

Instrucciones: Para recibir puntos, todo trabajo o razonamiento debe ser mostrado para poder obtener todo el puntaje; no serán asignados puntos parciales. Durante el examen NO está permitido: (i) El préstamo o intercambio de implementos, tales como lápices, lapiceros, borradores, etc. (ii) Realizar preguntas acerca de las respuestas del examen, porque parte de la evaluación es la comprensión de los enunciados. (iii) El uso de teléfonos celulares y calculadoras. Este examen tiene ?? preguntas, con un total de ?? puntos.

1. Considere la función

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{3x^2y}{x^4 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

- (a) (3 pts) Encuentre el dominio de f .

Solución: Como $f(0, 0) = 0$ entonces $(0, 0)$ está en el dominio de f . Si $(x, y) \neq (0, 0)$ entonces $f(x, y) = \frac{3x^2y}{x^4 + y^2}$, que por ser función racional está definida todo $(x, y) \neq (0, 0)$ tal que $x^4 + y^2 \neq 0$. Ahora bien, como $x^4 + y^2 = 0$ si $(x, y) = (0, 0)$ entonces se concluye que f también está definida para todo $(x, y) \neq (0, 0)$. Por lo tanto, el dominio de f esto todo \mathbb{R}^2 .

- (b) (5 pts) Determine si f es continua en todo su dominio.

Solución: Como para todo $(x, y) \neq (0, 0)$ f es una función racional, ella es continua para todo $(x, y) \neq (0, 0)$. Luego la única posibilidad para que f sea discontinua en su dominio, es que sea discontinua en $(0, 0)$. Tenemos que $f(0, 0)$ existe y es cero. Veamos si el límite de f en $(0, 0)$ existe. Considerando todas las rectas $y = mx$, con m real, tenemos que

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3mx^3}{x^4 + m^2x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3mx}{x^2 + m^2} = 0.$$

Considerando la parábola $y = x^2$ tenemos que

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x^4}{x^4 + x^4} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x^4}{2x^3} = \frac{3}{2}.$$

Como los límites a lo largo de estos dos tipos de curvas que pasan por $(0, 0)$ son distintos, entonces el límite de f en $(0, 0)$ no existe. Por lo tanto, f no es continua en $(0, 0)$. Entonces f no es continua en todo su dominio.

- (c) (2 pts) Determine si f diferenciable en $(0, 0)$.

Solución: Como diferenciabilidad implica continuidad, y f no es continua en $(0, 0)$ entonces f no es diferenciable en $(0, 0)$.

2. (6 pts) El radio de un cilindro circular recto decrece a razón de 5 cm/min y la altura crece a razón de 12 cm/min. Determine la razón de cambio de su volumen al momento en el que el radio es de 20 cm y la altura es 40 cm.

Solución: Si el cilindro tiene altura h y radio r entonces su volumen es $V = \pi r^2 h$. Se tiene que las variaciones de r y h con respecto al tiempo son $\frac{dr}{dt} = -5$ y $\frac{dh}{dt} = 12$. En el instante que $r = 20$ y $h = 40$, tenemos de la regla que en este momento la razón de cambio del volumen es

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial r} \frac{dr}{dt} + \frac{\partial V}{\partial h} \frac{dh}{dt} = 2\pi r h \frac{dr}{dt} + \pi r^2 \frac{dh}{dt} = 2\pi(20)(40)(-5) + \pi(20)^2(12) = -3200\pi \approx -10053,096.$$

Es decir, en ese momento el volumen decrece a razón de aproximadamente 10053 centímetros cúbicos por minuto.

3. (9 pts) Suponga que la temperatura $T(x, y)$ (en grados Celsius) en cualquier punto (x, y) del plano está dada de la forma $T(x, y) = 100xy^2$, donde las distancias se miden en metros. Determine la(s) dirección(es) en la cual la derivada direccional de la temperatura en el punto $P = (3, -4)$ tiene valor 0.

Solución: Tenemos que

$$\nabla T(P) = (100y^2, 200xy) \Big|_P = (900, -2400).$$

Si $N = (x, y)$ es la dirección del vector no nulo que hace que la derivada direccional de T en P sea cero, entonces se debe cumplir que

$$\frac{\partial T}{\partial N}(P) = \nabla T(P) \cdot \hat{N} = 0 \implies 900x - 2400y = 0.$$



Es decir N debe ser ortogonal al vector gradiente de T en P , o lo que es lo mismo, todo vector no nulo N que se encuentre en la recta $900x - 2400y = 0$. Como de esta ecuación se sigue que

$$y = \frac{9}{24}x$$

entonces

$$N = (x, y) = x \left(1, \frac{9}{24}\right) \quad \text{con } x \neq 0.$$

4. (7 pts) Utilice multiplicadores de Lagrange para determinar los punto en la curva $x^2 + y^2 - 4y = 0$ donde el potencial eléctrico $V(x, y) = 25 - x^2 - y^2$ es máximo o mínimo. Calcule el potencial eléctrico en tales puntos.

Solución: En este caso debemos resolver el problema de optimización con restricciones

$$\begin{array}{ll} \text{extremos} & V(x, y) = 25 - x^2 - y^2 \\ \text{condición} & x^2 + y^2 - 4y = 0. \end{array}$$

Por multiplicadores de Lagrange, debemos resolver el problema

$$(V_x = \lambda g_x) \quad -2x = 2\lambda x \quad \Rightarrow -x = \lambda x \quad (1)$$

$$(V_y = \lambda g_y) \quad -2y = \lambda(2y - 4) \Rightarrow -y = \lambda(y - 2) \quad (2)$$

$$(g = 0) \quad x^2 + y^2 - 4y = 0 \Rightarrow x^2 + y^2 - 4y = 0. \quad (3)$$

De (1) se sigue que $(\lambda + 1)x = 0$, de lo cual se sigue que $x = 0$ o $\lambda = -1$.

- Si $\lambda = -1$, se sigue de (2) que $-y = -(y - 2)$ lo cual implica que $0 = 2$, lo cual es una contradicción.
- Si $x = 0$ se sigue de (3) que $y^2 - 4y = y(y - 4) = 0$, por lo cual $y = 0$ o $y = 4$. Se tienen así que $(0, 0)$ y $(0, 4)$ son los únicos puntos críticos del problema de optimización con restricciones dado.

En estos puntos, el potencial eléctrico es de $V(0, 0) = 25$ voltios y de $V(0, 4) = 9$ voltios. Así que el mayor y menor potencial eléctrico, 25 y 9 voltios, se alcanzan en los punto $(0, 0)$ y $(0, 4)$, respectivamente, de la superficie.

5. (9 pts) Usando un cambio de variables adecuado, calcule la integral doble

$$\iint_{\mathcal{D}} (2y - x) \cos(2x - y) dA,$$

donde \mathcal{D} es la región del plano en el primer cuadrante, comprendida entre las rectas $2y - x = 0$, $2y - x = 3$, $2x - y = 0$, $2x - y = 3$.

Solución: Haciendo el cambio de variable $u = 2y - x$ y $v = 2x - y$ se obtiene la región \mathcal{D}^* en el plano uv comprendida entre las rectas $u = 0$, $u = 3$ y $v = 0$ y $v = 3$. Resolviendo de estas ecuaciones para x y y tenemos que

$$\begin{aligned} -x + 2y = u &\implies x = \frac{u + 2v}{3} \\ 2x - y = v &\implies y = \frac{2u + v}{3} \end{aligned}$$

Dado que el jacobiano de esta transformación es

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = x_u y_v - x_v y_u = \frac{1}{3} \frac{1}{3} - \frac{2}{3} \frac{2}{3} = -\frac{1}{3}$$

entonces por el teorema de cambio de variable tenemos que

$$\begin{aligned} \iint_{\mathcal{D}} (2y - x) \cos(2x - y) dA &= \iint_{\mathcal{D}^*} u \cos v \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| du dv \\ &= \frac{1}{3} \int_0^3 \int_0^3 u \cos v du dv = \frac{1}{3} \int_0^3 u du \int_0^3 \cos v dv \\ &= \frac{1}{3} \frac{u^2}{2} \Big|_0^3 \Big|_0^3 \sin v = \frac{1}{3} \frac{9}{2} \sin 3 \\ &= \frac{3 \sin 3}{2} \end{aligned}$$



6. (9 pts) Evalúe la siguiente integral mediante coordenadas cilíndricas o esféricas.

$$\int_0^2 \int_0^{\sqrt{4-x^2}} \int_0^{\sqrt{4-x^2-y^2}} z \sqrt{4-x^2-y^2} dz dy dx.$$

Solución: En coordenadas cilíndricas,

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta, \quad z = z, \quad \frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)} = r$$

donde

$$0 \leq r \leq 2, \quad 0 \leq \theta \leq \pi, \quad 0 \leq z \leq \sqrt{4-x^2-y^2} = \sqrt{4-r^2}$$

entonces por el teorema de cambio de variables tenemos que

$$\begin{aligned} \int_0^2 \int_0^{\sqrt{4-x^2}} \int_0^{\sqrt{4-x^2-y^2}} z \sqrt{4-x^2-y^2} dz dy dx &= \int_0^2 \int_0^{\pi/2} \int_0^{\sqrt{4-r^2}} z r \sqrt{4-r^2} dz d\theta dr \\ &= \int_0^2 \int_0^{\pi/2} \left[\frac{z^2}{2} \right]_{z=0}^{z=\sqrt{4-r^2}} r \sqrt{4-r^2} d\theta dr \\ &= \frac{1}{2} \int_0^2 \int_0^{\pi/2} r(4-r^2)^{3/2} d\theta dr \\ &= \frac{1}{2} \int_0^2 r(4-r^2)^{3/2} dr \int_0^{\pi/2} d\theta \\ &= \frac{35\pi}{20}. \end{aligned}$$

