Universidad Industrial de Santander
Escuela de Matemáticas
Profesor: Andrés Fabián Leal Archila
Lista 1 del curso **Álgebra Lineal I**
Fecha: 13 de octubre de 2022.

Instrucciones

- Recuerde que esta lista no se entrega, es para estudio personal.

1. Números complejos

Recuerde que z siempre es un número complejo e i es la unidad imaginaria, i.e., $i^2 = -1$. También se define al **conjugado** de un número complejo $z = x + iy$ como el complejo $\overline{z} = x - iy$.

(a) Determine el valor de verdad de las siguientes afirmaciones donde z y $w \in \mathbb{C}$. Si son verdaderas demuestrelas, de lo contrario muestre un contraejemplo.

a) $z\overline{z} = |z|^2$.

b) $|z| = |iz|$.

c) $|z^n| = |z|^n$.

d) Si Re$(w) \neq 0$, arg $\left(\dfrac{z}{w}\right) = \dfrac{\text{arg}(z)}{\text{arg}(w)}$.

e) Si z y w son imaginarios puros, entonces zw es imaginario puro.

f) Si $z \in \mathbb{R}$, entonces arg$(z) = \pi$.

g) Si $z \neq \mathbf{0}$, entonces $\left|\dfrac{z}{|z|}\right| = 1$.

(b) Considere los complejos $z_1 = 1 + 2i$, $z_2 = -2 + 3i$ y $z_3 = 1 - i$. Calcule:

a) $z_1 + z_2 + z_3$.

b) $z_1 z_2 z_3$.

c) $\dfrac{z_1^2 + z_2^2}{z_2^2 + z_3^2}$.

d) $z_1^2 + z_2^2 + z_3^2$.

(c) Encuentre los números reales x, y en cada uno de los siguientes casos:

a) $(1 - 2i)x + (1 + 2i)y = 1 + i$.

b) $\dfrac{x - 3}{3 + i} + \dfrac{y - 3}{3 - i} = i$.

(d) Encuentre la forma polar de los siguientes números complejos. ¿Cuál es el efecto geométrico en el plano complejo de multiplicar y dividir por cada uno? Justifique su respuesta.

a) $z = 3 + i$.

b) $z = -5 - 4i$.

c) $z = 5 - i$.

d) $z = 8$.

(e) Sean $z_1 = 1 + i$, $z_2 = -1 - i$. Encuentre el número complejo z_3 tal que el triángulo z_1, z_2 y z_3 sea equilátero.

(f) Use la fórmula de De Moivre para encontrar las raíces cuartas de los siguientes complejos

a) $z = 2 + 2i$.

b) $z = 18 + 26i$.

c) $z = -27$.

d) $z = -7 + 24i$.

(g) Use la fórmula de De Moivre para encontrar todas las raíces complejas de los siguientes polinomios:

a) $z^4 + 16 = 0$.

b) $z^3 - 27i = 0$.

c) $z^2 - z^2 + 1 = 0$.

d) $z^5 - 1 - i = 0$.

e) $z^7 - 2iz^4 - iz^3 - 2 = 0$.

f) $(2 - 3i)z^6 + 1 + 5i = 0$.

g) $z^{10} + (-2 + i)z^5 - 2i = 0$.

h) $z^4 = 5(z - 1)(z^2 - z + 1)$.

(h) Demuestre que z es real si y solo si es igual a su conjugado.

(i) Demostrar que z es imaginario puro si y solo si z es igual al negativo de su conjugado.

"Si la gente no piensa que las matemáticas son simples, es sólo porque no se dan cuenta de lo complicada que es la vida"
John von Neumann.
