Reportes de GECS.
Temas de Cálculo
⊛ Apuntes usados para clase, 2023
Bucaramanga, Colombia

LISTA DE PROBLEMAS: CUÁDRICAS Y FUNCIONES DE VARIAS VARIABLES

Profesor: Giovanni Calderón[a,1]

[a]*Escuela de Matemáticas, Facultad de Ciencias, Universidad Industrial de Santander, Bucaramanga, Colombia.*
e-mail: giovanni.calderon@correo.uis.edu.co

Resumen. El objetivo principal es proveer al estudiante de una lista de ejercicios a resolver sobre cálculo multivariable.
Palabras clave: Superficies cuádricas, tasa de variación, ecuaciones diferenciales ordinarias.

1 INTRODUCCIÓN

Para el curso de Cálculo III se plantea una lista de problemas. En el se plantean problemas sintéticos o abstractos, es decir, sin ningún enunciado de aplicación y problemas con un contexto de aplicación a la ingeniería. En general, son problemas recopilados de distintos libros para un curso de Cálculo para estudiantes de distintas disciplinas de la ingeniería o ciencias. El objetivo principal que busca el taller es que el estudiante adquiera destreza en los distintos métodos analíticos que existen para encontrar la solución.

El estudiante debe tomar decisión en cuantos serán necesarios resolver para fijar el procedimiento de cálculo que se implementa. La lista de problemas no debe presentarse ni ser entregada en ningún momento al profesor.

Problema 1 En cada uno de los problemas siguientes, identifique y grafique las superficies cuádricas

1) $x^2 + \dfrac{y^2}{4} - \dfrac{z^2}{3} + 6x + 9 = 0$ 2) $x^2 + 4y^2 - 4z^2 - 6x - 16y - 16z = -5$ 3) $y^2 + 4z^2 = x$

4) $x^2 + 2z^2 + 6x - 8z + 1 = 0$ 5) $4x^2 - y^2 + z^2 - 8x + 2y + 2z + 3 = 0$ 6) $x^2 + y^2 - z^2 = 1$

7) $x^2 + z^2 - 4y + 4 = 0$ 8) $x^2 - y^2 + z^2 - 12z + 2x + 37 = 0$ 9) $x^2 - y^2 - z^2 = 4$

Problema 2 En la cartografía, la Tierra se aproxima a un esferoide oblato en vez de una esfera. Los radios en el ecuador y los polos son de aproximadamente 3.963 millas y 3.950 millas, respectivamente.

1. Escriba la ecuación en forma estándar del elipsoide que representa la forma de la Tierra. Suponga que el centro de la Tierra está en el origen y que la traza formada por el plano $z = 0$ corresponde al ecuador.

[1]Notas de clases usadas para el curso de Cálculo III.

2. Dibuje el gráfico.

3. Halle la ecuación de la curva de intersección de la superficie con el plano $z = 1.000$ que es paralelo al plano xy. La curva de intersección se llama paralela.

4. Halle la ecuación de la curva de intersección de la superficie con el plano $x + y = 0$ que pasa por el eje z. La curva de intersección se llama meridiano.

Problema 3 Encuentre y dibuje el dominio de la función dada.

1) $f(x,y) = \dfrac{\sqrt{y-x^2}}{x^2+(y-1)^2}$ 2) $f(x,y) = \sqrt{y-x^2}$ 3) $f(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2+z^2-1}$

4) $f(x,y) = \dfrac{xy}{x^2+y^2}$ 5) $f(x,y) = \sqrt{xy}$ 6) $f(x,y,z) = \ln(x^2+y^2+z^2)$

7) $f(x,y,z) = z * \ln(xy)$ 8) $f(x,y) = \dfrac{y^2}{y+x^2}$ 9) $f(x,y) = \sqrt{\dfrac{x}{y}-1}$

10) $f(x,y) = \sin^{-1}(xy)$ 11) $f(x,y) = (x^2-9y^2)^{-2}$ 12) $f(x,y) = x^2 - y^2\sqrt{4+y}$

Problema 4 Determine el rango de la función dada.

1) $f(x,y) = 10 + x^2 + 2y^2$ 2) $f(x,y) = x + y$ 3) $f(x,y) = \mathrm{sen}(x+2y+3z)$

4) $f(x,y,z) = 7 - e^{xyz}$

Problema 5 Describa (dibuje) alguna de las curvas de nivel asociadas con la función dada

1) $f(x,y) = x + 2y$ 2) $f(x,y) = y^2 - x$ 3) $f(x,y) = \sqrt{x^2-y^2-1}$

4) $f(x,y) = \sqrt{36-4x^2-9y^2}$ 5) $f(x,y) = e^{y-x^2}$ 6) $f(x,y) = \tan^{-1}(y-x)$

7) $f(x,y) = \dfrac{1}{2}(x^+y^2)$ 8) $f(x,y) = x^2 + y$ 9) $f(x,y) = \dfrac{x^2+1}{x^2+y^2}$

Problema 6 Sea $T(x,y)$ la temperatura en un punto (x,y) del plana Trace las curvas isotermas[1] correspondientes a $T = \frac{1}{10}, \frac{1}{5}, \frac{1}{2}, 0$, si

$$T(x,y) = \frac{x^2}{x^2+y^2}$$

[1] En ciencia a menudo se encuentran las palabras **isotérmico, equipotencial e isobárico**. El prefijo iso proviene de la palabra griega isos, la cual significa igual o lo mismo. Entonces, dichos términos se aplican a líneas o curvas sobre las cuales es constante la temperatura, el potencial o la presión barométrica.

Problema 7 Si $V(x, y)$ es el voltaje en un punto (x, y) en el plano, las curvas de nivel de V se llaman curvas equipotenciales. Trace las curvas equipotenciales correspondientes a $V = \frac{1}{2}, 1, 2, 4$ para

$$V(x, y) = \frac{4}{\sqrt{(x-2)^2 + (y+3)^2}}$$

Problema 8 El mapa de contorno de la Figura 1 muestra las curvas de nivel para una montaña de 3000 pies de altura.

1. ¿Qué tiene de particular el camino hasta la cima indicado por AC? ¿Qué tiene de particular BC?
2. Haga buenas estimaciones de las longitudes totales de los caminos AC y BC.

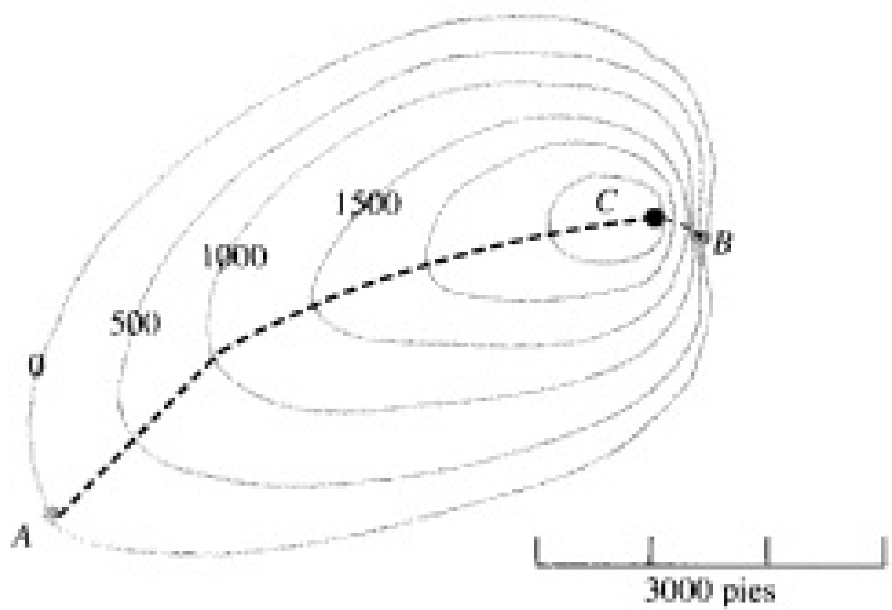

Figura 1: Figura para el problema 8

Problema 9 Evalúe el límite dado, si existe

1) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{e^{yy}}{x+y+1}$ 2) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\operatorname{sen}(xy)}{x^2+y^2}$ 3) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(2,2)} \frac{xy}{x^3+y^2}$

4) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(\pi,\pi/4)} \cos(3x+y)$ 5) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2-3y+1}{x+5y-3}$ 6) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y^2}{x^4+5y^4}$

7) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2x^2-y}{x^2+2y^2}$ 8) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(4,3)^2} xy^2\left(\frac{x+2y}{x-y}\right)$ 9) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{x^4+y^2}$

10) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{6xy^2}{x^2+y^4}$ 11) $\displaystyle\lim_{x,y)\to(00)} \frac{x^2y^2}{x^2+y^4}$ 12) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{(x^2+y^2)^2}$

13) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(2,3)} \frac{xy}{x^2-y^2}$ 14) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,3)} \frac{xy-3y}{x^2+y^2-6y+9}$ 15) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2}{x^2+y^4}$

16) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\left(x^2-y^2\right)^2}{x^2+y^2}$ 17) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\operatorname{sen}\left(3x^2+3y^2\right)}{x^2+y^2}$ 18) $\displaystyle\lim_{(xy)\to(0,0)} \frac{6xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$

19) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2-y^2}{\sqrt{x^2+y^2}}$ 20) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3}{x^2+y^2}$ 21) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}$

22) $\lim_{(x,y)\to(1,1)} \dfrac{xy-x-y+1}{x^2+y^2-2x-2y+2}$ 23) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^3y+xy^3-3x^2-3y^2}{x^2+y^2}$

Problema 10 Describa el mayor conjunto S donde sea correcto afirmar que fes continua

1) $f(x,y)=\dfrac{x^2+xy-5}{x^2+y^2+1}$ 2) $f(x,y)=\ln\left(1+x^2+y^2\right)$ 3) $f(x,y)=\ln\left(1-x^2-y^2\right)$

4) $f(x,y)=\dfrac{1}{\sqrt{1+x+y}}$ 5) $f(x,y)=\dfrac{x^2+3xy+y^2}{y-x^2}$ 6) $f(x,y)=\begin{cases} \frac{\operatorname{sen}(xy)}{xy}, & \text{si } xy\neq 0 \\ 1, & \text{si } xy=0 \end{cases}$

7) $f(x,y)=\sqrt{x-y+1}$ 8) $f(x,y)=\left(4-x^2-y^2\right)^{-1/2}$ 9) $f(x,y,z)=\dfrac{1+x^2}{x^2+y^2+z^2}$

10) $f(x,y)=y^2e^{1/xy}$ 11) $f(x,y)=y^2e^{1/xy}$ 12) $f(x,y)=\tan\dfrac{x}{y}$

Problema 11 Determine si la función indicada es continua en los conjuntos dados en el plano xy.

1. $f(x,y) = \begin{cases} x+y, & x \geqslant 2 \\ 0, & x < 2 \end{cases}$

   a) $x^2+y^2<1$ b) $x \geqslant 0$ c) $y > x$

2. $f(x,y) = \dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2-25}}$

   a) $y \geqslant 3$ b) $|x|+|y|<1$ c) $(x-2)^2+y^2<1$

Problema 12 Determine si la función f definida por

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{6x^2y^3}{(x^2+y^2)^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

es continua en $(0,0)$.

Problema 13 Muestre que

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{2x^2+2y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

es continua en cada variable por separado en $(0,0)$, esto es, que $f(x,0)$ y $f(0,y)$ son continuas en $x=0$ y $y=0$, respectivamente. Demuestre, sin embargo, que f es no continua en $(0,0)$.

Problema 14 Determine si existen puntos en los cuales la función

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3-y^3}{x-y}, & y \neq x \\ 3x^2, & y = x \end{cases}$$

es discontinua.

Problema 15 Determine todas las primeras derivadas parciales de cada función:

1) $f(x,y) = (2x-y)^4$	2) $f(x,y) = \left(4x-y^2\right)^{3/2}$	3) $f(x,y) = \dfrac{x^2-y^2}{xy}$
4) $f(x,y) = e^x\cos(y)$	5) $f(x,y) = e^y\operatorname{sen}(x)$	6) $f(x,y) = \left(3x^2+y^2\right)^{-1/3}$
7) $f(x,y) = \sqrt{x^2-y^2}$	8) $f(u,v) = e^{uv}$	9) $g(x,y) = e^{-xy}$
10) $f(s,t) = \ln\left(s^2-t^2\right)$	11) $f(x,y) = \tan^{-1}(4x-7y)$	12) $F(w,z) = w\operatorname{sen}^{-1}\left(\dfrac{w}{z}\right)$
13) $f(x,y) = y\cos\left(x^2+y^2\right)$	14) $f(s,t) = e^{r^2-s^2}$	15) $F(x,y) = 2\operatorname{sen}(x)\cos(y)$
13)	14)	15)

Problema 16 Verifique que

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$$

1) $f(x,y) = 2x^2y^3 - x^3y^5$ 2) $f(x,y) = \left(x^3 + y^2\right)^5$ 3) $f(x,y) = 3e^{2x}\cos y$

4) $f(x,y) = \tan^{-1} xy$ 5) 6)

Problema 17 Calcule la pendiente de la tangente a la curva de intersección de la superficie $36z = 4x^2 + 9y^2$ y el plano $x = 3$ en el punto $(3, 2, 2)$.

Problema 18 Calcule la pendiente de la tangente a la curva de intersección de la superficie $3z = \sqrt{36 - 9x^2 - 4y^2}$ y el plano $x = 1$ en el punto $(1, -2, \sqrt{11}/3)$

Problema 19 Calcule la pendiente de la tangente a la curva de intersección de la superficie $2z = \sqrt{9x^2 + 9y^2 - 36}$ y el plano $y = 1$ en el punto $\left(2, 1, \frac{3}{2}\right)$

Problema 20 Calcule la pendiente de la tangente a la curva de intersección del cilindro $4z = 5\sqrt{16 - x^2}$ y el plano $y = 3$ en el punto $(2, 3, 5\sqrt{3}/2)$

Problema 21 El volumen V de un cilindro circular recto está dado por $V = \pi r^2 h$, donde r es el radio y h es la altura. Si h se mantiene fijo en $h = 10$ pulgadas, determine la razón de cambio de V respecto a r cuando $r = 6$ pulgadas.

Problema 22 La temperatura, en grados Celsius, en una placa metálica en el plano xy está dada por $T(x,y) = 4 + 2x^2 + y^3$· ¿Cuál es la razón de cambio de la temperatura respecto a la distancia (medida en pies) si comenzamos a movernos desde $(3, 2)$ en la dirección del eje y positivo?

Problema 23 De acuerdo con la ley del gas ideal, la presión, la temperatura y el volumen de un gas se relacionan mediante $PV = kT$, donde k es una constante. Determine la razón de cambio de la presión (libras/pulgadas cuadradas) con respecto a la temperatura cuando la temperatura es de 300°K, si el volumen se mantiene fijo en 100 pulgadas cúbicas.

Problema 24 Muestre que, para la ley del gas del problema (23),

$$V\frac{\partial P}{\partial V} + T\frac{\partial P}{\partial T} = 0 \quad \text{y} \quad \frac{\partial P}{\partial V}\frac{\partial V}{\partial T}\frac{\partial T}{\partial P} = -1$$

Problema 25 Una función de dos variables que satisface la ecuación de Laplace,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$$

se dice que es **armónica**. Muestre que las siguientes funciones son armónicas

$$f(x,y) = x^3y - xy^3, \qquad f(x,y) = \ln\left(4x^2 + 4y^2\right)$$

Problema 26 Si $f(x,y) = \cos\left(2x^2 - y^2\right)$, determine $\partial^3 f(x,y)/\partial y dx^2$.

Problema 27 Exprese lo siguiente con notación de subindices. (a) $\frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}$ (b) $\frac{\partial^4 f}{\partial x^2 \partial y^2}$ (c) $\frac{\partial^5 f}{\partial x^3 d y^2}$

Problema 28 Si $f(x, y, z)=e^{-x y z}-\ln \left(x y-z^2\right)$, determine $f_x(x, y, z)$.

Problema 29 Una abeja volaba hacia arriba a lo largo de la curva dada como la intersección de $z = x^4+x y^3+12$ con el plano $x=1$. En el punto $(1,-2,5)$, salió por la recta tangente. ¿En dónde tocó la abeja al plano $x z$?

Problema 30 Sea $A(x, y)$ el área de un rectángulo no degenerado de dimensiones x y y, de modo que el rectángulo esté dentro de una circunferencia de radio 10 . Determine el dominio y el rango de esta función.

Problema 31 El intervalo $[0,1]$ debe separarse en tres partes, haciendo cortes en x y y. Sea $A(x, y)$ el área đe cualquier triángulo no degenerado que pueda formarse con estas tres partes. Determine el dominio y el rango de esta función.

Problema 32 La historia sigue

REFERENCIAS

[1] Edwin J. Purcell, Dale Varberg and Steven E. Rigdon *Cálculo*, novena edición, Pearson Educación, México, 2007.

[2] Zill, D., Warren, S. *Cálculo. Trascendentes tempranas*, 4 ed, McGraw-Hill, México, 2012.