Lecture 7

Thu 02 Oct 2025 08:04

AM-GM Min/Max Cheat Sheet

---

1. **Recognition**
   - **When:** Sum of positive terms with inverse powers (e.g., $x^a, 1/x^b$).
   - **Action:** Use AM-GM.
2. **Balancing Exponents**
   - **Goal:** Make the product a **constant**.
   - **Action:** Split terms so the sum of exponents = 0.
3. **Term Creation (Add & Subtract)**
   - **Problem:** Terms don't cancel (e.g., x and $\frac{1}{x-a}$).
   - **Action:** Add & subtract to create matching terms (e.g., create $(x-a)$).
4. **Point of Extremum**
   - **Problem:** Direct method fails or there is a boundary condition (e.g., $x \geq k$).
   - **Action: Guess** the min point ($x = k$), then split terms to **force equality** ($a = b$) at that point.

Giới thiệu

Đây là tài liệu tổng hợp các kỹ thuật, mẹo và chiến lược quan trọng để sử dụng bất đẳng thức AM-GM (Cô-si) một cách tự tin và chính xác, đặc biệt trong các bài toán tìm giá trị nhỏ nhất (min) và lớn nhất (max).

1 Dấu Hiệu Nhận Biết "Bài Toán Tủ"

Hãy tìm kiếm các bài toán có đủ những đặc điểm sau:

- **Mục tiêu:** Tìm giá trị lớn nhất (GTLN) hoặc giá trị nhỏ nhất (GTNN).
- **Miền xác định:** Các biến số đều là số dương (ví dụ: $x > 0$).
- **Dạng biểu thức:** Thường là tổng của các số hạng.
- **Dấu hiệu vàng:** Có sự xuất hiện của biến số ở cả **tử số** và **mẫu số**, tạo khả năng triệt tiêu lẫn nhau (ví dụ: x^a và $\frac{1}{x^b}$).

2 Tip 1: Kỹ Thuật Thêm Bớt Hằng Số

Nguyên tắc: Hằng số không tham gia vào việc cân bằng "điểm rơi". Hãy tách riêng nó ra.

Ví dụ: Tìm GTNN của $P = x^2 + \frac{2}{x} + 5$ với $x > 0$.

1. **Tách riêng hằng số:** Xét phần chứa biến $A = x^2 + \frac{2}{x}$.
2. **Tìm GTNN của phần biến:** Áp dụng AM-GM cho 3 số $(x^2, \frac{1}{x}, \frac{1}{x})$, ta có $A_{min} = 3$ tại $x = 1$.
3. **Cộng lại hằng số:** Vậy $P_{min} = A_{min} + 5 = 3 + 5 = 8$, cũng đạt được tại $x = 1$.

3 Tip 2: Kỹ Thuật "Ép"Điểm Rơi (Nâng cao)

Nguyên tắc: Khi điều kiện bài toán ép GTNN/GTLN xảy ra tại một điểm x_0 không phải là "điểm rơi tự nhiên", ta phải tách các số hạng để dấu -"của AM-GM xảy ra đúng tại x_0.

Ví dụ: Tìm GTNN của $P = x + \frac{1}{x}$ với điều kiện $x \geq 2$.

1. **Dự đoán điểm rơi:** GTNN sẽ xảy ra tại biên, tức là $x_0 = 2$.
2. **Tìm hệ số tách:** Ta cần tách x thành $(ax + \dots)$ để ghép cặp với $\frac{1}{x}$. Dấu -"phải xảy ra tại $x = 2$:

   $$ax = \frac{1}{x} \implies a = \frac{1}{x^2} = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4}$$

   Vậy ta cần tách ra một lượng là $\frac{x}{4}$.

3. **Viết lại và áp dụng AM-GM:**

$$
\begin{aligned}
P &= \left(\frac{x}{4} + \frac{1}{x}\right) + \frac{3x}{4} \\
&\geq 2\sqrt{\frac{x}{4} \cdot \frac{1}{x}} + \frac{3x}{4} \\
&\geq 2\sqrt{\frac{1}{4}} + \frac{3x}{4} \\
&\geq 1 + \frac{3x}{4}
\end{aligned}
$$

4. **Đánh giá phần còn lại:** Vì $x \geq 2$, ta có $\frac{3x}{4} \geq \frac{3 \cdot 2}{4} = \frac{3}{2}$.

5. **Kết luận:**

$$P \geq 1 + \frac{3}{2} = \frac{5}{2}$$

Vậy $P_{min} = \frac{5}{2}$, đạt được khi $x = 2$.

4 Tip 3: Luôn Kiểm Tra Lại Bằng Đạo Hàm

Nguyên tắc: Nếu đã học, đạo hàm là công cụ mạnh nhất và đáng tin cậy nhất để xác minh kết quả. Đây là "lưới an toàn"của bạn.

Ví dụ: Kiểm tra lại GTNN của $P = x^2 + \frac{2}{x}$.

1. **Tính đạo hàm:** $P' = 2x - \frac{2}{x^2}$.

2. **Tìm điểm dừng:**

$$P' = 0 \iff 2x = \frac{2}{x^2} \iff 2x^3 = 2 \iff x^3 = 1 \iff x = 1$$

3. **Kết quả:** Cực trị xảy ra tại $x = 1$, hoàn toàn trùng khớp với kết quả từ AM-GM.

Ví dụ bổ sung: Dùng AM-GM theo kiểu "bập bênh"

Đề bài: Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P = x^2 + \frac{2}{x} \quad \text{với } x > 0$$

Giá trị nhỏ nhất của biểu thức là 3, đạt được tại $x = 1$.

Để giải bài này, ta tiếp tục dùng "mẹo bập bênh"để áp dụng bất đẳng thức AM-GM (Cô-si).

Phân Tích và Áp Dụng AM-GM

1. **Xác định "trọng số"(bậc lũy thừa):** Một bên là x^2 có bậc là 2. Bên kia là $\frac{2}{x}$ có x ở dưới mẫu với bậc là 1.

2. **Cân bằng "bập bênh":** Ta cần cân bằng: $2 \times m = 1 \times n$. Tráo đổi hệ số, ta chọn cặp đơn giản nhất là $m = 1$ và $n = 2$. **Kết luận:** Ta cần 1 phần tử x^2 và 2 phần tử $\frac{2}{x}$.

3. **"Chia bánh"và áp dụng AM-GM:** 1 phần tử x^2 chính là x^2, 2 phần tử $\frac{2}{x}$ tức là ta chia $\frac{2}{x}$ thành 2 phần bằng nhau:

$$\frac{2}{x} = \frac{2}{2x} + \frac{2}{2x}$$

(Ghi chú: có thể tách thành $\frac{1}{x} + \frac{1}{x}$ cho tiện, kết quả không đổi.)

Bây giờ ta có 3 số hạng để áp dụng AM-GM là x^2, $\frac{2}{2x}$ và $\frac{2}{2x}$:

$$\begin{aligned} P = x^2 + \frac{2}{x} &= x^2 + \frac{2}{2x} + \frac{2}{2x} \\ &\geq 3 \cdot \sqrt[3]{x^2 \cdot \frac{2}{2x} \cdot \frac{2}{2x}} \\ &= 3 \cdot \sqrt[3]{x^2 \cdot \frac{4}{4x^2}} \\ &= 3 \cdot \sqrt[3]{1} = 3 \end{aligned}$$

Tìm Điểm Rơi (Dấu -"Xảy Ra)

Giá trị nhỏ nhất đạt được khi các số hạng bằng nhau:

$$\begin{cases} x^2 = \frac{2}{2x} \\ \Rightarrow x^2 = \frac{1}{x} \\ \Rightarrow x^3 = 1 \Rightarrow x = 1 \end{cases}$$

Vì $x = 1$ thuộc miền xác định $(0; +\infty)$, nên:

$$\boxed{\text{Giá trị nhỏ nhất của biểu thức là 3 tại } x = 1}$$