Instrucciones: Para recibir puntos, todo trabajo o razonamiento debe ser mostrado para poder obtener todo el puntaje; no serán asignados puntos parciales. Durante el examen **NO** está permitido: **(i) El préstamo o intercambio de implementos, tales como lápices, lapiceros, borradores, etc. (ii) Realizar preguntas acerca de las respuestas del examen, porque parte de la evaluación es la comprensión de los enunciados. (iii) El uso de teléfonos celulares y calculadoras**. Este examen tiene 6 preguntas, con un total de 50 puntos.

SOLUCIÓN DEL EXAMEN Y PAUTAS DE EVALUACIÓN

(I) No se pueden modificar los puntajes asignados a cada problema del examen; bajo ninguna consideración se podrán dejar puntos del examen sin evaluar.

(II) En algunos casos, la manera de obtener las soluciones correctas a los problemas propuestos no es única; acá se muestra una de ellas.

(III) Las pautas de evaluación están fundamentadas en la forma mostrada de obtener los resultados. Si un estudiante tiene su análisis correcto y obtiene el mismo resultado, el profesor deberá establecer los criterios de evaluación y mostrárselos al estudiante el día de revisión del examen.

(IV) A la solución de cada problema se le propone una pauta de asignación de puntajes, la cual puede modificar cada profesor a su criterio. Lo que si debe decidir el profesor son los puntos parciales a descontar por errores aritméticos o algebraicos del estudiante en la solución de los problemas.

---

1. Suponga que la temperatura en cada punto (x, y) de una placa metálica se modela mediante la función $T(x,y) = \dfrac{8y}{1+x^2+y^2}$, donde T se mide en grados centígrados y x y y son medidos en metros.

   (a) (3 pts) Establezca que la isoterma (curva de nivel) de T para el nivel $c = 2$ es un círculo.

   Solución: Tenemos que

   $$T = 2 \Longrightarrow \frac{8y}{1+x^2+y^2} = 2 \Longrightarrow 4y = 1 + x^2 + y^2 \Longrightarrow x^2 + (y-2)^2 = 3,$$

   la cual representa la ecuación de un círculo con centro en $(0, 2)$ y radio $\sqrt{3}$.

   (b) (5 pts) En el punto $(\sqrt{3}, 2)$ de la anterior isoterma, dibuje el vector que apunta en la dirección en la cual la temperatura crece más rápidamente.

   Solución: **(3 pts)** La temperatura aumenta más rápidamente en la dirección del vector gradiente ∇T en el punto $(\sqrt{3}, 2)$; es decir, en la dirección del vector

   $$\nabla T(\sqrt{3},2) = T_x(\sqrt{3},2)\hat{\imath} + T(\sqrt{3},2))\hat{\jmath} = -\frac{16xy}{(1+x^2+y^2)^2}\hat{\imath} - \frac{8(y^2-x^2-1)}{(1+x^2+y^2)^2}\bigg|_{(\sqrt{3},2))} = -\frac{\sqrt{3}}{2}\hat{\imath}.$$

   (2 pts) La grafica.

   (c) (2 pts) Determine la tasa de cambio o la rapidez con la cual crece la temperatura en la dirección anteriormente obtenida.

   Solución: La rapidez con la cual crece más rápidamente la temperatura es

   $$\|\nabla T(\sqrt{3},2)\| = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

   grados centígrados por metro, a partir del punto $(\sqrt{3}, 2)$ y en dirección del vector $\nabla T(\sqrt{3},2) = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

2. (6 pts) La ecuación de *Vander Waals* establece que $\left(p+\dfrac{a}{v^2}\right)(v-b)=RT$, donde R es la constante universal de los gases, y a y b son constantes que dependen del gas en particular, p es presión, T la temperatura absoluta y v es el volumen específico, del gas. Suponga que $v(p,T)$ se define implícitamente. Encuentre el coeficiente de la expansión del volumen del gas β y el coeficiente de comprensibilidad del gas κ, los cuales están definidos como $\beta=\dfrac{1}{v}\dfrac{\partial v}{\partial T}$, $\kappa=-\dfrac{1}{v}\dfrac{\partial v}{\partial p}$.

Solución: **(4 pts)** Se escribe la ecuación de Vander Waals de la forma $g(p,T,v)=\left(p+\dfrac{a}{v^2}\right)(v-b)-RT=0$ donde se supone que $v=v(p,T)$ de manera implícita. Por la regla de la cadena, utilizando el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
p \arrow[r] \arrow[ddr] & p \arrow[dr] & \\
T \arrow[r] \arrow[dr] & T \arrow[r] & g \\
& v \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

o directamente de la formula de derivación implícita, se tiene que

$$\frac{\partial v}{\partial T}=-\frac{g_T}{g_v}=\frac{R}{\left(p+\frac{a}{v^2}\right)-\frac{2a(v-b)}{v^3}},\qquad \frac{\partial v}{\partial p}=-\frac{g_p}{g_v}=-\frac{v-b}{\left(p+\frac{a}{v^2}\right)-\frac{2a(v-b)}{v^3}},$$

(2 pts) Por lo tanto,

$$\beta=\frac{R}{v}\,\frac{1}{\left(p+\frac{a}{v^2}\right)-\frac{2a(v-b)}{v^3}},\qquad \kappa=\frac{v-b}{v}\,\frac{1}{\left(p+\frac{a}{v^2}\right)-\frac{2a(v-b)}{v^3}}.$$

3. (9 pts) A un editor se le han asignado \$60,000 dólares para invertir en el desarrollo y la promoción de un nuevo libro. Se calcula que si se gastan x **miles de dólares** en desarrollo y y **miles de dólares** en promoción se venderán aproximadamente $f(x,y)=20x^{3/2}y$ ejemplares del libro. **(a)** ¿Cuánto dinero debe asignar el editor a desarrollos y cuánto a promoción para maximizar las ventas? **(b)** Bajo estas condiciones, ¿cuántos ejemplares se venderán del libro?

Solución: **(2 pts)** En este caso se debe resolver el problema de optimización con restricciones,

$$\text{(POCR)}:\begin{cases}\text{Maximizar} & f(x,y)=20x^{3/2}y\\ \text{Restricción} & x+y=60\end{cases}$$

donde $x>0$ y $y>0$.

(5 pts) Para resolver este problema mediante multiplicadores de Lagrange, se resuelve el siguiente sistema de ecuaciones no lineales,

$$\begin{aligned}
(f_x=\lambda g_x)\quad & 30x^{1/2}y=\lambda && (1)\\
(f_y=\lambda g_y)\quad & 20x^{3/2}=\lambda && (2)\\
(g=0)\quad & x+y=60 && (3)\\
& x>0,\ y>0
\end{aligned}$$

De las ecuaciones (1) y (2) se sigue que

$$30x^{1/2}y=20x^{3/2}\Longrightarrow 3y=2x\Longrightarrow y=\frac{2x}{3}.$$

Reemplazando este resultado en (3) se sigue que

$$x + \frac{2x}{3} = 60 \Longrightarrow \frac{5x}{3} = 60 \Longrightarrow x = \frac{180}{5} = 36 \Longrightarrow y = \frac{(2)(36)}{3} = 24.$$

En tal caso, $f(36, 24) = 103{,}680$.

(2 pts) Se concluye que el editor debe invertir \$36,000 dólares en desarrollo y \$24,000 dólares en promoción para lograr una venta máxima de 103,680 ejemplares del libro.

4. (9 pts) Calcular $\iint_D 2\,(y-x)\,e^{y+4x}dA$ donde D es la región plana acotada por las gráficas de $y = 2x$, $y = 2x+1$, $y = 3-4x$, $y = 1-4x$.

Solución: **(2 pts)** Consideremos la transformación T del plano uv en el plano xy que define el cambio de variable de ecuaciones paramédicas $u = y + 4x$ y $v = y - 2x$. De acuerdo con esto, tenemos que a la región plana D del plano xy le corresponde la región plana D^* del plano uv como sigue:

$$D : \begin{cases} y = 3-4x,\ y = 1-4x & \equiv y+4x = 1,\ y+4x = 3, \\ y = 2x,\ y = 2x+1 & \equiv y-2x = 0,\ y-2x = 1, \end{cases} \Longrightarrow T : \begin{cases} u = y+4x, \\ v = y-2x, \end{cases} \Longrightarrow D^* : \begin{cases} u = 3,\ u = 1 & \equiv 1 \le u \le 3, \\ v = 0,\ v = 1 & \equiv 0 \le v \le 1. \end{cases}$$

(7 pts) Resolviendo las ecuaciones paramétricas de T para x y y se sigue que la transformación inversa de T tiene ecuaciones paramétricas $x = \dfrac{u-v}{6}$ y $y = \dfrac{u+2v}{3}$. El jacobiano de esta transformación es

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \frac{1}{6}\frac{2}{3} - \frac{-1}{6}\frac{1}{3} = \frac{1}{6}.$$

Dado que $y - x = \dfrac{u+5v}{6}$, $u = y+4x$ y $dA = \left|\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| dudv = \dfrac{1}{6}dudv$ del teorema de cambio de variable se sigue que

$$\begin{aligned}\iint_D 2\,(y-x)\,e^{y+4x}dA &= 2\iint_{D^*} \frac{u+5v}{6}e^u\,\frac{1}{6}\,dudv = \frac{1}{18}\int_1^3\int_0^1 (ue^u + 5ve^u)dvdu = \frac{1}{18}\int_1^3 \left[ue^u v + \frac{5v^2}{2}\,e^u\right]_{v=0}^{v=1} du \\ &= \frac{1}{18}\int_1^3 \left(ue^u + \frac{5}{2}\,e^u\right)du = \frac{1}{18}\left[\frac{2ue^u + 3e^u}{2}\right]_1^3 = \frac{9e^3 - 5e}{2}.\end{aligned}$$

5. (7 pts) **Plantee** la integral triple para calcular la masa del sólido E que se encuentra arriba del disco $x^2 + y^2 = 2y$ y debajo de la parte de la esfera $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$. Suponga que la densidad en cada punto del sólido es una función $\delta(x,y,z) = 1 + \kappa\sqrt{x^2+y^2+z^2}$, donde κ es una constante positiva dada.

Solución: **(2 pts)** tenemos que E es una región sólida de tipo I, la cual se encuentra arriba del disco $D : x^2 + y^2 \le 2y$ del plano xy y abajo de la superficie de la esfera $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$; o sea,

$$E : 0 \le z \le \sqrt{4 - x^2 - y^2}, \quad (x,y) \in D : x^2 + y^2 \le 2y.$$

Entonces la masa M de E es

$$M = \iiint_E \delta(x,y,z)dV = \iint_D \int_0^{\sqrt{4-x^2-y^2}} (1 + \kappa\sqrt{x^2+y^2+z^2})dz\,dA \tag{4}$$

(5 pts) Como el dominio D es un disco se utilizan la transformación de coordenadas cilíndricas $x = r\cos\theta$, $y = r\,\text{sen}\,\theta$, $z = z$ donde $0 \le \theta \le \pi$. La variación de r se consigue de la ecuación del círculo $x^2 + y^2 = 2y$ en las coordenadas dadas:

$$r^2\cos^2\theta + r^2\,\text{sen}^2\,\theta = 2r\,\text{sen}\,\theta \Longrightarrow r^2 = 2r\,\text{sen}\,\theta \Longrightarrow r(r - 2\,\text{sen}\,\theta) = 0 \Longrightarrow r = 0 \text{ o } r = 2\,\text{sen}\,\theta,$$

Por lo tanto $0 \le r \le 2\,\text{sen}\,\theta$. Así que

$$D : x^2 + y^2 \le 2y \Longrightarrow D^* : 0 \le \theta \le \pi,\ 0 \le r \le 2\,\text{sen}\,\theta. \tag{5}$$

y por lo tanto,

$$E^* : 0 \le z \le \sqrt{4 - r^2}, \quad D^* : 0 \le \theta \le \pi,\ 0 \le r \le 2\,\text{sen}\,\theta.$$

Entonces la masa M de E se pude representar como la integral triple

$$M = \int_0^{\pi}\int_0^{2\,\text{sen}\,\theta}\int_0^{\sqrt{4-r^2}} (1 + \kappa\sqrt{r^2 + z^2})r\,dz\,dr\,d\theta$$

6. Considere el campo vectorial $\mathbb{F}(x, y) = \cos x\ \text{sen}\,y\hat{\boldsymbol{\imath}} + \text{sen}\,x\ \cos y\hat{\boldsymbol{\jmath}}$.

(a) (3 pts) Demuestre que la integral de línea de $\mathbb{F}$ es independiente de la trayectoria.

Solución: tenemos el campo vectorial $\mathbb{F}(x, y) = P(x, y)i + Q(x, y)j$ donde $P(x, y) = \cos x\ \text{sen}\,y$ y $Q(x, y) = \text{sen}\,x\ \cos y$. Como

$$\text{rot}(\mathbb{F}) = \nabla \times \mathbb{F} = \begin{vmatrix} \hat{\boldsymbol{\imath}} & \hat{\boldsymbol{\jmath}} & \hat{\boldsymbol{k}} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ P(x,y) & Q(x,y) & 0 \end{vmatrix} = (Q_x - P_y)\hat{\boldsymbol{k}} = (\cos x\cos y - \cos x\cos y)\hat{\boldsymbol{k}} = \vec{O}$$

entonces $\mathbb{F}$ es un campo vectorial conservativo y por la tanto la integral de $\mathbb{F}$ es independiente de la trayectoria.

(b) (6 pts) Evalúe la integral de línea de $\mathbb{F}$ a lo largo de cualquier trayectoria suave $\mathcal{C}$ que va del punto $(0, -\pi)$ al punto $(3\pi/2, \pi/2)$.

Solución: (**4 pts**) como $\mathbb{F}$ es un campo vectorial conservativo entonces existe un campo escalar f tal que $\nabla f = \mathbb{F}$; es decir, tal que $f_x = \cos x\ \text{sen}\,y$ y $f_y = \text{sen}\,x\ \cos y$. Integrando con respecto a x la primera ecuación tenemos que

$$f(x, y) = \text{sen}\,x\,\text{sen}\,y + h(y),$$

donde $h(y)$ es una constante de integración. Ahora, al derivar esta ecuación con respecto a y tenemos que

$$\text{sen}\,x\ \cos y = f_y = \text{sen}\,x\ \cos y + h'(y) \Longrightarrow h'(y) = 0 \Longrightarrow h(y) = c.$$

Por lo tanto, $f(x, y) = \text{sen}\,x\,\text{sen}\,y + c$.

(**2 pts**) Como la integral de línea dada es independiente de la trayectoria, se sigue del Teorema fundamental de la integral de línea que la integral de línea requerida es

$$\int_{\mathcal{C}} \mathbb{F}\cdot\hat{\mathbf{T}}ds = \int_{\mathcal{C}} Pdx + Qdy = \int_{\mathcal{C}} \cos x\,\text{sen}\,ydx + \text{sen}\,x\cos ydy = f(3\pi/2, \pi/2) - f(0, -\pi) = -1.$$