Facultad de Ciencias
Escuela de Matemáticas
Examen Final Cálculo III
Junio, 5 2025

Nombre: ______________________________ **Código:** __________ **Nota** _______

Lea con atención las siguientes instrucciones:

- No se permite el uso de calculadoras, ni de teléfonos celulares, ni *smartwatch*, ni audífonos, ni ningún aparato eléctrico o electrónico durante el examen. En el caso de encontrarse alguno de estos elementos en el puesto de trabajo, se anulará el examen, y su calificación será 0,0.
- Después de recibir el tema del examen, retirarse del salón se entenderá como la entrega de este.
- No se permite el préstamo de borradores, reglas, lápices, etc., ni el uso de hojas diferentes a las del tema entregado.
- El profesor no responderá preguntas, porque parte de la evaluación es la comprensión de los enunciados.

Ejercios: *Use los espacios en blanco de la hoja y la última pagina para hacer cálculos.*

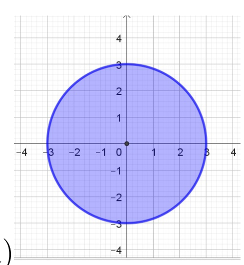
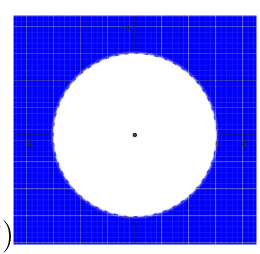
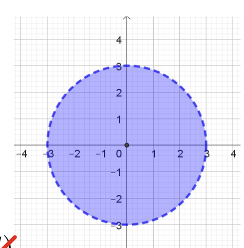
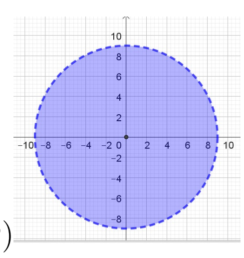
I. Para los siguientes ejercicios marque con una X la respuesta correcta. (*Valor: dos (2.0) unidades*)

1) Dada la curva $\alpha(t) = \langle t, \ln(t^2), \sin(\pi t)\rangle$, un vector director a la recta tangente a α en el punto $(1,0,0)$ es:

X A) $\langle 1, 2, -\pi\rangle$ B) $\langle 1, -1, \pi\rangle$ C) $\langle 1, 2, \pi\rangle$ D) $\langle 1, 1, -\pi\rangle$

$$\mathbf{r}'(t) = \left\langle 1, \frac{2t}{t^2}, \pi\cos(\pi t)\right\rangle, \text{ luego } \mathbf{r}'(1) = \langle 1, 2, -\pi\rangle.$$

2) ¿Cuál de la siguientes figuras representa el dominio de la función $f(x,y) = \frac{1}{\sqrt{9-x^2-y^2}}$?

A)  B)  X C)  D) 

$$\mathrm{Dom}(f) = \{(x,y) : x^2 + y^2 < 3\}.$$

3) ¿El siguiente razonamiento es verdadero o falso?:

$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \dfrac{x^3 y}{x^6 + y^2} = 0$, puesto que al evaluar el límite por cualquier recta que pasa por el origen, $y = mx$, se comprueba que el límite es 0

A) Verdadero X B) Falso

Falso, No se evalúan límites por trayectorias. Por ejemplo, $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \dfrac{x^3 y}{x^6 + y^2} = 0$, por cualquier recta que pasa por el origen $y = mx$, pero por la trayectoria $y = x^3$ la función tiende a $\dfrac{1}{2}$.

4) Sea $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ una función tal que

$$\nabla f(x,y,z) = \left\langle -3x + y^2, x - 5z, x + z^2 \right\rangle .$$

Entonces se verifica que la derivada direccional de f en el punto $(1,0,0)$, según la dirección del vector $\mathbf{v} = \langle 0,1,1 \rangle$, es:

A) 1 B) -3 C) 2 D) $\sqrt{2}$

$$D_{\mathbf{v}} f(1,0,0) = \nabla f(1,0,0) \cdot \frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|} = \langle -3, 1, 1 \rangle \cdot \left\langle 0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right\rangle = \sqrt{2}.$$

5) ¿La siguiente afirmación es verdadera o falsa?:
La función $\rho = \cot(\phi)\csc(\phi)$ está en coordenadas esféricas, $[(\rho, \theta, \phi)]$. Su representación en coordenadas rectangulares es $z = x^2 + y^2$.

A) Verdadero B) Falso

$$\rho = \cot\phi \csc\phi \implies \rho = \frac{\cos\phi}{\sin\phi}\frac{1}{\sin\phi} = \frac{\cos\phi}{\sin^2\phi}.$$

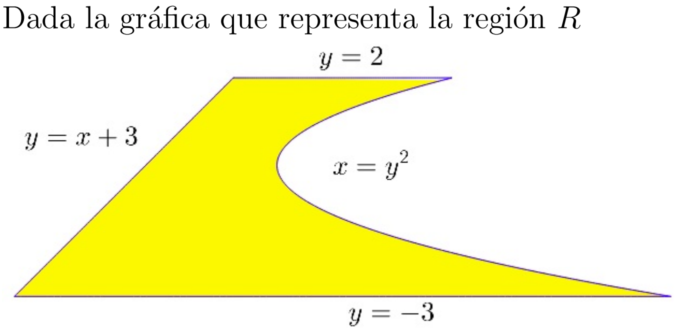
Como

$$\cos\phi = \frac{z}{\rho}, \quad \sin^2\phi = \frac{x^2+y^2}{\rho^2},$$

se obtiene

$$\rho = \frac{(z/\rho)}{(x^2+y^2)/\rho^2} = \frac{z\,\rho}{x^2+y^2} \implies z = x^2 + y^2.$$

6) Dada la gráfica que representa la región R



La integral que represente el área de R es

A) $\iint_R dA = \int_{-3}^{2}\int_{y-3}^{y^2} dxdy$ B) $\iint_R dA = \int_{-4}^{2}\int_{y-3}^{2y} dxdy$

C) $\iint_R dA = \int_{-6}^{9}\int_{-3}^{2} dydx$ D) $\iint_R dA = \int_{-4}^{2}\int_{y-3}^{2y} dxdy$

II. Ejercicios de preguntas abiertas con solución analítica. (*Valor: tres (3.0) unidades*)

7) Calcule los valores máximo relativo, mínimo relativos y los puntos de silla de la función $f(x,y) = 3xy - x^2y - xy^2$.

$$f_x = \frac{\partial f}{\partial x} = 3y - 2xy - y^2$$

$$f_y = \frac{\partial f}{\partial y} = 3x - x^2 - 2xy$$

Resolvemos el sistema $f_x = 0,\ f_y = 0$:

$$\begin{cases} 3y - 2xy - y^2 = 0 \\ 3x - x^2 - 2xy = 0 \end{cases}$$

Soluciones: $(0,0),\ (3,0),\ (0,3),\ (1,1)$

Usando el criterio segunda derivada

$(0,0)$: $H = 0 \cdot 0 - 3^2 = -9 < 0 \quad \Rightarrow$ Punto silla

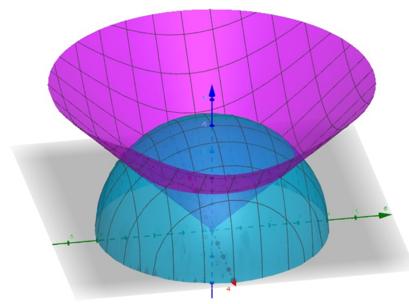
$(3,0)$: $H = 0 \cdot (-6) - (-3)^2 = -9 < 0 \quad \Rightarrow$ Punto silla

$(0,3)$: $H = (-6) \cdot 0 - (-3)^2 = -9 < 0 \quad \Rightarrow$ Punto silla

$(1,1)$:
$H = (-2)(-2) - (-1)^2 = 3 > 0$
$f_{xx} = -2 < 0 \quad \Rightarrow$ Máximo relativo

8)

Dado el sólido S acotado por las gráficas de $z = \sqrt{16 - x^2 - y^2}$ y $z = \sqrt{x^2 + y^2}$.



a) Plantee una integral para el volumen de S en coordenadas rectangulares.

$$V = \int_{-\sqrt{8}}^{\sqrt{8}} \int_{-\sqrt{8-x^2}}^{\sqrt{8-x^2}} \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{\sqrt{16-x^2-y^2}} dz\, dy\, dx.$$

b) Plantee una integral para el volumen de S en coordenadas cilíndricas.

$$V = \int_0^{2\pi} \int_0^{2\sqrt{2}} \int_r^{\sqrt{16-r^2}} r\, dz\, dr\, d\theta.$$

c) Plantee una integral para el volumen de S en coordenadas esféricas.

$$V = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/4} \int_0^{4} \rho^2 \sin\phi\, d\rho\, d\phi\, d\theta.$$

d) Calcule el volumen de S usando la integral más simple de las tres anteriores.

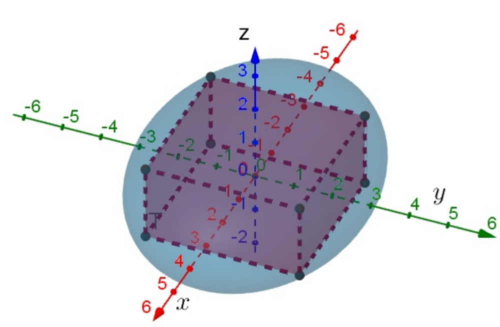
$$V = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/4} \int_0^{4} \rho^2 \sin(\phi)\ d\rho d\phi d\theta = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/4} [\frac{\rho^3}{3}]_0^4 \sin(\phi)\ d\phi d\theta$$

$$= \frac{4^3}{3} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/4} \sin(\phi)\ d\phi d\theta = \frac{4^3}{3} \int_0^{2\pi} \left[-\cos(\phi)\right]_0^{\pi/4} d\theta$$

$$= \frac{4^3}{3} [\frac{-\sqrt{2}}{2} + 1] \int_0^{2\pi} d\theta = \frac{4^3}{3} [\frac{-\sqrt{2}}{2} + 1] 2\pi = \frac{4^3}{3} [2 - \sqrt{2}] \pi$$

9)

Use el método de los multiplicadores de Lagrange para encontrar el volumen máximo de una caja inscrita en el elipsoide $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{4} = 1$



Si (x, y, z) es el vértice de la caja en el primer octante $(x > 0,\ y > 0,\ z > 0)$ entonces el volumen a maximizar está dado por la función $V(x, y, z) = 8xyz$. Como los vértices de la caja están sobre el elipsoide $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{4} = 1$, entonces tenemos la restricción dada por la función $g(x, y, z) = \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{4} - 1$. Así, tenemos que

$$\begin{cases} \nabla V = \lambda \nabla g \\ \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{4} = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial V}{\partial x} = \lambda \frac{\partial g}{\partial x} \\ \frac{\partial V}{\partial y} = \lambda \frac{\partial g}{\partial y} \\ \frac{\partial V}{\partial z} = \lambda \frac{\partial g}{\partial z} \\ \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{4} = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 8yz = \lambda \frac{2x}{16} \\ 8xz = \lambda \frac{2y}{9} \\ 8xy = \lambda \frac{2z}{4} \\ \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{4} = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4yz = \lambda \frac{x}{16} \\ 4xz = \lambda \frac{y}{9} \\ 4xy = \lambda \frac{z}{4} \\ \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{4} = 1 \end{cases}$$

Suponiendo $x > 0,\ y > 0,\ z > 0$ y despejando λ de la primera y segunda ecuación, y luego igualando, tenemos $\frac{x^2}{16} = \frac{y^2}{9}$. De la misma forma, de la segunda y la tercera ecuación se tiene $\frac{y^2}{9} = \frac{z^2}{4}$. Reemplazando estas expresiones en la última ecuación tenemos $3\frac{x^2}{16} = 1$, de donde se optiene que $x = \frac{4}{\sqrt{3}}$ y por lo tanto $y = \frac{3}{\sqrt{3}}$ y $z = \frac{2}{\sqrt{3}}$. Así, el volumen máximo de la caja será

$$V(\frac{4}{\sqrt{3}}, \frac{3}{\sqrt{3}}, \frac{2}{\sqrt{3}}) = 8\frac{(4)(3)(2)}{3\sqrt{3}}$$