

Problema 1. [0,8] Plantear la integral

$$\int_0^4 \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} \int_0^{(4-y)/2} f(x, y, z) dz dx dy,$$

1. (10 pts) Considere la función

$$f(u, v) = \begin{cases} \frac{u^3 - v^3}{u - v} & \text{si } v \neq u, \\ 3u^2 & \text{si } v = u. \end{cases}$$

Encuentre el dominio de f y determine si f es continua en todo su dominio.

2. Sea $f(x, y) = x^2 - 2xy + \frac{1}{3}y^3 - 3y$. Encuentre:

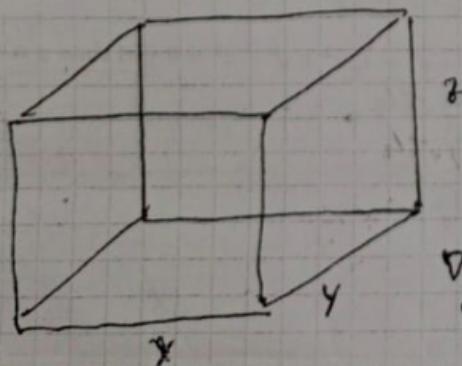
(a) (1 pt) El gradiente de la función f .

(b) (2 pts) La tasa de cambio de f en el punto $(1, 2)$ y en dirección $\frac{\sqrt{3}}{2}\mathbf{i} + \frac{1}{2}\mathbf{j}$.

(c) (2 pts) La dirección y el valor de la máxima derivada direccional de f en el punto $(1, 2)$.

(d) (5 pts) Los máximos locales, mínimos locales y puntos silla de la función f .

3. (10 pts) Determine el costo mínimo de una caja rectangular cerrada con volumen de 30 pies cúbicos, si el costo del material para la parte superior y el fondo son, respectivamente, de 5 centavos el pie cuadrado y 10 centavos el pie cuadrado y el costo de los lados es de 2 centavos el pie cuadrado. ¿Cuáles son las dimensiones de dicha caja?



$$V = xyz = 30$$

$$C = 5xy + 10xz + 4yz + 4x^2$$

$$\nabla C = \lambda \nabla V$$

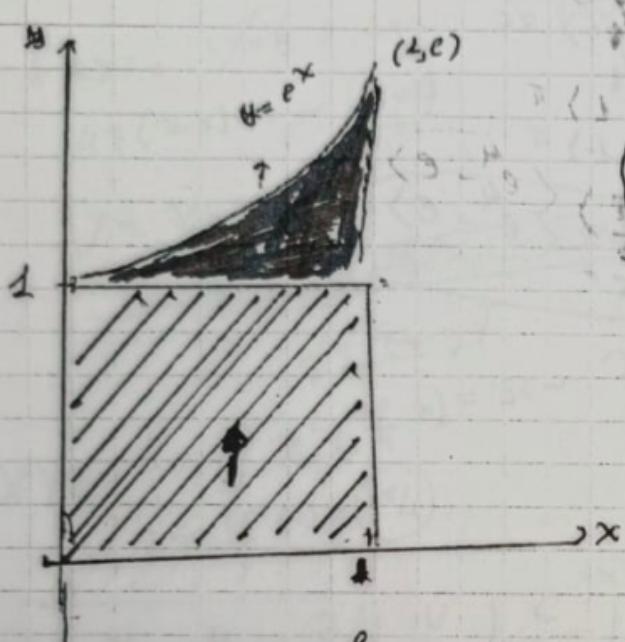
$$(5yt)\hat{i} + (5xy + 4yz + 4x^2)\hat{j} + (10xz + 4z^2)\hat{k}$$

$$\nabla C = (15y + 4z)\hat{i} + (15xy + 4z^2)\hat{j} + (10xz + 4y)\hat{k}$$

$$\nabla V = yz\hat{i} + yz\hat{j} + xy\hat{k}$$

4. (10 pts) Evalúe la integral

$$\int_0^1 \int_0^1 \sin(e^x) dx dy + \int_1^e \int_{\ln y}^1 \sin(e^x) dx dy.$$



$$\int_0^1 \int_0^1 \sin(e^x) dx dy$$

$$= \int_0^1 \sin(e^x) e^x dx$$

$$\int_1^e \sin(e^x) dx = -[\cos e^x]_1^e$$

$$= \cos 1 - \cos e^x$$

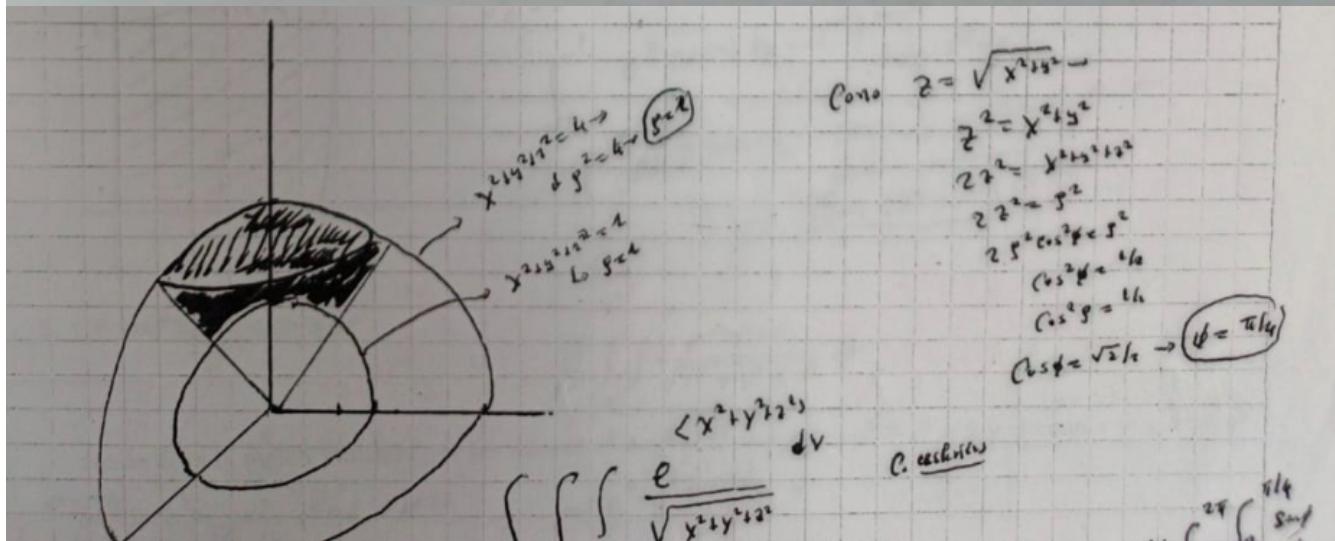
$$= \boxed{\cos 1 - \cos e^x}$$

$$p = e^x \wedge dp = e^x dx \rightarrow$$

$$\int_1^e \sin(p) dp = -[\cos p]_1^e$$

IV. Utilice el cambio de variables a coordenadas polares para calcular

$$\int_0^1 \int_{\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} \frac{x^2}{x^2 + y^2} dy dx + \int_1^2 \int_0^{\sqrt{4-x^2}} \frac{x^2}{x^2 + y^2} dy dx.$$



$$\begin{aligned}
 \text{Cone } z &= \sqrt{x^2 + y^2} \\
 z^2 &= x^2 + y^2 \\
 z^2 &= r^2 \cos^2 \theta + r^2 \sin^2 \theta \\
 z^2 &= r^2 \\
 r^2 &= z^2 \\
 r^2 &= \rho^2 \cos^2 \phi + \rho^2 \sin^2 \phi \\
 (\rho \cos \phi)^2 &= \rho^2 \\
 \rho \cos \phi &= \rho \\
 \cos \phi &= 1 \\
 \phi &= \pi/4 \rightarrow (\phi = \pi/4)
 \end{aligned}$$

$$2^2 \int_0^{\pi/4} \int_0^{\rho} \int_1^{\rho}$$

- Problema 3.** Considere el sólido entre las esferas $x^2 + y^2 + z^2 = 4$, $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ y dentro del cono de un manto $z = \sqrt{x^2 + y^2}$.
- (a) [0, 2] Bosqueje el sólido.
 (b) [0, 6] Establezca el volumen del sólido usando coordenadas cartesianas, cilíndricas y esféricas.
 (c) [0, 5] Calcule el volumen del sólido en el sistema (del ítem anterior) que usted considere más apropiado.

0,3

(estudiar coordenadas esféricas, polares)

I. Encuentre y clasifique los puntos críticos de la función $f(x, y) = xye^{-x^2-y^2}$.

II. Determine el volumen máximo de una caja rectangular, con lados paralelos a los planos coordenados, que puede ser inscrita en el elipsoide $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$, $a > 0, b > 0, c > 0$.

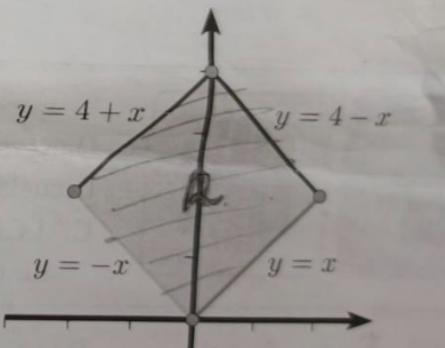
III. Evalúe la integral

$$\int_0^1 \int_y^1 \frac{1}{1+x^4} dx dy.$$

Problema 2. [1,0] Evaluar la integral

$$\iint_{\mathcal{R}} (y^2 - x^2) e^{(x+y)^2} dA,$$

siendo \mathcal{R} el cuadrilátero que se muestra en la figura.



Problema 2. VALOR: 1,0.

Encuentre el volumen del sólido acotado por la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ dentro del cilindro $x^2 + y^2 + 2x = 0$.

[Solución](#)

Problema 1. VALOR: 2,0.

Bosqueje la región de integración y calcule paso a paso las siguientes integrales.

$$(a) \int_0^1 \int_0^e sgn(y - e^x) dy dx.$$

$$(b) \int_0^4 \int_{\sqrt{x}}^2 \frac{1}{y^3 + 1} dy dx.$$

Sin hacer

Problema 3. [10 puntos] Evalúe la integral doble $\iint_R xy \, dA$, haciendo el cambio de variables apropiado; donde R es la región del primer cuadrante acotada por las líneas $y = x$ y $y = 3x$ y las hipérbolas $xy = 1$ y $xy = 3$.

Nota: para simplificar los cálculos se puede usar el hecho de que $\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \left(\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}\right)^{-1}$.

Problema 5. [8 puntos] Evalúe la integral de línea $\oint_C (x-y) \, dx + (x+y) \, dy$, donde $C(t) = (2 \cos(t), 2 \sin(t))$, con $0 \leq t \leq 2\pi$.

Determine si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas.

$$(a) \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^1 e^{x^2+y^2} \sin(y) \, dx \, dy = 0$$

$$(b) \text{ El área de la región comprendida entre los círculos } r = \cos(\theta) \text{ y } r = \sin(\theta) \text{ es } \frac{\pi - 2}{8} u^2.$$