Universidad Industrial de Santander

Facultad de Ciencias
Escuela de Matemáticas

Sexto taller de refuerzo

Integrales dobles

Cálculo III - 20254
Fecha: Noviembre 2025

Nombre: ______________________ Código: ______________ Grupo: ______________

1. Encontrar los extremos de la función $f(x, y) = x^2y^2$ sujeta a la restricción $2x^2 + y^2 \leq 8$. Haga la gráfica en geogebra
2. Un paquete en forma de caja rectangular se puede enviar a travésde U.S Postal Service, si la suma de su largo y el perimetro de una sección transversal perpendicular al largo es de 108 pulgadas como máximo. Calcule las dimensiones del paquete con el volumen más grande que se puede enviar por paquete postal. Haga un bosquejo de la caja.
3. Hallar el valor exacto de la integral $\displaystyle\iint_R \cos\left(\frac{y-x}{x+y}\right) dA$, donde R es la región trapezoidal con vértices $(1, 0), (2, 0), (0, 2)$ y $(0, 1)$. Realice un bosquejo en GeoGebra de la región.
4. Resolver $\displaystyle\int_0^1 \int_{\arcsin y}^{\frac{\pi}{2}} \cos x \sqrt{1 + \cos^2 x}\, dx\, dy$. Realice un bosquejo en GeoGebra de la región.
5. Determine $\displaystyle\iint_D y^2 e^{xy}\, dA$ donde D está acotada por: $y = x$, $y = 4$ y $x = 0$. Realice un bosquejo en GeoGebra de la región.
6. Encontrar el área de la región que está ubicada dentro de la gráfica de $r = 2sin(\theta)$ y fuera de la región de $r = 1$. Realice un bosquejo en GeoGebra de la región.
7. Use una integral doble para hallar el área de la región dento del circulo $(x-1)^2+y^2 = 1$ y fuera del circulo $x^2 + y^2 = 1$. Dibuje en geogebra la región.
8. Sea la integral
$$\iint_R e^{\max\{x^2, y^2\}}\, dA$$
Donde $R = [0, 1] \times [0, 1] = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq 1\}$, $\max\{x^2, y^2\}$ representa los números más grandes de x^2 y y^2 sobre R ¿Cuál de las siguientes opciones representa la integral adecuada para evaluar la misma?

a) $\displaystyle\int_0^1 \int_0^x e^{x^2}\, dy\, dx + \int_0^1 \int_0^y e^{y^2}\, dx\, dy$

b) $\displaystyle\int_0^1 \int_0^x e^{x^2}\, dx\, dy + \int_0^1 \int_0^y e^{y^2}\, dy\, dx$

c) $\displaystyle\int_0^1 \int_0^y e^{x^2}\, dy\, dx + \int_0^1 \int_0^x e^{y^2}\, dx\, dy$

d) $\displaystyle\int_0^1 \int_0^1 e^{x^2}\, dy\, dx + \int_0^1 \int_0^1 e^{y^2}\, dx\, dy$

9. Una lámina está formada por los semicírculos $y = \sqrt{1-x^2}$ y $y = \sqrt{4-x^2}$ junto con las porciones del eje x que los une. Encuentre el centro de masa de la lámina si su densidad en cada punto es inversamente proporcional a la distancia desde el origen. Realice un bosquejo en GeoGebra de la región.

10. Considere el sólido acotado por la gráfica de $x^2 + y^2 = 4$, $z = 4 - y$ y $z = 0$. Hallar el volumen. Realice un bosquejo en GeoGebra de la región.

11. Determine el volumen de la región sólida limitada arriba por el paraboloide $z = 10 - x^2 - y^2$ y abajo por el circulo unitario en el plano xy. Realice un bosquejo en GeoGebra de la región.

12. Calcular $\displaystyle\iint_R f(x,y)\, dA$, donde $f(x,y) = x^2 y$ y R es la región en el primer cuadrante limitada por las circunferencias $x^2 + y^2 = 1$ y $x^2 + y^2 = 4$, la recta $x = y$ y la recta $x = 0$. Realice un bosquejo con GeoGebra de la región.

13. Considere la región sólida E,en el espacio tridimensional,que se encuentra encima del parabololide $z = x^2 + y^2$ y debajo del plano $z = 2x$

    a) Bosqueje la región usango GeoGebra

    b) Demuestre que la proyección de E sobre el plano xyes la región interna a la circuenferencia $(x-1)^2 + y^2 = 1$.

    c) Encuentre el volumen de este sólido E

14. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función continua en el intervalo $[0, 1]$ y sea D la región triangular con vértices en $(0, 0)$, $(1, 0)$ y $(0, 1)$. Muestre que

$$\iint_D f(x+y)\, dA \;=\; \int_0^1 u\, f(u)\, du.$$

$\boxdot$