

# Teoria da Medida

Notas de Aula e Solucionário

**Pedro Vital**  
**Roberto Capistrano Filho**

Universidade Federal de Pernambuco (UFPE)

Departamento de Matemática

September 26, 2024

*Versão Preliminar*  
*Sujeito a revisões*



# Capítulo 0

## Sobre Este Material

---

Estas notas foram escritas ao longo de 2024 para complementar as reuniões da Iniciação Científica. Referem-se principalmente ao livro “The Elements of Integration and Lebesgue Measure” de Robert G. Bartle e “Real Analysis: Modern Techniques and Their Applications” de Gerald B. Folland. Além disso, foram usadas como referências as notas de aula de Daniel Pellegrino da UFPB e Daniel Tausk da USP.

A motivação para estas notas é fornecer uma compreensão clara e concisa dos conceitos fundamentais de Medida e Integração, que são cruciais para várias áreas da matemática e suas aplicações.

### Objetivos

Os principais objetivos destas notas são:

1. Complementar o material apresentado nas reuniões da Iniciação Científica.
2. Fornecer uma base sólida para estudos mais avançados.
3. Facilitar a compreensão dos conceitos através de teoremas e demonstrações bem detalhadas.
4. Servir como um recurso de referência para futuros estudos e pesquisas na área.

### Estrutura das Notas

Estas notas estão organizadas em capítulos que seguem a estrutura lógica do estudo de Medida e Integração adotada pelo Bartle. Em alguns momentos, a ordem foi substituída por fins didáticos.

Estas notas assumem o domínio de alguns assuntos como Teoria dos Conjuntos, Análise da Reta e noções de topologia.

A fim de tornar a leitura mais dinâmica, conhecimentos necessários foram colocados na Seção XXX, as demonstrações mais extensas foram movidas para a Seção XXX e soluções para vários exercícios podem ser encontradas na Seção XXX.

## Versionamento

Estas notas estão na sua versão 0.1. Elas cobrem aproximadamente 50% do curso de medida.

# Capítulo 0

## Contents

|          |                                    |           |
|----------|------------------------------------|-----------|
| <b>1</b> | <b>Medidas</b>                     | <b>1</b>  |
| 1.1      | Espaços Mensuráveis . . . . .      | 1         |
| 1.2      | Medidas . . . . .                  | 8         |
| 1.3      | Teoremas de Extensão . . . . .     | 13        |
| 1.4      | Construção de Medidas . . . . .    | 16        |
| <b>2</b> | <b>Integração</b>                  | <b>17</b> |
| 2.1      | Funções Mensuráveis . . . . .      | 17        |
| 2.2      | Integração . . . . .               | 22        |
| 2.3      | Teoremas de Convergência . . . . . | 27        |
| <b>3</b> | <b>Os Espaços de Lebesgue</b>      | <b>33</b> |
| 3.1      | Espaços $L^p$ . . . . .            | 33        |
| 3.2      | Modos de Convergência . . . . .    | 33        |
| 3.3      | Teoremas de Decomposição . . . . . | 33        |
|          | <b>Definições Adicionais</b>       | <b>35</b> |



# Capítulo 1

## Medidas

O nosso objetivo é generalizar a ideia de volumes. De forma bem superficial, existe um problema com a nossa intuição de “mensurabilidade”. Em particular, existem conjuntos bem patológicos que não conseguimos “medir”. Uso aspas aqui para explicitar a informalidade do termo até aqui. Para resolver o problema mencionado, podemos construir uma estrutura chamada de  $\sigma$ -álgebra que definirá o conceito de mensurabilidade.

Com esta estrutura em mãos, vamos discutir algumas das suas propriedades e estudar a sua relação com a topologia de um espaço. Depois disso, construiremos uma função que chamaremos de medida. Esta é a função que vai associar um número a cada conjunto mensurável. Na prática, esta será a nossa generalização para volumes. Por fim, trataremos dos teoremas que nos permitem estender medidas “ruins” para criar medidas bem comportadas.

Dessa forma, podemos resumir os conceitos mais importantes deste capítulo na seguinte lista:

1. Espaços Mensuráveis
2. Medidas
3. Teoremas de Extensão
4. Construção de Medidas

### 1.1 Espaços Mensuráveis

#### O que são $\sigma$ -álgebras ?

Como prometido, vamos definir o que são as  $\sigma$ -álgebras. Poderíamos passar o dia todo falando de estruturas algébricas que antecedem esta construção, mas, para os nossos fins, tudo o que precisamos saber é que uma  $\sigma$ -álgebra de um conjunto é uma família de subconjuntos *fechada pelas operações conjuntistas*, isto é, interseção, união e complemento de elementos dessa família ainda pertence a família. Veja a definição rigorosa abaixo.

##### Definição 1.1.1: $\sigma$ -álgebra

Seja  $X$  um conjunto não vazio e  $\Sigma \subset 2^X$ . Dizemos que  $\Sigma$  é uma  $\sigma$ -álgebra quando  $\Sigma$  é um  [\$\sigma\$ -anel](#) com unidade.

Algumas propriedades que decorrem da 1.1.1 são importantes, como, por exemplo, o fato de que as  $\sigma$ -álgebras são *fechadas por interseção enumerável*. Para mostrar isso, basta aplicar as [Teorema de De Morgan](#). Desse conjunto extenso de propriedades vindas da teoria dos conjuntos, precisamos de duas, que estão enunciadas abaixo.

### Teorema 1.1.1: Teorema de De Morgan

Seja  $X$  um conjunto e  $\{O_i\}_{i \in \mathcal{I}} \subset 2^X$ . Então,

1.

$$\mathfrak{C} \left( \bigcup_{i \in \mathcal{I}} O_i \right) = \bigcap_{i \in \mathcal{I}} \mathfrak{C}(O_i),$$

2.

$$\mathfrak{C} \left( \bigcap_{i \in \mathcal{I}} O_i \right) = \bigcup_{i \in \mathcal{I}} \mathfrak{C}(O_i).$$

## Exemplos de $\sigma$ -álgebras

Vamos ver vários exemplos de  $\sigma$ -álgebras. Pule se já estiver familiarizado com o assunto. No apêndice de exercícios resolvidos é provado que cada um destes exemplos é, de fato, uma  $\sigma$ -álgebra.

### Exemplo 1.1.1: $\sigma$ -álgebra Trivial

Seja  $X$  um conjunto. Então  $\Sigma = \{\emptyset, X\}$  é uma  $\sigma$ -álgebra conhecida como a  $\sigma$ -álgebra trivial de  $X$ .

### Exemplo 1.1.2: $\sigma$ -álgebra das Partes

Seja  $X$  um conjunto. Então  $\Sigma = 2^X$  é uma  $\sigma$ -álgebra conhecida como a  $\sigma$ -álgebra das partes de  $X$ .

### Exemplo 1.1.3: $\sigma$ -álgebra dos Conjuntos Enumeráveis

Seja  $X$  um conjunto não enumerável. Então

$$\Sigma = \{E \in X; E \text{ é enumerável ou } \mathfrak{C}(E) \text{ é enumerável}\}$$

é uma  $\sigma$ -álgebra conhecida como a  $\sigma$ -álgebra dos conjuntos enumeráveis e co-enumeráveis de  $X$ .

## Como criar $\sigma$ -álgebras ?

Para partir para problemas mais interessantes precisamos de uma forma de criar  $\sigma$ -álgebras. Fazemos isso com o conceito de  $\sigma$ -álgebra gerada por conjuntos. Intu-



itivamente, esta será a menor  $\sigma$ -álgebra que contém os elementos. Formalizamos esta ideia com a definição abaixo.

### Definição 1.1.2: $\sigma$ -álgebra gerada

Seja  $\mathcal{C} \subset 2^X$  uma família de subconjuntos de  $X$ . Dizemos que a  $\sigma$ -álgebra  $\sigma[\mathcal{C}]$  é a  $\sigma$ -álgebra gerada por  $\mathcal{C}$  quando

1.  $\mathcal{C} \subset \sigma[\mathcal{C}]$ ;
2. Se  $\Sigma$  é uma  $\sigma$ -álgebra de  $X$  tal que  $\mathcal{C} \subset \Sigma$ , então  $\sigma[\mathcal{C}] \subset \Sigma$ .

A definição acima pode ser bem abstrata e difícil de trabalhar. Assim, introduziremos uma caracterização mais tangível. A fim de chegar nesta caracterização, provemos dois lemas.

### Lema 1.1.1: Interseção de $\sigma$ -álgebras é $\sigma$ -álgebra

Seja  $X$  um conjunto e  $\{\Sigma_i\}_{i \in \mathcal{I}}$  uma família de  $\sigma$ -álgebras de  $X$ . Então,  $\bigcap_{i \in \mathcal{I}} \Sigma_i$  é uma  $\sigma$ -álgebra de  $X$ .

*Demonstração.* Como  $A_n \in \Sigma$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ , então  $A_n^c \in \Sigma$  para todo  $n$  e  $(A_n^c)_{n=1}^\infty \subset \Sigma$ . Assim  $\bigcup_{n=1}^\infty (A_n^c) \in \Sigma$ . Note bem, pelo Teorema de De Morgan,

$$\bigcup_{n=1}^\infty (A_n^c) = \left( \bigcap_{n=1}^\infty A_n \right)^c \in \Sigma.$$

Portanto  $(\bigcup_{n=1}^\infty (A_n^c))^c = \bigcap_{n=1}^\infty A_n \in \Sigma$ . ■

### Lema 1.1.2: Unicidade da $\sigma$ -álgebra gerada

Seja  $X$  um conjunto e  $\mathcal{C} \subset 2^X$ . Então, a  $\sigma$ -álgebra gerada por  $\mathcal{C}$  é única.

*Demonstração.* Sejam  $\mathcal{A}$  e  $\mathcal{B}$  duas  $\sigma$ -álgebras geradas por  $\mathcal{C}$ . Então, pelo primeiro item da definição de  $\mathcal{A}$ , temos que  $\mathcal{C} \subset \mathcal{A}$ . Por outro lado, usando o segundo item da definição de  $\mathcal{B}$ , temos que  $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$ . Analogamente, mostramos que  $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$  e  $\mathcal{A} = \mathcal{B}$ . ■

Com esta ferramenta em mãos, vamos introduzir a Caracterização da  $\sigma$ -álgebra gerada.

### Proposição 1.1.1: Caracterização da $\sigma$ -álgebra gerada

Sejam  $X$  um conjunto,  $\mathcal{C} \subset 2^X$  e  $\mathcal{J} = \{\Sigma_j\}$  a família de todas as  $\sigma$ -álgebras de  $X$  que contém  $\mathcal{C}$ . Então,

$$\sigma[\mathcal{C}] = \bigcap_{\Sigma_j \in \mathcal{J}} \Sigma_j.$$

*Demonstração.* Primeiramente, note que  $\mathcal{J}$  não é uma família vazia, pois  $2^X$  é uma  $\sigma$ -álgebra (Exemplo 1.1.2) que contém  $\mathcal{C}$  trivialmente, logo  $\mathcal{C}$  está na interseção. Em segundo lugar, observe que, pelo Lema 1.1.1, a interseção dos elementos de  $\mathcal{J}$  é uma  $\sigma$ -álgebra. Por último, verifique que  $\bigcap_{\Sigma_j \in \mathcal{J}} \Sigma_j \subseteq \Sigma_j$  para todo  $\Sigma_j \in \mathcal{J}$ . Portanto,  $\bigcap_{\Sigma_j \in \mathcal{J}} \Sigma_j$  é uma  $\sigma$ -álgebra gerada por  $\mathcal{C}$  e, pelo Lema 1.1.2, concluímos que  $\sigma[\mathcal{C}] = \bigcap_{\Sigma_j \in \mathcal{J}} \Sigma_j$ . ■

O resultado abaixo é bem direto, mas útil.

#### Lema 1.1.3: $\sigma$ -álgebra Gerada Por Subconjunto

Seja  $\mathcal{C} \in 2^X$ . Se  $E \in \sigma[\mathcal{C}]$ , então  $\sigma[E] \subset \sigma[\mathcal{C}]$ .

*Demonstração.* Temos, por hipótese que  $\sigma[\mathcal{C}]$  é uma  $\sigma$ -álgebra de  $X$  que contém  $E$ . Logo, pelo segundo item da Definição 1.1.2,  $\sigma[E] \subset \sigma[\mathcal{C}]$ . ■

## $\sigma$ -álgebras de Borel

Agora que temos uma ferramenta poderosa para criar  $\sigma$ -álgebras, vamos estudar o que acontece quando estudamos espaços com mais estrutura, como a reta. Lembre que o nosso objetivo é generalizar a ideia do que é uma “medida” ou “volume”, portanto, é bastante natural estudar  $\sigma$ -álgebras em  $\mathbb{R}$  e  $\mathbb{R}^n$ .

#### Definição 1.1.3: $\sigma$ -álgebra de Borel

Seja  $(X, \tau)$  um Espaço Topológico. Então  $\mathcal{B}(X) = \sigma[\tau]$  é a  $\sigma$ -álgebra de Borel. Os elementos de  $\mathcal{B}(X)$  são chamados de **boreleanos**.

Pela Definição 1.1.3, podemos tomar qualquer base da reta para formar os boreleanos em  $\mathbb{R}$ . Veja o exercício X. Criar uma  $\sigma$ -álgebra de  $\mathbb{R}$  (ou em  $\overline{\mathbb{R}}$ ) é bem direto, mas dependemos de uma abordagem mais cautelosa para construir uma  $\sigma$ -álgebra em  $\mathbb{R}^n$ .

Para fazer essa construção, vamos começar definindo um **espaço mensurável**. Da mesma forma que podemos tomar um par ordenado de conjunto e subconjuntos para formar um Espaço Topológico, podemos tomar um par ordenado para formar um Espaço Mensurável.

#### Definição 1.1.4: Espaço Mensurável

Seja  $X$  um conjunto não vazio e  $\Sigma$  uma  $\sigma$ -álgebra no conjunto  $X$ . Então o par ordenado  $(X, \Sigma)$  é chamado de **espaço mensurável** e cada elemento de  $\Sigma$  é dito um conjunto  $\Sigma$ -mensurável.

A construção geral é bem parecida com a definição da topologia produto.

**Definição 1.1.5:  $\sigma$ -álgebra Produto**

Seja  $\{(X_i, \Sigma_i)\}_{i \in I}$  uma família de Espaço Mensurável indexada por  $I$ . Considere a família

$$\mathcal{C} := \{\pi_i^{-1}(E_i); E_i \in \Sigma_i, i \in I\}.$$

Chamamos  $\mathcal{C}$  de  **$\sigma$ -álgebra produto** em  $\Pi_{i \in I} X_i$ . Denotaremos esta  $\sigma$ -álgebra por  $\bigotimes_{i \in I} \Sigma_i$ .

Esta primeira definição é bastante abstrata. Por um lado, as abstrações nos permitem trabalhar em casos gerais que podem nos revelar propriedades universais. Por outro lado, essas abstrações também criam obstáculos quanto a manipulação dessas estruturas.

A fim de recuperar alguma estrutura, vamos dar uma olhada de perto no que acontece quando a família é indexada por um conjunto enumerável.

**Proposição 1.1.2:  $\sigma$ -álgebra produto de família enumerável**

Seja  $I$  um conjunto enumerável e  $\{X_i\}_{i \in I}$  uma família de espaços mensuráveis. Então

$$\bigotimes_{i \in I} \Sigma_i = \sigma \left[ \left\{ \prod_{i \in I} E_i; E_i \in \Sigma_i \right\} \right].$$

*Demonstração.* Vamos denotar por  $\mathcal{F}$  a família de conjuntos do enunciado. Considere  $\mathcal{C}$  a família como na Definição 1.1.5. Pretendemos mostrar que  $\sigma[\mathcal{C}] = \sigma[\mathcal{F}]$ . Uma forma natural de chegar nesse resultado é mostrar que  $\sigma[\mathcal{C}] \subseteq \sigma[\mathcal{F}]$  e  $\sigma[\mathcal{F}] \subseteq \sigma[\mathcal{C}]$ .

Por um lado, podemos mostrar (ver Exercício X) que

$$\prod_{i \in I} E_i = \bigcap_{i \in I} \pi_i^{-1} E_i.$$

Usando o Lema 1.1.1, mostramos que  $\bigcap_{i \in I} \pi_i^{-1}(E_i) \in \sigma[\mathcal{C}]$ . Com isso, concluímos que  $\mathcal{F} \subseteq \sigma[\mathcal{C}]$  e, pelo Lema 1.1.3,  $\sigma[\mathcal{F}] = \sigma[\mathcal{C}]$ .

Resta mostrar a segunda inclusão. Usaremos a mesma ideia. Para tanto, precisamos mostrar (ver Exercício Y) que, para todo  $E_i \in \Sigma_i$  onde  $i \in I$ ,

$$\begin{aligned} \pi_i^{-1}(E_i) &= X_1 \times \cdots \times E_i \times \cdots \\ &= \prod_{j \in I} E_j, \quad j \neq i \Rightarrow E_j = X_j. \end{aligned}$$

Sabemos que cada  $X_j \in \Sigma_j$  pela definição de  $\sigma$ -álgebra e  $E_i \in \Sigma_i$  por hipótese. Logo,  $\pi_i^{-1}(E_i) \in \mathcal{F} \subset \sigma[\mathcal{F}]$ . Usamos o Lema 1.1.3 mais uma vez para concluir que  $\sigma[\mathcal{C}] \subseteq \sigma[\mathcal{F}]$ . ■

A proposição abaixo nos garante que podemos olhar apenas para os geradores das  $\sigma$ -álgebras para construir o produto.

**Proposição 1.1.3:**  $\sigma$ -álgebra produto de famílias geradas por conjuntos

Seja  $\{X_i\}_{i \in I}$  uma família de espaços mensuráveis tal que cada  $\Sigma_i = \sigma[\mathcal{C}_i]$ . Então

$$\bigotimes_{i \in I} \Sigma_i = \sigma \left[ \left\{ \pi_i^{-1}(E_i); E_i \in \mathcal{C}_i, i \in I \right\} \right].$$

*Demonstração.* Vamos denotar por  $\mathcal{F}$  a família de conjuntos do enunciado. Considere  $\mathcal{C}$  a família como na Definição 1.1.5. Pretendemos mostrar que  $\sigma[\mathcal{C}] = \sigma[\mathcal{F}]$ . Uma forma natural de chegar nesse resultado é mostrar que  $\sigma[\mathcal{C}] \subseteq \sigma[\mathcal{F}]$  e  $\sigma[\mathcal{F}] \subseteq \sigma[\mathcal{C}]$ .

Por um lado, podemos mostrar (ver Exercício X) que

$$\prod_{i \in I} E_i = \bigcap_{i \in I} \pi_i^{-1} E_i.$$

Usando o Lema 1.1.1, mostramos que  $\bigcap_{i \in I} \pi_i^{-1}(E_i) \in \sigma[\mathcal{C}]$ . Com isso, concluímos que  $\mathcal{F} \subseteq \sigma[\mathcal{C}]$  e, pelo Lema 1.1.3,  $\sigma[\mathcal{F}] = \sigma[\mathcal{C}]$ .

Resta mostrar a segunda inclusão. Usaremos a mesma ideia. Para tanto, precisamos mostrar (ver Exercício Y) que, para todo  $E_i \in \Sigma_i$  onde  $i \in I$ ,

$$\begin{aligned} \pi_i^{-1}(E_i) &= X_1 \times \cdots \times E_i \times \cdots \\ &= \prod_{j \in I} E_j, \quad j \neq i \Rightarrow E_j = X_j. \end{aligned}$$

Sabemos que cada  $X_j \in \Sigma_j$  pela definição de  $\sigma$ -álgebra e  $E_i \in \Sigma_i$  por hipótese. Logo,  $\pi_i^{-1}(E_i) \in \mathcal{F} \subset \sigma[\mathcal{F}]$ . Usamos o Lema 1.1.3 mais uma vez para concluir que  $\sigma[\mathcal{C}] \subseteq \sigma[\mathcal{F}]$ . ■

**Corolário 1.1.1:**  $\sigma$ -álgebra produto de família enumerável geradas

Seja  $I$  um conjunto enumerável e  $\{X_i\}_{i \in I}$  uma família de espaços mensuráveis tal que cada  $\Sigma_i = \sigma[\mathcal{C}_i]$ . Então  $\bigotimes_{i \in I} \Sigma_i$  é a  $\sigma$ -álgebra gerada por

$$\bigotimes_{i \in I} \Sigma_i = \sigma \left[ \left\{ \prod_{i \in I} E_i; E_i \in \mathcal{C}_i \right\} \right].$$

*Demonstração.* Este corolário é uma consequência direta das aplicações das Proposições 1.1.2 e 1.1.3. ■

Estamos descendo o grau de generalidade para chegar em coisas cada vez mais concretas. Vamos passar agora de espaços mensuráveis abstratos para espaços métricos. Aqui, entenderemos os espaços métricos como espaços mensuráveis onde a distância induz uma topologia, dando origem a um espaço topológico, e a topologia induz uma  $\sigma$ -álgebra de Borel, dando origem a um espaço mensurável.

**Proposição 1.1.4:  $\sigma$ -álgebra produto de família de espaços métricos**

Seja  $\{X_i\}_{i=1}^n$  uma família finita de espaços métricos com a topologia,  $\tau_i$ , induzida pela distância. Então

$$\bigotimes_{i=1}^n \mathcal{B}(X_i) \subseteq \mathcal{B}\left(\prod_{i=1}^n X_i\right).$$

*Demonstração.* Note bem, estamos trabalhando com um número finito de espaços métricos, cuja  $\sigma$ -álgebra é gerada pelos abertos de cada conjunto. Assim, valem, as hipóteses do Corolário 1.1.1. Com isso, ganhamos que a  $\sigma$ -álgebra produto de  $X$  é gerada pelo produto de todos os abertos.

$$\mathcal{C} := \left\{ \prod_{i=1}^n E_i; E_i \in \tau_i \right\} \implies \sigma[\mathcal{C}] = \bigotimes_{i=1}^n \mathcal{B}(X_i)$$

Por outro lado, cada produto de abertos é aberto na topologia produto (ver Proposição X) e, portanto, pertence a  $\mathcal{B}(X)$ . Portanto,  $\mathcal{C} \in \mathcal{B}(X)$  e, pelo Lema 1.1.3, temos que

$$\sigma[\mathcal{C}] = \bigotimes_{i=1}^n \mathcal{B}(X_i) \subseteq \mathcal{B}(X).$$

■

Se colocarmos uma hipótese a mais conseguimos garantir a igualdade. Veja o corolário abaixo.

**Corolário 1.1.2:  $\sigma$ -álgebra produto de espaços métricos separáveis**

Sejam  $\{X_i\}_{i=1}^n$  e  $X$  como na Proposição 1.1.4. Se cada  $X_i$  for separável, então  $\bigotimes_{i=1}^n \mathcal{B}(X_i) = \mathcal{B}(X)$ .

$$\bigotimes_{i=1}^n \mathcal{B}(X_i) = \mathcal{B}\left(\prod_{i=1}^n X_i\right).$$

*Demonstração.* Pela Proposição 1.1.4, temos a primeira inclusão. Queremos mostrar que  $\mathcal{B}(X) \subseteq \bigotimes_{i=1}^n \mathcal{B}(X_i)$ .

Como cada  $X_i$  é separável por hipótese, então existe  $E_i \subset X_i$  denso e enumerável. É possível mostrar que existe uma base enumerável  $\mathcal{B}_i$  para cada  $X_i$  (ver Proposição X). Por outro lado, usando o Fato Y, mostramos que  $\mathcal{B}(X)$  é gerado por  $\{\prod_{i=1}^n E_i; E_i \in \mathcal{B}_i\} \subseteq \mathcal{C}$ . Logo, pelo Lema 1.1.3, temos que  $\mathcal{B}(X) \subseteq \bigotimes_{i=1}^n \mathcal{B}(X_i)$ . ■

Toda essa construção nos leva a um resultado importante.

**Corolário 1.1.3:  $\sigma$ -álgebra produto de  $\mathbb{R}^n$** 

$$\mathcal{B}(\mathbb{R}^n) = \bigotimes_{i=1}^n \mathcal{B}(\mathbb{R}).$$

*Demonstração.* Usando o Fato X de que  $\mathbb{R}$  é separável, podemos aplicar diretamente o Corolário 1.1.1 para provar o resultado. ■

## Revisitando os Resultados

Desta seção, podemos destacar algumas definições e resultados essenciais. Quanto a  $\sigma$ -álgebra, destacamos as operações pelas quais esta família é fechada: complemento, união enumerável, interseção enumerável. Além disso, lembramos da importância do conceito da  $\sigma$ -álgebra gerada, principalmente no que tange a definição da  $\sigma$ -álgebra de Borel. Por fim, o resultado mais importante desta seção, a construção da  $\sigma$ -álgebra produto de  $\mathbb{R}^n$ , nos diz que os conjuntos mensuráveis de  $\mathbb{R}^n$  são gerados pelo produto cartesiano de conjuntos mensuráveis de  $\mathbb{R}$ .

## 1.2 Medidas

### O que são medidas?

Com a estrutura dos Espaço Mensurável em mãos, vamos construir os espaços de medida, isto é, aqueles conjuntos onde, além da noção de mensurabilidade, é possível atribuir um valor a um dado conjunto. Futuramente, isto nos permitirá atribuir um valor a uma função mensurável.

Em linhas gerais, uma **medida** é uma Função Aditiva Contável não negativa onde o domínio é uma  $\sigma$ -álgebra. Existe uma função mais fraca que esta, chamada de **pré-medida**. Observe as definições abaixo.

#### Definição 1.2.1: Pré-medida

Seja  $X$  um conjunto não vazio e  $\mathcal{R} \subset 2^X$  um Anel de Conjuntos. Dizemos que uma função  $\mu_0 : \mathcal{R} \rightarrow [0, \infty]$  é uma **pré-medida** quando  $\mu_0(\emptyset) = 0$  e ela é uma Função Aditiva Contável.

#### Definição 1.2.2: Medida

Dizemos que uma Pré-medida é uma **medida** quando o domínio é uma  $\sigma$ -álgebra.

Anteriormente, definimos os Espaço Mensurável com um par ordenado. Desta vez, vamos definir os Espaço de Medida a partir de uma tripla dada por um conjunto, uma família de subconjuntos e uma Medida.

#### Definição 1.2.3: Espaço de Medida

Seja  $X$  um conjunto não vazio,  $\Sigma$  uma  $\sigma$ -álgebra no conjunto  $X$  e  $\mu$  uma Medida definida em  $\Sigma$ . Então a tripla ordenada  $(X, \Sigma, \mu)$  é chamada de **espaço de medida**.

## Exemplos de Medidas

Vamos ver alguns exemplos de medidas que serão úteis mais tarde. Pule se estiver familiarizado com o assunto. No apêndice de exercícios resolvidos é provado que cada um destes exemplos é, de fato, uma medida.

### Exemplo 1.2.1: Medida de Contagem

Seja  $(X, \Sigma)$  um Espaço de Medida onde  $X$  é um conjunto não enumerável e  $\Sigma$  é a  $\sigma$ -álgebra dos Conjuntos Enumeráveis. A função

$$\mu(E) = \begin{cases} \#E, & \text{se } E \text{ é finito,} \\ +\infty, & \text{se } E \text{ é infinito,} \end{cases}$$

é uma medida em  $X$ .

### Exemplo 1.2.2: Medida de Dirac

Sejam  $(X, 2^X)$  um Espaço de Medida e  $x_0 \in X$  um ponto fixado. A função

$$\mu(E) = \begin{cases} 1, & \text{se } x_0 \in E, \\ 0, & \text{se } x_0 \notin E, \end{cases}$$

é uma medida em  $X$ .

## Propriedades das Medidas

As medidas obedecem a algumas propriedades naturais que serão úteis no futuro. Elas são naturais no sentido de que seguem uma lógica intuitiva como, por exemplo, um conjunto que contém outro possui uma medida maior que este. Estudemos estas propriedades.

Medidas têm 4 propriedades importantes que serão enunciadas: medidas são funções monotônicas crescentes e subaditivas contáveis. Além disso, elas satisfazem duas propriedades conhecidas como continuidade por baixo e por cima.

### Proposição 1.2.1: Monotonicidade da Medida

Seja  $(X, \Sigma, \mu)$  um espaço de medida. Então,  $\mu$  é uma Função Monotônica.

*Demonstração.* Sejam  $E, F \in \Sigma$  tais que  $E \subset F$ . Podemos escrever  $F$  como a união disjunta entre  $E$  e  $F \setminus E$ . Como a medida  $\mu$  é aditiva contável, então  $\mu(F) = \mu(E) + \mu(F \setminus E)$ . Note que  $F \setminus E = F \cap E^c$ , logo  $F \setminus E \in \Sigma$ . Como,  $\mu(A) \geq 0$  para todo  $A \in \Sigma$ , temos que  $\mu(E) \leq \mu(E) + \mu(F \setminus E) = \mu(F)$ . ■

**Corolário 1.2.1: Medida da Diferença**

Nas condições da Proposição 1.2.1, se  $E, F \in \Sigma$  e  $\mu(E) < \infty$ , então

$$\mu(F \setminus E) = \mu(F) - \mu(E).$$

*Demonstração.* Se  $\mu(E) < \infty$ , então podemos subtrair este valor dos dois lados sem correr o risco de chegar em uma diferença de infinitos. Portanto,  $\mu(F \setminus E) = \mu(F) - \mu(E)$ . ■

**Proposição 1.2.2: Subaditividade da medida**

Seja  $(X, \Sigma, \mu)$  um espaço de medida. Então  $\mu$  é uma **Função Subaditiva Contável**.

*Demonstração.* Vamos construir uma sequência disjunta  $(F_n)$  a partir da sequência  $(E_n)$  dada. Seja  $F_1 = E_1$  e defina

$$F_k = E_k \setminus \left( \bigcup_{n=1}^{k-1} E_n \right).$$

Por construção,  $F_i \cap F_j = \emptyset$  para quaisquer  $i, j \in \mathbb{N}$  tais que  $i \neq j$ . Também temos que  $F_n \subset E_n$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Por último, notamos que

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n \implies \mu \left( \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \right) = \mu \left( \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n \right). \quad (1.1)$$

Como  $(F_n)$  é disjunta e  $\mu$  é aditiva contável, concluímos, a partir da Equação (1.1) que

$$\mu \left( \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \right) = \mu \left( \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(F_n). \quad (1.2)$$

Agora, aplicando o fato de que  $F_n \subset E_n$  a Proposição 1.2.1, temos que  $\mu(F_n) \leq \mu(E_n)$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Assim, as séries também seguem esta desigualdade. Portanto, pela Equação (1.2),

$$\mu \left( \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(F_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n).$$

■

**Proposição 1.2.3: Continuidade por baixo**

Seja  $(X, \Sigma, \mu)$  um espaço de medida. Se  $(E_n)_{n=1}^{\infty} \subset \Sigma$  é uma sequência crescente, então

$$\mu \left( \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(E_n).$$



*Demonstração.* Vamos começar mostrando o primeiro item. Seja  $(E_n)_{n=1}^\infty \subset \Sigma$  uma sequência crescente, isto é,  $E_n \subset E_{n+1}$  para todo  $n$  natural. Então, como na demonstração da Proposição 1.2.1,  $E_n = E_{n-1} \cup (E_n \setminus E_{n-1})$  para todo  $n$  natural.

Se definirmos  $A_1 = E_1$  e  $A_n = E_n \setminus E_{n-1}$  para todo  $n \geq 2$ , então a sequência  $(A_j)$  é disjunta. Para provar esta afirmação basta tomar  $A_i$  e  $A_j$  com  $i \neq j$ . Suponha, sem perda de generalidade, que  $i < j$ . Neste caso,  $A_i = E_i \setminus E_{i-1}$  e  $A_j = E_j \setminus E_{j-1}$  mas, por hipótese,  $E_i \subseteq E_{j-1}$ . Portanto, nenhum elemento de  $A_i$  pode pertencer a  $A_j$ .

Mostrado isso, podemos reescrever  $E_n$  como a união de todos os  $A_j$  até  $n$ .

$$E_n = \bigcup_{j=1}^n A_j.$$

De fato, se  $x \in E_n$  então  $x \in E_{n-1} \cup A_n$ . Por indução,  $x \in \bigcup_{j=1}^n A_j$ . Por outro lado, se  $x \in \bigcup_{j=1}^n A_j$ , então existe  $j$  entre 1 e  $n$  tal que  $x \in A_j = E_j \setminus E_{j-1} = E_j \cap E_{j-1}^c$ . Logo,  $x \in E_j \subseteq E_n$ .

Por fim, podemos concluir que

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^\infty E_n\right) = \mu\left(\bigcup_{j=1}^\infty A_j\right) = \sum_{j=1}^\infty \mu(A_j) = \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^k \mu(A_j).$$

Pela Proposição 1.2.1, temos que

$$\sum_{j=1}^k \mu(A_j) = \sum_{j=1}^k (\mu(E_j) - \mu(E_{j-1})) = \mu(E_k) \implies \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^k \mu(A_j) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(E_n).$$

Note que, como a sequência  $(E_n)$  é estritamente crescente, podemos nos certificar que cada  $A_j$  é finito. Assim vale a [Continuidade por baixo](#). ■

#### Proposição 1.2.4: Continuidade por cima

Seja  $(X, \Sigma, \mu)$  um espaço de medida. Se  $(F_n)_{n=1}^\infty \subset \Sigma$  é uma sequência decrescente e a medida de  $\mu(F_1)$  é finita, então

$$\mu\left(\bigcap_{n=1}^\infty F_n\right) = \lim \mu(F_n).$$

*Demonstração.* Para provar, vamos usar o resultado da Proposição 1.2.3. A ideia é criar uma sequência crescente. Note bem, se a sequência é decrescente e o primeiro conjunto é finito, então todos os outros também são. Definimos, assim, os conjuntos  $E_n = F_1 \setminus F_n$  para formar a sequência crescente  $(E_n)$ .

Por um lado, por [Continuidade por baixo](#) temos que

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^\infty E_n\right) = \lim \mu(E_n) = \mu(F_1) - \lim \mu(F_n).$$

Por outro lado,

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \mu\left(F_1 \setminus \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n\right) = \mu(F_1) - \mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n\right).$$

Igualando as duas equações e cancelando o termo  $\mu(F_1)$  temos que  $\mu(\cap F_n) = \lim \mu(F_n)$ . ■

## Conjuntos de Medida Nula e Medidas Completas

Na hora de trabalhar com integrais e espaços de funções, uma categoria bem particular de conjuntos costuma gerar problemas. Estes são os conjuntos de medida nula, aqueles com uma medida insignificante. Pense, por exemplo na medida de um único ponto na reta real. A fim de evitar problemas técnicos mais adiante, mostraremos que existe uma medida que lida com esses pontos problemáticos de uma forma melhor. Mais ainda, veremos que qualquer medida pode ser estendida de forma a evitar esses problemas técnicos.

Vamos começar definindo o que é um conjunto de medida nula.

### Definição 1.2.4: Conjunto de Medida Nula

Seja  $(X, \Sigma, \mu)$  um Espaço de Medida. Se  $N \in \Sigma$  é tal que  $\mu(N) = 0$ , então dizemos que  $N$  é um **conjunto de medida nula**.

Paremos para refletir um pouco. Se um conjunto tem medida nula, ele não deveria afetar em nada o comportamento do nosso objeto de estudo. Assim, se uma certa propriedade vale dentro desse conjunto, é como se ela não existisse. Da mesma forma, se uma propriedade não vale sempre, mas vale nos pontos de interesse, então é como se ela valesse sempre. De fato, diremos que ela vale quase sempre ou para quase todo ponto.

### Definição 1.2.5: Para Quase Todo Ponto

Seja  $(X, \Sigma, \mu)$  um Espaço de Medida e  $P(x)$  uma propriedade dos elementos de  $X$ . Se existe um conjunto  $N \in \Sigma$  de medida nula tal que  $P$  vale para todo  $x \in N^c$ , então dizemos que  $P$  vale **para quase todo ponto**, o que abreviaremos para  $(\mu\text{-qtp})$ .

### Observação 1.2.1: Subconjuntos podem não ser mensuráveis

Seja  $N \in \Sigma$  um conjunto de medida nula. Então, todo  $A \subset N$ , pela monotonicidade da medida, também tem medida nula. No entanto,  $A$  não precisa pertencer a  $\Sigma$ .

Isto pode ser um problema na demonstração de algumas proposições. Existem medidas bem comportadas que evitam esses problemas. Elas são chamadas de medidas completas.

**Definição 1.2.6: Espaço de Medida Completa**

Seja  $(X, \Sigma, \mu)$  um Espaço de Medida. Dizemos que ele é um **espaço de medida completa** quando a família dos Conjunto de Medida Nula,  $\mathcal{N}_\mu$ , é Família Hereditária.

Nesta última etapa do capítulo, vamos estudar formas de estender uma dada medida (ou pré-medida) para criar uma medida bem comportada.

**Revisitando os Resultados**

Antes disso, vamos rever os principais conceitos sobre as medidas. Vimos que medidas são funções não negativas, monotônicas crescente, aditiva e subaditiva contáveis que satisfazem mais duas propriedades de continuidade. Em linhas gerais, estas medidas reproduzem a nossa intuição do que seria o tamanho de um conjunto. Também vimos que alguns conjuntos podem ter medida nula e que certos espaços de medida podem ser completos. O que vamos ver agora é como podemos estender as medidas para criar uma medida bem comportada.

**1.3 Teoremas de Extensão****Completamento de Medida**

O nosso objetivo aqui vai ser partir de um espaço de medida “ruim” e estender a sua  $\sigma$ -álgebra para que ela inclua todos os subconjuntos dos Conjunto de Medida Nula. Claro, também precisaremos definir uma nova medida para o novo domínio. Essa função será uma extensão da primeira no sentido de que, quando ela estiver restrita a  $\sigma$ -álgebra inicial, ela coincide com a primeira medida. Vejamos o teorema.

**Teorema 1.3.1: Completamento de Medida**

Seja  $(X, \Sigma, \mu)$  um espaço de medida. Existe uma única  $\bar{\mu}$ , extensão de  $\mu$  a uma  $\sigma$ -álgebra  $\bar{\Sigma}$ , tal que  $(X, \bar{\Sigma}, \bar{\mu})$  é um Espaço de Medida Completa .

*Demonstração.* Denotemos por  $\mathcal{N}$  a família de todos os conjuntos de medida nula.

$$\mathcal{N} := \{N \in \Sigma; \mu(N) = 0\}.$$

Agora vamos expandir a nossa  $\sigma$ -álgebra original para incluir todos os subconjuntos de conjuntos de medida nula.

$$\bar{\Sigma} := \{E \cup F; E \in \Sigma \text{ e } F \subset N \in \mathcal{N}\}.$$

A ideia aqui é criar uma segunda função  $\bar{\mu} : \bar{\Sigma} \rightarrow [0, +\infty]$  tal que  $\bar{\mu}$  restrita a  $\Sigma$  coincida com  $\mu$ , uma extensão da medida original. Como queremos que  $\bar{\mu}$  seja uma medida, é preciso mostrar que  $\bar{\Sigma}$  é uma  $\sigma$ -álgebra (Passo XXX).

Como argumentamos anteriormente, para  $\bar{\mu}$  ser extensão  $\mu$ , ela deve coincidir com o valor assumido por  $\mu$  para conjuntos em  $\Sigma$ . Definiremos, então

$$\bar{\mu}(E \cup F) = \mu(E) \text{ para todo } E \cup F \in \bar{\Sigma}.$$

Para que isso funcione, é preciso mostrar que a função está bem definida (Passo YYY). Também precisamos mostrar que  $\bar{\mu}$  satisfaz a definição de medida (Passo ZZZ), além de mostrar que ela é a única extensão existente (Passo AAA).

Assim, mostramos que sempre podemos considerar um espaço de medida maior do que o original onde a nova medida será completa. ■

## O Teorema de Extensão de Carathéodory

Os teoremas desta seção nos dão as ferramentas necessárias para construir medidas boas a partir de domínios que não são  $\sigma$ -álgebras. De fato, estas são as ferramentas que formalizam a construção da medida de Lebesgue.

Começaremos definindo o que é uma medida exterior, uma função mais geral do que a medida que desejamos.

### Definição 1.3.1: Medida Exterior

Seja  $\mathcal{H}$  um Anel de Conjuntos que é Família Hereditária. Dizemos que uma função  $\mu^* : \mathcal{H} \rightarrow [0, \infty]$  é uma **medida exterior** quando  $\mu^*(\emptyset) = 0$ , ela é Função Monotônica e Função Subaditiva Contável.

Note que  $\mathcal{H}$  não é uma  $\sigma$ -álgebra, ou seja,  $\mu^*$  é uma Pré-medida. Aqui, vamos criar uma nova noção de mensurabilidade.

### Definição 1.3.2: Conjunto $\mu^*$ -mensurável

Seja  $\mathcal{H}$  um  $\sigma$ -anel Família Hereditária e  $\mu^* : \mathcal{H} \rightarrow [0, +\infty]$  uma Medida Exterior em  $\mathcal{H}$ . Dizemos que  $E \in \mathcal{H}$  é  $\mu^*$ -**mensurável** quando, para todo  $A \in \mathcal{H}$ , vale a igualdade:

$$\mu^*(A) = \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \cap \mathcal{C}(E))$$

Com isso em mãos, podemos enunciar o seguinte teorema.

**Teorema 1.3.2: Teorema de Extensão de Carathéodory**

Sejam  $\mathcal{H}$  um  $\sigma$ -anel hereditário e  $\mu^*$  uma medida exterior em  $\mathcal{H}$ . Então:

1. A coleção  $\mathfrak{M} \subset \mathcal{H}$  dos conjuntos  $\mu^*$ -mensuráveis é um  $\sigma$ -anel.
2. Dados  $A \in \mathcal{H}$  e uma sequência  $(E_n)_{n=1}^\infty \subset \mathfrak{M}$  de elementos dois a dois disjuntos, então

$$\mu^* \left( A \cap \bigcup_{n=1}^\infty E_n \right) = \sum_{n=1}^\infty \mu^* (A \cap E_n).$$

3. A restrição de  $\mu^*$  a  $\mathfrak{M}$  é uma medida  $\sigma$ -aditiva.
4. Se  $E \in \mathcal{H}$  é tal que  $\mu^*(E) = 0$  então  $E \in \mathfrak{M}$ .

*Demonstração.* Para demonstrar o teorema, precisamos mostrar vários resultados. Aqui serão apresentadas as ideias gerais. Você poderá seguir até o Apêndice para conferir a demonstração passo a passo.

Para mostrar o item 1, precisamos provar que  $\mathfrak{M}$  é fechado para a união enumerável e para a diferença de conjuntos (ver em AAA).

A fim de verificar o item 2, podemos usar indução para mostrar que, para algum  $t \in \mathbb{N}$ ,

$$\mu^* \left( A \cap \bigcup_{n=1}^t E_n \right) = \sum_{n=1}^t \mu^* (A \cap E_n).$$

Depois, podemos usar a monotonicidade em

$$A \cap \left( \bigcup_{n=1}^\infty E_n \right)^c \subset A \cap \left( \bigcup_{n=1}^t E_n \right)^c$$

para mostrar que

$$\mu^*(A) \geq \left( \sum_{n=1}^t \mu^*(A \cap E_n) \right) + \mu^* \left( A \cap \left( \bigcup_{n=1}^\infty E_n \right)^c \right).$$

Por fim, usamos a subaditividade e tomamos o limite  $t \rightarrow \infty$  para concluir que

$$\mu^*(A) = \left( \sum_{n=1}^\infty \mu^*(A \cap E_n) \right) + \mu^* \left( A \cap \left( \bigcup_{n=1}^\infty E_n \right)^c \right).$$

Chegamos no resultado desejado substituindo  $A$  por  $A \cap (\bigcup_{n=1}^\infty E_n)$ .

Os últimos dois itens são mais simples. Verifique a demonstração passo a passo em BBB. ■

## 1.4 Construção de Medidas

EM BREVE

# Capítulo 2

## Integração

Como prometido, temos agora um espaço onde faz sentido falar de conjuntos mensuráveis. Em algum sentido, precisamos de uma forma de medir funções para chegar na integral que desejamos definir. Portanto, vamos definir o que seria uma função mensurável.

Dessa forma, podemos resumir os conceitos mais importantes deste capítulo na seguinte lista:

1. Funções Mensuráveis
2. Como Operar com Funções Mensuráveis
3. Como Operar com Funções Mensuráveis no Limite

### 2.1 Funções Mensuráveis

#### Quando Podemos Medir Funções?

##### Definição 2.1.1: Funções Mensuráveis

Sejam  $(X, \Sigma)$  e  $(Y, \Sigma')$  **Espaço Mensurável**. Seja  $f : (X, \Sigma) \rightarrow (Y, \Sigma')$  uma função tal que, para todo  $E \in \Sigma'$ ,  $f^{-1}(E) \in \Sigma$ . Então, a função  $f : (X, \Sigma) \rightarrow (Y, \Sigma')$  é chamada de **função mensurável**.

Neste curso, serão estudadas as funções reais. Dito isso, a proposição abaixo caracteriza a mensurabilidade destas funções de uma forma mais tangível.

##### Proposição 2.1.1: Funções mensuráveis e $\sigma$ -álgebras geradas por $\mathcal{C}$

Sejam  $(X, \Sigma)$ ,  $(Y, \sigma[\mathcal{C}])$  **Espaço Mensurável** para algum  $\mathcal{C} \subset \mathcal{P}(Y)$  e  $f : (X, \Sigma) \rightarrow (Y, \sigma[\mathcal{C}])$ . Então  $f$  é mensurável se, e somente se,  $f^{-1}(E) \in \Sigma$  para todo  $E \in \mathcal{C}$ .

*Demonstração.* A ida é imediata, segue da Definição 2.1.1. Para mostrar a volta, precisamos provar que  $f^{-1}(E) \in \Sigma$  para cada  $E \in \sigma(\mathcal{C})$ . Definamos o conjunto abaixo.

$$\mathcal{S} = \{E \in \sigma(\mathcal{C}); f^{-1}(E) \in \Sigma\}.$$

Note bem, temos, por hipótese, que  $\mathcal{C} \subset \mathcal{S}$  por hipótese. Se este conjunto for uma  $\sigma$ -álgebra, então  $\sigma(\mathcal{C}) \subset \mathcal{S}$ , Logo,  $\mathcal{S} = \mathcal{C}$  e  $f$  é mensurável. Vamos provar, portanto, que  $\mathcal{S}$  é uma  $\sigma$ -álgebra.

Primeiramente, note que  $\emptyset$  e  $X$  pertencem a  $\mathcal{S}$  pois  $f^{-1}(\emptyset) = \emptyset$  e  $f^{-1}(Y) = X$ . Em segundo lugar, perceba que se  $A \in \mathcal{S}$  então  $f^{-1}(A) \in \Sigma$ . Como  $\Sigma$  é  $\sigma$ -álgebra, então  $(f^{-1}(A))^c = f^{-1}(A^c) \in \Sigma$ . Assim,  $A^c \in \mathcal{S}$ . Por último, verifique que:

$$(A_n)_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{S} \Rightarrow (f^{-1}(A_n))_{n=1}^{\infty} \in \Sigma \Rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} f^{-1}(A_n) = f^{-1}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \in \Sigma \Rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{S}.$$

Mostrado que  $\mathcal{S}$  é uma  $\sigma$ -álgebra, concluímos o argumento de que  $f$  é mensurável. ■

A grande relevância desta proposição é a forma como ela nos permite lidar com a mensurabilidade das funções de uma forma mais concreta. Veja como ela pode ser aplicada no caso real.

### Corolário 2.1.1: Mensurabilidade de funções reais

Sejam  $(X, \Sigma)$ ,  $(Y, \sigma[\mathcal{C}])$  Espaço Mensurável para algum  $\mathcal{C} \subset \mathcal{P}(Y)$  e  $f : (X, \Sigma) \rightarrow (Y, \sigma[\mathcal{C}])$ . Então  $f$  é mensurável se, e somente se,  $f^{-1}(E) \in \Sigma$  para todo  $E \in \mathcal{C}$ .

*Demonstração.* Seja  $f : (X, \Sigma) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B})$  uma função mensurável e  $\alpha$  um número real. Então  $f^{-1}((\alpha, \infty)) \in \Sigma$ , isto é,  $A_\alpha \in \Sigma$ . Pela arbitrariedade da escolha de  $\alpha$ , vale a ida da proposição.

Reciprocamente, seja  $f : (X, \Sigma) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B})$  uma função tal que, para todo  $\alpha$  real,  $A_\alpha \in \Sigma$ . Pelo Exercício XXX,  $\mathcal{B}$  pode ser gerado pelos intervalos na forma  $(\alpha, \infty)$ . Assim, pela Proposição 2.1.1, só precisamos verificar os intervalos da forma  $(\alpha, \infty)$ , que pertencem a  $\Sigma$  por hipótese. Logo,  $f$  é mensurável. ■

É possível usar o Exercício XXX para criar outros métodos de verificar a mensurabilidade de uma função real (ou em  $\overline{\mathbb{R}}$ ). Veja o corolário abaixo.

### Corolário 2.1.2: Mensurabilidade de funções reais

Seja  $(X, \Sigma)$  um Espaço Mensurável e  $f : (X, \Sigma) \rightarrow (\overline{\mathbb{R}}, \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}))$ . Sejam,

$$A := \{x \in X; f(x) = +\infty\} \quad \text{e} \quad B := \{x \in X; f(x) = \infty\}$$

e a função  $f_0 : (X, \Sigma) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B})$  definida da seguinte forma

$$f_0(x) = \begin{cases} f(x), & \text{se } x \in (A \cup B)^c \\ 0, & \text{se } x \in A \cup B. \end{cases}$$

Então  $f$  é mensurável se, e somente se,  $A, B \in \Sigma$  e a  $f_0$  é  $\mathbb{R}$ -mensurável.

*Demonstração.* Se  $f$  for mensurável, então todos os  $A, B \in \Sigma$  trivialmente. Além disso,  $f_0$  deve ser  $\mathbb{R}$ -mensurável pois, caso não fosse, existiria um aberto de  $\mathbb{R} \subset \overline{\mathbb{R}}$  tal que a pré-imagem deste aberto não é  $\overline{\mathbb{R}}$ -mensurável, o que é uma contradição.



Reciprocamente, pelo Exercício YYY, sabemos que  $\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})$  pode ser gerado pelos intervalos na forma  $(a, \infty)$  com os conjuntos  $\{-\infty\}$ ,  $\{+\infty\}$ . Assim, pela Proposição 2.1.1, a hipótese implica a mensurabilidade de  $f$ . ■

### Exemplo 2.1.1: Função Constante

Seja  $(X, \Sigma)$  um espaço mensurável e  $f : (X, \Sigma) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B})$  uma função constante. Então  $f$  é uma função mensurável.

### Exemplo 2.1.2: Função Característica

Seja  $(X, \Sigma)$  um espaço mensurável,  $E \in \Sigma$  um conjunto mensurável e  $\chi_E : (X, \Sigma) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B})$  uma função definida por:

$$\chi_E(x) = \begin{cases} 1, & x \in E \\ 0, & x \in \mathbb{C}(E) \end{cases}.$$

## Como Operar com Funções Mensuráveis?

### Proposição 2.1.2: Operações com funções reais mensuráveis

Sejam  $f, g : X \rightarrow \mathbb{R}$  funções mensuráveis. Então,

- $f + g$ ,
- $\lambda f$  para todo  $\lambda \in \mathbb{R}$ ,
- $f^2$ ,
- $|f|$ ,
- $\max\{f, g\}$ ,
- $\min\{f, g\}$ ,
- $fg$

são mensuráveis.

*Demonstração.* Seja  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Como  $f$  e  $g$  são funções mensuráveis, então os conjuntos

$$\begin{aligned} \{x \in X; f(x) > r\} &\in \Sigma \\ \{x \in X; g(x) > \alpha - r\} &\in \Sigma \end{aligned}$$

para todo  $r$  racional. Chamemos

$$S_r = \{x \in X; f(x) > r\} \cap \{x \in X; g(x) > \alpha - r\} \in \Sigma.$$

Como, cada  $S_r$  é mensurável, a sua união também é pois os racionais são enumeráveis. Assim, basta mostrar que

$$\{x \in X; f(x) + g(x) > \alpha\} = \bigcup_{r \in \mathbb{Q}} S_r \in \Sigma.$$

Assim, pela propriedade,  $f + g$  é mensurável.

Para mostrar que  $\lambda f$  é mensurável, é razoável desconsiderar o caso em que  $\lambda = 0$  pois a função identicamente nula é mensurável. Quando este não for o caso, basta mostrar que

$$\{x \in X; \lambda f(x) > \alpha\} = \{x \in X; f(x) > \frac{\alpha}{\lambda}\} \in \Sigma$$

pois  $f$  é mensurável por hipótese.

Para mostrar que  $f^2$  é mensurável, usamos uma estratégia similar. De fato, se  $\alpha$  for negativo então a pré-imagem será  $X \in \Sigma$ . Caso contrário, então

$$\{x \in X; \lambda f^2(x) > \alpha\} = \{x \in X; f(x) > \sqrt{\alpha}\} \cup \{x \in X; f(x) < -\sqrt{\alpha}\} \in \Sigma$$

pois  $f$  é mensurável. O caso é análogo para  $|f|$ .

Para mostrar que  $\max\{f, g\}$  e  $\min\{f, g\}$  são mensuráveis, mostre que

$$\{x \in X; \max\{f, g\} > \alpha\} = \{x \in X; f(x) < \alpha\} \cap \{x \in X; g(x) < \alpha\} \in \Sigma$$

$$\{x \in X; \min\{f, g\} > \alpha\} = \{x \in X; f(x) > \alpha\} \cap \{x \in X; g(x) > \alpha\} \in \Sigma$$

Para mostrar que  $fg$  é mensurável, escreva  $fg = \frac{1}{4}((f+g)^2 - (f-g)^2)$  e aplique as propriedades anteriores. ■

As funções nos reais estendidos possuem algumas peculiaridades. De fato, é possível arrumar contraexemplo para a soma. As operações que valem estão listadas abaixo

### Proposição 2.1.3: Operações com funções $\overline{\mathbb{R}}$ -mensuráveis

Sejam  $f, g : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  funções mensuráveis. Então,

- $\lambda f$  para todo  $\lambda \in \mathbb{R}$ ,
- $f^2$ ,
- $|f|$ ,
- $\max\{f, g\}$ ,
- $\min\{f, g\}$ ,
- $fg$

são mensuráveis.

*Demonstração.* Aqui os argumentos são os mesmos, mas a soma pode falhar quando as duas funções assumem valores infinitos, caindo no caso patológico  $\infty - \infty$ . ■

### Observação 2.1.1: Notação para funções mensuráveis

Denotaremos por  $M(X, \Sigma)$  o conjunto das funções reais  $\Sigma$ -mensuráveis. O conjunto  $M^+(X, \Sigma)$  é o conjunto das funções mensuráveis não negativas.

## Como Operar com Funções Mensuráveis no Limite?

### Proposição 2.1.4: Sequências de funções mensuráveis

Seja  $(f_n) \subset M(X, \Sigma)_{n=1}^\infty$  uma sequência de funções mensuráveis. Então,

1.  $f(x) = \inf_{n \in \mathbb{N}} f_n(x)$ ,
2.  $F(x) = \sup_{n \in \mathbb{N}} f_n(x)$ ,
3.  $f^*(x) = \liminf_{n \in \mathbb{N}} f_n(x)$ ,
4.  $F^*(x) = \limsup_{n \in \mathbb{N}} f_n(x)$ ,
5.  $g(x) = \lim_{n \in \mathbb{N}} f_n(x)$  (dado que a sequência é pontualmente convergente),

são mensuráveis

*Demonstração.* (1) Para provar que  $f(x) = \inf_{n \in \mathbb{N}} f_n(x)$  é mensurável, observe que, para qualquer número real  $\alpha$ ,

$$\{x \in X : f(x) \geq \alpha\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \{x \in X : f_n(x) \geq \alpha\}.$$

Como cada  $f_n$  é mensurável, o conjunto  $\{x \in X : f_n(x) \geq \alpha\} \in \Sigma$ . Logo,  $f(x)$  é mensurável, já que a interseção enumerável de conjuntos mensuráveis pertence a  $\Sigma$ .

(2) De forma análoga, para mostrar que  $F(x) = \sup_{n \in \mathbb{N}} f_n(x)$  é mensurável, observe que, para qualquer número real  $\alpha$ ,

$$\{x \in X : F(x) \leq \alpha\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \{x \in X : f_n(x) \leq \alpha\}.$$

Como cada  $f_n$  é mensurável,  $\{x \in X : f_n(x) \leq \alpha\} \in \Sigma$ , o que implica que  $F(x)$  é mensurável.

(3) Para  $f^*(x) = \liminf_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$ , recorde que

$$f^*(x) = \sup_{k \geq 1} \inf_{n \geq k} f_n(x).$$

Dado que  $f(x) = \inf_{n \in \mathbb{N}} f_n(x)$  e que o sup de funções mensuráveis é mensurável, segue que  $f^*(x)$  é mensurável.

(4) Para  $F^*(x) = \limsup_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$ , temos que

$$F^*(x) = \inf_{k \geq 1} \sup_{n \geq k} f_n(x).$$

Usando o mesmo raciocínio do  $f^*(x)$ , as operações de sup e inf pontuais preservam a mensurabilidade, então  $F^*(x)$  é mensurável.

(5) Finalmente, se  $g(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$ , dado que a sequência  $(f_n(x))$  converge para todo  $x \in X$ , então  $g(x) = f^*(x) = F^*(x)$ . Portanto,  $g(x)$  é mensurável. ■

## 2.2 Integração

Agora que já temos uma noção formal do que é uma medida e sabemos sob quais circunstâncias dadas funções e conjuntos são mensuráveis, podemos construir a integral de Lebesgue.

Para construir a integral de Lebesgue, começaremos trabalhando com funções que só assumem uma quantidade finita de valores. Essas funções são chamadas de funções simples.

### Funções Simples

#### Definição 2.2.1: Funções Simples

Uma função  $\varphi : X \rightarrow \mathbb{R}$  é dita **simples** quando  $\varphi(\mathbb{R})$  é finita.

#### Definição 2.2.2: Representação semi-padrão de uma funções simples

Seja  $(E_i)_{i=1}^n \subset \Sigma$  uma partição de  $X$ . Dizemos que uma função simples  $\varphi$  está escrita na **representação semi-padrão** quando existe  $(a_i)_{i=1}^n \subset \mathbb{R}$  tal que

$$\varphi = \sum_{i=1}^n a_i \chi_{E_i}.$$

#### Definição 2.2.3: Representação padrão de uma funções simples

Considere a função simples  $\varphi$  escrita na representação semi-padrão.

$$\varphi = \sum_{i=1}^n a_i \chi_{E_i}.$$

Dizemos que  $\varphi$  está na **representação padrão** quando a sequência  $(a_i)$  é dois a dois disjunta.

As funções simples mensuráveis admitem uma forma canônica. Seja  $\varphi$  uma função simples que assume os valores reais distintos  $(c_i)_{i=1}^n$ . Denotemos por  $E_i = \varphi^{-1}(c_i)$ . Note que  $(E_i)_{i=1}^n$  forma uma partição de  $X$ . Assim,

$$\varphi = \sum_{j=1}^n c_j \chi_{E_j}$$

é a chamada representação canônica da função. Note que cada  $c_j$  é distinto e cada a sequência  $(E_j)$  é disjunta.

**Definição 2.2.4: Representação padrão de uma funções simples**

Seja  $\varphi \in M^+(X, \Sigma)$  uma função simples na representação padrão. Então

$$\int_X \varphi \, d\mu = \sum_{i=1}^n a_i \mu(E_i).$$

A partir de agora, o nosso objetivo é recuperar algumas das propriedades boas da integral de Riemann a partir da Definição 2.2.4. Veremos que esta definição implica na linearidade da integral.

**Lema 2.2.1: Integral de uma função simples na representação SP**

Seja  $\varphi \in M^+(X, \Sigma)$  uma função simples. Se

$$\varphi = \sum_{i=1}^n b_i \chi_{E_i}$$

é uma representação semi-padrão de  $\varphi$ , então

$$\int_X \varphi \, d\mu = \sum_{i=1}^n b_i \mu(E_i).$$

*Demonstração.* Suponha que  $\varphi$  seja uma função simples com a representação

$$\varphi = \sum_{j=1}^m \alpha_j 1_{A_j}.$$

A representação semi-padrão de  $\varphi$  é

$$\varphi = \sum_{k=1}^n \beta_k 1_{B_k}.$$

Para cada  $j = 1, \dots, m$ , defina

$$K_j = \{k : 1 \leq k \leq n \text{ e } \beta_k = \alpha_j\}.$$

Daí,

$$A_j = \bigcup_{k \in K_j} B_k.$$

Assim, temos:

$$\begin{aligned}
 \int_X \varphi d\mu &= \sum_{j=1}^m \alpha_j \mu(A_j) \\
 &= \sum_{j=1}^m \alpha_j \sum_{k \in K_j} \mu(B_k) \\
 &= \sum_{j=1}^m \sum_{k \in K_j} \alpha_j \mu(B_k) \\
 &= \sum_{j=1}^m \sum_{k \in K_j} \beta_k \mu(B_k) \\
 &= \sum_{k=1}^n \beta_k \mu(B_k),
 \end{aligned}$$

pois

$$\bigcup_{j=1}^m K_j = \{1, \dots, n\}.$$

■

### Proposição 2.2.1: Linearidade da integral de funções simples

Sejam  $\varphi, \psi \in M^+(X, \Sigma)$  funções simples e  $c \geq 0$ . Então

1.  $\int_X c\varphi d\mu = c \int_X \varphi d\mu.$
2.  $\int_X \varphi + \psi d\mu = \int_X \varphi d\mu + \int_X \psi d\mu$

*Demonstração.* Para o primeiro item precisamos considerar dois casos. No primeiro caso,  $c = 0$  e a função simples que devemos integrar é a função simples constante. Isto valida a propriedade trivialmente pois teríamos que multiplicar a medida do conjunto inteiro por 0. Mesmo se a medida for infinita, assumiremos ao longo destas notas que  $0 \cdot \infty = 0$ . Se  $c > 0$  e  $\varphi$  assume os valores  $\{c_j\}_{j=1}^n$ , então

$$\int_X c\varphi d\mu = \sum_{j=1}^n c c_j \mu(f^{-1}(c_j)) = c \sum_{j=1}^n c_j \mu(f^{-1}(c_j)) = c \int_X \varphi d\mu.$$

Vamos demonstrar o segundo item. Comece escrevendo  $\varphi$  e  $\psi$  na forma canônica.

$$\varphi = \sum_{i=1}^n a_i \chi_{A_i} \quad \text{e} \quad \psi = \sum_{j=1}^m b_j \chi_{B_j}.$$

Pelo Lema (Colocar no Apêndice), podemos  $\chi_{A_i} = \sum_{j=1}^m \chi_{A_i \cap B_j}$ . Portanto,

$$\varphi = \sum_{i=1}^n a_i \chi_{A_i} = \sum_{i=1}^n a_i \sum_{j=1}^m \chi_{A_i \cap B_j}$$

Como  $a_i$  é constante (com relação ao somatório de dentro), podemos passar para dentro. O processo é análogo para  $\psi$ , de onde vem que

$$\varphi = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m a_i \chi_{A_i \cap B_j} \quad \text{e} \quad \psi = \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n b_j \chi_{A_i \cap B_j}.$$

Podemos trocar a ordem dos somatórios de  $\psi$  uma vez que é uma soma finita. Com isso, temos

$$\varphi + \psi = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m (a_i + b_j) \chi_{A_i \cap B_j}.$$

Note que esta é uma representação semi-padrão da função simples  $\varphi + \psi$ . Logo, pelo Lema 2.2.1,

$$\begin{aligned} \int_X \varphi + \psi \, d\mu &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m (a_i + b_j) \mu(A_i \cap B_j) \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m a_i \mu(A_i \cap B_j) + \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n b_j \mu(A_i \cap B_j) \\ &= \int_X \varphi \, d\mu + \int_X \psi \, d\mu \end{aligned}$$

■

## A Integral de Lebesgue

Nem todas as funções assumem um número finito de valores, mas podemos considerar o conjunto das funções simples menores do que uma dada função e tomar o supremo deste conjunto para generalizar a nossa definição de integral.

### Definição 2.2.5: Integral de Lebesgue de Função Positiva

Seja  $f \in M^+(X, \Sigma)$ . Então

$$\int_X f \, d\mu = \sup \left\{ \int_X \varphi \, d\mu; \varphi \in M^+(X, \Sigma) \text{ e } 0 \leq \varphi \leq f \right\}.$$

Antes de partirmos para algumas desigualdades importantes, faz sentido definirmos a integral restrita a um dado conjunto.

**Definição 2.2.6: Integral restrita a um conjunto mensurável**

Seja  $f \in M^+(X, \Sigma)$  e  $E \in \Sigma$ . Então

$$\int_E f d\mu = \int_X f \chi_E d\mu.$$

Os lemas abaixo também são importantíssimos para o desenvolvimento do resto da teoria.

**Lema 2.2.2: Desigualdade de integrais**

Sejam  $f, g \in M^+(X, \Sigma)$  e  $E, F \subset \Sigma$ .

1. Se  $f \leq g$ , então  $\int_X f d\mu \leq \int_X g d\mu$ .
2. Se  $E \subseteq F$ , então  $\int_E f d\mu \leq \int_F f d\mu$ .

*Demonstração.* Para mostrar o primeiro item, perceba que toda função  $\varphi \in M^+(X, \Sigma)$  simples tal que  $\varphi \leq f$  também é, por hipótese, tal que  $\varphi \leq g$ . Ou seja,

$$\left\{ \int_X \varphi d\mu; \varphi \in M^+(X, \Sigma) \text{ e } 0 \leq \varphi \leq f \right\} \subseteq \left\{ \int_X \varphi d\mu; \varphi \in M^+(X, \Sigma) \text{ e } 0 \leq \varphi \leq g \right\}.$$

Tomando o supremo dos dois lados, obtemos, pela Definição 2.2.5,

$$\int_X f d\mu \leq \int_X g d\mu.$$

Já para o segundo item basta notar que  $f \chi_E \leq f \chi_F$  por hipótese. A demonstração segue da aplicação do primeiro item e da Definição 2.2.6. ■

Relembrando o nosso objetivo, queremos recuperar boas propriedades da integral de Riemann e criar novas ferramentas para trabalhar com essa integral. O próximo tópico trata de criar essas ferramentas.

**Definição 2.2.7: Integral de Lebesgue de Função Positiva**

A integral de uma função mensurável pode ser definida para funções na classe

$$L(X, \Sigma, \mu) = \{f \in M(X, \Sigma); f^+ \text{ e } f^- \text{ são mensuráveis}\}.$$

A integral de  $f$  é então dada por:

$$\int f d\mu = \int f^+ d\mu - \int f^- d\mu.$$



**Proposição 2.2.2: Condição para integrabilidade**

Uma função  $f \in L$  se, e somente se,  $|f| \in L$ . Neste caso,

$$\left| \int f \, d\mu \right| \leq \int |f| \, d\mu.$$

*Demonstração.* ■

**Corolário 2.2.1: Funções dominadas por função integrável é integrável**

Se  $f \in M$ ,  $g \in L$  e  $|f| \leq |g|$ , então  $f \in L$  e

$$\int |f| \, d\mu \leq \int |g| \, d\mu.$$

*Demonstração.* ■

## 2.3 Teoremas de Convergência

Os teoremas abaixo nos permitem tirar o limite de dentro da integral, o que nos permitirá, por exemplo, mostrar a linearidade da integral de Lebesgue. Esses teoremas de convergência são centrais no estudo da teoria da medida.

### Teorema da Convergência Monótona

**Teorema 2.3.1: Teorema da Convergência Monótona**

Seja  $(f_n) \subset M^+(X, \Sigma)$  uma sequência monótona crescente tal que  $f_n \xrightarrow{p} f$ . Então  $f \in M^+(X, \Sigma)$  e

$$\int_X \left( \lim_{n \rightarrow \infty} f_n \right) \, d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \int_X f_n \, d\mu \right) \quad (2.1)$$

*Demonstração.* A mensurabilidade de  $f$  segue diretamente da Proposição 2.1.4, mas é um passo importante para que faça sentido integrar essa função segundo a Definição 2.2.5. Provaremos a segunda parte do teorema mostrando que

$$\int_X \left( \lim_{n \rightarrow \infty} f_n \right) \, d\mu \geq \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \int_X f_n \, d\mu \right) \quad \text{e} \quad \int_X \left( \lim_{n \rightarrow \infty} f_n \right) \, d\mu \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \int_X f_n \, d\mu \right).$$

Para mostrar que a primeira desigualdade, note que, como  $(f_n)$  é uma sequência monótona crescente, então  $f_n \leq f_{n+k}$  para todos  $n, k$  natural. Assim, se  $k \rightarrow \infty$  então  $f_{n+k} \rightarrow f$  para todo  $n$ . Logo,

$$f_n \leq \lim_{n \rightarrow \infty} f_n \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Pelo Lema 2.2.2, o fato acima nos dá que

$$\int_X f_n d\mu \leq \int_X \left( \lim_{n \rightarrow \infty} f_n \right) d\mu \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Note que o lado direito da desigualdade é constante. De fato, ele será igual a  $\int_X f d\mu$ . Assim, podemos tomar o limite dos dois lados para concluir que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \int_X f_n d\mu \right) \leq \int_X \left( \lim_{n \rightarrow \infty} f_n \right) d\mu \iff \int_X \left( \lim_{n \rightarrow \infty} f_n \right) d\mu \geq \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \int_X f_n d\mu \right).$$

Aqui vale notar que o Lema 2.2.2 garante que  $(\int_X f_n d\mu)$  também é uma sequência crescente, o que justifica a existência do limite em  $\mathbb{R}$ . Resta mostrarmos a outra desigualdade.

A ideia é mostrar que, para toda função simples  $\varphi \leq f$ , teremos  $\int_X \varphi \leq \lim(\int_X f_n d\mu)$ . Depois poderemos tomar o supremo dos dois lados da desigualdade para chegar no resultado desejado.

Começaremos tomando uma função  $\varphi \in M^+(X, \Sigma)$  simples tal que  $\varphi \leq f$  e  $\alpha \in \mathbb{R}$  tal que  $\alpha \in (0, 1)$ . Agora, defina o conjunto

$$A_n := \{x \in X; \alpha\varphi(x) \leq f_n(x)\}. \quad (2.2)$$

Faremos três afirmações sobre esse conjunto.

1.  $A_n \in \Sigma$  para todo  $n$  natural.
2.  $(A_n)_{n=1}^\infty \subset \Sigma$  é uma sequência monótona crescente.
3.  $\cup_{n=1}^\infty A_n = X$ .

Vamos provar o Item 1. Aplicando as operações estabelecidas na Proposição 2.1.2, temos que  $f_n - \alpha\varphi$  é uma função mensurável para todo  $n$ . Além disso, podemos escrevermos cada  $A_n$  como a pré-imagem da função  $f_n - \alpha\varphi$ .

$$A_n = (f_n - \alpha\varphi)^{-1}((0, \infty)) \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Logo, pela Definição 2.1.1,  $A_n \in \Sigma$  para todo  $n$ .

Vamos provar o Item 2. Para tanto precisamos mostrar que  $A_n \subset A_{n+1}$  para todo  $n$ . Esta afirmação segue imediatamente da monotonicidade de  $(f_n)$  uma vez que se  $x \in A_n$  então  $\alpha\varphi(x) \leq f_n(x) \leq f_{n+1}(x)$ .

Vamos provar o Item 3. A primeira continência é imediata uma vez que cada  $A_n$  é um subconjunto de  $X$ . No entanto, ainda é preciso mostrar que  $X \subseteq \cup_{n=1}^\infty A_n$ . Tome  $x \in X$ . Sabemos que  $\varphi(x) \leq f(x)$  por hipótese. Como  $\alpha \in (0, 1)$ , então  $\alpha\varphi(x) \leq f(x)$ . Queremos mostrar que existe um  $N$  natural tal que  $\alpha\varphi(x) \leq f_N(x)$ . Faremos isso por contradição. Suponha que, para todo  $n \in \mathbb{N}$ ,  $f_n(x) < \alpha\varphi(x)$ . Tomando o limite dos dois lados teríamos que  $\lim f_n(x) = f(x) < \alpha\varphi(x)$ , o que contradiz a nossa hipótese. Logo, existe  $N \in \mathbb{N}$  tal que  $\alpha\varphi(x) \leq f_N(x)$ . Assim sendo,  $x \in A_N \subset \cup_{n=1}^\infty A_n$ . Por fim, concluímos que  $\cup_{n=1}^\infty A_n = X$ .

Provados estes detalhes técnicos, vamos usar o Lema 2.2.2 mais uma vez. Note que  $A_n \subset X$  para todo  $n$ . Portanto, pelo segundo item do lema, temos que  $\int_{A_n} f_n d\mu \leq \int_X f_n d\mu$  para todo  $n$ . Agora, pela definição de  $A_n$ , temos que  $\alpha \varphi \chi_{A_n} \leq f_n \chi_{A_n}$ . Logo, pelo primeiro item do lema temos que  $\int_{A_n} \alpha \varphi d\mu \leq \int_{A_n} f_n d\mu$ . Juntando essas duas desigualdades, obtemos

$$\alpha \int_{A_n} \varphi d\mu \leq \int_{A_n} f_n d\mu \Rightarrow \alpha \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{A_n} \varphi d\mu \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \int_X f_n d\mu \right).$$

Estamos quase chegando no resultado desejado, resta mostrar que  $\lim \int_{A_n} \varphi d\mu = \int_X \varphi d\mu$ . Esta demonstração pode ser encontrada em (Fazer).

Por fim, podemos tomar o limite de  $\alpha$  indo para 1 dos dois lados e depois tomar o supremo de ambos os lados.

$$\begin{aligned} \alpha \int_X \varphi d\mu &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \int_X f_n d\mu \right) \Rightarrow \lim_{\alpha \rightarrow 1} \alpha \int_X \varphi d\mu = \int_X \varphi d\mu \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \int_X f_n d\mu \right). \\ \therefore \sup \left( \int_X \varphi d\mu \right) &= \int_X f d\mu \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \int_X f_n d\mu \right). \end{aligned}$$

Assim, chegamos na desigualdade que buscávamos:

$$\int_X \left( \lim_{n \rightarrow \infty} f_n \right) d\mu \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \int_X f_n d\mu \right).$$

■

### Lema 2.3.1: Lema de Fatou

Seja  $(f_n) \subset M^+(X, \Sigma)$ . Então,

$$\int_X \left( \liminf_{n \rightarrow \infty} f_n \right) d\mu \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \left( \int_X f_n d\mu \right). \quad (2.3)$$

*Demonstração.* Defina  $g_n = \inf_{k \geq n} f_k$ . Pela definição de  $g_n$ , para todo  $k \geq n$ ,  $g_n \leq f_k$ . Assim, pelo Lema 2.2.2,

$$\int_X g_n d\mu \leq \int_X f_k d\mu \quad \forall k \geq n.$$

Portanto, tomando o ínfimo dos dois lados,

$$\int_X g_n d\mu \leq \inf_{k \geq n} \int_X f_k d\mu.$$

Tomemos o limite dos dois lados.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \int_X g_n d\mu \right) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \inf_{k \geq n} \int_X f_k d\mu \right) = \liminf_{n \rightarrow \infty} \left( \int_X f_k d\mu \right). \quad (2.4)$$

Estamos bem próximo dos resultado final, basta observar que  $(g_n) \subset M^+(X, \Sigma)$ , pelo Lema 2.1.4, e que esta é uma sequência monótona crescente que converge para  $\liminf f_n$ . Portanto, podemos aplicar o Teorema da Convergência Monótona (2.3.1) e concluir que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \int_X g_n d\mu \right) = \int_X \liminf_{n \rightarrow \infty} f_n d\mu.$$

Assim, juntando isso com (2.4), temos que

$$\int_X \left( \liminf_{n \rightarrow \infty} f_n \right) d\mu \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \left( \int_X f_n d\mu \right).$$

■

## Teorema da Convergência Dominada

Para chegar no teorema da convergência dominada, vamos passar a estudar integrais de funções que não são necessariamente positivas.

### Proposição 2.3.1: Condição para integrabilidade

Uma função  $f \in L$  se, e somente se,  $|f| \in L$ . Neste caso,

$$\left| \int f d\mu \right| \leq \int |f| d\mu.$$

*Demonstração.*

■

### Corolário 2.3.1: Funções dominadas por função integrável é integrável

Se  $f \in M$ ,  $g \in L$  e  $|f| \leq |g|$ , então  $f \in L$  e

$$\int |f| d\mu \leq \int |g| d\mu.$$

*Demonstração.*

■

### Teorema 2.3.2: Teorema da Convergência Dominada

Sejam  $(f_n) \subset L$  e  $f \in M(X, \Sigma)$  tais que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x) \text{ } (\mu\text{-qtp}).$$

Se existe  $g \in L$  tal que  $|f_n| \leq g$  para todo  $n$ , então  $f \in L$  e

$$\int_X f d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n d\mu. \quad (2.5)$$

*Demonstração.* Como  $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$  e cada  $f_n$  é mensurável, segue que  $f$  é mensurável. Como  $|f_n| \leq g$  para todo  $n$ , temos que  $|f| \leq g$ . Mas, por hipótese,  $g$  é integrável e, conseqüentemente,  $|g|$  é integrável. Portanto,  $|f|$  é integrável e, finalmente,  $f$  é integrável. Temos ainda

$$-|g| \leq f_n \leq |g|$$

e daí segue que

$$|g| + f_n \geq 0 \text{ para todo } n.$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \int_X |g| d\mu + \int_X f_n d\mu &= \int_X (|g| + f_n) d\mu \\ &= \int_X \lim_{n \rightarrow \infty} (|g| + f_n) d\mu \end{aligned}$$

Pelo Lema de Fatou,

$$\begin{aligned} &\leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_X (|g| + f_n) d\mu \\ &= \liminf_{n \rightarrow \infty} \left( \int_X |g| d\mu + \int_X f_n d\mu \right) \\ &= \int_X |g| d\mu + \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n d\mu. \end{aligned}$$

Logo,

$$\int_X f d\mu \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n d\mu.$$

Por outro lado,

$$|g| - f_n \geq 0 \text{ para todo } n.$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \int_X |g| d\mu - \int_X f_n d\mu &= \int_X (|g| - f_n) d\mu \\ &= \int_X \lim_{n \rightarrow \infty} (|g| - f_n) d\mu \end{aligned}$$

Pelo Lema de Fatou,

$$\begin{aligned} &\leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_X (|g| - f_n) d\mu \\ &= \liminf_{n \rightarrow \infty} \left( \int_X |g| d\mu - \int_X f_n d\mu \right) \\ &= \int_X |g| d\mu - \limsup_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n d\mu. \end{aligned}$$

Consequentemente,

$$\int_X f d\mu \geq \limsup_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n d\mu.$$

Finalmente, temos

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n d\mu \leq \int_X f d\mu \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n d\mu,$$

e, portanto,

$$\int_X f d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n d\mu.$$

■

## Capítulo 3

# Os Espaços de Lebesgue

---

**3.1** Espaços  $L^p$

**3.2** Modos de Convergência

**3.3** Teoremas de Decomposição





## Capítulo 3

# Definições Adicionais

### Definição 3.3.1: Família Hereditária

Dizemos que uma família de conjuntos  $\mathcal{H}$  é um **hereditária** quando ela possui todos os subconjuntos dos seus elementos, isto é,

$$A \in \mathcal{H}, B \subset A \implies B \in \mathcal{H}.$$

### Definição 3.3.2: Anel de Conjuntos

Dizemos que uma família de conjuntos  $\mathcal{R}$  é um **anel** quando ela é fechada pela união e pela diferença, isto é,

(A1) Se  $A, B \in \mathcal{R}$ , então  $A \cup B \in \mathcal{R}$ .

(A2) Se  $A, B \in \mathcal{R}$ , então  $A \setminus B \in \mathcal{R}$ .

### Definição 3.3.3: $\sigma$ -anel

Dizemos que uma família de conjuntos  $\Sigma$  é um  **$\sigma$ -anel** quando ela é um [Anel de Conjuntos](#) fechado pela união enumerável, isto é,

$$(A_n)_{n=1}^{\infty} \subset \Sigma \implies \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \Sigma.$$

### Definição 3.3.4: Álgebra de Conjuntos

Seja  $X$  um conjunto não vazio e  $\mathcal{A} \subset 2^X$ . Dizemos que  $\mathcal{A}$  é uma **Álgebra de Conjuntos** quando  $\mathcal{A}$  é um [Anel de Conjuntos](#) com unidade, isto é,  $X \in \mathcal{A}$ .

**Definição 3.3.5: Topologia**

Seja  $X$  um conjunto não vazio e  $\tau \subset 2^X$ . Dizemos que  $\tau$  é uma **topologia** quando ela contém o conjunto vazio e  $X$ , é fechada pela união arbitrária e pela interseção finita, isto é,

(A1)  $\emptyset, X \in \tau$ .

(A2) Se  $\{O_i\}_{i \in \mathcal{I}}$ , então  $\bigcup_{i \in \mathcal{I}} O_i \in \tau$ .

(A3) Se  $(O_i)_{i=1}^n$ , então  $\bigcap_{i=1}^n O_i \in \tau$ .

**Definição 3.3.6: Espaço Topológico**

Seja  $X$  um conjunto não vazio e  $\tau$  uma **Topologia** no conjunto  $X$ . Então o par ordenado  $(X, \tau)$  é chamado de **espaço topológico** e cada elemento de  $\tau$  é dito um conjunto **aberto** em  $X$ .

**Definição 3.3.7: Produto Cartesiano**

Seja  $\{X_i\}_{i \in \mathcal{I}}$  uma família de conjuntos indexada por  $\mathcal{I}$ . Definimos o **produto cartesiano** da seguinte forma:

$$\prod_{i \in \mathcal{I}} X_i := \left\{ f : \mathcal{I} \rightarrow \bigcup_{i \in \mathcal{I}} X_i; \forall i \in \mathcal{I}, f(i) \in X_i \right\}.$$

**Definição 3.3.8: Projeção**

Seja  $\{X_i\}_{i \in \mathcal{I}}$  uma família de conjuntos indexada por  $\mathcal{I}$ . Considere a função

$$\pi_j : \prod_{i \in \mathcal{I}} X_i \rightarrow X_j$$

definida por  $\pi_j(f) = f(j)$ . Chamamos esta função de  **$j$ -ésima projeção**.

**Definição 3.3.9: Função Aditiva Contável**

Uma função real cujo domínio é uma família de conjuntos,  $f : \mathcal{R} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ , é dita uma **função aditiva contável** quando satisfaz a seguinte propriedade:

$$\text{Se } (A_i)_{i=1}^{\infty} \subset \mathcal{R} \text{ é dois a dois disjunta, então } f\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} f(A_i).$$

**Definição 3.3.10: Função Subaditiva Contável**

Uma função real cujo domínio é uma família de conjuntos,  $f : \mathcal{R} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ , é dita uma **função subaditiva contável** quando satisfaz a seguinte propriedade:

$$\text{Se } (A_i)_{i=1}^{\infty} \subset \mathcal{R}, \text{ então } f\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} f(A_i).$$

**Definição 3.3.11: Função Monotônica**

Uma função real cujo domínio é uma família de conjuntos,  $f : \mathcal{R} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ , é dita uma **função monotônica** quando satisfaz a seguinte propriedade:

$$\text{Se } A, B \subset \mathcal{R} \text{ e } A \subseteq B, \text{ então } f(A) \leq f(B).$$

**Definição 3.3.12: Medida Finita**

Seja  $\mu$  uma Medida em um Espaço de Medida  $(X, \Sigma)$ . Dizemos que  $\mu$  é uma **medida finita** quando  $\mu(X) < \infty$ .

**Definição 3.3.13: Medida  $\sigma$ -finita**

Seja  $\mu$  uma Medida em um Espaço de Medida  $(X, \Sigma)$ . Dizemos que  $\mu$  é uma **medida  $\sigma$ -finita** quando existe  $(E_i)_{i=1}^{\infty}$  com  $\mu(E_i) < \infty$  para todo  $i \geq 1$  tal que  $X = \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i$ .