Universidad Industrial de Santander

Facultad de Ciencias
Escuela de Matemáticas

Cuarto taller de refuerzo

Gradientees, derivadas direccionales y puntos críticos

Cálculo III - 20254
Fecha: Octubre 2025

Nombre: ______________________ Código: ______________ Grupo: ______________

1. ¿Cuáles son los valores de las constantes a, b y c tales que la derivada direccional de $f(x, y, z) = axy^2 + byz + cz^2x^3$, en el punto $P(1, 2, -1)$, tenga valor máximo 64 en la dirección paralela al eje z positivo?

2. Dada la función
$$f(x, y) = xe^y$$
   (a) Determine la razón de cambio de f en el punto $P(2, 0)$ en la dirección de P a $Q(0.5, 2)$
   (b) ¿En qué dirección f tiene la máxima razón de cambio?
   (c) ¿Cuál es esta máxima razón de cambio? Realice un bosquejo en GeoGebra de las curvas de nivel y del gradiente

3. La superficie de una laguna se puede representar por una región D del plano xy (x e y medidos en decámetros) tal que la profundidad de la laguna (medida en pies) en el punto (x, y) está dada por la expresión $300 - 3x^2y^2$.Yolanda está en el punto $P(1, -2)$.
   (a) ¿En qué puntos la laguna tiene profundidad máxima y cuál es esta profundidad?
   (b) ¿En qué dirección debería nadar Yolanda de tal manera que la profundidad decrezca lo más rápido posible?
   (c) ¿En qué dirección debería nadar Yolanda de tal manera que la profundidad permanezca constante?
   (d) Si Xavier se encuentra parado en la orilla en el punto $(2, 5)$ ¿a qué tasa cambia la profundidad si Yolanda nada en la dirección donde está Xavier?

4. Considere la función
$$f(x, y) = x^2y + y^3$$
   (a) Calcule la derivada direccional de f en el punto $(1, -1)$ en la dirección del vector $\vec{u} = -3\hat{\imath} + 5\hat{\jmath}$
   (b) Encuentre todas las posibles direcciones en las cuales la derivada direccional de f en el punto $(1, -1)$ tiene el valor de 2
   (c) Realice un bosquejo en GeoGebra de la superficie y de la derivada direccional

5. Suponga que la altura de una montaña en cualquier punto (x, y) está dada por $z = 1000 - 0.005x^2 - 0.01y^2$. ¿En qué puntos de la montaña debe ubicarse, de forma que si camina al noreste empiece a ascender? El eje de las x positivas va hacia el este y el eje de las y positivas hacia el norte. Realice un bosquejo en GeoGebra de los puntos que cumplen la condición dada.

6. La temperatura T en una bola de metal es inversamente proporcional a la distancia desde el centro de la bola, el cual se considera como el origen. La temperatura en el punto $P(1, 2, 2)$ es de $120°$. La distancia se mide en metros.

   (a) Determine la razón de cambio de T en $P(1, 2, 2)$ en la dirección indicada

   (b) Demuestre que en cualquier punto en la bola la dirección de mayor incremento de la temperatura la define un vector que señala hacia el origen

7. Un equipo de montañistas instala un campamento base en una planicie alta. El guía dispone de un modelo digital de elevación (MDE) que aproxima la altitud del terreno (en metros sobre el nivel del mar) mediante la función

$$E(x, y) = 2200 + 300e^{-[(x-1)^2+(y-2)^2]} + 40x - 20y - 5x^2 - 2y^2 + 10xy$$

   Donde x y y son las coordenadas (en kilómetros) medidas respecto al campamento base, con x positivo hacia el Este y y positivo hacia el Norte. El equipo planea avanzar inicialmente desde el punto $P = (1, 2)$. En el mapa se marca además un refugio en el punto $R = (2, 2.5)$.

   (a) Determine la derivada direccional de E en P en la dirección al refugio R. Exprese el resultado con unidades y explique si, en ese rumbo, el equipo gana o pierde altitud y a qué tasa (en m por km). Realice un bosquejo en GeoGebra de la superficie

   (b) Escriba la ecuación de la curva de nivel que pasa por P. Obtenga un vector tangente a esa curva en P y verifique que es ortogonal a $\nabla E(P)$

   (c) Encuentre el plano tangente a la superficie $z = E(x, y)$ en el punto $(x, y) = (1, 2)$. Úselo para aproximar la altitud en el punto cercano $Q = (1.1, 1.9)$

   (d) El guía quiere caminar inicialmente con pendiente nula (sin ganar ni perder altitud), siguiendo la curva de nivel por P. De una dirección unitaria (respecto a los ejes Este-Norte) en la que la derivada direccional sea 0 en P.

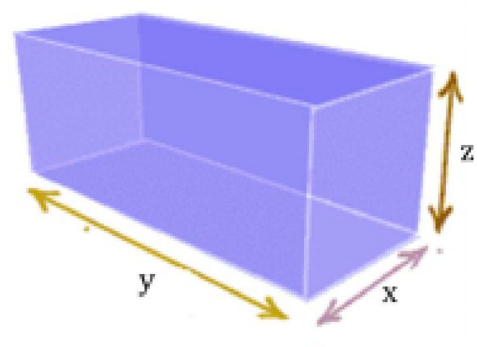
8. Un vendedor, cuyo terreno tiene un lago como frontera, puede describirse en términos de una cuadrícula rectangular acotada por la curva $y = x^2, \quad y = 0, \quad x = 3$, con x y y en millas. El vendedor determina que el número de unidades $S(x, y)$ que puede vender en cada punto (x, y) de la región está dada por$S(x, y) = 4x^2 - 16x + 4y^2 - 4y + 20$. ¿En qué punto (x, y) en su territorio de ventas puede esperar que ocurra el máximo de ventas y cuál es dicho valor máximo? De igual forma analizar para los valores mínimos. Realice un bosquejo en GeoGebra de la superficie y de las fronteras del lago.

9. La elevación de una montaña sobre el nivel del mar está dada por la función $f(x,y) = 3000e^{-\frac{x^2+y^2}{100}}m$. El semieje positivo de las x apunta hacia el este y el de las y hacia el norte. Un alpinista está exactamente arriba del punto $(10, 10)$. Si se mueve hacia el noroeste, ¿asciende o desciende y con qué pendiente?.

10. Encuentre los puntos del elipsoide $x^2+2y^2+3z^2 = 1$ donde el plano tangente es paralelo al plano $3x - y + 3z = 1$. Realice un bosquejo en GeoGebra.

11. Un tanque de metal rectangular, sin tapa, debe contener 256 pies cúbicos de líquido. ¿Cuáles son las dimensiones del tanque que requiere menos material de construcción?

Tanque



12. Hallar los puntos del hiperboloide $x^2 - y^2 - z^2 = 1$ donde el plano tangente es paralelo al plano $z = x + y$.

13. Determine una ecuación de la recta tangente a la curva de intersección entre las superficies $z = x^2 + y^2$, $4x^2 + y^2 + z^2 = 9$ en el punto $P = (-1, 1, 2)$. Realice un bosquejo en GeoGebra.

$\boxdot$