,

Universidad Industrial de Santander
Escuela de Matemáticas
ÁLGEBRA LINEAL I
14 de diciembre de 2023

LISTA DE EJERCICIOS #2.
Vectores
Geometría analítica
Prof. Jorge E. Gómez Ríos

Instrucciones

Autonomía y colaboración: Dedique el tiempo que considere necesario para resolver cada uno de los ejercicios propuestos en este taller. Es esencial que busque soluciones por usted mismo. Sin embargo, se recomienda compartir y discutir sus ideas con sus compañeros. Pregunte, compare, discuta y concluya. Una vez que haya trabajado en cada ejercicio, realice una autoevaluación.

Claro, simple y completo: Al presentar sus ideas y argumentos, hágalo con la mayor claridad, sencillez y exhaustividad posible. La calidad de su comunicación es tan importante como la calidad de su trabajo. Asegúrese de usar correctamente la nomenclatura y terminología matemática, evite ambigüedades y presente sus soluciones de forma organizada, incluyendo todos los detalles pertinentes.

Uso de herramientas computacionales: Para garantizar precisión y eficiencia en sus cálculos, utilice software o aplicaciones especializadas. Estas herramientas no solo agilizan los cálculos, sino que también le permiten verificar la exactitud de sus resultados.

Integridad académica: Es importante que entienda que este taller no tiene como objetivo memorizar respuestas o coleccionar soluciones de otras personas. Su aprendizaje es lo más valioso, por lo que cada respuesta o solución debe ser el resultado de su propio razonamiento y comprensión. Copiar o utilizar el trabajo de otros no solo desvaloriza sus habilidades, sino que también priva de la oportunidad de aprender y crecer.

Referencias bibliográficas:

- DENNIS ZILL. *Cálculo de varias variables: Trascendentes tempranas.* Capítulo 11: Vectores y espacio tridimensional.
- JAMES STEWART. *Cálculo de varias variables: Trascendentes tempranas.* Capítulo 12: Vectores y la geometría del espacio.
- RAFAEL ISAACS, SONIA SABOGAL. *Aproximación al álgebra lineal: un enfoque geométrico.* Capítulo 4. $\mathbb{R}^n$ como espacio vectorial euclídeo.

1. Sean $\mathbf{u} = (-3, 1, 2)$ y $\mathbf{v} = (4, 0, -8)$. Use GeoGebra 3D para

   (a) Graficar cada uno de los vectores con punto inicial en el origen.

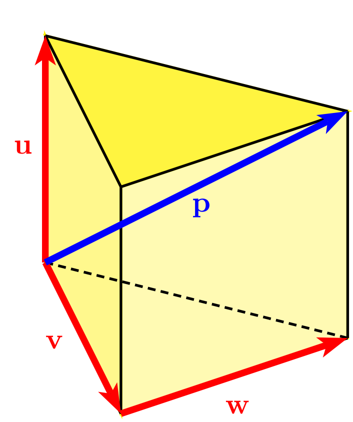
   (b) Graficar el vector $\mathbf{u}$ pero con el punto inicial en $P(2, 3, 5)$.

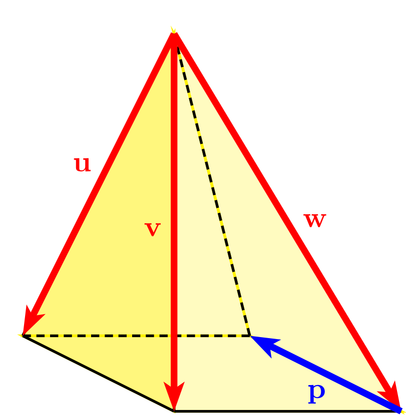
   (c) Graficar el vector opuesto de $\mathbf{v}$ pero con el punto inicial en $P(-2, 1, 4)$.

   (d) Use un deslizador a para graficar $a\mathbf{u}$, variando el valor de a. Describa el efecto geométrico de multiplicar por el escalar a al vector $\mathbf{u}$.

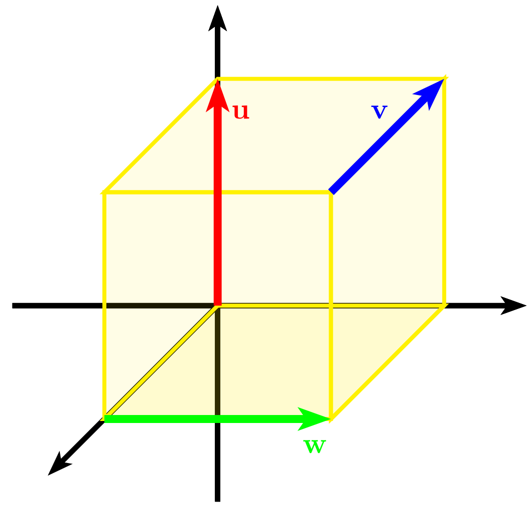
   (e) Use otro deslizador b para graficar $a\mathbf{u} + b\mathbf{v}$, variando los valores de a y b. ¿Cuál es el lugar geométrico que se obtiene?

2. En las siguientes figuras se muestra un prisma rectangular recto un una pirámide. En cada caso, exprese el vector $\mathbf{p}$ en función de los vectores $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$.





3. En la siguiente imagen se muestra un cubo en el que se han trazado los vectores $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ y $\mathbf{v}$.



a) Trazar sobre el mismo cubo:

(a) $\mathbf{u}+\mathbf{v}+\mathbf{w}$ (b) $\mathbf{u}-\mathbf{w}$ (c) $\mathbf{v}-\mathbf{u}$ (d) $\mathbf{v}-\mathbf{w}$ (e) $\mathbf{u}+\mathbf{w}-\mathbf{v}$

b) Si el lado del cubo mide $1\,cm$. Calcular

(a) $\|\mathbf{u}+\mathbf{v}+\mathbf{w}\|$ (b) $\|\mathbf{u}-\mathbf{w}\|$ (c) $\|\mathbf{v}-\mathbf{u}\|$ (d) $\|\mathbf{v}-\mathbf{w}\|$ (e) $\|\mathbf{u}+\mathbf{w}-\mathbf{v}\|$

c) Determine el ángulo entre las siguientes parejas de vectores:

(a) $\mathbf{u}+\mathbf{v}$ y $\mathbf{v}+\mathbf{w}$ (b) $\mathbf{u}+\mathbf{w}-\mathbf{v}$ y $-\mathbf{v}$ (c) $\mathbf{u}+\mathbf{w}-\mathbf{v}$ y $\mathbf{v}+\mathbf{w}$

4. Sean $\mathbf{u}=(2,-3,4)$, $\mathbf{v}=(-2,-3,5)$, $\mathbf{w}=(1,-7,3)$ y $\mathbf{t}=(3,4,5)$. Realice cada una de las siguientes operaciones:

(a) Encontrar las componentes del vector $\mathbf{x}$ que satisface la ecuación $2\mathbf{u}-\mathbf{v}+\mathbf{x}=7\mathbf{x}+\mathbf{w}$

(b) Encontrar los escalares c_1, c_2 y c_3 tales que $c_1\mathbf{u}+c_2\mathbf{v}+c_3\mathbf{w}=(2,0,4)$

(c) Calcule

- $(\mathbf{u}-2\mathbf{w})+(5\mathbf{v}+3\mathbf{u})$
- $\mathbf{w}\cdot(\mathbf{v}+\mathbf{u})$
- $(3\mathbf{t}-2\mathbf{u})\cdot(5\mathbf{v}+2\mathbf{w})$
- $\mathbf{u}\cdot\mathbf{w}-\mathbf{w}\cdot\mathbf{t}$
- El ángulo entre $\mathbf{t}$ y $\mathbf{w}$
- El ángulo entre $\mathbf{u}$ y $\mathbf{w}$
- $\|\mathbf{u}+\mathbf{v}\|$
- $\|\mathbf{u}\|+\|\mathbf{v}\|$
- $\|-2\mathbf{u}\|+\|2\mathbf{u}\|$
- $\dfrac{1}{\|\mathbf{w}\|}\mathbf{w}$
- $\|3\mathbf{u}-5\mathbf{v}+\mathbf{w}\|$
- $\left\|\dfrac{1}{\|\mathbf{w}\|}\mathbf{w}\right\|$
- $\text{Proy}_{\mathbf{t}}\mathbf{w}$
- $\text{Proy}_{\mathbf{u}}\mathbf{v}$
- $\mathbf{w}\cdot\text{Proy}_{\mathbf{t}}\mathbf{v}$

5. Demuestre o refute cada una de las siguientes afirmaciones, donde $u,v,w\in\mathbb{R}^n$ y $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$.

(a) Si $u\cdot v=u\cdot w$ y $u\neq 0$, entonces $v=w$.

(b) Los puntos $(-1,-2,-3)$, $(-2,0,1)$, $(-4,-1,-1)$ y $(2,0,1)$ son coplanares (están en el mismo plano).

(c) Los vectores (a,b) y $(-b,a)$ son ortogonales.

(d) Si $u=0$ entonces $v\cdot(u\times w)=0$.

(e) $(u+v)\times(u-v)=2(u\times v)$

(f) $(\alpha u+\beta v)\times u+(\beta u-\alpha v)\times v=0$

(g) $v\cdot(u\times w)=w\cdot(v\times u)$

6. Sean $u=(2,-6,2)$ $v=(0,4,-2)$ y $w=(2,2,-4)$ vectores de $\mathbb{R}^3$.

(a) Encontrar un vector unitario que tenga la misma dirección que el vector v.

(b) Encontrar un vector que sea ortogonal tanto a u como a v.

(c) Encontrar un vector unitario que sea ortogonal tanto a v como a w.

(d) Encuentre un vector paralelo a u con magnitud 5.

(e) Encuentre un vector con dirección opuesta a $u+v$ y magnitud $\dfrac{2}{3}$.

(f) Hallar el área del paralelogramo determinado por u y v.

(g) Hallar el volumen del paralelepípedo determinado por u, v y w

7. Dado un punto $P_0\in\mathbb{R}^3$, describir el conjunto de puntos $P\in\mathbb{R}^3$ para los cuales $||P-P_0||=1$.

8. Considere los puntos $A(k, 2, k)$, $B(2, -k, 0)$ y $C(k, 0, k+2)$.

   (a) Pruebe que el triángulo ABC es isósceles.

   (b) ¿Para qué valores de k el triángulo ABC es equilátero?

9. Determine los valores de b y c para los cuales el punto $P(0, b, c)$ equidista de los puntos $Q(2, 0, 3)$, $R(0, 3, 2)$ y $S(0, 0, 1)$.

10. (a) Para qué valores de k se cumple que los vectores $u = (k, k, 1)$ y $v = (k, 5, 6)$ son ortogonales.

    (b) Para qué valores de k se cumple que los vectores $u = (5, 12, -2)$ y $v = (k, -6, 1)$ son paralelos.

11. Sean $A = (1, -1, 0)$, $B = (2, 1, 1)$ y $C = (3, -3, 2)$. Si X y Y son vectores de $\mathbb{R}^3$ tales que $A + 2X = B + Y = C$, ¿cuál es el vector $X + Y$?

12. Sean u y v dos vectores tales que $\|u\| = 6$ y $\|v\| = 8$. Determinar

    (a) el mayor valor que puede tomar $\|u + v\|$ y $\|u - v\|$.

    (b) el valor $\|u + v\|$ y $\|u - v\|$, si $u \cdot v = 0$.

13. Sean u y v dos vectores ortonormales, esto significa que u y v son ortogonales y unitarios. Pruebe que $\|u - v\| = \sqrt{2}$.

14. Pruebe que si u y v son ortogonales entonces $\|u + v\| = \|u - v\|$.

15. Un avión se encuentra a $4\,km$ de altura, $5\,km$ hacia el sur y $7\,km$ hacia el este de un aeropuerto. Haga un bosquejo de la situación y determine los ángulos directores del avión.

16. Si $\|\mathbf{u}\| = 2$ y $\|\mathbf{v}\| = 3$ ¿cuáles son los valores mayor y menor posibles para $\|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|$? Justifique geométricamente.

17. Sean $\mathbf{u} = (-1, 2, 4)$ y $\mathbf{v} = (5, -3, 1)$.

    (a) ¿Existen escalares α, β tales que $\alpha\mathbf{u} + \beta\mathbf{v} = (-7, 7, 7)$?

    (b) ¿Existen escalares α, β tales que $\alpha\mathbf{u} + \beta\mathbf{v} = (1, 0, 1)$?

18. Demuestre que para cualesquiera números reales α y β, los vectores $\mathbf{u} = \alpha\mathbf{i} + \beta\mathbf{j}$ y $\mathbf{v} = \beta\mathbf{i} - \alpha\mathbf{j}$ son ortogonales.

19. Dados $\mathbf{u} = -2\mathbf{i} + 7\mathbf{j}$ y $\mathbf{v} = \alpha\mathbf{i} - 2\mathbf{j}$.

    (a) Determine α tal que $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ son ortogonales.

    (b) Determine α tal que $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ son paralelos.

    (c) Determine α tal que el ángulo entre $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ es $\dfrac{2\pi}{3}$.

    (d) Determine α tal que el ángulo entre $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ es $\dfrac{\pi}{3}$.

    (e) ¿Existe un valor α para el que $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ tienen direcciones opuestas?

    (f) ¿Existe un valor α para el que $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ tienen la misma dirección?

20. (a) Sean θ_1, θ_2 y θ_3 los ángulos directores de un vector en el espacio. Pruebe que

    $$\cos^2(\theta_1) + \cos^2(\theta_2) + \cos^2(\theta_3) = 1.$$

    (b) ¿Existe un vector unitario cuyos ángulos directores sean $\dfrac{\pi}{6}$, $\dfrac{\pi}{3}$ y $\dfrac{\pi}{4}$?

    (c) Si $\theta_1 = 45°$ y $\theta_2 = 60°$ son dos ángulos directores de un vector v, encuentre un vector unitario con la misma dirección de v.

21. El rectángulo $ABCD$ tiene vértices en $A(1, 2, 3)$, $B(3, 6, -2)$ y $C(0, 5, -4)$. Determine las coordenadas del vértice D.

22. Sean A, B y C vectores de $\mathbb{R}^3$, tales que $C = A \times B + B$, $\|B\| = 1$ y $\|A \times B\| = \sqrt{3}$. Hallar

    (a) La norma del vector C.

    (b) El ángulo entre el vector B y el vector C.

23. Los puntos $A(-1, 6, 7)$ y $B(3, 3, 4)$ son vértices opuestos de una caja en forma de paralelepípedo rectangular.

    (a) Determine todos los vértices del paralelepípedo.

    (b) Halle el área superficial la caja.

    (c) Calcule el volumen de la caja.

24. Demostrar que $A(3,0,2)$, $B(4,3,0)$ y $C(8,1,-1)$ son los vértices de un triángulo rectángulo. Halle el vértice donde está en ángulo recto.

25. Encontrar el ángulo entre una diagonal de un cubo y una de sus aristas.

26. Encontrar el ángulo entre una diagonal de un cubo y una de sus caras.

27. Considere los puntos $A(0,0,1)$, $B(1,2,2)$, $C(5,2,2)$ y $D(4,0,1)$.

    (a) Pruebe que el cuadrilátero $ABCD$ es un paralelogramo.

    (b) ¿Es el triángulo ABC rectángulo?

    (c) Determine el perímetro de $ABCD$.

    (d) Determine el área de $ABCD$.

    (e) Calcule la altura del triángulo ABD, correspondiente a la base $\overline{AD}$.

28. Determine el conjunto de puntos (x,y,z) tales que el triángulo con vértices en $(1,1,0)$, $(3,1,0)$ y (x,y,z), es equilátero. Bosqueje estos puntos en el espacio.

29. Pruebe que las diagonales de un rombo se cortan perpendicularmente.

30. Mediante vectores, demuestre que las diagonales de un paralelogramo se bisecan entre sí.

31. Dados los puntos $A(1,2,-3)$ y $B(0,-2,5)$ determinar:

    (a) El punto medio del segmento $\overline{AB}$.

    (b) Los puntos que trisecan el segmento $\overline{AB}$.

    (c) Los puntos de dividen el segmento $\overline{AB}$ en 5 segmentos de igual longitud.

    (d) Los puntos que dividen el segmento $\overline{AB}$ en n segmentos de igual longitud.

32. Considere los puntos $A(2,3,-1)$, $B(3,2,2)$ y $C(0,2,-1)$.

    (a) Calcule $\mathrm{Proy}_{\overrightarrow{BC}}\overrightarrow{BA}$.

    (b) Encuentre dos vectores u y v ortogonales, tales que u sea paralelo a $\overrightarrow{BC}$ y $u+v=\overrightarrow{BA}$.

    (c) Determine el perímetro y el área del triángulo ABC.

33. Sean A, B, C vectores de $\mathbb{R}^3$ y $\alpha \in \mathbb{R}$. Complete cada uno de los siguientes espacios con $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^3$ o ND (No Definido) según corresponda.

    (a) $(A \cdot B) \times C \in$ ______

    (b) $(A \times B) \cdot C \in$ ______

    (c) $\alpha(A - B) \times C \in$ ______

    (d) $((A \times B) \cdot (A - B)) \cdot C \in$ ______.

    (e) $\alpha A \times A \in$ ______

    (f) $\mathrm{Proy}_{A,B} \in$ ______

    (g) $A \cdot B \cdot C \in$ ______

    (h) $A \times B \times C \in$ ______

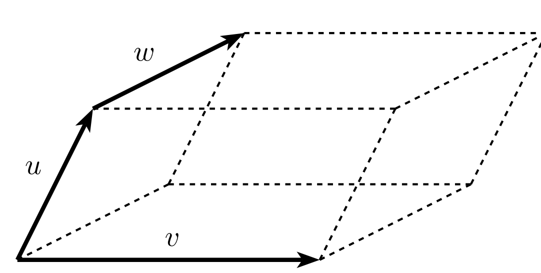
34. ¿Falso o Verdadero? Considere figura para determinar si las afirmaciones son verdaderas o falsas.

    (a) $\square$ $u \cdot (w \times v)$ es el volumen del paralelepípedo.

    (b) $\square$ Una de las alturas del paralelepípedo mide $||\mathrm{Proy}_{u,v}||$

    (c) $\square$ Si $||w \times v|| = 12$, $||u|| = 5$ y el volumen del paralelepípedo es 36, entonces $||\mathrm{Proy}_{u,v}|| = 3$.

    (d) $\square$ El área superficial del paralelepípedo está dada por $2\left(\|u \times v\| + \|u \times w\| + \|w \times v\|\right)$



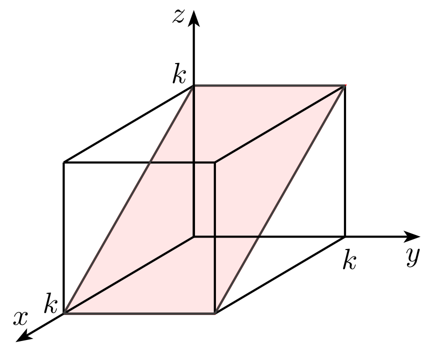
35. ¿Falso o Verdadero? Considere figura para determinar si las afirmaciones son verdaderas o falsas.

    (a) $\square$ El plano que contiene el rectángulo sombreado tiene por ecuación $x+z=k$.

    (b) $\square$ El vector $(1,0,1)$ es perpendicular al plano que contiene el rectángulo sombreado.

    (c) $\square$ El ángulo entre la diagonal del cubo y el plano xy mide 45.

    (d) $\square$ Si α es el ángulo formado por la diagonal de cubo con una de sus aristas adyacentes, entonces $\cos\alpha = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$



36. ¿Falso o verdadero? Si A, B, C son vectores cualesquiera de $\mathbb{R}^3$ se tiene

(a) $\square$ $A \cdot (B \times C) = (A \times B) \cdot C$

(b) $\square$ $(A \times B) \times C = A \times (B \times C)$

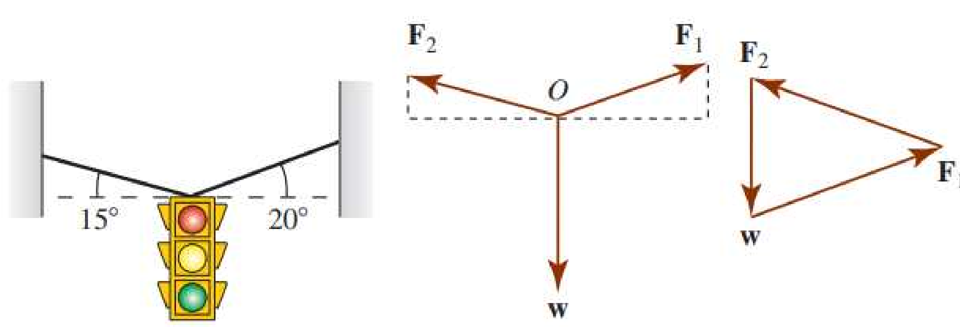
(c) $\square$ $(A + B) \times C = C \times B + C \times A$

(d) $\square$ $(A + B) \times C = B \times C + A \times C$

(e) $\square$ $A \cdot (B \times A) = 0$

37. Un semáforo de 200 lb soportado por dos cables cuelga en equilibrio. Como se ilustra en la figura, considere que el peso del semáforo está representado por $\mathbf{w}$ y las fuerzas en los dos cables por $\mathbf{F_1}$ y $\mathbf{F_2}$. De la figura, se observa que una condición de equilibrio es

$$\mathbf{w} + \mathbf{F_1} + \mathbf{F_2} = \mathbf{0}.$$

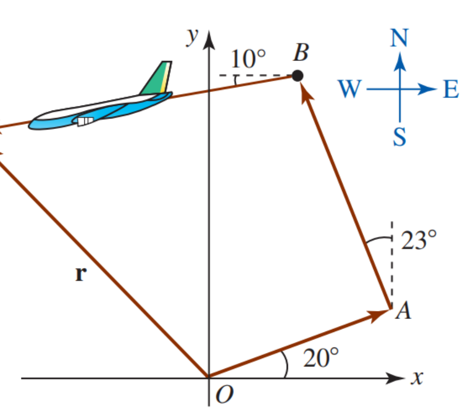


Determine las magnitudes de $\mathbf{F_1}$ y $\mathbf{F_2}$, sabiendo que:

$$\begin{aligned}
\mathbf{w} &= -200\mathbf{j}, \\
\mathbf{F_1} &= |\mathbf{F_1}| \cos(20°)\mathbf{i} + |\mathbf{F_1}| \operatorname{sen}(20°)\mathbf{j}, \\
\mathbf{F_2} &= |\mathbf{F_2}| \cos(15°)\mathbf{i} + |\mathbf{F_2}| \operatorname{sen}(15°)\mathbf{j},
\end{aligned}$$

,

38. Un avión parte de un aeropuerto ubicado en el origen O y vuela a 150 mi en la dirección $20°$ noreste a la ciudad A. De A, el avión vuela después 200 mi en la dirección $23°$ noroeste a la ciudad B. De B, el avión vuela 240 mi en la dirección $10°$ suroeste a la ciudad C.

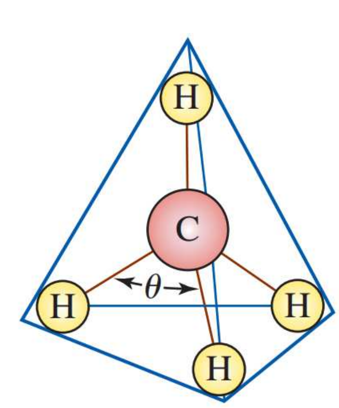


(a) Exprese la ubicación de la ciudad C como un vector r igual al que se presenta en la figura.

(b) ¿En qué dirección debe volar un avión desde el aeropuerto O para llegar directamente a la ciudad C?

(c) Determine la distancia del aeropuerto O a la ciudad C.

39. La molécula de metano CH_4 consta de cuatro átomos de hidrógeno que rodean a un solo átomo de carbón. Como se ilustra en la figura, los átomos de hidrógeno se ubican en los vértices de un tetraedro regular. La distancia entre el centro de un átomo de hidrógeno y el centro del átomo de carbono es de $1{,}10$ angstroms ($1 \text{ angstrom} = 10^{-10}$) y el ángulo del enlace hidrógeno-carbón-hidrógeno es $\theta = 109{,}5°$. Utilizando únicamente métodos vectoriales, determine la distancia entre los dos átomos de hidrógeno



Retos-Opcionales

$\boxed{\text{Reto 1.}}$ Desigualdad Triangular. Si $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ están en $\mathbb{R}^3$, demuestre que $\|\mathbf{u}+\mathbf{v}\| \leq \|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|$.

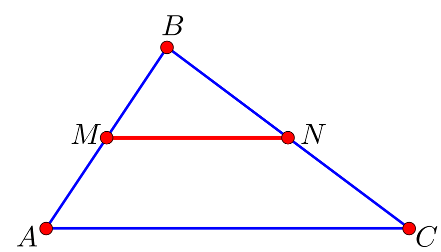
$\boxed{\text{Reto 2.}}$ La Desigualdad de Cauchy-Schwarz establece que Si $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ están en $\mathbb{R}^3$, entonces

$$|u \cdot v| \leq \|u\| \, \|v\| \, .$$

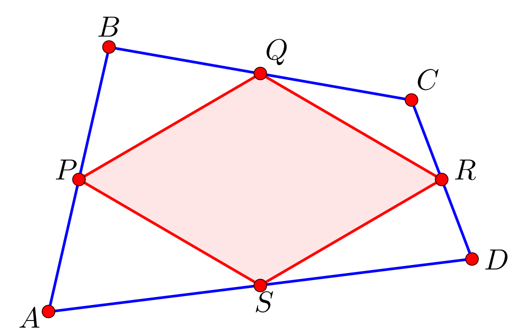
Use la Desigualdad de Cauchy-Schwarz para demostrar que, para cualquier número natural $n \geq 2$, se cumple que

$$\sum_{k=1}^{n} k\sqrt{k} = 1 + 2\sqrt{2} + 3\sqrt{3} + \cdots + n\sqrt{n} \leq \frac{n(n+1)}{6}\sqrt{6n+3}.$$

$\boxed{\text{Reto 3.}}$ Empleando vectores, demuestre que el segmento de recta entre los puntos medios de los dos lados de un triángulo es paralelo al tercer lado, y su longitud es la mitad de la longitud del tercer lado.



$\boxed{\text{Reto 4.}}$ En la siguiente figura P, Q, R y S son los puntos medios de los lados del cuadrilátero $ABCD$. Pruebe que el cuadrilátero $PQRS$ es un paralelogramo.



Rectas y planos

Apóyese en *GeoGebra* o algún software graficador, para ilustrar las situaciones planteadas en los siguientes problemas y para corroborar sus respuestas.

1. Demuestre que $\mathbf{u} = a\mathbf{i} + b\mathbf{j}$ es ortogonal a la recta $ax + by + c = 0$.
2. Demuestre que $\mathbf{u} = b\mathbf{i} + a\mathbf{j}$ es paralelo a la recta $ax + by + c = 0$.
3. Encuentre la distancia entre el punto $(2, 3)$ y la recta que pasa por el origen y tiene vector director $\mathbf{v} = 2\mathbf{i} - 3\mathbf{j}$
4. Encuentre un vector unitario en el plano xy que sea ortogonal a $(1, 2, 3)$
5. Encuentre una ecuación (cartesiana) del plano de $\mathbb{R}^3$ que contiene los puntos $(2, 1, 1), (2, 2, 2), (1, 0, 1)$.
6. Sean $A(2, 2, 1)$, $B(3, 4, 3)$, $C(4, 1, 3)$.
   - (a) ¿Cuál es el perímetro del triángulo $\triangle ABC$?
   - (b) ¿Cuál es el área del triángulo $\triangle ABC$?
   - (c) Determine el ángulo entre los segmentos AB y AC.
   - (d) Encuentre un vector perpendicular al plano que contiene los puntos A, B y C.
   - (e) ¿Cuál es la ecuación cartesiana del plano que contiene los puntos A, B y C ?
7. Considere los puntos $P(1, 3, 2)$, $Q(2, 0, 4)$, y $R(6, 2, 5)$.
   - (a) Calcule el área y perímetro del triángulo con vértices P, Q y R.
   - (b) Un vector perpendicular al plano que contiene los puntos P, Q y R.
   - (c) Una ecuación cartesiana del plano Π que contiene los puntos P, Q y R.
   - (d) Las ecuaciones simétricas de la recta que es perpendicular al plano Π y pasa por el origen.
   - (e) La menor distancia entre el punto $(3, 1, -2)$ y el plano Π
   - (f) Si S es el punto $(-1, 2, 0)$, determine el volumen del paralelepípedo determinado por los vectores $\overrightarrow{PQ}$, $\overrightarrow{PR}$ y $\overrightarrow{PS}$.
   - (g) Determine el área superficial del paralelepípedo del ítem anterior.
8. Dados los puntos $A(0, -2, -1)$, $B(1, -1, -2)$ y $C(-1, 2, 0)$, hallar

(a) el perímetro del triángulo con vértices A, B y C.

(b) el área del triángulo con vértices A, B y C.

(c) la ecuación cartesiana del plano Π que contiene los puntos A, B y C.

(d) la distancia entre el punto $(3, 1, -2)$ y el plano Π.

(e) la distancia entre el plano Π y el plano $2x - y + z = -1$.

9. El plano mediatriz del segmento AB, es el plano que pasa por el punto medio de AB y es perpendicular a AB. Considere los puntos $A(2, 3, 0)$ y $B(-2, 1, -4)$.

   (a) Halle la ecuación del plano mediatriz Π del segmento AB.

   (b) Determine la ecuación de la recta L perpendicular al plano Π que pasa por el origen.

   (c) Calcule el punto S simétrico de $P(2, 0, 1)$ respecto a la recta L.

   (d) Calcule la distancia de l punto S al plano Π.

10. Encuentre una ecuación del plano que consta de los puntos que son equidistantes de los puntos $(2, 5, 5)$ y $(-6, 3, 1)$.

11. Encuentre una ecuación del plano que contiene a las rectas:

$$\frac{x-1}{3} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-5}{4}$$

$$\frac{x+3}{3} = \frac{y-4}{2} = \frac{z}{4}$$

12. Encuentre la ecuación de la recta intersección de los planos $x - y = 1$ y $y + z = 4$.

13. Determine los puntos de corte del plano $x + 3y + 3z = 3$ con los ejes coordenados. Bosqueje su gráfico.

14. Considere los puntos $P(4, 6, 7)$ y $Q(3, 6, 9)$.

   (a) Halle ecuaciones paramétricas y simétricas de la recta L_1 que contiene a los puntos P y Q.

   (b) Pruebe que la recta L_2 con ecuaciones simétricas $\dfrac{x-1}{7} = y - 3 = \dfrac{5-z}{3}$ no interseca a L_1.

   (c) ¿Son L_1 y L_2 paralelas?

15. Considere las rectas con ecuaciones paramétricas: $L_1(t) : \begin{cases} x = & t+2 \\ y = & -t+5 \\ z = & 2t+6 \end{cases}$ y $L_2(t) : \begin{cases} x = & -t+1 \\ y = & t+5 \\ z = & t+7 \end{cases}$

   (a) Encuentre el punto P donde se cortan las rectas.

   (b) Verifique si A es un punto arbitrario en L_1 y B es un punto arbitrario en L_2 entonces $\overrightarrow{PA}$ y $\overrightarrow{PB}$ son ortogonales.

   (c) Verifique que el punto $C(3, 3, 8)$ pertenece a la recta L_1.

   (d) Encuentre un punto D en la recta L_2 tal que el área del triángulo CPD sea $\sqrt{18}\ \mathrm{u}^2$.

16. Considere las rectas con ecuaciones paramétricas: $L_1(t) : \begin{cases} x = & 1-t \\ y = & 2+t \\ z = & 3-2t \end{cases}$ y $L_2(t) : \begin{cases} x = & 2+2t \\ y = & 3-t \\ z = & 10+t \end{cases}$

   (a) Determine una ecuación cartesiana del plano P que contiene a la recta L_1 y es paralelo a la recta L_2.

   (b) Determine la distancia entre L_2 y el plano P.

17. Encuentre el punto donde la recta $L(t) : \begin{cases} x = & 2+2t \\ y = & 3-t \\ z = & 10+t \end{cases}$ corta al plano $3x - y + 2z = 7$.

18. Encuentre el punto donde la recta $\dfrac{3-x}{2} = y = 2z$ corta al plano $3x - y + 2z = 7$.

19. Encuentre el ángulo agudo que forma la recta $L(t) : \begin{cases} x = & 2+2t \\ y = & 3-t \\ z = & 10+t \end{cases}$ con el plano $3x - y + 2z = 7$.

20. Encuentre una ecuación para la recta que pasa por el punto $(7, 2, 5)$, es paralela al plano $x - 2y + 6z = 0$ y corta al eje y. ¿Cuál es el punto de corte con el eje y?

21. Encuentre la distancia de la recta $L(x, y, z) = (2, 1, 0) = t(1, 1, 1)$ al plano que contiene al eje z y es paralelo a la recta L.

22. En un experimento se logró evidenciar que las trayectorias de dos partículas P_1 y P_2 están definidas por las ecuaciones: $L_1 : (-1, 2, 0) + t(-1, 1, 1)$ y $L_2 = (1, 3, 1) + t(-2, 1, 1)$, respectivamente, donde $t \geq 0$ es el tiempo en segundos.

    a) Determine si las partículas se chocan

    b) Determine si las trayectorias se intersecan.

    c) Determine la distancia recorrida por la partícula P_2 en los primeros 5 segundos del experimento.

23. Una partícula se desplaza por el espacio con movimiento rectilíneo uniforme. Se sabe que inició su desplazamiento en el punto $A(3, -2, 4)$ y que a los 5 segundos pasó por el punto $B(4, 3, -1)$.

    (a) Determine una ecuación para la trayectoria de la partícula.

    (b) ¿Cuál es la posición de la partícula 10 segundos después de iniciar su desplazamiento?

    (c) En los puntos $P(-1, 5, 5)$, $Q\left(\frac{17}{5}, 0, 2\right)$ y $T(0, -17, 19)$ se encuentran ubicados tres objetos. ¿Choca la partícula con alguno de estos objetos? Si choca con alguno, ¿en qué instante ocurre el choque?

24. Considere los siguientes puntos en el espacios: $A(1, -1, 1)$, $B(1, 2, 3)$, $C(3, 2, 1)$, $D(5, 5, 5)$.

    (a) Determine la ecuación de la recta L_1 que pasa por los puntos A y B.

    (b) Determine una ecuación cartesiana del plano P que pasa por C y contiene la recta L_1.

    (c) Determine una ecuación de la recta L_2 que pasa por D y es perpendicular a P.

25. El diámetro de una esfera tiene extremos en los puntos $(2, -3, 5)$ y $(4, 1, -3)$. Encuentre el centro de la esfera y su volumen.

26. Encuentre el volumen de la esfera que es tangente a los planos $3x+2y-6z-15 = 0$ y $3x+2y-6z+55 = 0$.

27. Determine si las rectas $L_1 : -x + 1 = y + 1 = -z$ y $L_2 : x + 2 = -y = -(z - 1)$ son secantes, paralelas u oblicuas. En caso de ser secantes, determine el punto donde se intersecan y el plano que determinan las dos rectas.

28. Determine si las rectas $L_1 : -x + 1 = y - 2 = z$ y $L_2 : \dfrac{-x + 1}{2} = y - 3 = z - 1$ son secantes, paralelas u oblicuas. En caso de ser secantes, determine el punto donde se intersecan y el plano que determinan las dos rectas.

29. Halle el punto que es simétrico al punto $P(4, 1, 6)$ respecto a la recta intersección de los planos $x - y - 4z + 12 = 0$ y $2x + y - 2z + 3 = 0$.

30. Dos caras de un cubo se encuentran en los planos $3x - y + 2z = 5$, y $3x - y + 2z = 7$. Calcular el volumen del cubo

31. Determine el volumen de la pirámide limitada por el plano $2x - 3y + 6z - 12 = 0$ y los planos coordenados.

32. Hallar el punto en que la recta $L(t) = (1 + t, 2 + 5t, -1 + 6t)$ que se encuentra más cerca al origen.

33. Distancia de un punto a una recta.

    (a) Sea P un punto en espacio y $L : Q + t\mathbf{v}$, $t \in \mathbb{R}$, una recta en el espacio. Demuestre que la distancia de P a la recta L está dada por:

    $$d(P, L) = \frac{\left\| \overrightarrow{QP} \times \mathbf{v} \right\|}{\|\mathbf{v}\|}.$$

    (b) Calcule la distancia del punto $P(1, -2, 3)$ a la recta dada por las ecuaciones $\dfrac{x}{2} = y - 2 = 2z$.

    (c) Determine la distancia entre las rectas $L_1(t) : \begin{cases} x = & 1 - t \\ y = & 2 + t \\ z = & 3 - 2t \end{cases}$ y $L_2(t) : \begin{cases} x = & 2 - t \\ y = & 3 + t \\ z = & 10 - 2t \end{cases}$

34. Distancia entre dos rectas alabeadas.

    (a) Sean $L_1 : A + t\mathbf{u}$ y $L_2 : B + t\mathbf{v}$ dos rectas alabeadas del espacio. Muestre que la distancia entre estas rectas está dada por:

    $$d(L_1, L_2) = \frac{\left| \mathbf{u} \cdot \left(\mathbf{v} \times \overrightarrow{AB} \right) \right|}{\|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\|}$$

    (b) Determine la distancia entre las rectas

    $$L_1 = \frac{x - 1}{2} = \frac{y - 2}{4} = -z + 2,$$
    $$L_2 = x - 3 = \frac{y + 1}{3} = -\frac{z - 1}{2}.$$

35. Distancia de un punto a un plano.

(a) Sea $P(x_o, y_0, z_0)$ un punto en espacio y $\Pi : ax + by + cz = d$ un plano. Demuestre que la distancia de P al plano Π está dada por:

$$d(P, \Pi) = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 - d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

(b) Determine la distancia del punto $P(1, -2, 5)$ al plano $2x - y + 5z = 3$.

(c) Calcule la distancia entre los planos $2x - y + 5z = 3$ y $2x - y + 5z = 9$.