Universidad Industrial de Santander
Escuela de Matemáticas
Profesor: Andrés Fabián Leal Archila
Lista 2 del curso **Álgebra Lineal I**
Fecha: 30 de octubre de 2022.

Instrucciones

- Recuerde que esta lista no se entrega, es para estudio personal.

---

1. Definiciones recursivas

   1) Se tienen palabras de 10 letras que usan los símbolos a, b y c. Se llama palabra a cualquier posible combinación de estas letras, por ejemplo, aaa o abc son palabras de tres letras. ¿Cuántas de estas palabras de 10 letras no tienen dos a o dos b consecutivas?

      Sugerencia: Defina x_n como las palabras de n letras que terminan en a, y_n como las palabras de n letras que terminan en b y z_n las palabras de n letras que terminan en c y aumente el número de letras progresivamente. Aproveche la simetría de la construcción de las palabras.

   2) Una cuenta de banco paga $1\,\%$ de ganancia cada año y cobra $\$10000$ anualmente por el mantenimiento de la cuenta. Si Andrea ingresa $\$2'000{,}000$ y no realiza ningún movimiento en la cuenta durante 7 años, ¿Ganará o perderá dinero? Determine la cantidad que habrá en la cuenta después de los 7 años.

   3) Una sucesión aritmética es una sucesión en la cual de un término al siguiente siempre hay una misma diferencia. Si el término inicial es a_0 y la diferencia es d, entonces $a_1 = a_0 + d$ y $a_n = a_{n-1} + d$. De acuerdo a esto, resuelva los siguientes problemas:

      $a)$ Una sucesión aritmética tiene término $a_0 = 1$ y diferencia 7. ¿Cuál es el valor de a_{289}? Establezca una fórmula que le permita calcular a_n y a partir de esta, calcule la suma de los primeros n números de la sucesión.

      $b)$ Repita el proceso del ítem anterior para los siguientes valores de a_0 y d:

      - $a_0 = 3$, $d = 5$.
      - $a_0 = 7$, $d = \dfrac{1}{2}$.
      - $a_0 = 1$, $d = 7$.

      $c)$ Una sucesión aritmética cumple que $a_{10} = 100$ y $a_{20} = 120$. ¿Cuál es el valor de a_{30}?

      $d)$ Se conoce que una sucesión aritmética de números enteros toma el valor 2011 y el valor 1999. ¿Cuáles son los posibles valores de la diferencia de la sucesión?

      $e)$ Demuestre que si (a_n) es una sucesión aritmética de diferencia $d \neq 0$, entonces:

      $I.$ $\dfrac{a_i + a_{i+2}}{2} = a_{i+1}$.

      $II.$ $a_{i-1}a_{i+1} + d^2 = a_i^2$.

      $III.$ $\dfrac{1}{a_i a_{i+1}} = \dfrac{1}{d}\left(\dfrac{1}{a_i} - \dfrac{1}{a_{i+1}}\right)$.

   4) Una sucesión geométrica es una sucesión en la cual de un término al siguiente siempre se multiplica por una razón r. Por ejemplo, si el número inicial es $a_0 = a$, y la razón es r, entonces $a_1 = ra$ y $a_n = r^n a$. De acuerdo a esto, resuelva los siguientes problemas:

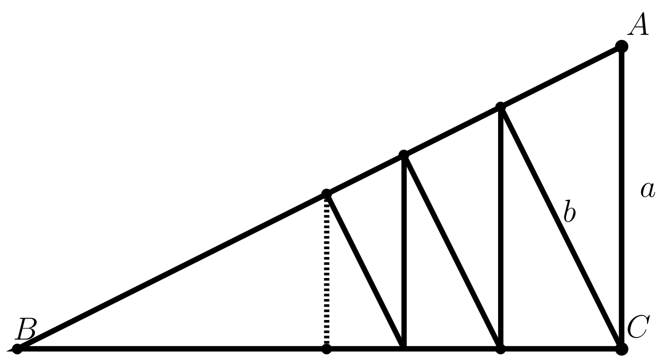
      $a)$ La sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ cumple que $a_0 = 1$, $a_1 = 3$ y $a_{n+2} = 5a_{n+1} - 6a_n$. Encuentre los primeros términos de $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y un patrón para la fórmula general. Verifique que efectivamente funciona.

b) Suponga que r es un número real que cumple $|r| < 1$. Demuestre que la sucesión $1, r, r^2, r^3, \ldots, r^n$ es una sucesión geométrica. Determine una fórmula general para $\sum_{k=1}^{n}\left(r^k\right)$.

c) Dados los siguientes valores de a_0 y r calcule una fórmula general para a_n. Use el ítem anterior para calcular $\sum_{k=1}^{n}\left(a_n\right)$.

- $a_0 = 3$, $r = \frac{1}{5}$.
- $a_0 = 7$, $r = \frac{1}{3}$.
- $a_0 = 1$, $r = \frac{1}{7}$.

5) En la siguiente figura se ha construido una línea poligonal entre los lados del triángulo ABC de la siguiente manera: el primer segmento AC es perpendicular a BC y de longitud b, el segundo segmento inicia donde terminó el segmento anterior, es perpendicular a AB y de longitud a, luego los siguientes segmentos inician donde terminan los anteriores y son perpendiculares a BC y a AB alternadamente.



a) ¿Cuál es la longitud del $n-$ésimo segmento?

b) ¿Cuál es la longitud de la poligonal si tiene n lados?

2. Sumatorias telescópicas

Use la propiedad telescópica de las sumatorias para resolver las siguientes sumatorias.

Sugerencia: Use Wolfram Alpha para verificar sus respuestas.

1) $\sum_{k=1}^{150}\left(\sqrt{k} - \sqrt{k+1}\right)$.

2) $\sum_{k=1}^{50}\ln\left(\frac{k}{k+1}\right)$. *Sugerencia:* Recuerde que $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)$.

3) $\sum_{k=1}^{300}\left(\frac{2k+1}{(k^2+k)^2}\right)$. *Sugerencia:* Factorice el denominador y use fracciones parciales.

4) $\sum_{k=1}^{400}\left(\frac{-1}{k^2+5k+6}\right)$. *Sugerencia:* Factorice el denominador y use fracciones parciales.

5) $\sum_{k=1}^{600}\left(\frac{1}{k^2+4k}\right)$. *Sugerencia:* Factorice el denominador y use fracciones parciales.

3. Teorema del binomio

1) Demuestre que $\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i} = 2^n$. *Sugerencia:* Use el binomio $(1+1)^n$.

2) Determine el coeficiente de $x^{35}y^{50}$ en la expansión de $(9x+3y)^{85}$.

3) Demuestre que $\sum_{i=0}^{n}(-1)^i\binom{n}{i}=0$. *Sugerencia:* Use el binomio $(1+(-1))^n$.

"Si la gente no piensa que las matemáticas son simples, es sólo porque no se dan cuenta de lo complicada que es la vida"

John von Neumann.
