Universidad Industrial de Santander	Universidad Industrial de Santander Escuela de Matemáticas **Ecuaciones Diferenciales** Noviembre 19 de 2025	**Tercer Examen** **Transformada de Laplace** **Valor:** 20 % Prof. Juan Camilo Cala B.

Nombre: **Código:** **Grupo:**

Instrucciones:

- Sea claro y ordenado en cada una de sus respuestas. Respuestas sin sus debidas justificaciones no tienen valor.
- No está permitido el uso de ningún tipo de dispositivo electrónico ni calculadora graficadora, únicamente se admite el uso de una calculadora científica convencional. Violar esta regla será motivo de anulación del examen y su nota será automáticamente **CERO**.
- No está permitido el préstamo de borradores, lápices o cualquier otro implemento durante el examen.
- Resuelva **cada problema en el espacio indicado**.
- Duración del examen: 2h.
- La nota máxima alcanzable en este examen es **3,5**. Puntuar de más no la dará ningún beneficio adicional.

¡Muchos Éxitos!

Parte I. Problemas de análisis de conceptos y comprensión de enunciados. No se requiere justificación de sus respuestas. Utilice **lapicero** para marcar sus respuestas.

Problema 1. [10 pts] Establezca si las siguientes afirmaciones son **falsas** o **verdaderas**.

(*a*) ☐ Para $f(t) = \sinh^2(t) - \cosh^2(t)$, se tiene que $\mathscr{L}\{f(t)\} = -\dfrac{1}{s}$.

(*b*) ☐ Si $\mathscr{L}\{f(t)\} = F(s)$ y $\mathscr{L}\{g(t)\} = G(s)$, entonces $\mathscr{L}^{-1}\{F(s)G(s)\} = f(t)g(t)$.

(*c*) ☐ Si $\mathscr{L}\{f(t)\} = \mathscr{L}\{g(t)\}$, es correcto afirmar que $f(t) = g(t)$ para $t \in [0, \infty)$.

(*d*) ☐ Si $F(s) = \mathscr{L}\{f(t)\}$ y $a, b > 0$, entonces $\mathscr{L}\{e^{at}f(bt)\} = \dfrac{1}{b}F\left(\dfrac{s-a}{b}\right)$.

Problema 2. [10 pts] Preguntas de selección múltiple con única respuesta.

1. Sobre de la función $f(t) = \dfrac{1}{t^2}$ se puede afirmar que

   (a) su transformada de Laplace existe y es $F(s) = -\dfrac{2}{s}$.

   (b) su transformada de Laplace existe pero no tiene una fórmula explícita.

   (c) su transformada de Laplace no existe porque la integral que la define diverge.

   (d) su transformada de Laplace no existe porque la función no está definida en $t = 0$.

2. Considere la función definida por tramos

$$f(t) = \begin{cases} t, & 0 \le t < 1, \\ t+1, & t \ge 1. \end{cases}$$

   La expresión que corresponde a $\mathscr{L}\{f(t)\}$ es

   (a) $\dfrac{1}{s^2}\left(-se^{-s} - e^{-s} + 2\right)$

   (b) $\dfrac{1}{s^2}\left(se^{-s} + 1\right)$

   (c) $\dfrac{1}{s^2}\left(se^{-s} + e^{-s} - 2\right)$

   (d) $\dfrac{1}{s^2}\left(2e^{-s} + 1\right)$

3. La función

$$g(t) = \begin{cases} t^2+1, & 0 \le t < 1, \\ e^{-3t}+1, & 1 \le t < 2, \\ 1, & t \ge 2, \end{cases}$$

   se expresa en términos de funciones escalón unitario como

$$g(t) = f_1(t) + f_2(t)\mathscr{U}(t-1) + f_3(t)\mathscr{U}(t-2).$$

   ¿Cuál de las siguientes opciones corresponde a la función $f_2(t)$?

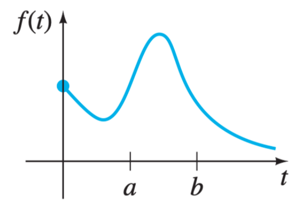
(a) $f_2(t) = e^{-3t} - t^2$

(b) $f_2(t) = e^{-3t} - t^2 + 1$

(c) $f_2(t) = -e^{-3t} + t^2$

(d) $f_2(t) = -e^{-3t} + t^2 - 1$

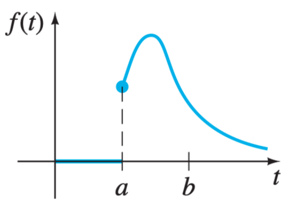
4. La figura muestra la gráfica de una función $f(t)$.



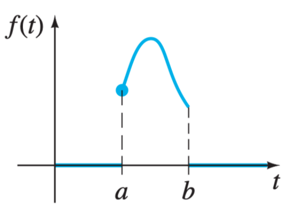
Seleccione la gráfica que corresponde a la función

$$f(t-a)\mathscr{U}(t-a) - f(t-a)\mathscr{U}(t-b).$$

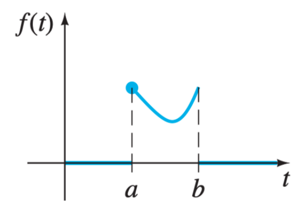
(a)



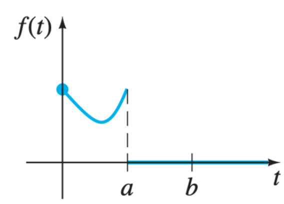
(b)



(c)



(d)



Parte II. Problema tipo ensayo.

Problema 3. [15 pts] Resuelva el PVI

$$y' + y = f(t), \quad y(0) = 5, \quad \text{donde} \quad f(t) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t \leq \pi \\ \cos(t), & t \geq \pi. \end{cases}$$

Solución.