Metodo "Lazy"

Metodo dei Fasori per Risolvere Equazioni Differenziali Lineari con Forzante Trigonometrica

Joele Andrea Ortore
Impaginato in LaTeX da Alessandro Modica

2023-09-28

Data un'equazione differenziale lineare di ordine n con $a_0, a_1, ..., a_n$ coefficienti reali costanti, sia la forzante $F(t)$ una funzione trigonometrica del tipo $\cos(\omega t)$, $\sin(\omega t)$, o una combinazione lineare delle due:

$$\sum_{i=0}^{n} a_i \cdot y^{(i)}(t) = F(t) = k_1 \cdot \cos(\omega t) + k_2 \cdot \sin(\omega t) \text{ con } k_1, k_2 \in \mathbb{R} \tag{1}$$

è possibile individuare una soluzione particolare y_p portando l'equazione nel dominio fasoriale:

$$\overline{y} \cdot \sum_{i=0}^{n} (j\omega)^i \cdot a_i = \overline{F} \tag{2}$$

e risolvendola per $\overline{y}$, ottenendo una soluzione del tipo:

$$\overline{y} = c_1 - jc_2$$

riportando la soluzione nel dominio del tempo, ottengo:

$$y_p(t) = c_1 \cdot \cos(\omega t) + c_2 \cdot \sin(\omega t)$$

che è una soluzione particolare dell'equazione.
Esplicitando la parte reale e la parte immaginaria, posso scrivere la (2) come:

$$\overline{y} \cdot \underbrace{\left(\overbrace{\Re\left\{ \sum_{i=0}^{n} (j\omega)^i a_i \right\}}^{\alpha} + j \overbrace{\Im\left\{ \sum_{i=0}^{n} (j\omega)^i a_i \right\}}^{\beta} \right)}_{\text{chiameremo questa porzione } \gamma} = \Re\left\{\overline{F}\right\} + j\Im\left\{\overline{F}\right\}$$

da cui:

$$\begin{aligned}
\overline{y} &= \frac{(\alpha - j\beta)\left[\Re\{\overline{F}\} + j\Im\{\overline{F}\}\right]}{|\gamma|^2} \\
\overline{y} &= \underbrace{\frac{\alpha\Re\{\overline{F}\} + \beta\Im\{\overline{F}\}}{|\gamma|^2}}_{c_1} - j \underbrace{\frac{\beta\Re\{\overline{F}\} - \alpha\Im\{\overline{F}\}}{|\gamma|^2}}_{c_2} \\
\overline{y} &= c_1 - jc_2
\end{aligned}$$

Dimostrazione. Vogliamo dimostrare che data un'equazione scritta come:

$$\sum_{i=0}^{n} a_i \cdot y^{(i)}(t) = F(t)$$

se portata nel dominio dei fasori, risolta per $\overline{y}$ e riportata tale soluzione nel dominio del tempo, si ottiene una soluzione particolare dell'equazione di partenza; procederemo quindi a ritroso dal prototipo di soluzione fornito dal Metodo di Somiglianza e ci aspetteremo dunque di trovare un risultato del tipo:

$$\sum_{i=0}^{n} (j\omega)^i \, \overline{y} = x_1 - jx_2 \tag{3}$$

Innanzitutto, la forma generale del prototipo di soluzione particolare è:

$$y_p(t) = c_1 \cos(\omega t) + c_2 \sin(\omega t)$$

In accordo con il Metodo di Somiglianza, la generalizzazione della forma della soluzione è:

$$c_1 \sum_{i=0}^{n} \left\{ \omega^i \underbrace{\cos\left[\omega t + i\left(\frac{\pi}{2}\right)\right]}_{a} \right\} + c_2 \sum_{i=0}^{n} \left\{ \omega^i \underbrace{\sin\left[\omega t + i\left(\frac{\pi}{2}\right)\right]}_{b} \right\} = y(t) \tag{4}$$

con c_1, c_2 noti, n pari al massimo ordine di derivazione presente nell'equazione differenziale.

Osservazione. Possiamo notare che i valori di a e b si ripetono ogni volta che i arriva a un multiplo di 4:

$$\begin{aligned}
i = 0 &\implies a = \cos(\omega t + 0) = \cos(\omega t) \\
i = 1 &\implies a = \cos(\omega t + \frac{\pi}{2}) \\
i = 2 &\implies a = \cos(\omega t + \pi) \\
i = 3 &\implies a = \cos(\omega t + \frac{3\pi}{2}) \\
i = 4 &\implies a = \cos(\omega t + 2\pi) = \cos(\omega t) \\
\vdots & \quad \vdots
\end{aligned}$$

Questo porta a un parallelismo interessante con i numeri complessi, infatti:

$$j^0 = j^4 = j^8 = \ldots = j^{4n} = 1$$

Portiamo quindi la (4) nel dominio dei fasori:

$$c_1 \sum_{i=0}^{n} \left\{ \omega^i e^{i\frac{\pi}{2}j} \right\} + c_2 \sum_{i=0}^{n} \left\{ \omega^i e^{(i-1)\frac{\pi}{2}j} \right\} = \overline{y}$$

$$\sin\left(\omega t + i\frac{\pi}{2}\right) = $$
$$= \cos\left(\omega t + i\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2}\right)$$

In fasori: $e^{\left(i\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2}\right)j} = e^{(i-1)\frac{\pi}{2}j}$

che può essere riscritto come:

$$c_1 \sum_{i=0}^{n} \left\{\omega^i j^i\right\} + c_2 \sum_{i=0}^{n} \left\{\omega^i j^{i-1}\right\} = \overline{y}$$

$$c_1 \sum_{i=0}^{n} \{\omega j\}^i - jc_2 \sum_{i=0}^{n} \{\omega j\}^i = \overline{y}$$

$$\overline{y} = (c_1 - jc_2) \sum_{i=0}^{n} \{\omega j\}^i$$

che equivale a:

$$\overline{y} = (c_1 - jc_2) \left(\Re \left\{ \sum_{i=0}^{n} [\omega j]^i \right\} + j\Im \left\{ \sum_{i=0}^{n} [\omega j]^i \right\} \right)$$

$$\frac{\overline{y}}{\Re \left\{ \sum_{i=0}^{n} [\omega j]^i \right\} + j\Im \left\{ \sum_{i=0}^{n} [\omega j]^i \right\}} = c_1 - jc_2$$

$$\frac{\overline{y} \cdot \left(\Re \left\{ \sum_{i=0}^{n} [\omega j]^i \right\} - j\Im \left\{ \sum_{i=0}^{n} [\omega j]^i \right\} \right)}{\left| \Re \left\{ \sum_{i=0}^{n} [\omega j]^i \right\} + j\Im \left\{ \sum_{i=0}^{n} [\omega j]^i \right\} \right|^2} = c_1 - jc_2$$

$$\overline{y} \cdot \left(\Re \left\{ \sum_{i=0}^{n} [\omega j]^i \right\} - j\Im \left\{ \sum_{i=0}^{n} [\omega j]^i \right\} \right) = \underbrace{\left| \Re \left\{ \sum_{i=0}^{n} [\omega j]^i \right\} + j\Im \left\{ \sum_{i=0}^{n} [\omega j]^i \right\} \right|^2}_{\text{Chiameremo questa porzione } P} \cdot (c_1 - jc_2)$$

Quindi:

$$\overline{y} \cdot \left(\Re \left\{ \sum_{i=0}^{n} [\omega j]^i \right\} - j\Im \left\{ \sum_{i=0}^{n} [\omega j]^i \right\} \right) = P \cdot (c_1 - jc_2)$$

$$\overline{y} \sum_{i=0}^{n} [\omega j]^i = (c_1 - jc_2) \cdot P$$

Risultato coerente con quanto ci aspettavamo dalla (3). $\square$