# **Chapitre 1 : algèbre linéaire**

# MODULE : ALGEBRE

## **I-calcul matriciel**

**Définition**

Une matrice est un tableau rectangulaire rangé en m ligne(s) et n colonne(s) et qui admet m x n élément(s) :

m = 5

n = 4 nombres d’éléments = m x n = 5 x 4 = 20

**Propriété 1 :** Si m = 1

La matrice est appelée matrice ligne

**Propriété 2 :** Si n = 1

La matrice est appelée matrice colonne

**Propriété 3 :** Si m = n

La matrice est appelée matrice carrée.

**Propriété 4 :**

* Matrice triangulaire supérieure

Si tous ses coefficients en dessus de la diagonale sont tous nuls.

Exemple :

* Matrice triangulaire inférieure

Si tous ses coefficients en dessous de la diagonale sont tous nuls.

Exemple :

* Matrice diagonale

Si tous ses coefficients en dehors de la diagonale sont tous nuls.

Exemple :

**Propriété 5 :** Matrice identité

Exemple :

La matrice identité est une matrice diagonale dont tous les coefficients sont tous égales à 1 et elle est noté I.

NB : pour encadrer une matrice on peut utiliser soit des crochets[], des accolades{}, des parenthèses() ou un autre symbole etc…   
La seule notation non admise est les deux traits simples verticaux || qui est réservé au calcul du déterminant.

**IMPORTANT :** pour nommer une matrice on peut utiliser 2 indices :

* i : celui des lignes
* j : celui des colonnes

 : élément se trouvant à la 1e ligne et 1e colonne

**Définition 1 :** transposée d’une matrice

On appelle transposée d’une matrice A de dimension n x p, la matrice obtenue de dimension p x n en faisant l’échange des lignes et des colonnes. Elle est notée .

Exemple :

**Définition 2 :** Egalité de deux matrices

Deux matrices sont dites égales si elles ont les mêmes dimensions et les mêmes coefficients placés aux mêmes emplacements.

Il est inutile d’envisager l’égalité de deux matrices de dimensions différentes.

## **II- Opérations matricielles**

**Définition 3 :** Addition

On appelle addition de deux matrices de mêmes dimensions, la matrice obtenue en faisant la somme des coefficients des deux matrices situées aux mêmes emplacements.

Exemple :

**Définition 4 :** Soustraction

Idem Définition 3.

Exemple :

**Définition 5 :** Produit d’une matrice par un nombre réel

On appelle produit d’une matrice A par un nombre réel λ la matrice obtenue en multipliant tous les coefficients par ce nombre.

Exemple :

**Définition 6 :** Produit de 2 matrices carrées

* Matrice carrée d’ordre 2x2

Application :

Calculer

*Exercice : calculer le produit des matrices suivantes A x B et B x A :*

Réponse :

* Matrice carrée d’ordre 3x3 :

*Application : calcul A x D*

**NB**: Le produit de deux matrices carrées est la matrice obtenue en multipliant les coefficients de la ligne de la 1e matrice par ceux de la colonne de la 2e matrice, situés aux mêmes emplacements puis en faisant la somme des termes obtenus.

**Théorème 1** : Soient A, B, C 3 matrices de même dimension :

* Si A et B sont deux matrices de la même dimension alors :

* Si 0 représente la matrice nulle de dimension n x p, alors pour toute matrice M on a :

**Théorème 2**:

* Si A et B deux matrices de mêmes dimensions, L est un réel alors :

* Si A une matrice, L et L’ sont deux nombres réels alors :

* Si A une matrice, L et L’ sont deux nombres réels alors :

* Si A une matrice quelconque et O la matrice nulles alors :

De même

*Exercice : calculer A x B et B x A :*



**CAS GENERAL :**

Le produit d’une matrice n x p par une matrice de dimension p x q est la matrice obtenue n x q en faisant la somme des produits des coefficients des vecteurs colonnes par les vecteurs lignes situés aux mêmes emplacements.

NB1 : le produit matriciel n’est possible que si le nombre de colonnes de la 1e matrice est égale aux nombres de lignes de la 2e matrice.

NB2 : la matrice résultat aura pour ligne le nombre de lignes de la 1e matrice et pour colonnes, le nombre de colonnes de la 2nd matrice.

Exemple d’application : calculer le produit A x B si c’est possible et B x A.

*Exo : calculer le produit des matrices si c’est défini*

## **V – calcul du déterminant**

1. **Matrice 2 x 2 :**

Soit une matrice carrée d’ordre 2 x 2. On appelle déterminant de A, le réel défini et noté det(A) ou bien |A|.

Exemple :

1. **Matrice 3 x 3**

**Méthode 1 :** Sarrus

Principe : On recopie la 1e et 2nd colonne à la suite de la 3e colonne, puis on procède comme suit :

Application : calculer det(A) = ?

*Exercice : Calculer le déterminant des matrices suivantes :*

**NB :** La méthode de Sarrus n’est pas applicable aux matrices de dimension supérieure à 3

**Méthode 2 :** Cofacteurs

1. **Mineur :**

Le mineur est le déterminant de la matrice obtenue en éliminant la 1e ligne et la 2nd colonne de la matrice A.

1. **Cofacteur :**

Il est donné par la relation :

Exemple :

1. **Expansion par cofacteurs**

Soit A une matrice carrée et ses cofacteurs. Le déterminant est obtenu en suivant une expansion par cofacteurs comme suit :

* + Choisir une ligne ou colonne de A (si possible il est plus rapide de choisir la ligne ou la colonne contenant le plus grand nombre de 0), multiplier chacun des éléments de la ligne ou la colonne choisie par son cofacteur correspondant puis faire la somme des résultats obtenus.

Application :

Soit Calculer |A|= ?

**Exercice :** Calculer le déterminant des matrices suivantes :

**Théorème :**

Le déterminant d’une matrice triangulaire supérieure, triangulaire inférieure et diagonale est égale au produit de ses coefficients diagonales.

Exemple :

* Matrice triangulaire supérieure

* Matrice triangulaire inférieure

* Matrice diagonale

## **VI – calcul de l’inverse**

**Définition :**

Soit A une matrice carrée. A est inversible si et seulement si . Si , alors la matrice A est non inversible.

1. **Matrice carrée 2x2 :**
   * **Définition :** l’inverse d’un nombre réel α est le nombre 1/α (où 1 est l’élément neutre de la multiplication)
   * **Théorème :** soit une matrice carrée et , alors A admet une inverse unique notée : définie par :
   * **Preuve :**

Exemple : calculer

Exercice : Calculer l’inverse des matrices suivantes

B n’est pas inversible car det(B) est égale à 0.

**Méthode du pivot de Gauss :**

**Principe :**

On choisit une matrice identité de même ordre que la matrice de départ et puis le choix du pivot se fait sur la diagonale et dois toujours être égale à 1 on procède à des permutations (ligne ou colonne) pour réduire tous les éléments sur la même ligne (ou colonne) que le pivot à 0.

Exemple d’application :

Soit calculer .

* Choix pivot (1) sur L1 :

* Multiplier L2 par –(1/2)

* Choix pivot (1) sur L2 :

1. **Inverse d’une matrice 3 x 3 :**

**Méthode 1 :**

Soit

**Etape 1 :** Calcul du déterminant

**Etape 2 :** Trouver l’inverse

**Etape 3 :** Trouver les déterminant des matrices mineures de .

Etape 4 : Puis représenter les comme une comatrice et multiplier chaque terme par les signes du tableau suivant :

**Etape 5 :** Trouver l’inverse en divisant la matrice adjacente par le déterminant de M.

Exo : Soit calculer .