CÁLCULO 1 A1

LIMITES Y CONTINUIDAD

TUTOR: ANDRÉS FELIPE MORANTES ARCINIEGAS
OMNIA VINCIT AMOR.

Límites: Una primera Exploración

Determine la validez de los siguientes enunciados. **Justifique** detalladamente su respuesta.

1. Sean f y g funciones sobre $\mathbb{R}$. Si $\lim_{x\to a}(f(x)+g(x))$ existe , entonces $\lim_{x\to a} f(x), g(x)$ existe.

2. Sean f y g funciones sobre $\mathbb{R}$. Si $\lim_{x\to a}(f(x)g(x))$ existe , entonces $\lim_{x\to a} f(x), g(x)$ existen.

3. Si $\lim_{x\to a}|f(x)|$ existe, entonces $\lim_{x\to a} f(x)$ existe.

4. Sean $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ funciones. Si $\lim_{x\to a} f(x) = L_1$ $\lim_{x\to a} g(x) = L_2$ y $L_1 \leq L_2$, entonces $f(x) \leq g(x) \forall x \in [a, b]$.

Límites: Un paso más allá

1. Sean $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ funciones tales que $\lim_{x\to a} f(x), lim_{x\to a} g(x)$ existen. Defina, $h : [a, b] \to \mathbb{R}$ como
$$h(x) = \max\{f(x), g(x)\}$$
Calcule y explique, qué sería $\lim_{x\to a} h(x)$.

2. Determine si $\lim_{x\to 0} \frac{1}{1+e^x}$ existe.

3. De acuerdo con la siguiente imagen, determine si el límite de la función cuando x tiende a cero existe. Explíque su respuesta.

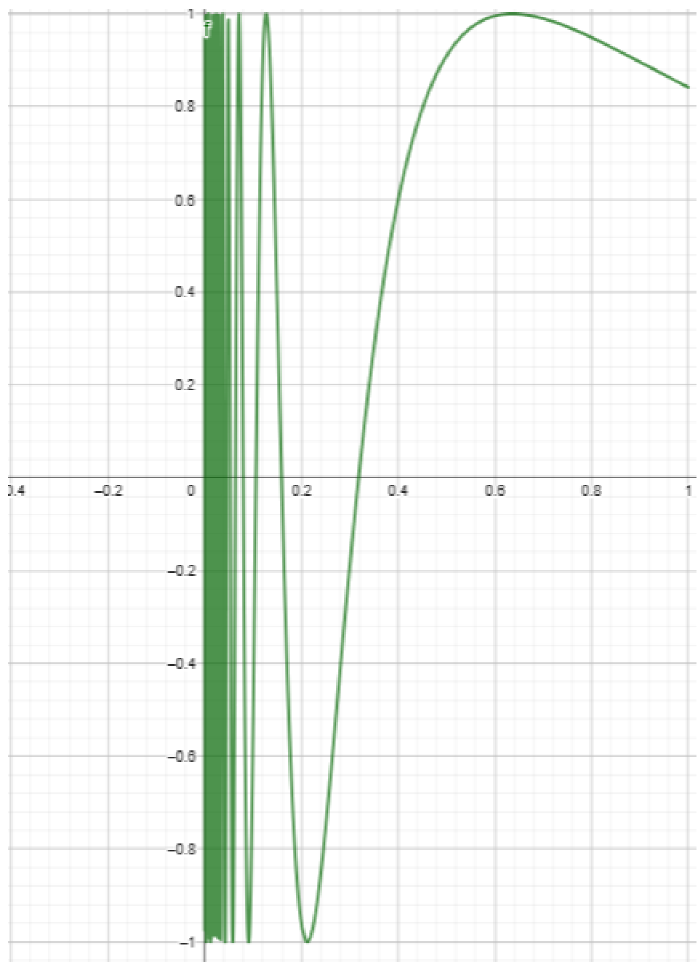

Figura 1: Gráfica

4. Complete el siguiente enunicado

> Si el límite de f cuando x tiende a c es L, entonces el límite de cuando x tiende a $\cdots$ de $f(x+c)$ es también L.

5. Si $f(x) = \frac{1}{4-|x|}$ entonces, f es una función:

   - f es impar y continua en $\mathbb{R}$
   - f es una función par y continua en $(\infty, -4) \cup (-4, 1]$.
   - f es una función impar y continua en $\mathbb{R} \setminus \{-4, 4\}$

6. Calcule $\lim_{x \to -3} f(x)$ si $f(x) = \frac{x^2-9}{\sin(x+3)}$.

7. Calcule

$$\lim_{x \to \infty} x - \frac{1+2x-x^3}{x^2+x-1}$$

8. Determine los valores de r para los cuales la función

$$f(x) = \begin{cases} x^r \sin \dfrac{1}{x}, & \text{si } x \neq 0 \\ 0, & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

es cotinua en 0.

Límites: Para pensar

1. (Verdadero o Falso). Existe una función continua $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(1) \geq 1, f(2) \leq 2$ y $f(x) \neq x \forall x \in \mathbb{R}$.

   Observación 0.1. *Tómese el tiempo de leer y comprender el enunciado del problema. En caso de ser verdadero demuestre, en caso de ser falso muestre por qué no puede ocurrir eso. Luego tómese el tiempo de leer y comprender el **Teorema del valor Intermedio**.*

   Los siguientes límites pueden calcularse **sin usar L'Hopital.**

2. Calcule

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{\cos(x)} - \sqrt[3]{\cos(x)}}{\sin^2(x)}$$

   Observación 0.2. *Aquí haga una sustitución conveniente.*

3. Calcule

$$\lim_{x \to \infty} \frac{4x^2 - \sin(5x)}{x^2 - 7}$$

   Observación 0.3. *Aquí prepare un delicioso Sandwich con chocolisto.*

4. Calcule

$$\lim_{x \to 0} \ln\left(1 - \sin^2(x)\right)$$

   Recuerde que la idea principal del límite es conocer el comportamiento de una función a medida que estamos muy, pero muy cerca de un determinado número. Con esto claro, analice la relación que hay entre las funciones $\ln\left(1 - \sin^2(x)\right)$ y $-\sin^2(x)$.¿Qué se puede decir del comportamiento de dichas funciones alrededor del 0? Para que tenga una idea más concreta grafique dichas funciones en Geogebra.

5. Calcule

$$\lim_{x \to \infty} \left(\frac{x-1}{x+3}\right)^{x+2}$$

Observación 0.4. *No se complique, use alguna de las representaciones de e como límite de una función. Además use propiedades de los exponentes.*

6. Calcule

$$\lim_{x \to 0} (\cos(x))^{\frac{1}{x^2}}$$

Observación 0.5. *Reescriba la función* $(\cos(x))^{\frac{1}{x^2}}$ *en términos de una función más amigable. De ser posible use el ejercicio 4.*

7. Si $\lim_{x \to a} f(x) = 0$ y $\lim_{x \to b} g(x) = 0$, entonces $\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{g(x)}$ no existe.

Límites: Para pensar un poco más

Ahora vamos a indagar sobre discontinuidades en una función, principalmente sus tipos y algunos resultados interesantes al respecto.

1. Caracterice las asíntotas verticales y horizontales de una función en términos de límites.

2. Investigue sobre los tipos de discontinuidades que puede presentar una función. Escriba cada definición asociada a cada discontinuidad, explíquela con sus propias palabras y proporciones tres ejemplos para cada tipo de discontinuidad.

3. Use lo anterior para explicar bajo qué condiciones una función que es discontinua en un punto se puede hacer continua en dicho punto.

4. Suponga que tiene una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que sea creciente y

$$\lim_{x \to c^-} f(x) \quad \lim_{x \to c^+} f(x)$$

existe para cualquier $c \in \mathbb{R}$. Explique por qué en caso de que f sea discontinua en c, dicha discontinuidad sería de tipo salto.

5. Considere la función techo de un número real x definida por

$$\lceil x \rceil = \min\{k \in \mathbb{Z} : x \leq k\}$$

6. Haga el gráfico de dicha función.

7. Determine el conjunto de puntos en los cuales la función techo es discontinua. ¿Qué tipo de discontinuidad posee?

8. Haga la gráfica de la siguiente función en Geogebra. Analice dicha gráfica y proponga una expresión a trozos para la función en cuestión.

$$f(x) = x\lceil\left(\frac{1}{x}\right)\rceil$$

Determine los puntos en los cuales la función f es discontinua.

9. Determine los valores de las constantes a y b que hagan a la función $f(x)$ continua en todo número real. Haga un bosquejo de la gráfica de f.

$$f(x) = \begin{cases} 3x + 6a, & \text{si } x \leq -3 \\ 3ax - 7b, & \text{si } |x| \leq 3 \\ x - 12b, & \text{si } \geq 3 \end{cases}$$

10. (**Verdadero o Falso)** La gráfica de una función racional posee al menos una asíntota vertical.

11. (**Ley de Boyle**) En un gas temperatura constante, la presión P es inversamente proporcional al volumen V. Qué ocurre con la presión cada vez que el volumen disminuye a 0.