,

Universidad Industrial de Santander

Universidad Industrial de Santander
Escuela de Matemáticas
ÁLGEBRA LINEAL I
18 de junio de 2025

LISTA DE EJERCICIOS #1.
Números complejos
Teorema fundamental del álgebra
Prof. Jorge E. Gómez Ríos

Instrucciones

Autonomía y colaboración: Dedique el tiempo necesario para resolver los ejercicios por su cuenta, pero también comparta y discuta ideas con sus compañeros. Al finalizar, realice una autoevaluación.

Claro, simple y completo: Al presentar sus ideas y argumentos, hágalo con la mayor claridad, sencillez y exhaustividad posible. Asegúrese de usar correctamente la nomenclatura y terminología matemática, y organice sus soluciones de forma completa y precisa.

Uso de herramientas computacionales: Utilice software especializado para agilizar y verificar sus cálculos con precisión.

Integridad académica: Este taller no tiene como objetivo memorizar respuestas o coleccionar soluciones de otras personas. Su aprendizaje es lo más valioso, por lo que cada respuesta o solución debe ser el resultado de su propio razonamiento y comprensión. Copiar o utilizar el trabajo de otros no solo desvaloriza sus habilidades, sino que también priva de la oportunidad de aprender y crecer.

Disfrute del taller y del proceso de aprendizaje. Cada ejercicio es una oportunidad para expandir su conocimiento y desarrollar sus habilidades matemáticas.

Números Complejos

1. Sea $z = 1 - i$ y $w = 1 + \sqrt{3}i$. Expresar en la forma rectangular y polar los resultados de las siguientes operaciones

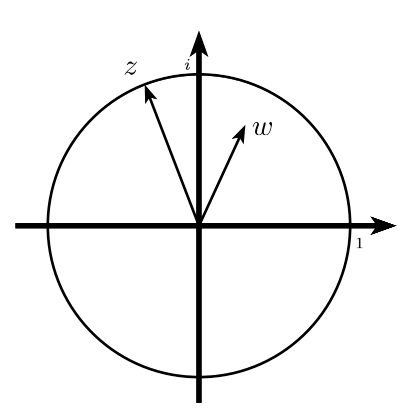
   (a) $z + iw$
   (b) $\dfrac{z}{w}$
   (c) $\dfrac{zw}{z-1}$
   (d) z^{2023}
   (e) $\dfrac{z^2-1}{\overline{w}^3}$
   (f) $\overline{zw} - 10z^{-1}$
   (g) $\sqrt{w}$
   (h) $\sqrt[5]{z}$
   (i) $1 + z^2 + z^3 + \cdots + z^{100}$

2. Para cada uno de los siguientes literales grafique en el plano complejo el conjunto de números complejos z que cumplen la condición dada

   (a) $\mathrm{Re}(z) > 0$
   (b) $\mathrm{Im}(z) \leq 1$
   (c) $\mathrm{Re}(z) + \mathrm{Im}(z) = 0$
   (d) $\mathrm{Re}(z) + \mathrm{Im}(z) < 2$
   (e) $|\mathrm{Re}(z)| < 1$
   (f) $\mathrm{Arg}(z) = -\frac{\pi}{3}$
   (g) $\mathrm{Arg}(z) = \frac{\pi}{3}$ o $\mathrm{Arg}(z) = -\frac{2\pi}{3}$
   (h) $0 \leq \mathrm{Arg}(z) \leq \frac{\pi}{2}$
   (i) $\frac{\pi}{4} \leq \mathrm{Arg}(z) \leq \frac{3\pi}{4}$ y $|z| < 1$

3. Muestre que la circunferencia de radio 1 centrada en el origen es el conjunto de puntos en el plano complejo que satisfacen $|z| = 1$.

4. En la figura se representan los números complejos z y w en el plano complejo. Úsela para bosquejar los números complejos dados en los siguientes literales.



a) zi

b) $\left(-\sqrt{2}+\sqrt{2}i\right) z$

c) $z\left(2\sqrt{3}+2i\right)$

d) $z\left(1+\sqrt{3}i\right)$

e) $z+i$

f) $z+(2-3i)$

g) $\overline{z}$

h) $-z$

i) $\dfrac{1}{z}$

j) z^2

k) z^3

l) $-\dfrac{1}{z^2}+i$

m) Los anteriores cambiando z por w.

n) zw

ñ) $z+w$

o) $\overline{z+w}$

p) $\overline{z}+\overline{w}$

5. Explique por qué en el plano complejo multiplicar por $1+\sqrt{3}i$ significa duplicar el módulo y girar $60°$ en sentido antihorario.

6. ¿En qué cuadrante se grafica el complejo $\left(\sqrt{3}+i\right)^{100}$?

7. Encuentre las raíces octavas de la unidad y grafíquelas en el plano complejo.

8. Determine todos los números complejos cuyo cubo es igual a $-1+i$.

9. Encuentre las soluciones complejas de cada ecuación

   (a) $(3-2i)\cdot z=8-i$

   (b) $(2+3i)z+4-5i=7+6i$

   (c) $2z^2-z=-1$

   (d) $(2+3i)z^2+(4-5i)z-5+13i=0$

   (e) $z^6+i=0.$

   (f) $z^5-1-i=0.$

   (g) $z^4-z^2+1=0.$

10. Determinar (de ser posible) el valor de $k\in\mathbb{R}$, tal que $\dfrac{2-ki}{k-1}$ sea:

    (a) Imaginario puro.

    (b) Real.

11. Determinar los valores de $a,b\in\mathbb{R}$, tales que $\dfrac{a+3bi}{1+i}=5+i$

12. ¿Cuántos números enteros n entre 1 y 100 satisfacen la ecuación $i^n+i^7=0$?

13. En el plano complejo $2+2i$ es el centro de un cuadrado y $5+5i$ uno de sus vértices. Determinar:

    (a) Los otros vértices del cuadrado.

    (b) El área y el perímetro del cuadrado.

14. Probar que $\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$ es una raíz cúbica de 1.

15. Hallar todos los complejos que cumplan que $\overline{z}=z^2$.

16. Resolver el sistema de ecuaciones con variables complejas

$$\begin{cases} z_1+iz_2=1\\ iz_1+z_2=1+i\end{cases}$$

17. ¿Falso o Verdadero? Para cada una de las siguientes afirmaciones determine si es verdadera o falsa. Justifique su respuesta de manera clara y fundamentada en hechos o principios previamente aceptados. **Nota:** En los siguientes enunciados $z,w\in\mathbb{C}$.

    a) $z=\overline{z}$ si y solo si $\mathrm{Im}(z)=0$.

    b) $\overline{z}=-z$ si y solo si $\mathrm{Re}(z)=0$.

    c) Si $\mathrm{Im}(z)=0$, entonces $z^{-1}=-z$.

    d) Si $\mathrm{Re}(z)=\mathrm{Im}(z)$, entonces $|z|=\mathrm{Re}(z)\sqrt{2}$.

    e) $z\overline{z}=|z|^2$.

    f) $|z|=|iz|$.

    g) $\overline{z+w}=\overline{z}+\overline{w}$.

    h) $\overline{zw}=\overline{z}\cdot\overline{w}$.

    i) $|zw|=|z||w|$.

    j) $|z+w|=|z|+|w|$.

    k) $|z^n|=|z|^n$.

    l) $|z|=|\overline{z}|$.

    m) Si $w\neq 0$, $\left|\dfrac{z}{w}\right|=\dfrac{|z|}{|w|}$.

    n) Si $w\neq 0$, $\overline{\left(\dfrac{z}{w}\right)}=\dfrac{\overline{z}}{\overline{w}}$.

    ñ) $\mathrm{Arg}\left(z^n\right)=n\cdot\mathrm{Arg}(z)$.

o) $\mathrm{Arg}(zw) = \mathrm{Arg}(z) + \mathrm{Arg}(w)$.

p) Si $w \neq 0$, $\mathrm{Arg}\left(\dfrac{z}{w}\right) = \mathrm{Arg}(z) - \mathrm{Arg}(w)$.

q) $\mathrm{Arg}(z) = \mathrm{Arg}(\overline{z})$.

r) Si $\mathrm{Re}(w) \neq 0$, $\mathrm{Arg}\left(\dfrac{z}{w}\right) = \dfrac{\mathrm{Arg}(z)}{\mathrm{Arg}(w)}$.

s) Si z y w son imaginarios puros, entonces zw es imaginario puro.

t) Si z es imaginario puro, entonces $\mathrm{Arg}(z) = \dfrac{\pi}{2}$.

u) Si $z \in \mathbb{R}$, entonces $\mathrm{Arg}(z) = 0$.

v) $\mathrm{Re}(re^{i\theta}) = \cos\theta$.

w) Si $z \neq 0$, entonces $\left|\dfrac{z}{|z|}\right| = 1$.

x) Si $z \in \mathbb{C}$ y $\mathrm{Arg}(-z) = -\mathrm{Arg}(z)$, entonces z es imaginario puro.

y) Si z y w son dos complejos diferentes que no son números reales, entonces su producto no puede ser un número real.

z) Si z_0 es una raíz cuarta de z, entonces las demás raíces cuartas de z se obtienen multiplicando a z_0 por i. repetidamente.

Retos-Opcionales

Reto 1. En el plano complejo, sea A el conjunto de las soluciones de la ecuación $z^3 - 8 = 0$ y B el conjunto de las soluciones de la ecuación $z^3 - 8z^2 - 8z + 64 = 0$. Cuál es la mayor distancia entre un punto de A y un punto de B?

Reto 2. Probar que si dos números complejos z_1 y z_2 cumplen que $|z_1 - z_2| = |z_1 + z_2|$ y $z_2 \neq 0$, entonces el cociente $\dfrac{iz_1}{z_2}$ es un número real.

Reto 3. Sea z un número complejo que satisface la ecuación

$$z^2 = 4z + |z|^2 + \frac{16}{|z|^3}.$$

Determinar cuál es el valor de $|z|^4$.

Reto 4. Use la fórmula de Euler para demostrar que

$$\cos(xi) = \frac{e^{-x} - e^{x}}{2},$$
$$\mathrm{sen}(xi) = \frac{e^{-x} + e^{x}}{2i}.$$

Luego,

(a) Calcule $\cos(3i)$ y $\mathrm{sen}\left(\ln(2)i\right)$.

(b) Consulte qué son las funciones coseno hiperbólico y seno hiperbólico, y relacione su consulta con lo demostrado.

(c) Si z es un número complejo, halle la parte real y la parte imaginaria de $\mathrm{sen}(z)$.

(d) Calcule $\mathrm{sen}(1 + i)$.

Reto 5. Calcular $\sqrt{i}$, $\cos(i)$, $\mathrm{sen}(i)$, i^i.

Reto 6. Sean z y w dos números complejos, muestre que

$$\mathrm{Re}\left(\frac{z}{z+w}\right) + \mathrm{Re}\left(\frac{w}{z+w}\right) = 1.$$

Reto 7. Si $z = \dfrac{1+i}{\sqrt{2}}$, ¿cuál es el valor de

$$\left(z^{1^2} + z^{2^2} + z^{3^2} + \cdots + z^{12^2}\right)\left(\frac{1}{z^{1^2}} + \frac{1}{z^{2^2}} + \frac{1}{z^{3^2}} + \cdots + \frac{1}{z^{12^2}}\right)?$$

Teorema Fundamental del álgebra

1. Encuentre un polinomio con coeficientes reales, del menor grado posible, de modo que los números dados sean raíces.

(a) 1, 2, 3 (b) $2, -i, i$ (c) $0, -1, 1-i$ (d) $\frac{1}{2}, -3i, 2+i.$

2. ¿Cuántos polinomios de grado 2 poseen las mismas raíces? ¿Cuántos de ellos son mónicos?

3. En cada literal se da un polinomio y una de sus raíces, encuentre todas las raíces del polinomio.

   (a) $p(x) = 90 - 54x + 19x^2 - 6x^3 + x^4$, raíz: $3+i$.

   (b) $q(x) = x^4 - 6x^3 + 71x^2 - 146x + 530$; raíz: $2+7i$.

4. Encuentre todas las raíces y factorice el polinomio dado.

   (a) $p(x) = 3x^2 - 2x + 1$.

   (b) $q(x) = x^4 + x^3 - 2x^2 + 4x - 24$

   (c) $f(x) = x^5 + 11x^3 + 18x$

   (d) $h(x) = x^6 + 2$

5. Encuentre el polinomio P con coeficientes reales, de menor grado que satisfaga las condiciones dadas

   (a) Los números -3 y $2-5i$ son raíces de P; la gráfica de P pasa por el punto $(0,-2)$.

   (b) 1 es una raíz de P con multiplicidad 4; la gráfica de P pasa por el punto $(-1,10)$.

   (c) Los números $3i$, y 2 son raíces de P y $P(3) = 27$.

   (d) El coeficiente constante de P es 1 y algunas de sus raíces son 3 y $1-2i$.

6. Considere el polinomio P con coeficientes reales, de menor grado, tal que -1 es un raíz doble, 2 es una raíz triple, $1+i$ es una raíz simple y la gráfica pasa por el punto $(1,2)$.

   (a) ¿Cuál es el grado de P?

   (b) Determine explícitamente a $P(x)$

   (c) ¿Cuál es la suma de los coeficientes de P?

   (d) ¿Cuál es el coeficiente independiente de P?

7. Si $x = 2$ es una raíz de $P(x) = 3x^2 + 4kx + 4$. ¿Cuál es el otro valor donde $P(x)$ se hace cero?

8. Deduzca el valor numérico de a y b en la expresión $(x-3)(x+a) = x^2 + bx + 9$.

9. Encuentre el valor numérico de a y b sabiendo que a y 1 son raíces del polinomio $P(x) = 6x^2 + bx + 3$.

10. ¿Para cuáles valores de m el polinomio $P(x) = m^2x^2 + 2(m+1)x + 4$ posee exactamente una raíz diferente?

11. Si $x = 2$ es una raíz del polinomio $P(x) = 3x^3 - 2ax - 4$, es decir $P(2) = 0$; ¿cuál es el valor de $P(1)$?

12. Si a y b son las raíces del polinomio $2x^2 + 3x + 2$, ¿cuál es el valor de $(2-a)(2-b)$?

13. ¿Si las raíces del polinomio $P(x) = 2x^3 - bx^2 - 3x - d$, son r, $-r$ y 3, ¿cuál es el valor numérico de $b+d$?

14. Sea P un polinomio tal que la suma de sus coeficientes es 10 y el coeficiente independiente (constante) es -2. Si además $P(x-3) = P(x-4) + 2a$, ¿cuál es el valor de a?

15. Si i y $1+i$ son algunas de las raíces de un polinomio P de grado 4, tal que $P(2) = 1$, ¿cuál es la suma de los coeficientes de P?

16. Si r_1, r_2 y r_3 son las raíces del polinomio cúbico $P(x) = x^3 + 3x^2 + 4x - 4$, halle el valor de $r_1r_2 + r_1r_3 + r_2r_3$.

17. Si a, b y c son las raíces del polinomio $P(x) = x^3 - 2x^2 - 3x + 8$, ¿cuál es el valor de $a^2 + b^2 + c^2$?

18. Si a, b, c y d son las raíces el polinomio $P(x) = 2x^4 + 5x^3 - 21x^2 + 5x + 2$, ¿cuál es el valor de

$$a + b + c + d - \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d}\right)?$$

19. Factorizar cada uno de los siguientes polinomios:

   a) $P(x) = 2x^3 - x^2 - 18x + 9$,

   b) $Q(x) = x^4 - 4x^3 + 3x^2 + 4x - 4$,

   c) $R(x) = x^5 - 3x^4 + 2x^3 - 6x^2$.

20. Determine un polinomio $P(x)$ de grado 3 tal que $P(0) = P(-1) = P(-2) = 1$ y $P(1) = 7$.

21. Determine todos los posibles valores enteros de $n > 0$ distintos para los cuales la ecuación $x^2 - 13x + n = 0$ tiene sus dos raíces enteras.

22. Sean a y b las raíces de la ecuación $x^2 - mx + 2 = 0$. Suponga que $a + \frac{1}{b}$ y $b + \frac{1}{a}$ son las raíces de la ecuación $x^2 - px + q = 0$. ¿Cuál es el valor de q?

23. Sean a, b y c las raíces del polinomio $P(x) = x^3 - 11x^2 + 23x + 35$. ¿Cuál es el resultado de la expresión $abc + 2ab + 2ac + 2bc + a + b + c$?

24. Sea $P(x) = ax^2 + bx + c$ un polinomio cuadrático.

    (a) Muestre que $P(x)$ puede escribirse de la forma

    $$P(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{1}{4a}(b^2 - 4ac).$$

    (b) Use el ítem (a) para dar una fórmula general que permita hallar las raíces de un polinomio cuadrático. ¿Le es familiar tal expresión?

25. ¿Falso o Verdadero? Para cada una de las siguientes afirmaciones determine si es verdadera o falsa. Justifique su respuesta de manera clara y fundamentada en hechos o principios previamente aceptados.

    a) Todo polinomio de grado n tiene exactamente n raíces diferentes.

    b) Si un polinomio tiene coeficientes reales, entonces todas sus raíces deben ser números reales.

    c) Existe un polinomio con coeficientes reales y grado 7 tal que ninguna de sus raíces es un número real.

    d) Todo polinomio de grado n tiene exactamente n raíces reales.

    e) Si un polinomio tiene coeficientes reales, entonces la suma de sus raíces siempre es un número real.

    f) Si un polinomio tiene coeficientes complejos, el producto de sus raíces es un número complejo no real.

    g) El producto de las raíces de cualquier polinomio es el coeficiente independiente del polinomio.

    h) Si los números 3 y $1+i$ son raíces de un polinomio con coeficientes complejos, entonces grado mínimo del polinomio es 3.

    i) Si los números i, -3 y $1+i$ son raíces de un polinomio con coeficientes reales, entonces grado mínimo del polinomio es 5.

    j) Si $P(x)$ es un polinomio con coeficientes complejos y z_0 es una raíz de $P(x)$, entonces $\overline{z_0}$ también es una raíz de $P(x)$.

    k) Si $P(x)$ es un polinomio con coeficientes reales y z_0 es una raíz de $P(x)$, entonces $\overline{z_0}$ también es una raíz de $P(x)$.

Retos-Opcionales

Reto 1. Halle el coeficiente principal y el grado del polinomio:

$$\prod_{n=1}^{1000} (1+2x)^n = (1+2x)(1+2x)^2(1+2x)^3 \cdots (1+2x)^{1000}.$$

Reto 2. Si a, b y c son las raíces del polinomio $P(x) = x^3 - 2x^2 - 9$, y $Q(x) = x^2 - 1$, hallar el valor numérico de $Q(a)Q(b)Q(c)$.

Reto 3. Considere el polinomio $P(x) = x^{1000} + x - 1$.

(a) ¿Cuántas de las raíces de $P(x)$ son números reales?

(b) Si $r_1, r_2, \ldots, r_{1000}$ son todas las raíces de $P(x)$, reales y complejas, calcule la suma:

$$(r_1)^{1000} + (r_2)^{1000} + \cdots + (r_{1000})^{1000}.$$

Reto 4. Dado que $\left(x^2 + 2x + 1\right)^{50} = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_{99}x^{99} + a_{100}x^{100}$, calcular:

(a) a_0

(b) $a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_{99} + a_{100}$.

(c) $a_0 + a_2 + a_4 + \cdots + a_{98} + a_{100}$.

(d) $a_1 + a_3 + a_5 + \cdots + a_{97} + a_{99}$.

$\boxed{\textbf{Reto } 5.}$ ¿Cuál es el coeficiente de x^{2019} en la expansión del polinomio

$$\left(1 + x + x^2 + \cdots + x^{2018}\right)\left(1 + x + x^2 + \cdots + x^{1009}\right)^2?$$

$\boxed{\textbf{Reto } 6.}$ ¿Para qué número real a la suma de los cuadrados de las raíces del polinomio $P(x) = x^2 - a(x - 1) + x - 3$ es mínima?

$\boxed{\textbf{Reto } 7.}$ ¿Cuántos polinomios de grado n cuyos coeficientes son todos, en valor absoluto, iguales a 1, tienen al 1 como raíz?

$\boxed{\textbf{Reto } 8.}$ Sean a, b y c números reales positivos con $a < b < c$ tales que $a + b + c = 12$, $a^2 + b^2 + c^2 = 50$ y $a^3 + b^3 + c^3 = 216$. Halle $a + 2b + 3c$.

$\boxed{\textbf{Reto } 9.}$ Las raíces de la ecuación $x^4 - (m + 4)x^2 + 4m = 0$ están en progresión aritmética. Determine los valores posibles de m.