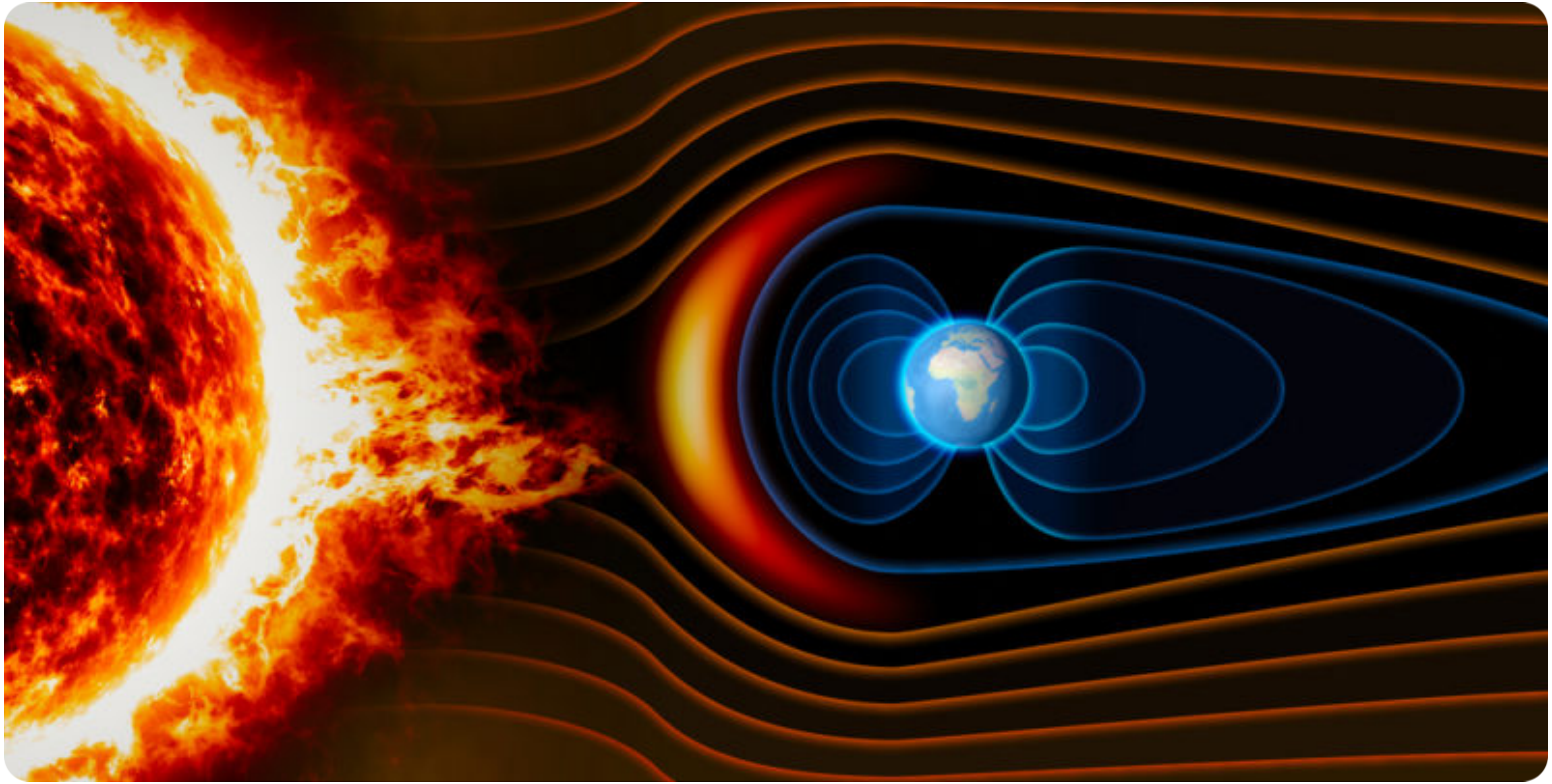
Física II

Módulo 3: Corriente y campos magnéticos

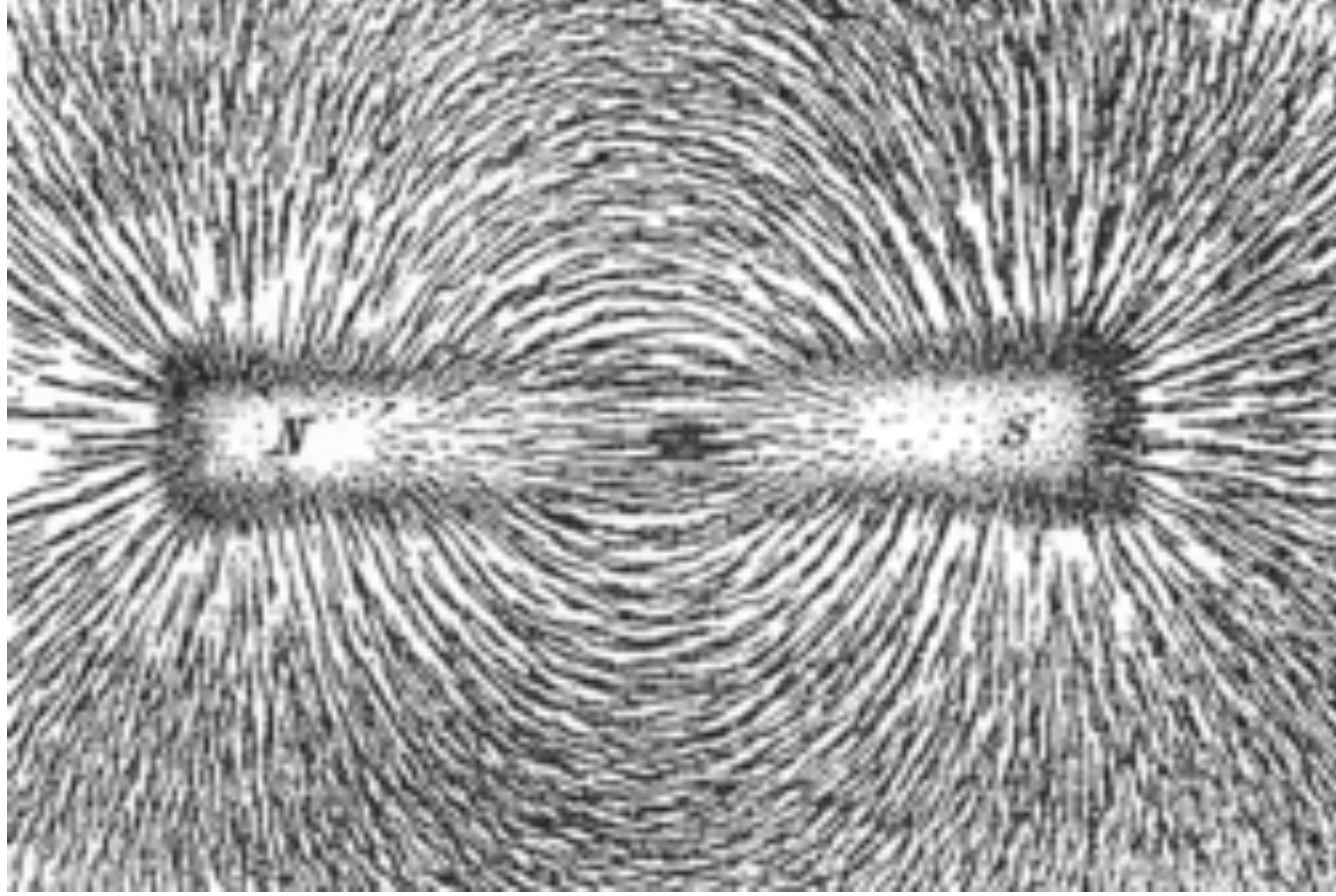


Héctor Hernández - 2025

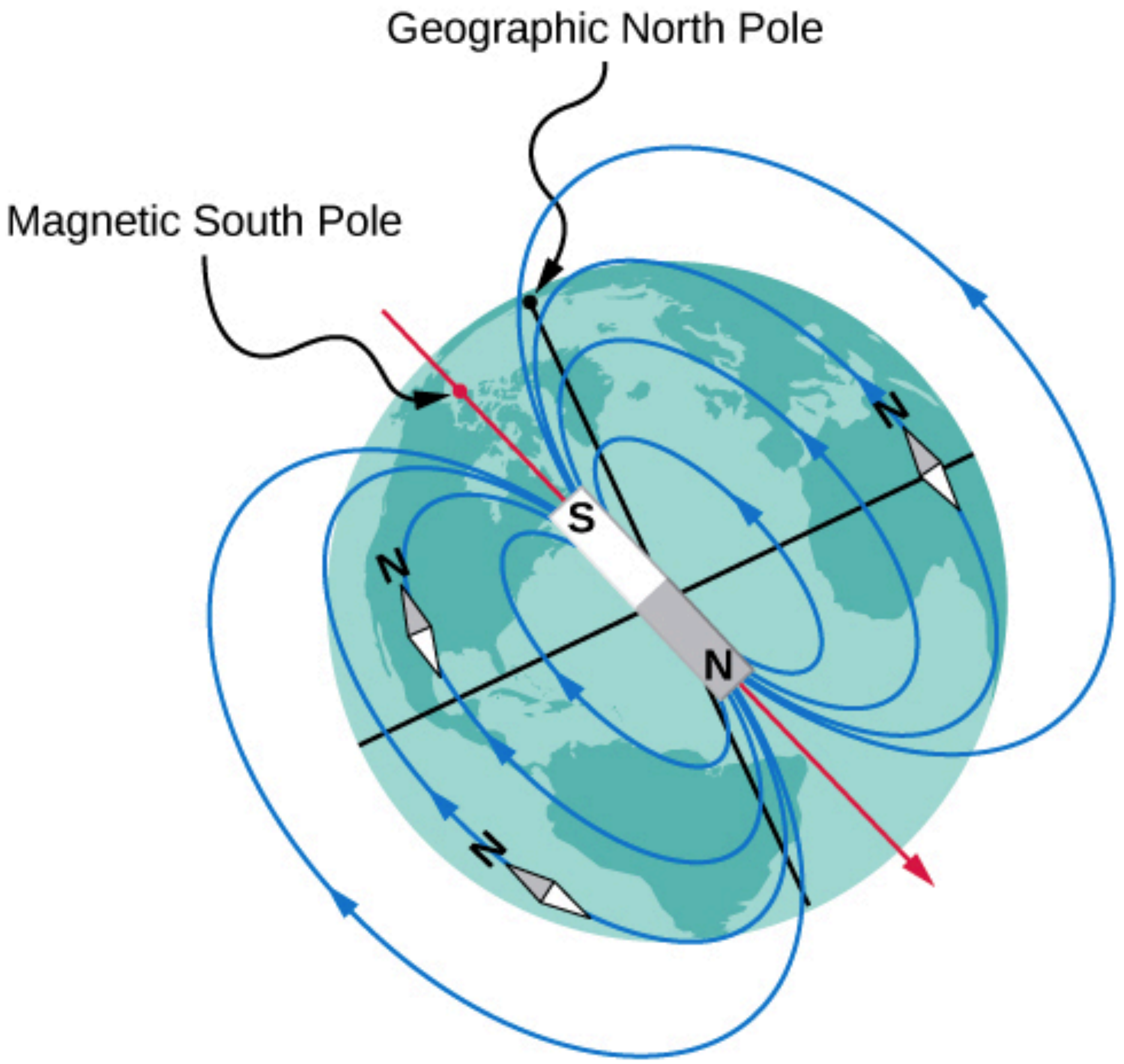
9 - Introducción al magnetismo

1. Magnetismo
2. Fuerza de Lorentz
3. Fuerza magnética sobre alambres
4. Torques magnéticos

1 Magnetismo



- El magnetismo se conoce desde la época de los antiguos griegos, pero siempre ha sido un tema con algo de misterio.
- Podemos ver la electricidad en el destello de un rayo, pero cuando la aguja de una brújula apunta al norte magnético, no se ve ninguna fuerza que la haga girar.
- Las propiedades magnéticas se fueron conociendo poco a poco, a lo largo de muchos años, antes de que varios físicos del siglo XIX relacionaran el magnetismo con la electricidad.



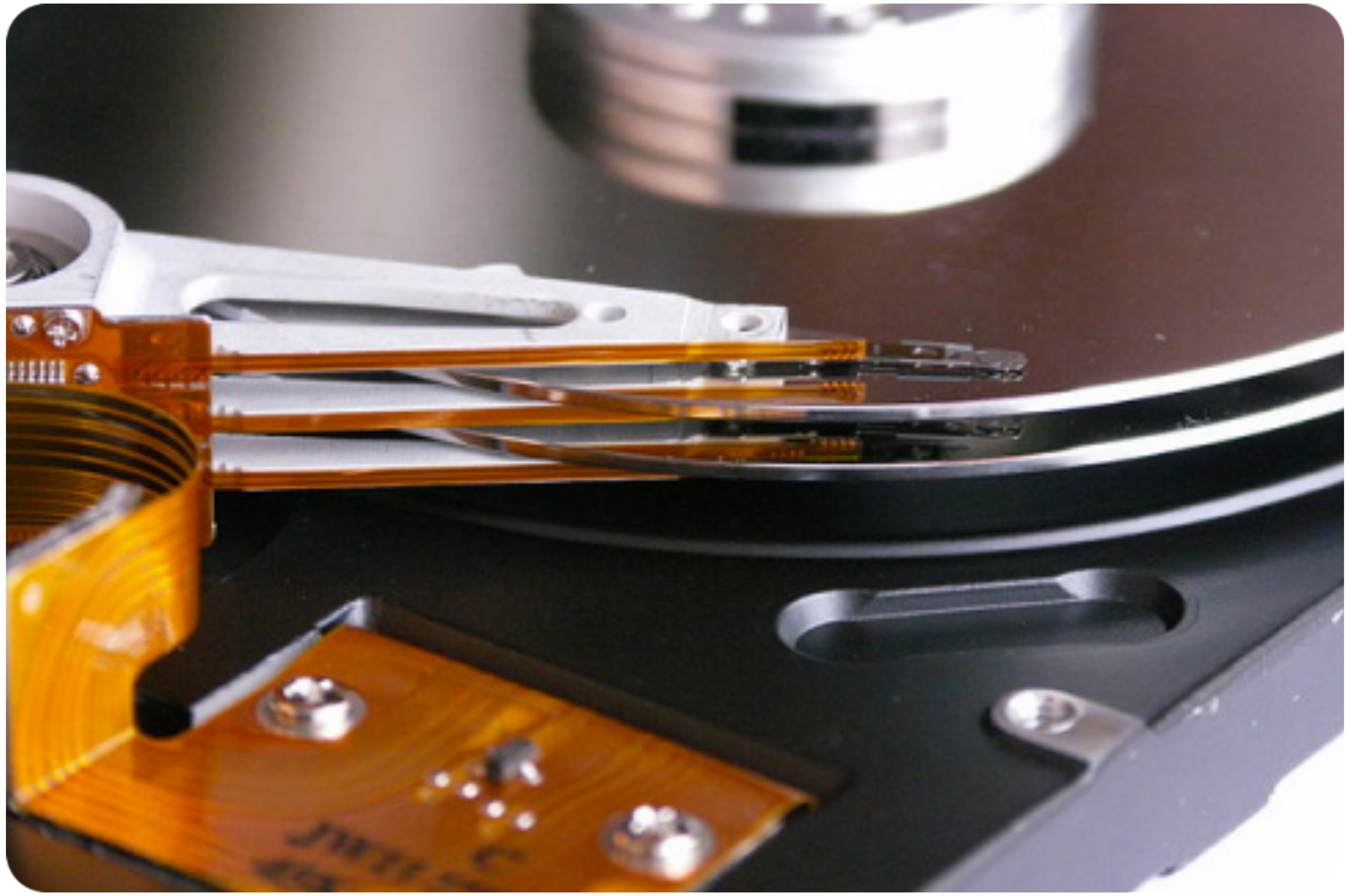
- Un ejemplo de imán es la aguja de una brújula. La Tierra actúa como una barra magnética muy grande, con su polo sur cerca del Polo Norte geográfico. El polo norte de una brújula es atraído hacia el Polo Norte geográfico de la Tierra porque el polo magnético que está cerca del Polo Norte geográfico es en realidad un polo magnético sur.
- La orientación del campo magnético de la Tierra no es permanente, sino que cambia ("da la vuelta") tras largos intervalos de tiempo. Con el tiempo, el polo magnético norte de la Tierra puede situarse cerca de su polo norte geográfico].

- El magnetismo desempeña muchas funciones importantes en nuestras vidas. La comprensión del magnetismo ha permitido el desarrollo de tecnologías que afectan tanto a los individuos como a la sociedad.

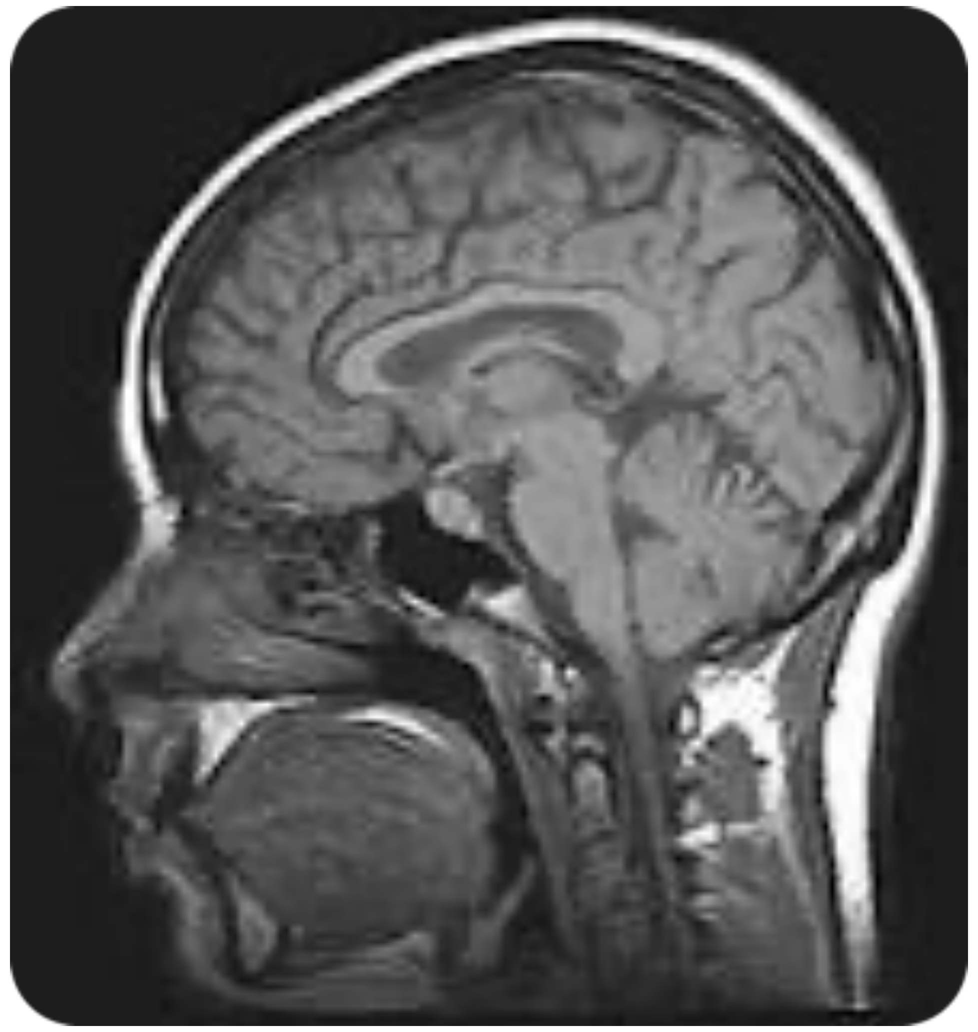
- La tableta electrónica que lleva en su bolso o mochila, por ejemplo, no habría sido posible sin las aplicaciones del magnetismo y la electricidad a pequeña escala.

- Ahora sabemos que los débiles cambios de un campo magnético en una fina película de hierro y cromo provocan cambios mucho mayores en la resistencia, lo que se denomina magnetorresistencia gigante. De este modo, se puede registrar información magnética en función de la dirección en la que se magnetiza la capa de hierro.

- Como resultado del descubrimiento de la magnetorresistencia gigante y sus aplicaciones al almacenamiento digital, el Premio Nobel de Física 2007 fue concedido al francés Albert Fert y al alemán Peter Grunberg.



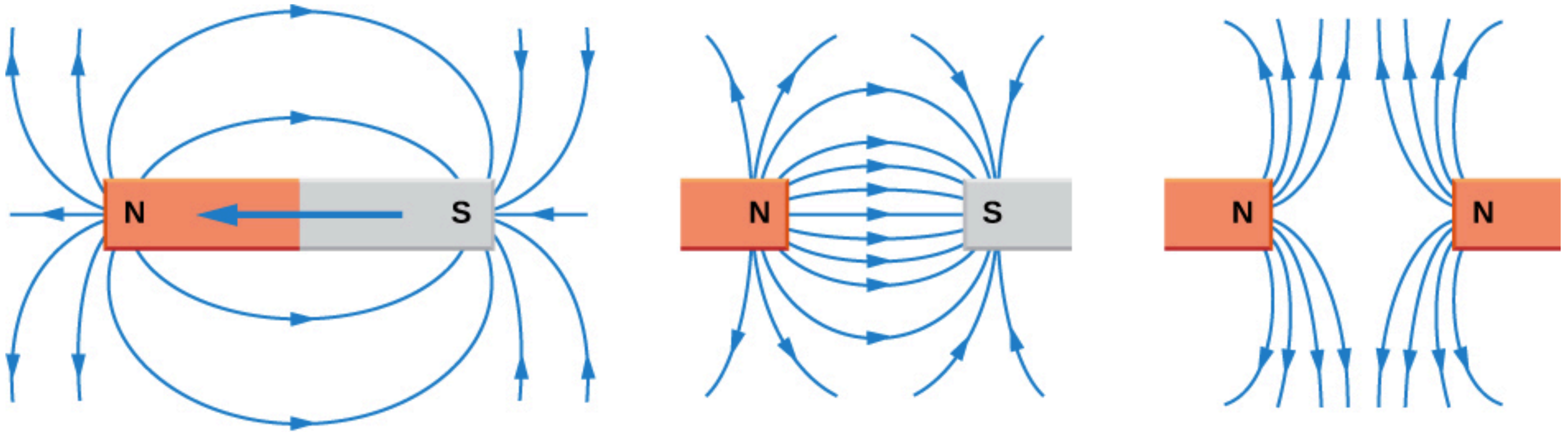
- Todos los motores eléctricos: frigoríficos, coches, ascensores- contienen imanes.
- Los generadores que producen energía hidroeléctrica o aquellos que hacen funcionar las luces de las bicicletas, utilizan campos magnéticos.
- Las instalaciones de reciclaje emplean imanes para separar el hierro de otros residuos. Desde hace varios años se investiga el uso de la contención magnética de la fusión como futura fuente de energía.
- Las imágenes por resonancia magnética (IRM) se han convertido en una importante herramienta de diagnóstico en el campo de la medicina, y el uso del magnetismo para explorar la actividad cerebral es objeto de investigación y desarrollo contemporáneos.



- El magnetismo interviene en la estructura de los niveles de energía atómica, así como en el movimiento de los rayos cósmicos y las partículas cargadas atrapadas en los cinturones de Van Allen alrededor de la Tierra.
- Una vez más, vemos que todos estos fenómenos dispares están vinculados por un pequeño número de principios físicos subyacentes.

Lineas de campo magnético

- La representación de los campos magnéticos mediante líneas de campo magnético es muy útil para visualizar la intensidad y dirección del campo magnético.



- Cada una de estas líneas forma un bucle cerrado.
- Las líneas de campo salen del polo norte (N), forman un bucle hacia el polo sur (S) y continúan a través de la barra magnética de vuelta al polo norte.
- La dirección del campo magnético es tangente a la línea de campo en cualquier punto del espacio. Una pequeña brújula apunta en la dirección de la línea de campo.
- La intensidad del campo es proporcional a la proximidad de las líneas. Es exactamente proporcional al número de líneas por unidad de superficie perpendicular a las líneas.
- Las líneas de campo magnético nunca pueden cruzarse, lo que significa que el campo es único en cualquier punto del espacio.
- Las líneas de campo magnético son continuas y forman bucles cerrados sin principio ni fin. Se dirigen del polo norte al polo sur.

Definiendo el campo magnético

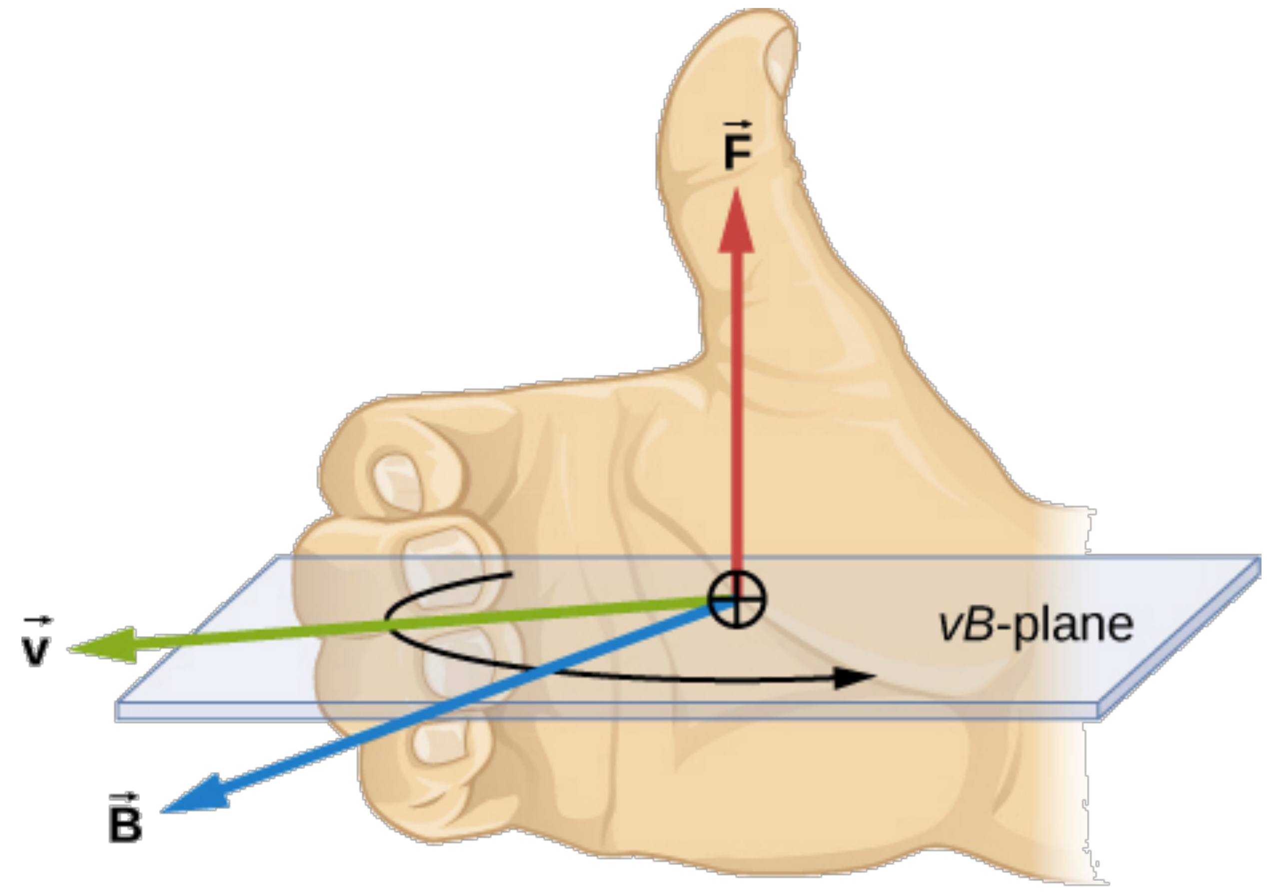
- El campo magnético se puede definir por la fuerza que experimenta una partícula cargada que se mueve en este campo.

- La magnitud de esta fuerza es proporcional a la cantidad de carga q, la velocidad de la partícula cargada v y la magnitud del campo magnético aplicado. La dirección de esta fuerza es perpendicular tanto a la dirección de la partícula cargada en movimiento como a la dirección del campo magnético aplicado.

$$\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}$$

- Es decir, la magnitud de la fuerza satisface:

$$F = qvB\sin\theta$$



- La unidad en el SI para la intensidad del campo magnético *B* se denomina Tesla (T) en honor al inventor Nikola Tesla (1856-1943)

$$\left[1T = \frac{1N}{A \cdot m}\right]$$

  - Una unidad más pequeña es el Gauss

$$1G = 10^{-4}T$$

- Los imanes permanentes más potentes tienen campos cercanos a 2 T.

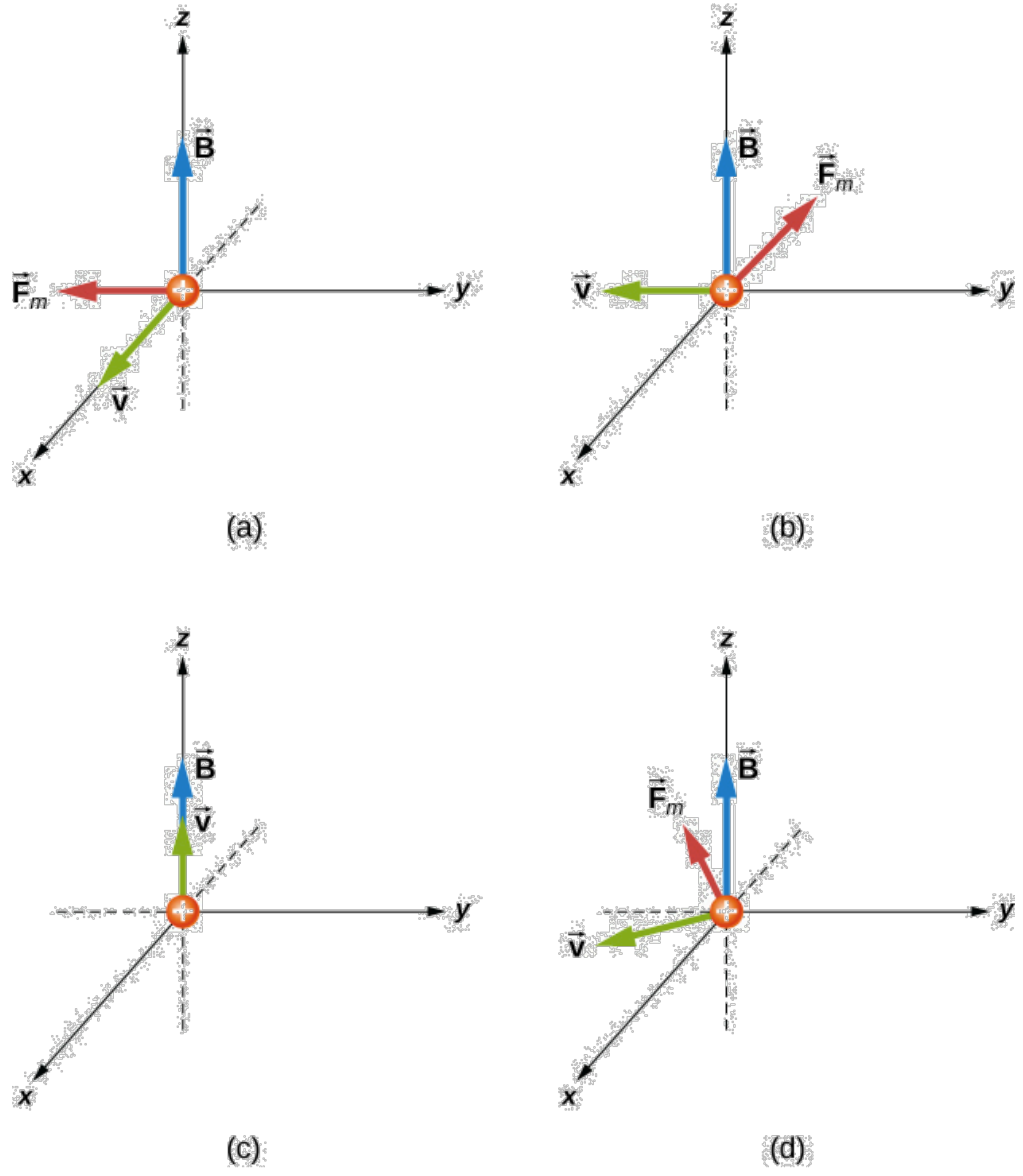
- Los electroimanes superconductores pueden alcanzar 10 T o más.

- El campo magnético de la Tierra en su superficie es sólo de unos 0,5 *G* .

Ejemplo

Una partícula α $\left(q = 3,2 \times 10^{-19}\text{C}\ \right)$ se mueve a través de un campo magnético uniforme cuya magnitud es $1,5$ T.
El campo es paralelo al eje z positivo del sistema de coordenadas rectangulares.
¿Cuál es la fuerza magnética sobre la partícula alfa cuando se está moviendo:

(a) en la dirección positiva de las **x** con una velocidad de $5,0 \times 10^4$ m/s?
(b) en la dirección negativa **y** con una velocidad de $5,0 \times 10^4$ m/s ?
(c) en la dirección positiva **z** con una velocidad de 5.0×10^4 m/s ?
(d) con una velocidad $\vec{v} = \langle 2,0; -3,0; 1,0 \rangle \times 10^4$ m/s?



(a)

$$\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B} = (3.2 \times 10^{-19}\text{C})\left(5.0 \times 10^4 \text{ m/s } \hat{i}\right) \times (1.5 \text{ T } \hat{k}) = -2.4 \times 10^{-14} N\ \hat{j}$$

(b)

$$\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B} = (3.2 \times 10^{-19}\text{C})\left(-5.0 \times 10^4 \text{ m/s } \hat{i}\right) \times (1.5T\ \hat{k}) = -2.4 \times 10^{-14} N\ \hat{i}$$

(c)

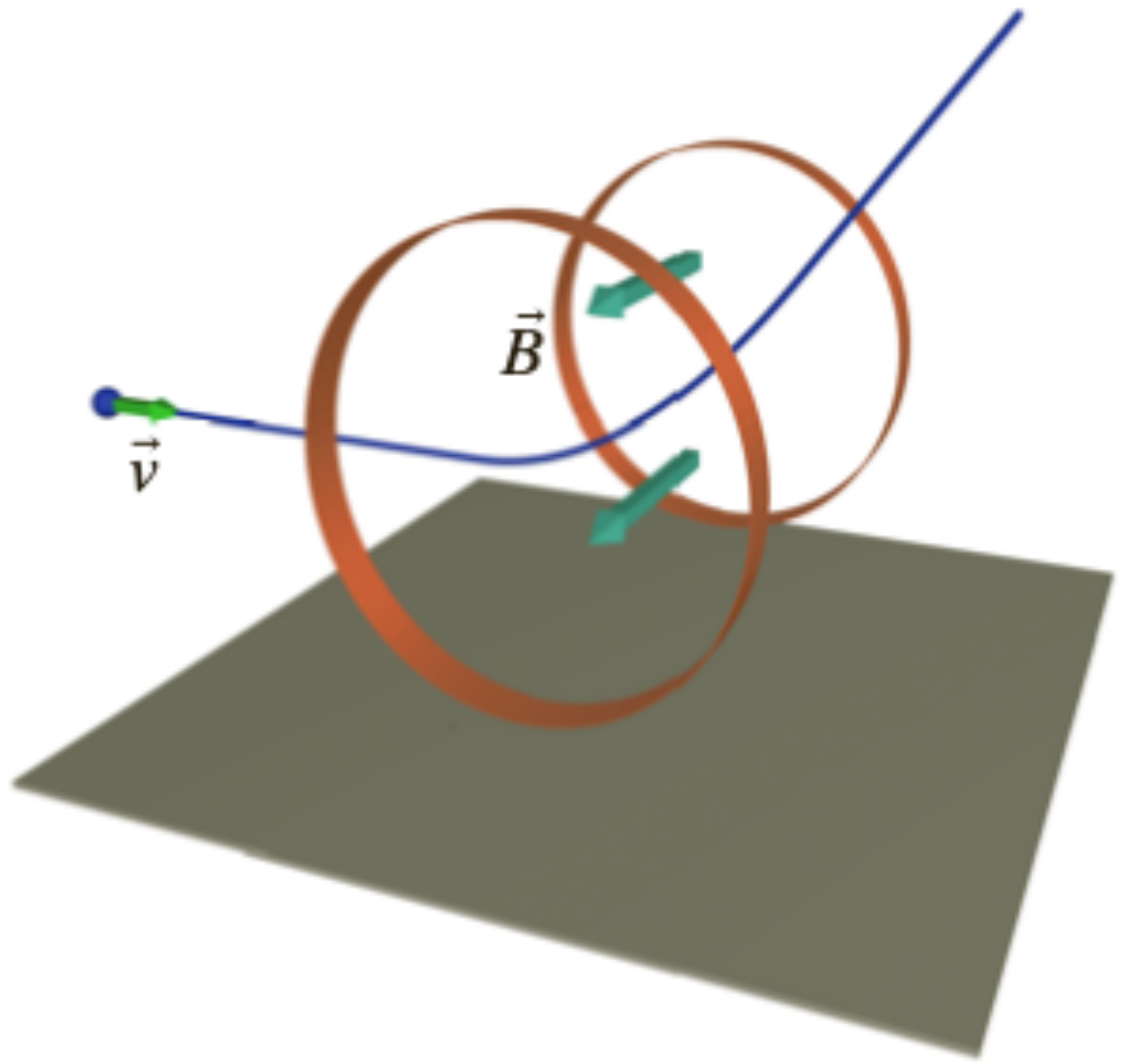
$$\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B} = \vec{0}$$

(d)

$$\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B} = (3,2 \times 10^{-19}C)\left((2,0\hat{i} - 3,0\hat{j} + 1,0\hat{k}) \times 10^4 \text{ m/s}\right) \times (1,5T\hat{k})$$

$$(-14,4\hat{i} - 9,6\hat{j}) \times 10^{-15} N$$

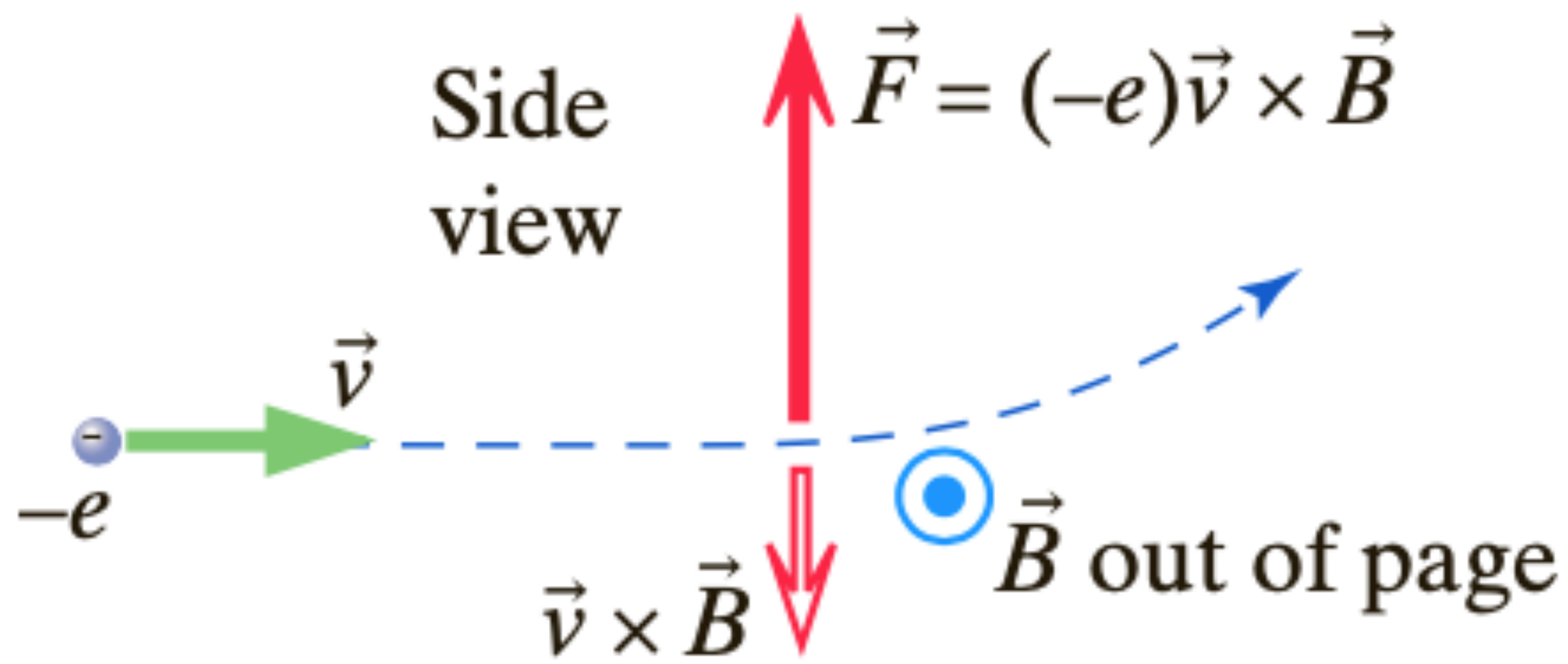
Movimiento de partículas cargadas en un campo magnético

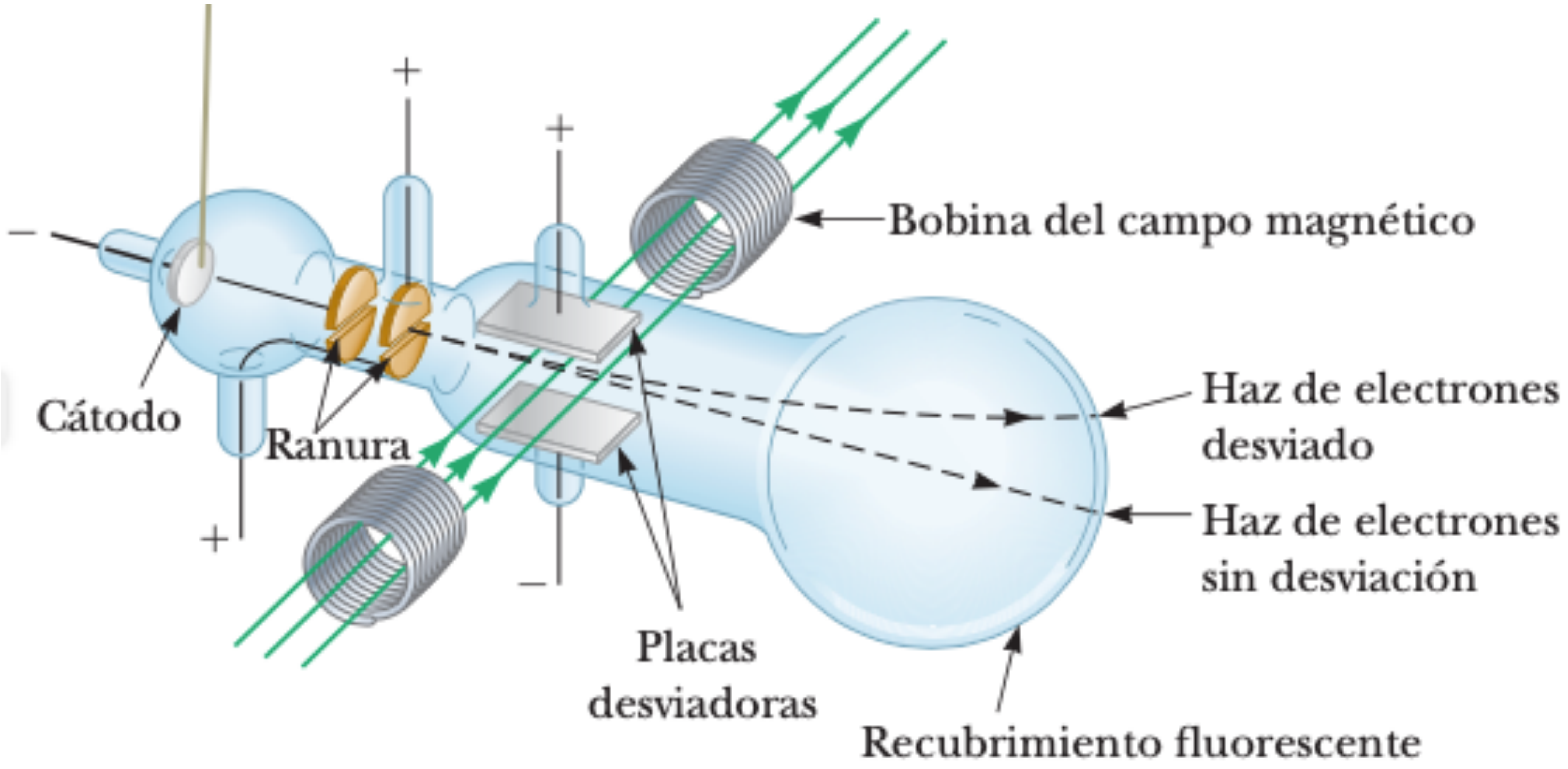


- En las pantallas de tubo de rayos catódicos (TRC) que se utilizaban antiguamente en televisores domésticos y monitores de ordenador, los electrones se aceleraban a velocidades bastante altas mediante campos eléctricos.

- Los electrones en movimiento son desviados verticalmente por un campo magnético. Este campo magnético horizontal estaba producido por corrientes en bobinas colocadas como se muestra en la Figura (no se muestran otras bobinas cuyo campo magnético desviaba los electrones de lado a lado).

La fuerza magnética sobre un solo electrón en movimiento en un TRC es significativa porque la aceleración de la partícula $\vec{a} = d\vec{v}/dt$ es proporcional a la relación q/m :





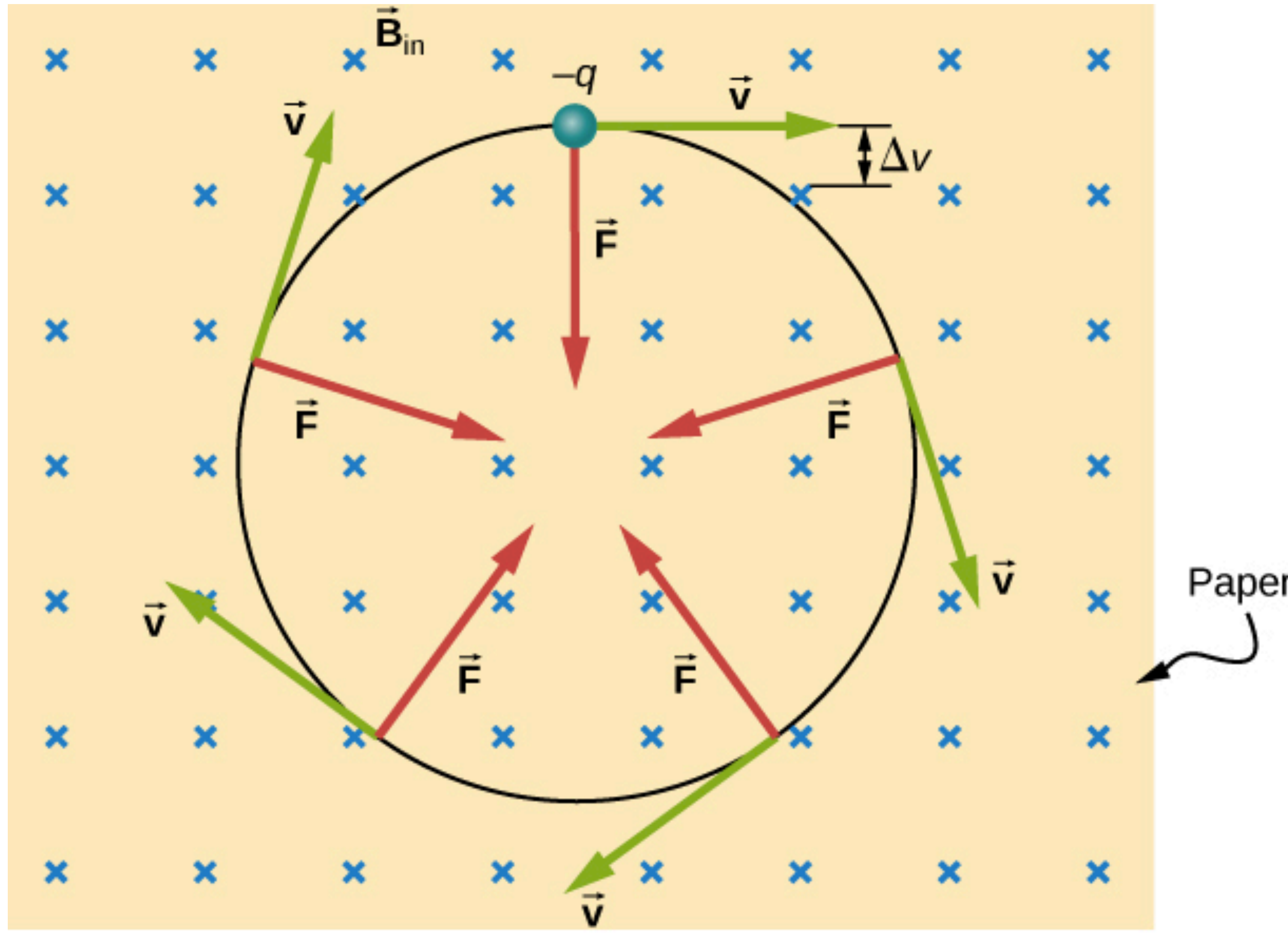
$$\left|\frac{d\vec{p}}{dt}\right| = qvB\sin\theta$$

$$\left|\frac{d\vec{v}}{dt}\right| = \frac{q}{m}vB\sin\theta \quad (\text{ for } v \ll c)$$

$$\frac{q_e}{m_e} = \frac{1.6\times10^{-19}\,\mathrm{C}}{9\times10^{-31}\,\mathrm{kg}} \approx 1\times10^{11}\,\mathrm{C/kg}$$

- Sabemos que una partícula cargada experimenta una fuerza cuando se mueve a través de un campo magnético.
- ¿Qué ocurre si este campo es uniforme sobre el movimiento de la partícula cargada?
- ¿Qué trayectoria sigue la partícula?

- Consideremos una partícula cargada que se mueve perpendicularmente a un campo *B* uniforme.
- Si el campo está en el vacío, este será el factor dominante que determina el movimiento.
- Puesto que la fuerza magnética es perpendicular a la dirección de desplazamiento, una partícula cargada sigue una trayectoria curva en un campo magnético. La partícula continúa siguiendo esta trayectoria curva hasta que forma un círculo completo.



- Como la velocidad es perpendicular al campo magnético

$$qvB = \frac{mv^2}{r} \quad \Rightarrow \quad r = \frac{mv}{qB}$$

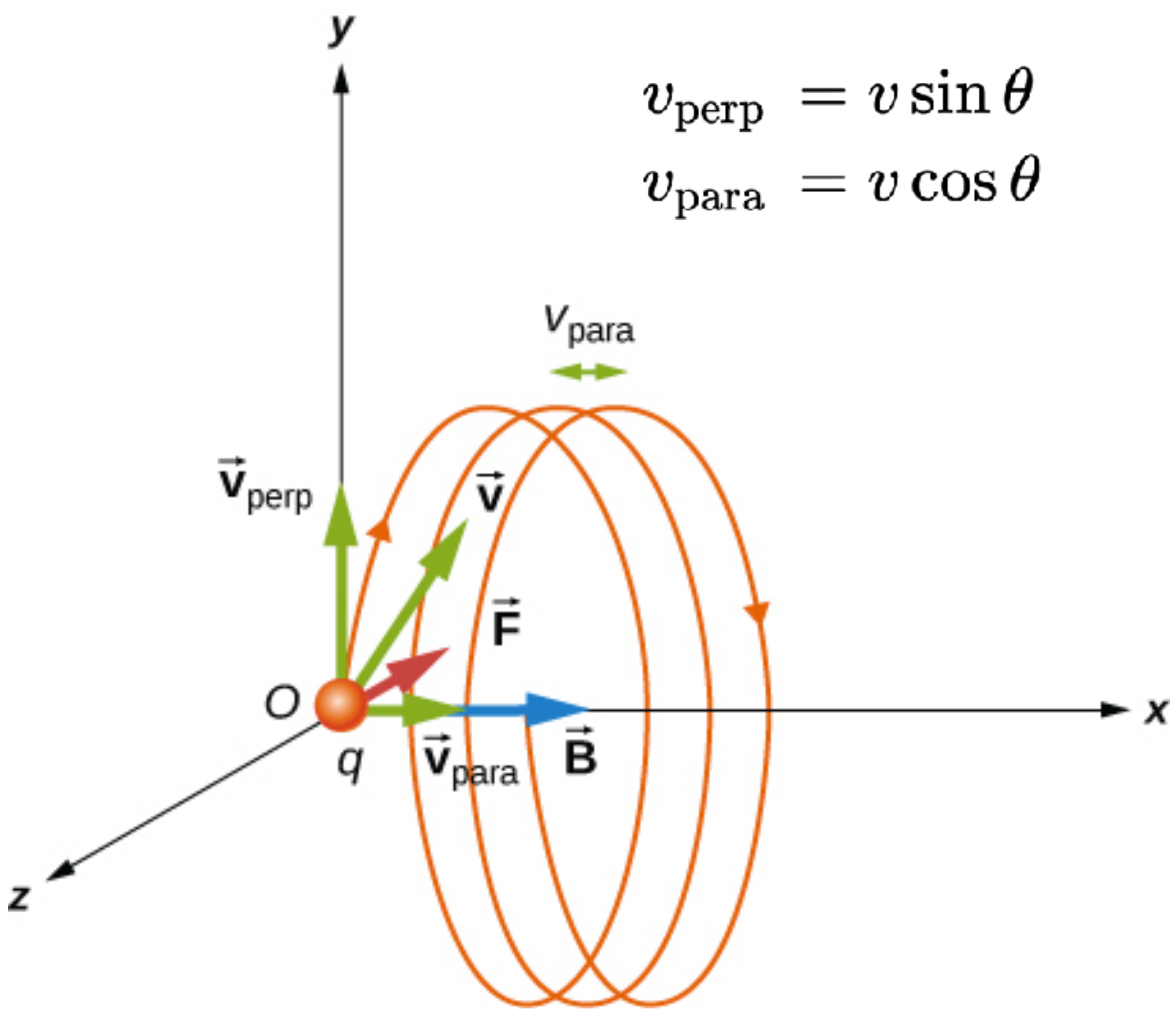
- La fuerza magnética hace el papel de la fuerza centrípeta:

$$F_C = \frac{mv^2}{r}$$

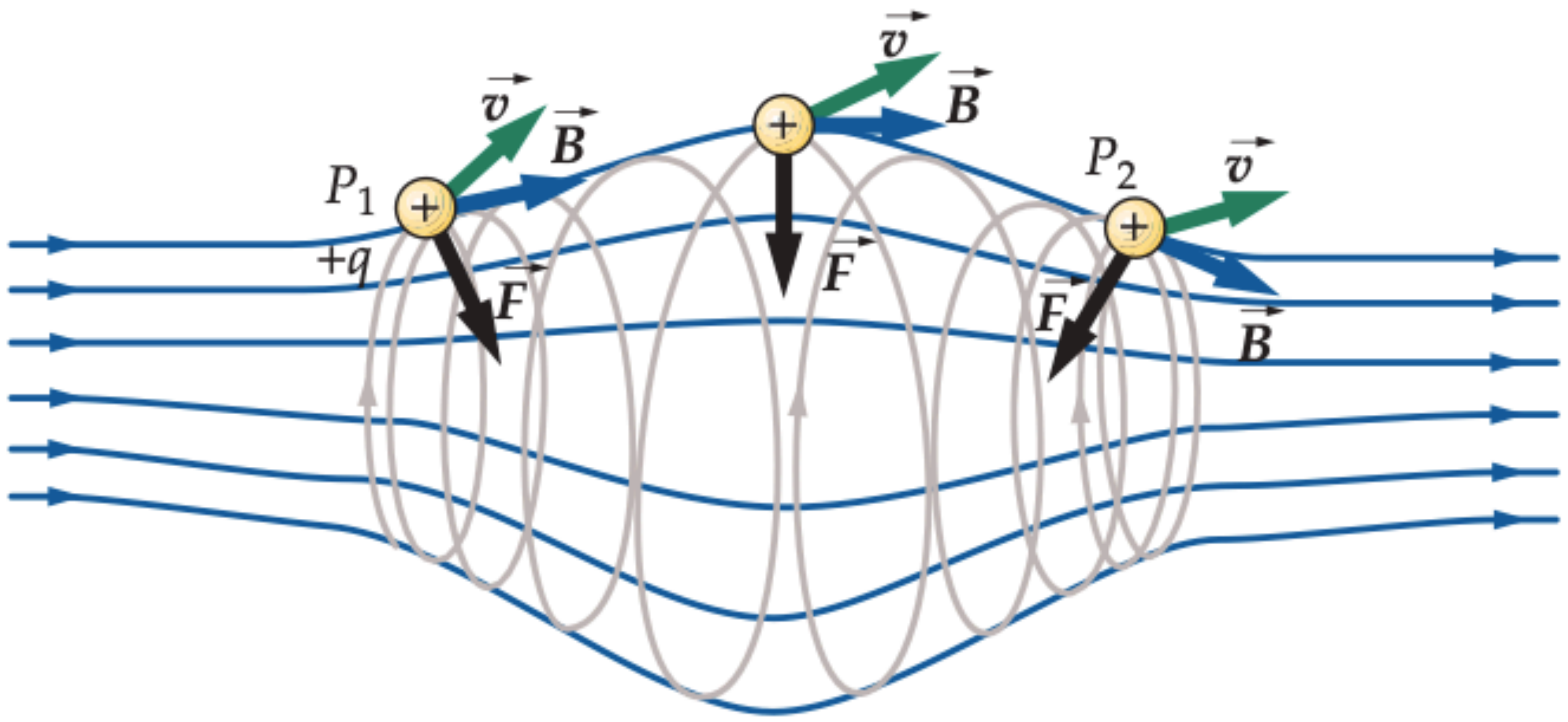
- Donde, *r* es el radio de curvatura de la trayectoria de una partícula cargada con masa *m* y carga *q*, que se mueve a una velocidad *v* perpendicular a un campo magnético de intensidad *B*.

- El período del movimiento será entonces: $$T = \frac{2\pi r}{v} = \frac{2\pi}{v}\frac{mv}{qB} = \frac{2\pi m}{qB}$$

- Si la velocidad no es perpendicular al campo magnético, entonces podemos comparar cada componente de la velocidad por separado con el campo magnético.
- La componente de la velocidad perpendicular al campo magnético produce una fuerza magnética perpendicular tanto a esta velocidad como al campo:



- La componente paralela al campo magnético crea un movimiento constante a lo largo de la misma dirección que el campo magnético.
- El movimiento paralelo determina el paso p de la hélice, que es la distancia entre espiras adyacentes.
- Esta distancia es igual a la componente paralela de la velocidad multiplicada por el periodo: $p = v_{\text{para}}\, T$

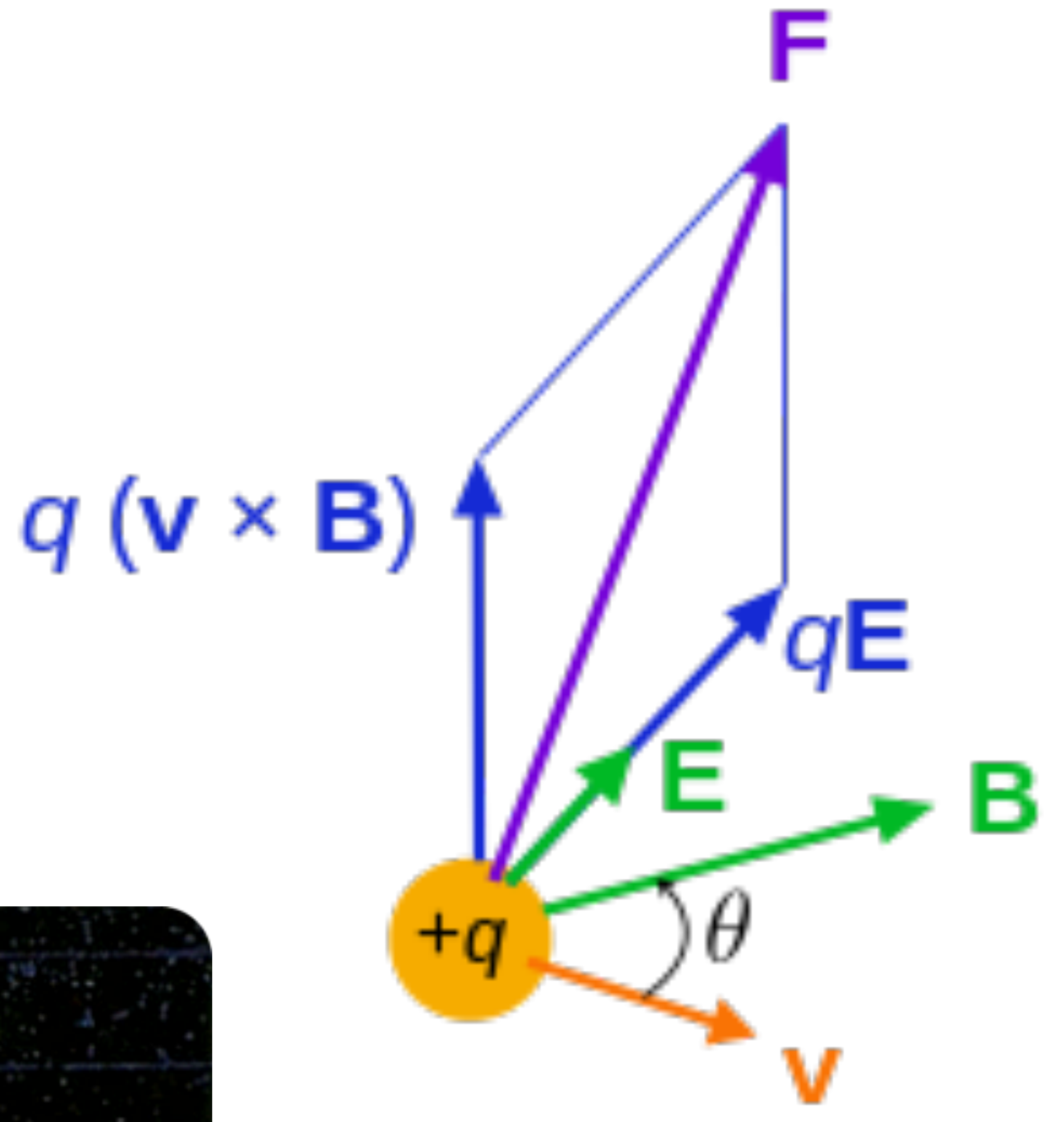


- Cuando una partícula cargada se mueve en un campo que es fuerte en ambos extremos y débil en el centro, la partícula queda atrapada y se mueve hacia adelante y hacia atrás, en espiral alrededor de las líneas de campo (Botella magnética).

2 Fuerza de Lorentz

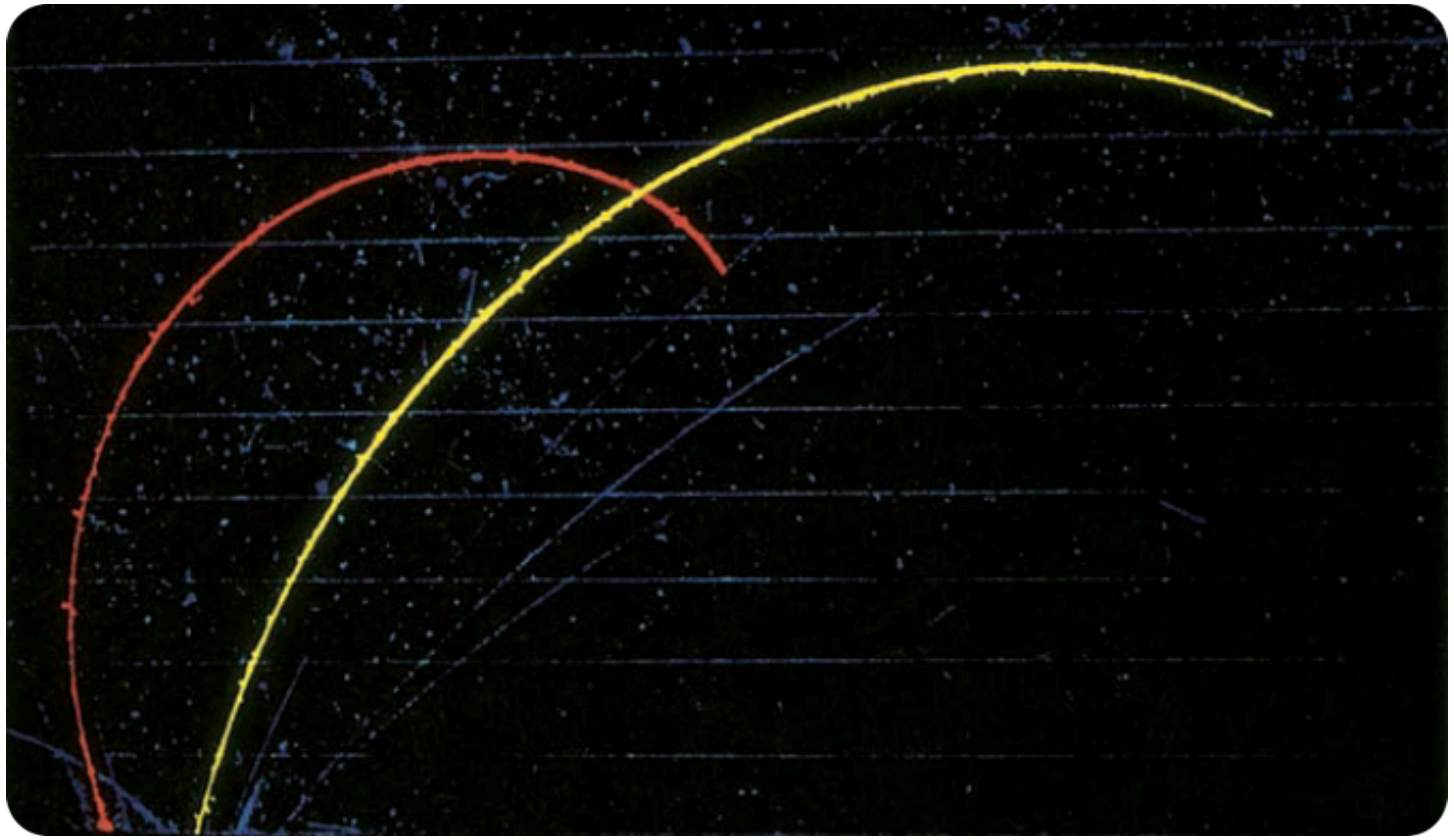
- La fuerza de Lorentz (o fuerza electromagnética) es la combinación de la fuerza eléctrica y magnética sobre una carga puntual debida a campos electromagnéticos.
- Una partícula de carga q que se mueve con una velocidad v en un campo eléctrico $\boldsymbol{E}$ y un campo magnético $\boldsymbol{B}$ experimenta una fuerza de

$$\mathbf{F} = q\mathbf{E} + q\mathbf{v} \times \mathbf{B} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$$



- En coordenadas cartesianas

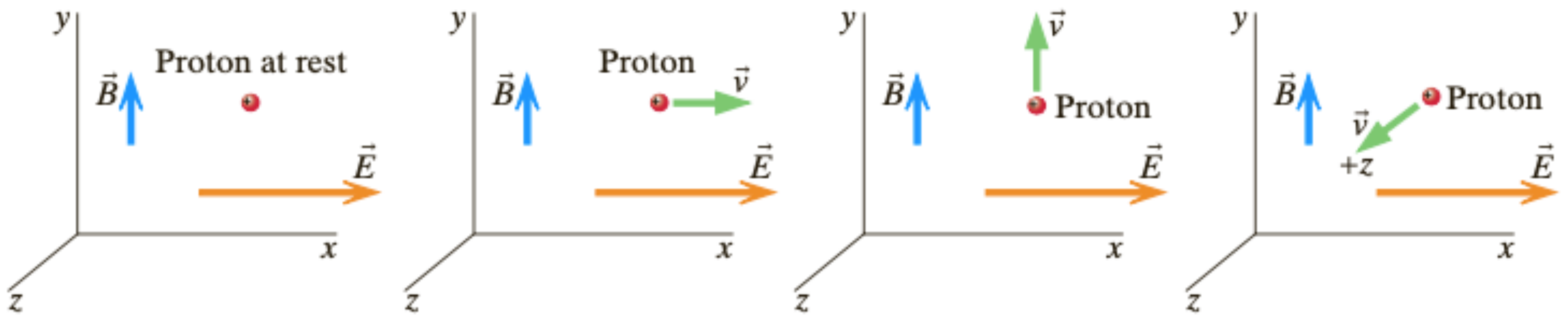
$$F_x = q(E_x + v_y B_z - v_z B_y)$$
$$F_y = q(E_y + v_z B_x - v_x B_z)$$
$$F_z = q(E_z + v_x B_y - v_y B_x)$$



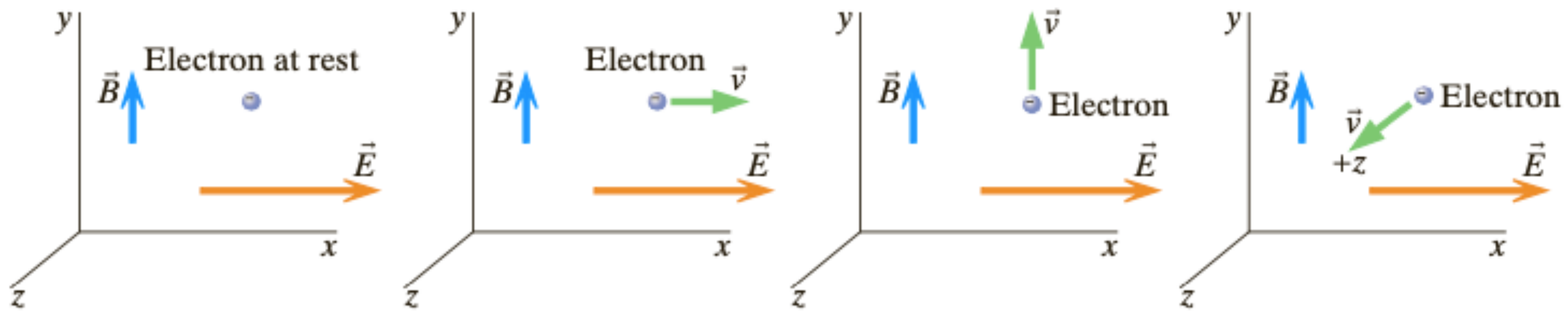
Fotografía en falso color que muestra las trazas de un protón de 1,6 MeV (rojo) y una partícula α de 7 MeV (amarillo) en una cámara de niebla.

Ejercicio

Considere la situación de la Figura, en la que existe un campo eléctrico uniforme en la dirección x y un campo magnético uniforme en la dirección y. Para cada ejemplo de un protón en reposo o en movimiento en las direcciones x, y o z, ¿cuál es la dirección de la fuerza eléctrica y magnética neta sobre el protón en ese instante?



En cada ejemplo de la figura ¿cuál es la dirección de la fuerza eléctrica y magnética neta sobre un electrón en este instante?

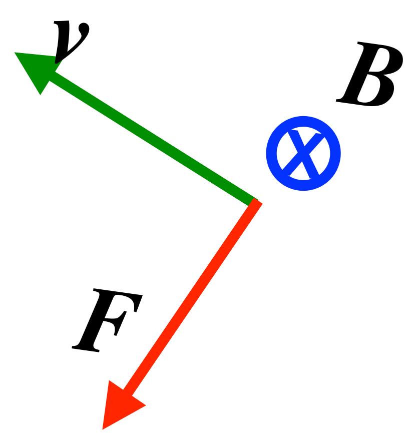


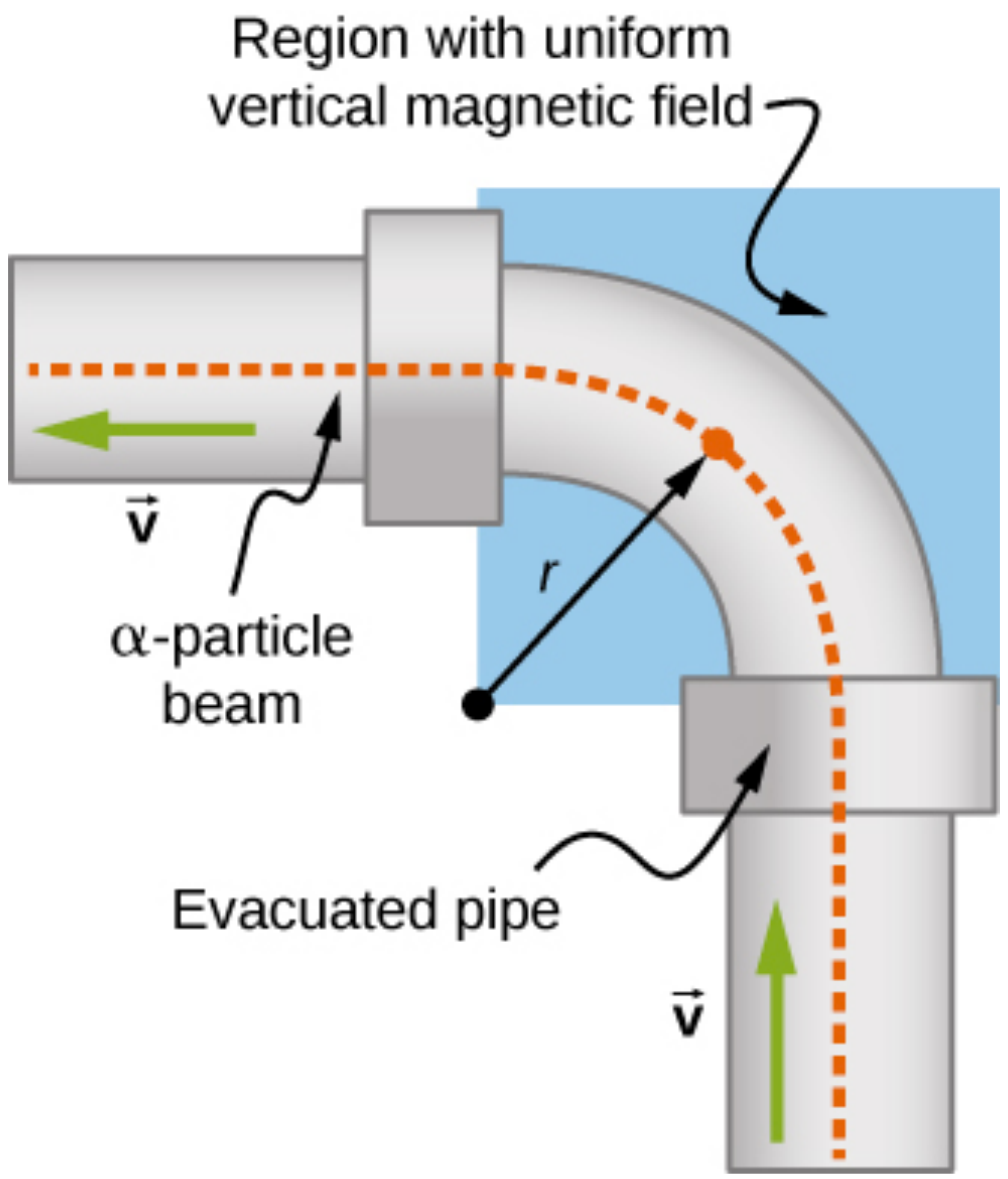
Ejemplo

Necesitamos diseñar una forma de transportar partículas alfa (núcleos de helio) desde donde se fabrican hasta un lugar donde colisionarán con otro material para formar un isótopo. El haz de partículas alfa ($m = 6.64 \times 10^{-27}$ kg, $q = 3.2 \times 10^{-19}$C) se curva a través de una región de 90 grados con un campo magnético uniforme de 0,050 T.

- (a) ¿En qué dirección debe aplicarse el campo magnético?
- (b) ¿Cuánto tiempo tardan las partículas alfa en atravesar la región de campo magnético uniforme?

- Según la figura, la fuerza magnética aparece como una fuerza centrípeta, por lo tanto el campo magnético debe apuntar hacia la dirección que entra en la página.





- El periodo de la partícula cargada que gira alrededor de un círculo se calcula utilizando la masa, la carga y el campo magnético dados en el problema.

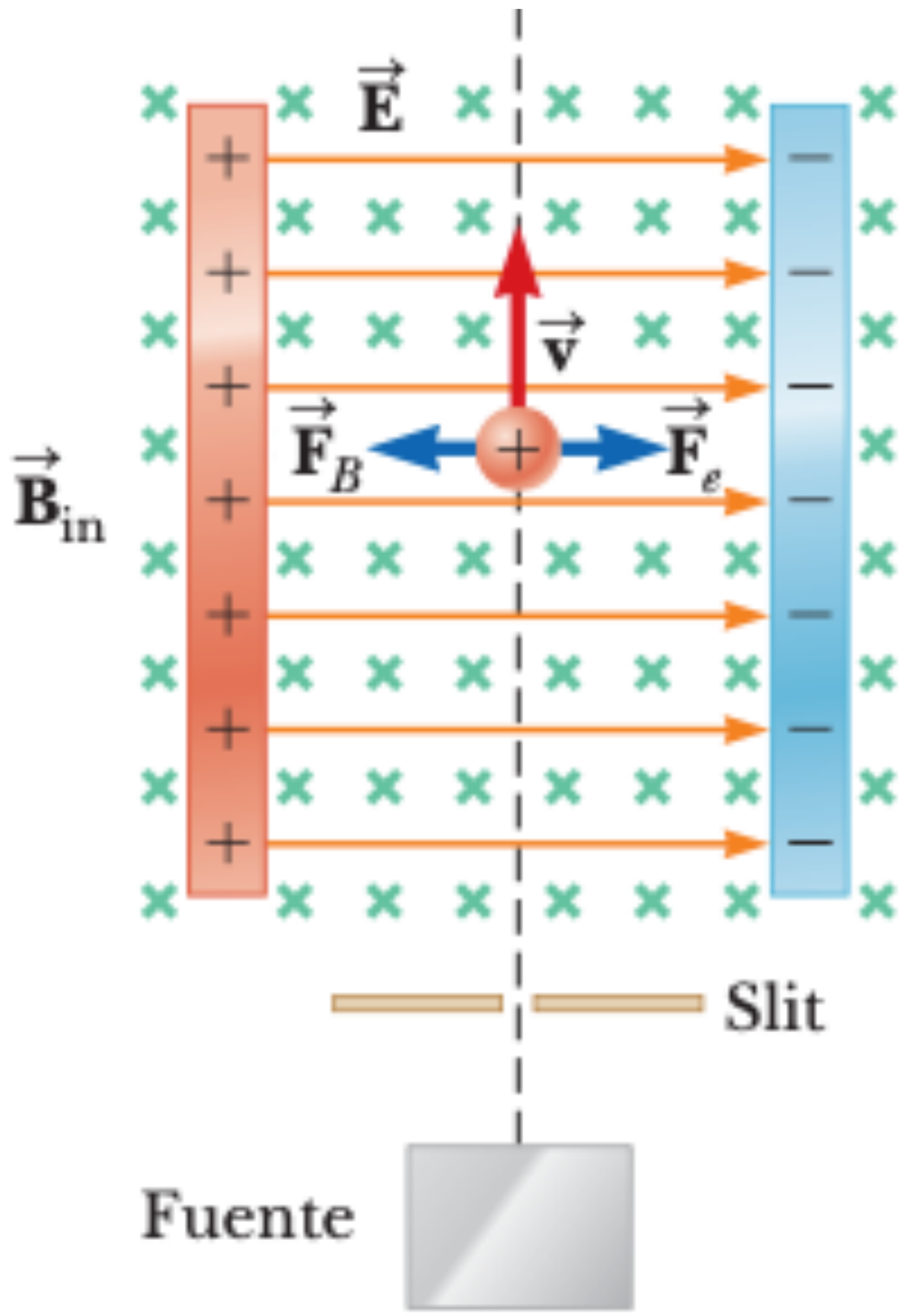
$$T = \frac{2\pi m}{qB} = \frac{2\pi\left(6,64 \times 10^{-27}\ \mathrm{kg}\right)}{\left(3,2 \times 10^{-19}\mathrm{C}\right)\left(0,050T\right)} = 2,6 \times 10^{-6}\ \mathrm{s}$$

- Según la figura, la partícula alfa recorre una cuarta parte del círculo, por lo que el tiempo que tarda es

$$t = 0,25 \cdot 2,61 \times 10^{-6}\ \mathrm{s} = 6,5 \times 10^{-7}\ \mathrm{s}$$

Ejemplo

Veremos que posible disponer campos eléctricos y magnéticos de modo que la fuerza eléctrica y magnética combinada $\vec{F} = q\vec{E} + q\vec{v} \times \vec{B}$ que actúa sobre una carga positiva $+q$ que se mueve con velocidad $\vec{v}$ sea cero.



- Las fuerzas magnéticas y eléctricas deben ser iguales y opuestas para producir una fuerza neta nula:

$$eE = evB \sin 90^\circ$$

$$E = vB \;\Rightarrow\; v = \frac{E}{B}$$

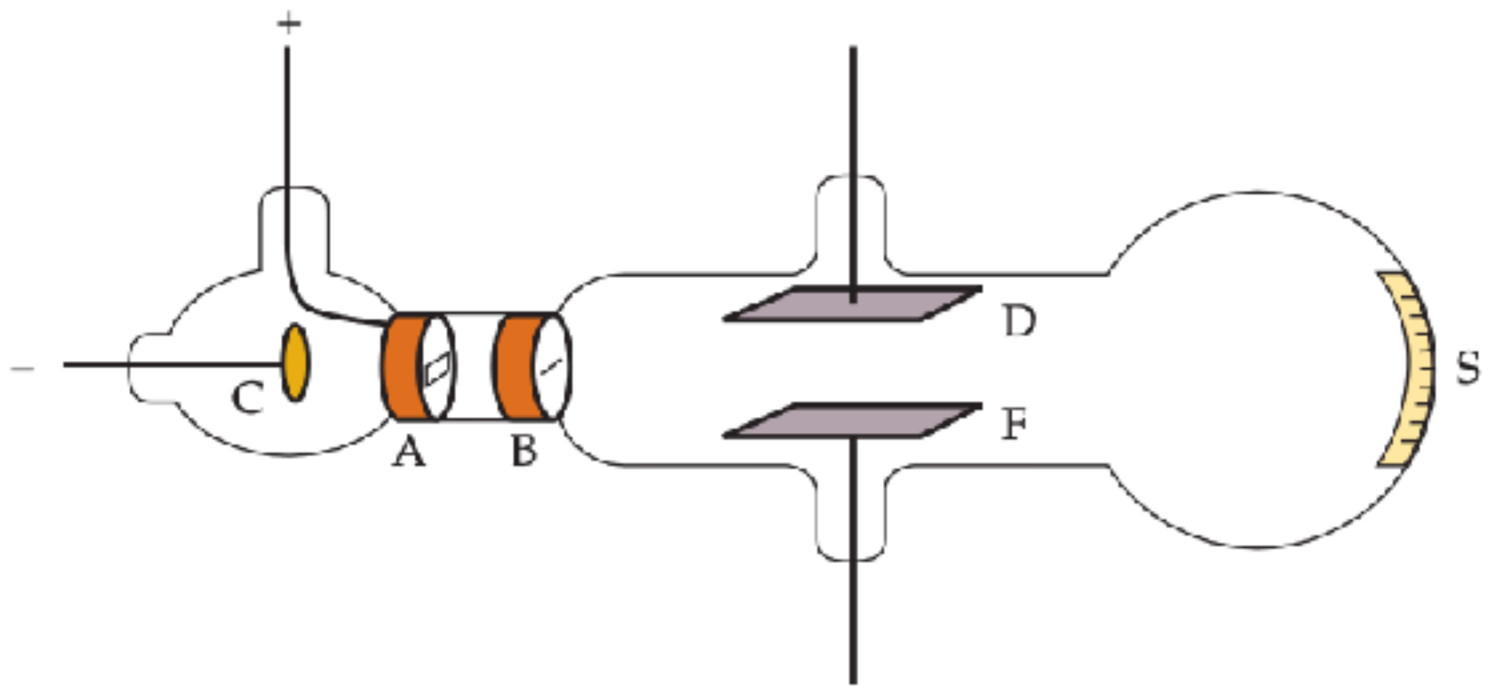
- Si llega una partícula con la velocidad apropiada para que la fuerza neta sobre ella sea cero, pero con carga negativa -q ¿pasará en línea recta o no?

Una región que contiene campos eléctricos y magnéticos perpendiculares entre sí forma una especie de "selector de velocidad", permitiendo que las partículas pasen en línea recta sólo si tienen la velocidad y dirección elegidas.

Se puede observar que el producto $\vec{E} \times \vec{B}$ apunta en la dirección de la velocidad que permite el paso de la partícula en línea recta.

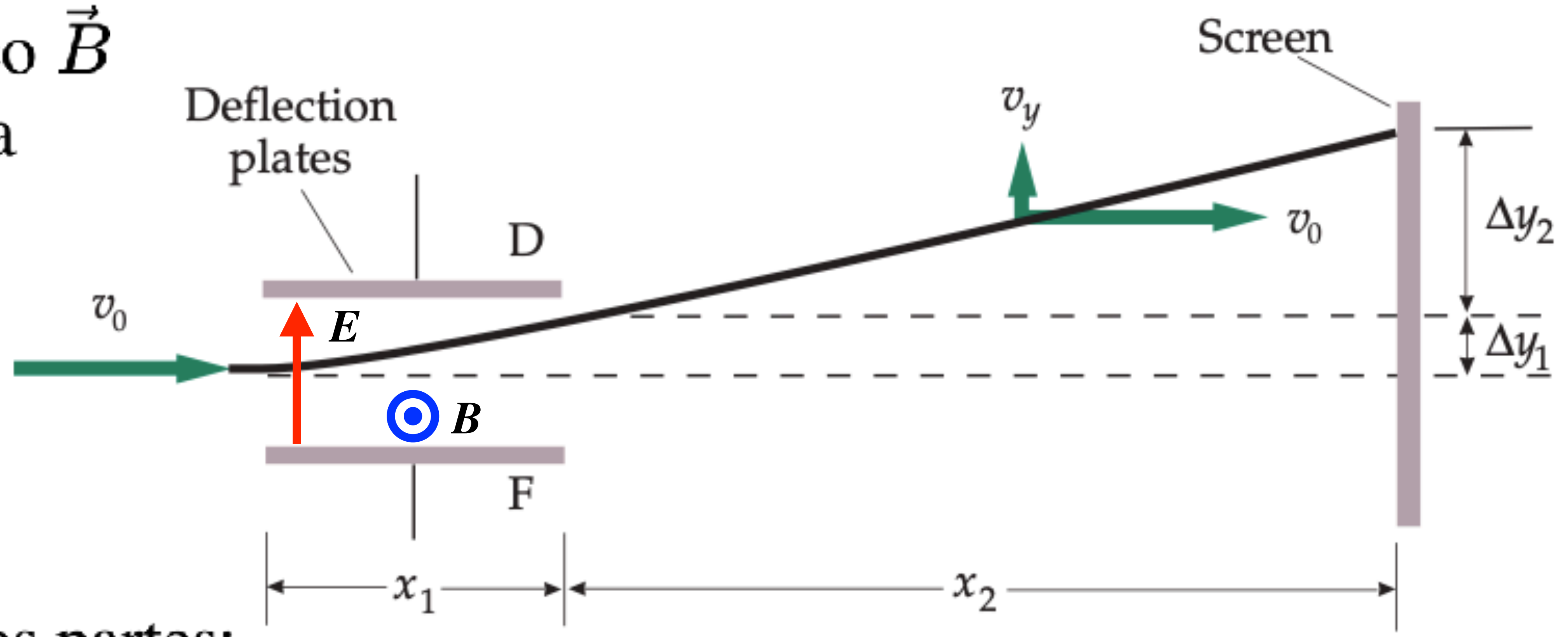
Ejemplo

J. J. Thomson en 1897 demostró que los rayos de un tubo catódico pueden ser desviados por campos eléctricos y magnéticos, lo que indica que deben estar formados por partículas cargadas. Midiendo las desviaciones de estas partículas encontró las relación carga/masa.



La velocidad de los electrones v_0 se determina introduciendo un campo magnético $\vec{B}$ entre las placas en una dirección perpendicular tanto al campo eléctrico como a la velocidad inicial de los electrones. La magnitud de $\vec{B}$ se ajusta hasta que el haz no se desvía. La velocidad se encuentra entonces a partir de la ecuación

$$v = \frac{E}{B}$$



Con el campo magnético apagado, el haz se desvía una cantidad Δy, que consta de dos partes: la desviación Δy_1, que se produce mientras los electrones están entre las placas, y la desviación Δy_2, que se produce después de que los electrones abandonen la región entre las placas

$$v_y = a_y t_1 = \frac{qE_y}{m} t_1 = \frac{qE_y}{m}\frac{x_1}{v_0}$$

$$\Delta y_1 = \frac{1}{2} a_y t_1^2 = \frac{1}{2}\frac{qE_y}{m}\left(\frac{x_1}{v_0}\right)^2$$

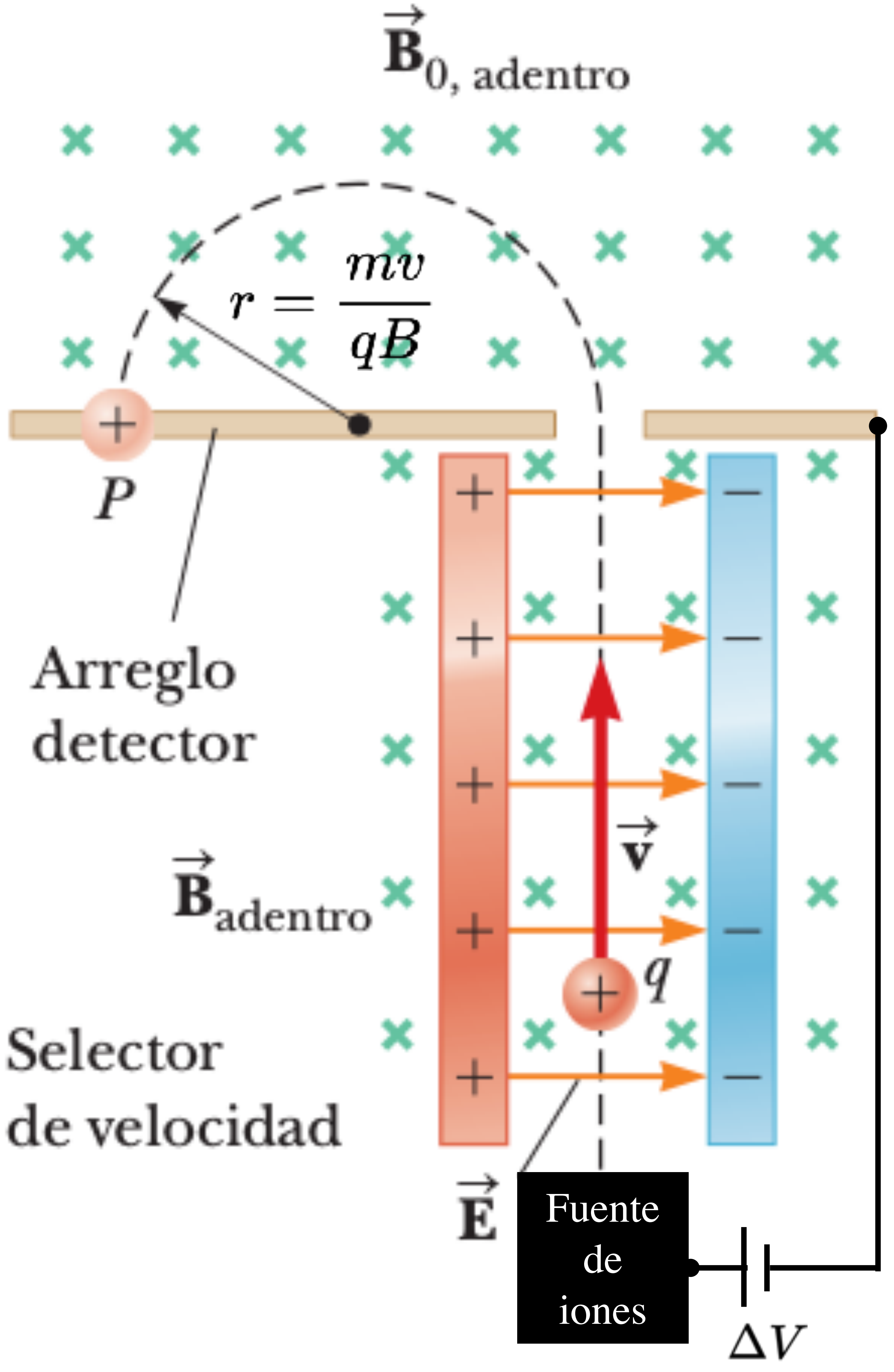
$$\Delta y_2 = v_y t_2 = \frac{qE_y}{m}\frac{x_1}{v_0}\frac{x_2}{v_0}$$

$$\Delta y = \Delta y_1 + \Delta y_2 = \frac{1}{2}\frac{qE_y}{mv_0^2} x_1^2 + \frac{qE_y}{mv_0^2} x_1 x_2$$

La desviación medida Δy puede utilizarse para determinar la relación carga-masa, q/m.

Ejemplo

El espectrómetro de masas, diseñado por primera vez por Francis William Aston en 1919, se desarrolló para medir las masas de los isótopos. Estas mediciones son importantes para determinar tanto la presencia de isótopos como su abundancia en la naturaleza. En la Tierra, por ejemplo, se ha descubierto que el magnesio natural está compuesto por un 78,7 % de ^{24}Mg, 10,1 % de ^{25}Mg y 11,2 % de ^{26}Mg. Estos isótopos tienen masas en la proporción aproximada 24:25:2



Los iones positivos se forman bombardeando átomos con rayos X o con un haz de electrones. (Los electrones son expulsados de los átomos por los rayos X o el bombardeo de electrones para formar iones positivos). Los iones son acelerados por un campo eléctrico y entran en un campo magnético uniforme. Si los iones positivos parten del reposo y se mueven a través de una diferencia de potencial ΔV, la energía cinética de los iones cuando entran en el campo magnético es igual a su pérdida de energía potencial, $q|\Delta V|$:

$$\frac{1}{2}mv^2 = q|\Delta V| \quad \longleftarrow \quad v^2 = \frac{r^2q^2B^2}{m^2}$$

$$\frac{1}{2}m\left(\frac{r^2q^2B^2}{m^2}\right) = q|\Delta V|$$

$$\frac{m}{q} = \frac{B^2r^2}{2|\Delta V|}$$

En el "espectrómetro de masas" original de Aston, las diferencias de masa podían medirse con una precisión de aproximadamente 1 parte en 10.000. La precisión se ha mejorado introduciendo un selector de velocidad entre la fuente de iones y el imán, lo que aumenta el grado de exactitud con el que pueden determinarse las velocidades de los iones entrantes.

Ejemplo

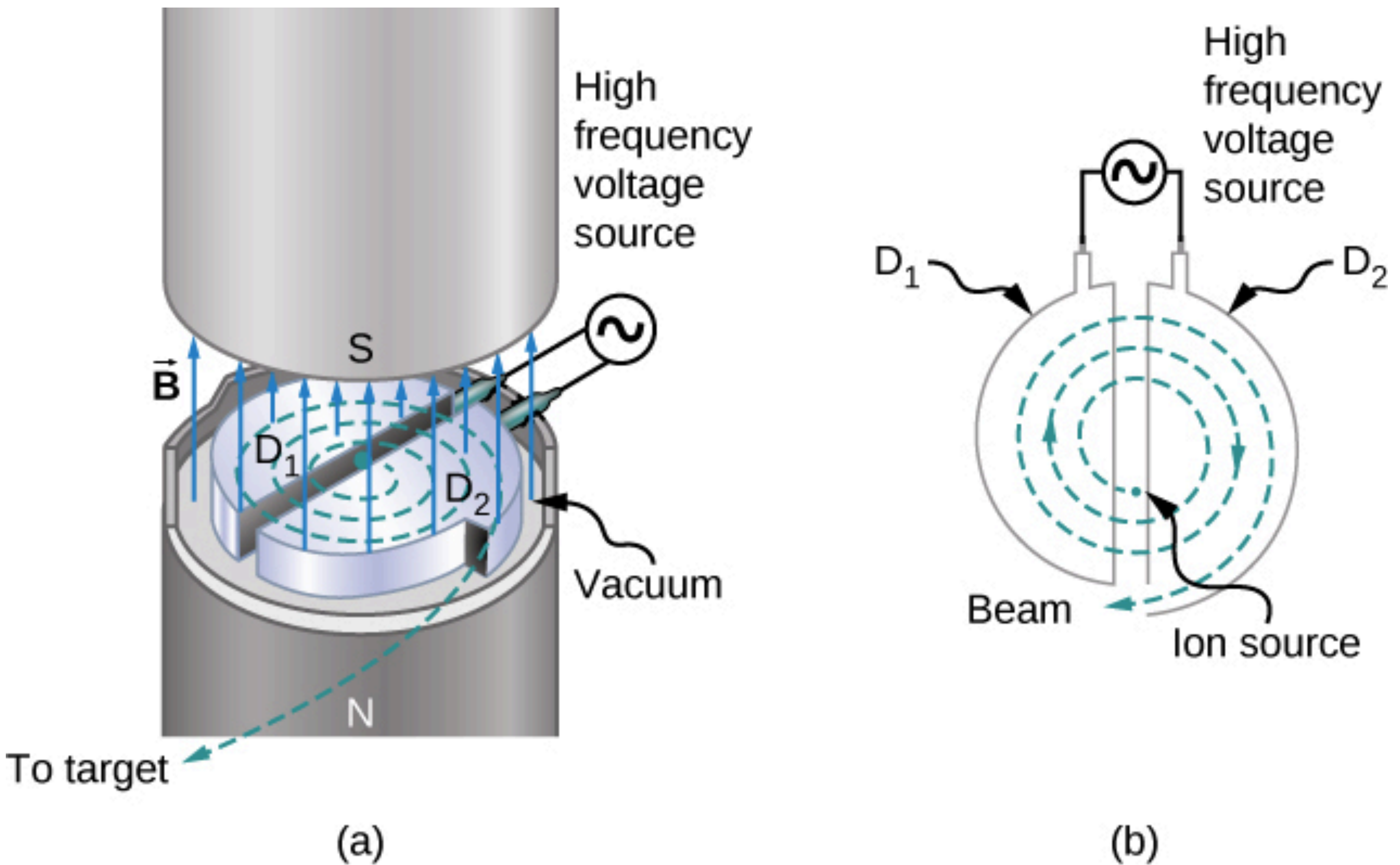
El ciclotrón fue inventado por E. O. Lawrence y M. S. Livingston en 1934 para acelerar partículas, como protones o deuterones, hasta alcanzar grandes energías cinéticas. Las partículas de alta energía se utilizan para bombardear núcleos atómicos, provocando reacciones nucleares que luego se estudian para obtener información sobre los núcleos. Los protones y deuterones de alta energía también se utilizan para producir materiales radiactivos y con fines médicos.

- Las partículas cargadas, como los protones, son aceleradas desde una fuente S en el centro por la diferencia de potencial a través del hueco entre los bloques. Cuando las partículas cargadas llegan de nuevo al hueco, la diferencia de potencial ha cambiado de signo, por lo que son aceleradas de nuevo a través del hueco y se mueven en un círculo mayor.

- La diferencia de potencial a través del hueco alterna con la frecuencia ciclotrónica de la partícula, que es independiente del radio del círculo.

$$r = \frac{mv}{qB} \Rightarrow v = \frac{qBr}{m}$$

$$K = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{q^2B^2}{m}\right)r^2$$



Ejemplo

Un ciclotrón para acelerar protones tiene un campo magnético de 0,150 T y un radio máximo de 0,500 m.
(a) ¿Cuál es la frecuencia del ciclotrón?
(b) ¿Cuál es la energía cinética de los protones cuando emergen?

$$K = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{q^2B^2}{m}\right)r^2$$

$$F = ma$$
$$qvB = m\frac{v^2}{r}$$
$$q\omega rB = m\frac{\omega^2 r^2}{r}$$
$$\omega = \frac{qB}{m} = \frac{(1,60 \times 10^{-19}\mathrm{C})(0,150\ \mathrm{T})}{1,67 \times 10^{-27}\ \mathrm{kg}} = 1,44 \times 10^7\ \mathrm{rad/s}$$
$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1,44 \times 10^7 \mathrm{rad/s}}{2\pi \mathrm{rad}} = 2,29 \times 10^6\ \mathrm{Hz} = 2,29\ \mathrm{MHz}$$

$$\begin{aligned} K &= \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\omega^2 r^2 \\ &= \frac{1}{2}(1,67 \times 10^{-27}\ \mathrm{kg})(1,44 \times 10^7 \mathrm{rad/s})^2(0,500\ \mathrm{m})^2 \\ &= 4,33 \times 10^{-14}\ \mathrm{J} \end{aligned}$$

$$K = 4,33 \times 10^{-14}\ \mathrm{J} \times \frac{1\mathrm{eV}}{1,60 \times 10^{-19}\ \mathrm{J}} = 271\mathrm{keV}$$

La velocidad de salida del protón es $v = r\omega = (0,500\ \mathrm{m})(1,44 \times 10^7 \mathrm{rad/s}) = 7,20 \times 10^6\ \mathrm{m/s}$. La velocidad de la luz es $3.00 \times 10^8\ \mathrm{m/s}$.

Nuestro valor calculado de $1,44 \times 10^7 \mathrm{rad/s}$ para la frecuencia angular es plausible porque se trata de una velocidad alta que es inferior al diez por ciento de la velocidad de la luz.

Ejemplo

Un ciclotrón utilizado para acelerar partículas alfa ($m = 6,64 \times 10^{-27}$ kg, $q = 3,2 \times 10^{-19}$C) tiene un radio de $0,50$ m y un campo magnético de $1,8$ T.

(a) ¿Cuál es el período de revolución de las partículas alfa?
(b) ¿Cuál es su energía cinética máxima?

(a)

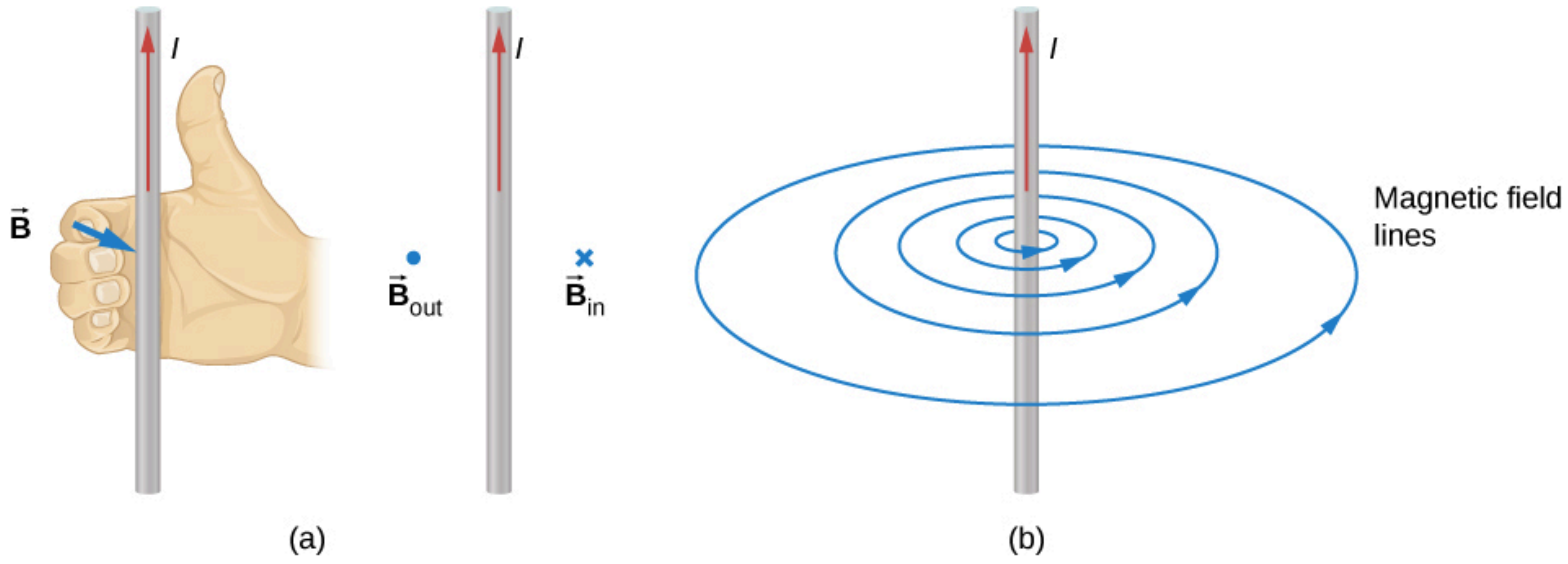
$$T = \frac{2\pi m}{qB} = \frac{2\pi\left(6,64 \times 10^{-27}\ \mathrm{kg}\right)}{\left(3,2 \times 10^{-19}\mathrm{C}\right)(1,8T)} = 7,3 \times 10^{-8}\ \mathrm{s}$$

(b)

$$\frac{1}{2}mv_{\max}^2 = \frac{q^2B^2R^2}{2m} = \frac{\left(3.2 \times 10^{-19}\mathrm{C}\right)^2(1.8T)^2(0,50\ \mathrm{m})^2}{2\left(6,65 \times 10^{-27}\ \mathrm{kg}\right)} = 6,2 \times 10^{-12}\ \mathrm{J} = 39\mathrm{MeV}$$

3 Fuerza magnética sobre alambres

- La aguja de la brújula cerca del alambre experimenta una fuerza que alinea la aguja tangente a un círculo alrededor del alambre. Por lo tanto, un hilo conductor de corriente produce bucles circulares de campo magnético.



$$I = neAv_d$$

La fuerza magnética sobre cualquier portador de carga es

$$\vec{F} = e\vec{v}_d \times \vec{B}_1$$

La fuerza magnética total $d\vec{F}$ sobre los $nA{\cdot}dl$ portadores de carga en la sección de alambre es

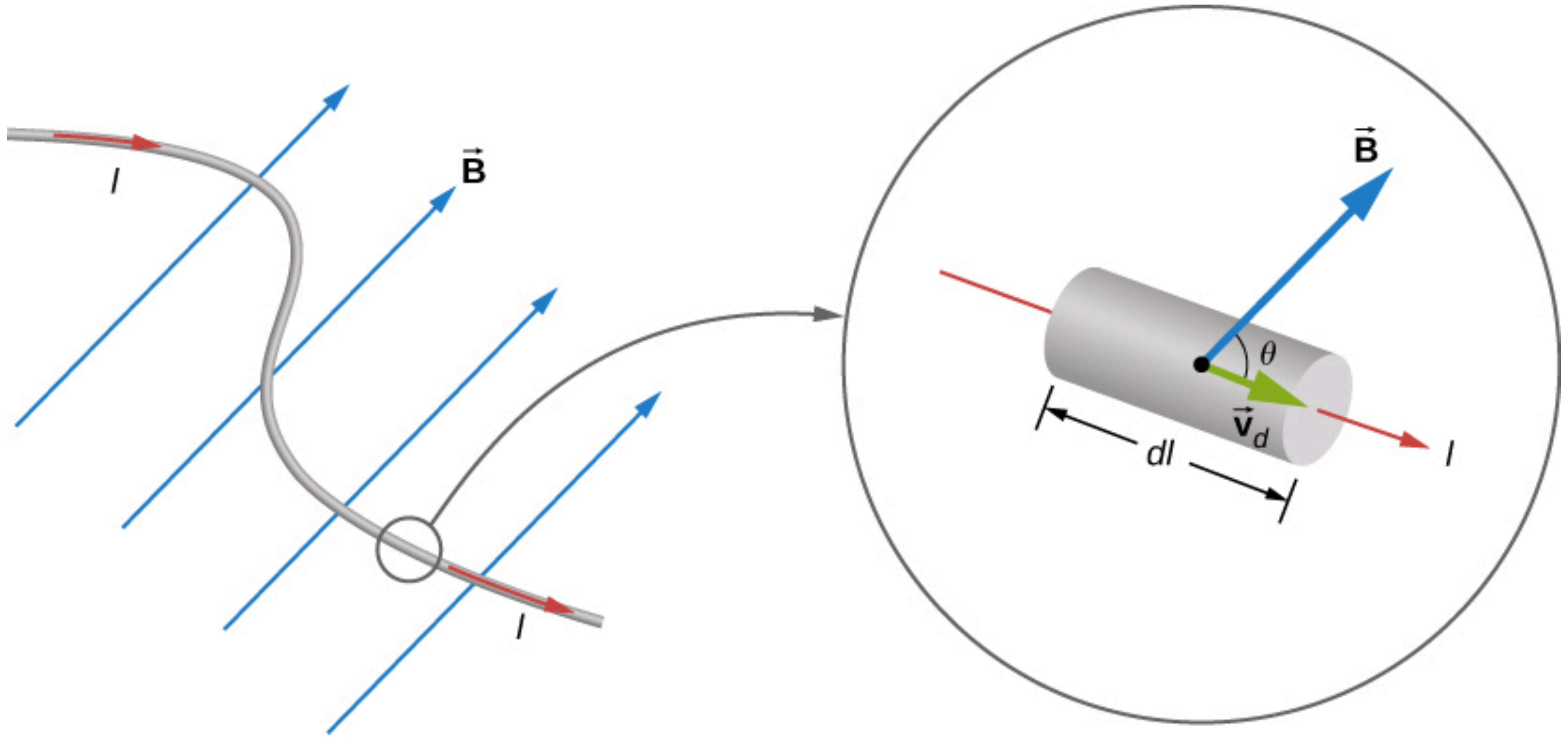
$$d\vec{F} = (nA \cdot dl)e\vec{v}_d \times \vec{B}$$

$$d\vec{F} = neAv_d d\vec{l} \times \vec{B}$$

$$d\vec{F} = Id\vec{l} \times \vec{B}$$

Integrando sobre el alambre entero

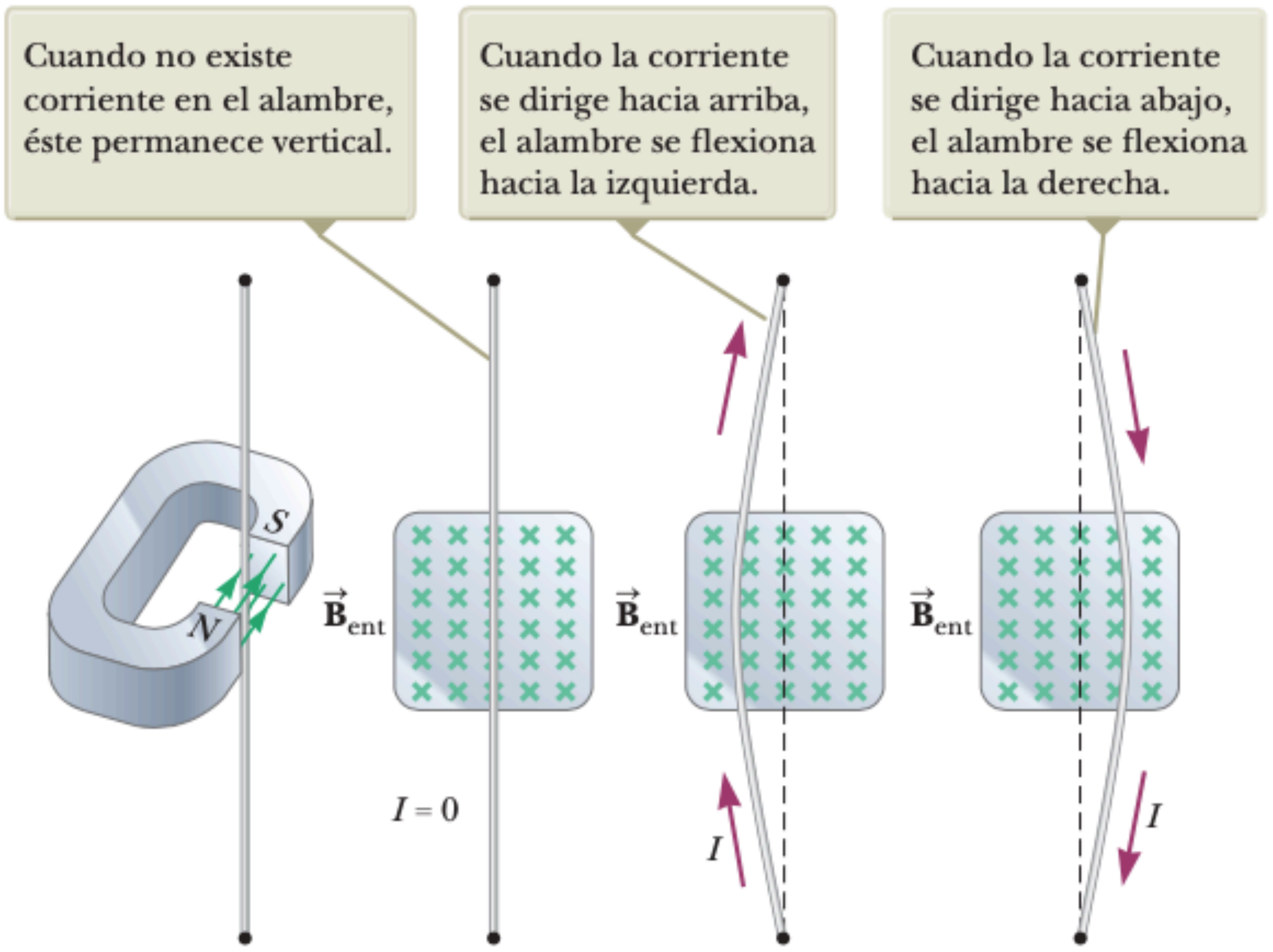
$$\vec{F} = I\vec{l} \times \vec{B}$$



$$\vec{F} = I\vec{l} \times \vec{B}$$

- Un campo magnético ejerce una fuerza sobre un hilo conductor de corriente.

- Este efecto puede invertirse: al mover un alambre a través de un campo magnético, la corriente circula por el alambre, lo que permite generar electricidad a partir del trabajo mecánico.



Ejemplo

Un alambre largo y rígido tendido a lo largo del eje *y* lleva una corriente de 5,0 A que fluye en la dirección y positiva.

- (a) Si un campo magnético constante de magnitud 0,30 T se dirige a lo largo del eje *x* positivo ¿cuál es la fuerza magnética por unidad de longitud sobre el alambre?
- (b) Si un campo magnético constante de 0,30 T se dirige 30 grados desde el eje +*x* hacia el eje +*y* ¿cuál es la fuerza magnética por unidad de longitud sobre el alambre?

- (a)

$$F = IlB\sin\theta$$

$$\frac{F}{l} = (5,0A)(0,30T) = 1,5\ \mathrm{N/m}$$

$$\frac{\vec{F}}{l} = -1,5\,\hat{k}\ \mathrm{N/m}$$

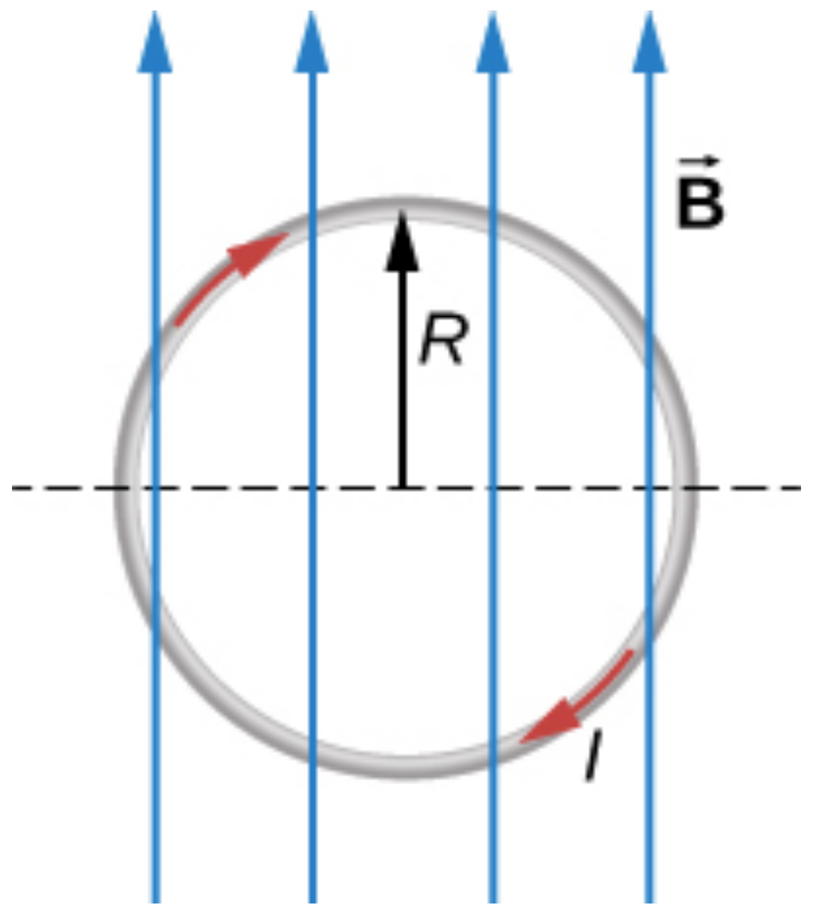
- (b)

$$\vec{F} = I\vec{l} \times \vec{B} = (5,0A)l\,\hat{j} \times \left(0,30T\cos(30^\circ)\,\hat{i}\right)$$

$$\frac{\vec{F}}{l} = -1,30\,\hat{k}\,N/m$$

Ejemplo

- Una espira circular de radio R que transporta una corriente I se coloca en el plano xy. Un campo magnético uniforme constante atraviesa la espira paralelamente al eje y.
- Encontrar la fuerza magnética sobre la mitad superior de la espira, la mitad inferior de la espira y la fuerza total sobre la espira.



Sobre un elemento de la espira

$$dF = IB\sin\theta dl$$

$$dl = Rd\theta$$
$$dF = IBR\sin\theta d\theta$$

La fuerza sobre el medio segmento superior es

$$F = IBR\int_0^{\pi}\sin\theta d\theta = IBR(-\cos\pi + \cos 0) = 2IBR.$$

La fuerza sobre el medio segmento inferior es

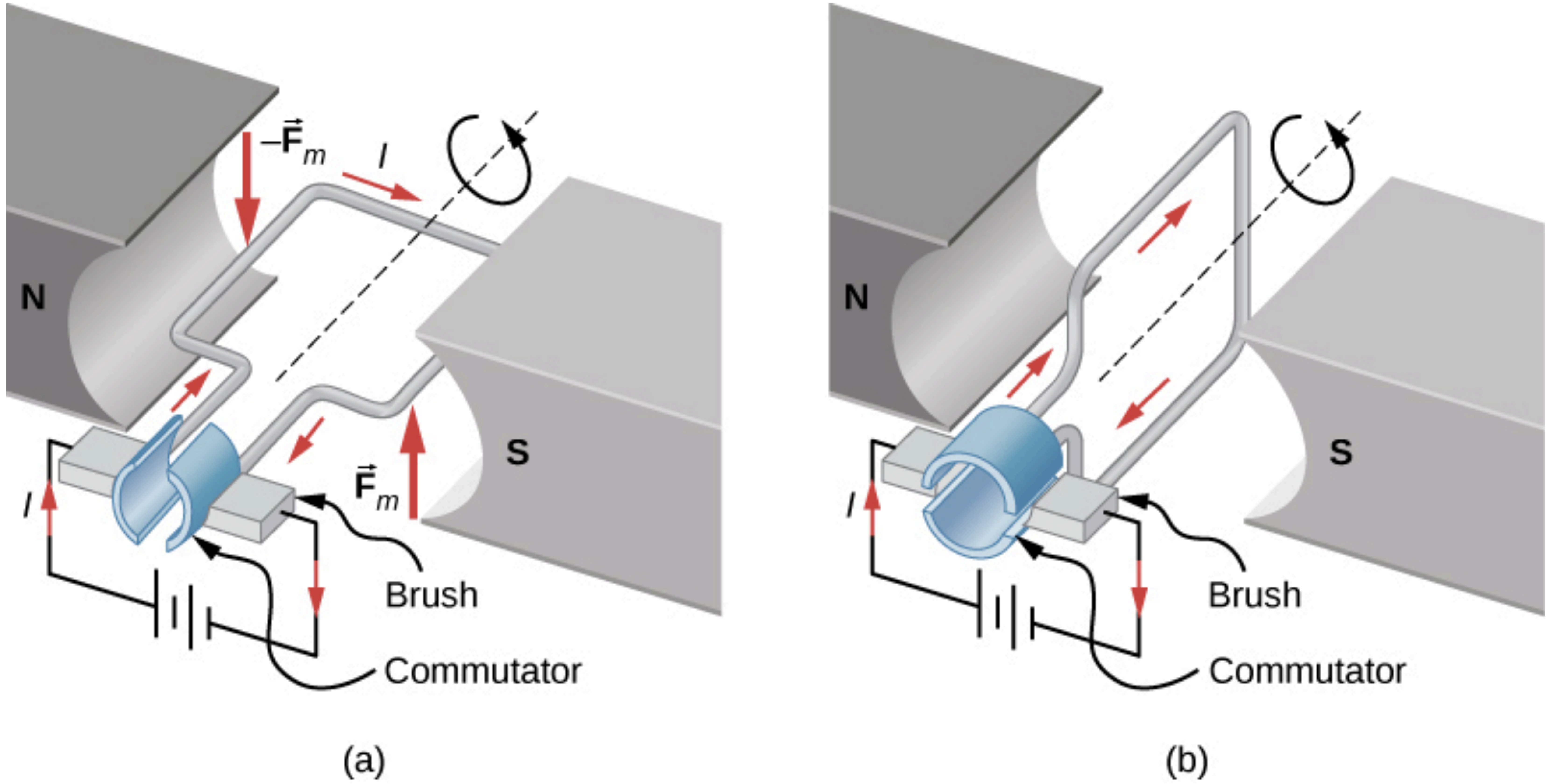
$$F = IBR\int_{\pi}^{0}\sin\theta d\theta = IBR(-\cos 0 + \cos\pi) = \underline{-2IBR}$$

0

4 Torques magnéticos

- Los motores son la aplicación más común de la fuerza magnética sobre cables conductores de corriente, estos están hechos de espiras de alambre en un campo magnético.

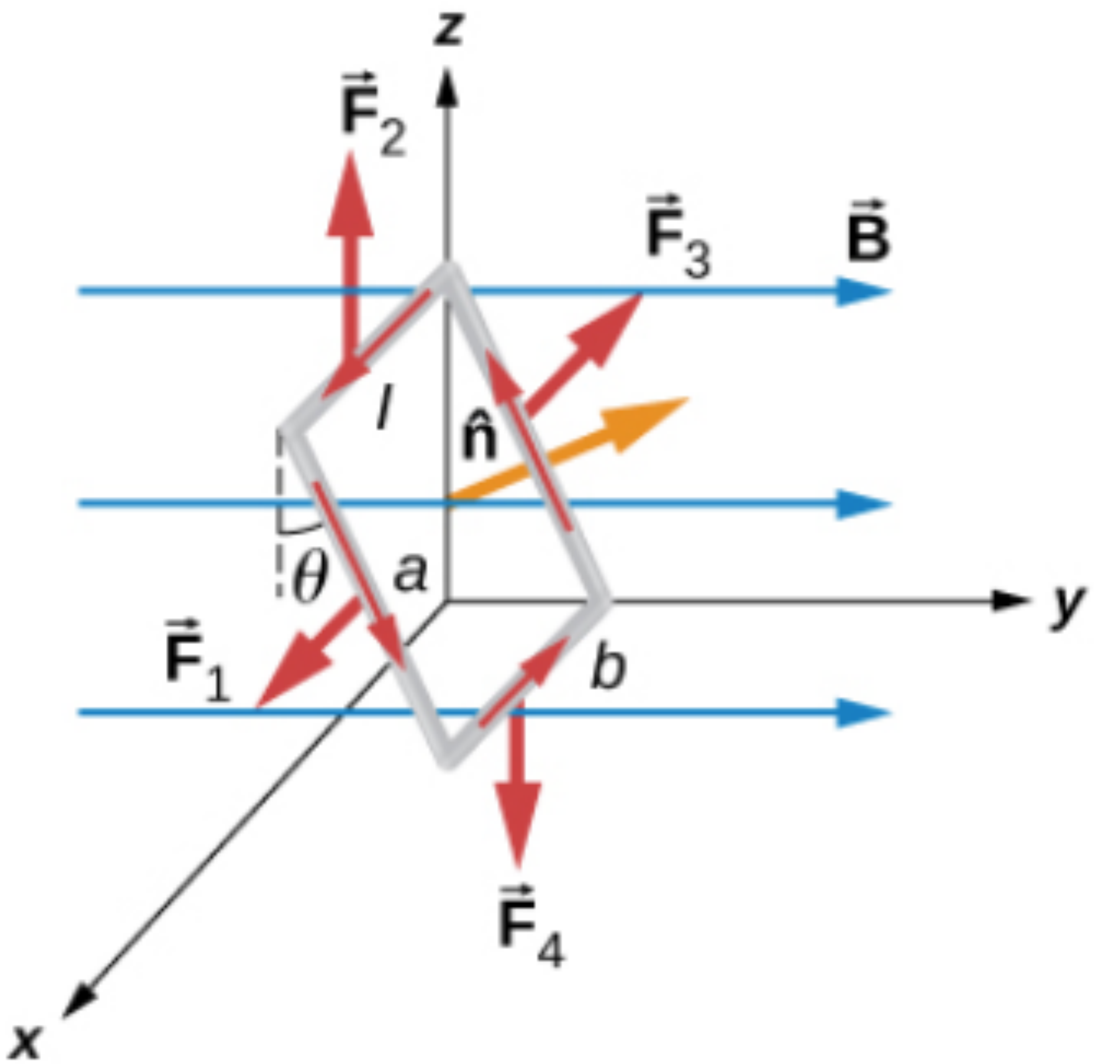
- Cuando la corriente pasa a través de las espiras, el campo magnético ejerce un torque de torsión sobre las espiras, lo que hace girar un eje. La energía eléctrica se transforma en trabajo mecánico. Una vez que la superficie de la espira se alinea con el campo magnético, la dirección de la corriente se invierte, por lo que hay un torque continuo en la espira.



- En un campo magnético uniforme, una espira de alambre que transporta corriente, experimenta tanto fuerzas como torques sobre la espira.

- Consideremos una espira rectangular de alambre que lleva una corriente I y tiene lados de longitudes a y b, la espira está en un campo magnético uniforme: $\vec{B} = B\vec{j}$.

- La fuerza magnética sobre un hilo recto conductor de corriente de longitud l viene dada por $I\vec{l} \times \vec{B}$. Para hallar la fuerza neta sobre la espira, tenemos que aplicar esta ecuación a cada uno de los cuatro lados.



- La fuerza sobre el lado 1 es

$$\vec{F}_1 = IaB\sin(90^\circ - \theta)\hat{i} = IaB\cos\theta\hat{i}$$

- La corriente en el lado 3 fluye en dirección opuesta a la del lado 1:

$$\vec{F}_3 = -IaB\sin(90^\circ + \theta)\hat{i} = -IaB\cos\theta\hat{i}$$

- Las corrientes en los lados 2 y 4 son perpendiculares a $\vec{B}$ y las fuerzas en estos lados son

$$\vec{F}_2 = IbB\hat{k}\,, \quad \vec{F}_4 = -IbB\hat{k}$$

- La fuerza neta sobre la espira:

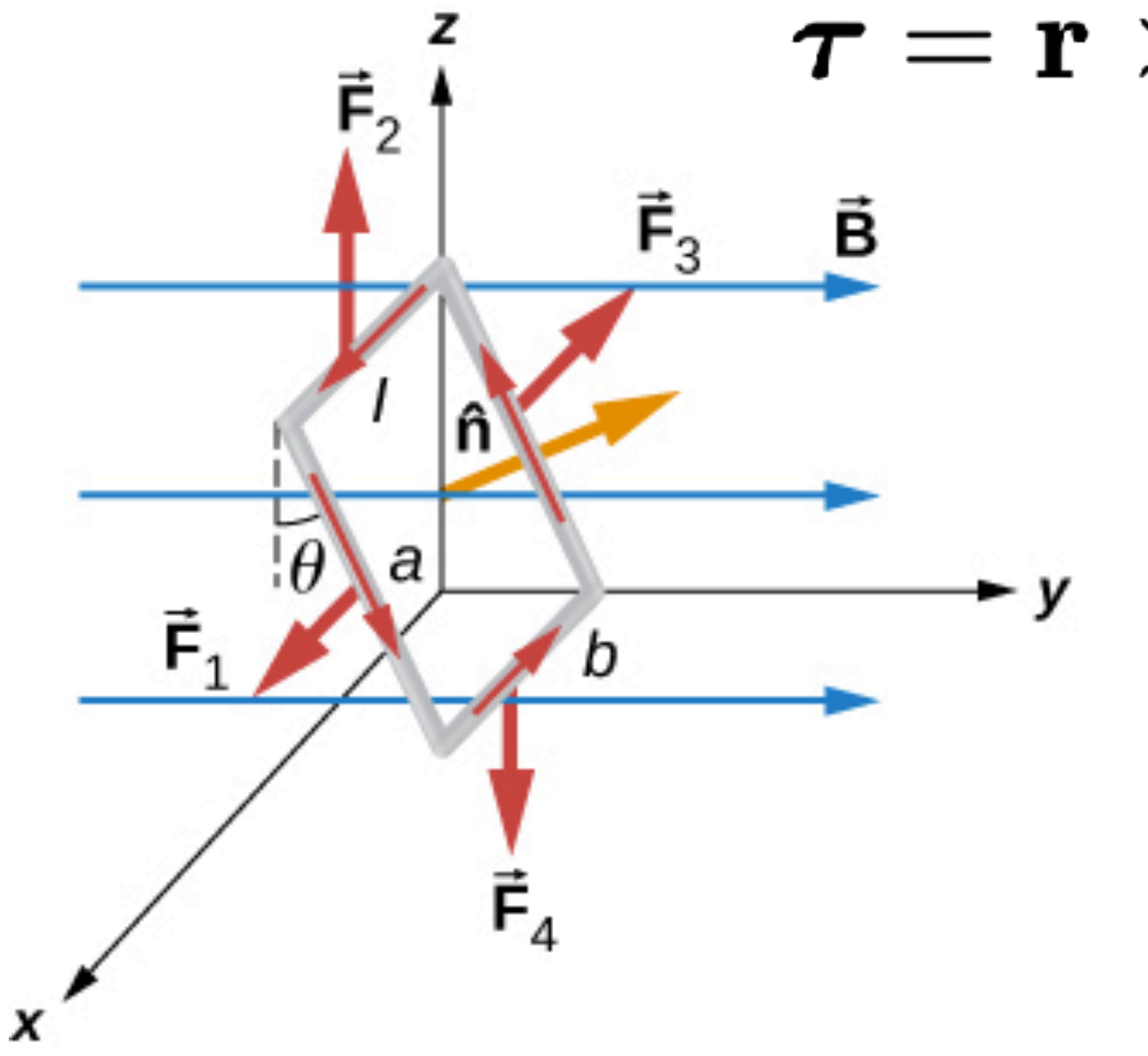
$$\sum \vec{F}_{net} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \vec{F}_4 = 0$$

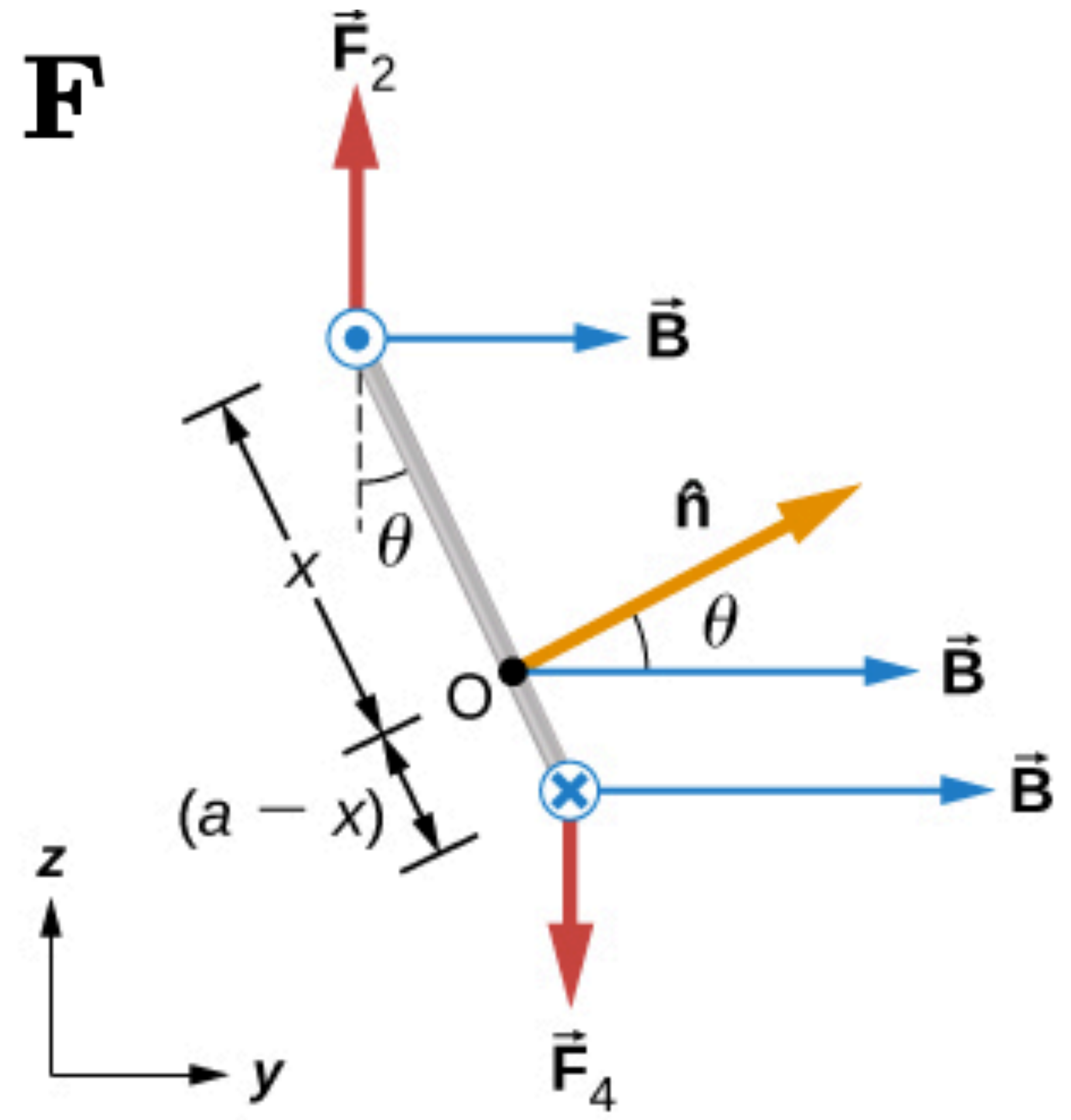
- Aunque este resultado ($\sum F$=0) se ha obtenido para una espira rectangular, es mucho más general y vale para espiras conductoras de corriente de formas arbitrarias; es decir, no hay fuerza neta sobre una espira de corriente en un campo magnético uniforme.

- Encontremos el torque neto en la espira que se muestra en la figura.
- Notemos que F_1 y F_3 tienen la misma línea de acción y son iguales y opuestos, la suma de sus torques sobre cualquier eje es cero.
- Por lo tanto, un torque en la espira debe ser proporcionado por F_2 y F_4 .

$$\vec{F}_2 = IbB\hat{k}\,, \quad \vec{F}_4 = -IbB\hat{k}$$

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$$





- Calculemos los torque alrededor del eje que pasa por el punto O y que es perpendicular al plano de la imagen.
- El punto O está a una distancia x del lado 2 y a una distancia (a-x) del lado 4 de la espira.
- Los brazos de momento de F_2 y F_4 son $x sen\theta$ y $(a\text{-}x)\ sen\theta$, respectivamente, por lo que el torque neto en la espira es

$$\begin{aligned} \sum \vec{\tau} &= \vec{\tau}_1 + \vec{\tau}_2 + \vec{\tau}_3 + \vec{\tau}_4 = F_2 x \sin\theta \hat{i} - F_4(a - x)\sin(\theta)\hat{i} \\ &= IbBx \sin\theta \hat{i} + IbB(a - x)\sin\theta \hat{i} = IbBa \sin\theta \hat{i} \end{aligned}$$

- Que se puede escribir de la forma:

$$\vec{\tau} = IAB \sin\theta \hat{i}$$

- Donde A=ab es el área de la espira.

- El toque es independiente de x; por tanto, es independiente de dónde esté situado el punto O en el plano de la espira de corriente.

- Por lo tanto, la espira experimenta el mismo torque del campo magnético alrededor de cualquier eje en el plano de la espira y paralelo al eje x.

- Una espira de corriente cerrada se denomina comúnmente **dipolo magnético** y el término *IA* se conoce como su momento de dipolo magnético $\boldsymbol{\mu}$.
- En realidad, el momento de dipolo magnético es un vector que se define como:

$$\vec{\mu} = IA\hat{n}$$

  - Donde $\hat{n}$ es un vector unitario dirigido perpendicularmente al plano de la espira.
  - La dirección de $\hat{n}$ se obtiene con la regla de la mano derecha
  - Si la espira contiene *N* vueltas de alambre, entonces su momento dipolar magnético viene dado por

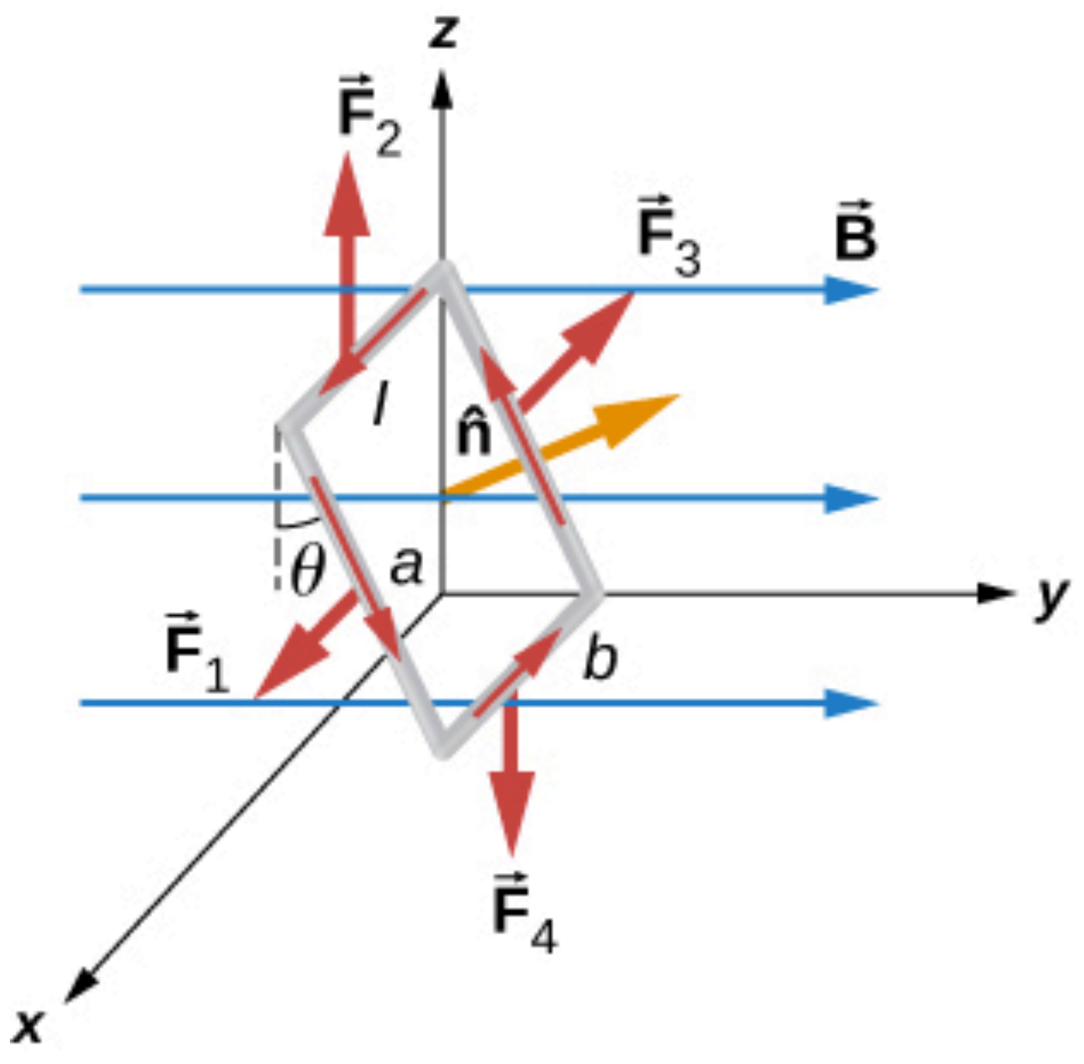
$$\vec{\mu} = NIA\hat{n}.$$

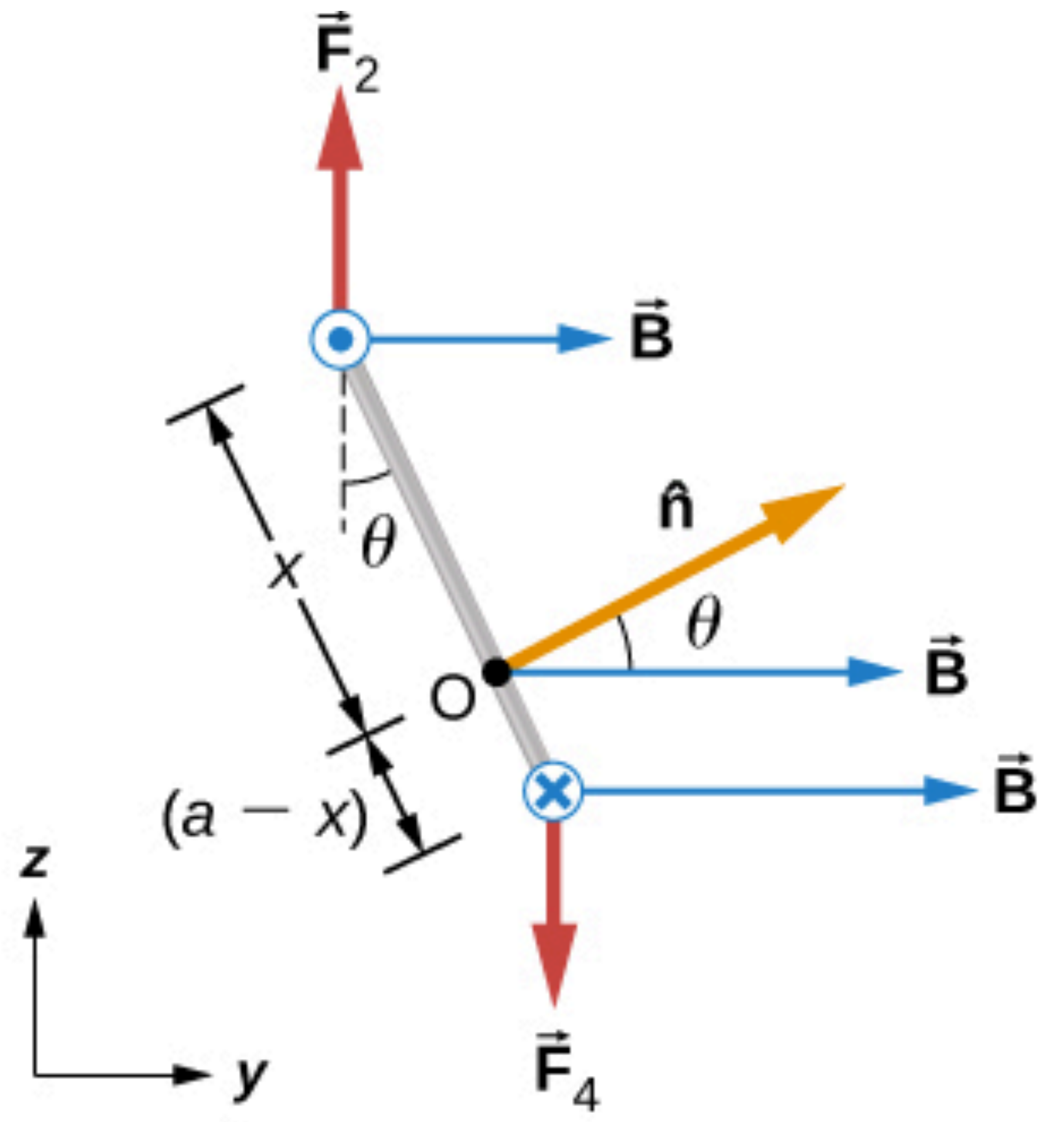
- En términos del momento dipolar magnético, el torque en una espira de corriente debido a un campo magnético uniforme puede escribirse como:

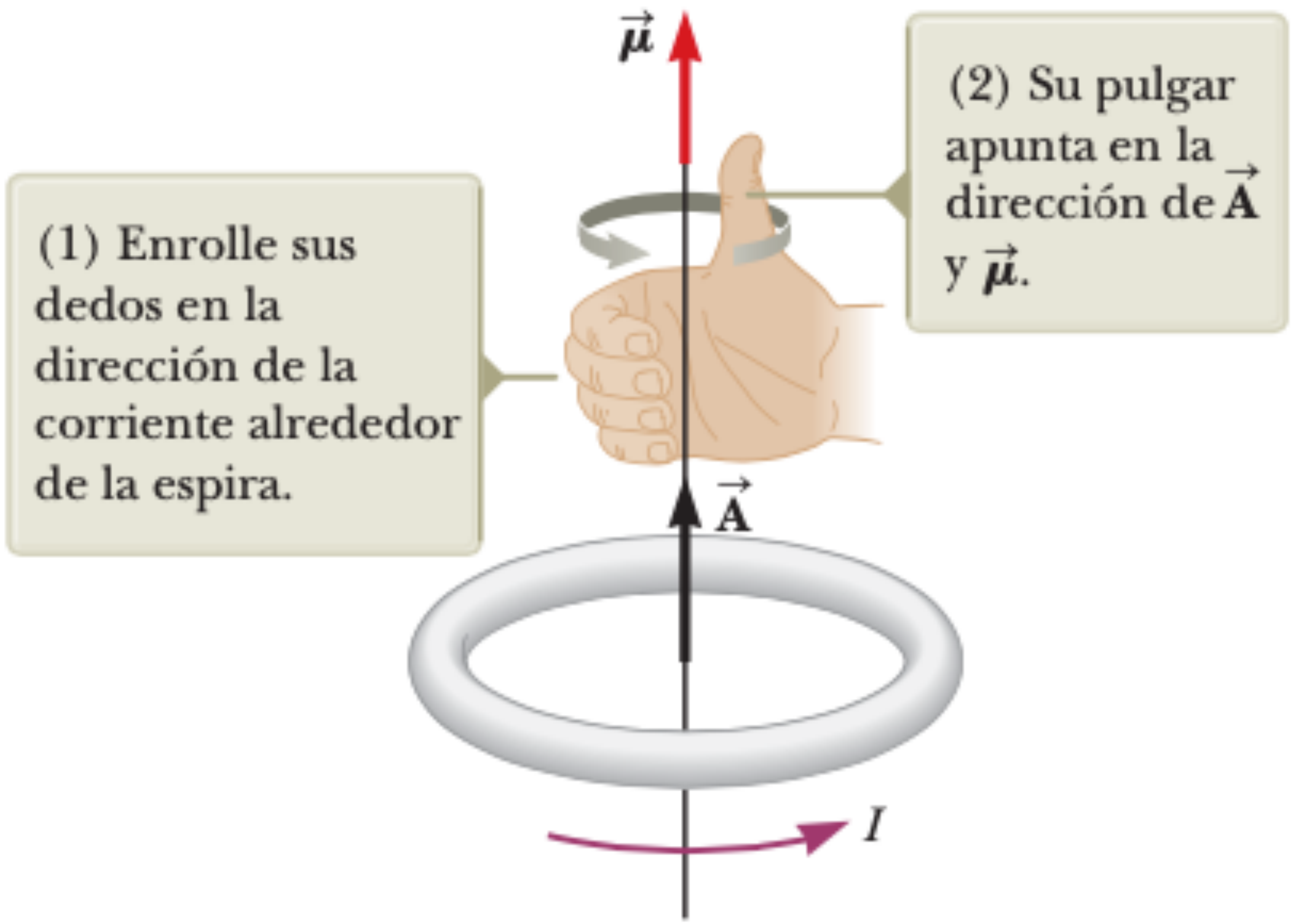
$$\vec{\tau} = \vec{\mu} \times \vec{B}$$

  - En analogía al caso cuando tenemos un dipolo eléctrico: $U_E = -\mathbf{\vec{p}} \cdot \mathbf{\vec{E}}$

  - La energía potencial de un dipolo magnético es: $U = -\vec{\mu} \cdot \vec{B}$







Ejemplo

Una espira de corriente circular de radio 2,0 cm transporta una corriente de 2,0 mA.
(a) ¿Cuál es la magnitud de su momento dipolar magnético?
(b) Si el dipolo está orientado 30 grados respecto a un campo magnético uniforme de magnitud 0,50 T, ¿cuál es la magnitud del torque que experimenta y cuál es su energía potencial?

El momento magnético μ se calcula mediante la corriente multiplicada por el área de la espira

$$\mu = IA = \left(2,0 \times 10^{-3} A\right)\left(\pi(0,02m)^2\right) = 2,5 \times 10^{-6} A \cdot m^2$$

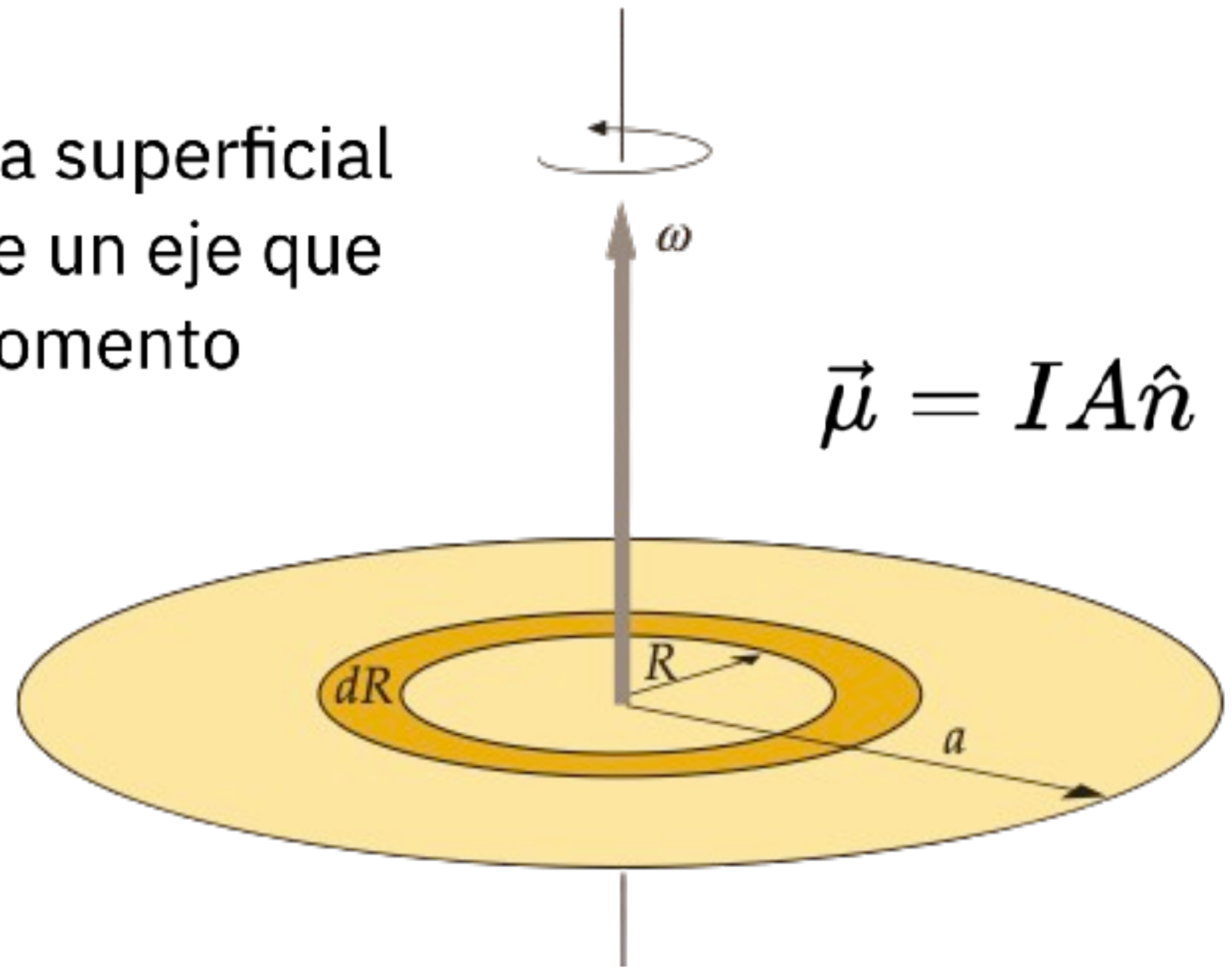
El torque y la energía potencial se calculan identificando el momento magnético, el campo magnético y el ángulo entre estos dos vectores:

$$\tau = |\vec{\mu} \times \vec{B}| = \mu B \sin\theta = \left(2,5 \times 10^{-6} A \cdot m^2\right)(0,50T)\sin(30^\circ) = 6,3 \times 10^{-7}\ \mathrm{N \cdot m}$$
$$U = -\vec{\mu} \cdot \vec{B} = -\mu B \cos\theta = -\left(2,5 \times 10^{-6} A \cdot m^2\right)(0,50T)\cos(30^\circ) = -1,1 \times 10^{-6}\ \mathrm{J}$$

- Como veremos más adelante, la alineación del momento magnético con el campo magnético es la funcionalidad de dispositivos como los motores magnéticos, en los que la conmutación del campo magnético externo da lugar a un giro constante de la espira mientras intenta alinearse con el campo para minimizar su energía potencial.

Ejemplo

Un disco delgado no conductor que tiene una masa m, un radio a y una carga superficial uniforme por unidad de área σ gira con una velocidad angular $\vec{\omega}$ alrededor de un eje que pasa por el centro del disco y es perpendicular al plano del disco. Halla el momento magnético del disco giratorio.



$$\vec{\mu} = IA\hat{n}$$

$$d\mu = AdI = \pi R^2 dI$$

$$\begin{aligned} dI &= \frac{dq}{T} = \frac{\omega}{2\pi}dq = \frac{\omega}{2\pi}\sigma dA \\ &= \frac{\omega}{2\pi}\sigma 2\pi R dR = \sigma\omega R dR \end{aligned}$$

$$d\mu = \pi R^2 dI = \pi R^2 \sigma\omega R dR = \pi\sigma\omega R^3 dR$$

$$\mu = \int_0^a \pi\sigma\omega R^3 dR = \frac{1}{4}\pi\sigma\omega a^4$$

$$\vec{\mu} = \frac{1}{4}\pi\sigma a^4 \vec{\omega}$$

Problemas propuestos - Campo magnético

1. Un electrón que se mueve a $4{,}00 \times 10^3$ m/s en un campo magnético de 1,25 T experimenta una fuerza magnética de $1{,}40 \times 10^{-16}$ N ¿Qué ángulo forma la velocidad del electrón con el campo magnético?

   Sol: 10.1° y 169.9°

2. (a) Un ión de oxígeno-16 con una masa de $2{,}66 \times 10^{-26}$ kg viaja a $5{,}0 \times 10^6$ m/s perpendicular a un campo magnético de 1,20 T, que hace que se mueva en un arco circular de 0,231 m de radio ¿Qué carga positiva tiene el ion? (b) ¿Cuál es la relación entre esta carga y la carga de un electrón?

   Sol: (a) $4{,}80 \times 10^{-19}$C; (b) 3.

3. Encuentre la corriente a través de una espira necesaria para crear un torque máximo de 9,0 N-m. La espira tiene 50 vueltas cuadradas de 15,0 cm de lado y se encuentra en un campo magnético uniforme de 0,800 T.

   Sol: $I = 10{,}0$ A

4. Se quiere diseñar un ciclotrón para acelerar protones a una décima parte de la velocidad de la luz. El campo magnético tendrá una intensidad de 1,5 T. Determine (a) el periodo de rotación de los protones circulantes y (b) el radio máximo de la órbita de los protones.

   Sol: (a) $4{,}4 \times 10^{-8}$ s; (b) 0,21 m