

Apunts de Probabilitat

Alejandro Campos

August, 2023

Contents

1	Introducció a la Probabilitat	4
1.1	Significat de la Probabilitat	4
1.2	Conceptes Bàsics	4
1.2.1	Experiment Aleatori	4
1.2.2	Espai Mostral	4
1.2.3	Esdeveniment Aleatori	5
1.2.4	Propietats	5
1.2.5	Factorial	5
1.3	Combinatòria	6
1.3.1	La regla del producte	6
1.3.2	Tècniques per comptar	7
1.4	Probabilitat Condicionada	10
1.4.1	Esdeveniments Independents	10
1.4.2	Esdeveniments Dependents	10
1.5	Teoremes	11
1.5.1	Teorema de la Probabilitat Total	11
1.5.2	Teorema de Bayes	11
2	Variables Aleatòries	13
2.1	Definició	13
2.2	Funció de Distribució Acumulada (FDA)	13
2.3	Funció de Densitat de Probabilitat (FDP)	13
2.4	Variables aleatòries discretes	14
2.4.1	Bernoulli	15
2.4.2	Binomial	15
2.4.3	Hipergeomètrica	16
2.4.4	Geomètrica	17
2.4.5	Poisson	17
2.5	FDA y FDP Condicionadas	17
2.6	Variables aleatòries discretes comuns	17
2.7	Variables aleatòries continues comuns	17
3	Paràmetres Estadístics	18
4	Apèndix	19
4.1	Series	19
4.1.1	Serie Aritmètica	19

4.1.2	Serie Geométrica	19
4.2	Funcions	19
4.2.1	Heaviside	19

1 Introducció a la Probabilitat

1.1 Significat de la Probabilitat

La probabilitat és una mesura de la certesa de que un determinat esdeveniment es produeixi. El seu valor és sempre un número entre 0 i 1, on un event impossible correspon a 0 i un de segur correspon a 1.

Distingim dos tipus de processos:

- **Deterministes:** Les condicions del sistema determinen completament el seu comportament. Si repetim l'experiment en les mateixes condicions sempre obtenim el mateix resultat. Per exemple, mesurar amb quina velocitat arriba a terra una pedra deixada caure des de 1m d'alçada.
- **Aleatòris:** Fixades les condicions, el sistema admet més d'un comportament possible. Al repetir l'experiment anem obtenint resultats diferents. Per exemple, tirar un dau.

La probabilitat també es pot interpretar freqüencialment. Siguin:

- \mathcal{E} : un experiment aleatori
- A : un resultat de l'experiment
- N : nombre de vegades que es realitza l'experiment
- N_A : nombre de vegades que succeeix A

Definim la freqüència relativa de A com $f_A = \frac{N_A}{N}$.

Llavors esperem que: $\lim_{N \rightarrow \infty} f_A = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{N_A}{N} = P(A)$

L'expressió diu que si fem moltes vegades l'experiment, f_A hauria de prendre valors molt propers a $P(A)$. Així, una forma empírica d'estimar la probabilitat d'un determinat esdeveniment consisteix en calcular la freqüència amb la que succeeix aquest esdeveniment mitjançant la repetició de l'experiment aleatori, sota condicions suficientement estables.

1.2 Conceptes Bàsics

1.2.1 Experiment Aleatori

\mathcal{E} s'anomena experiment aleatori: experiment que es pot repetir tantes vegades com es vulgui sempre en les mateixes condicions.

1.2.2 Espai Mostral

Ω s'anomena espai mostral i es el conjunt dels possibles resultats d'un experiment aleatori \mathcal{E} .

Exemple 1

- \mathcal{E} = "Tirar una moneda dues vegades"
- $\Omega = \{oo, o+, +o, ++\}$

Exemple 2

- \mathcal{E} = "Tirar un dau"
- $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

1.2.3 Esdeveniment Aleatori

Donat un experiment \mathcal{E} , un esdeveniment aleatori és una proposició lògica A tal que a l'efectuar una prova de \mathcal{E} podem determinar la seva veritat o falsedat. Per tant A es sempre un subconjunt de Ω , $A \in \Omega$. Per abús del llenguatge utilitzem el mateix nom per l'esdeveniment aleatori i el subconjunt que el forma. El complementari d' A , $\Omega - A$, l'anomenem \bar{A} .

S'anomena conjunt buit \emptyset , al esdeveniment impossible.

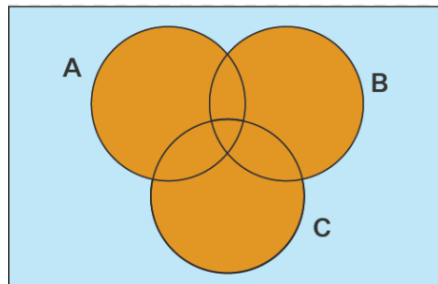
Exemple 1

- \mathcal{E} = "Tirar un dau"
- $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
- A = "Que surti parell" = $\{2, 4, 6\}$
- \bar{A} = "Que no surti parell" = $\{1, 3, 5\}$
- B = "Que surti multiple de 3" = $\{3, 6\}$
- \bar{B} = "Que no surti multiple de 3" = $\{1, 2, 4, 5\}$
- \emptyset = "Treure multiple de 7"

1.2.4 Propietats

Donats els esdeveniments aleatoris A i B , sempre es compleix:

1. $P(\emptyset) = 0$
2. $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$
3. $P(A) \leq 1$
4. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
5. $P(A \cap B) = P(B \cap A) = P(A) \cdot P(B | A) = P(B) \cdot P(A | B)$
6. $P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$



1.2.5 Factorial

Donat m natural, anomenarem factorial de m el producte dels m primers naturals, és a dir, $m! = m \cdot (m - 1) \cdot \dots \cdot 1$

Per notació considerarem $0! = 1$. Observeu que $1! = 1$ i que $m! = m \cdot (m - 1)!$.

1.3 Combinatòria

Per poder calcular les probabilitats més senzilles, la primera cosa que necessitem saber es comptar el nombre de resultats possibles d'un experiment, es a dir, els cardinals de conjunts, $|A|$.

Donal el conjunt $\{A, B, C, D, E, F, G\}$, quantes paraules diferents es poden formar amb aquestes lletres? Abans de respondre, ens hauriem de fer les següents preguntes:

- Paraules de quantes lletres?
- Es poden repetir les lletres?
- Dues paraules amb les mateixes lletres ordenades de manera diferent son la mateixa paraula?

Aquestes son les 3 preguntes bàsiques que ens hem de fer a l'hora de decidir com comptar el nombre de resultats possibles d'un experiment.

1.3.1 La regla del producte

Suposem que hem d'efectuar k tries successives. Si tenim m_1 possibilitats en la primera tria, m_1 possibilitats per a la segona tria, i així successivament, m_k possibilitats per a la k -èsima tria, aleshores el nombre total d'eleccions possibles és de $m_1 \cdot m_2 \cdot m_2 \cdot \dots \cdot m_k$.

Cal esmentar, que utilitzant aquesta tècnica estem suposant separació entre conjunts. Ho veiem en l'exemple.

Exemple

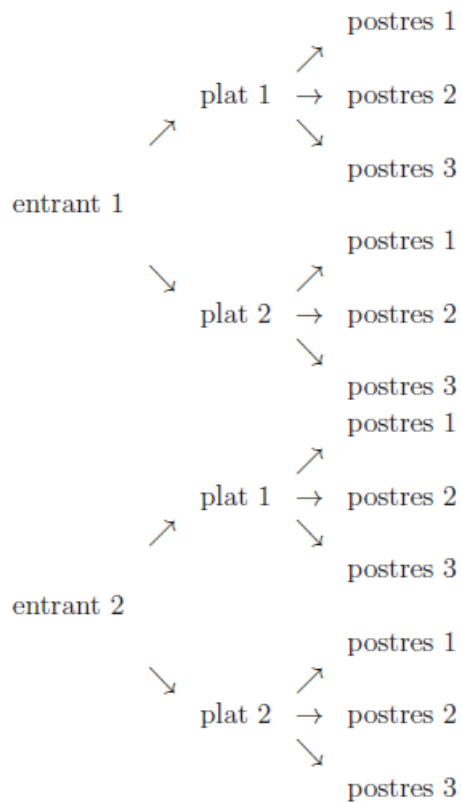
El menú d'un restaurant es compón de 4 primers, 3 segons i 3 postres diferents. Escollint un entrant, un plat i unes postres, quants menús diferents es poden fer?

$$4 \cdot 3 \cdot 3 = 36$$

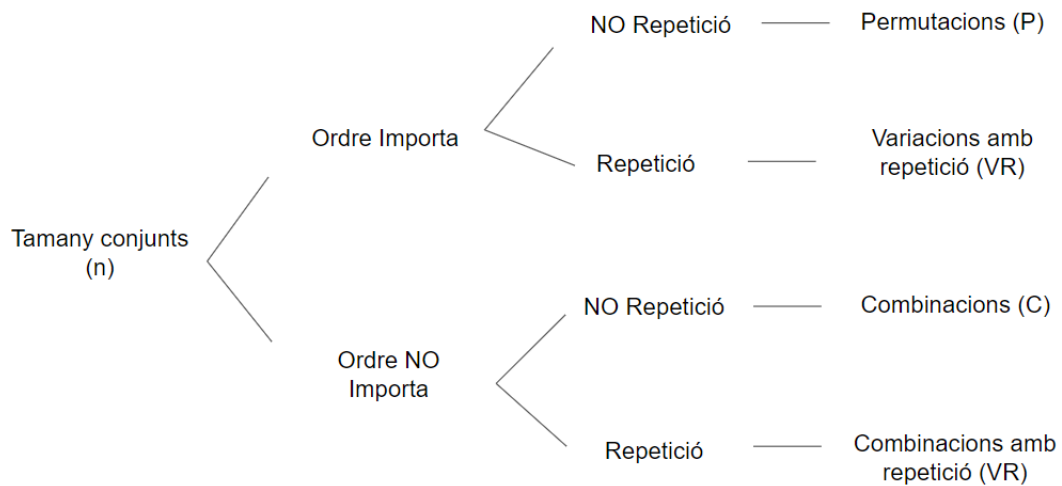
Aquesta tècnica està suposant separació de conjunts, doncs no contempla l'opció d'escollir un primer com a segón. En aquest cas l'operació es complicaria.

Aquests càlculs es poden representar mitjançant arbres de decissió, veiem un arbre amb 2 entrants, 2 plats i 3 postres:

$$2 \cdot 2 \cdot 3 = 12$$



1.3.2 Tècniques per comptar



1.3.2.1 Variacions i Permutacions

Total de grups de tamany k que es poden formar amb m elements **amb ordre i sense repetició**.

$$V_m^k = m \cdot (m-1) \cdot (m-2) \cdot \dots \cdot (m-k+1) = \frac{m!}{(m-k)!}$$

Aquesta formula es dedueix seguint **la regla del producte**. Imaginem una urna amb m boles diferents, quants grups de k elements en podem fer? Seguint la regla del producte, per la primera extracció n'hi ha m elements possibles, per la segona n'hi ha $m - 1$, per la tercera n'hi ha $m - 2$, i així successivament fins a l'extracció k , on tindrem $m - k + 1$ elements possibles.

Permutacions: es obvi però sempre $k \leq m$. En el cas particular $k = m$, parlarem de permutacions de m elements.

$$P_m = m \cdot (m - 1) \cdot (m - 2) \cdot \dots \cdot (m - k + 1) = m \cdot (m - 1) \cdot (m - 2) \cdot \dots \cdot 1 = P_m = m!$$

$$P_m = m!$$

Exemple 1: fem 3 extraccions d'una urna amb 10 boles diferents sense retornar les boles. Quants grups important l'ordre diferents de boles en podem fer?

$$\begin{aligned} V_{10}^3 &= m \cdot (m - 1) \cdot (m - 2) \cdot \dots \cdot (m - k + 1) = \frac{m!}{(m - k)!} \\ &= 10 \cdot 9 \cdot 8 = \frac{10!}{7!} = 720 \end{aligned}$$

Exemple 2: Amb les xifres $\{1, 2, 3, 4, 5\}$, quants nombres de 2 xifres diferents podem escriure sense repetir cap?

$$V_5^2 = 5 \cdot 4 = 20$$

Exemple 3: En una lliga de futbol n'hi ha 20 equips diferents. De quantes maneres pot quedar la classificació final?

$$V_{20}^{20} = P_{20} = 20!$$

Exemple 4: S'han de repartir 2 premis diferents entre els 100 participants d'un sorteig, de quantes maneres diferents es poden repartir?

$$V_{100}^2 = 100 \cdot 99 = 99.000$$

Exemple 5: Quantes paraules diferents de 5 lletres es poden formar amb el conjunt de lletres $\{A, B, C, D, E, F, G\}$ sense repetir-ne cap?

$$V_7^5 = \frac{7!}{5!} = 7 \cdot 6 = 42$$

1.3.2.2 Variacions amb repetició

Total de grups de tamany k que es poden formar amb m elements **amb ordre i amb repetició**.

Imaginem l'exemple de la urna amb m boles diferents, però ara retornant les boles, quants grups de k elements en podem fer? Si apliquem la **regla del producte**:

$$VR_m^k = m^k$$

Exemple 1: fem 3 extraccions d'una urna amb 10 boles diferents retornant les boles. Quants grups important l'ordre diferents de boles en podem fer?

$$VR_{10}^3 = 10 \cdot 10 \cdot 10 = 10^3$$

Exemple 2: Amb les xifres $\{1, 2, 3, 4, 5\}$, quants nombres diferents de 4 xifres podem escriure repetint?

$$VR_5^4 = 5 * 5 * 5 * 5 = 5^4$$

Exemple 3: En una travesa de 14 partits, quantes apostes diferents es poden fer? Tenint en compte que pots apostar 1,2 o x (x=empat)

$$VR_3^{14} = 3^{14}$$

1.3.2.3 Combinacions

Total de grups de tamany k que es poden formar amb m elements **sense importar l'ordre i sense repetició**.

$$C_m^k = \binom{m}{k} = \frac{m!}{k! \cdot (m-k)!}$$

Exemple 1: en una classe de 30 alumnes, quants grups de delegats diferents (3 alumnes) en podem fer?

$$C_{30}^3 = \binom{30}{3} = \frac{30!}{3! \cdot 27!} = \frac{30 \cdot 29 \cdot 28}{6} = 4060$$

Exemple 2: en una barralla de poker (52) cartes, quants grups diferents de 5 cartes es poden fer?

$$C_{52}^5 = \binom{52}{5} = \frac{52!}{5! \cdot 47!} = 2.598.960$$

Exemple 3: s'han de repartir 2 premis iguals entre 100 persones, de quantes maneres es poden repartir?

$$C_{100}^2 = \binom{100}{2} = \frac{100!}{2! \cdot 98!} = \frac{100 \cdot 99}{2} = 4950$$

Exemple 4: Un cambrer té suc de taronja, poma, raïm, pinya, meló i pera. Quants suc diferents pot fer barrejant a parts iguals tres suc diferents?

$$C_6^3 = \binom{6}{3} = \frac{6!}{3! \cdot 3!} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{3} = 20$$

Exemple 5: En una loteria de tipus 6/49 tenim un requadre amb 49 nombres dels quals hem de marcar-ne 6, quantes combinacions diferents en podem fer?

$$C_{49}^6 = \binom{49}{6} = \frac{49!}{6! \cdot 43!} = 13.983.816$$

1.3.2.4 Combinacions amb repetició

Total de grups de tamany k que es poden formar amb m elements **sense importar l'ordre però amb repetició**.

$$CR_m^k = \binom{m+k-1}{k} = \frac{m!}{k! \cdot (m-k)!}$$

Exemple 1: en una barralla de poker (52) cartes, quants grups diferents de 5 cartes es poden fer tenint en compte que retornem les carta a la baralla?

$$CR_{52}^5 = \binom{52+5-1}{2} = \binom{56}{5} = 3.819.816$$

Exemple 2: s'han de repartir 2 premis iguals entre 100 persones, a la mateixa persona li poden tocar els dos premis, de quantes maneres es poden repartir?

$$CR_{100}^2 = \binom{100+2-1}{2} = \binom{101}{2} = \frac{101 \cdot 100}{2} = 5050$$

Exemple 3: Un cambrer té suc de taronja, poma, raïm, pinya, meló i pera. Quants suc diferents pot fer barrejant a parts iguals tres suc (pot repetir)?

$$CR_6^3 = \binom{6+3-1}{3} = \binom{8}{3} = 8 \cdot 7 = 56$$

1.4 Probabilitat Condicionada

1.4.1 Esdeveniments Independents

Diem que dos esdeveniments A i B són independents quan el resultat d'un no afecta al resultat de l'altre. Per exemple, si tirem 2 daus, la primera tirada no afectarà en res a la segona. En canvi, si extraïem 2 cartes d'una baralla sense reemplaçament ja no són independents, doncs les probabilitats de l'extracció de la segona carta es veuran condicionades per la primera extracció.

Per a 2 esdeveniments independents: $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

En conseqüència: $(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \dots \cap A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot \dots \cdot P(A_n)$

1.4.2 Esdeveniments Dependents

Diem que dos esdeveniments A i B són dependents quan el fet de tenir alguna informació sobre el resultat d'un experiment modifica les probabilitats de l'altre.

Per exemple extraïem cartes sense reposició d'una baralla, o la probabilitat de treure un 4 es $1/6$, però si sabem que ha sortit parell la probabilitat es $1/2$.

Donats dos esdeveniments A i B qualsevols:

$$P(A \cap B) = P(B \cap A) = P(A) \cdot P(B | A) = P(B) \cdot P(A | B) \quad (1)$$

$$P(A | B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}, \quad P(B | A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

Propietat important: $P(\overline{A} | B) = 1 - P(A | B)$

Exemple 1: Suposem una extracció de 2 cartes d'una baralla de poker (52 cartes), quina es la probabilitat d'extreure 2 asos.

A = “primera extracció es un a”, B = “segona extracció es un as”

$A \cap B$ = “treure un as en la primera extracció i un as en la segona”

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B | A), \quad P(A) = \frac{4}{52} = \frac{1}{13}, \quad P(B | A) = \frac{3}{51}$$

$$P(A \cap B) = \frac{1}{13} \cdot \frac{3}{51} = 0.00452 = \frac{1}{221}$$

Una altra forma de calcular-ho seria amb Combinatoria:

$$P(A \cap B) = \frac{\text{c.fav}}{\text{c.pos}} = \frac{1 \cdot \binom{4}{2}}{\binom{52}{2}} = 0.00452 = \frac{1}{221}$$

Exemple 2: La pel·lícula “Missió improbable” va ser vista pel 3% dels barcelonins mentre que la segona part “Missió improbable II” ho va ser pel 2%. Sabem que el 60% dels que van veure la segona part havien vist la primera.

- (a) Quina és la probabilitat que una persona triada a l'atzar hagi vist les dues pel·lícules?
 (b) I si sabem que aquesta persona ha vist la primera part?
 (c) I si sabem que aquesta persona n'ha vist alguna?

- $P(A) = 0.03$, A = “haver vist Missió Improbable 1”
- $P(B) = 0.02$, B = “haver vist Missió Improbable 2”
- $P(B | A) = 0.6$, $A | B$ = “haver vist Missió Improbable 1 si has vist Missió Improbable 2”

(a) $P(A \cap B) = P(B) \cdot P(A | B) = 0.02 \cdot 0.6 = 0.012$

(b) $P(B | A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{0.012}{0.03} = 0.4$

(c) $P(A \cap B | A \cup B) = \frac{P((A \cap B) \cap (A \cup B))}{P(A \cup B)} = \frac{P(A \cap B)}{P(A) + P(B) - P(A \cap B)} = \frac{0.012}{0.3 + 0.2 - 0.012} = 0.3157$

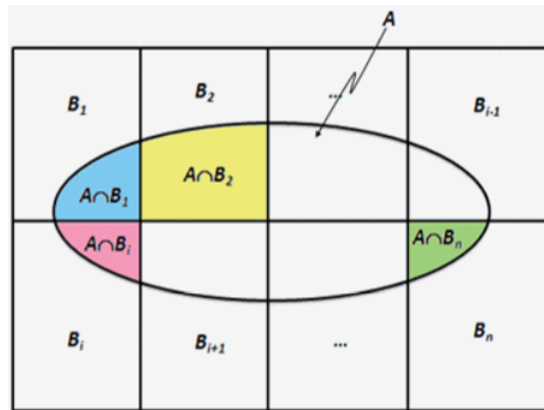
1.5 Teoremes

1.5.1 Teorema de la Probabilitat Total

Considerem A_1, A_2, \dots, A_n una partició de Ω . Per a tot esdeveniment B :

$$P(B) = \sum_{k=1}^n P(B \cap A_k) = \sum_{k=1}^n P(B | A_k) \cdot P(A_k)$$

$$P(B) = P(B | A_1) \cdot P(A_1) + P(B | A_2) \cdot P(A_2) + \dots + P(B | A_n) \cdot P(A_n)$$



1.5.2 Teorema de Bayes

Considerem A_1, A_2, \dots, A_n una partició de Ω . Llavors:

$$P(A_i | B) = \frac{P(B | A_i) \cdot P(A_i)}{\sum_{k=1}^n P(B | A_k) \cdot P(A_k)}$$

Teorema deduible aplicant:

- Probabilitat Total (1.5.1)
- $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B | A)$ (1.4.2)
- $P(A \cap B) = P(B \cap A)$ (1.4.2)

Exemple 1: Una malaltia afecta l'1% de la població. Disposem d'un test que té una probabilitat 0.05 de donar un fals negatiu i 0.02 de donar un fals positiu. Es tria una persona a l'atzar i se li fa el test.

(a) Quina és la probabilitat que el test doni positiu?
 (b) Una persona triada a l'atzar d'ona positiu en el test. Quina és la probabilitat que estigui malalta?

(a) Probabilitat Total (1.5.1)

- $M = \text{"Persona malaltia"}, \bar{M} = \text{"Persona NO malaltia"}, P(M) = 0.01, P(\bar{M}) = 0.99$
- $N = \text{"Test dona negatiu"}, P = \text{"Test dona positiu"}$
- $N | M = \text{"Test dona negatiu i persona malaltia"}, P(N | M) = 0.05$
- $P | \bar{M} = \text{"Test dona positiu i persona NO malaltia"}, P(P | \bar{M}) = 0.002$

$$P(P) = P(P | M) \cdot P(M) + P(P | \bar{M}) \cdot P(\bar{M})$$

$$P = \bar{N}, \quad P(\bar{N} | M) = 1 - P(N | M)$$

$$P(P) = [1 - P(N | M)] \cdot P(M) + P(P | \bar{M}) \cdot P(\bar{M}) = (1 - 0.05) \cdot 0.01 + 0.02 \cdot 0.99 = 0.0293$$

(a) Teorema de Bayes (1.5.2)

$$P(M | P) = \frac{P \cap M}{P(P)} = \frac{P(M) \cdot P(P | M)}{P(P)} = \frac{0.01 \cdot (1 - 0.05)}{0.0293} = 0.324$$

Exemple 2: Tenim 6 urnes $U_k, k = 1, \dots, 6$ contenint U_k k boles blanques i $6 - k$ boles negres. Es tira un dau i s'extreu una bola a l'atzar de la urna corresponent al resultat del dau. Si la bola és blanca, quina és la probabilitat que el dau hagués tret 3?

- $U_k = \text{"treure la bola de la urna } k, P(U_k) = \frac{k}{6}$
- $B = \text{"treure bola blanca"}, \bar{B} = \text{"treure bola negra"}$
- $B | U_k = \text{"treure bola blanca si la urna es } k, P(B | U_k) = \frac{k}{6}$
- $\bar{B} | U_k = \text{"treure bola negra si la urna es } k, P(\bar{B} | U_k) = 1 - P(B | U_k) = 1 - \frac{k}{6}$

Ens estan preguntant $\rightarrow P(U_3 | B)$

Ho podem resoldre directament aplicant el Teorema de Bayes (1.5.2) i Serie Aritmètica (4.1.1):

$$P(U_3 | B) = \frac{P(B | U_3) \cdot P(U_3)}{\sum_{k=1}^6 P(B | U_k) \cdot P(U_k)} = \frac{\frac{3}{6} \cdot \frac{1}{6}}{\frac{1}{36} \cdot \sum_{k=1}^6 k} = \frac{3}{6 \cdot 7} = \frac{1}{7} = 0.143$$

2 Variables Aleatòries

2.1 Definició

Una variable aleatòria és un valor numèric que correspon a un resultat d'un experiment aleatori, del qual no sabem amb certesa el seu resultat, però si el podem modelitzar mitjançant les variables aleatòries. Exemples:

- X = Número de cares obtingudes al llençar una moneda n vegades
 $P(X = 2), P(X = 3), \dots$
- X = Número de vegades que ha sortit 6 llençant un dau n vegades
 $P(X = 1), P(X = 2), \dots$
- X = Possibles resultats llençant un dau 2 vegades
 $P(X = \text{"senar"}), P(X = \text{"sumin 7"}), P(X = \text{"cap 2"}), \dots$
- X = Temperatura màxima mesurada en un día en una ciutat concreta
 $P(X = 37), P(X \geq 20), \dots$
- X = Número de trucades que rep una linea telefónica durant un temps determinat t
 $P(X = 10), P(X \geq 10), \dots$

Per un experiment donat hi ha infinitat de variables aleatòries. Les variables aleatòries són els objectes que utilitzem quan fem un tractament probabilístic d'una situació real i ens ajuden a modelitzar i a estimar aquests processos reals d'una forma probabilística.

2.2 Funció de Distribució Acumulada (FDA)

Donada una variable aleatòria X , definim la seva Funció de Distribució Acumulada (FDA) o a vegades anomenada simplement Funció de Distribució (FD) com:

$$F_X(x) = P(X \leq x)$$

És, per tant, la probabilitat de l'interval $(-\infty, x]$. Si coneixem la funció F_X , queden determinades totes les probabilitats de la variable aleatòria, doncs la FDA evaluada en un número x qualsevol és la probabilitat de que la variable aleatoria prengui un valor menor o igual a x .

Immediatament trobem que donats $a \leq b \rightarrow P(a < X \leq b) = F_X(b) - F_X(a)$.

Propietats:

- $0 \leq F_X(x) \leq 1$
- F_X es una funció sempre creixent

2.3 Funció de Densitat de Probabilitat (FDP)

Donada una variable aleatòria X , definim la funció de Densitat de Probabilitat (FDP) o simplement Funció de Densitat (f_X continua, P_X discreta) com la funció que descriu la probabilitat relativa, segons la qual la qual aquesta variable aleatòria pendrà un determinat valor. Un histograma de probabilitat.

Propietats VA continua:

- $f_X \geq 0$

- $P(X = x_1) = f_X(x_1)$
- $P(a \leq x \leq b) = \int_a^b f_X(x) \cdot dx$
- $F_X(x) = \int_{-\infty}^b f_X(x') \cdot dx'$
- $f_X = \frac{dF_X(x)}{dx}$

Propietats VA Discreta:

- $P_X \geq 0$
- $P(X = k) = P_X(k) = F_X(k) - F_X(k - 1) \rightarrow$ Ho podem veure en la figura (1)
- $P(a \leq X \leq b) = \sum_{k=a}^b P_X(k)$
- $F_X(k) = \sum_{i=-\infty}^k P_X(i)$

2.4 Variables aleatòries discretes

Una variable aleatòria discreta es la que pren un valor finit de valors. Si aquests valors són ordenats: x_1, x_2, \dots, x_n amb probabilitats p_1, p_2, \dots, p_n , F_X és una funció esglaonada que pren valors $0, p_1, p_1 + p_2, \dots, p_1 + \dots + p_{n-1}, 1$. Tota F_X per una variable aleatoria discreta es pot calcular utilitzant la funció de Heaviside $u(x)$ (4.2.1).

$$F_X(k) = \sum_k P(k = i) \cdot u(k - i)$$

$$P_X(k) = F_X(k) - F_X(k - 1)$$

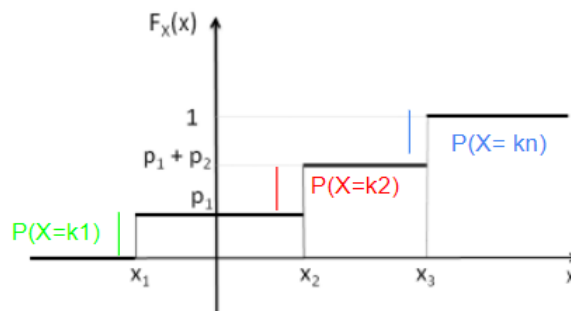


Figure 1: Funció de distribució d'una variable discreta.

A continuació veurem les VA's discretes més importants.

2.4.1 Bernoulli

Essent X una VA, es considera de Bernoulli quan mesura el resultat d'un **experiment aleatòri amb tan sols 2 resultats possibles**, denominats èxit i fracàs.

- $P(\text{"èxit"}) = p$
- $P(\text{"no èxit"}) = P(\text{"fracàs"}) = q = 1 - p$

$$X \sim B(p)$$

2.4.2 Binomial

Essent X una VA, es considera Binomial quan modelitza **exactament el nombre d'èxits** (k) en una seqüència d' n **experiments de Bernoulli independents** entre si, amb una probabilitat d'èxit fixa p i una probabilitat de fracàs fixa q .

$$X \sim BN(n, p)$$

- n : nombre d'experiments de Bernoulli
- p : probabilitat d'èxit
- $q = 1 - p$: probabilitat de fracàs

$$P_X(k) = P(X = k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1 - p)^{n-k}$$

DEM: Suposem el llançament d'una dau no trucat com experiment de Bernoulli a repetir n vegades i VA X el nombre de tresos.

- $p = \frac{1}{6}$
- $q = \frac{5}{6}$

$P(X = k)$ es la probabilitat que hi hagi k tresos en una seqüència de n elements, per tan, k tresos i $n - k$ qualsevol altre numero. Com son independents, la probabilitat d'una seqüència com aquesta és $p^k \cdot q^{n-k}$, ja que per independència anem multiplicant la probabilitat de cada resultat individual.

Ara falt afegir el combinatori $\binom{n}{k}$, que equival al numero de maneres possibles en les que podem ordenar aquesta seqüència, es a dir, situar els k tresos entre la resta de resultats.

NOTA

La **distribució binomial** s'utilitza amb freqüència per a modelitzar exactament el número d'èxits en una mostra de k elements extreta amb **reemplaçament** d'una població d' n . Si les extraccions es realitzen **sense reemplaçament no son independents**, per tant la VA resultant no es una distribució binomial, si no una hipergeomètrica (2.4.3). Tot i això, si $n \gg k$ la distribució binomial segueix essent una bona aproximació, i s'utilitza ampliamment.

NOTA 2

Si en comptes del número d'èxits k , volem calcular k o més èxits, haurem de sumar les probabilitats individuals de cadascuna d'aquestes k . No es necessari extreure la intersecció, doncs si ho pensem en deteniment, de seguida ens adonarem que existeix la intersecció entre 'A' i 'B', doncs no pots tenir alhora tant **exactament** 27 èxits com exactament 28 èxits en 30 assajos. Pots tenir **exactament** 27 o **exactament** 28 però mai els dos a l'hora (intersecció).

2.4.2.1 Algunes Propietats

2.4.2.2 FDA i FDP

2.4.2.3 Paràmetres Estadístics

2.4.2.4 Exemples

2.4.3 Hipergeomètrica

Essent X una VA, es considera Hipergeomètrica quan modelitza el **nombre d'èxits** (k) en una seqüència d' n **experiments de Bernoulli DEPENDENTS** entre si, amb una probabilitat d'èxit fixa p i una probabilitat de fracàs fixa q .

- n : nombre d'experiments de Bernoulli
- N : població total d'elements
- K : elements que pertanyen a la categoria A
- $N - K$: elements que pertanyen a la categoria B

$$X \sim HG(N, K, n), \quad P(X = k) = \frac{\binom{K}{k} \cdot \binom{N-K}{n-k}}{\binom{N}{n}}$$

NOTA: El cas d'ús típic de la VA Hipergeomètrica es quan tenim una població d' n elements, dels quals:

- k pertanyen a la categoria A
- $n - k$ pertanyen a la categoria A

La distribució hipergeomètrica modelitza la probabilitat d'obtenir **exactament** k elements de la categoria A amb extraccions sense reemplaçament.

2.4.3.1 FDA i FDP

2.4.3.2 Paràmetres Estadístics

2.4.3.3 Exemples

POKER FULL

2.4.4 Geomètrica

Essent X una VA, es considera Geomètrica quan modelitza el **nombre total d'intents** fins obtenir el primer **èxit** (k) en una successió d'**esdeveniments independents** de **Bernoulli**, essent p la probabilitat d'èxit.

$$X \sim Geo(p), \quad P(X = k) = p \cdot (1 - p)^{k-1}$$

2.4.4.1 FDA i FDP

2.4.4.2 Paràmetres Estadístics

2.4.4.3 Exemples

2.4.5 Poisson

2.5 FDA y FDP Condicionadas

$$F_X(x | B) = P(X \leq x | B) = \frac{P(X \leq x \cap B)}{P(B)}$$

VA Continua:

- $f_X(x | B) = \frac{dF_X(x | B)}{dx}$
- Aplicant Teorema de Bayes (1.5.2) $\rightarrow f(x | B) = \frac{P(B | X = x) \cdot f_X(x)}{\int_{-\infty}^{\infty} P(B | X = x') \cdot f_X(x') \cdot dx'}$

VA Discreta:

- Aplicat P.Total (1.5.1) $\rightarrow P_X(k) = \sum_{i=1}^n P_X(k | A_i) \cdot P(A_i)$
- Aplicant Teorema de Bayes (1.5.2) $\rightarrow P_X(k | B) = \frac{P(B | X = k) \cdot P_X(k)}{\sum_{i=-\infty}^{\infty} P(B | i) \cdot P_X(i)}$

2.6 Variables aleatòries discretes comuns

2.7 Variables aleatòries continues comuns

3 Paràmetres Estadístics

4 Apèndix

4.1 Series

4.1.1 Serie Aritmètica

$$\sum_{i=1}^n a_i = \frac{n \cdot (a_1 + a_n)}{2}$$

4.1.2 Serie Geomètrica

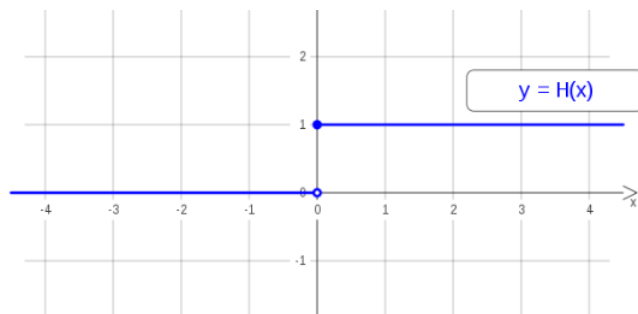
$$S_{n+1} = 1 + r + r^2 + r^3 + \dots + r^n = \sum_{i=0}^n r^i = \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r}$$

$$S_n = r + r^2 + r^3 + \dots + r^n = S_{n+1} - 1 = \sum_{i=1}^n r^i = \frac{r - r^{n+1}}{1 - r}$$

4.2 Funcions

4.2.1 Heaviside

$$u(t) = \begin{cases} 0 & \text{if } t < 0 \\ 1 & \text{if } t \geq 0 \end{cases}$$



$$u(t - a) = \begin{cases} 0 & \text{if } t < a \\ 1 & \text{if } t \geq a \end{cases}$$

