebra, concluímos o argumento de que f é mensurável. ■

A grande relevância desta proposição é a forma como ela nos permite lidar com a mensurabilidade das funções de uma forma mais concreta. Veja como ela pode ser aplicada no caso real.

Corolário 2.1.1: Mensurabilidade de funções reais

Sejam (X, Σ), $(Y, \sigma[\mathcal{C}])$ Espaço Mensurável para algum $\mathcal{C} \subset \mathcal{P}(Y)$ e $f : (X, \Sigma) \to (Y, \sigma[\mathcal{C}])$. Então f é mensurável se, e somente se, $f^{-1}(E) \in \Sigma$ para todo $E \in \mathcal{C}$.

Demonstração. Seja $f : (X, \Sigma) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B})$ uma função mensurável e α um número real. Então $f^{-1}((\alpha, \infty)) \in \Sigma$, isto é, $A_\alpha \in \Sigma$. Pela arbitrariedade da escolha de α, vale a ida da proposição.

Reciprocamente, seja $f : (X, \Sigma) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B})$ uma função tal que, para todo α real, $A_\alpha \in \Sigma$. Pelo Exercício 6.3.4 $\mathcal{B}$ pode ser gerado pelos intervalos na forma (α, ∞). Assim, pela Proposição 2.1.1, só precisamos verificar os intervalos da forma (α, ∞), que pertencem a Σ por hipótese. Logo, f é mensurável. ■

É possível usar o Exercício 6.3.4 para criar outros métodos de verificar a mensurabilidade de uma função real (ou em $\overline{\mathbb{R}}$). Veja o corolário abaixo.

Corolário 2.1.2: Mensurabilidade de funções reais

Seja (X, Σ) um Espaço Mensurável e $f : (X, \Sigma) \to (\overline{\mathbb{R}}, \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}))$. Sejam,

$$A := \{x \in X;\ f(x) = +\infty\} \quad \text{e} \quad B := \{x \in X;\ f(x) = \infty\}$$

e a função $f_0 : (X, \Sigma) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B})$ definida da seguinte forma

$$f_0(x) = \begin{cases} f(x), & \text{se } x \in (A \cup B)^c \\ 0, & \text{se } x \in A \cup B. \end{cases}$$

Então f é mensurável se, e somente se, $A, B \in \Sigma$ e a f_0 é $\mathbb{R}$-mensurável.

Demonstração. Se f for mensurável, então todos os $A, B \in \Sigma$ trivialmente. Além disso, f_0 deve ser $\mathbb{R}$-mensurável pois, caso não fosse, existiria um aberto de $\mathbb{R} \subset \overline{\mathbb{R}}$ tal que a pré-imagem deste aberto não é $\overline{\mathbb{R}}$-mensurável, o que é uma contradição.

Reciprocamente, pela Definição 6.3.15, sabemos que $\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})$ pode ser gerado pelos intervalos na forma (a, ∞) com os conjuntos $\{-\infty\}$, $\{+\infty\}$. Assim, pela Proposição 2.1.1, a hipótese implica a mensurabilidade de f. ■

Exemplo 2.1.1: Função Constante

Seja (X, Σ) um espaço mensurável e $f : (X, \Sigma) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B})$ uma função constante. Então f é uma função mensurável.

Exemplo 2.1.2: Função Característica

Seja (X, Σ) um espaço mensurável, $E \in \Sigma$ um conjunto mensurável e χ_E : $(X, \Sigma) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B})$ uma função definida por:

$$\chi_E(x) = \begin{cases} 1, x \in E \\ 0, x \in \complement(E) \end{cases} .$$

2.1.2 Operando com funções mensuráveis

Proposição 2.1.2: Operações com funções reais mensuráveis

Sejam $f, g : X \to \mathbb{R}$ funções mensuráveis. Então,

- $f + g$,
- λf para todo $\lambda \in \mathbb{R}$,
- f^2,
- $|f|$,
- $\max\{f, g\}$,
- $\min\{f, g\}$,
- fg

são mensuráveis.

Demonstração. Seja $\alpha \in \mathbb{R}$. Como f e g são funções mensuráveis, então os conjuntos

$$\{x \in X;\ f(x) > r\} \in \Sigma$$
$$\{x \in X;\ g(x) > \alpha - r\} \in \Sigma$$

para todo r racional. Chamemos

$$S_r = \{x \in X;\ f(x) > r\} \cap \{x \in X;\ g(x) > \alpha - r\} \in \Sigma.$$

Como, cada S_r é mensurável, a sua união também é pois os racionais são enumeráveis. Assim, basta mostrar que

$$\{x \in X;\ f(x) + g(x) > \alpha\} = \bigcup_{r \in \mathbb{Q}} S_r \in \Sigma.$$

Assim, pela propriedade, $f + g$ é mensurável.

Para mostrar que λf é mensurável, é razoável desconsiderar o caso em que $\lambda = 0$ pois a função identicamente nula é mensurável. Quando este não for o caso, basta mostrar que

$$\{x \in X;\ \lambda f(x) > \alpha\} = \{x \in X;\ f(x) > \frac{\alpha}{\lambda}\} \in \Sigma$$

pois f é mensurável por hipótese.

Para mostrar que f^2 é mensurável, usamos uma estratégia similar. De fato, se α for negativo então a pré-imagem será $X \in \Sigma$. Caso contrário, então

$$\{x \in X;\ \lambda f^2(x) > \alpha\} = \{x \in X;\ f(x) > \sqrt{\alpha}\} \cup \{x \in X;\ f(x) < -\sqrt{\alpha}\} \in \Sigma$$

pois f é mensurável. O caso é análogo para $|f|$.

Para mostrar que $\max\{f, g\}$ e $\min\{f, g\}$ são mensuráveis, mostre que

$$\begin{aligned}\{x \in X;\ \max\{f, g\} > \alpha\} &= \{x \in X;\ f(x) < \alpha\} \cap \{x \in X;\ g(x) < \alpha\} \in \Sigma\\ \{x \in X;\ \min\{f, g\} > \alpha\} &= \{x \in X;\ f(x) > \alpha\} \cap \{x \in X;\ g(x) > \alpha\} \in \Sigma\end{aligned}$$

Para mostrar que fg é mensurável, escreva $fg = \frac{1}{4}((f + g)^2 - (f - g)^2)$ e aplique as propriedades anteriores. ■

As funções nos reais estendidos possuem algumas peculiaridades. De fato, é possível arrumar contraexemplo para a soma. As operações que valem estão listadas abaixo

Proposição 2.1.3: Operações com funções $\overline{\mathbb{R}}$-mensuráveis

Sejam $f, g : X \to \overline{\mathbb{R}}$ funções mensuráveis. Então,

- λf para todo $\lambda \in \mathbb{R}$,
- f^2,
- $|f|$,
- $\max\{f, g\}$,
- $\min\{f, g\}$,
- fg

são mensuráveis.

Demonstração. Aqui os argumentos são os mesmos, mas a soma pode falhar quando as duas funções assumem valores infinitos, caindo no caso patológico $\infty - \infty$. ■

Observação 2.1.1: Notação para funções mensuráveis

Denotaremos por $M(X, \Sigma)$ o conjunto das funções reais Σ-mensuráveis. O conjunto $M^+(X, \Sigma)$ é o conjunto das funções mensuráveis não negativas.

2.1.3 Sequências de funções mensuráveis

Proposição 2.1.4: Sequências de funções mensuráveis

Seja $(f_n) \subset M(X, \Sigma)_{n=1}^{\infty}$ uma sequência de funções mensuráveis. Então,

1. $f(x) = \inf_{n\in\mathbb{N}} f_n(x)$,
2. $F(x) = \sup_{n\in\mathbb{N}} f_n(x)$,
3. $f^*(x) = \liminf_{n\in\mathbb{N}} f_n(x)$,
4. $F^*(x) = \limsup_{n\in\mathbb{N}} f_n(x)$,
5. $g(x) = \lim_{n\in\mathbb{N}} f_n(x)$ (dado que a sequência é pontualmente convergente),

são mensuráveis

Demonstração. **(1)** Para provar que $f(x) = \inf_{n\in\mathbb{N}} f_n(x)$ é mensurável, observe que, para qualquer número real α,

$$\{x \in X : f(x) \geq \alpha\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \{x \in X : f_n(x) \geq \alpha\}.$$

Como cada f_n é mensurável, o conjunto $\{x \in X : f_n(x) \geq \alpha\} \in \Sigma$. Logo, $f(x)$ é mensurável, já que a interseção enumerável de conjuntos mensuráveis pertence a Σ.

(2) De forma análoga, para mostrar que $F(x) = \sup_{n\in\mathbb{N}} f_n(x)$ é mensurável, observe que, para qualquer número real α,

$$\{x \in X : F(x) \leq \alpha\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \{x \in X : f_n(x) \leq \alpha\}.$$

Como cada f_n é mensurável, $\{x \in X : f_n(x) \leq \alpha\} \in \Sigma$, o que implica que $F(x)$ é mensurável.

(3) Para $f^*(x) = \liminf_{n\to\infty} f_n(x)$, recorde que

$$f^*(x) = \sup_{k\geq 1} \inf_{n\geq k} f_n(x).$$

Dado que $f(x) = \inf_{n\in\mathbb{N}} f_n(x)$ e que o sup de funções mensuráveis é mensurável, segue que $f^*(x)$ é mensurável.

(4) Para $F^*(x) = \limsup_{n\to\infty} f_n(x)$, temos que

$$F^*(x) = \inf_{k\geq 1} \sup_{n\geq k} f_n(x).$$

Usando o mesmo raciocínio do $f^*(x)$, as operações de sup e inf pontuais preservam a mensurabilidade, então $F^*(x)$ é mensurável.

(5) Finalmente, se $g(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$, dado que a sequência $(f_n(x))$ converge para todo $x \in X$, então $g(x) = f^*(x) = F^*(x)$. Portanto, $g(x)$ é mensurável. ■

2.2 Integração

Agora que já temos uma noção formal do que é uma medida e sabemos sob quais circunstâncias dadas funções e conjuntos são mensuráveis, podemos construir a integral de Lebesgue.

Para construir a integral de Lebesgue, começaremos trabalhando com funções que só assumem uma quantidade finita de valores. Essas funções são chamadas de funções simples.

2.2.1 Funções Simples

Definição 2.2.1: Funções Simples

Uma função $\varphi : X \to \mathbb{R}$ é dita **simples** quando $\varphi(\mathbb{R})$ é finita.

Definição 2.2.2: Representação semi-padrão de uma funções simples

Seja $(E_i)_{i=1}^n \subset \Sigma$ uma partição de X. Dizemos que uma função simples φ está escrita na **representação semi-padrão** quando existe $(a_i)_{i=1}^n \subset \mathbb{R}$ tal que

$$\varphi = \sum_{i=1}^n a_i \chi_{E_i}.$$

Definição 2.2.3: Representação padrão de uma funções simples

Considere a função simples φ escrita na representação semi-padrão.

$$\varphi = \sum_{i=1}^n a_i \chi_{E_i}.$$

Dizemos que φ está na **representação padrão** quando a sequência (a_i) é dois a dois disjunta.

As funções simples mensuráveis admitem uma forma canônica. Seja φ uma função simples que assume os valores reais distintos $(c_i)_{i=1}^n$. Denotemos por $E_i = \varphi^{-1}(c_i)$. Note que $(E_i)_{i=1}^n$ forma uma partição de X. Assim,

$$\varphi = \sum_{j=1}^{n} c_j \chi_{E_k}$$

é a chamada representação canônica da função. Note que cada c_j é distinto e cada a sequência (E_j) é disjunta.

Definição 2.2.4: Representação padrão de uma funções simples

Seja $\varphi \in M^+(X, \Sigma)$ uma função simples na representação padrão. Então

$$\int_X \varphi \; d\mu = \sum_{i=1}^{n} a_i \mu(E_i).$$

A partir de agora, o nosso objetivo é recuperar algumas das propriedades boas da integral de Riemann a partir da Definição 2.2.4. Veremos que esta definição implica na linearidade da integral.

Lema 2.2.1: Integral de uma função simples na representação SP

Seja $\varphi \in M^+(X, \Sigma)$ uma função simples. Se

$$\varphi = \sum_{i=1}^{n} b_i \chi E_i$$

é uma representação semi-padrão de φ, então

$$\int_X \varphi \; d\mu = \sum_{i=1}^{n} b_i \mu(E_i).$$

Demonstração. Suponha que φ seja uma função simples com a representação

$$\varphi = \sum_{j=1}^{m} \alpha_j 1_{A_j}.$$

A representação semi-padrão de φ é

$$\varphi = \sum_{k=1}^{n} \beta_k 1_{B_k}.$$

Para cada $j = 1, \ldots, m$, defina

$$K_j = \{k : 1 \leq k \leq n \text{ e } \beta_k = \alpha_j\}.$$

Daí,

$$A_j = \bigcup_{k \in K_j} B_k.$$

Assim, temos:

$$
\begin{aligned}
\int_X \varphi d\mu &= \sum_{j=1}^{m} \alpha_j \mu(A_j) \\
&= \sum_{j=1}^{m} \alpha_j \sum_{k\in K_j} \mu(B_k) \\
&= \sum_{j=1}^{m} \sum_{k\in K_j} \alpha_j \mu(B_k) \\
&= \sum_{j=1}^{m} \sum_{k\in K_j} \beta_k \mu(B_k) \\
&= \sum_{k=1}^{n} \beta_k \mu(B_k),
\end{aligned}
$$

pois

$$\bigcup_{j=1}^{m} K_j = \{1, \dots, n\}.$$

■

Proposição 2.2.1: Linearidade da integral de funções simples

Sejam $\varphi, \psi \in M^+(X, \Sigma)$ funções simples e $c \geq 0$. Então

1. $\int_X \; c\varphi \; d\mu = c \int_X \; \varphi \; d\mu$.
2. $\int_X \; \varphi + \psi \; d\mu = \int_X \; \varphi \; d\mu + \int_X \; \psi \; d\mu$

Demonstração. Para o primeiro item precisamos considerar dois casos. No primeiro caso, $c = 0$ e a função simples que devemos integrar é a função simples constante. Isto valida a propriedade trivialmente pois teríamos que multiplicar a medida do conjunto inteiro por 0. Mesmo se a medida for infinita, assumiremos ao longo destas notas que $0 \cdot \infty = 0$. Se $c > 0$ e φ assume os valores $\{c_j\}_{j=1}^{n}$, então

$$\int_X \; c\varphi \; d\mu = \sum_{j=i}^{n} c \, c_j \mu(f^{-1}(c_j)) = c \sum_{j=i}^{n} c_j \mu(f^{-1}(c_j)) = c \int_X \varphi \; d\mu.$$

Vamos demonstrar o segundo item. Comece escrevendo φ e ψ na forma canônica.

$$\varphi = \sum_{i=1}^{n} a_i \chi_{A_i} \qquad \text{e} \qquad \psi = \sum_{j=1}^{m} b_j \chi_{B_j}.$$

Pelo Lema (Colocar no Apêndice), podemos $\chi_{A_i} = \sum_{j=1}^{m} \chi_{A_i \cap B_j}$. Portanto,

$$\varphi = \sum_{i=1}^{n} a_i \chi_{A_i} = \sum_{i=1}^{n} a_i \sum_{j=1}^{m} \chi_{A_i \cap B_j}$$

Como a_i é constante (com relação ao somatório de dentro), podemos passar para dentro. O processo é análogo para ψ, de onde vem que

$$\varphi = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} a_i \chi_{A_i \cap B_j} \qquad \text{e} \qquad \psi = \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} b_j \chi_{A_i \cap B_j}.$$

Podemos trocar a ordem dos somatórios de ψ uma vez que é uma soma finita. Com isso, temos

$$\varphi + \psi = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} (a_i + b_j) \chi_{A_i \cap B_j}.$$

Note que esta é uma representação semi-padrão da função simples $\varphi + \psi$. Logo, pelo Lema 2.2.1,

$$\begin{aligned} \int_X \varphi + \psi \, d\mu &= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} (a_i + b_j) \mu(A_i \cap B_j) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} a_i \mu(A_i \cap B_j) + \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} b_j \mu(A_i \cap B_j) \\ &= \int_X \varphi d\mu + \int_X \psi d\mu \end{aligned}$$

■

2.2.2 A Integral de Lebesgue

Nem todas as funções assumem um número finito de valores, mas podemos considerar o conjunto das funções simples menores do que uma dada função e tomar o supremo deste conjunto para generalizar a nossa definição de integral.

Definição 2.2.5: Integral de Lebesgue de Função Positiva

Seja $f \in M^+(X, \Sigma)$. Então

$$\int_X f \, d\mu = \sup \left\{ \int_X \varphi \, d\mu; \ \varphi \in M^+(X, \Sigma) \text{ e } 0 \leq \varphi \leq f \right\}.$$

Antes de partirmos para algumas desigualdades importantes, faz sentido definirmos a integral restrita a um dado conjunto.

Definição 2.2.6: Integral restrita a um conjunto mensurável

Seja $f \in M^+(X, \Sigma)$ e $E \in \Sigma$. Então

$$\int_E f \, d\mu = \int_X f \chi_E \, d\mu.$$

Os lemas abaixo também são importantíssimos para o desenvolvimento do resto da teoria.

Lema 2.2.2: Desigualdade de integrais

Sejam $f, g \in M^+(X, \Sigma)$ e $E, F \subset \Sigma$.

1. Se $f \leq g$, então $\int_X f \ d\mu \leq \int_X g \ d\mu$.
2. Se $E \subseteq F$, então $\int_E f \ d\mu \leq \int_F f \ d\mu$.

Demonstração. Para mostrar o primeiro item, perceba que toda função $\varphi \in M^+(X, \Sigma)$ simples tal que $\varphi \leq f$ também é, por hipótese, tal que $\varphi \leq g$. Ou seja,

$$\left\{ \int_X \varphi \, d\mu; \ \varphi \in M^+(X, \Sigma) \text{ e } 0 \leq \varphi \leq f \right\} \subseteq \left\{ \int_X \varphi \, d\mu; \ \varphi \in M^+(X, \Sigma) \text{ e } 0 \leq \varphi \leq g \right\}.$$

Tomando o supremo dos dois lados, obtemos, pela Definição 2.2.5,

$$\int_X f \ d\mu \leq \int_X g \ d\mu.$$

Já para o segundo item basta notar que $f \chi_E \leq f \chi_F$ por hipótese. A demonstração segue da aplicação do primeiro item e da Definição 2.2.6. ■

Proposição 2.2.2: Linearidade da integral de funções não negativas

Sejam $f, g \in M^+(X, \Sigma)$ e $\lambda \geq 0$. Então

1. $\int_X \ \lambda f \ d\mu = \lambda \int_X \ f \ d\mu$.
2. $\int_X \ f + g \ d\mu = \int_X \ f \ d\mu + \int_X \ g \ d\mu$

Demonstração. **(1)** Se $\lambda = 0$, a igualdade é clara. Para $\lambda > 0$, seja $(\varphi_n)_{n=1}^{\infty}$ uma sequência crescente de funções simples em $M^+(X, \Sigma)$ que converge para f. Como $\lambda \varphi_n$ é uma sequência crescente de funções simples que converge para λf, pelo Teorema da Convergência Monótona, temos

$$\int_X \lambda f \, d\mu = \lim_{n \to \infty} \int_X \lambda \varphi_n \, d\mu = \lim_{n \to \infty} \lambda \int_X \varphi_n \, d\mu = \lambda \int_X f \, d\mu.$$

(2) Seja $(\varphi_n)_{n=1}^{\infty}$ e $(\psi_n)_{n=1}^{\infty}$ sequências crescentes de funções simples, convergindo para f e g, respectivamente. Então, $(\varphi_n + \psi_n)_{n=1}^{\infty}$ é uma sequência crescente de funções simples que converge para $f + g$. Pelo Teorema da Convergência Monótona, temos

$$\int_X (f+g)\,d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_X (\varphi_n+\psi_n)\,d\mu = \lim_{n\to\infty} \left(\int_X \varphi_n\,d\mu + \int_X \psi_n\,d\mu \right) = \int_X f\,d\mu + \int_X g\,d\mu.$$

■

Relembrando o nosso objetivo, queremos recuperar boas propriedades da integral de Riemann e criar novas ferramentas para trabalhar com essa integral. O próximo tópico trata de criar essas ferramentas.

Definição 2.2.7: Integral de Lebesgue

A integral de uma função mensurável pode ser definida para funções na classe

$$\mathcal{L}_1(X, \Sigma, \mu) = \left\{ f \in M(X, \Sigma);\ \int f^+ d\mu \text{ e } \int f^- d\mu \text{ são limitadas} \right\}.$$

A integral de f é então dada por:

$$\int f\,d\mu = \int f^+\,d\mu - \int f^-\,d\mu.$$

2.3 Teoremas de Convergência (Parte 1)

Os teoremas abaixo nos permitem tirar o limite de dentro da integral, o que nos permitirá, por exemplo, mostrar a linearidade da integral de Lebesgue. Esses teoremas de convergência são centrais no estudo da teoria da medida.

2.3.1 Teorema da Convergência Monótona

Teorema 2.3.1: Teorema da Convergência Monótona

Seja $(f_n) \subset M^+(X, \Sigma)$ uma sequência monótona crescente tal que $f_n \xrightarrow{p} f$. Então $f \in M^+(X, \Sigma)$ e

$$\int_X \left(\lim_{n\to\infty} f_n \right)\,d\mu = \lim_{n\to\infty} \left(\int_X f_n\,d\mu \right) \tag{2.1}$$

Demonstração. A mensurabilidade de f segue diretamente da Proposição 2.1.4, mas é um passo importante para que faça sentido integrar essa função segundo a Definição 2.2.5. Provaremos a segunda parte do teorema mostrando que

$$\int_X \left(\lim_{n\to\infty} f_n \right)\,d\mu \geq \lim_{n\to\infty} \left(\int_X f_n\,d\mu \right) \quad \text{e} \quad \int_X \left(\lim_{n\to\infty} f_n \right)\,d\mu \leq \lim_{n\to\infty} \left(\int_X f_n\,d\mu \right).$$

Para mostrar que a primeira desigualdade, note que, como (f_n) é uma sequência monótona crescente, então $f_n \leq f_{n+k}$ para todos n, k natural. Assim, se $k \to \infty$ então $f_{n+k} \to f$ para todo n. Logo,

$$f_n \leq \lim_{n\to\infty} f_n \quad \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Pelo Lema 2.2.2, o fato acima nos dá que

$$\int_X f_n \, d\mu \leq \int_X \left(\lim_{n\to\infty} f_n\right) \, d\mu \quad \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Note que o lado direito da desigualdade é constante. De fato, ele será igual a $\int_X f d\mu$. Assim, podemos tomar o limite dos dois lados para concluir que

$$\lim_{n\to\infty} \left(\int_X f_n \, d\mu\right) \leq \int_X \left(\lim_{n\to\infty} f_n\right) \, d\mu \iff \int_X \left(\lim_{n\to\infty} f_n\right) \, d\mu \geq \lim_{n\to\infty} \left(\int_X f_n \, d\mu\right).$$

Aqui vale notar que o Lema 2.2.2 garante que $\left(\int_X f_n d\mu\right)$ também é uma sequência crescente, o que justifica a existência do limite em $\overline{\mathbb{R}}$. Resta mostrarmos a outra desigualdade.

A ideia é mostrar que, para toda função simples $\varphi \leq f$, teremos $\int_X \varphi \leq \lim(\int_X f_n d\mu)$. Depois poderemos tomar o supremo dos dois lados da desigualdade para chegar no resultado desejado.

Começaremos tomando uma função $\varphi \in M^+(X, \Sigma)$ simples tal que $\varphi \leq f$ e $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $\alpha \in (0, 1)$. Agora, defina o conjunto

$$A_n := \{x \in X;\ \alpha\varphi(x) \leq f_n(x)\}. \tag{2.2}$$

Faremos três afirmações sobre esse conjunto.

1. $A_n \in \Sigma$ para todo n natural.
2. $(A_n)_{n=1}^{\infty} \subset \Sigma$ é uma sequência monótona crescente.
3. $\cup_{n=1}^{\infty} A_n = X$.

Vamos provar o Item 1. Aplicando as operações estabelecidas na Proposição 2.1.2, temos que $f_n - \alpha\varphi$ é uma função mensurável para todo n. Além disso, podemos escrevermos cada A_n como a pré-imagem da função $f_n - \alpha\varphi$.

$$A_n = (f_n - \alpha\varphi)^{-1}((0, \infty)) \; \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Logo, pela Definição 2.1.1, $A_n \in \Sigma$ para todo n.

Vamos provar o Item 2. Para tanto precisamos mostrar que $A_n \subset A_{n+1}$ para todo n. Esta afirmação segue imediatamente da monotonicidade de (f_n) uma vez que se $x \in A_n$ então $\alpha\varphi(x) \leq f_n(x) \leq f_{n+1}$.

Vamos provar o Item 3. A primeira continência é imediata uma vez que cada A_n é um subconjunto de X. No entanto, ainda é preciso mostrar que $X \subseteq \cup_{n=1}^{\infty} A_n$. Tome $x \in X$. Sabemos que $\varphi(x) \leq f(x)$ por hipótese. Como $\alpha \in (0, 1)$, então $\alpha\varphi(x) \leq f(x)$.

Queremos mostrar que existe um N natural tal que $\alpha\varphi(x) \leq f_N(x)$. Faremos isso por contradição. Suponha que, para todo $n \in \mathbb{N}$, $f_n(x) < \alpha\varphi(x)$. Tomando o limite dos dois lados teríamos que $\lim f_n(x) = f(x) < \alpha\varphi(x)$, o que contradiz a nossa hipótese. Logo, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\alpha\varphi(x) \leq f_N(x)$. Assim sendo, $x \in A_N \subset \cup_n^\infty A_n$. Por fim, concluímos que $\cup_{n=1}^\infty A_n = X$.

Provados estes detalhes técnicos, vamos usar o Lema 2.2.2 mais uma vez. Note que $A_n \subset X$ para todo n. Portanto, pelo segundo item do lema, temos que $\int_{A_n} f_n d\mu \leq \int_X f_n d\mu$ para todo n. Agora, pela definição de A_n, temos que $\alpha\varphi\chi_{A_n} \leq f_n\chi_{A_n}$. Logo, pelo primeiro item do lema temos que $\int_{A_n} \alpha\varphi d\mu \leq \int_{A_n} f_n d\mu$. Juntando essas duas desigualdades, obtemos

$$\alpha \int_{A_n} \varphi \, d\mu \leq \int_X f_n \, d\mu \Rightarrow \alpha \lim_{n\to\infty} \int_{A_n} \varphi \, d\mu \leq \lim_{n\to\infty} \left(\int_X f_n \, d\mu \right).$$

Estamos quase chegando no resultado desejado, resta mostrar que $\lim \int_{A_n} \varphi \, d\mu = \int_X \varphi \, d\mu$. Esta demonstração pode ser encontrada em (Fazer).

Por fim, podemos tomar o limite de α indo para 1 dos dois lados e depois tomar o supremo de ambos os lados.

$$\alpha \int_X \varphi \, d\mu \leq \lim_{n\to\infty} \left(\int_X f_n \, d\mu \right) \Rightarrow \lim_{\alpha\to 1} \alpha \int_X \varphi \, d\mu = \int_X \varphi \, d\mu \leq \lim_{n\to\infty} \left(\int_X f_n \, d\mu \right).$$

$$\therefore \sup \left(\int_X \varphi \, d\mu \right) = \int_X f \, d\mu \leq \lim_{n\to\infty} \left(\int_X f_n \, d\mu \right).$$

Assim, chegamos na desigualdade que buscávamos:

$$\int_X \left(\lim_{n\to\infty} f_n \right) \, d\mu \leq \lim_{n\to\infty} \left(\int_X f_n \, d\mu \right).$$

■

Lema 2.3.1: Lema de Fatou

Seja $(f_n) \subset M^+(X, \Sigma)$. Então,

$$\int_X \left(\liminf_{n\to\infty} f_n \right) \, d\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \left(\int_X f_n \, d\mu \right).$$

Demonstração. Defina $g_n = \inf_{k\geq n} f_k$. Pela definição de g_n, para todo $k \geq n$, $g_n \leq f_k$. Assim, pelo Lema 2.2.2,

$$\int_X g_n \, d\mu \leq \int_X f_k \, d\mu \quad \forall \, k \geq n.$$

Portanto, tomando o ínfimo dos dois lados,

$$\int_X g_n \, d\mu \leq \inf_{k\geq n} \int_X f_k \, d\mu.$$

Tomemos o limite dos dois lados.

$$\lim_{n\to\infty}\left(\int_X g_n\ d\mu\right) \leq \lim_{n\to\infty}\left(\inf_{k\geq n}\int_X f_k\ d\mu\right) = \liminf_{n\to\infty}\left(\int_X f_k\ d\mu\right). \tag{2.3}$$

Estamos bem próximo dos resultado final, basta observar que $(g_n) \subset M^+(X,\Sigma)$, pelo Lema 2.1.4, e que esta é uma sequência monótona crescente que converge para $\liminf f_n$. Portanto, podemos aplicar o Teorema da Convergência Monótona (2.3.1) e concluir que

$$\lim_{n\to\infty}\left(\int_X g_n\ d\mu\right) = \int_X \liminf_{n\to\infty} f_n\ d\mu.$$

Assim, juntando isso com (2.3), temos que

$$\int_X \left(\liminf_{n\to\infty} f_n\right)\ d\mu \leq \liminf_{n\to\infty}\left(\int_X f_n\ d\mu\right).$$

■

2.3.2 Teorema da Convergência Dominada

Para chegar no teorema da convergência dominada, vamos passar a estudar integrais de funções que não são necessariamente positivas.

Lema 2.3.2: Integral de funções nulas quase sempre

Seja (X,Σ,μ) um Espaço de Medida e $f \in L$. Então,

$$\int_X |f|\ d\mu = 0 \Longleftrightarrow f = 0(\mu\text{-qtp}).$$

Demonstração. Suponha que $\int_X |f|\ d\mu = 0$. Defina $E_n = \{x \in X : f(x) > \frac{1}{n}\}$. Como $f \geq \frac{1}{n}\chi_{E_n}$, temos

$$0 = \int_X |f|\ d\mu \geq \frac{1}{n}\mu(E_n) \geq 0.$$

Logo, $\mu(E_n) = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e, portanto,

$$\mu(\{x \in X : f(x) > 0\}) = \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = 0.$$

Portanto, $f = 0$ μ-qtp.

Reciprocamente, se $f = 0$ (μ-qtp), então $|f| = 0$ (μ-qtp) e, por consequência,

$$\int_X f\ d\mu = \int_X |f|\ d\mu = 0.$$

■

Proposição 2.3.1: Condição para integrabilidade

Uma função $f \in L$ se, e somente se, $|f| \in L$. Neste caso,

$$\left|\int f\, d\mu\right| \leq \int |f|\, d\mu.$$

Demonstração. Comecemos supondo que f é integrável. Sabemos que $|f| = f^+ + f^-$. Neste caso, a parte positiva de $|f|$, denotada por $|f|^+$ é a própria soma de funções mensuráveis $f^+ + f^-$. Por outro lado, a parte negativa, $|f|^- = 0$, pois a função é não negativa. Pelo Lema 2.3.2, temos que

$$\int |f|^-\, d\mu = 0 < +\infty.$$

Ademais, pela Proposição 2.2.2,

$$\int |f|^+\, d\mu = \int f^+ + f^- d\mu = \int f^+ d\mu + \int f^- d\mu.$$

Como, pela Definição 2.2.7,

$$\int f^+ d\mu < +\infty \quad \text{e} \quad \int f^- d\mu < +\infty, \text{ então} \int |f|^+\, d\mu < +\infty.$$

concluimos que $|f|$ é integrável e

$$\int |f|\, d\mu = \int |f|^+\, d\mu + \int |f|^-\, d\mu = \int f^+ d\mu + \int f^- d\mu.$$

Reciprocamente, se $|f|$ é integrável, então f^+ e f^- são integráveis. Portanto, f é integrável.

Mostrado isso, podemos concluir, pela desigualdade triangular, que

$$\left|\int f d\mu\right| = \left|\int f^+ - f^- d\mu\right| \leq \left|\int f^+ d\mu\right| + \left|\int f^- d\mu\right| = \int f^+ d\mu + \int f^- d\mu = \int |f|\, d\mu.$$

■

Proposição 2.3.2: Linearidade da integral de Lebesgue

Sejam $f, g \in M(X, \Sigma)$ e $\lambda \geq 0$. Então

1. $\int_X \lambda f\ d\mu = \lambda \int_X f\ d\mu$.
2. $\int_X f + g\ d\mu = \int_X f\ d\mu + \int_X g\ d\mu$

Demonstração. Se $\lambda = 0$, o resultado é claro. Se $\lambda > 0$, então

$$(\lambda f)^+ = \lambda f^+ \quad \text{e} \quad (\lambda f)^- = \lambda f^-.$$

Logo,

$$\int (\lambda f)^+ \, d\mu = \int \lambda f^+ \, d\mu = \lambda \int f^+ \, d\mu < \infty,$$
$$\int (\lambda f)^- \, d\mu = \int \lambda f^- \, d\mu = \lambda \int f^- \, d\mu < \infty,$$

e portanto λf é integrável, com

$$\int \lambda f \, d\mu = \int (\lambda f)^+ \, d\mu - \int (\lambda f)^- \, d\mu = \lambda \int f^+ \, d\mu - \lambda \int f^- \, d\mu = \lambda \int f \, d\mu.$$

Agora, se $f, g \in L_1(X, \Sigma, \mu)$, então $|f|, |g| \in L_1(X, \Sigma, \mu)$. Note que $|f+g| \leq |f|+|g|$ e portanto

$$\int (|f| + |g|) \, d\mu < \infty.$$

Logo $f + g \in L_1(X, \Sigma, \mu)$ e daí $f + g \in L_1(X, \Sigma, \mu)$. Como

$$f + g = (f^+ - f^-) + (g^+ - g^-) = (f^+ + g^+) - (f^- + g^-),$$

segue da Observação 1.8.3 que

$$\begin{aligned} \int (f+g) \, d\mu &= \int (f^+ + g^+) \, d\mu - \int (f^- + g^-) \, d\mu \\ &= \int f^+ \, d\mu + \int g^+ \, d\mu - \int f^- \, d\mu - \int g^- \, d\mu \\ &= \int f \, d\mu + \int g \, d\mu. \end{aligned}$$

■

Corolário 2.3.1: Funções dominadas por função integrável é integrável

Se $f \in M$, $g \in L$ e $|f| \leq |g|$, então $f \in L$ e

$$\int |f| \, d\mu \leq \int |g| \, d\mu.$$

Demonstração. Como $|f| \leq |g|$, pelo Lema 2.2.2, temos que $\int |f| \, d\mu \leq \int |g| \, d\mu$ e, portanto, $|f|$ é integrável. Pela Proposição 2.3.1, temos, então, que f é integrável. ■

Teorema 2.3.2: Teorema da Convergência Dominada

Sejam $(f_n)_{n=1}^{\infty} \subset L$ e $f \in M(X, \Sigma)$ tais que

$$\lim_{n \to \infty} f_n(x) = f(x).$$

Se existe $g \in L$ tal que $|f_n| \leq g$ para todo n, então $f \in L$ e

$$\int_X f d\mu = \lim_{n \to \infty} \int_X f_n d\mu.$$

Demonstração. Como $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ e cada f_n é mensurável, segue que f é mensurável. Como $|f_n| \leq g$ para todo n, temos que $|f| \leq g$. Mas, por hipótese, g é integrável e, consequentemente, $|g|$ é integrável. Portanto, $|f|$ é integrável e, finalmente, f é integrável. Temos ainda

$$-|g| \leq f_n \leq |g|$$

e daí segue que

$$|g| + f_n \geq 0 \text{ para todo } n.$$

Portanto,

$$\begin{aligned}\int_X |g|d\mu + \int_X f_n d\mu &= \int_X (|g| + f_n)d\mu \\ &= \int_X \lim_{n\to\infty}(|g| + f_n)d\mu\end{aligned}$$

Pelo Lema de Fatou,

$$\leq \liminf_{n\to\infty} \int_X (|g| + f_n)d\mu$$

$$\begin{aligned}&= \liminf_{n\to\infty}\left(\int_X |g|d\mu + \int_X f_n d\mu\right) \\ &= \int_X |g|d\mu + \liminf_{n\to\infty}\int_X f_n d\mu.\end{aligned}$$

Logo,

$$\int_X f d\mu \leq \liminf_{n\to\infty}\int_X f_n d\mu.$$

Por outro lado,

$$|g| - f_n \geq 0 \text{ para todo } n.$$

Portanto,

$$\begin{aligned}\int_X |g|d\mu - \int_X f_n d\mu &= \int_X (|g| - f_n)d\mu \\ &= \int_X \lim_{n\to\infty}(|g| - f_n)d\mu\end{aligned}$$

Pelo Lema de Fatou,

$$\leq \liminf_{n\to\infty} \int_X (|g| - f_n)d\mu$$

$$\begin{aligned}&= \liminf_{n\to\infty}\left(\int_X |g|d\mu - \int_X f_n d\mu\right) \\ &= \int_X |g|d\mu - \limsup_{n\to\infty}\int_X f_n d\mu.\end{aligned}$$

Consequentemente,

$$\int_X f d\mu \geq \limsup_{n\to\infty} \int_X f_n d\mu.$$

Finalmente, temos

$$\limsup_{n\to\infty} \int_X f_n d\mu \leq \int_X f d\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \int_X f_n d\mu,$$

e, portanto,

$$\int_X f d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_X f_n d\mu.$$

■

Teorema 2.3.3: Teorema da Convergência Dominada (μ-qtp)

Sejam $(f_n)_{n=1}^{\infty} \subset L$ e $f \in M(X, \Sigma)$ tais que

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x) \ (\mu\text{-qtp}).$$

Se existe $g \in L$ tal que $|f_n| \leq |g|$ (μ-qtp) para todo n, então $f \in L$ e

$$\int_X f d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_X f_n d\mu.$$

Demonstração. Seja $N_0 \in \Sigma$ tal que $\mu(N_0) = 0$ e $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ para todo $x \in X \setminus N_0$. Defina $N_n \in \Sigma$ com $\mu(N_n) = 0$ tal que $|f_n(x)| \leq |g(x)|$ para todo $x \in X \setminus N_n$.

Defina $N = \bigcup_{n=0}^{\infty} N_n$. Então, $\mu(N) = 0$ e temos que $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ para todo $x \in X \setminus N$ e $|f_n(x)| \leq |g(x)|$ para todo $x \in X \setminus N$.

Se $A = X \setminus N$, então pelo Teorema da Convergência Dominada, $f|_A$ é integrável e

$$\int_A f \, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_A f_n \, d\mu.$$

Como

$$f = f|_A + \chi_N \cdot f \quad \text{(logo } f \text{ é integrável)} \quad \text{e} \quad f_n = f_n|_A + \chi_N \cdot f_n \quad \text{para todo } n,$$

pelo Lema 2.3.2, temos que

$$\int_X f_n \, d\mu = \int_A f_n \, d\mu \quad \text{e} \quad \int_X f \, d\mu = \int_A f \, d\mu.$$

Logo,

$$\int_X f \, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_X f_n \, d\mu.$$

■

Capítulo 3

Os Espaços de Lebesgue

3.1 Espaços L^p

3.1.1 Construção de um espaço vetorial normado

O nosso objetivo neste capítulo é construir um espaço de Banach com as funções. Para tanto, vamos mostrar que o espaço das funções é um espaço vetorial, introduzir uma norma e, por fim, mostrar que ele é um espaço completo.

Vamos começar introduzindo uma semi-norma.

Definição 3.1.1: Semi-norma $\mathcal{L}_p$

Seja $M(X, \Sigma)$ o espaço vetorial das funções reais mensuráveis e $p \in [1, \infty)$. Definimos

$$\|f\|_p := \left(\int_X |f|^p \, d\mu \right)^{\frac{1}{p}}$$

Definimos uma função integrável como aquela que tem norma finita. Isto dá origem aos nossos espaços $\mathcal{L}_p$.

Definição 3.1.2: Espaço $\mathcal{L}_p$

Seja $M(X, \Sigma)$ o espaço vetorial das funções reais mensuráveis e $p \in [1, \infty)$. Definimos

$$\mathcal{L}_p := \left\{ f \in \mathcal{F}(X, \mathbb{R}); \; \|f\|_p < \infty \right\}.$$

Não é difícil verificar que este é, de fato, um espaço vetorial equipa com uma semi-norma. Um grande incoveniente dos espaços $\mathcal{L}_p$ é que ele não diferencia funções, isto é, $\|\cdot\|$ não é uma norma. Vamos contornar este problema com uma construção inteligente.

Definição 3.1.3: Relação de Equivalência para o Espaço L_p

Sejam (X, Σ, μ) um espaço de medida e $f, g : X \to \mathbb{R}$. Dizemos que f e g são **equivalentes** (denotado $f \sim g$) se $f = g$ (μ-qtp).

Vamos definir o conjunto de todas as funções mensuráveis que são equivalentes a f, ou seja, funções que diferem de f apenas em um conjunto de medida nula. Com este truque, colocamos todas as funções iguais quase sempre em um mesmo bolo, eliminando o nosso problemas inicial.

Definição 3.1.4: Classe de Equivalência de uma Função

Seja (X, Σ, μ) um espaço de medida e $f : X \to \mathbb{R}$ uma função mensurável. Definimos a **classe de equivalência** de f como

$$[f] \coloneqq \{g : X \to \mathbb{R};\ g = f\ (\mu\text{-qtp})\}.$$

A partir desta relação, identificamos a norma de uma classe de equivalência com a norma de um representante daquela classe.

Definição 3.1.5: Espaço L_p

Seja (X, Σ, μ) um espaço de medida. Para $1 \leq p < \infty$, definimos o conjunto

$$L_p(X, \Sigma, \mu) \coloneqq \Big\{[f]; \|[f]\|_p = \|f\|_p < \infty\Big\}.$$

Tratamos o caso em que $p = +\infty$ de forma análoga. Definimos a norma como a norma do supremo.

Definição 3.1.6: Semi-norma $\mathcal{L}_\infty$

Seja $\mathcal{L}_\infty(X, \Sigma, \mu)$ o espaço vetorial das funções reais limitadas μ-(qtp). Definimos,

$$S_f(N) \coloneqq \sup_{x \in X} \{|f(x)|;\ x \notin N\},$$

$$\|f\|_p \coloneqq \inf\{S_f N;\ N \in \Sigma, \mu(N) = 0\}.$$

Para que esta seminorma vire uma norma, fazemos a mesma construção via classes de equivalência.

Definição 3.1.7: Espaço L_∞

Seja $\mathcal{L}_\infty(X, \Sigma, \mu)$ o espaço vetorial das funções reais limitadas μ-(qtp). Definimos,

$$L_\infty(X, \Sigma, \mu) \coloneqq \{[f]; f \in \mathcal{L}_\infty\}.$$

3.1.2 Desigualdades de Hölder e Minkowski

As desigualdades de Hölder e Minkowski são fundamentais para o estudo dos espaços L_p e suas propriedades. Em particular, a desigualdade de Minkowski é a prova que $\|\cdot\|_p$ satisfaz a deigualdade triangular.

Para provar a desigualdade de Hölder, vamos provar o lema abaixo.

Lema 3.1.1: .

Para quaisquer $a, b > 0$, temos

$$a^p b^q \leq \frac{a}{p} + \frac{b}{q}.$$

Demonstração. Considere, para cada $0 < \alpha < 1$, a função $f_\alpha : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ dada por $f_\alpha(t) = t^\alpha - \alpha t$. Temos

$$f'_\alpha(t) = \alpha t^{\alpha-1} - \alpha = \alpha(t^{\alpha-1} - 1).$$

Logo,

$$f'_\alpha(t) > 0 \text{ se } 0 < t < 1 \quad \text{e} \quad f'_\alpha(t) < 0 \text{ se } t > 1,$$

e f_α tem um máximo em $t = 1$. Portanto,

$$f_\alpha(t) \leq f_\alpha(1)$$

para todo $t > 0$, e

$$t^\alpha \leq \alpha t + (1 - \alpha).$$

Fazendo $t = \frac{a}{b}$ e $\alpha = \frac{1}{p}$, temos

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{p}} \leq \frac{1}{p}\frac{a}{b} + \left(1 - \frac{1}{p}\right).$$

Multiplicando a desigualdade acima por b, obtemos

$$a^{\frac{1}{p}} b^{\frac{1}{q}} \leq \frac{a}{p} + \frac{b}{q},$$

o que demonstra o lema. ■

Teorema 3.1.1: Desigualdade de Hölder

Sejam $f \in L_p$ e $g \in L_q$, com $1 \leq p, q \leq \infty$ e $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Então, $fg \in L_1$ e

$$\int |f(x)g(x)|\, dx \leq \|f\|_p \|g\|_q.$$

Demonstração. O caso em que $\|f\|_p = 0$ ou $\|g\|_q = 0$ é triva. De fato, a desigualdade vira $0 \leq 0$. Suponha então $\|f\|_p \neq 0$ e $\|g\|_q \neq 0$.

Pelo Lema 3.1.1, temos que, para quaisquer $a, b > 0$,

$$a^p b^q \leq \frac{a}{p} + \frac{b}{q}. \tag{3.1}$$

Tome, em (3.1)

$$a = \frac{|f(x)|^p}{\|f\|_p^p} \quad \text{e} \quad b = \frac{|g(x)|^q}{\|g\|_q^q}.$$

Assim, temos

$$\int_X \frac{|f(x)g(x)|}{\|f\|_p \|g\|_q} d\mu \leq \int_X \frac{|f(x)|^p}{p\,\|f\|_p^p} d\mu + \int_X \frac{|g(x)|^q}{q\,\|g\|_q^q} d\mu = 1,$$

e o resultado segue. ■

Teorema 3.1.2: Desigualdade de Minkowski

Sejam $f, g \in L_p$, com $1 \leq p \leq \infty$. Então, $f + g \in L_p$ e

$$\|f+g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p . \tag{3.2}$$

Demonstração. Se $\|f+g\|_p = 0$, o resultado é claro. Suponha $\|f+g\|_p \neq 0$. Perceba que para todo $x \in X$, temos

$$\begin{aligned} |f(x)+g(x)|^p &\leq (|f(x)|+|g(x)|)^p \\ &\leq (\max\{|f(x)|,|g(x)|\} + \max\{|f(x)|,|g(x)|\})^p \\ &\leq 2^p \max\{|f(x)|^p, |g(x)|^p\} \\ &\leq 2^p (|f(x)|^p + |g(x)|^p) . \end{aligned}$$

E daí segue que $f + g \in L_p(X, \Sigma, \mu)$.

Agora vamos provar (3.2). Se $p = 1$, o resultado é consequência direta da Proposição 2.3.1. Suponha $p > 1$. Então

$$|f+g|^p = |f+g||f+g|^{p-1} \leq (|f|+|g|)\,|f+g|^{p-1}. \tag{3.3}$$

Se $1/p + 1/q = 1$, temos $(p-1)q = p$, e portanto $|f+g|^{p-1} \in L_q(X, \Sigma, \mu)$. Da Desigualdade de Hölder, temos

$$\int_X |f||f+g|^{p-1} d\mu \leq \left(\int_X |f|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_X |f+g|^q d\mu\right)^{\frac{1}{q}},$$

$$\int_X |g||f+g|^{p-1} d\mu \leq \left(\int_X |g|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_X |f+g|^q d\mu\right)^{\frac{1}{q}}.$$

Das duas desigualdades acima e de 3.3, temos que

$$\int_X |f+g|^p d\mu \leq \left(\int_X |f|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_X |f+g|^q d\mu\right)^{\frac{1}{q}} + \left(\int_X |g|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_X |f+g|^q d\mu\right)^{\frac{1}{q}}.$$

Isso é equivalente a

$$\left(\int_X |f+g|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\int_X |f|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_X |g|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}},$$

e, dividindo ambos os membros por $\left(\int_X |f+g|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}}$, o resultado segue. ■

3.1.3 Teorema de Riesz-Fischer

Vamos relembrar o nosso objetivo. O que foi dito no começo do capítulo é que queremos mostrar que os espaços L_p são espaços de Banach. Assim, vamos definir exatamente o que queremos e provar o Teorema de Riesz-Fischer, essencial para provar este fato.

Definição 3.1.8: Espaço de Banach

Um **espaço de Banach** é um espaço vetorial normado $(X, \|\cdot\|)$ que é um espaço métrico completo em relação à distância induzida pela norma. Isso significa que, nestes espaços, toda sequência de Cauchy é convergente.

No nosso context, temos um espaço vetorial normado, L_p. Vamos definir nossas sequências de Cauchy.

Definição 3.1.9: Sequência de Cauchy no Espaço L_p

Uma sequência (f_n) em L_p é uma **sequência de Cauchy** em L_p se,

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N};\ n, m \geq N(\varepsilon) \Longrightarrow \|f_m - f_n\|_p < \varepsilon.$$

Uma sequência (f_n) em L_p é **convergente** para f em L_p se, para todo número positivo ε, existe um $N(\varepsilon)$ tal que, se $n \geq N(\varepsilon)$, então

$$\|f - f_n\|_p < \varepsilon.$$

De fato, o conceito de sequência de Cauchy é mais fraco que o de sequência convergente. Um resultado geral sobre espaços métricos mostra que toda sequência convergente é de Cauchy. No entanto, a recíproca nem sempre é verdadeira. Os espaços completos são aqueles onde as duas definições são equivalentes: uma sequência é convergente se, e somente se, ela for de Cauchy.

O teorema de Riesz-Fischer garante que o espaço L^p é completo, ou seja, que toda sequência de Cauchy em L^p converge para um elemento em L^p.

Teorema 3.1.3: Teorema de Riesz-Fischer

Seja (f_n) uma sequência de Cauchy em L_p com $1 \leq p \leq \infty$. Então, existe $f \in L_p$ tal que $f_n \to f$ em L_p.

Demonstração. Faremos a demonstração do teorema em dois casos. Para o primeiro caso, suponha que $p = \infty$.

Seja (f_n) uma sequência de Cauchy em L^∞. Dado um inteiro $k \geq 1$, existe um N_k tal que

$$\|f_m - f_n\|_\infty \leq \frac{1}{k}, \quad \text{para } m, n \geq N_k. \tag{3.4}$$

Portanto, existe um conjunto de medida nula E_k tal que

$$|f_m(x) - f_n(x)| \leq \frac{1}{k}, \quad \forall x \in \Omega \setminus E_k, \quad \text{para } m, n \geq N_k.$$

Agora defina $E = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$, de forma que E seja um conjunto de medida nula. Para quase todo ponto em $\Omega \setminus E$, a sequência $f_n(x)$ é de Cauchy em $\mathbb{R}$. Logo, $f_n(x) \to f(x)$ μ-qtp em $\Omega \setminus E$. Passando ao limite em (3.4) conforme $m \to \infty$, obtemos

$$|f(x) - f_n(x)| \leq \frac{1}{k}, \quad \forall x \in \Omega \setminus E, \quad \text{para } n \geq N_k.$$

Concluímos, então, que $f \in L^\infty$ e que $\|f - f_n\|_\infty \leq \frac{1}{k}$ para $n \geq N_k$. Portanto, $f_n \to f$ em L^∞.

Agora, consideremos o caso $1 \leq p < \infty$.

Seja (f_n) uma sequência de Cauchy em L_p. Para concluir a prova, basta mostrar que uma subsequência converge em L_p. Extraímos uma subsequência (f_{n_k}) tal que

$$\left\|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}\right\|_p \leq \frac{1}{2^k}, \quad \forall k \geq 1. \tag{3.5}$$

Procedemos da seguinte forma: escolhemos n_1 tal que $\|f_m - f_n\|_p \leq \frac{1}{2}$ para todo $m, n \geq n_1$; depois, escolhemos $n_2 \geq n_1$ tal que $\|f_m - f_n\|_p \leq \frac{1}{2^2}$ para todo $m, n \geq n_2$; e assim por diante. Com isso, afirmamos que (f_{n_k}) converge em L_p. Para simplificar a notação, escrevemos f_k em vez de f_{n_k}, de modo que temos

$$\|f_{k+1} - f_k\|_p \leq \frac{1}{2^k}, \quad \forall k \geq 1.$$

Definimos

$$g_n(x) = \sum_{k=1}^{n} |f_{k+1}(x) - f_k(x)|,$$

de modo que

$$\|g_n\|_p \leq 1.$$

Como consequência do Teorema da Convergência Monótona, $g_n(x)$ tende a um limite finito, que chamamos $g(x)$, para quase todo ponto μ-qtp em Ω, com $g \in L_p$. Por outro lado, para $m \geq n \geq 2$, temos

$$|f_m(x) - f_n(x)| \leq |f_m(x) - f_{m-1}(x)| + \cdots + |f_{n+1}(x) - f_n(x)| \leq g(x) - g_{n-1}(x).$$

Portanto, para quase todo ponto em Ω, $f_n(x)$ é de Cauchy e converge para um limite finito, que chamamos $f(x)$. Temos, então, para quase todo ponto em Ω, que

$$|f(x) - f_n(x)| \leq g(x), \quad \text{para } n \geq 2,$$

e, em particular, $f \in L_p$. Finalmente, concluímos pela convergência dominada que $\|f_n - f\|_p \to 0$, uma vez que $|f_n(x) - f(x)|^p \to 0$ para quase todo ponto e também $|f_n - f|^p \leq g^p \in L_1$. ■

3.2 Teoremas de Decomposição

Capítulo 4

Modos de Convergência

4.1 Modos de Convergência

4.1.1 Convergência de funções

Já conhecemos o sentido usual de convegência de funções, quando olhamos para a sequência aplicada a um ponto x. As principais noções de convergência estão listadas abaixo, da mais fraca para a mais forte.

Definição 4.1.1: Convergência para quase todo ponto

Uma sequência (f_n) converge para quase todo ponto (μ-qtp) para f se

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N(\varepsilon, x) \in \mathbb{N};\ n \geq N(\varepsilon, x) \Longrightarrow |f_n(x) - f|_p < \varepsilon \quad (\mu\text{-qtp}).$$

Definição 4.1.2: Convergência pontual

Uma sequência (f_n) converge pontualmente para f se

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N(\varepsilon, x) \in \mathbb{N};\ n \geq N(\varepsilon, x) \Longrightarrow |f_n(x) - f|_p < \varepsilon$$

Definição 4.1.3: Convergência uniforme

Uma sequência (f_n) converge uniformemente para f se

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N};\ n \geq N(\varepsilon) \Longrightarrow |f_n(x) - f|_p < \varepsilon$$

4.1.2 Convergência em L_p

Definição 4.1.4: Convergência no espaço L_p

Uma sequência $(f_n) \subset L_p$ converge para $f \in L_p$ se

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N};\ n \geq N(\varepsilon) \Longrightarrow \|f_n - f\|_p < \varepsilon$$

Estudar a convergência de funções em L_p nem sempre é intuitivo. Não podemos garantir que o limite está em L_p apenas com a convergência uniforme. Pelo menos não no caso geral. Veja os exemplos abaixo.

Exemplo 4.1.1: Convergência Uniforme $\not\Rightarrow$ Convergência em L_p

Seja
$$f_n : x \in X \mapsto n^{-1}\chi_{(0,n)} \in \mathbb{R}$$
para todo $n \in \mathbb{N}$. Esta sequência converge uniformemente para 0 pois, para todo $\varepsilon > 0$ existe, pelo princípio de arquimedes, $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tal que $0 < N^{-1} < \varepsilon$. Se $n \geq N$, então $n^{-1} < \varepsilon$. Por fim, note que , para todo $x \in X$, $f_n(x) \leq n^{-1} < \varepsilon$, o que mostra a converência uniforme. No entanto, $\|f_n\|_p = 1$, logo $\lim \|f_n - 0\|_p \neq 0$ e f_n não pode convergir para 0 em L_p.

Exemplo 4.1.2: Convergência Pontual $\not\Rightarrow$ Convergência em L_p

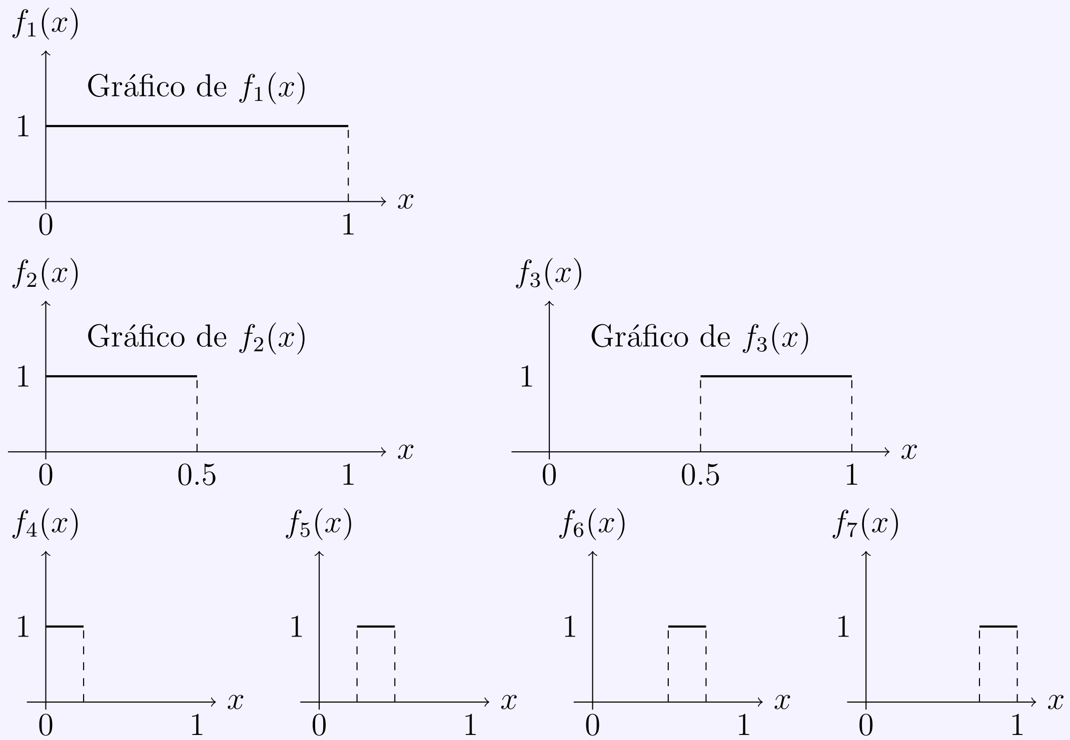
Seja
$$f_n : x \in X \mapsto \chi_{(n,n+1)} \in \mathbb{R}$$
para todo $n \in \mathbb{N}$. Esta sequência converge pontualmente para 0 pois, fixado um $x \in X$, $f_n(x) = 0$ para todo $n > x$, o que mostra a converência de $(f_n(x))$. No entanto, $\|f_n\|_p = 1$, logo $\lim \|f_n - 0\|_p \neq 0$ e f_n não pode convergir para 0 em L_p.

Exemplo 4.1.3: Convergência μ-qtp $\not\Rightarrow$ Convergência em L_p

Seja
$$f_n : x \in X \mapsto n\chi_{(0,\frac{1}{n})} \in \mathbb{R}$$
para todo $n \in \mathbb{N}$. Esta sequência converge pontualmente para 0 exceto no ponto $\{0\}$, que tem medida nula, o que conclui a converência μ-qtp. No entanto, $\|f_n\|_p = 1$, logo $\lim \|f_n - 0\|_p \neq 0$ e f_n não pode convergir para 0 em L_p.

Exemplo 4.1.4: Convergência em $L_p \not\Rightarrow$ Convergência μ-qtp

Seja
$$f_n : x \in X \mapsto \chi_{\left(\frac{j}{2^k}, \frac{(j+1)}{2^k}\right)} \in \mathbb{R}$$
para todo $k \in \mathbb{N}$ e $n = 2^k + j$ com $0 \leq j < 2^k$.
Visualize essa sequência como ondas quadradas de período progressivamente menores, percorrendo o intervalo entre 0 e 1.



Esta sequência converge pontualmente para 0 em L_1 pois

$$\lim_{n\to\infty} \|f_n - 0\|_1 = \lim_{n\to\infty} \int_X |f_n(x) - 0|\, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_{\frac{j}{2^k}}^{\frac{j+1}{2^k}} 1 d\mu = \lim_{n\to\infty} 2^k = 0.$$

No entanto, (f_n) não converge μ-qtp (logo, nem pontualmente, nem uniformemente).

Como podemos ver, não existe nenhuma relação clara entre esse dois modos de convergência. Vamos estudar algumas restrições que podemos impor para garantir a convergência em L_p a partir de outras formas de convergência que já conhecemos.

Proposição 4.1.1: Convergência Uniforme em L_p

Suponha que $\mu(X) < +\infty$ e que (f_n) é uma sequência em L_p que converge uniformemente em X para f. Então, $f \in L_p$ e a sequência (f_n) converge em L_p para f.

Demonstração. Seja $\epsilon > 0$ e seja $N(\epsilon)$ tal que $|f_n(x) - f(x)| < \epsilon$ sempre que $n \geq N(\epsilon)$

e $x \in X$. Se $n \geq N(\epsilon)$, então

$$\|f_n - f\|_p = \left(\int_X |f_n(x) - f(x)|^p \, d\mu\right)^{1/p} \leq \left(\int_X \epsilon^p \, d\mu\right)^{1/p} = \epsilon\mu(X)^{1/p}, \tag{4.1}$$

de modo que (f_n) converge em L_p para f. ∎

Proposição 4.1.2: Convergência Dominada em L_p

Seja (f_n) uma sequência em L_p que converge para uma função mensurável f para quase todo ponto. Se existir uma função $g \in L_p$ tal que

$$|f_n(x)| \leq g(x), \quad x \in X, \quad n \in \mathbb{N}, \tag{4.2}$$

então $f \in L_p$ e (f_n) converge em L_p para f.

Demonstração. Pela desigualdade (4.2) e a convergência μ-qtp, temos que $|f(x)| \leq g(x)$ para quase todo ponto. Como $g \in L_p$, segue do Corolário 2.3.1 que $f \in L_p$. Agora,

$$|f_n(x) - f(x)|^p \leq [2g(x)]^p, \quad \mu\text{-}(qtp).$$

Como $\lim |f_n(x) - f(x)|^p = 0$, μ-(qtp), e $2^p g^p \in L_1$, segue do Teorema da Convergência Dominada que

$$\lim_{n\to\infty} \int |f_n - f|^p d\mu = 0.$$

Portanto, (f_n) converge em L_p para f. ∎

Corolário 4.1.1: Convergência Dominada por Constante

Suponha que $\mu(X) < +\infty$, e que (f_n) seja uma sequência em L_p que converge para uma função mensurável f para quase todo ponto μ-(qtp). Se existir uma constante K tal que

$$|f_n(x)| \leq K, \quad x \in X, \quad n \in \mathbb{N}, \tag{7.3}$$

então $f \in L_p$ e (f_n) converge em L_p para f.

Demonstração. É uma consequência direta das Proposições 4.1.2 e 4.1.1 pois a função constante é L_p em espaço com medida finita. ∎

4.1.3 Convergência na Medida

Vamos estudar uma outra noção de convergência que precede a ideia da convergência em L_p, no sentido de que precisa de menos estrutura, mas que, como veremos a seguir, cria condições para garantir uma convergência boa em L_p.

Definição 4.1.5: Convergência na Medida

Uma sequência (f_n) converge na medida para f se, para todo $\varepsilon > 0$

$$\lim_{n\to\infty} \mu\left(\{x \in X;\ |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon\}\right) = 0.$$

Da mesma forma que existem as sequências de Cauchy, definiremos as sequências que são de Cauchy na medida.

Definição 4.1.6: Convergênciade Cauchy na Medida

Uma sequência (f_n) converge na medida para f se, para todo $\varepsilon > 0$

$$\mu\left(\{x \in X;\ |f_n(x) - f_m(x)| \geq \varepsilon\}\right) = 0$$

quando n e m tendem ao infinito.

Com estas novas definições, ganhamos relação mais próxima com a convergência em L_p.

Proposição 4.1.3: Convergência em $L_p \Rightarrow$ convergência na medida

Seja (f_n) uma sequência em L_p tal que $f_n \to f$ em L_p. Então $f_n \to f$ na medida.

Demonstração. Fixe um $\varepsilon > 0$. Seja $E_n = \{x \in X;\ |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon\}$. Vamos mostrar que a medida deste conjunto é limitada é vai para zero no limite. Observe que

$$\|f_n - f\|_p = \left(\int |f_n - f|^p\right)^{\frac{1}{p}} \geq \left(\int_{E_n} |f_n - f|^p\right)^{\frac{1}{p}} \geq \left(\int_{E_n} \varepsilon^p\right)^{\frac{1}{p}} = \varepsilon\mu(E_n)^{\frac{1}{p}} \geq 0.$$

Sabemos que $\lim \|f_n - f\|_p = 0$ por $f_n \to f$ em L_p por hipótese. Tomando o limite dos dois lados, concluímos, pelo teorema do confronto, que $\mu(E_n) \to 0$. Pela arbitrariedade da escolha de ε temos, por fim, que $f_n \to f$ em medida. ■

Proposição 4.1.4: Convergência de Sequência Cauchy na Medida

Seja (f_n) uma sequência de funções reais mensuráveis que é de Cauchy em medida. Então, existe uma subsequência (f_{n_j}) que converge para f μ-qtp e existe f mensurável tal que $f_n \to f$ na medida. Além disso, se $f_n \to g$ na medida, então $f = g$ μ-qtp.

Demonstração. Vamos começar construindo uma subsequência especial de onda vamos tirar propriedades boas. A construção começa pela hipótese de que f_n é de Cauchy na medida. Escolha $\varepsilon_j = 2^{-j}$, então

$$\mu\left(\{x \in X;\ |f_n(x) - f_m(x)| \geq 2^{-j}\}\right) = 0.$$

quando n e m tendem ao infinito. Em particular, se m for o sucessor de n, temos que

$$\lim_{n\to\infty} \mu\left(\{x \in X;\ |f_n(x) - f_{n+1}(x)| \geq 2^{-j}\}\right) = 0.$$

Em outras palavras, para todo $\varepsilon_j = 2^{-j}$, existe $N(j) \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq N(j)$,

$$\mu\left(\{x \in X;\ |f_n(x) - f_{n+1}(x)| \geq 2^{-j}\}\right) < \varepsilon_j = 2^{-j}.$$

Para formar a subsequência escolhemos $j = 1$ e n_1 o menor natural maior ou igual a $N(1)$. Assim,

$$\mu\left(\{x \in X;\ |f_{n_1}(x) - f_{n_1+1}(x)| \geq 2^{-1}\}\right) < 2^{-1}.$$

Definiremos os dois primeiros elementos da nossa subsequência, $g_1 = f_{n_1}$ e $g_2 = f_{n_1+1}$. Para simplificar a representação, chamaremos

$$E_1 = \{x \in X;\ |g_1(x) - g_{1+1}| \geq 2^{-1}\}, \quad \mu(E_1) < 2^{-1}.$$

Seguimos definindo dessa forma para garantir que a subsequência (g_j) é tal que $\mu(E_j) \leq 2^{-j}$ para todo j fazendo a indução.

Se $F_k = \bigcup_{j=k}^{\infty} E_j$, então $\mu(F_k) \leq \sum_{j=k}^{\infty} 2^{-j} = 2^{1-k}$, e se $x \notin F_k$, para $i \geq j \geq k$, temos

$$|g_j(x) - g_i(x)| \leq \sum_{l=j}^{i-1} |g_{l+1}(x) - g_l(x)| \leq \sum_{l=j}^{i-1} 2^{-l} \leq 2^{1-j}. \tag{4.3}$$

Assim, $\{g_j\}$ é de Cauchy pontualmente em F_k^c. Isso é razoável, pois F_k é a união de conjuntos onde a sequência não é Cauchy. Definimos

$$F = \bigcap_{k=1}^{\infty} F_k = \limsup E_j \Rightarrow \mu(F) = \lim \mu(F_k) = 0.$$

No passo acima, usamos Continuidade por cima. Como $\mu(F) = 0$, definimos

$$f = \begin{cases} \lim g_j(x), & x \notin F, \\ 0, & x \in F. \end{cases}$$

Então, f é mensurável (fica de exercício) e $g_j \to f$ (μ-qtp), neste caso F é o conjunto de medida nula em questão. Além disso, (4.3) mostra que $|g_j(x) - f(x)| \leq 2^{1-j}$ para $x \notin F_k$ e $j \geq k$. Como $\mu(F_k) \to 0$ quando $k \to \infty$, segue que $g_j \to f$ em medida. Mas $f_n \to f$ em medida, pois

$$\{x : |f_n(x) - f(x)| \geq \epsilon\} \subset \{x : |f_n(x) - g_j(x)| \geq \frac{\epsilon}{2}\} \cup \{x : |g_j(x) - f(x)| \geq \frac{\epsilon}{2}\},$$

e os conjuntos à direita têm medida pequena para n e j suficientemente grandes. Da mesma forma, se $f_n \to g$ em medida,

$$\{x : |f(x) - g(x)| \geq \epsilon\} \subset \{x : |f(x) - f_n(x)| \geq \frac{\epsilon}{2}\} \cup \{x : |f_n(x) - g(x)| \geq \frac{\epsilon}{2}\}$$

para todo n, e portanto $\mu(\{x : |f(x) - g(x)| \geq \epsilon\}) \to 0$ para todo ϵ. Deixando $\epsilon \to 0$, concluímos que $f = g$ (μ-qtp).

■

Corolário 4.1.2: Cauchy em Medida é convergente na medida

Seja (f_n) uma sequência de funções reais mensuráveis que é de Cauchy em medida. Então, existe uma função real mensurável f para a qual a sequência converge em medida. Essa função limite f é unicamente determinadaμ-qtp.

Demonstração. Vimos que existe uma subsequência (f_{n_k}) que converge em medida para uma função f. Para mostrar que toda a sequência (f_n) converge em medida para f, observe que, como

$$|f(x) - f_n(x)| \leq |f(x) - f_{n_k}(x)| + |f_{n_k}(x) - f_n(x)|,$$

segue que

$$\{x \in X : |f(x) - f_n(x)| \geq \alpha\} \subseteq \{x \in X : |f(x) - f_{n_k}(x)| \geq \frac{\alpha}{2}\} \cup \{x \in X : |f_{n_k}(x) - f_n(x)| \geq \frac{\alpha}{2}\}.$$

A convergência em medida de (f_n) para f decorre dessa relação.

Suponha agora que a sequência (f_n) converge em medida tanto para f quanto para g. Como

$$|f(x) - g(x)| \leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - g(x)|,$$

segue que

$$\{x \in X : |f(x) - g(x)| \geq \alpha\} \subseteq \{x \in X : |f(x) - f_n(x)| \geq \frac{\alpha}{2}\} \cup \{x \in X : |f_n(x) - g(x)| \geq \frac{\alpha}{2}\},$$

de modo que $\mu(\{x \in X : |f(x) - g(x)| \geq \alpha\}) = 0$ para todo $\alpha > 0$. Tomando $\alpha = 1/n$, $n \in \mathbb{N}$, concluímos que $f = g$ μ-qtp. ■

Proposição 4.1.5: Convergência na medida dominada

Seja (f_n) uma sequência de funções em L_p que converge em medida para f, e seja $g \in L_p$ tal que

$$|f_n(x)| \leq g(x), \quad \mu\text{-}(qtp).$$

Então $f \in L_p$ e (f_n) converge em L_p para f.

Demonstração. Se (f_n) não converge em L_p para f, então existe uma subsequência (g_k) de (f_n) e um $\epsilon > 0$ tal que

$$\|g_k - f\|_p > \epsilon \quad \text{para } k \in \mathbb{N}. \tag{4.4}$$

Como (g_k) é uma subsequência de (f_n), segue que (g_k) converge em medida para f. Pela Proposição 4.1.4, existe uma subsequência (h_r) de (g_k) que converge para quase todo ponto μ-qtp e em medida para uma função h. Pela parte de unicidade do Corolário 4.1.2, segue que $h = f$ μ-qtp.

Como (h_r) converge para quase todo ponto μ-qtp para f e é dominada por g, a Proposição 4.1.2 implica que $\|h_r - f\|_p \to 0$. No entanto, isso contradiz a relação (4.4).

Portanto, (f_n) converge em L_p para f. ■

4.2 Teoremas de Convergência (Parte 2)

Vamos começar com mais uma noção de convergência

Definição 4.2.1: Convergência Quase Uniforme

Uma sequência (f_n) de funções mensuráveis é dita **quase uniformemente convergente** para uma função mensurável f se, para cada $\delta > 0$, existe um conjunto $E_\delta \subset X$ com $\mu(E_\delta) < \delta$ tal que (f_n) converge uniformemente para f em $X \setminus E_\delta$. A sequência (f_n) é dita uma **sequência de Cauchy quase uniformemente** se, para cada $\delta > 0$, existe um conjunto $E_\delta \subset X$ com $\mu(E_\delta) < \delta$ tal que (f_n) é uniformemente convergente em $X \setminus E_\delta$.

4.2.1 Teorema de Egoroff

Lema 4.2.1: Convergência Quase Uniforme para Sequência de Cauchy

Seja (f_n) uma sequência de Cauchy quase uniformemente. Então, existe uma função mensurável f tal que (f_n) converge quase uniformemente e quase todo ponto (μ-(qtp)) para f.

Demonstração. Se $k \in \mathbb{N}$, seja $E_k \subset X$ tal que $\mu(E_k) < 2^{-k}$ e (f_n) é uniformemente convergente em $X \setminus E_k$. Defina $F_k = \bigcup_{i=k}^{\infty} E_i$, de modo que $F_k \subset X$ e $\mu(F_k) < 2^{-(k-1)}$. Note que (f_n) converge uniformemente em $X \setminus F_k$. Defina g_k por

$$g_k(x) = \begin{cases} \lim f_n(x), & x \notin F_k, \\ 0, & x \in F_k. \end{cases}$$

Observamos que a sequência (F_k) é decrescente e que, se $F = \bigcap_{k=1}^{\infty} F_k$, então $F \subset X$ e $\mu(F) = 0$. Se $h \leq k$, então $g_h(x) = g_k(x)$ para todo $x \notin F_h$. Portanto, a sequência (g_k) converge em todo X para uma função limite mensurável, que denotamos por f. Se $x \notin F_k$, então $f(x) = g_k(x) = \lim f_n(x)$. Segue que (f_n) converge para f em $X \setminus F$, de modo que (f_n) converge para f para quase todo ponto (μ-(qtp)) em X.

Para ver que a convergência é quase uniforme, seja $\epsilon > 0$ e escolha K suficientemente grande para que $2^{-(K-1)} < \epsilon$. Então, $\mu(F_K) < \epsilon$, e (f_n) converge uniformemente para $g_K = f$ em $X \setminus F_K$. ∎

Proposição 4.2.1: Convergência Quase Uniforme e Convergência na Medida

Se uma sequência (f_n) converge quase uniformemente para f, então ela converge na medida. Reciprocamente, se uma sequência (h_n) converge na medida para h, então alguma subsequência converge quase uniformemente para h.

Demonstração. Suponha que (f_n) converge quase uniformemente para f. Sejam α e ϵ números positivos. Então, existe um conjunto $E_\epsilon \subset X$ com $\mu(E_\epsilon) < \epsilon$ tal que (f_n) converge uniformemente para f em $X \setminus E_\epsilon$. Portanto, se n for suficientemente grande, o conjunto $\{x \in X : |f_n(x) - f(x)| \geq \alpha\}$ deve estar contido em E_ϵ. Isso mostra que (f_n) converge na medida para f.

Reciprocamente, suponha que (h_n) converge na medida para h. Segue da Proposição 4.1.4 que existe uma subsequência (g_k) de (h_n) que converge em medida para uma função g, e a prova da Proposição 4.1.4 mostra que a convergência é quase uniforme. Como (g_k) converge na medida tanto para h quanto para g, segue do Corolário 4.1.2 que $h = g$ μ-qtp. Portanto, a subsequência (g_k) de (h_n) converge quase uniformemente para h. ■

Teorema 4.2.1: Teorema de Egoroff

Suponha que $\mu(X) < +\infty$ e que (f_n) é uma sequência de funções reais mensuráveis que converge para quase todo ponto (μ-qtp) em X para uma função real mensurável f. Então, a sequência (f_n) converge quase uniformemente e na medida para f.

Demonstração. Por hipótese, f_n converge para f para quase todo ponto. Portanto, existe um conjunto de medida nula N tal que $f_n\chi_N$ converge para $f\chi_N$ para todo ponto em $X \setminus N$. Em símbolos,

$$f_n \to f(\mu\text{-qtp}) \Rightarrow \exists N \in \Sigma, \mu(N) = 0;\; f_n(x) \to f(x)\ \forall x \in X \setminus N.$$

De fato, é preferível trabalhar apenas nos lugares onde temos a convergência pontual. Assim, ao invés de olharmos para a nossa função toda, podemos olhar só para a função restrita ao subconjunto onde temos a convergência pontual garantida, elimiando um detalhe técnico da hipótese.

Seguiremos, então, partindo do princípio que (f_n) converge em todo ponto de X para f. Caso isso não ocorra, basta olhar para $f_n\chi_N$ que converge pontualmente para $f\chi_N$. Portanto, não há perda de generalidade.

Para o próximo passo, vamos usar a convergência pontual para criar um conjunto vazio. Pela Definição de Convergência pontual, em um $x \in X$ onde a sequência converge, temos que

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N(\varepsilon, x) \in \mathbb{N}; n \geq N(\varepsilon, x) \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

Assim, se $x \in X$ é um ponto onde a sequência NÃO converge, existe $\varepsilon > 0$ tal que, para todo natural N, é possível achar um $n > N$ tal que $|f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon$. Em símbolos,

$$\exists\, \varepsilon > 0; \forall N \in \mathbb{N}, \exists\, n \geq N(\varepsilon, x); |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon. \tag{4.5}$$

Guardemos esta ideia. Vamos definir um conjunto de pontos de x onde vale a segunda parte da sentença acima. Sejam $m, n \in \mathbb{N}$, e defina

$$E_n(m) = \bigcup_{k=n}^{\infty} \left\{ x \in X : |f_k(x) - f(x)| \geq \frac{1}{m} \right\},$$

de modo que $E_n(m)$ pertence a X e $E_{n+1}(m) \subseteq E_n(m)$ (toda vez que aumentamos o n, tiramos um elemento da união, então os conjuntos vão ficando menores e a sequência é decrescente). Note que, se $x \in E_n(m)$, então existe $k \geq n$ tal que $|f_k(x) - f(x)| \geq \frac{1}{m}$. Repare na semelhança com (4.5).

Agora, considere a interseção de todos os $E_n(m)$, dada por $\cup_{n=1}^{\infty} E_n(m)$. Se x pertence a este conjunto então, para todo n natural, $x \in E_n(m)$. Como argumentamos no parágrafo acima, isto significa que, para todo n, existe $k \geq n$ tal que $|f_k(x) - f(x)| \geq \frac{1}{m}$. Repare mais uma vez na semelhança com (4.5). Desta vez, estamos com a sentença completa! Neste caso, $\frac{1}{m}$ faz o papel do nosso ε. Concluimos, então, que $f_n(x)$ diverge para todo ponto em $\cup_{n=1}^{\infty} E_n(m)$.

Eis aqui a ideia inteligente. Como $f_n(x) \to f(x)$ para todo $x \in X$ (por hipótese), segue que não existem pontos onde a sequência diverge, ou seja,

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n(m) = \varnothing.$$

Como $\mu(X) < +\infty$ e a sequência é descrescente, estamos nas hipóteses da Continuidade por cima. Assim

$$0 = \mu(\varnothing) = \mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n(m)\right) = \lim_{n\to\infty} \mu(E_n),$$

e concluimos que $\mu(E_n(m)) \to 0$ conforme $n \to +\infty$.

Vamos usar mais uma vez as definições básicas de limite vindas da análise real. Comecemos por fixar um $\delta > 0$. Agora, como sabemos que $\mu(E_n(m))$ converge para 0, temos, para cada m, que $\frac{\delta}{2^m} > 0$ e, portanto, podemos afirmar que

$$\exists k_m \in \mathbb{N}; |\mu(E_{k_m}(m)) - 0| = \mu(E_{k_m}(m)) < \frac{\delta}{2^m}.$$

Defina $E_\delta = \bigcup_{m=1}^{\infty} E_{k_m}(m)$, de modo que $E_\delta \subset X$ e $\mu(E_\delta) < \delta$ (basta usar Subaditividade da medida e soma de progressão geométrica para verificar este fato). Lembre-se que estamos tentando provar que a sequência converge quase uniformemente. Jé conseguimos construir um conjunto de medida arbitrariamente pequena, resta mostrar que a sequência converge uniformemente no seu complemento.

Observe que, se $x \notin E_\delta$, então $x \notin E_{k_m}(m)$. Dessa forma,

$$|f_k(x) - f(x)| < \frac{1}{m}$$

para todo $k \geq k_m$. Portanto, (f_k) é uniformemente convergente no complemento de E_δ. ∎

Capítulo 5

Decomposição de Medidas

5.1 Decomposição de Hahn e Jordan

Teorema 5.1.1: Teorema de Decomposição de Jordan

Seja ν uma medida com sinal. Então, existe um único par de medidas positivas, (ν^+, ν^-), tal que $\nu = \nu^+ - \nu^-$ e $\nu^+ \perp \nu^-$.

Demonstração. Fazer ■

5.2 Decomposição de Lebesgue-Radon-Nikodým

Lema 5.2.1: .

Sejam ν e μ medidas positivas finitas. Então, ou $\nu \perp \mu$ ou existem $\varepsilon > 0$ e $E \in \Sigma$ tais que $\mu(E) > 0$ e $\nu(E) \geq \varepsilon\mu(E)$.

Demonstração. Fazer. ■

Lema 5.2.2: .

Sejam ν, μ medidas. Se $\nu \perp \mu$ e $\nu \ll \mu$, então $\nu = 0$.

Demonstração. Fazer. ■

Teorema 5.2.1: Teorema de Lebesgue-Radon-Nikodým

Seja ν uma medida com sinal σ-finita e μ uma medida positiva σ-finita. Então existe um único par de medidas σ-finitas (ν_s, ν_a) tal que

$$\nu_s \perp \mu, \quad \nu_a \ll \mu, \quad \text{e} \quad \nu = \nu_s + \nu_a.$$

Também existe $f : \mathbf{X} \to \mathbb{R}$ μ-quase integrável tal que

$$\nu(E) = \int_E f \; d\nu.$$

Demonstração. Esta demonstração será dividida em 3 casos. No primeiro caso, vamos supor que as duas medidas são positivas e finitas. Para o segundo caso, vamos tirar a hipótese das medidas serem finitas e vamos ficar com duas medidas positivas σ-finitas. Neste caso, o objetivo será separar o conjunto $\mathbf{X}$ em conjuntos de medida finita e aplicar o caso 1. Por fim, vamos tirar a hipótese de uma das medidas ser finita para que tenhamos uma medida com sinal. Neste caso, aplicaremos o Teorema da Decomposição de Jordan. Vamos para a demonstração.

(Caso 1) Vamos supor que ν e μ são medidas positivas finitas, isto é,

$$0 \leq \nu(E) < \infty, \quad 0 \leq \mu(E) < \infty \quad \forall E \in \Sigma.$$

Primeiramente, vamos construir a medida absolutamente contínua. Como queremos que ela tenha uma cara bem específica, vamos começar procurando por esta medida em uma família especial de funções.

Defina

$$\mathcal{F} := \left\{ f \in L^+(\mathbf{X});\ \int_E f \ d\mu \leq \nu(E)\ \forall E \in \Sigma \right\}.$$

Façamos algumas afirmações sobre este conjuntos.

Afirmação 5.2.1: .

$\mathcal{F}$ não é vazio.

De fato, a imagem da função identicamente nula é menor ou igual a medida de qualquer conjunto mensurável pois ν é positiva por hipótese. Assim $f \equiv 0 \in \mathcal{F}$ e a família é não vazia.

Afirmação 5.2.2: .

Se $f, g \in \mathcal{F}$, então $\max\{f, g\} \in \mathcal{F}$.

Denotemos $h = \max\{f, g\}$. Para provar esta afirmação, precisamos mostrar que, para qualquer conjunto E mensurável, $\int_E g \ d\mu \leq \nu(E)$. A ideia é separar E nos pontos onde h assume o valor de f e de g. Para tanto, defina

$$A := \{x \in X;\ f(x) > g(x)\}.$$

Dessa forma h restrita a A coincide com a função f. No complementar de A, então ela assumirá o mesmo valor que g. Se escrevermos $E = (E \cap A) \cup (E \setminus A)$, temos

$$\int_E h \ d\mu = \int_{E \cap A} f \ d\mu + \int_{E \setminus A} g \ d\mu.$$

Como, por hipótese, f e g pertencem a $\mathcal{F}$, então, pela definição da família,

$$\int_E h \ d\mu \leq \nu(E \cap A) + \nu(E \setminus A) = \nu(E).$$

O que prova que $h \in \mathcal{F}$ pela arbitrariedade de E.

Com essas duas afirmações em mãos, vamos seguir com a nossa demonstração. Pela Afirmação 5.2.1, sabemos que existem f na família. Tomemos, então, o supremo das integrais dela:

$$\alpha := \left\{ \int_{\mathbf{X}} f \; d\mu; \; f \in \mathcal{F} \right\}.$$

Usaremos algumas propriedades básicas para mostrar que o supremo é finito. Depois disso, mostraremos que este supremo é atingido (ele é um máximo), e vamos tomar a função que faz isso.

Afirmação 5.2.3: .

$\alpha \leq \nu(\mathbf{X}) < \infty$.

Com efeito, se $f \in \mathcal{F}$, então pela definição da família, $\int_E f \; d\mu \leq \nu(E)$ para todo $E \in \Sigma$. Em particular, $\mathbf{X} \in \Sigma$, logo, $\int_{\mathbf{X}} f \; d\mu \leq \nu(\mathbf{X})$ para toda $f \in \mathcal{F}$. Isto nos diz que $\nu(\mathbf{X})$ é uma cota superior para a família $\{\int_{\mathbf{X}} f \; d\mu\}$. Como α, pela definição do supremo, é a menor das cotas superiores, então, $\alpha \leq \nu(\mathbf{X})$. Portanto, o supremo é finito.

Como, pela Afirmação 5.2.3, o supremo é finito, então existe uma sequência que converge para este número. Considere, portanto, a sequência $\left(\int_{\mathbf{X}} f_n \; d\mu\right)_{n=1}^{\infty}$ tal que

$$\lim_{n \to \infty} \int_{\mathbf{X}} f_n \; d\mu = \alpha. \tag{5.1}$$

A partir desta sequência, vamos construir uma outra sequência $(g_n)_{n=1}^{\infty} \subseteq \mathcal{F}$ onde $g_n = \max\{f_1, \ldots, f_n\}$. Note que, pela Afirmação 5.2.2, garantimos que $g_n \in \mathcal{F}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. A função que nos interessa é o limite desta sequência. Observe a afirmação abaixo.

Afirmação 5.2.4: .

A sequência (g_n) converge monotonicamente para f, como definida abaixo.

$$\lim_{n \to \infty} g_n = \sup_{n \in \mathbb{N}} f_n := f. \tag{5.2}$$

Para justificar a Afirmação 5.2.4, basta notar que adicionar funções ao máximo sempre eleva o valor que ele pode assumir, então $g_n \leq g_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Olhando pontualmente para um $x \in \mathbf{X}$ fixado, temos que $(g_n(x))_{n=1}^{\infty}$ é uma sequência monotônica crescente e limitada (pela Afirmação 5.2.3) . Portanto, existe o supremo e é possível mostrar pela definição que ele coincide com o supremo da sequência $(f_n(x))_{n=1}^{\infty}$.

Lembre-se que o nosso objetivo é mostrar que o supremo é atingido, isto é, existe uma função de $\mathcal{F}$ tal que a sua integral é α. A nossa candidata é f como definimos em (5.2), mas ainda não sabemos se ela pertence a $\mathcal{F}$.

Afirmação 5.2.5: .

$f \in \mathcal{F}$ e $\int_{\mathbf{X}} f \, d\mu = \alpha$

Para validar esta afirmação, vamos usar o Teorema da Convergência Monótona (TCM) e a monotonicidade da integral.

$$g_n \geq f_n \Rightarrow \int_{\mathbf{X}} g_n \, d\mu \geq \int_{\mathbf{X}} f_n \, d\mu \quad (\forall n \in \mathbb{N})$$

Tomando o limite dos dois lados da desigualdade, temos

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbf{X}} g_n \, d\mu \geq \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbf{X}} f_n \, d\mu$$

Garantimos que estamos nas condições do Teorema com a Afirmação 5.2.4. Aplicando o TCM do lado esquerdo e usando a definição da sequência (f_n) que está em (5.1), temos que

$$\int_{\mathbf{X}} f \, d\mu \geq \alpha.$$

Agora, nota que $\int_{\mathbf{X}} f \, d\mu \leq \alpha$ pois α é o supremo. Então, $\int_{\mathbf{X}} f \, d\mu = \alpha$, como queríamos. Para concluir a prova da afirmação, resta mostrar que $f \in \mathcal{F}$. Para tanto, usaremos o fato que $g_n \in \mathcal{F}$ e o TCM mais uma vez.

$$\int_E f \, d\mu = \int_E \lim_{n\to\infty} g_n \, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_E g_n \, d\mu \leq \nu(E).$$

A conclusão é que a integral desta f é finita (lembre-se que, pela Afirmação (5.2.3), o supremo é finito) a menos de um conjunto de medida nula. Diante disso, podemos reescrever f como uma função real fazendo com que ela assuma o valor 0 onde o conjunto tiver medida nula.

Todo o trabalho que tivemos até aqui foi para mostrar que o supremo era atingido. Vamos continuar a nossa prova tomando, com segurança, uma função f, como definida anteriormente. Intuitivamente, esta função é a "maior função integrável que ainda é menor do que a medida dos conjuntos com relação a ν". De fato, ela fará o papel da nossa medida absolutamente contínua.

Vamos definir a função abaixo.

$$\nu_s(E) = \nu(E) - \int_E f \, d\mu, \quad \forall \ E \in \Sigma. \tag{5.3}$$

É fácil ver que a função acima é positiva com o que argumentamos anteriormente.

Afirmação 5.2.6: .

$v_s \perp \mu.$

Para mostrar que isto é verdade usaremos o Lema 5.2.1.

Suponha, por contradição, que ν_s não é mutuamente singular com respeito a μ. Então, pelo Lema 5.2.1, existem $\varepsilon > 0$ e $E_0 \in \Sigma$ tais que $\mu(E_0) > 0$ e $\nu_s(E_0) \geq \varepsilon\mu(E_0)$.

A partir disso, vamos construir uma função que contradiz a maximalidade de f. Defina

$$F \coloneqq f + \varepsilon\chi_{E_0}.$$

Temos que mostrar que esta candidata está em $\mathcal{F}$ e que a sua integral é maior que a de f.

Afirmação 5.2.7: .

$F \in \mathcal{F}$ e $\int_{\mathbf{X}} F \, d\mu > \int_{\mathbf{X}} f \, d\mu$.

Para provar a primeira parte, temos que calcular a integral de F em um conjunto mensurável arbitrário, E.

$$\int_E F \, d\mu = \int_E f \, d\mu + \varepsilon \int_E \chi_{E_0} \, d\mu = \int_E f \, d\mu + \varepsilon\mu(E \cap E_0).$$

Podemos quebrar a primeira integral em duas partes para obter:

$$\begin{aligned}
\int_E F \, d\mu \quad &= \quad \int_{E \setminus E_0} f \, d\mu + \left(\int_{E \cap E_0} f \, d\mu + \varepsilon\mu(E \cap E_0) \right) \\
&\leq \quad \nu(E \setminus E_0) + \left(\int_{E \cap E_0} f \, d\mu + \nu_s(E \cap E_0) \right) \\
&\leq \quad \nu(E \setminus E_0) + \nu(E \cap E_0) \\
&\leq \quad \nu(E).
\end{aligned}$$

Mostrado que $f \in \mathcal{F}$ podemos partir para a segunda parte da afirmação, que é imediata. De fato, como $\varepsilon > 0$, temos que

$$F = f + \varepsilon\chi_{E_0} > f \Rightarrow \int_{\mathbf{X}} F \, d\mu > \int_{\mathbf{X}} f \, d\mu.$$

Isto é um absurdo pois havíamos escolhido a f como o a máxima de $\mathcal{F}$.

Lembre-se que estávamos buscando uma contradição para justificar a Afirmação 5.2.6, que acabamos de provar.

Resta-nos definir a medida absolutamente contínua.

$$\nu_a(E) = \int_E f \, d\mu \quad \forall \ E \in \Sigma.$$

Afirmação 5.2.8: .

$\nu_a \ll \mu$

Já sabemos que ν_a vai ser uma medida, pelo que estudamos no começo do curso. Para mostrar que ν_a vai ser absolutamente contínua com respeito a μ basta notar que a integral sobre qualquer conjunto de medida nula será igual a zero, portanto, se $\mu(E) = 0$, então $\nu(E) = 0$.

Por fim, chegamos à relação desejada,

$$\nu = \nu_s + \nu_a \quad \text{onde} \quad \nu_s \perp \mu, \quad \nu_a \ll \mu. \tag{5.4}$$

Afirmação 5.2.9: O

ar (ν_s, ν_a) em (5.4) é único.

Para mostrar este passo, seguiremos o argumento mais natural. Suponha que existam dois pares (ν_s, ν_a) e (λ_s, λ_a) tais que

$$\nu = \nu_s + \nu_a = \lambda_s + \lambda_a$$

satisfazendo as condições desejadas.

Vamos mostrar que

Afirmação 5.2.10: .

$$\begin{aligned} \nu_s - \lambda_s &\perp \mu, \\ \lambda_a - \nu_a &\ll \mu. \end{aligned}$$

Como ν_s e λ_s são mutuamente singulares, existem conjuntos E_1, E_2 tais que $\mathbf{X} = E_1 \cup E_1^c = E_2 \cup E_2^c$ com E_1^c nulo com respeito a ν_s e E_2^c nulo com respeito a λ_s. E_1 e E_2 são nulos com respeito a μ. Denote por $E = E_1 \cup E_2$. Note que E tem medida nula com relação a μ pois $\mu(E_1 \cup E_2) \leq \mu(E_1) + \mu(E_2) = 0$. Analogamente, mostramos que $(\nu_s - \lambda_s)(E^c) = 0$.

O argumento para mostrar que a outra medida é absolutamente contínua com relação a μ é direto. Se $\mu(E) = 0$, então $\nu_a(E) = \lambda_a(E) = 0$. Logo, $(\lambda_a - \nu_a)(E) = 0$.

Note que isso nos diz, pelo Lema 5.2.2, que $\nu_s = \lambda_s$ e $\nu_a = \lambda_a$. Quando olhamos para as medidas absolutamente contínuas na sua forma integral, temos

$$\int_E f d\mu = \int_E g d\mu$$

de onde vem a unicidade de f a menos de um conjunto de medida nula. Isto completa o teorema para o caso 1.

(Caso 2) Vamos supor que ν e μ são medidas positivas σ-finitas. Então $\mathbf{X}$ pode ser escrito com o a união enumerável disjunta de conjuntos $\mathbf{X}_n$ com medida finita tanto para ν quanto para μ. Consideramos então, as restrições das medidas a cada um desses conjuntos. Para todo $E \in \Sigma$,

$$\nu_n(E) = \nu(E \cap \mathbf{X}_n), \quad \mu_n(E) = \mu(E \cap \mathbf{X}_n).$$

Para cada $\mathbf{X}_n$, vale o caso 1, de onde obtemos pares $(\nu_{s,n}, \nu_{a,n})$, além das funções f_n. Fazemos

$$\nu_s = \sum_{n=1}^{\infty} \nu_{s,n}, \quad \nu_a = \sum_{n=1}^{\infty} \nu_{s,a}, \quad f = \sum_{n=1}^{\infty} f_n.$$

Estas funções satisfazem as propriedades desejadas.

(Caso 3) Para o caso geral, temos que ν é uma medida com sinal e podemos aplicar o Teorema da Decomposição de Jordan para escrever $\nu = \nu^+ - \nu^-$. Assim, basta aplicar o caso 2 em cada uma das partes da medida e subtrair os resultados.

■

Capítulo 6

Medidas Produto

6.1 Teorema da Medida Produto

6.2 Lema da Classe Monótona

6.3 Os Teoremas de Tonelli e Fubini

Capítulo 6

Definições Adicionais

Definição 6.3.1: Família Hereditária

Dizemos que uma família de conjuntos $\mathcal{H}$ é um **hereditária** quando ela possui todos os subconjuntos dos seus elementos, isto é,

$$A \in \mathcal{H}, B \subset A \Longrightarrow B \in \mathcal{H}.$$

Definição 6.3.2: Anel de Conjuntos

Dizemos que uma família de conjuntos $\mathcal{R}$ é um **anel** quando ela é fechada pela união e pela diferença, isto é,

(A1) Se $A, B \in \mathcal{R}$, então $A \bigcup B \in \mathcal{R}$.

(A2) Se $A, B \in \mathcal{R}$, então $A \setminus B \in \mathcal{R}$.

Definição 6.3.3: σ-anel

Dizemos que uma família de conjuntos Σ é um **σ-anel** quando ela é um Anel de Conjuntos fechado pela união enumerável, isto é,

$$(A_n)_{n=1}^{\infty} \subset \Sigma \Longrightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \Sigma.$$

Definição 6.3.4: Álgebra de Conjuntos

Seja X um conjunto não vazio e $\mathcal{A} \subset 2^X$. Dizemos que $\mathcal{A}$ é uma **Álgebra de Conjuntos** quando $\mathcal{A}$ é um Anel de Conjuntos com unidade, isto é, $X \in \mathcal{A}$.

Definição 6.3.5: Topologia

Seja X um conjunto não vazio e $\tau \subset 2^X$. Dizemos que τ é uma **topologia** quando ela contém o conjunto vazio e X, é fechada pela união arbitrária e pela interseção finita, isto é,

(A1) $\varnothing, X \in \tau$.

(A2) Se $\{O_i\}_{i\in\mathcal{I}}$, então $\bigcup_{i\in\mathcal{I}} O_i \in \tau$.

(A3) Se $(O_i)_{i=1}^n$, então $\bigcap_{i=1}^n O_i \in \tau$.

Definição 6.3.6: Espaço Topológico

Seja X um conjunto não vazio e τ uma Topologia no conjunto X. Então o par ordenado (X, τ) é chamado de **espaço topológico** e cada elemento de τ é dito um conjunto **aberto** em X.

Definição 6.3.7: Topologia Produto

Seja $\{(X_i, \tau_i)\}_{i\in I}$ uma família de Espaço Topológico indexada por I. Considere a família

$$\mathcal{C} \coloneqq \left\{\pi_i^{-1}(U); U \in \tau_i, i \in I\right\}.$$

Chamamos de **topologia produto** em $\Pi_{i\in I} X_i$ a topologia cuja base é $\mathcal{C}$. Denotaremos esta topologia por $\Pi_{i\in I}\tau_i$.

Definição 6.3.8: Produto Cartesiano

Seja $\{X_i\}_{i\in\mathcal{I}}$ uma família de conjuntos indexada por $\mathcal{I}$. Definimos o **produto cartesiano** da seguinte forma:

$$\prod_{i\in\mathcal{I}} X_i \coloneqq \left\{ f : \mathcal{I} \to \bigcup_{i\in\mathcal{I}} X_i; \forall i \in \mathcal{I}, f(i) \in X_i \right\}.$$

Definição 6.3.9: Projeção

Seja $\{X_i\}_{i\in\mathcal{I}}$ uma família de conjuntos indexada por $\mathcal{I}$. Considere a função

$$\pi_j : \prod_{i\in\mathcal{I}} X_i \to X_j$$

definida por $\pi_j(f) = f(j)$. Chamamos esta função de j-**ésima projeção**.

Definição 6.3.10: Função Aditiva Contável

Uma função real cujo domínio é uma família de conjuntos, $f : \mathcal{R} \to \overline{\mathbb{R}}$, é dita uma **função aditiva contável** quando satisfaz a seguinte propriedade:

$$\text{Se } (A_i)_{i=1}^{\infty} \subset \mathcal{R} \text{ é dois a dois disjunta, então } f\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_1\right) = \sum_{i=1}^{\infty} f(A_i).$$

Definição 6.3.11: Função Subaditiva Contável

Uma função real cujo domínio é uma família de conjuntos, $f : \mathcal{R} \to \overline{\mathbb{R}}$, é dita uma **função subaditiva contável** quando satisfaz a seguinte propriedade:

$$\text{Se } (A_i)_{i=1}^{\infty} \subset \mathcal{R}\text{ , então } f\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_1\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} f(A_i).$$

Definição 6.3.12: Função Monotônica

Uma função real cujo domínio é uma família de conjuntos, $f : \mathcal{R} \to \overline{\mathbb{R}}$, é dita uma **função monotônica** quando satisfaz a seguinte propriedade:

$$\text{Se } A, B \subset \mathcal{R} \text{ e } A \subseteq B, \text{ então } f(A) \leq f(B).$$

Definição 6.3.13: Medida Finita

Seja μ uma Medida em um Espaço de Medida (X, Σ). Dizemos que μ é uma **medida finita** quando $\mu(X) < \infty$.

Definição 6.3.14: Medida σ-finita

Seja μ uma Medida em um Espaço de Medida (X, Σ). Dizemos que μ é uma **medida σ-finita** quando existe $(E_i)_{i=1}^{\infty}$ com $\mu(E_i) < \infty$ para todo $i \geq 1$ tal que $X = \cup_{i=1}^{\infty} E_i$.

Definição 6.3.15: Base de $\overline{\mathbb{R}}$

Seja τ a família dos abertos da topologia usual de $\mathbb{R}$. Então, a topologia de $\overline{\mathbb{R}}$ é a topologia gerada pela família

$$\mathcal{C} = \tau \cup \{[-\infty, a); a \in \mathbb{R}\} \cup \{(a, \infty]; a \in \mathbb{R}\}.$$

Definição 6.3.16: Semi-norma

Seja V um espaço vetorial real. Uma função $N : V \mapsto \mathbb{R}$ é dita uma **seminorma** se:

1. $N(v) \geq 0 \quad \forall v \in V$,
2. $N(\alpha v) = |a|\, N(v) \quad \forall v \in V, \forall \alpha \in \mathbb{R}$,
3. $N(u + v) \leq N(u) + N(v) \quad \forall u, v \in V$.

Definição 6.3.17: Norma

Seja V um espaço vetorial real. Uma função $N : V \mapsto \mathbb{R}$ é dita uma **norma** se é Semi-norma tal que

- $N(v) = 0 \iff v = 0$.

Capítulo 6

Teoremas e Proposições Adicionais

Proposição 6.3.1: O produto cartesiano de abertos é aberto

Sejam $(X_1, \tau_1), (X_2, \tau_2)$ Espaço Topológico e $X_1 \times X_2$ equipado com a Topologia Produto τ. Se $U \in \tau_1$ e $V \in \tau_2$, então $U \times V \in \tau$. Por indução, o resultado vale para famílias finitas.

Proposição 6.3.2: Espaços metrizáveis separáveis possuem base enumerável

Seja (X, τ) um Espaço Topológico separável e metrizável. Então, X admite uma base $\mathcal{B}$ enumerável.

Proposição 6.3.3: $\mathbb{R}^n$ é separável

Para todo $n \in \mathbb{N}$. $\mathbb{Q}_n$ é um subconjunto denso e enumerável de $\mathbb{R}^n$ e $\mathbb{R}^n$ é separável.

Proposição 6.3.4: Bases de $\mathbb{R}$

Os conjuntos abaixo são bases para $\mathbb{R}$.

1. $C_1 = \{(a, b) : a, b \in \mathbb{R}\}$,
2. $C_2 = \{[a, b] : a, b \in \mathbb{R}\}$,
3. $C_3 = \{[a, b) : a, b \in \mathbb{R}\}$,
4. $C_4 = \{(a, b] : a, b \in \mathbb{R}\}$,
5. $C_5 = \{(a, \infty) : a \in \mathbb{R}\}$,
6. $C_6 = \{(\infty, a) : a \in \mathbb{R}\}$,
7. $C_7 = \{[a, \infty) : a \in \mathbb{R}\}$,
8. $C_8 = \{(\infty, a] : a \in \mathbb{R}\}$.

Capítulo 6

Exercícios e Detalhamentos

Exercício 6.3.1: $\overline{\Sigma}$ é σ-álgebra

Nas condições do Teorema 1.3.1, mostre que

$$\overline{\Sigma} \coloneqq \{E \cup F;\ E \in \Sigma \text{ e } F \subset N \in \mathcal{N}\}$$

é uma σ-álgebra, sabendo que

$$\mathcal{N} \coloneqq \{N \in \Sigma;\ \mu(N) = 0\}.$$

Demonstração. Vamos mostrar que $\overline{\Sigma}$ é fechado por união enumerável. Para tanto, provaremos que tanto Σ quanto $\mathcal{N}$ são fechados por união enumerável. Σ o é por definição, uma vez que é σ-álgebra . Agora, vamos mostrar que $\mathcal{N}$ também é.

Seja $(N_i)_{i=1}^{\infty} \subseteq \mathcal{N}$. Então, como a medida é subaditiva,

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} N_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu(N_i) = 0.$$

Portanto, $\mathcal{N}$ é fechado por união enumerável. Assim, se tomarmos qualquer $(E_i \cup F_i)_{i=1}^{\infty} \subseteq \overline{\Sigma}$, onde $F_i \subset N_i$ com $N_i \in \mathcal{N}$ para todo $i \in \mathbb{N}$, temos

$$\bigcup_{i=1}^{\infty}(E_i \cup F_i) = \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) \cup \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} F_i\right).$$

Note que

$$\begin{aligned} \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i &\in \Sigma \\ \bigcup_{i=1}^{\infty} F_i &\subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} N_i \in \mathcal{N}. \end{aligned}$$

Logo, $\overline{\Sigma}$ é fechado por união enumerável.

Ainda precisamos mostrar que $\overline{\Sigma}$ é fechado pelo complemento. Fixe um $(E \cup F) = A \in \overline{\Sigma}$. Nessas condições, $E \in \Sigma$ e $F \subseteq N \in \mathcal{N}$. Vamos assumir que E e N são disjuntos. Se este não for o caso, basta reescrever A substituindo F por $F' = F \setminus E$ e N por $N' = N \setminus E$. Note que $F' \subseteq N' \in \Sigma$ e

$$A = E \cup F = E \cup ((F \cap E) \cup (F \setminus E)) = E \cup (F \setminus E) = E \cup F'.$$

Agora que sabemos que podemos tomar $(E \cup F)$ com E e N disjuntos, façamos

$$E \cup F = (E \cup N) \cap (\complement(N) \cup F).$$

Vamos provar esta igualdade de conjuntos.Vale resstaltar que esta relação só vale quando E e N são disjuntos. De fato, se $x \in E \cup F$, então $x \in E$ ou $x \in F$. Por consequência, $x \in (E \cup N)$ e $x \in (F \cup \complement(N))$. Assim, $x \in (E \cup N) \cap (\complement(N) \cup F)$. Portanto,

$$E \cup F \subseteq (E \cup N) \cap (\complement(N) \cup F). \tag{6.1}$$

Para mostrar a igualdade, tomamos agora um $x \in (E \cup N) \cap (\complement(N) \cup F)$, isto é, $x \in (E \cup N)$ e $x \in (\complement(N) \cup F)$. Logo, pela primeira relação, $x \in E$ ou $x \in N$ e, pela segunda, $x \in F$ ou $x \in \complement(N)$. Note que x só pode pertencer a N ou $\complement(N)$ pois eles são disjuntos. Da mesma forma, x só pode pertencer a E ou a N pois eles são disjuntos por hipótese. Se $x \in N$, então $x \notin \complement(N)$. Como $x \in (\complement(N) \cup F)$, temos que $x \in F$. Por outro lado, se $x \in \complement(N)$, então $x \notin N$. Como $x \in (E \cup N)$, temos que $x \in E$. Portanto,

$$E \cup F \supseteq (E \cup N) \cap (\complement(N) \cup F). \tag{6.2}$$

Juntando 6.1 e 6.2, temos que

$$E \cup F = (E \cup N) \cap (\complement(N) \cup F).$$

Mostrada esta igualdade, retomemos o nosso objetivo de mostrar que $\overline{\Sigma}$ é fechado pelo complemento. Com o que fizemos anteriomente, e aplicando o Teorema de De Morgan, podemos ver que, para qualquer $E \cup F \in \overline{\Sigma}$, é tal que,

$$\begin{aligned}
\complement(E \cup F) &= \complement\left((E \cup N) \cap (\complement(N) \cup F)\right) \\
&= \complement(E \cup N) \cup \complement(\complement(N) \cup F) \\
&= \complement(E \cup N) \cup N \cap \complement(F) \\
&= \complement(E \cup N) \cup (N \setminus F).
\end{aligned}$$

Note que, como Σ é fechado para as operações conjuntistas, $\complement(E \cup N) \in \Sigma$ e $(N \setminus F) \subset N$. Logo, $\complement(E \cup F) \in \overline{\Sigma}$.

Concluimos, por fim, que $\overline{\Sigma}$ é uma σ-álgebra. ■

Exercício 6.3.2: $\overline{\mu}$ está bem definida

Nas condições do Teorema 1.3.1, mostre que

$$\overline{\mu}(E \cup F) := \mu(E) \text{ para todo } E \cup F \in \overline{\Sigma}$$

está bem definida.

Demonstração. Sejam $N_0, M_0 \in \mathcal{N}$. Suponha que $E_1 \cup F_1 = E_2 \cup F_2$, com $E_1, E_2 \in \Sigma$ e $F_1 \subset N_0$, $F_2 \subset M_0$. Mostraremos que $\overline{\mu}(E_1 \cup F_1) = \overline{\mu}(E_2 \cup F_2)$, ou seja, $\mu(E_1) = \mu(E_2)$.

Por construção, temos

$$E_1 \subseteq E_1 \cup F_1 = E_2 \cup F_2 \subseteq E_2 \cup M_0.$$

Assim, como a medida é monotônica e subaditiva,

$$\mu(E_1) \leq \mu(E_2 \cup M_0) \leq \mu(E_2) + \mu(M_0) = \mu(E_2).$$

Analogamente, temos

$$E_2 \subseteq E_2 \cup F_2 = E_1 \cup F_1 \subseteq E_1 \cup N_0,$$

o que implica que

$$\mu(E_2) \leq \mu(E_1 \cup N_0) \leq \mu(E_1) + \mu(N_0) = \mu(E_1).$$

Portanto, $\mu(E_1) = \mu(E_2)$, e assim $\overline{\mu}$ está bem definida. ■

Exercício 6.3.3: $\overline{\mu}$ é medida

Nas condições do Teorema 1.3.1, mostre que $\overline{\mu}$ é uma medida.

Demonstração. Precisamos mostrar que $\overline{\mu}$ satisfaz a definição de medida. Para tanto, basta verificar que $\overline{\mu}(\varnothing) = 0$ e que $\overline{\mu}$ é Função Aditiva Contável. Note que a função já é positiva por construção, pois $\overline{\mu}(E \cup F) = \mu(E) \geq 0$ para todo $E \cup F \in \overline{\Sigma}$

Note que $\varnothing \in \Sigma$ e $\varnothing \subset \varnothing \in \mathcal{N}$. Logo, $\varnothing = \varnothing \cup \varnothing \in \overline{\Sigma}$. Portanto, $\overline{\mu}(\varnothing) = \mu(\varnothing) = 0$. Agora, só nos resta provar a segunda propriedade.

Vamos mostrar que $\overline{\mu}$ é Função Aditiva Contável. Tome uma sequência disjunta $(E_n \cup F_n)_{n=1}^{\infty} \subseteq \overline{\Sigma}$. Também vamos impor a condição de E_n e N_n serem disjuntos, como no Exercício 6.3.1. Assim,

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} (E_n \cup F_n) = \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \right) \cup \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n \right).$$

Aplicando este resultado a $\overline{\mu}$, temos,

$$\begin{aligned}
\overline{\mu}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}(E_n \cup F_n)\right) &= \overline{\mu}\left(\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n\right) \cup \left(\bigcup_{n=1}^{\infty}F_n\right)\right) \\
&= \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n\right) \text{ (pela definição de } \overline{\mu}) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty}\mu(E_n) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty}\overline{\mu}(E_n \cup F_n).
\end{aligned}$$

Portanto, $\overline{\mu}$ é Função Aditiva Contável. Em conclusão, $\overline{\mu}$ é uma medida. ■

Exercício 6.3.4: $\overline{\mu}$ é única

Nas condições do Teorema 1.3.1, mostre que $\overline{\mu}$ é a única medida que estende μ a uma medida completa.

Demonstração. Sejam $\overline{\nu}$ e $\overline{\mu}$ extensões de μ como no Teorema 1.3.1.

Para todo $E \cup F \in \overline{\Sigma}$, temos pela monotonicidade e subaditividadde da medida,

$$\overline{\nu}(E \cup F) \leq \overline{\nu}(E) + \overline{\nu}(F) = \overline{\nu}(E) = \mu(E) = \overline{\mu}(E) \leq \overline{\mu}(E \cup F).$$

Analogamente, temos

$$\overline{\mu}(E \cup F) \leq \overline{\mu}(E) + \overline{\mu}(F) = \overline{\mu}(E) = \mu(E) = \overline{\nu}(E) \leq \overline{\nu}(E \cup F).$$

Portanto, $\overline{\nu}(E \cup F) = \overline{\mu}(E \cup F)$, e assim $\overline{\mu}$ é única. ■

Exercício 6.3.5: $\prod_{i \in I} E_i = \bigcap_{i \in I} \pi_i^{-1}(E_i)$

Nas condições da Proposição 1.1.2, temos que, para cada $i \in \mathcal{I}$, E_i é um elemento da família que gera Σ_i. Mostre que

$$\prod_{i \in I} E_i = \bigcap_{i \in I} \pi_i^{-1}(E_i).$$

Demonstração. Pela Definição de Produto Cartesiano,

$$\prod_{i \in \mathcal{I}} E_i = \left\{ f : \mathcal{I} \to \bigcup_{i \in \mathcal{I}} E_i ; \forall i \in \mathcal{I}, f(i) \in E_i \right\}.$$

Olhemos para o lado esquerdo da equação. Fixado um $i \in \mathcal{I}$, a pré-imagem de uma Projeção é dada por

$$\pi_i^{-1}(E_i) = \left\{ f \in \prod_{i \in \mathcal{I}} E_i ; f(i) \in E_i \right\}.$$

Assim,

$$\bigcap_{i\in\mathcal{I}} \pi_i^{-1}(E_i) = \left\{ f \in \prod_{i\in\mathcal{I}} E_i; \forall i \in \mathcal{I}, f(i) \in E_i \right\}.$$

Por definição, todo $f \in \bigcap_{i\in\mathcal{I}} \pi_i^{-1}(E_i)$ também pertence a $\prod_{i\in\mathcal{I}} E_i$, logo,

$$\prod_{i\in\mathcal{I}} E_i \supseteq \bigcap_{i\in\mathcal{I}} \pi_i^{-1}(E_i).$$

Por outro lado, qualquer $f \in \bigcap_{i\in\mathcal{I}} \pi_i^{-1}(E_i)$ é uma função $f : \mathcal{I} \to \bigcup_{i\in\mathcal{I}} E_i$ tal que, para todo $i \in \mathcal{I}$, $f(i) \in E_i$. Logo,

$$\prod_{i\in\mathcal{I}} E_i \subseteq \bigcap_{i\in\mathcal{I}} \pi_i^{-1}(E_i).$$

Portanto,

$$\prod_{i\in\mathcal{I}} E_i = \bigcap_{i\in\mathcal{I}} \pi_i^{-1}(E_i).$$

■

Exercício 6.3.6: $\pi_i^{-1}(E_i) = \prod_{j\in I} E_j$, onde $j \neq i \Rightarrow E_j = X_j$

Nas condições da Proposição 1.1.2, temos que $\mathcal{I}$ é uma família enumerável. Mostre que

$$\pi_i^{-1}(E_i) = \prod_{j\in I} E_j, \text{onde } j \neq i \Rightarrow E_j = X_j.$$

Demonstração. Pela definição de Produto Cartesiano aplicada ao conjunto descrito no enunciado, temos

$$\prod_{i\in\mathcal{I}} E_i = \left\{ f : \mathcal{I} \to \bigcup_{i\in\mathcal{I}} E_i; f(i) \in E_i \text{ e } \forall j \neq i \in \mathcal{I}, f(j) \in X_j \right\}.$$

Olhemos para o lado direito da equação. Fixado um $i \in \mathcal{I}$, a pré-imagem de uma Projeção é dada por

$$\pi_i^{-1}(E_i) = \left\{ f \in \prod_{j\in\mathcal{I}} E_j; f(i) \in E_i \right\}.$$

Observe que $\pi_i^{-1}(E_i)$ é, por definição, um subconjunto do produto cartesiano dos E_i. Seja $f \in \pi_i^{-1}(E_i)$. Então, $f(i) \in E_i$ e, para qualquer $j \neq i$, $f(j) \in X_j$ pela definição de Produto Cartesiano. Portanto, $f \in \prod_{i\in\mathcal{I}} E_i$ e já temos um dos lados da igualdade que procuramos, $\pi_i^{-1}(E_i) \subseteq \prod_{i\in\mathcal{I}} E_i$.

Para mostrar a outra relação de continência, tome uma $f \in \prod_{i\in\mathcal{I}} E_i$. Vamos tentar mostrar que $f \in \pi_i^{-1}(E_i)$. Note bem, f já satisfaz a propriedade de que $f(i) = E_i$. Portanto, $f \in \pi_i^{-1}(E_i)$ e $\pi_i^{-1}(E_i) \supseteq \prod_{i\in\mathcal{I}} E_i$.

Concluimos, então, que

$$\pi_i^{-1}(E_i) = \prod_{i\in\mathcal{I}} E_i.$$

$\blacksquare$

Exercício 6.3.7: A σ-álgebra gerada por uma base topológica

Seja (X,τ) um Espaço Topológico tal que τ admite base enumerável, $\mathcal{C}$. Então $\mathcal{B}(\tau) = \mathcal{B}(\mathcal{C})$. Em particular, o resultado vale para espaços separáveis.

Exercício 6.3.8: $\mathfrak{M}$ é σ-anel

Nas condições do Teorema 1.3.2, mostre que $\mathfrak{M}$ é σ-anel.

Demonstração. Precisamos provar que $\mathfrak{M}$ é fechado para a união enumerável e para a diferença de conjuntos.

Afirmação 6.3.1: .

$\mathfrak{M}$ é fechado para a união de conjuntos.

Demonstração da afirmação 6.3.1: Se $E_1, E_2 \in \mathfrak{M}$, então $E_1 \cup E_2 \in \mathfrak{M}$. Seja dado $A \in \mathcal{H}$. Usando o fato de que E_1 e E_2 são μ^*-mensuráveis, obtemos:

$$\mu^*(A) = \mu^*(A\cap E_1) + \mu^*(A\cap E_1^c) = \mu^*(A\cap E_1) + \mu^*(A\cap E_1^c\cap E_2) + \mu^*(A\cap E_1^c\cap E_2^c),$$

pois $A\cap(E_1\cup E_2) = (A\cap E_1)\cup(A\cap E_1^c\cap E_2)$ e portanto:

$$\mu^*(A\cap(E_1\cup E_2)) \leq \mu^*(A\cap E_1) + \mu^*(A\cap E_1^c\cap E_2).$$

Das expressões acima, temos:

$$\mu^*(A) = \mu^*(A\cap E_1)+\mu^*(A\cap E_1^c\cap E_2)+\mu^*(A\cap(E_1\cup E_2)^c) \geq \mu^*(A\cap(E_1\cup E_2))+\mu^*(A\cap(E_1\cup E_2)^c),$$

o que prova que $E_1 \cup E_2 \in \mathfrak{M}$.

Agora, vamos mostrar que $\mathfrak{M}$ é fechado para a diferença de conjuntos.

Afirmação 6.3.2: .

$\mathfrak{M}$ é fechado para a diferença de conjuntos.

Demonstração da afirmação 6.3.2: Primeiramente consideraremos o caso em que um conjunto está contido no outro. Mostraremos que, se $E_1, E_2 \in \mathfrak{M}$ e $E_1 \subset E_2$, então $E_2 \setminus E_1 \in \mathfrak{M}$. Seja dado $A \in \mathcal{H}$. Evidentemente:

$$\mu^*(A\cap(E_2\setminus E_1)) = \mu^*(A\cap E_2\cap E_1^c);$$

Como $E_1 \subset E_2$, temos $E_2 \setminus E_1 = E_1^c \cap E_2$, e portanto:

$$\mu^*(A \cap (E_2 \setminus E_1)^c) = \mu^*((A \cap E_1) \cup (A \cap E_2^c)) \leq \mu^*(A \cap E_1) + \mu^*(A \cap E_2^c).$$

Somando as duas expressões acima, obtemos:

$$\mu^*(A\cap(E_2\setminus E_1))+\mu^*(A\cap(E_2\setminus E_1)^c) \leq \mu^*(A\cap E_1)+\mu^*(A\cap E_1^c\cap E_2)+\mu^*(A\cap E_2^c) = \mu^*(A),$$

o que prova que $E_2 \setminus E_1 \in \mathfrak{M}$.

Agora, considere $E_1, E_2 \in \mathfrak{M}$ quaisquer. Pela Afirmação 6.3.1 anterior, sabemos que $\mathfrak{M}$ é fechado pela união, ou seja, $E_1 \cup E_2 \in \mathfrak{M}$. Portanto, pelo que acabamos de provar, temos que $E_2 \setminus E_1 \in \mathfrak{M}$.

Afirmação 6.3.3: .

Se $E_1, E_2 \in \mathfrak{M}$, $A \in \mathcal{H}$ e $E_1 \cap E_2 = \emptyset$, então:

$$\mu^*(A \cap (E_1 \cup E_2)) = \mu^*(A \cap E_1) + \mu^*(A \cap E_2).$$

Demonstração da afirmação 6.3.3: Como $A \cap (E_1 \cup E_2) \in \mathcal{H}$ e $E_1 \in \mathfrak{M}$, temos:

$$\mu^*(A \cap (E_1 \cup E_2)) = \mu^*(A \cap (E_1 \cup E_2) \cap E_1) + \mu^*(A \cap (E_1 \cup E_2) \cap E_1^c).$$

Como $E_1 \cap E_2 = \emptyset$, a última igualdade implica que:

$$\mu^*(A \cap (E_1 \cup E_2)) = \mu^*(A \cap E_1) + \mu^*(A \cap E_2),$$

onde usamos o fato de que $E_1 \cap E_2 = \emptyset$.

Afirmação 6.3.4: .

Se $(E_k)_{k\geq 1}$ é uma sequência de elementos dois a dois disjuntos de $\mathfrak{M}$, então $\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k \in \mathfrak{M}$.

Demonstração da afirmação 6.3.4: Usando indução e as Afirmações 6.3.1 e 6.3.3, obtemos que $\bigcup_{k=1}^{t} E_k \in \mathfrak{M}$:

$$\mu^*(A \cap \bigcup_{k=1}^{t} E_k) = \sum_{k=1}^{t} \mu^*(A \cap E_k),$$

para todo $A \in \mathcal{H}$ e todo $t \geq 1$; daí:

$$\mu^*(A) = \mu^*(A \cap \bigcup_{k=1}^{t} E_k) + \mu^*(A \cap (\bigcup_{k=1}^{t} E_k)^c) = \left(\sum_{k=1}^{t} \mu^*(A \cap E_k)\right) + \mu^*(A \cap (\bigcup_{k=1}^{t} E_k)^c).$$

Como $A \cap (\bigcup_{k=1}^{t} E_k)^c \supseteq A \cap (\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k)^c$, temos:

$$\mu^*(A) \geq \left(\sum_{k=1}^{\infty} \mu^*(A \cap E_k)\right) + \mu^*(A \cap (\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k)^c),$$

fazendo $t \to \infty$:

$$\mu^*(A) \geq \mu^*(A \cap \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k) + \mu^*(A \cap (\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k)^c) \geq \mu^*(A),$$

provando que $\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k \in \mathfrak{M}$.

Afirmação 6.3.5: .

$\mathfrak{M}$ é fechado para a união enumerável.

Demonstração da afirmação 6.3.5: Se $(E_k)_{k\geq 1}$ é uma sequência em $\mathfrak{M}$, então $\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k \in \mathfrak{M}$. Para cada $k \geq 1$, seja $F_k = E_k \setminus \bigcup_{i=0}^{k-1} E_i$, onde $E_0 = \emptyset$. Segue das Afirmações 6.3.1 e 6.3.2 que $F_k \in \mathfrak{M}$, para todo $k \geq 1$. Além disso, os conjuntos $(F_k)_{k\geq 1}$ são dois a dois disjuntos, e $\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k = \bigcup_{k=1}^{\infty} F_k$. Segue então da Afirmação 6.3.4 que $\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k \in \mathfrak{M}$.

Assim, mostramos que $\mathfrak{M}$ é fechado para a união enumerável (Afirmação 6.3.5) e para a diferença de conjuntos (Afirmação 6.3.2), o que prova que $\mathfrak{M}$ é um σ-anel. ■