Universidad Industrial de Santander

**Facultad de Ciencias**

**Escuela de Matemáticas**

**Examen final**

**Cálculo III**

**24 de julio de 2023**

Nombre: ______________________ Código: ____________ Grupo: ______

**Lea con atención las siguientes instrucciones**:

- **No se permite el uso de calculadoras ni de teléfonos celulares durante el examen. En el caso de encontrarse alguno de estos elementos en el puesto de trabajo, se anulará el examen, y su calificación será 0,0.**
- Después de recibir el tema del examen, retirarse del salón se entenderá como la entrega de este.
- Conteste de manera ordenada y apoye sus respuestas con las justificaciones adecuadas.
- Resuelva un punto en cada página de su hoja de examen.
- No se permite el préstamo de borradores, reglas, lápices, etc.
- Respuesta sin justificación NO se le asigna valor.
- El examen tiene una duración de 100 minutos.
- El profesor no responderá preguntas, porque parte de la evaluación es la comprensión de los enunciados.

(1) Una empresa produce dos productos $A$ y $B$, cuyos respectivos costos de producción están dados por $x$ y $y$. La empresa tiene un presupuesto mensual de $60000$ dólares. Además, la empresa estima que las ventas por mes están dadas $90x^{\frac{1}{4}}y^{\frac{3}{4}}$.

Si las ganancias son el $10\,\%$ de las ventas, menos el presupuesto inicial, determine el presupuesto respectivo para los productos $A$ y el producto $B$ para maximizar las ganancias.

(2) De un cilindro circular de radio $r$ cm, definido mediante dos planos, se corta una cuña. Un plano es perpendicular al eje del cilindro. El otro corta al primero en un ángulo de $\pi/3$ a lo largo del diámetro del cilindro. Determine el volumen de la cuña (recuerde que debe usar integral doble o triple).

(3) Resuelva uno de los siguientes ítems:

a) Hallar el valor exacto de la integral $\displaystyle\iint_R \cos\left(\frac{y-x}{x+y}\right)\ dA$, donde $R$ es la región trapezoidal con vértices $(1,0)$, $(2,0)$, $(0,2)$ y $(0,1)$.

b) Si $\rho(x,y,z) = e^{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ es la función de densidad del sólido que se obtiene de la intersección de las regiones $x^2+y^2+z^2 \leq 4$ y $z^2 \leq x^2+y^2$. Halle su masa.

(4) Determine si la afirmación dada es verdadera (V) o falsa (F). Justifique su respuesta.
**Respuesta sin justificación NO tiene valor**:

*a*) Sea $f(x, y, z) : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ una función tal que las derivadas parciales existen en todo $\mathbb{R}^3$. Además $f_x = 0,\ f_y = 0$ y $f_z = 0,$ para todo punto, entonces la función es una función constante.

*b*) Todo máximo absoluto de $f(x, y)$ sobre un conjunto cerrado y acotado $D \subseteq \mathbb{R}^2$ es un máximo local de la función.

*c*) Una derivada parcial es una derivada direccional también.