Universidad Industrial de Santander
Escuela de Matemáticas
**Ecuaciones Diferenciales**
Enero 31 de 2020

**Primer Examen**
**Ecuaciones de 1$^{\text{er}}$ orden**
**Valor:** 20 %
Prof. Juan Camilo Cala B.

**Nombre:** **Código:** **Grupo:**

**Instrucciones:**

- Sea claro y ordenado en cada una de sus respuestas. Respuestas sin sus debidas justificaciones no tienen valor.
- No está permitido el uso de ningún tipo de dispositivo electrónico ni calculadora graficadora, únicamente se admite el uso de una calculadora científica convencional.
- No está permitido el préstamo de borradores, lápices o cualquier otro implemento durante el examen.
- Resuelva **únicamente un problema por página** y, llegado el caso de no alcanzarle, utilice **solamente una hoja** para ello.
- Duración del examen: 2h.

**Problema 1.** Establezca si las siguientes afirmaciones son **falsas** o **verdaderas**. Justifique con suficiente rigor matemático cada una de sus elecciones.

($a$) [3 pts] La ecuación diferencial

$$y\,dx + x\left(\ln(x) - \ln(y) - 1\right)dy = 0$$

no es homogénea.

($b$) [3 pts] Toda ecuación diferencial separable $\dfrac{dy}{dx} = g(x)h(y)$ es exacta.

($c$) [3 pts] Si $y_1$ y $y_2$ son soluciones de una ecuación diferencial, entonces su suma $y_1 + y_2$ también es una solución.

($d$) [3 pts] La ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dx} = y^2 - 4$$

admite como únicas soluciones las obtenidas de la familia uniparamétrica

$$y = 2\cdot\frac{1+ce^{4x}}{1-ce^{4x}}, \quad c - \text{cte}.$$

**Problema 2.** [10 pts] Verifique que $\varphi(x) = xe^{-x}$ es una solución de la ecuación diferencial

$$y^{(2019)} + \frac{y}{x}\,(x - 2019) = 0,$$

y proporcione un intervalo de definición para dicha solución.

**Problema 3.** [10 pts] Halle una función $N(x, y)$ de modo que la ecuación diferencial

$$\left(x^{-1/2}y^{1/2} + \frac{x}{x^2+y}\right)dx + N(x,y)\,dy = 0$$

sea exacta. Posteriormente, resuélvala.

**Problema 4.** [10 pts] Determine **algebraicamente** y **geométricamente** la región del plano $xy$ sobre la cual el **pvi** dado por

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{\tan(\pi x - \pi y)}, \quad y(x_0) = y_0,$$

admita solución única pasando a través del punto $(x_0, y_0)$ perteneciente a dicha región.

**Problema 5.** [10 pts] Resuelva el **pvi** y proporcione el intervalo más largo sobre el cual está definida su solución:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\tan^{-1}(t) - x}{1+t^2}, \quad x(0) = 4.$$

# ¡Muchos Éxitos!

# Solución

**Problema 1.** (1 pt por valor de verdad correcto, 2 pts por la justificación.)

(*a*) **Falso.** Escribiendo $\ln(x) - \ln(y) = \ln(x/y)$ se verifica fácilmente que la ecuación es homogénea.

(*b*) **Verdadero.** Reescribiendo la ecuación convenientemente en forma diferencial de manera que $M(x, y) = g(x)$ y $N(x, y) = -[h(y)]^{-1}$, se logra verificar $M_y = N_x = 0$.

(*c*) **Falso.** Las funciones $y_1 = x$ y $y_2 = x + 1$ son soluciones de $y' = 1$, pero $y_1 + y_2 = 2x + 1$ no es solución.

(*d*) **Falso.** $y = 2$ es solución pero no se puede obtener de la familia uniparamétrica.

**Problema 2.** (8 pts por verificar que $\varphi$ es solución, 2 pts por el intervalo de definición.)

Recuerde que por la regla de la cadena se tiene que

$$\frac{d}{dx}\left(e^{-x}\right) = -e^{-x}.$$

Calculemos algunas derivadas de $\varphi(x) = xe^{-x}$:

$$\begin{aligned}
\varphi'(x) &= e^{-x} - xe^{-x} = e^{-x} - \varphi(x)\\
\varphi''(x) &= -e^{-x} - \varphi'(x) = -2e^{-x} + xe^{-x} = -2e^{-x} + \varphi(x)\\
\varphi'''(x) &= 2e^{-x} + \varphi'(x) = 3e^{-x} - xe^{-x} = 3e^{-x} - \varphi(x)\\
\varphi^{(4)}(x) &= -3e^{-x} - \varphi'(x) = -4e^{-x} + xe^{-x} = -4e^{-x} + \varphi(x)\\
\varphi^{(5)}(x) &= 5e^{-x} - \varphi(x)
\end{aligned}$$

Puede verse entonces que el patrón que se va formando permite calcular la $n$-ésima derivada de $\varphi$ mediante la siguiente fórmula:

$$\varphi^{(n)}(x) = (-1)^{n+1}\left(ne^{-x} - \varphi(x)\right).$$

En particular, la derivada de orden 2019 de $\varphi$ es

$$\varphi^{(2019)}(x) = 2019e^{-x} - xe^{-x} = e^{-x}(2019 - x) = \frac{\varphi(x)}{x}(2019 - x).$$

Esta última igualdad permite concluir que $\varphi$ es solución de la ED. Un intervalo de definición para $\varphi$ es cualquiera que no contenga a $x = 0$, por ejemplo $I = (0, \infty)$.

**Problema 3.** (4 pts por hallar $N(x, y)$, 4 pts por hallar $f(x, y)$, 2 pts por escribir la solución de la ED.)

Sea

$$M(x, y) = x^{-1/2}y^{1/2} + \frac{x}{x^2 + y}.$$

Para que la ecuación sea exacta se requiere que $M_y = N_x$, esto es,

$$N_x = \frac{1}{2}x^{-1/2}y^{-1/2} - \frac{x}{x^2 + y}.$$

De esta manera podemos "recuperar" $N$ integrando $M_y$ respecto a $x$:

$$N(x, y) = \int N_x\, dx = \int M_y\, dx = x^{1/2}y^{-1/2} + \frac{1}{2}(x^2 + y)^{-1} + h(y).$$

Puesto que cualquier función $h(y)$ verifica lo anterior, en particular tomando $h(y) = 0$ se obtiene que

$$N(x, y) = x^{1/2}y^{-1/2} + \frac{1}{2}(x^2 + y)^{-1}.$$

Ahora bien, siendo exacta esta ecuación (pues fue así como se construyó), es sabido que existe una función $f(x, y)$ tal que

$$\nabla f(x, y) = M(x, y)\, dx + N(x, y)\, dy,$$

esto es, tal que

$$\frac{\partial f}{\partial x} = M(x, y) \text{ y } \frac{\partial f}{\partial y} = N(x, y).$$

Así, por ejemplo, integrando respecto a $x$ la función $M(x, y)$ "recuperaremos" la función $f(x, y)$:

$$f(x, y) = \int \frac{\partial f}{\partial x}\, dx = \int \left(x^{-1/2}y^{1/2} + \frac{x}{x^2 + y}\right) dx = 2x^{1/2}y^{1/2} + \frac{1}{2}\ln\left|x^2 + y\right| + \varphi(y).$$

Ahora, derivando parcialmente respecto a $y$, tenemos que:

$$\frac{\partial f}{\partial y} = N(x, y),$$

$$2x^{1/2}y^{1/2} + \frac{1}{2}\ln\left|x^2 + y\right| + \varphi'(y) = 2x^{1/2}y^{1/2} + \frac{1}{2}\ln\left|x^2 + y\right|.$$

De aquí se deduce que $\varphi'(x) = 0$ y en consecuencia,

$$\varphi(x) = \int \varphi'(x)\,dx = 0.$$

Por tanto, $f(x, y) = 2x^{1/2}y^{1/2} + \frac{1}{2}\ln|x^2 + y|$. Entonces la solución general de la ecuación es

$$2x^{1/2}y^{1/2} + \frac{1}{2}\ln|x^2 + y| = c, \quad c - \text{cte}.$$

**Problema 4.** (2 pts por el dominio de $f$, 2 pts por el dominio de $f_y$, 2 pts por hallar la región $R$, 4 pts por la representación gráfica de $R$.)

Sea $f(x, y) = \sqrt{\tan(\pi x - \pi y)}$. Por el **Teorema de Existencia y Unicidad** es sabido que la región del plano sobre la cual el PVI tendrá solución única es aquella donde $f$ y $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ son ambas continuas. Para ello habrá que verificar dónde están definidas:

Puesto que $\tan(\pi x - \pi y)$ está definida y asume valores no negativos cuando

$$\pi x - \pi y \in \left[n\pi, n\pi + \frac{\pi}{2}\right), \quad n \in \mathbb{Z},$$

o equivalentemente, cuando

$$x - y \in \left[n, n + \frac{1}{2}\right), \quad n \in \mathbb{Z},$$

entonces la función $f$ está definida en los puntos comprendidos entre las rectas $x = y+n$ y $x = y+n+\frac{1}{2}$, $n \in \mathbb{Z}$, esto es,

$$\mathrm{Dom}(f) = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y + n \leqslant x < y + n + \frac{1}{2}, \quad n \in \mathbb{Z}\right\}.$$

Ahora, como

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{-\pi \sec^2(\pi x - \pi y)}{2f(x, y)},$$

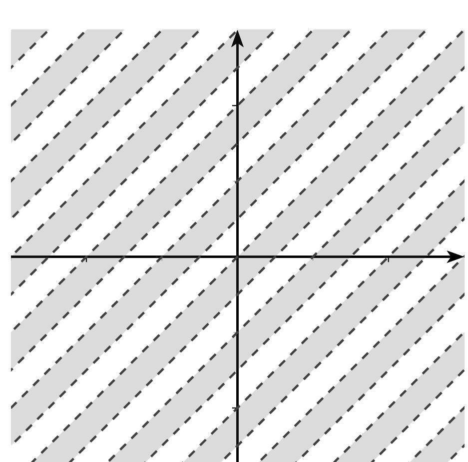
entonces los puntos sobre la cual está definida esta derivada son los mismos que los de $f$, excepto donde se anula (la función $\sec^2(\pi x - \pi y)$ posee el mismo dominio que $f(x, y)$ y por tanto no hay más restricciones). Dado que $f(x, y) = \tan(\pi x - \pi y)$ se anula cuando $\pi x - \pi y = n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$, entonces,

$$\mathrm{Dom}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y + n < x < y + n + \frac{1}{2}, \quad n \in \mathbb{Z}\right\}.$$

El dominio de esta derivada es precisamente la región $R$ donde se garantiza existencia y unicidad de la solución del PVI. Por ejemplo, cuando $n = 1$ se tiene que

$$y + 1 < x < y + \frac{3}{2},$$

lo cual genera la franja delimitada por las rectas $x = y + 1$ y $x = y + \frac{3}{2}$, sin incluirlas. Un bosquejo gráfico de la región $R$ queda como se ilustra a continuación:



**Problema 5.** (4 pts por resolver la ED, 2 pts por hallar la constante $c$, 2 pts por la solución del PVI, 2 pts por el intervalo de definición.)

Habían varias maneras de resolver la ED.

Solución 1. Haciendo el cambio en la variable independiente $\tau = \tan^{-1}(t)$, se tiene que

$$\frac{1 + t^2}{dt} = \frac{1}{d\tau}.$$

Llevando $\tau$ a la ED se obtiene la **ecuación lineal no homogénea**

$$\frac{dx}{d\tau} + x = \tau.$$

El factor integrante asociado a esta ecuación es $e^{\tau}$. Así, multiplicando en la ED por este factor integrante se obtiene que

$$\frac{d}{dx}\left(xe^{\tau}\right) = \tau e^{\tau}.$$

Integrando, se encuentra que la solución general de esta ecuación viene dada por la familia uniparamétrica

$$x(\tau) = -1 + \tau + ce^{-\tau}, \quad c - \text{cte}.$$

Reemplazando $\tau = \tan^{-1}(t)$ se tiene que

$$x(t) = -1 + \tan^{-1}(t) + ce^{-\tan^{-1}(t)}, \quad c - \text{cte}.$$

Solución 2. Reescribiendo la ecuación de la forma

$$\left(1+t^2\right)\frac{dx}{dt} = \tan^{-1}(t) - x$$

y haciendo la sustitución $u = \tan^{-1}(t) - x$, se tiene al derivar y realizar algunas operaciones que

$$\left(1+t^2\right)\frac{dx}{dt} = 1 - \left(1+t^2\right)\frac{du}{dt}.$$

Así, llevando $u$ a la ED se obtiene la **ecuación separable**

$$1 - \left(1+t^2\right)\frac{du}{dt} = u,$$

de donde se deduce que

$$u(t) = 1 - ce^{-\tan^{-1}(t)}, \quad c - \text{cte}.$$

Reemplazando $u = \tan^{-1}(t) - x$ se tiene que

$$x(t) = -1 + \tan^{-1}(t) + ce^{-\tan^{-1}(t)}, \quad c - \text{cte}.$$

Solución 3. Reescribiendo la ecuación de la forma

$$\frac{dx}{dt} + \frac{x}{1+t^2} = \frac{\tan^{-1}(t)}{1+t^2},$$

se observa que la **ecuación es lineal no homogénea** y el factor integrante asociado es

$$e^{\tan^{-1}(t)}.$$

Así, multiplicando en la ED por este factor integrante se obtiene que

$$\frac{d}{dx}\left[xe^{\tan^{-1}(t)}\right] = \frac{e^{\tan^{-1}(t)}\tan^{-1}(t)}{1+t^2}.$$

Integrando (sustitución simple $z = \tan^{-1}(t)$ y resolver $\int ze^z\,dz$), se encuentra que

$$x(t) = -1 + \tan^{-1}(t) + ce^{-\tan^{-1}(t)}, \quad c - \text{cte}.$$

Por último, aplicando la condición inicial $x(0) = 4$, se deduce que $c = 5$ y por tanto la solución al PVI es

$$x(t) = -1 + \tan^{-1}(t) + 5e^{-\tan^{-1}(t)}.$$

El intervalo más largo donde está definida esta solución es $J = \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.