Instrucciones: Para recibir puntos, todo trabajo o razonamiento debe ser mostrado para poder obtener todo el puntaje; no serán asignados puntos parciales. Durante el examen **NO** está permitido: **(i) El préstamo o intercambio de implementos, tales como lápices, lapiceros, borradores, etc. (ii) Realizar preguntas acerca de las respuestas del examen, porque parte de la evaluación es la comprensión de los enunciados. (iii) El uso de teléfonos celulares y calculadoras**. Este examen tiene 7 preguntas, con un total de 50 puntos.

SOLUCIÓN DEL EXAMEN Y PAUTAS DE EVALUACIÓN

(I) No se pueden modificar los puntajes asignados a cada problema del examen; bajo ninguna consideración se podrá dejar puntos del examen sin evaluar.

(II) En algunos casos, la manera de obtener las soluciones correctas a los problemas propuestos no es única; acá se muestra una de ellas.

(III) Las pautas de evaluación están fundamentadas en la forma mostrada de obtener los resultados. Si un estudiante tiene su análisis correcto y obtiene el mismo resultado, el profesor deberá establecer los criterios de evaluación y mostrárselos al estudiante el día de revisión del examen.

(IV) A la solución de cada problema se le propone una pauta de asignación de puntajes, la cual puede modificar cada profesor a su criterio. Lo que si debe decidir el profesor son los puntos parciales a descontar por errores aritméticos o algebraicos del estudiante en la solución de los problemas.

1. (5 pts) Considere la función

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{3x^2y^2}{x^4+y^4} & \text{si } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{si } (x,y)=(0,0).\end{cases}$$

Establezca que f no es diferenciable en el origen.

Solución:
(**3pts**) Consideremos las trayectorias $y=mx$, m real, que pasan por $(0,0)$. Entonces

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=\lim_{x\to 0}\frac{3m^2x^4}{x^4+m^4x^4}=\lim_{x\to 0}\frac{3m^2}{1+m^4}=\frac{3m^2}{1+m^4}=\begin{cases}0 & \text{si } m=0\,(y=0),\\ \dfrac{3}{2} & \text{si } m=1 (y=x).\end{cases}$$

Como a travéz de al menos dos trayectorias distintas que pasan por $(0,0)$ dan límites distintos se tiene que el límite de f en $(0,0)$ no existe y por lo tanto f no es continua en $(0,0)$.

(**2 pts**) Como diferenciabilidad implica continuidad, se sigue que f no es diferenciable en $(0,0)$.

2. Suponga que la temperatura, en grados centígrados, en cada punto (x,y) de una placa metálica se modela mediante la función $T(x,y)=25-x^2-y^2$. Suponga que tenemos una partícula en el punto $P(1,1)$.

(a) (4 pts) Determine la dirección en la cual se debe mover la partícula para que disminuya su temperatura lo más rápidamente posible.

Solución: Tenemos que

$$\nabla T(1,1)=(T_x(1,1),T_y(1,1))=(-2x,-2y)\Big|_{(1,1)}=(-2,-2).$$

La temperatura de la partícula disminuya lo más rápidamente posible si ella se mueve en dirección opuesta al gradiente de temperatura en P; es decir, en dirección del vector

$$\hat{\mathbf{u}}=\frac{-\nabla T(1,1)}{\|\nabla T(1,1)\|}=\frac{(2,2)}{\sqrt{2\cdot 4}}=\frac{2(1,1)}{2\sqrt{2}}=\frac{(1,1)}{\sqrt{2}}.$$

Nota: la respuesta $-\nabla T(1,1)=(2,2)$ también es válida.

(b) (4 pts) Establezca la rapidez con que decrece la temperatura en la dirección determinada en la parte anterior.

Solución: esta es

$$D_{\hat{\mathbf{u}}}T(1,1)=\nabla T(1,1)\cdot\frac{-\nabla T(1,1)}{\|\nabla T(1,1)\|}=-\frac{\|\nabla T(1,1)\|^2}{\|\nabla T(1,1)\|}=-\|\nabla T(1,1)\|=-2\sqrt{2};$$

es decir, disminuye a razón de $2\sqrt{2}$ grados centígrados.

(c) (2 pts) ¿En qué direcciones la temperatura se mantiene constante (ni crece ni decrece) en el punto P?

Solución: se tiene que la temperatura no disminuye en la dirección del vector $N=(a,b)$ en el punto P si

$$D_{\hat{N}}T(1,1)=\nabla T(1,1)\cdot\frac{N}{\|N\|}=0;$$

lo cual a su vez se cumple si

$$\nabla T(1,1)\cdot N=0\quad\equiv\quad -2a-2b=0\quad\equiv\quad a+b=0.$$

Por lo tanto, la temperatura se mantiene constante a lo largo de la dirección de todo vector $N=(a,b)$ tal que $a+b=0$.

3. (4 pts) Hallar $\dfrac{du}{dt}$ mediante la regla de la cadena si se sabe que $u=x^2-y^2$, $x=t^2-1$, $y=3\cos(\pi t)$ cuando $t=1/4$.

Solución: por regla de la cadena tenemos que

$$\begin{aligned}\frac{du}{dt}\Big|_{t=1/4}&=\frac{\partial u}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{dy}{dt}\Big|_{t=1/4}=(2x)(2t)+(-2y)(-3\pi\cos(\pi t))\Big|_{t=1/4}\\&=4(t^2-1)t+18\pi\cos^2(\pi t)\Big|_{t=1/4}=4\left(\frac{1}{16}-1\right)\frac{1}{4}+18\pi\cos^2\frac{\pi}{4}=-\frac{15}{16}+9\pi\approx 27{,}33.\end{aligned}$$

4. (9 pts) La distribución de temperatura de una placa metálica $D=\{(x,y):x^2+y^2+2x-3\leq 0\}$ está dada por la función $T(x,y)=e^{-x^2-y^2}$. Encontrar los puntos más calientes y más fríos de la placa.

Solución:
(**1 pts**) Como T es una función continua en D, el Teorema de Weierstrass garantiza que T alcanza un máximo y un mínimo en D. Para hacerlo se deben encontrar los puntos críticos de T en el interior y en el borde de D. El mayor valor de T en estos puntos será el máximo de T en D y el mínimo será el mínimo de T en D.

(**2 pts**) Puntos críticos de T en el interior de D: tenemos que las derivadas parciales de T, $T_x=-2xe^{-x^2-y^2}$ y $T_y=-2ye^{-x^2-y^2}$, se anulan cuando $x=y=0$. Como $(0,0)$ está en el interior de D (pues $0^2+0^2+2\cdot 0-3=-3\leq 0$) entonces allí T tiene un punto crítico.

(**5 pts**) Puntos críticos de T en el borde de D: en este caso debemos encontrar los extremos de $T(x,y)$ sujeto a la condición que el punto (x,y) este en la circunferencia $x^2+y^2+2x-3=0$. En este caso se utilizan multiplicadores de Lagrange:

$$\begin{array}{rl}\text{extremos} & T(x,y)=e^{-x^2-y^2}\\ \text{restricción} & g(x,y)=x^2+y^2+2x-3=0.\end{array}$$

Mediante multiplicadores de Lagrange se resuelve el siguiente problema

$$(T_x=\lambda g_x)\qquad -2xe^{-x^2-y^2}=\lambda(2x+2)\tag{1}$$
$$(T_y=\lambda g_y)\qquad -2ye^{-x^2-y^2}=2\lambda y\tag{2}$$
$$(g=0)\qquad x^2+y^2+2x-3=0\tag{3}$$

Tenemos que (2) implica que $\lambda y+ye^{-x^2-y^2}=y(\lambda+e^{-x^2-y^2})=0$, de lo cual se sigue que $y=0$ o $\lambda=-e^{-x^2-y^2}$.

Si $y=0$ entonces (3) implica que $x^2+2x-3=(x+3)(x-1)=0$, por lo cual $x=-3$ y $x=1$. Se tienen en este caso los puntos $(-3,0)$ y $(1,0)$ como puntos críticos de T bajo la condición dada.

Si $\lambda=-e^{-x^2-y^2}$ entonces (1) implica que $-xe^{-x^2-y^2}=-e^{-x^2-y^2}(x+1)$, de lo cual se sigue que $-x=-(x+1)$ o bien que $0=-1$ lo cual es falso.

(**1 pts**) Como $T(x,y)$ es una función decreciente en x cuando $y=0$ entonces se tiene que $T(0,0)=1$ es la máxima temperatura en D y $T(-3,0)=e^{-9}$ es la menor temperatura en D. Por lo tanto, en el punto $(0,0)$ de la placa se logra la mayor temperatura y en el punto $(-3,0)$ de logra la menor temperatura.

5. (7 pts) Evaluar la integral $\displaystyle\int_0^4\int_{y/2}^2 e^{-x^2}\,dxdy$.

Solución:
(**1 pts**) Como la integral $\displaystyle\int e^{-x^2}dx$ no se puede calcular mediante las técnicas usuales de integración, se recurre a un cambio de orden de integración.

Tenemos que la región de integración D es del tipo II y está dada de la forma $0 \le y \le 4$, $\frac{y}{2} \le x \le 2$. Cuando $0 \le y \le 4$ y $x = y/2$ se sigue que $0 \le x \le 2$ y $y = 2x$. Cuando $y = 0$, $\frac{y}{2} = 0 \le x \le 2$. Por lo tanto, como región tipo I se puede representar de la forma

$$D : 0 \le x \le 2,\ 0 \le y \le 2x.$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}\int_0^4 \int_{y/2}^2 e^{-x^2} dxdy &= \int_0^2 \int_0^{2x} e^{-x^2} dydx \qquad\qquad \textbf{(4pts)} \\ &= \int_0^2 2xe^{-x^2} dx \qquad (u = -x^2,\ -du = 2xdx) \\ &= -e^{-x^2}\Big|_0^2 \\ &= 1 - e^{-4}. \qquad\qquad \textbf{(2 pts)}\end{aligned}$$

6. (6 pts) Plantee la integral triple para calcular la masa del sólido E que se encuentra arriba del cono $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, debajo de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ y en el **segundo octante**. Suponga que la densidad en cada punto del sólido es una función desconocida $\delta(x, y, z)$.

Solución:
(**2 pts**) tenemos que E es una región sólida de tipo I, la cual se encuentra entre la superficie del cono y de la esfera. Al proyectar la intersección de estas dos superficies nos da una región D en el plano xy. En efecto, como se tiene que $z^2 = x^2 + y^2$, con $z \ge 0$, al reemplazar en la ecuación de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ se obtiene que $2z^2 = 1$, por lo cual $z = 1/\sqrt{2}$. Dado que $x^2 + y^2 + \frac{1}{2} = 1$ entonces

$$D : x^2 + y^2 \le \frac{1}{2}$$

(**4 pts**) En coordenadas esféricas tenemos $z = \rho\cos\phi$ donde $z = 1/\sqrt{2}$ y $\rho = 1$. Entonces $\cos\phi = 1/\sqrt{2}$, por lo cual $\phi = \pi/4$. Así que la masa M de E está dada como

$$M = \iiint_E \delta(x, y, z)dV = \int_0^1 \int_{\pi/2}^{\pi} \int_0^{\pi/4} \delta(\rho\cos\theta\sin\phi, \rho\sin\theta\sin\phi, \rho\cos\phi)\rho^2 \sin\phi\, d\phi d\theta d\rho$$

7. Considere la integral de línea

$$\int_{\mathcal{C}} (2y^2 - 12x^3y^3)dx + (4xy - 9x^4y^2)dy.$$

(a) (3 pts) Demuestre que esta integral de línea es independiente de la trayectoria.

Solución: tenemos el campo vectorial $\mathbb{F}(x, y) = P(x, y)i + Q(x, y)j$ donde $P(x, y) = 2y^2 - 12x^3y^3$ y $Q(x, y) = 4xy - 9x^4y^2$. Como

$$\text{rot}(\mathbb{F}) = \nabla \times \mathbb{F} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ P(x,y) & Q(x,y) & 0 \end{vmatrix} = (Q_x - P_y)k = \left[(4y - 36x^3y^2) - (4y - 36x^3y^2)\right] k = \vec{O}$$

entonces $\mathbb{F}$ es un campo vectorial conservativo y por la tanto la integral es independiente de la trayectoria.

(b) (6 pts) Evalúe la integral, donde $\mathcal{C}$ es cualquier trayectoria de $(1, 1)$ a $(3, 2)$.

Solución:
(**4 pts**) como $\mathbb{F}$ es un campo vectorial conservativo entonces existe un campo escalar f tal que $\nabla f = \mathbb{F}$; es decir, tal que $f_x = 2y^2 - 12x^3y^3$ y $f_y = 4xy - 9x^4y^2$. Integrando con respecto a x la primera ecuación tenemos que

$$f(x, y) = 2xy^2 - 3x^4y^3 + h(y),$$

donde $h(y)$ es una constante de integración. Ahora, al dervivar esta ecuación con respecto a y tenemos que

$$4xy - 9x^4y^2 = f_y = 4xy - 9x^4y^2 + h'(y) \Longrightarrow h'(y) = 0 \Longrightarrow h(y) = c.$$

Por lo tanto, $f(x, y) = 2xy^2 - 3x^4y^3 + c$.

(**2 pts**) Como la integral de línea dada es independiente de la trayectoria además tenemos del Teorema fundamental de la integral de línea que

$$\int_{\mathcal{C}} (2y^2 - 12x^3y^3)dx + (4xy - 9x^4y^2)dy = f(3,2) - f(1,1) = -1920 - (-1) = -1919.$$