,

Universidad Industrial de Santander

Universidad Industrial de Santander
Escuela de Matemáticas
ÁLGEBRA LINEAL I
26 de octubre de 2023

Taller de refuerzo
Vectores
Álgebra lineal
SEA

SEA-Matemáticas

- Este material fue desarrollado por los profesores de la asignatura álgebra lineal para el disfrute de todo el quiera retarse y aprender con los problemas aquí expuestos.

Taller Vectores en $\mathbb{R}^n$ # 2

Problema 1. Sea ℓ_1 la recta en $\mathbb{R}^3$ que une los puntos $A = (0, -1, 1)$ y $B = (3, 1, -2)$. Halle dos rectas ℓ_2 y ℓ_3 de modo que que las tres rectas tienen en común el punto A y cumplen que cualquier par de ellas son perpendiculares.

Problema 2. Resuelve cada uno de los siguientes incisos:

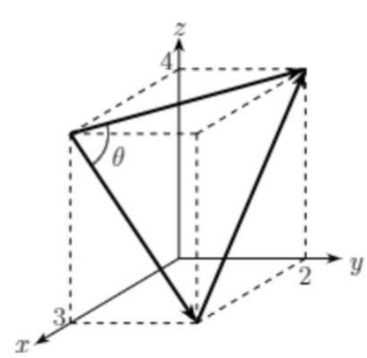
a) Halle la ecuación general del plano Π en $\mathbb{R}^3$ que pasa por los puntos $P = (-1, 3, 6)$, $Q = (0, 0, 14)$ y $R(-2, 5, 0)$.

b) Encuentre el punto $C \in \Pi$ más cercano del punto $A = (-1, -1, -4)$.

c) Usando el ítem b), determine la distancia del punto A al plano Π.

Problema 3. Halle la ecuación general del plano mediatriz a los puntos $A = (-1, 2, 3)$ y $B = (-4, 3, 6)$.

Problema 4. Considere el triángulo formado por los vectores en negrilla de la siguiente figura y determine:



a) El área del triangulo.

b) El perímetro del triangulo y $\cos\theta$.

c) La ecuación general de π, donde π es el plano que contiene el triangulo.

d) La distancia del origen al plano del inciso anterior.

Problema 5. Considere la ecuación vectorial $\vec{X} = P + t(Q - P)$, donde P y Q corresponden a distintos puntos en $\mathbb{R}^2$ o $\mathbb{R}^3$.

a) Diga por qué esta ecuación describe el segmento de recta $\overline{PQ}$ cuando t varía de O a 1.

b) ¿Para cuál valor de t, X es el punto medio de PQ y cuál es X en este caso?

c) Encuentre el punto medio de $\overline{PQ}$ cuando $P = (1, 0, 1)$ y $Q(4, 1, -2)$.

d) Encuentre los dos puntos que dividen $\overline{PQ}$ del inciso anterior en tres partes iguales.

e) Diga para qué valores de t el segmento $\overline{PQ}$ se puede dividir en n partes iguales.

Problema 6. Dados los vértices de un triángulo $A(3, -1, -1)$, $B(1, 2, -7)$, $C(-5, 14, -3)$, halle las ecuaciones simétricas de la recta bisectriz del ángulo interno del vértice B.

Problema 7. La mediatriz de un triángulo es aquella recta que, siendo perpendicular a uno de los lados del triángulo, divide el segmento o lado al que corta en dos partes iguales. Dado el triángulo con vértices $A = (3, -1, -1)$, $B = (1, 2, -7)$ y $C = (-5, 14, -3)$ halle las ecuaciones simétricas de la mediatriz del segmento $\overrightarrow{CA}$.

$\boxed{\textbf{Problema } 8.}$ (a) Sea π un plano, P un punto sobre el plano, n un vector normal al plano y Q un punto fuera del plano. Demuestre que la distancia perpendicular D de Q al plano está dada por

$$D = \left\| proy_n \overrightarrow{PQ} \right\| = \frac{|\overrightarrow{PQ} \cdot n|}{\|n\|}$$

(b) Pruebe que la distancia entre el plano $ax + by + cz = d$ y el punto (x_0, y_0, z_0) está dado por

$$D = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 - d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

$\boxed{\textbf{Problema } 9.}$ Dos caras de un cubo se encuentran en los planos $x - y + z = 4$, y $x - y + z = 3$. ¿Cuál es el volumen del cubo?

(a) 1

(b) $1/\sqrt{3}$

(c) $1/3$

(d) $1/(3\sqrt{3})$

(e) Ninguna de las demás respuestas.

$\boxed{\textbf{Problema } 10.}$ Si el plano $3x - y + az = 5$ es perpendicular a la recta con ecuaciones simétricas $\dfrac{x-1}{b} = \dfrac{y-2}{-3} = \dfrac{z+3}{-6}$, ¿cuál es el valor de $a + b$?

$\boxed{\textbf{Problema } 11.}$ Sea $L : \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} + \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ c \\ -3 \end{bmatrix}$, donde $c \in \mathbb{R}$ y sea $P : 3x + 6y - 2z = 3$

$a)$ ¿Existen valores de c tal que L es paralela a P? Si es así, ¿Cuáles son?

$b)$ ¿Existe un valor de c tal que el punto de intersección entre L y P sea $(-1, 3, 6)$? Explique su razonamiento.

$\boxed{\textbf{Problema } 12.}$ Hallar una ecuación del plano Π que satisface las condiciones siguientes:
i). Contiene los puntos $A = (0, 1, 1)$ y $B = (1, 0, -2)$
ii). Es perperdicular al plano $\Pi_1 : 2x - y + z + 1 = 0$

$\boxed{\textbf{Problema } 13.}$ Considere la recta L y el plano Π definidos por:
$L : \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y+5}{-5} = \dfrac{z+3}{4}$ y $\Pi : 2x + 4y + 4z = 5$.

$a)$ Determine la distancia entre la recta L y el plano Π.

$b)$ Determine la ecuación normal del plano Π_1 tal que tal que es perpendicular al plano Π y contiene la recta L.

SOLUCIONES

Problema 1. Notemos que un vector director para ℓ_1 es $\vec{d_1} = \overrightarrow{AB} = [3-0, 1-(-1), -2-1] = [3, 2, -3]$. para elegir ℓ_2 y ℓ_3, basta con elegir sus vectores directores $\vec{d_2}$ y $\vec{d_3}$ de modo que los vectores $\vec{d_1}$, $\vec{d_2}$ y $\vec{d_3}$ satisfacen que cualquier par de ellos son perpendiculares. Por ejemplo, $\vec{d_2} = [1, 0, 1]$ es perpendicular a $\vec{d_1}$, pues $\vec{d_1} \cdot \vec{d_2} = (3)(1) + (2)(0) + (-3)(1) = 0$. Y podemos tomar $\vec{d_3} = \vec{d_1} \times \vec{d_2} = [2, -6, -2]$. Como queremos que todas tengan en común el punto A, podemos elegir ℓ_2 en forma vectorial dada por

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t \\ -1 \\ 1+t \end{bmatrix}.$$

Y ℓ_3 será la recta con forma vectorial dada por

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 2 \\ -6 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2t \\ -1-6t \\ 1-2t \end{bmatrix}.$$

Problema 2. Para el inciso a), usaremos la forma normal de la ecuación de un plano, de la cual desconocemos un vector normal al plano. En este caso podemos elegir como vector normal a $\vec{n} = \overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR}$. Tenemos que

$$\overrightarrow{PQ} = [0-(-1), 0-3, 14-6] = [1, -3, 8]$$

y

$$\overrightarrow{PR} = [-2-(-1), 5-3, 0-6 = [-1, 2, -6].$$

Así, $\vec{n} = \overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR} = [2, -2, -1]$ y de la forma normal obtenemos la ecuación genral como sigue:

$$\begin{gathered} \vec{n} \cdot (\vec{X} - \vec{Q}) = 0 \\ \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix} \cdot \left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 14 \end{bmatrix} \right) = 0 \\ 2x - 2y - (z-14) = 0 \\ -2x + 2y + z = 14. \end{gathered}$$

Para hallar el punto C del inciso b), determinamos el punto de intersección de la recta ℓ que pasa por el punto A y es perpendicular al plano Π. Observe que podemos tomar como vector director de ℓ al vector normal de Π, $\vec{n} = [-2, 2, 1]$. Así, una forma vectorial de la recta ℓ es

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ -4 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1-2t \\ -1+2t \\ -4+t \end{bmatrix}.$$

Para determinar la intersección, sustituimos x, y y z en la ecuación general del plano Π. Así,

$$\begin{gathered} -2(-1-2t) + 2(-1+2t) + (-4+t) = 14 \\ 2 + 4t - 2 + 4t - 4 + t = 14 \\ 9t = 18 \\ t = 2. \end{gathered}$$

Luego, el punto que buscamos es $C = (-1-2(2), -1+2(2), -4+2) = (-5, 3, -2)$.

Para el inciso c), tenemos que la distancia de A al plano Π es $\|\overrightarrow{CA}\|$;esto es,

$$\|\overrightarrow{CA}\| = \|[-1-(-5), -1-3, -4-(-2)]\| = \|[4, -4, -2]\| = \sqrt{34}.$$

Problema 3. El plano Π que buscamos es un plano que pasa por el punto medio de A y B y que es perpendicular al segmento de recta que une A y B. Así, un vector normal para el plano es $\vec{n} = \overrightarrow{AB} = [-4-(-1), 3-2, 6-3] = [-3, 1, 3]$. Además un punto por el que pasa dicho plano es

$$P = \frac{A+B}{2} = \left(\frac{-1+(-4)}{2}, \frac{2+3}{2}, \frac{3+6}{2} \right) = \left(-\frac{5}{2}, \frac{5}{2}, \frac{9}{2} \right).$$

Luego, usando la forma normal, obtenemos la ecación general del plano Π como sigue:

$$\begin{gathered} \vec{n} \cdot (\vec{X} - \vec{P}) = 0 \\ \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} \cdot \left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -5/2 \\ 5/2 \\ 9/2 \end{bmatrix} \right) = 0 \\ -3\left(x + \frac{5}{2}\right) + \left(y - \frac{5}{2}\right) + 3\left(z - \frac{9}{2}\right) = 0 \\ -3x + y + 3z - \frac{47}{2} = 0 \\ -6x + 2y + 6z = 47. \end{gathered}$$

$\boxed{\textbf{Problema } 4.}$ De acuerdo a la figura se tienen 3 puntos $A = (3, 0, 4)$, $B = (3, 2, 0)$, $C = (0, 2, 4)$ y de esta manera se definen los vectores $u = \overline{AB} = B - A = (0, 2, -4)$ y $v = \overline{AC} = C - A = (-3, 2, 0)$. Así, el área del triangulo es de la forma

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{2}\,\|u \times v\| \\ &= \frac{1}{2}\,\|(8, 12, 6)\| \\ &= \sqrt{61}. \end{aligned}$$

Para determinar el perímetro del triangulo, recordando la ley del triangulo se deben calcular las magnitudes de los vectores $u, v, v - u$. Por tanto

$$\begin{aligned} P &= \|u\| + \|v\| + \|v - u\| \\ &= 2\sqrt{5} + \sqrt{13} + 5 \end{aligned}$$

Además

$$\begin{aligned} \cos\theta &= \frac{u \cdot v}{\|u\|\,\|v\|} \\ &= \frac{(0, 2, -4) \cdot (-3, 2, 0)}{\|(0, 2, -4)\|\ \ \|(-3, 2, 0)\|} \\ &= \frac{2}{\sqrt{65}} \end{aligned}$$

Para obtener la ecuación del plano π que contiene el triangulo, usaremos la forma normal del plano, donde $n = u \times v = (8, 12, 6)$ y $A = (3, 0, 4)$, así

$$\begin{gathered} n \cdot X = n \cdot A \\ 8x + 12y + 6x = 48 \end{gathered}$$

Por ultimo, para calcular la distancia del plano con respecto al origen $(x_0, y_0, z_0) = (0, 0, 0)$ usaremos la siguiente formula de distancia entre un punto y un plano:

$$\begin{aligned} d(0, \pi) &= \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 - d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \\ &= \frac{48}{\sqrt{61}} \end{aligned}$$

$\boxed{\textbf{Problema } 5.}$ Para ver que la ecuación $\vec{X} = P + t(Q - P)$ describe el segmento de recta $\overline{PQ}$ cuando t varía de O a 1 basta observar que cuanto $t = 0$ el vector tiene como punto inicial a P y cuanto $t = 1$ se obtiene el punto final Q. En efecto, ya que si $t = 0$ entonces

$$\begin{aligned} X &= P + 0(Q - P) \\ &= P \end{aligned}$$

Mientras que si $t = 1$ entonces

$$\begin{aligned} X &= P + 1(Q - P) \\ &= P + Q - P \\ &= Q \end{aligned}$$

Para el inciso $b)$ el problema de calcular el punto medio del segmento de recta $\overline{PQ}$, donde $t \in [0, 1]$ se reduce a dividir el intervalo $[0, 1]$ en dos partes, es decir, cuando $t = \frac{1}{2}$. Se tiene que

$$
\begin{aligned}
X &= P + \frac{1}{2}(Q - P) \\
&= P + \frac{1}{2}Q - \frac{1}{2}P \\
&= \frac{1}{2}P + \frac{1}{2}Q \\
&= \frac{1}{2}(P + Q)
\end{aligned}
$$

Para el inciso $c)$ debemos aplicar la formula del inciso anterior para $P = (1,0,1)$ y $Q = (4,1,-2)$. Sea P_m el punto medio entre P y Q, por tanto

$$
\begin{aligned}
P_m &= \frac{1}{2}(P + Q) \\
&= \frac{1}{2}\big((1,0,1) + (4,1,-2)\big) \\
&= \frac{1}{2}(5,1,-1) \\
&= \left(\frac{5}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)
\end{aligned}
$$

Para el inciso $d)$ y de manera similar al inciso $b)$ el problema se reduce a dividir el intervalo $[0,1]$ en tres partes. Sean P_{t_1} y P_{t_2} los puntos cuando $t_1 = \frac{1}{3}$ y $t_2 = \frac{2}{3}$ respectivamente, entonces

$$
\begin{aligned}
P_{t_1} &= \frac{1}{3}(P + Q) \\
&= \frac{1}{3}(5,1,-1) \\
&= \left(\frac{5}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
P_{t_2} &= \frac{2}{3}(P + Q) \\
&= \frac{2}{3}(5,1,-1) \\
&= \left(\frac{10}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\right)
\end{aligned}
$$

Para el inciso $e)$ y de acuerdo a todos los incisos anteriores podemos concluir que el problema de dividir el segmento $\overline{PQ}$ en n partes iguales es equivalente a dividir el intervalo $[0,1]$ en n partes iguales, que es un problema mucho más sencillo. Así, podemos concluir que los valores son de la forma

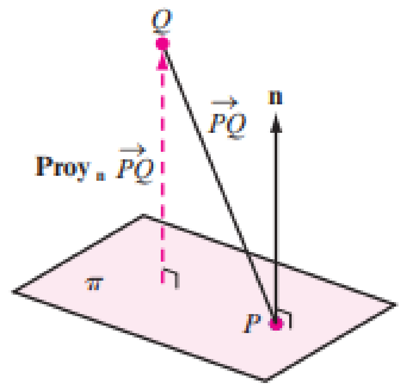
$$
\begin{aligned}
t_1 &= \frac{1}{n} \\
t_2 &= \frac{2}{n} \\
&\vdots \\
t_{n-1} &= \frac{n-1}{n}
\end{aligned}
$$

$\boxed{\textbf{Problema } 6.}$ Dado un rombo, las diagonales bisecan a

los ángulos interiores de cada vértice. Para construir la bisectriz, note que su vector director será $w = \dfrac{\overrightarrow{BA}}{||BA||} + \dfrac{\overrightarrow{BC}}{||BC||}$ (haga un bosquejo) y pasa por B.

$\boxed{\textbf{Problema } 7.}$

$\boxed{\textbf{Problema } 8.}$ (a) Considere la figura



es claro que

$$D = \left\| proy_n \overrightarrow{PQ} \right\| = \left\| \frac{\overrightarrow{PQ} \cdot n}{\|n\|^2} n \right\| = \frac{|\overrightarrow{PQ} \cdot n|}{\|n\|^2} \|n\| = \frac{|\overrightarrow{PQ} \cdot n|}{\|n\|}$$

(b) Del punto anterior

$$D = \frac{|\overrightarrow{PQ} \cdot n|}{\|n\|}$$

como $P = (x, y, z)$ está en el plano entonces $\overrightarrow{PQ} = (x_0 - x, y_0 - y, z_0 - z)$ y $n = (a, b, c)$, por tanto

$$D = \frac{|\overrightarrow{PQ} \cdot n|}{\|n\|} = \frac{|a(x_0 - x) + b(y_0 - y) + c(z_0 - z)|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 - (ax + by + cz)|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

$$\boxed{= \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 - d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}}$$

Problema 9. $1/(3\sqrt{3})$

Problema 10. 7

Problema 11. $a)$ Dado la recta L debe ser paralela al plano P, la relación entre el vector normal n del plano P y el vector director d de la recta L es: $d \perp n$. Es decir, $n.d = 0$.
Por lo tanto, $[1, c, 3-] = [3, 6, -2] = 0 \Rightarrow 3 + 6c + 6 = 0 \Rightarrow c = \frac{-3}{2}$.

$b)$ Para determinar que el punto esta en la intersección de L y P es necesario garantizar que $(-1, 3, 6)$ esté tanto en la recta L como en el plano P. Veamos que está en P:
$3(-1) + 6(3) - 2(6) = 3$, por lo tanto el punto, verifica la ecuación normal de P, es decir, pertenece a P. Ahora veamos si es posible que pertenezca a L. Considere las ecuaciones paramétricas de L:
$\begin{cases} x = 1 + \alpha \\ y = -1 + c\alpha \\ z = -3\alpha \end{cases}$. Tomando el punto $(-1, 3, 6)$ y remplazando en x, y, z se tiene que: $\begin{cases} -1 = 1 + \alpha \\ 3 = -1 + c\alpha \\ 6 = -3\alpha \end{cases}$

Para garantizar que el punto pertenezca debe existir un solo valor de α y c que verifica simultáneamente las ecuaciones. De la primera y la tercera ecuación se tiene que $\alpha = -2$, por lo tanto, $3 = -1 - 2c$, es decir, $c = -2$. En conclusión, cuando $c = -2$ se cumple que la intersección de L con P es el punto $(-1, 3, 6)$. $\square$

Problema 12. Sea $\Pi : ax + by + cz + d = 0$ una ecuación del plano. Entonces como $A = (0, 1, 1)$ y $B = (1, 0, -2)$ están contenidos en Π se tiene que

$$a(0) + b(1) + c(1) + d = 0 \Longrightarrow b + c + d = 0,$$
$$a(1) + b(0) + c(-2) + d = 0 \Longrightarrow a - c + d = 0.$$

Por otra parte, si el plano es perpendicular al plano Π_1, entonces sus vectores normales también son perpendiculares, esto es $(a, b, c) \cdot (2, -1, 1) = 0$, es decir

$$2a - b + c = 0.$$

De las ecuaciones anteriores se plantea el sistema de ecuaciones $\begin{cases} b + c + d = 0 \\ a - c + d = 0 \\ 2a - b + c = 0 \end{cases}$ cuya solución es $a = -\frac{2}{3}, b = -\frac{7}{6}$ y $c = \frac{1}{6}$.
Sustituyendo los valores obtenidos para a, b, c en una ecuación $ax + by + cz + d = 0$, se obtiene

$$ax + by + cz + d = 0 \Longleftrightarrow -\frac{2}{3}x - \frac{7}{6}y + \frac{1}{6}z + d = 0.$$

Por último, para encontrar el valor de d, se sustituye en una ecuación las coordenadas de un punto del plano, que en este caso puede ser A o B. $\square$

Problema 13. $a)$ Como la recta L es paralela a Π entonces $d(L,\Pi) = d(Q,\Pi)$ donde Q es cualquier punto de la recta L. Entonces elegir un punto Q de la recta L, tomemos $Q = (1,-5,-3)$. Por otra parte, elegir un punto P del plano Π, sea $P = \left(\frac{1}{2},0,1\right)$. Calcular el vector $\mathbf{PQ}$, en este caso: $\mathbf{PQ} = \left(\frac{1}{2},0,1\right) - (1,-5,-3) = \left(-\frac{1}{2},5,4\right)$. Dar un vector normal al plano, en este caso podemos tomar $\mathbf{n} = (2,4,4)$.

Calcular $\operatorname{proy}_{\mathbf{n}}^{\mathbf{PQ}} = \dfrac{\mathbf{PQ}\cdot\mathbf{n}}{\|\mathbf{n}\|^2}\cdot\mathbf{n} = \dfrac{\left(-\frac{1}{2},5,4\right)\cdot(2,4,4)}{36}\cdot(2,4,4) = \dfrac{35}{36}(2,4,4)$.

Finalmente, $d(L,\Pi) = d(Q,\Pi) = \left\|\operatorname{proy}_{\mathbf{n}}^{\mathbf{PQ}}\right\|$. Entonces:

$$\left\|\frac{35}{36}(2,4,4)\right\| = \left|\frac{35}{26}\right| \|(2,4,4)\| = \frac{35}{36}\cdot 6 = \frac{35}{6}$$

Luego, $d(L,\Pi) = \frac{35}{6}$.

$b)$ Consideremos $\Pi_1 : ax+by+cz+d = 0$ una ecuación normal del plano. De acuerdo a las condiciones que se deben cumplir se tiene que:

a.) $\Pi_1 \perp \Pi \Longrightarrow \mathbf{n}_{\Pi_1}\cdot\mathbf{n}_{\Pi} = 0$.

b.) $L \subset \Pi_1 \Longrightarrow \mathbf{v} \perp \mathbf{n}_{\Pi_1}$.

Luego, se cumple que $\mathbf{n}_{\Pi_1} = \mathbf{n}_{\Pi}\times\mathbf{v}$, así: $\mathbf{n}_{\Pi_1} = \mathbf{n}_{\Pi}\times\mathbf{v} = \begin{vmatrix} \hat{\boldsymbol{\imath}} & \hat{\boldsymbol{\jmath}} & \hat{\boldsymbol{k}} \\ 2 & 4 & 4 \\ 2 & -5 & 4 \end{vmatrix} = (36,0,-18)$ Considerando que L está contenida en Π_1 entonces cualquier punto de la recta es también un punto del plano, en particular tome $P = (1,-5,-3)$, lo que implica que

$$36x - 18z + d = 0 \Longrightarrow 36(1) - 18(-3) + d = 0 \Longrightarrow d = -90$$

una ecuación del plano Π_1 es $36x - 18z = 90$, simplificando: $\Pi_1 : 2x - z = 5$. $\square$