Instrucciones: Todo trabajo o razonamiento debe ser mostrado para poder obtener todo el puntaje; no serán asignados puntos parciales. Durante el examen NO está permitido: (i) El préstamo o intercambio de implementos, tales como lápices, lapiceros, borradores, etc. (ii) Realizar preguntas acerca de las respuestas del examen, porque parte de la evaluación es la comprensión de los enunciados. (iii) El uso de teléfonos celulares y calculadoras. Este examen tiene 6 preguntas, con un total de 50 puntos.

1. (6 pts) Determine el conjunto de puntos en los cuales la siguiente función es continua.

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y^3}{2x^2+y^2} & \text{si } (x,y)\neq(0,0),\\ 0 & \text{si } (x,y)=(0,0).\end{cases}$$

Solución: (a) (3 pts) El dominio de f es todo $\mathbb{R}^2$. Como $\dfrac{x^2y^3}{2x^2+y^2}$ es una función racional, ella es continua en todo punto (x,y) en donde su denominador $2x^2+y^2$ sea diferente de cero. Este denominador es cero si $(x,y)=(0,0)$. Por lo tanto f es continua para todo $(x,y)\neq(0,0)$.

(b) (3 pt) Veamos la continuidad de f en $(0,0)$. A lo largo de diferentes curvas que pasan por el origen, el límite de f es cero. Veamos que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=0.$$

Sea $\epsilon>0$ dado. Buscamos $\delta>0$ tal que si $0<\sqrt{x^2+y^2}<\delta$ entonces $|f(x,y)-0|<\epsilon$.

Como $(x,y)\neq(0,0)$ y dado que $x^2<x^2+y^2<2x^2+y^2 \Longrightarrow \dfrac{1}{2x^2+y^2}<\dfrac{1}{x^2}$, $y^2<x^2+y^2$ y $|y|<\sqrt{x^2+y^2}$ tenemos que

$$|f(x,y)|=\frac{x^2|y|^3}{2x^2+y^2}<\frac{x^2|y|^3}{x^2}=|y|^3=y^2|y|<(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}<\delta^2\delta=\delta^3$$

para que $|f(x,y)-0|<\epsilon$ tenemos que basta considerar $\delta^3=\epsilon$; esto es, $\delta=\sqrt[3]{\epsilon}$.

En efecto, si se elige $\delta=\sqrt[3]{\epsilon}$ y se hace $0<\sqrt{x^2+y^2}<\delta$ tenemos que

$$|f(x,y)-0|<(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}<\delta^3=\epsilon.$$

Como $f(0,0)=0$ entonces f también es continuo en $(0,0)$. Por lo tanto, f es continua en todo $\mathbb{R}^2$.

2. (6 pts) La temperatura en un punto (x,y) es $T(x,y)$, medida en grados Celsius. Un insecto se arrastra de modo que su posición esta dada por $x=\sqrt{1+t}$, $y=2+\frac{1}{3}t$, donde x y y se miden en centímetros. La función de temperatura satisface $T_x(2,3)=4$ y $T_y(2,3)=3$. ¿Qué tan rápido se eleva la temperatura del insecto después de $t=3$ segundos?

Solución: Por la regla de la cadena tenemos que

$$\frac{dT}{dt}(3)=T_x(2,3)\frac{dx}{dt}(3)+T_y(2,3)\frac{dy}{dt}(3)=4\cdot\frac{1}{2\sqrt{1+3}}+3\cdot\frac{1}{3}=2,$$

lo cual quiere decir que después de tres segundos la temperatura esta aumentando a razón de 2 grados Celsius por segundo.

3. (9 pts) Calcule los valores máximo y mínimos relativos, y punto o puntos de silla de la función $f(x,y)=x^4+y^4-4xy+2$.

Solución: **Puntos críticos**: Resolvemos las ecuaciones

$$\begin{aligned}f_x&=4x^3-4y=4(x^3-y)=0\Longrightarrow y=x^3\\ f_y&=4y^3-4x=4(y^3-x)=0\Longrightarrow x^9-x=x(x^8-1)=0\Longrightarrow x=0 \text{ o } x=\pm1,\end{aligned}$$

las cuales nos dan como soluciones $(\pm1,\pm1)$, $(0,0)$.

Clasificación puntos críticos: Como

$$f_{xx}(\pm1,\pm1)=12x^2\Big|_{(\pm1,\pm1)}=12>0,\qquad \begin{vmatrix}f_{xx}&f_{xy}\\f_{yx}&f_{yy}\end{vmatrix}_{(\pm1,\pm1)}=\begin{vmatrix}12x^2&-4\\-4&12y^2\end{vmatrix}_{(\pm1,\pm1)}=\begin{vmatrix}12&-4\\-4&12\end{vmatrix}=136>0$$

entonces $f(\pm1,\pm1)=0$ es un mínimo relativo.

$$f_{xx}(0,0)=12x^2\Big|_{(0,0)}=0,\qquad \begin{vmatrix}f_{xx}&f_{xy}\\f_{yx}&f_{yy}\end{vmatrix}_{(0,0)}=\begin{vmatrix}12x^2&-4\\-4&12y^2\end{vmatrix}_{(0,0)}=\begin{vmatrix}0&-4\\-4&0\end{vmatrix}=-16<0$$

entonces $f(0,0)=2$ es punto de silla.

4. (9 pts) Use multiplicadores de Lagrange para encontrar el máximo y el mínimo valor de la función $f(x,y,z) = xyz$ bajo la restricción $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 6$.

Solución: **NOTA**: se me olvido incluir la condición en el problema que x, y, z fueran valores positivos. Sugiero que así lo evalúen.

Mediante multiplicadores de Lagrange tenemos que debemos resolver el problema

$$\nabla f(x,y,z) = \lambda \nabla g(x,y,z) = 6, \qquad g(x,y,z) = 6,$$

donde $g(x,y,z) = x^2 + 2y^2 + 3z^2$. Esto es equivalente a resolver el problema

$$\begin{aligned}
yz &= 2\lambda x & &\Longrightarrow xyz = 2\lambda x^2 & & & & \\
xz &= 4\lambda y & &\Longrightarrow xyz = 4\lambda y^2 & &\Longrightarrow 2\lambda x^2 = 4\lambda y^2 & &\Longrightarrow x^2 = 2y^2 \\
xy &= 6\lambda z & &\Longrightarrow xyz = 6\lambda z^2 & &\Longrightarrow 2\lambda x^2 = 6\lambda z^2 & &\Longrightarrow x^2 = 3z^2 \\
x^2 + 2y^2 + 3z^2 &= 6 & &\Longrightarrow x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 6 & &\Longrightarrow x^2 + x^2 + x^2 = 6 & &\Longrightarrow x^2 = 2.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, $x = \sqrt{2}$, $y^2 = \dfrac{x^2}{2} = 1 \Longrightarrow y = 1$, $z^2 = \dfrac{x^2}{3} = \dfrac{2}{3} \Longrightarrow z = \sqrt{\dfrac{2}{3}}$.

5. (9 pts) Encuentre el volumen del sólido que se encuentra debajo del paraboloide $z = x^2 + y^2$ y arriba de la región D en el plano xy acotada por la recta $y = 2x$ y la parábola $y = x^2$.

Solución: Para delimitar a D igualamos estas curvas y tenemos que $x^2 = 2x$, por lo cual $x^2 - 2x = x(x-2) = 0$, de lo cual se sigue que $x = 0, 2$. Por lo tanto, D es una región del tipo I y

$$D = \{(x,y) \mid 0 \leq x \leq 1,\ x^2 \leq y \leq 2x\}.$$

Entonces el volumen bajo $z = x^2 + y^2$ es

$$\begin{aligned}
V &= \iint_D (x^2 + y^2)\,dA = \int_0^1 \int_{x^2}^{2x} (x^2 + y^2)\,dy\,dx & &\text{(Hasta esta parte, 7pts.)} \\
&= \int_0^2 \left(-\frac{x^6}{3} - x^4 + \frac{14x^3}{3} \right) dx = -\frac{x^7}{21} - \frac{x^5}{5} + \frac{14x^4}{12} \bigg|_0^2 = \frac{216}{35}. & &\text{(Esta parte, 2pts.)}
\end{aligned}$$

6. (11 pts) Determine la masa de la semiesfera $x^2 + y^2 + z^2 \leq 4$, $z \geq 0$, con densidad $\rho(x,y,z) = y^2\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

Solución: La semiesfera es

$$E = \{(x,y,z) \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 4,\ z \geq 0\}$$

y su masa M es

$$M = \iiint_E \rho(x,y,z)\,dV = \iiint_E y^2\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\,dV$$

Mediante la transformación de coordenadas esféricas tenemos que a la semiesfera la podemos representar de la forma

$$E = \{(\rho,\theta,\phi) \mid x = \rho\cos\theta\,\mathrm{sen}\,\phi,\ y = \rho\,\mathrm{sen}\,\theta\,\mathrm{sen}\,\phi,\ z = \rho\cos\phi,\ 0 \leq \rho \leq 2,\ 0 \leq \theta \leq 2\pi,\ 0 \leq \phi \leq \pi/2\},$$

transformación de coordenadas cuyo jacobiano es $\rho^2\,\mathrm{sen}\,\phi$. Entonces,

$$\begin{aligned}
M &= \int_0^2 \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} \rho^2\,\mathrm{sen}^2\,\theta\,\mathrm{sen}^2\,\phi\,\rho\,\rho^2\,\mathrm{sen}\,\phi\,d\phi\,d\theta\,\rho & &\text{(Hasta esta parte, 9 puntos.)} \\
&= \int_0^2 \rho^5\,d\rho \cdot \int_0^{2\pi} \mathrm{sen}^2\,\theta\,d\theta \cdot \int_0^{\pi/2} \mathrm{sen}^3\,\phi\,d\phi = \frac{32}{3} \cdot \pi \cdot \frac{2}{3} = \frac{64\pi}{9} & &\text{(Esta parte, 2 puntos.)}
\end{aligned}$$