Planification de production avec contraintes environnementales

Safia Kedad-Sidhoum

CEDRIC, CNAM

RODD

safia.kedad_sidhoum@cnam.fr

1 En guise d'introduction...

Le problème dit de lot-sizing en planification de production consiste à déterminer les quantités à produire ainsi que les périodes de production pour satisfaire les demandes de produit définies sur un horizon de planification discret. Le problème de base, mono-produit sans contrainte de capacité, a été résolu pour la première fois par Wagner et Whitin en 1958. Leur article fondateur est considéré comme l'un des 10 articles les plus influents par les membres d'INFORMS dans le numéro spécial des 50 ans de la revue Management Science (2004). De nombreuses extensions et variantes ont été depuis proposées dans la littérature scientifique. Un nombre important de résultats, tant sur les modèles que sur les outils de résolution, ont en effet été publiés. Ces problèmes sont traditionnellement rencontrés dans la domaine de la production mais on peut citer d'autres domaines d'applications tels que le domaine de la distribution ou de l'énergie pour lesquels ces problèmes apparaissent assez naturellement.
Dans le cadre de l'UE RODD, l'objectif de la séance dédiée au "green" lot-sizing est double, d'une part vous faire découvrir quelques résultats de base en lot-sizing mais surtout vous proposer de travailler sur des modèles intégrant explicitement une composante environnementale pour produire des plans de production respectueux de l'environnement.

2 Le problème de base ULS

Le problème dit ULS (Uncapacitated Lot-Sizing) vise à trouver le meilleur compromis entre les coûts de production (fixe et variable) induits par les lancements en production et les coûts de stockage induits par les anticipations liées à la satisfaction de la demande. On ne s'intéresse ici qu'à un

seul produit. En effet, sans contrainte couplante de capacité, les problèmes propres à chaque produit peuvent être traités indépendamment.
Plus formellement, une instance du problème ULS sera définie par:

- d_t demande à la période t.
- p_t coût unitaire de production à la période t.
- f_t coût fixe de production à la période t.
- h_t coût unitaire de stockage à la période t.

Il s'agit de calculer un plan de production pour un horizon discret à T périodes minimisant le coût total de production et de stockage.

Une formulation naturelle (dite agrégée) du problème ULS s'appuie sur les variables de décision suivantes:

- x_t quantité produite à la période t.
- s_t valeur du stock à la fin de la période t.
- y_t variable binaire qui vaut 1 s'il y a lancement de production à la période t, 0 sinon.

Le modèle mathématique du problème ULS est défini comme suit:

$$\begin{aligned}
\min \sum_{t=1}^{T} p_t x_t + \sum_{t=1}^{T} h_t s_t + \sum_{t=1}^{T} f_t y_t & \\
s_{t-1} + x_t = d_t + s_t, &\quad \forall t = 1, \dots, T \\
x_t \leq (\sum_{i=t}^{T} d_i) y_t, &\quad \forall t = 1, \dots, T \\
x_t, s_t \geq 0, &\quad \forall t = 1, \dots, T \\
y_t \in \{0, 1\}, &\quad \forall t = 1, \dots, T
\end{aligned}$$

La fonction objectif minimise le coût total sur l'horizon de planification. Le premier lot de contraintes (dit de conservation de flot) consiste à garantir la satisfaction de la demande. Le second couple les variables de production à celles de lancement (setup).
Ce problème est polynomial, il peut être résolu de façon très efficace par un algorithme de programmation dynamique.

3 Green lot-sizing

La motivation de l'étude des problèmes de green lot-sizing vient de la nécessité de prendre en compte des aspects environnementaux compte tenu de l'évolution des législations qui imposent le contrôle d'émissions carbone dans les activités de production.
Différents modèles sont proposés pour ce faire:

- Carbon cap: les émissions sont plafonnées.
- Carbon tax: une taxe est imposée par unité de CO_2 émise.
- Carbon cap-and-trade: une taxe est appliquée au delà d'un plafond fixé. Si la consommation est inférieure à ce plafond, les unités de CO_2 peuvent être vendues.
- Carbon offset: Les unités de CO_2 peuvent être achetées auprès de fournisseurs indépendants et/ou en investissant dans des projets visant à réduire les émissions.

Ces modèles induisent la prise en compte de contraintes d'émission carbone dans le modèle de base et/ou l'ajout d'une composante de coût dans la fonction objectif.

On s'intéressera dans ce projet au problème de lot-sizing mono-produit (sans contrainte de capacité de production) avec contrainte d'émission carbone centré sur le modèle "carbon cap". L'idée étant de répondre à l'objectif d'intégrer la possibilité de mesurer l'empreinte carbone du produit fabriqué.

Il existe différents modèles de contraintes d'émission carbone pour le modèle "Carbon cap" dans la littérature. Nous nous intéresserons aux modèles suivants:

- Le modèle dit périodique pour lequel une limite d'émission carbone est fixée à chaque période.
- Le modèle dit cumulatif pour lequel la quantité d'émissions carbone non utilisée à une période peut être réutilisée à la période suivante.
- Le modèle dit global qui étend la contrainte cumulative sur l'horizon de planification.
- Le modèle dit glissant (rolling): la compensation d'émission carbone entre périodes est autorisée sur un horizon glissant de longueur fixe.

4 Problème de lot-sizing multi-source

On introduit une extension du modèle de base qui porte sur la dimension multi-source. On suppose dans ce cadre que l'on dispose de M sources d'approvisionnement correspondant à la combinaison d'un centre de production et d'un mode de transport.
Dans ce cadre, une instance sera définie par les paramètres suivants:

- d_t: demande à la période t.
- h_t: coût de stockage d'une unité de produit à la période t.
- p_t^m: coût d'approvisionnement unitaire du mode m à la période t.
- f_t^m: coût d'approvisionnement fixe du mode m à la période t.
- e_t^m: Impact environnemental (émission carbone) lié à l'approvisionnement d'une unité de produit avec le mode m à la période t.
- $E_t^{\max}$: Impact environnemental maximum autorisé à la période t.

Un mode m est dit écologique à la période t si $e_t^m \leq E_t^{\max}$.

Les nouvelles variables du modèle mathématique sont définies par:

- x_t^m: Quantité approvisionnée à la période t avec le mode m.
- y_t^m: Variable binaire égale à 1 si le mode m est utilisé à la période t, 0 sinon.
- s_t: Stock disponible à la fin de la période t pour la période $t+1$.

Le problème ULS mono-produit multi-source sans contraintes d'émission carbone est défini par:

$$
\begin{aligned}
\min \quad & \sum_{m=1}^{M} \sum_{t=1}^{T} (p_t^m x_t^m + f_t^m y_t^m) + \sum_{t=1}^{T} h_t(s_t) \\
s.c. \quad & \sum_{m=1}^{M} x_t^m - s_t + s_{t-1} = d_t, \quad t = 1, \ldots, T \\
& x_t^m \leq \left(\sum_{t'=t}^{T} d_{t'} \right) y_t^m, \quad t = 1, \ldots, T, m = 1, \ldots, M \\
& x_t^m \in \mathbb{R}^+, y_t^m \in \{0, 1\}, \quad t = 1, \ldots, T, m = 1, \ldots, M \\
& s_t \in \mathbb{R}^+, \quad t = 1, \ldots, T
\end{aligned}
$$

Modélisation de la contrainte d'émission carbone périodique

La contrainte est dans ce cas très stricte, elle impose un niveau d'émission carbone à ne pas dépasser à chaque période. Elle peut-être formulée comme suit:

$$\frac{\sum_{m=1}^{M} e_t^m x_t^m}{\sum_{m=1}^{M} x_t^m} \leq E_t^{\max},\ t = 1, \ldots, T.$$

ou encore:

$$\sum_{m=1}^{M} (e_t^m - E_t^{\max}) x_t^m \leq 0,\ t = 1, \ldots, T.$$

A première vue, la contrainte peut sembler proche d'une contrainte de capacité mais compte tenu du fait que les coefficients $(e_t^m - E_t^{\max})$ des variables x_t^m peuvent être positifs ou négatifs, des phénomènes de compensation peuvent apparaître avec aucune limitation sur les quantités à produire. Il est à noter que pour garantir la faisabilité des instances, nous supposerons que, pour toute demande d_t, il existe au moins un mode m tel que $e_{t'}^m \leq E_{t'}^{\max}$ pour une période donnée $t' \leq t$.
Il est à note que dans ce cas toute solution du problème utilise au moins un mode écologique pour toute période de production.

5 Travail à faire

Les questions (3) suivantes ne nécessitent pas d'utilisation de solveurs d'optimisation:

1. Pour le problème périodique, une propriété de dominance stipule qu'il existe une solution optimale du problème dans laquelle au plus deux modes d'approvisionnement sont utilisés un mode écologique et éventuellement un mode non-écologique. Sans fournir de preuve formelle, pourriez-vous donner quelques éléments de justification ?
2. Proposer un modèle mathématique pour le modèle cumulatif.
3. Proposer un modèle mathématique pour le modèle global.
4. Proposer un modèle qui intègre la prise en compte d'une contrainte de capacité de production C_t^m disponible à la période t pour le mode m pour le problème périodique. On supposera que chaque unité produite induit une consommation de capacité α_i^t.
   Proposer une façon d'évaluer les besoins en capacité pour garantir le respect des contraintes environnementales.

Les questions suivantes en revanche portent sur une modélisation et analyse expérimentale du modèle à intervalle glissant.

1. Modéliser la contrainte d'émissions carbone pour le modèle à intervalle glissant (rolling).
2. A partir de l'instance suivante:

- $T = 12$ et $M = 4$.
- $E_t^{\max} = 3$.
- d_t est générée selon une loi uniforme dans l'intervalle $[20, 70]$.
- Les coûts et paramètres d'émission carbone sont stationnaires: $f = (10, 30, 60, 90)$, $e = (8, 6, 4, 2)$.
- $h_t = 1$ et $p_t^m = 0$ pour tout t.

2.1 Représenter sur une même figure l'évolution du coût total en fonction de la longueur de l'intervalle ainsi que la valeur de l'émission carbone moyenne en fonction de la longueur de l'intervalle.

2.2 Analyser les résultats obtenus.

2.3 Analyser l'impact de l'augmentation de la limite carbone imposée d'une unité sur les résultats précédents.

2.4 Les conclusions restent-elles valides si le nombre de modes augmente ? si la longueur de l'horizon augmente ?