

**Instrucciones:** Para recibir puntos, todo trabajo o razonamiento debe ser mostrado para poder obtener todo el puntaje; no serán asignados puntos parciales. Durante el examen NO está permitido: (i) El préstamo o intercambio de implementos, tales como lápices, lapiceros, borradores, etc. (ii) Realizar preguntas acerca de las respuestas del examen, porque parte de la evaluación es la comprensión de los enunciados. (iii) El uso de teléfonos celulares y calculadoras. Este examen tiene 6 preguntas, con un total de 50 puntos.

1. (6 pts) Determine si la siguiente función es continua en todo su dominio.

$$f(x,y)=\begin{cases} \frac{xy}{x^2+xy+y^2} & \text{si } (x,y)\neq (0,0), \\ 0 & \text{si } (x,y)=(0,0). \end{cases}$$

**Solución:** El dominio de  $f$  es todo  $\mathbb{R}^2$ . Como  $f(x,y)=\frac{xy}{x^2+xy+y^2}$  es una función racional, si  $(x,y)\neq (0,0)$ , entonces  $f$  es continua para todo  $(x,y)\neq (0,0)$ . Veamos la continuidad de  $f$  en  $(0,0)$ . Como a lo largo de cualquier recta  $y=mx$ ,

$$\lim_{(x,y)\rightarrow (0,0)} f(x,y)=\lim_{(x,y)\rightarrow (0,0)} \frac{xy}{x^2+xy+y^2}=\lim_{x\rightarrow 0} \frac{mx^2}{x^2+mx^2+m^2x^2}=\frac{m}{1+m+m^2}=\begin{cases} 0 & \text{si } m=0, \\ \frac{1}{3} & \text{si } m=1, \end{cases}$$

los limites no son iguales, entonces el límite de  $f(x,y)$  en  $(0,0)$  no existe. Entonces  $f$  es continua en todo punto  $(x,y)\in \mathbb{R}^2$ , excepto en  $(0,0)$ ; es decir,  $f$  no es continua en todo su dominio.

2. (4 pts) Determine si el conjunto de nivel 1 del campo escalar  $f(x,y)=\ln(x^2+2y^2)$  es o no una elipse.

**Solución:** La ecuación del conjunto de nivel es  $\ln(x^2+2y^2)=1$ , de lo cual se sigue que

$$x^2+2y^2=e\implies \frac{x^2}{e}+\frac{y^2}{e/2}=1,$$

lo cual es la ecuación de una elipse. Por lo tanto, este conjunto de nivel de  $f$  si es una elipse.

3. (7 pts) Sea  $z=y+f(x^2-y^2)$ , donde  $f$  es una función de una variable diferenciable. Demuestre que  $y\frac{\partial z}{\partial x}+x\frac{\partial z}{\partial y}=x$ .

**Solución:** Sea  $u=x^2-y^2$ . De la regla de la cadena tenemos que

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial x} &= \frac{\partial (y+f(u))}{\partial x} = \frac{\partial f(u)}{\partial x} = f'(u)\frac{\partial u}{\partial x} = 2xf'(x^2-y^2) && \Leftarrow y \\ \frac{\partial z}{\partial y} &= \frac{\partial (y+f(u))}{\partial y} = 1 + \frac{\partial f(u)}{\partial y} = 1 + f'(u)\frac{\partial u}{\partial y} = 1 - 2yf'(x^2-y^2) && \Leftarrow x \end{aligned}$$

Se obtiene el resultado de la suma de la multiplicación de la primera ecuación por  $y$  y de la segunda ecuación por  $t$ .

4. (9 pts) Calcule las dimensiones de una caja rectangular de máximo volumen que está acotada en el primer octante por los planos coordenados y el plano de ecuación  $x+2y+z=6$ .

**Solución: Primer método:** Sean  $x$  el largo,  $y$  el ancho,  $z$  el alto y  $V$  el volumen de la caja, las cuales son variables de valores positivos. Como debemos considerar la caja con vértices en  $(0,0,0)$  y el punto  $(x,y,z)$  del plano, entonces se tiene que debemos resolver el problema de optimización

$$\begin{aligned} \text{máx} \quad & V = xyz \\ \text{restr.} \quad & x+2y+z=6 \end{aligned}$$

Resolvemos este problema mediante el método de multiplicadores de Lagrange, lo cual implica resolver el siguiente problema:

$$(V_x = \lambda g_x) \quad yz = \lambda \tag{1}$$

$$(V_y = \lambda g_y) \quad xz = 2\lambda \tag{2}$$

$$(V_z = \lambda g_z) \quad xy = \lambda \tag{3}$$

$$(g = 32000) \quad x+2y+z=6 \tag{4}$$

Resolviendo,

$$\text{De (1) - (2) : } 2yz = xz \quad \Rightarrow x = 2y \quad (5)$$

$$\text{De (2) - (3) : } xz = 2xy \quad \Rightarrow z = 2y \quad (6)$$

$$\text{De (4) a (6) : } 2y + 2y + 2y = 6 \Rightarrow y = 1 \Rightarrow x = z = 2$$

Luego, las dimensiones requeridas de la caja son 20 unidades de largo y alto, y 2 unidades de ancho.

**Segundo método:** Este problema de optimización con restricciones en tres variables se puede reducir a uno sin restricciones en dos variables. En efecto, resolviendo la restricción para  $z$  y reemplazando en la función a ser maximizada, obtenemos los problemas de encontrar  $x, y$  y  $z$  positivos y tales que

$$z = 6 - x - 2y$$

$$\text{máx} f(x, y) = xy(6 - x - 2y) = 6xy - x^2y - 2xy^2$$

Encontramos los puntos críticos de  $f$  al resolver el sistema de ecuaciones no lineales,

$$(f_x = 0) \quad 6y - 2xy - 2y^2 = 2y(3 - x - y) = 0$$

$$(f_y = 0) \quad 6x - x^2 - 4xy = x(6 - x - 4y) = 0.$$

Como los valores de  $x, y$  son positivos, los valores de  $x, y$  se obtienen como la solución del sistema de ecuaciones lineales

$$x + y = 3$$

$$x + 4y = 6,$$

cuya solución es  $(x, y) = (2, 1)$ . Entonces,  $z = 2$ ; la cual es la misma solución obtenida anteriormente.

A fin de establecer que  $(2, 1)$  es un máximo relativo de  $f$ , consideremos su matriz hessiana evaluada en este punto:

$$H = H(2, 1) = \begin{bmatrix} -2y & -4y - 2x + 6 \\ -4y - 2x + 6 & -4x \end{bmatrix}_{(2,1)} = \begin{bmatrix} -2 & -2 \\ -2 & -8 \end{bmatrix}$$

Como  $|h_1| = -2 < 0$  y  $|h_2| = \det(H) = 12 > 0$ , del criterio de la segunda derivada para campos escalares se sigue que  $f(2, 1) = 4$  es un máximo relativo de  $f$ . Por lo tanto,  $x = z = 2, y = 1$  son las soluciones del problema de optimización con restricciones propuesto.

5. (12 pts) Use el cambio de variable  $x = u/v, y = v$  para evaluar la integral  $\iint_D xy \, dA$ , en donde  $D$  es la región en el primer cuadrante acotada por las rectas de ecuación  $y = x$  y  $y = 3x$ , y las hipérbolas de ecuación  $xy = 1$  y  $xy = 3$ .

**Solución:** El jacobiano de la transformación es

$$\left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{1}{v} & -\frac{u}{v^2} \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{v} \neq 0$$

La transformación de las rectas e hipérbolas dadas es la siguiente:

$$y = x \Rightarrow v = \frac{u}{v} \Rightarrow v^2 = u \Rightarrow v = \sqrt{u},$$

$$y = 3x \Rightarrow v = \frac{3u}{v} \Rightarrow v^2 = 3u \Rightarrow v = \sqrt{3u},$$

$$xy = 1 \Rightarrow \frac{u}{v}v = 1 \Rightarrow u = 1,$$

$$xy = 3 \Rightarrow \frac{u}{v}v = 3 \Rightarrow u = 3.$$

Entonces, el dominio  $D^*$  de la transformación dada es la región del plano  $uv$

$$D^* : 1 \leq u \leq 3, \sqrt{u} \leq v \leq \sqrt{3u}.$$

Como la transformación está definida de  $D^*$  en  $D$  y cumple con las condiciones del Teorema de cambio de variable, entonces tenemos que

$$\begin{aligned} \iint_D xy \, dA &= \iint_{D^*} \frac{u}{v} v \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| du \, dv = \iint_{D^*} \frac{u}{v} du \, dv \\ &= \int_1^3 \int_{\sqrt{u}}^{\sqrt{3u}} \frac{u}{v} dv \, du = \int_1^3 u \left[ \ln(\sqrt{3u}) - \ln \sqrt{u} \right] du = -\frac{153 \ln(3) - 36}{72}. \end{aligned}$$

6. (12 pts) Utilice integrales triples para encontrar el volumen del sólido que se encuentra abajo de la esfera de ecuación  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$  y arriba del cono de ecuación  $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ .

**Solución:** Sea  $\Omega$  el sólido entre estas dos superficies, la cual es una región sólida elemental de tipo I. La intersección de estas dos superficies en el plano  $xy$  es la curva de ecuación  $2(x^2 + y^2) = 1$ . Entonces la proyección de  $\Omega$  sobre el plano  $xy$  determina la región plana elemental  $D$  de tipo I,  $x^2 + y^2 \leq 1/2$ , la cual es una región polar en el plano  $xy$ . Entonces, al sólido dado lo podemos representar de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \Omega : (x, y) \in D, \sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq \sqrt{1 - x^2 - y^2} \\ : x = r \cos \theta, y = r \sin \theta, r \leq z \leq \sqrt{1 - r^2}, \quad 0 \leq r \leq \sqrt{2}/2, 0 \leq \theta \leq 2\pi. \end{aligned}$$

Entonces,

$$\begin{aligned} \text{vol}(\Omega) &= \iiint_{\Omega} dV = \iint_D \int_{\sqrt{x^2 + y^2}}^{\sqrt{1 - x^2 - y^2}} dz dA = \int_0^{\sqrt{2}/2} \int_0^{2\pi} \int_r^{\sqrt{1 - r^2}} r dz d\theta dr \\ &= \int_0^{\sqrt{2}/2} \int_0^{2\pi} (r\sqrt{1 - r^2} - r^2) d\theta dr = 2\pi \int_0^{\sqrt{2}/2} (r\sqrt{1 - r^2} - r^2) dr = 2\pi \left( \frac{1}{3} - \frac{1}{3\sqrt{2}} \right). \end{aligned}$$