Anneaux - Corps : Eléments de théorie des anneaux, correction

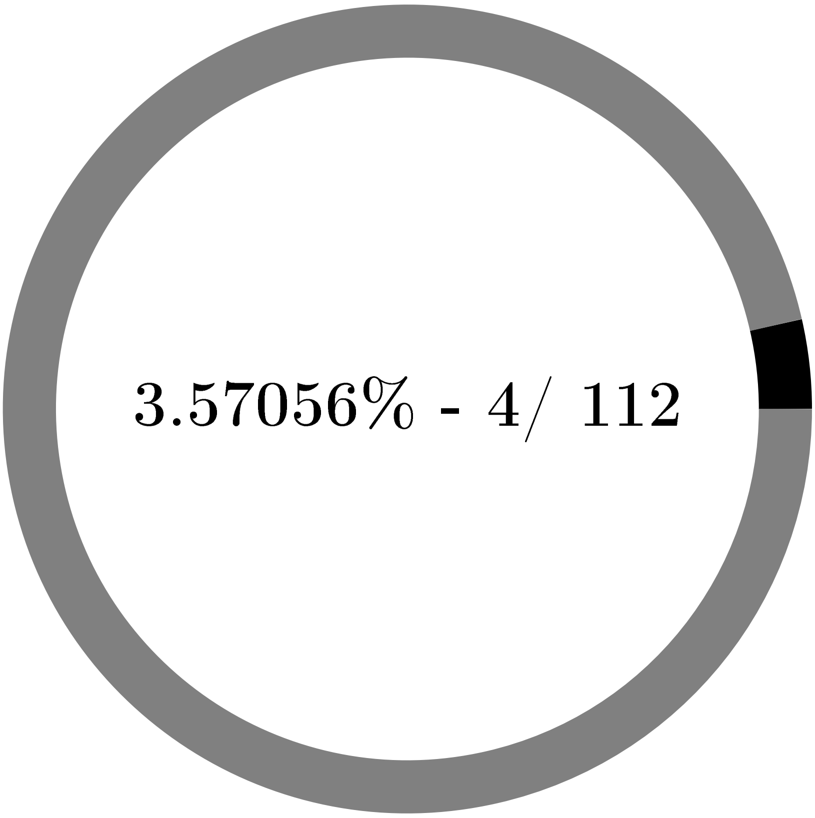
Année : 2024

Nom des Correcteurs :

Thibaud VINCENT

L3 Mathématiques

Progrès des exercices



Progrès par chapitre

1. Structure d'anneau .... 4 / 16
2. Idéaux d'un anneaux .... 0 / 18
3. Modules et Algèbres .... 0 / 10
4. Algèbres de polynômes .... 0 / 9
5. Factorisation dans les domaines d'intégrité .... 0 / 29
6. Localisation .... 0 / 10
7. Séries formelles .... 0 / 7
8. Polynômes symétriques .... 0 / 13

Table des matières

Chapitre 1

Exercice 1

Soit G un groupe additif abélien, $G \neq \{0\}$ On pose l'application :

$$\begin{array}{rcl} . : G \times G & \rightarrow & G \\ (x, y) & \mapsto & 0 \end{array}$$

1. $(G, +)$ est bien un groupe abélien (hypothèse)
2. $\forall (x, y, z) \in G^3,\ x.(yz) = x.0 = 0 = 0.z = (xy).z$
3. $\forall (x, y, z) \in G^3,\ x.(y + z) = 0 = 0 + 0 = x.y + x.z$ et $(x + y).z = 0 = 0 + 0 = x.z + y.z$

Donc $(G, +, .)$ est un anneau.

$\forall (x, y) \in G^2, x.y = 0 = y.x \Rightarrow G$ commutatif

Supposons qu'il existe e un élément unitaire de G alors
$\exists x \in G \setminus \{0\}$ $(G \neq \{0\})$ $\mid$ $e.x = 0 \neq x \Rightarrow e$ n'est pas un élement d'unité
$\Longrightarrow G$ n'est pas unitaire.

Exercice 2

Soit A un anneaux unitaire, commutatif $n \geq 2$ fixé,
On pose :

$$P(s) = \text{"}(a_1 + a_2 + ... + a_s)^n = \sum_{\substack{\forall j \in \{1,...,s\}, 1 \leq i_j \leq n \\ i_1 + ... + i_s = n}} \frac{n!}{i_1!...i_s!} a_1^{i_1} ... a_s^{i_s}\text{"} \mid (a_1, a_2, ..., a_s) \in A^s$$

Il suffit de le montrer par récurrence :
Pour $s = 2$
Soit $(a_1, a_2) e A^2$

$$\begin{aligned} (a_1 + a_2)^n = \sum_{i=1}^{n} \frac{n!}{i!(n-i)!} a_1^i a_2^{n-i} &= [i_1 = i, i_2 = n - i, i_1 + i_2 = n] \\ &= \sum_{\substack{1 \leq i_1 \leq n, 1 \leq i_2 \leq n \\ i_1 + i_2 = n}} \frac{n!}{i_1! i_2!} a_1^{i_1} a_2^{i_2} \end{aligned}$$

$\Longrightarrow P(2)$ vrai

Supposons P(s) vrai, montrons P(s + 1) vrai aussi
Soit $(a_1, a_2, ..., a_s, a_{s+1}) \in A^{s+1}$
On a (hypothèse) :

$$(a_1 + a_2 + ... + (a_s + a_{s+1}))^n = \sum_{\substack{\forall j \in \{1,...,s\}, 1 \le i_j \le n \\ i_1 + ... + i_s = n}} \frac{n!}{i_1!...i_s!} a_1^{i_1} ... a_{s-1}^{i_{s-1}} (a_s + a_{s+1})^{i_s}$$

$$= \sum_{\substack{\forall j \in \{1,...,s\}, 1 \le i_j \le n \\ i_1 + ... + i_s = n}} \frac{n!}{i_1!...i_s!} a_1^{i_1} ... a_{s-1}^{i_{s-1}} (\sum_{\substack{1 \le l_1 \le i_s, 1 \le l_2 \le i_s \\ l_1 + l_2 = i_s}} \frac{i_s!}{l_1! l_2!} a_s^{l_1} a_{s+1}^{l_2})$$

$$= \sum_{\substack{\forall j \in \{1,...,s\}, 1 \le i_j \le n \\ i_1 + ... + i_s = n}} (\sum_{\substack{1 \le l_1 \le i_s, 1 \le l_2 \le i_s \\ l_1 + l_2 = i_s}} \frac{n! i_s!}{i_1!...i_s! l_1! l_2!} a_1^{i_1} ... a_{s-1}^{i_{s-1}} a_s^{l_1} a_{s+1}^{l_2})$$

$$= \sum_{\substack{\forall j \in \{1,...,s\}, 1 \le i_j \le n \\ i_1 + ... + i_s = n \\ 1 \le l_1 \le i_s, 1 \le l_2 \le i_s \\ l_1 + l_2 = i_s}} \frac{n!}{i_1!...i_{s-1}! l_1! l_2!} a_1^{i_1} ... a_{s-1}^{i_{s-1}} a_s^{l_1} a_{s+1}^{l_2})$$

$$= \sum_{\substack{\forall j \in \{1,...,s\}, 1 \le i_j \le n \\ 1 \le l_1 \le i_s, 1 \le l_2 \le i_s \\ i_1 + ... + i_{s-1} + l_1 + l_2 = n}} \frac{n!}{i_1!...i_{s-1}! l_1! l_2!} a_1^{i_1} ... a_{s-1}^{i_{s-1}} a_s^{l_1} a_{s+1}^{l_2})$$

$$= \sum_{\substack{\forall j \in \{1,...,s-1\}, 1 \le i_j \le n \\ 1 \le l_1 \le n, 1 \le l_2 \le n \\ i_1 + ... + i_{s-1} + l_1 + l_2 = n}} \frac{n!}{i_1!...i_{s-1}! l_1! l_2!} a_1^{i_1} ... a_{s-1}^{i_{s-1}} a_s^{l_1} a_{s+1}^{l_2})$$

$$= [(i_1, i_2, ..., i_{s-1}, l_1, l_2) = (d_1, d_2, ..., d_{s+1})]$$

$$= \sum_{\substack{\forall j \in \{1,...,s+1\}, 1 \le d_j \le n \\ d_1 + ... + d_{s+1} = n}} \frac{n!}{d_1!...d_{s+1}!} a_1^{d_1} ... a_{s+1}^{d+1})$$

$$= (a_1 + a_2 + ... + a_s + a_{s+1})^n$$

On a bien $P(s)$ vrai $\Longrightarrow$ $P(s+1)$ vrai
Conclusion, $\forall s \in \mathbb{N}, P(s)$ vrai

Exercice 3

Vérifions que $\mathbb{Z}[i\sqrt{5}]$ est un sous anneaux de $\mathbb{C}$
Déjà on a $\mathbb{Z}[i\sqrt{5}] \subset \mathbb{C}$
$\forall (x, y) \in \mathbb{Z}[i\sqrt{5}], \exists (a, b, c, d) \in \mathbb{Z}^4 \mid x = a + i\sqrt{5}b, y = c + i\sqrt{5}d$

$x-y=a+ib-c-id=(a-c)+i\sqrt{5}(b-d), a-c\in\mathbb{Z}, b-d\in\mathbb{Z}$

Donc $x-y\in\mathbb{Z}[i\sqrt{5}] \Longrightarrow (\mathbb{Z}[i\sqrt{5}],+)$ est un groupe additif (et abélien car $\mathbb{Z}[i\sqrt{5}]\subset\mathbb{C}$)

$xy=(a+ib)(c+id)=ac-bd+i\sqrt{5}(bc+ad)\in\mathbb{Z}[i\sqrt{5}]$, la multiplication est donc bien interne.

$1\in\mathbb{Z}[i\sqrt{5}]$ et 1 est un élement d'unité de $\mathbb{C}$

$\Longrightarrow \mathbb{Z}[i\sqrt{5}]$ est un sous-anneaux unitaire.

Même démonstration pour montrer que $\mathbb{Q}[i\sqrt{5}]$ est un sous-anneaux unitaire de $\mathbb{C}$.

$\mathbb{Q}[i\sqrt{5}]$ est commutatif car $\mathbb{Q}[i\sqrt{5}]\subset\mathbb{C}$ et $\mathbb{C}$ commutatif.

Un anneaux commutatif unitaire est un corps si $\mathbb{Q}[i\sqrt{5}]^\times=\mathbb{Q}[i\sqrt{5}]\setminus\{0\}$

$\forall a+i\sqrt{5}b\in\mathbb{Q}[i\sqrt{5}]\setminus\{0\}$

$$\frac{1}{a+i\sqrt{5}b}=\frac{a-i\sqrt{5}}{(a+i\sqrt{5}b)(a-i\sqrt{5}b)}=\frac{a-i\sqrt{5}}{a^2+5b^2}=\frac{a}{a^2+5b^2}-\frac{i\sqrt{5}}{a^2+5b^2}\in\mathbb{Q}[i\sqrt{5}]$$

Et

$$(a+i\sqrt{5}b)*\frac{a-i\sqrt{5}}{a^2+5b^2}=\frac{a^2+5b^2}{a^2+5b^2}=1\Longrightarrow(a+i\sqrt{5}b)\in\mathbb{Q}[i\sqrt{5}]^\times$$

Donc $\mathbb{Q}[i\sqrt{5}]^\times=\mathbb{Q}[i\sqrt{5}]\setminus\{0\}\Longrightarrow\mathbb{Q}[i\sqrt{5}]$ est un corps

Exercice 4

Soit A unitaire, B intégère $f\in Hom(A,B),\ f\neq 0$

$f\neq 0\Rightarrow\exists a\in A\mid f(a)\neq 0\Rightarrow f(a1_A)=f(a)f(1_A)\neq 0\Rightarrow f(1_A)\neq 0$ (B intégre)

De plus $f(1_A)=f(1_A1_A)=f(1_A)f(1_A)$, on pose $e=f(1_A),\ e=e^2,\ e\neq 0$ $\Rightarrow\forall b\in B, eb=e^2b\Leftrightarrow eb-e^2b=0\Leftrightarrow e(b-eb)=0$

Or $e\neq 0$ et B intégère $\Rightarrow(b-eb)=0\Rightarrow b=eb$, de même, $be=be^2\Rightarrow b=be$

$f(1_A)$ est donc bien un élément d'unité de B.