Física II

Módulo 2: Potencial eléctrico y capacitancia

Héctor Hernández - 2025

4 - Potencial eléctrico

1. Energía potencial eléctrica
2. Potencial eléctrico y diferencia de potencial
3. Energía electrostática
4. Aplicaciones de la electrostática

1 Energía potencial eléctrica

- Dos términos utilizados habitualmente para describir la electricidad son su energía y su tensión, aquí mostramos que están directamente relacionada con la energía potencial de un sistema.

- Sabemos, por ejemplo, que grandes cantidades de energía eléctrica pueden almacenarse en baterías, que se transmiten a través de las corrientes de los tendidos eléctricos y que pueden saltar de las nubes,

- De manera similar, a nivel molecular, los iones atraviesan las membranas celulares y transfieren información.

- Conocemos los voltajes asociados a la electricidad. Las baterías suelen tener unos pocos voltios, los enchufes de nuestra casa suelen producir 120 voltios y las líneas eléctricas pueden llegar a tener cientos de miles de voltios.

- Pero energía y voltaje no son lo mismo. Una batería de motocicleta, por ejemplo, es pequeña y no tendría mucho éxito al sustituir a una batería de coche mucho más grande, pero cada una tiene el mismo voltaje. En este capítulo, examinaremos la relación entre el voltaje y la energía eléctrica.

Energía cinética

- La energía de una sola partícula, aislada, con carga $q1$ consiste únicamente de su energía cinética K. No tiene energía potencial.
- La energía cinética es la energía asociada al movimiento y para una partícula que se mueve a baja velocidad es

$$K = \frac{1}{2}mv^2$$

- Sabemos que los cambios de energía cinética se escribe como

$$\Delta K = K_{\text{final}} - K_{\text{inicial}} = K_f - K_i$$

Por ejemplo: imaginemos un electrón viaja a una velocidad de 6×10^4 m/s. Después de pasar por una región en la que hay un campo eléctrico, su velocidad es de 2×10^4 m/s.
¿Cuál es el cambio en la energía cinética del electrón?

$$K_i = \frac{1}{2}m_e v_i^2 = \frac{1}{2}\left(9 \times 10^{-31}\ \text{kg}\right)\left(6 \times 10^4\ \text{m/s}\right)^2 = 1.6 \times 10^{-21}\ \text{J}$$
$$K_f = \frac{1}{2}m_e v_f^2 = \frac{1}{2}\left(9 \times 10^{-31}\ \text{kg}\right)\left(2 \times 10^4\ \text{m/s}\right)^2 = 1.8 \times 10^{-22}\ \text{J}$$
$$\Delta K = 1.8 \times 10^{-22}\ \text{J} - 1.6 \times 10^{-21}\ \text{J} = -1.42 \times 10^{-21}\ \text{J} < 0$$

Energía Potencial:

- La energía potencial está asociada a las interacciones entre las partículas de un sistema. Una sola partícula no tiene energía potencial.
- La energía cinética de una sola partícula puede cambiar si su entorno realiza un trabajo positivo o negativo sobre ella.

$$\Delta K_{\text{sistema}} = W_{\text{entorno}}$$

Trabajo:

- El trabajo es una cantidad escalar, con unidades de julios.
- El trabajo realizado sobre una partícula es el producto de la fuerza ejercida sobre la partícula por el desplazamiento a través del cual actúa la fuerza.
- Como la fuerza es un vector y el desplazamiento es un vector, el trabajo es:

$$W = \vec{F} \cdot \Delta\vec{l} = \langle F_x, F_y, F_z \rangle \cdot \langle \Delta x, \Delta y, \Delta z \rangle = F_x \Delta x + F_y \Delta y + F_z \Delta z$$

- Donde $\langle \Delta x, \Delta y, \Delta z \rangle = \Delta\vec{l}$ es el desplazamiento de la partícula.

Por ejemplo: imaginemos una partícula de polvo con carga 2×10^{-11} C que se mueve desde ⟨0,1; -0,3; 0,4⟩ m hasta ⟨0,2; -0,3; -0,2⟩ m. En esta región hay un campo eléctrico de ⟨2000; 0; 4000⟩ N/C.
¿Cuánto trabajo realiza la fuerza eléctrica sobre la partícula de polvo?

Energía Potencial:

- La energía potencial está asociada a las interacciones entre las partículas de un sistema. Una sola partícula no tiene energía potencial.
- La energía cinética de una sola partícula puede cambiar si su entorno realiza un trabajo positivo o negativo sobre ella.

$$\Delta K_{\text{sistema}} = W_{\text{entorno}}$$

Trabajo:

- El trabajo es una cantidad escalar, con unidades de julios.
- El trabajo realizado sobre una partícula es el producto de la fuerza ejercida sobre la partícula por el desplazamiento a través del cual actúa la fuerza.
- Como la fuerza es un vector y el desplazamiento es un vector, el trabajo es:

$$W = \vec{F} \cdot \Delta\vec{l} = \langle F_x, F_y, F_z \rangle \cdot \langle \Delta x, \Delta y, \Delta z \rangle = F_x \Delta x + F_y \Delta y + F_z \Delta z$$

- Donde $\langle \Delta x, \Delta y, \Delta z \rangle = \Delta\vec{l}$ es el desplazamiento de la partícula.

Por ejemplo: imaginemos una partícula de polvo con carga 2×10^{-11} C que se mueve desde ⟨0,1; -0,3; 0,4⟩ m hasta ⟨0,2; -0,3; -0,2⟩ m. En esta región hay un campo eléctrico de ⟨2000; 0; 4000⟩ N/C.
¿Cuánto trabajo realiza la fuerza eléctrica sobre la partícula de polvo?

$$\Delta\vec{l} = \langle 0,2; -0,3; -0,2 \rangle \text{m} - \langle 0,1; -0,3; 0,4 \rangle \text{m} = \langle 0,1; 0; -0,6 \rangle \text{m}$$

$$\begin{aligned} W &= \left[\left(2 \times 10^{-11}\right)(2000)(0,1) + \left(2 \times 10^{-11}\right)(0)(0) + \left(2 \times 10^{-11}\right)(4000)(-0,6)\right] \text{J} \\ &= -4,4 \times 10^{-8} \text{ J} < 0 \end{aligned}$$

- El trabajo realizado sobre la partícula es negativo, por lo que la energía cinética de la partícula disminuye.

Energía potencial eléctrica

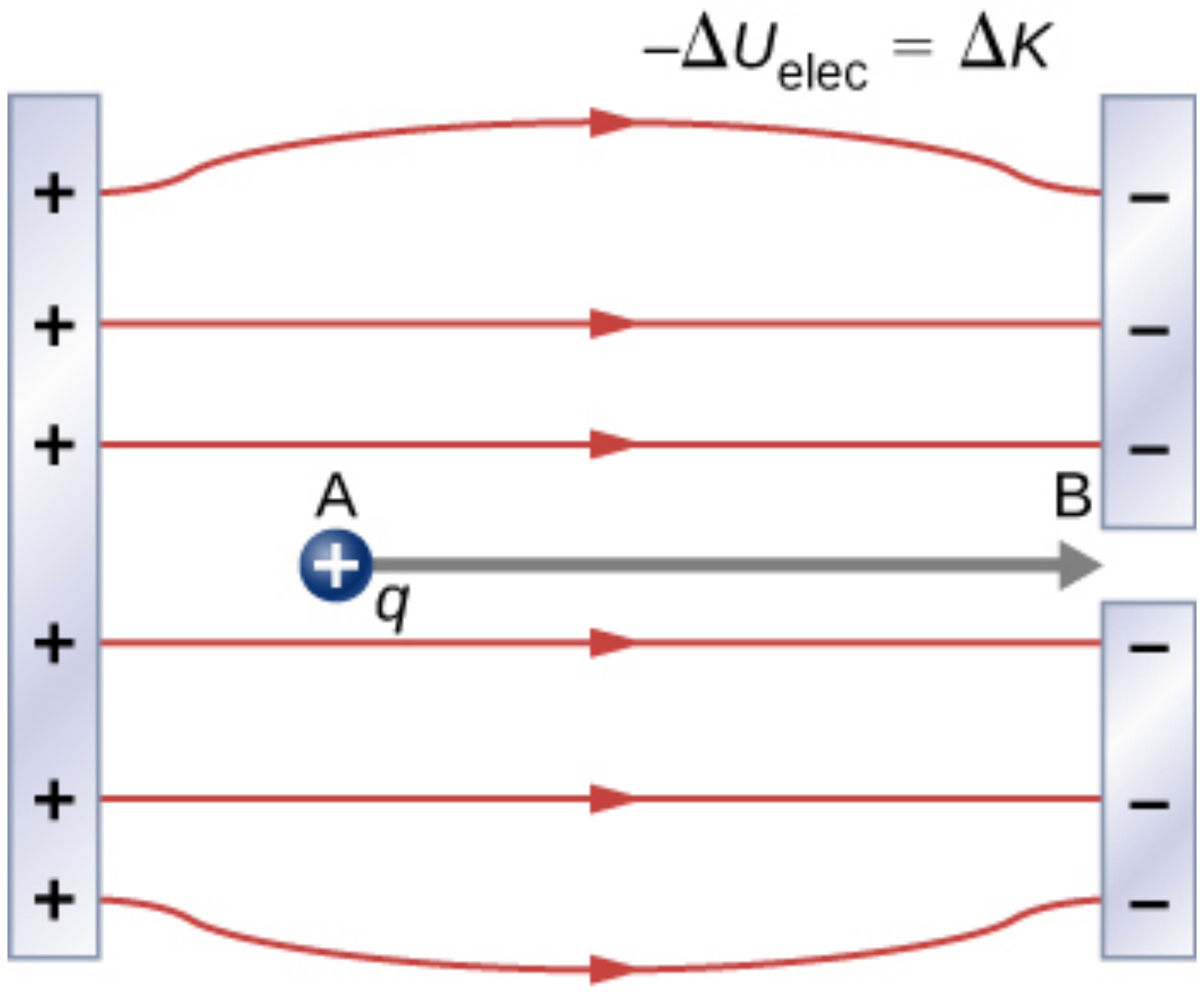
- Cuando una carga positiva libre q es acelerada por un campo eléctrico, gana energía cinética.

- El proceso es análogo al de un objeto que es acelerado por un campo gravitatorio, como si la carga bajara por una colina eléctrica donde su energía potencial eléctrica se convierte en energía cinética.

- En ambos casos, la energía potencial U disminuye a medida que aumenta la energía cinética: $-\Delta U = \Delta K$.

- El trabajo lo realiza una fuerza, pero como esta fuerza es conservativa, podemos escribir:

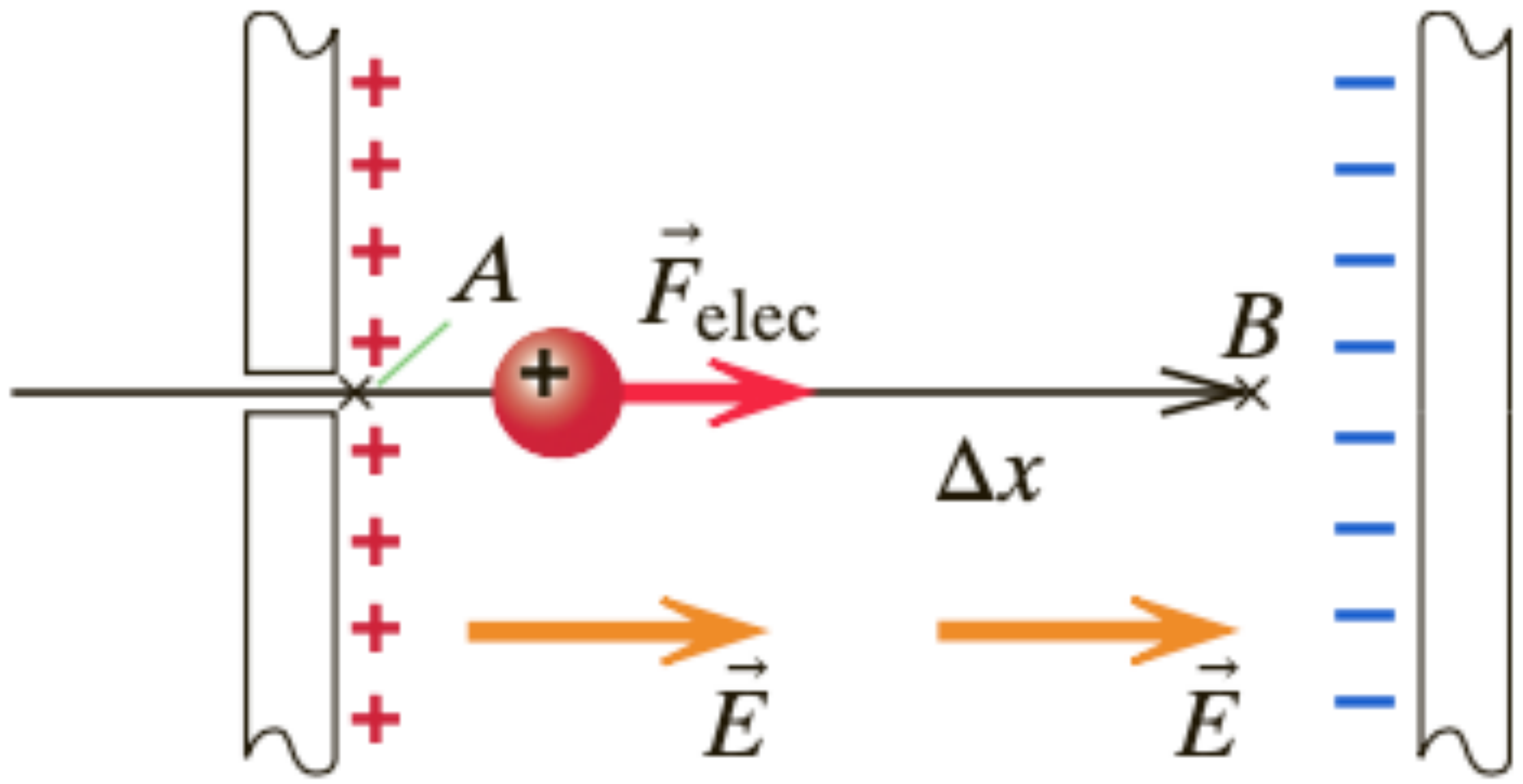
$$W = -\Delta U$$



- La fuerza electrostática es conservativa, lo que significa que el trabajo realizado sobre q es independiente del camino recorrido (análogo a la fuerza gravitatoria).

- Cuando una fuerza es conservativa, es posible definir una energía potencial asociada a la fuerza. Suele ser más fácil trabajar con la energía potencial (porque sólo depende de la posición) que calcular el trabajo directamente.

- Un **protón** que viaja hacia la derecha entra en un capacitor a través de un pequeño agujero en la placa izquierda. En el interior viaja de la posición A a la posición B, en una región de campo eléctrico uniforme.



- Mientras el protón está dentro del capacitor, una fuerza eléctrica actúa sobre él, realizando un trabajo sobre el protón. Por el principio de la energía, aplicado a este sistema tenemos que:

$$\Delta K_{\text{protón}} + \Delta U_{\text{electrico}} = 0$$

- Como la fuerza actúa en la misma dirección que el desplazamiento del protón, la K del protón aumenta.
- Cuando llegue a B la energía cinética habrá aumentado en una cantidad igual al trabajo realizado sobre el protón por el campo eléctrico, que se debe a todas las partículas cargadas en las placas del capacitor y la velocidad del protón será mayor.
- Como la energía cinética aumentará, la energía potencial eléctrica debe disminuir.

- El cambio en la energía potencial eléctrica de este sistema es igual al negativo del trabajo interno: en este caso, el trabajo realizado sobre el protón por el campo eléctrico uniforme dentro del capacitor:

$$\begin{aligned} \Delta U_{\text{electric}} &= -W_{\text{int}} = -(F_x\Delta x + F_y\Delta y + F_z\Delta z) \\ &= -(eE_x\Delta x + eE_y\Delta y + eE_z\Delta z) \\ &= -(eE_x\Delta x + 0 + 0) = -eE_x\Delta x \end{aligned}$$

$$\Delta x = x_f - x_i > 0\,, \quad E_x > 0$$

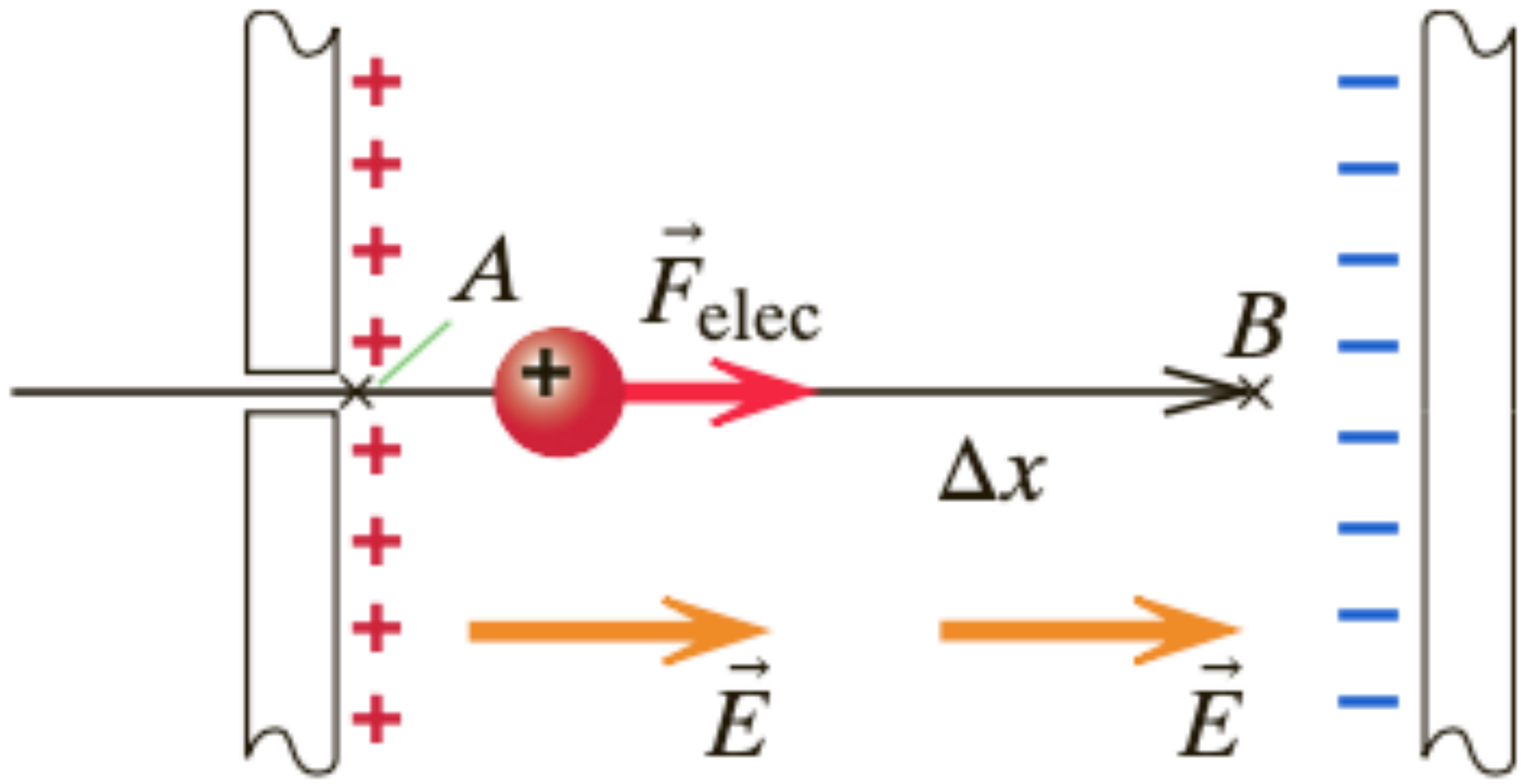
$$\Delta K = -\Delta U_{\text{electrico}} > 0$$

- La energía cinética del protón aumenta

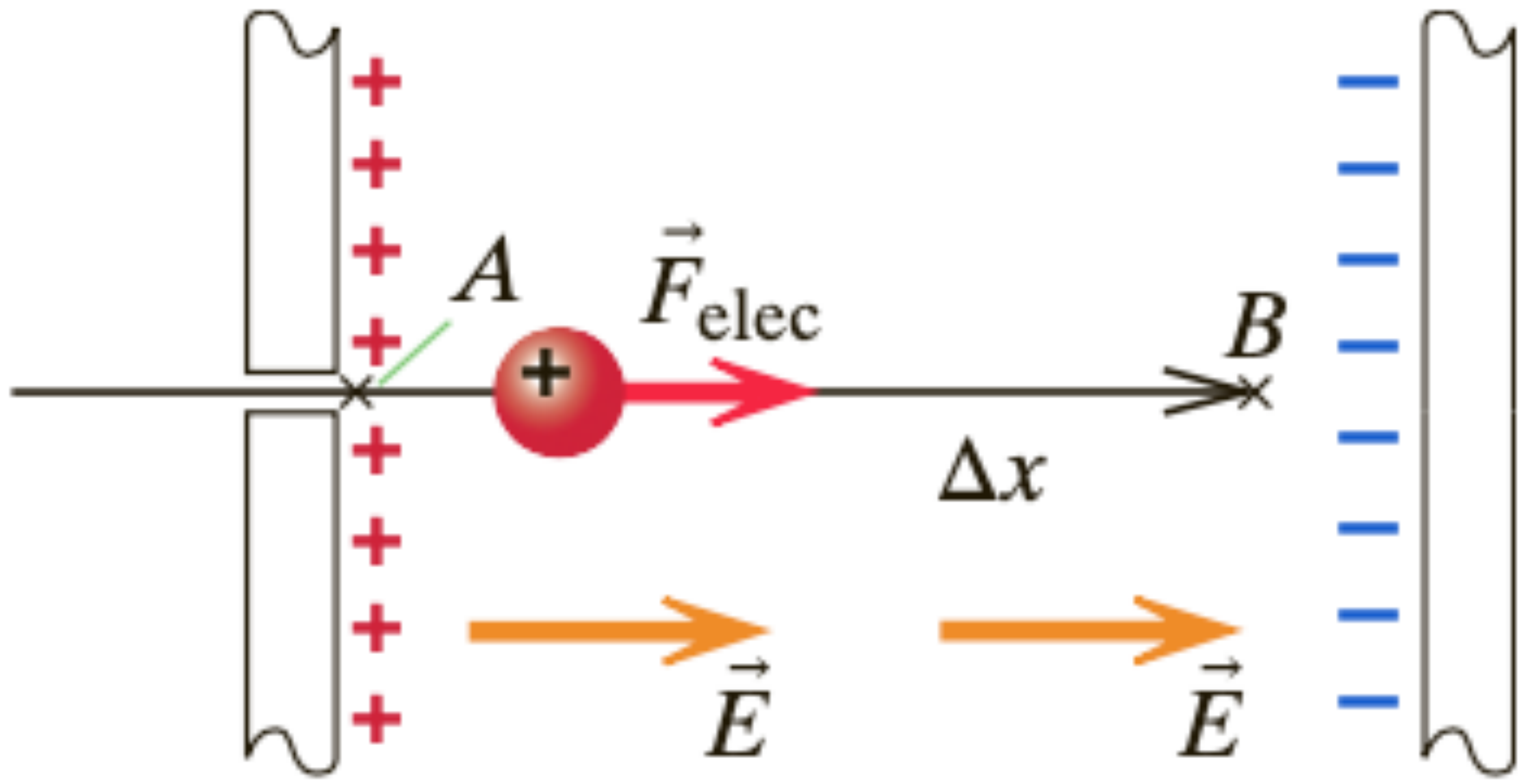
Ejemplo:

- Encontremos ΔU y ΔK si la magnitud del campo eléctrico dentro del capacitor es de 2×10^3 N/C, y la distancia recorrida por el protón es de 4 mm.

$$\Delta U_{\text{electrico}} = -eE_x\Delta x$$



Ejemplo:



- Encontremos ΔU y ΔK si la magnitud del campo eléctrico dentro del capacitor es de 2×10^3 N/C, y la distancia recorrida por el protón es de 4 mm.

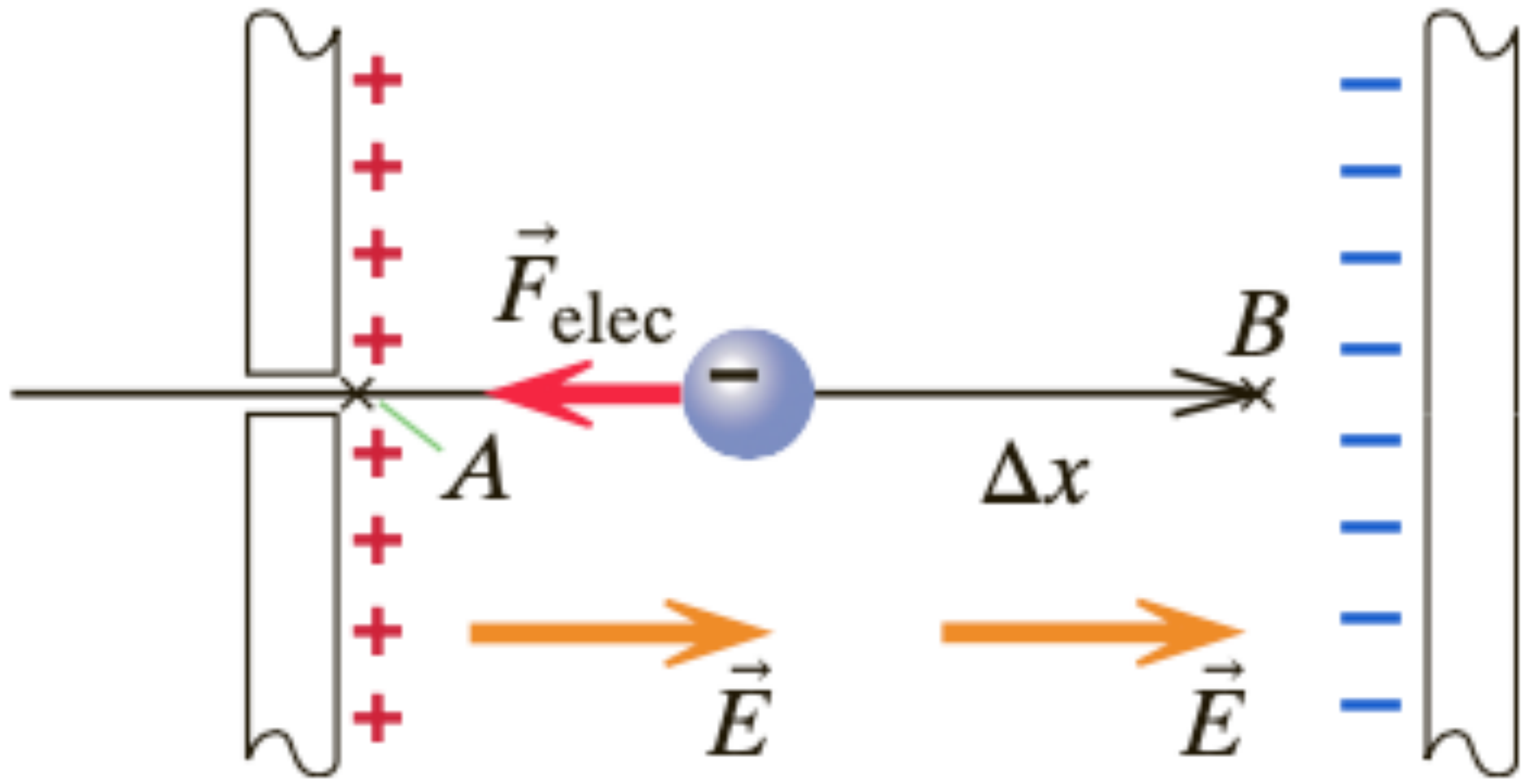
$$\Delta U_{\text{electrico}} = -eE_x\Delta x$$

$$\Delta U_{\text{electrico}} = -\left(1{,}6 \times 10^{-19}\mathrm{C}\right)\left(2 \times 10^3\ \mathrm{N/C}\right)\left(0{,}004\ \mathrm{m}\right) = -1{,}3 \times 10^{-18}\ \mathrm{J}$$

$$\Delta K = -\Delta U_{\text{electrico}} = +1{,}3 \times 10^{-18}\ \mathrm{J}$$

- Como la energía potencial del sistema es menor en el estado final que en el inicial, la energía cinética del sistema debe haber aumentado; el protón se mueve más rápido cuando llega al lugar B, como era de esperar.

- Un **electrón** que viaja hacia la derecha entra en un capacitor a través de un pequeño agujero en la placa izquierda. En el interior viaja desde la posición A hasta la posición B, en una región de campo eléctrico casi uniforme.



- Mientras el electrón está dentro del capacitor, una fuerza eléctrica actúa sobre él, realizando un trabajo sobre el electrón. Por el principio de la energía, aplicado a este sistema tenemos que:

$$\Delta K_{\text{electrón}} + \Delta U_{\text{electrico}} = 0$$

- Debido a que la fuerza eléctrica actúa en dirección opuesta al movimiento del electrón, la energía cinética del electrón disminuirá a medida que se mueve hacia el punto B. La velocidad del electrón será menor en B.
- Como la energía cinética disminuirá, la energía potencial eléctrica debe aumentar.
- El cambio en la energía potencial eléctrica de este sistema es igual al negativo del trabajo interno: en este caso, el trabajo realizado sobre el electrón por el campo eléctrico uniforme dentro del capacitor. En esta situación simple la única componente no nula del campo eléctrico es la componente x, por lo que

$$\boxed{W = \Delta K}$$

$$W = -\Delta U = \Delta K$$

$$\begin{aligned}
\Delta U_{\text{electrico}} &= -(F_x \Delta x + 0 + 0) \\
&= -((-e)E_x \Delta x + 0 + 0) \\
&= eE_x \Delta x
\end{aligned}$$

$$K = \frac{1}{2} m v^2$$

$$\boxed{\Delta K = -\Delta U_{\text{electrico}}} < 0$$

$$\Delta x = x_f - x_i > 0\,, \quad E_x > 0$$

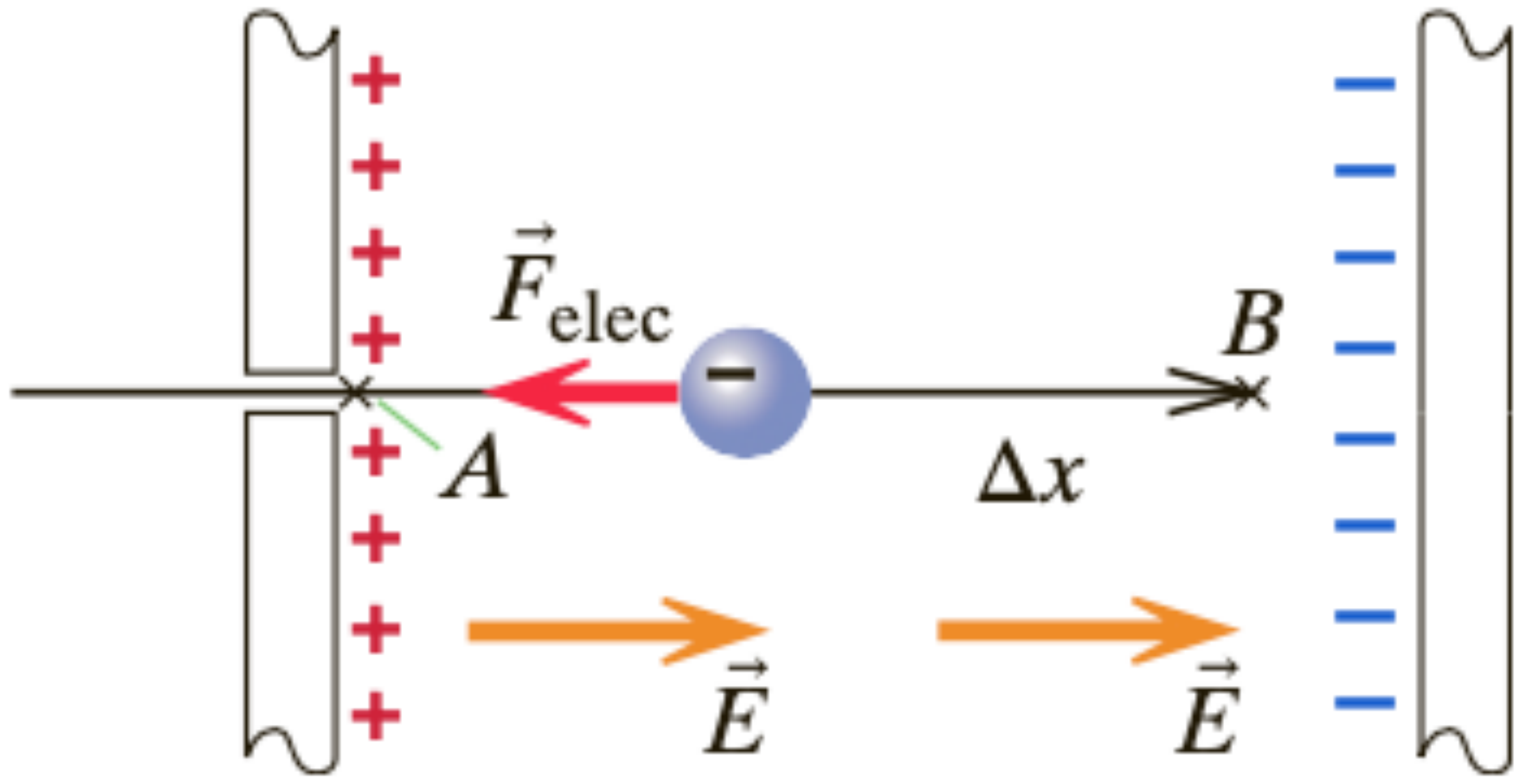
- La energía cinética del electrón disminuye

Ejemplo:

$W = \Delta K \to K_f - \cancel{K_i}$ 0

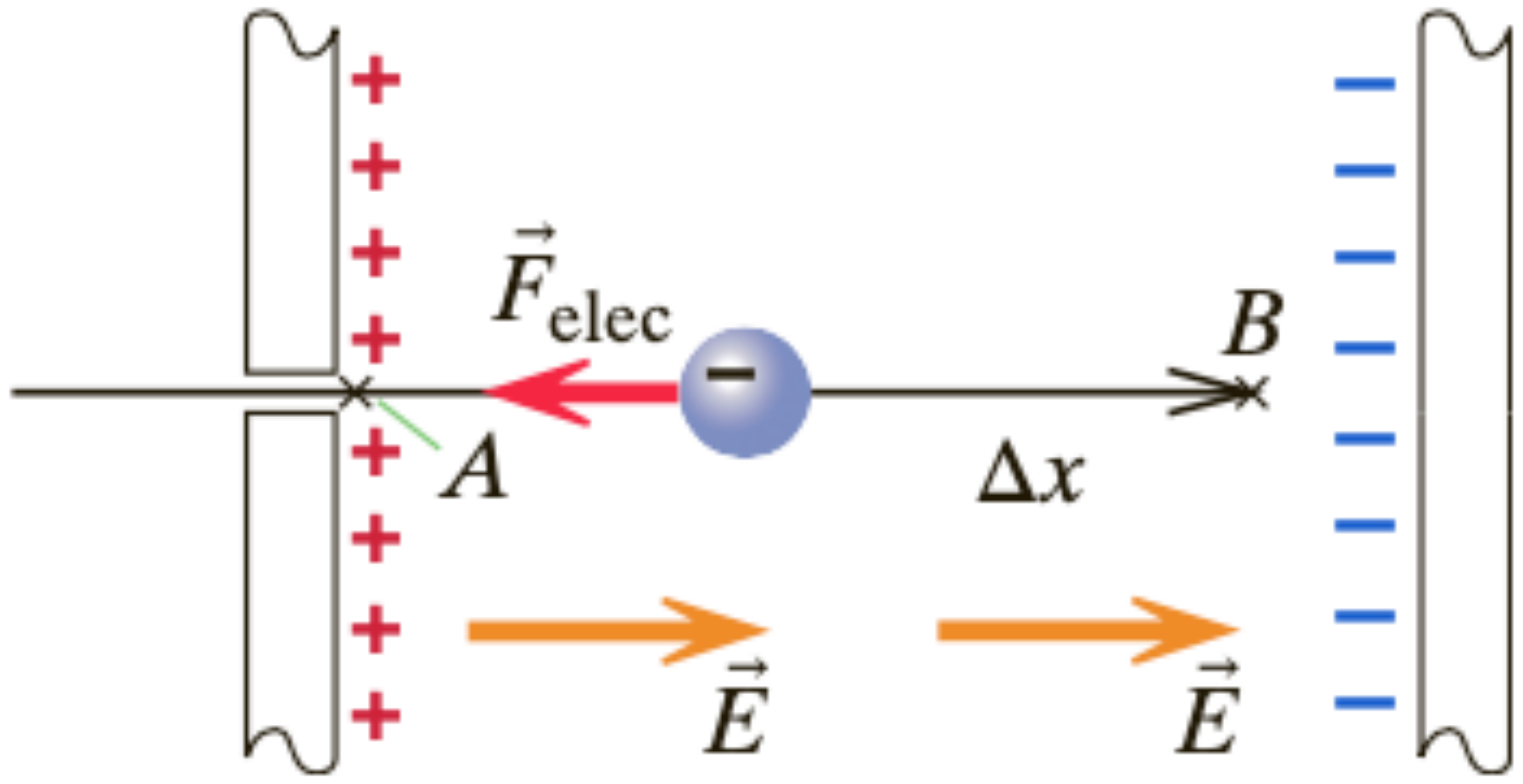
- Encontremos ΔU y ΔK si la magnitud del campo eléctrico dentro del capacitor es de 2×10^3 N/C, y la distancia recorrida por el protón es de 4 mm.

$W = \frac{1}{2} m v^2$



Ejemplo:

- Encontremos ΔU y ΔK si la magnitud del campo eléctrico dentro del capacitor es de 2×10^3 N/C, y la distancia recorrida por el protón es de 4 mm.



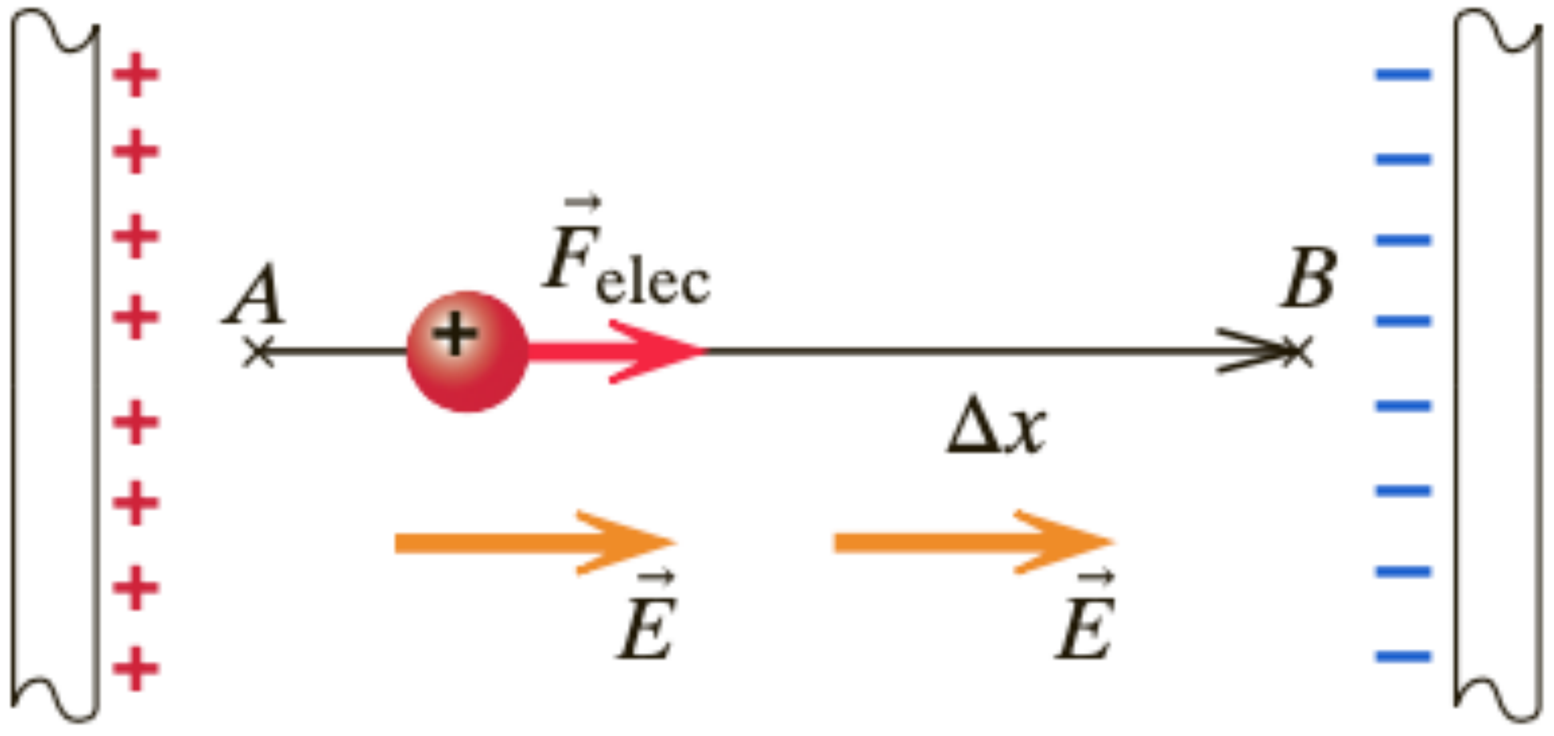
- Para el electrón la dirección de la fuerza es opuesta al desplazamiento:

$$\Delta U_{\text{electric}} = -\left(-1,6 \times 10^{-19}\text{C}\right)\left(2 \times 10^3\ \text{N/C}\right)(0.004\ \text{m}) = +1,3 \times 10^{-18}\ \text{J}$$

$$\Delta K = -\Delta U_{\text{electric}} = -1,3 \times 10^{-18}\ \text{J}$$

- La energía cinética del electrón disminuye y la energía potencial del sistema aumenta.

Ejemplo:



- Un protón se mueve desde el punto A al punto B en una región de campo eléctrico uniforme. Si la magnitud del campo eléctrico es de 190 N/C y la distancia desde A hasta B es de 1,5 cm.
- ¿Cuál es el cambio en la energía potencial eléctrica del sistema durante este proceso?
- ¿Cuál es el cambio en la energía cinética del protón durante este proceso?
- Si el protón está inicialmente en reposo ¿cuál es su velocidad cuando llega al punto B?

- Cambio en la energía potencial eléctrica: $$\Delta U = -W_{\text{int}} = -eE_x\Delta x$$ $$= -\left(1,6\times 10^{-19}\,\mathrm{C}\right)(190\ \mathrm{N/C})(0,015\ \mathrm{m}) = -4,6\times 10^{-19}\ \mathrm{J}$$

- Cambio en la energía cinética del protón: $$\Delta K + \Delta U = 0$$ $$\Delta K = -\Delta U = +4,6\times 10^{-19}\ \mathrm{J}$$

- Velocidad final del protón: $$K_f - 0 = \frac{1}{2}mv_f^2 - 0$$

$$v_f = \sqrt{\frac{2K_f}{m}} = \sqrt{\frac{2\left(4,6\times 10^{-19}\ \mathrm{J}\right)}{\left(1,7\times 10^{-27}\ \mathrm{kg}\right)}} = 2,3\times 10^{4}\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

Energía de un sistema de dos partículas cargadas

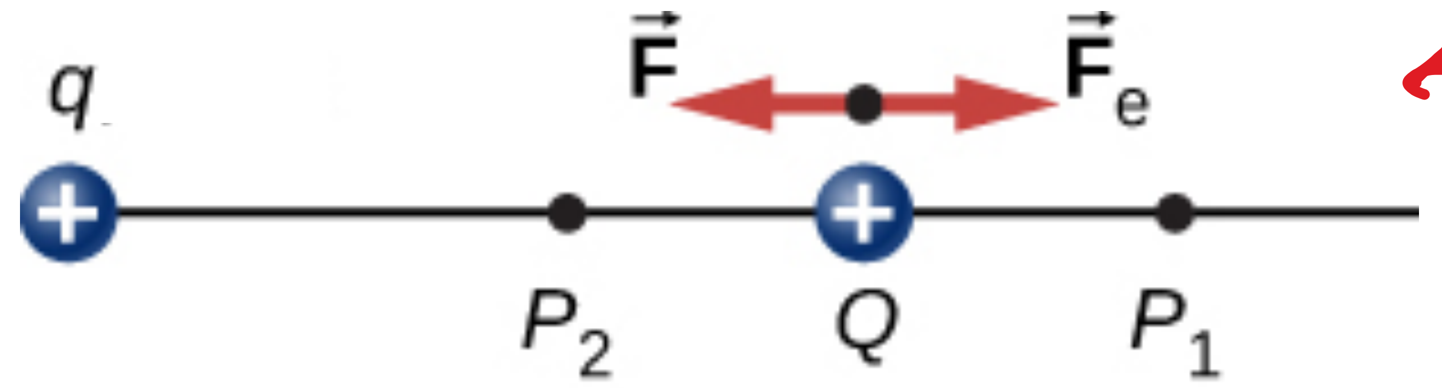
- Consideremos una carga eléctrica $+q$ fija en el origen y movamos otra carga $+Q$ hacia q de tal manera que, en cada instante, la fuerza aplicada $\vec{F}$ equilibre exactamente la fuerza eléctrica $\vec{F}_e$ sobre Q.

o fuerza externa

- El trabajo realizado por la fuerza aplicada $\vec{F}$ sobre la carga Q cambia la energía potencial de Q. Llamamos a esta energía potencial **la energía potencial eléctrica** de Q.

+Q

+q



- El trabajo W_{12} realizado por la fuerza aplicada $\vec{F}$ cuando la partícula se mueve de P_1 a P_2 puede calcularse así

$$W_{12} = \int_{P_1}^{P_2} \vec{F} \cdot d\vec{l}$$

ΔU

- Como la fuerza aplicada $\vec{F}$ equilibra la fuerza eléctrica $\vec{F}_e$ sobre Q, las dos fuerzas tienen igual magnitud y direcciones opuestas. Por lo tanto, la fuerza aplicada es

$$\vec{F} = -\vec{F}_e = -\frac{kqQ}{r^2}\hat{r}$$

- Definimos como positivo lo que apunte lejos del origen (r es la distancia desde el origen).

- Las direcciones del desplazamiento y de la fuerza aplicada en el sistema son paralelas, por lo que el trabajo realizado en el sistema será positivo.

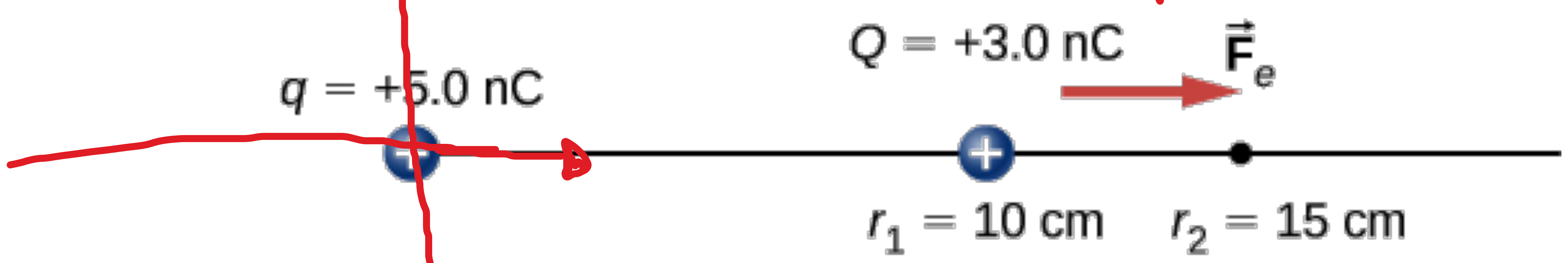
- Cuando una fuerza conservativa realiza un trabajo negativo, el sistema gana energía potencial.

- Cuando una fuerza conservativa realiza un trabajo positivo, el sistema pierde energía potencial.

$$W = -\Delta U$$

Ejemplo:

- Una carga Q de $+3{,}0\ nC$ está inicialmente en reposo a una distancia de 10 cm (r_1) de una carga q de $+5{,}0\ nC$ fija en el origen. La fuerza de Coulomb acelera a Q lejos de q, alcanzando finalmente 15 cm (r_2).



$$F = \frac{Qq}{r^2}$$

- El trabajo realizado por el campo eléctrico entre r_1 y r_2 es:

$$W = \int_{r_1}^{r_2} \vec{F} \cdot \vec{dl} = \int_{r_1}^{r_2} F\, dl \cdot \cancel{\cos(\theta)}^{\,1}$$

$$\int_{r_1}^{r_2} k\frac{Qq}{r^2} \cdot dr$$

$$\frac{r^{-2+1}}{-2+1} = -\frac{r^{-1}}{1}$$

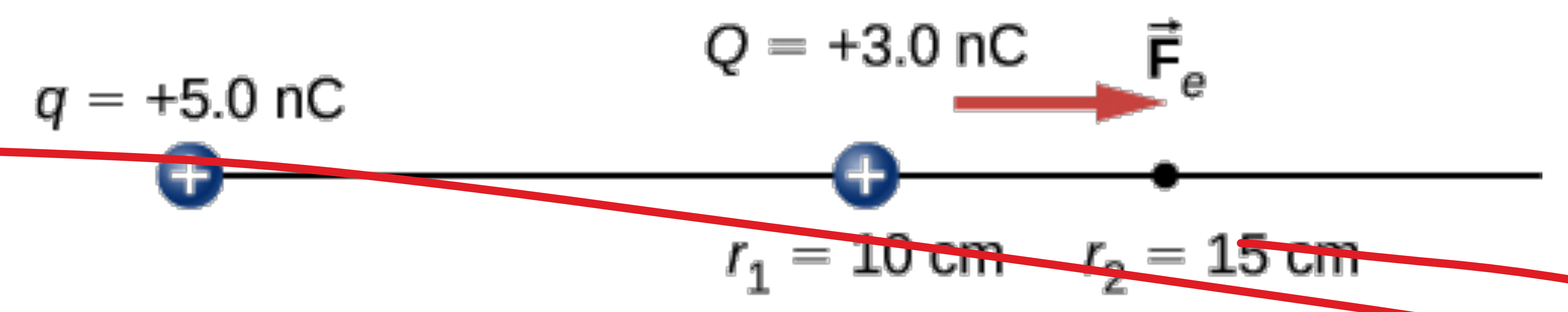
$$kQq\left(-\frac{1}{r}\right)\Bigg|_{r_1}^{r_2}$$

$$= \boxed{kQq\left(-\frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_1}\right)}$$

3nC 5nC 0.1 m 0.15 m

Ejemplo:

- Una carga Q de +3,0 nC está inicialmente en reposo a una distancia de 10 cm (r_1) de una carga q de +5,0 nC fija en el origen. La fuerza de Coulomb acelera a Q lejos de q, alcanzando finalmente 15 cm (r_2).



- El trabajo realizado por el campo eléctrico entre r_1 y r_2 es:

$$W_{12} = \int_{r_1}^{r_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{r_1}^{r_2} \frac{kqQ}{r^2} dr = -\frac{kqQ}{r}\bigg|_{r_1}^{r_2} = kqQ\left[\frac{-1}{r_2} + \frac{1}{r_1}\right]$$

$$= \left(8.99 \times 10^9 \frac{\mathrm{Nm}^2}{\mathrm{C}^2}\right)(5.0 \times 10^{-9}\ \mathrm{C})(3.0 \times 10^{-9}\ \mathrm{C})\left[\frac{-1}{0.15\ \mathrm{m}} + \frac{1}{0.10\ \mathrm{m}}\right]$$

$$= 4.5 \times 10^{-7}\ \mathrm{J}.$$

- Este es también el valor de la energía cinética en r_2.

Más sobre la energía potencial eléctrica

- El trabajo W realizado para acelerar una carga positiva desde el reposo es positivo y resulta en una ΔU negativa:

$$W = -\Delta U$$

- La energía potencial gravitatoria y la energía potencial eléctrica son bastante análogas. La energía potencial da cuenta del trabajo realizado por una fuerza conservativa y ofrece una visión adicional sobre la energía y la transformación de la energía sin necesidad de tratar la fuerza directamente.

- Es común, por ejemplo, utilizar el concepto de energía potencial eléctrica que tratar con la fuerza de Coulomb directamente en aplicaciones del mundo real.

- En coordenadas polares con q en el origen y Q situado en r, el vector del elemento de desplazamiento es $d\vec{l} = \hat{r}\, dr$ y por tanto el trabajo se convierte en

1

$$W_{12} = kqQ \int_{r_1}^{r_2} \frac{1}{r^2} \hat{r} \cdot \hat{r}\, dr = \underbrace{kqQ \frac{1}{r_1}}_{\text{punto inicial}} - \underbrace{kqQ \frac{1}{r_2}}_{\text{punto final}} .$$

- Este resultado sólo depende de los puntos inicial y final, es decir, es independiente del camino recorrido.

- Siguiendo lo anteriormente visto, el trabajo W_{ref} para llevar una carga desde un punto de referencia a un punto de interés puede escribirse como:

$$W_{ref} = \int_{r_{ref}}^{r} \vec{F} \cdot d\vec{l}$$

- Como la diferencia de energía potencial (U_2-U_1) de la carga de prueba Q entre los dos puntos es

$$\Delta U = -\int_{r_{ref}}^{r} \vec{F} \cdot d\vec{l}$$

- Entonces, podemos escribir una expresión general para la energía potencial de dos cargas puntuales (en coordenadas esféricas):

$$\Delta U = -\int_{r_{ref}}^{r} \frac{kqQ}{r^2} dr = -\left[-\frac{kqQ}{r}\right]_{r_{ref}}^{r} = kqQ\left[\frac{1}{r} - \cancel{\frac{1}{r_{ref}}}\right]$$

$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n}$

- Podemos tomar el segundo término como un nivel de referencia constante arbitrario, que sirve de referencia cero:

0

$U =$ $\Delta U = -\int_{r_1}^{r_2} \vec{F} \cdot d\vec{r}$

$$U(r) = k\frac{qQ}{r} - U_{ref}$$

$\frac{kqQ}{n}$ → Es la on

$$U(r) = \underbrace{k\frac{qQ}{r}}_{\text{cero de reference en } r=\infty}$$

$$\underbrace{U(r) = k\frac{qQ}{r}}_{\text{cero de reference en } r=\infty}$$

Esta fórmula es simétrica con respecto a q y Q, por lo que se describe como la energía potencial del sistema de dos cargas.

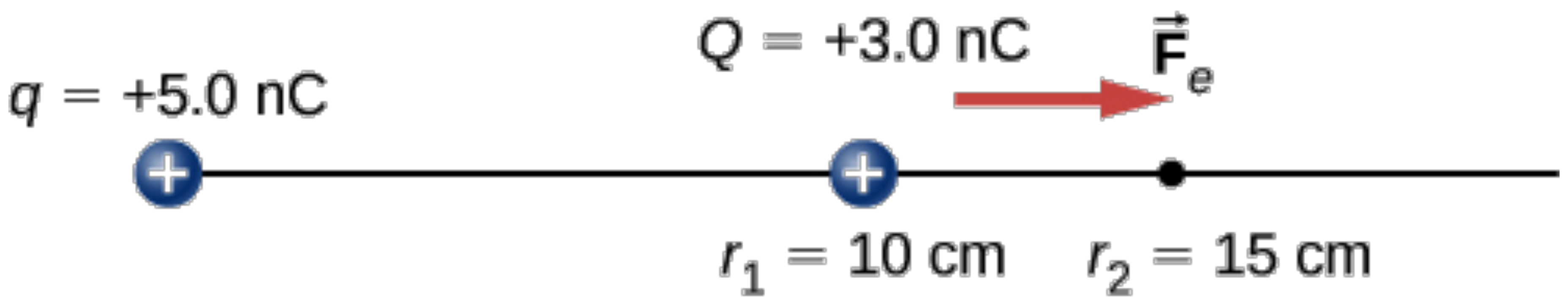
- La energía potencial eléctrica es positiva si las dos cargas son del mismo tipo, ya sea positivo o negativo,
- La energía potencial eléctrica es negativa si las dos cargas son de tipos opuestos.

$$W = -\Delta U$$

- Si se acercan dos cargas positivas o dos cargas negativas, hay que realizar un trabajo positivo sobre el sistema, lo que aumenta su energía potencial.
- Como la energía potencial es proporcional a $1/r$, la energía potencial aumenta cuando r disminuye entre dos cargas positivas o dos negativas.

Ejemplo:

- Una carga Q de +3,0 nC está inicialmente en reposo a una distancia de 10 cm (r_1) de una carga q de +5,0 nC fija en el origen. La fuerza de Coulomb acelera a Q lejos de q, alcanzando finalmente 15 cm (r_2).



- Calculemos el cambio de energía potencial del sistema de dos cargas entre r_1 y r_2 es:

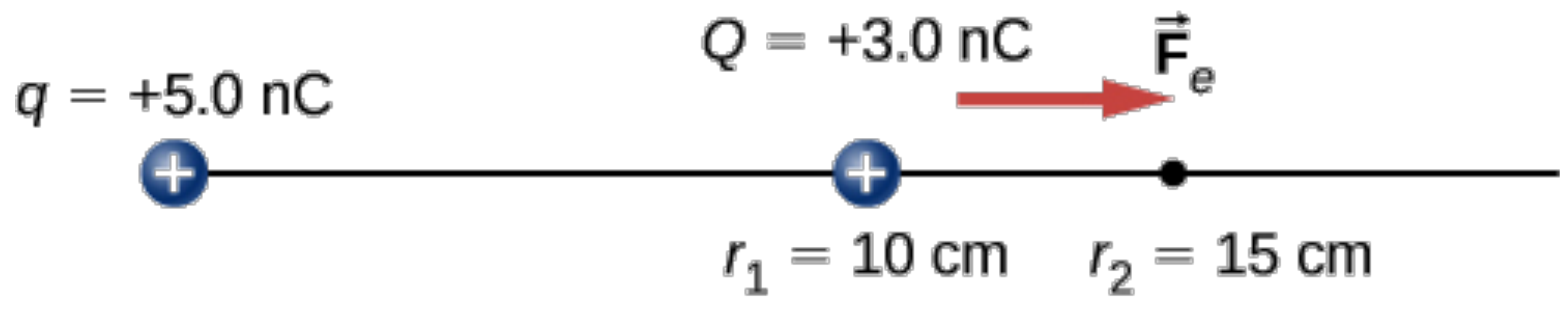
$W = -\Delta U$

$$\boxed{U(r) = \frac{k\; 5\times 10^{-9} \times 3\times 10^{-9}}{0{,}13\ m}}$$

9×10^{9}

Ejemplo:

- Una carga Q de +3,0 nC está inicialmente en reposo a una distancia de 10 cm (r_1) de una carga q de +5,0 nC fija en el origen. La fuerza de Coulomb acelera a Q lejos de q, alcanzando finalmente 15 cm (r_2).



- Calculemos el cambio de energía potencial del sistema de dos cargas entre r_1 y r_2 es:

$$\Delta U_{12} = -\int_{r_1}^{r_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} = -\int_{r_1}^{r_2} \frac{kqQ}{r^2} dr = -\left[-\frac{kqQ}{r}\right]_{r_1}^{r_2} = kqQ\left[\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1}\right]$$

$$= \left(8.99 \times 10^9 \frac{\text{Nm}^2}{\text{C}^2}\right)(5.0 \times 10^{-9}\ \text{C})(3.0 \times 10^{-9}\ \text{C})\left[\frac{1}{0.15\ \text{m}} - \frac{1}{0.10\ \text{m}}\right] = -4.5 \times 10^{-7}\ \text{J}$$

- El cambio en la energía potencial es negativo, como se esperaba, e igual en magnitud al cambio en la energía cinética en este sistema. Recordemos que anteriormente el cambio en la energía cinética fue positivo.

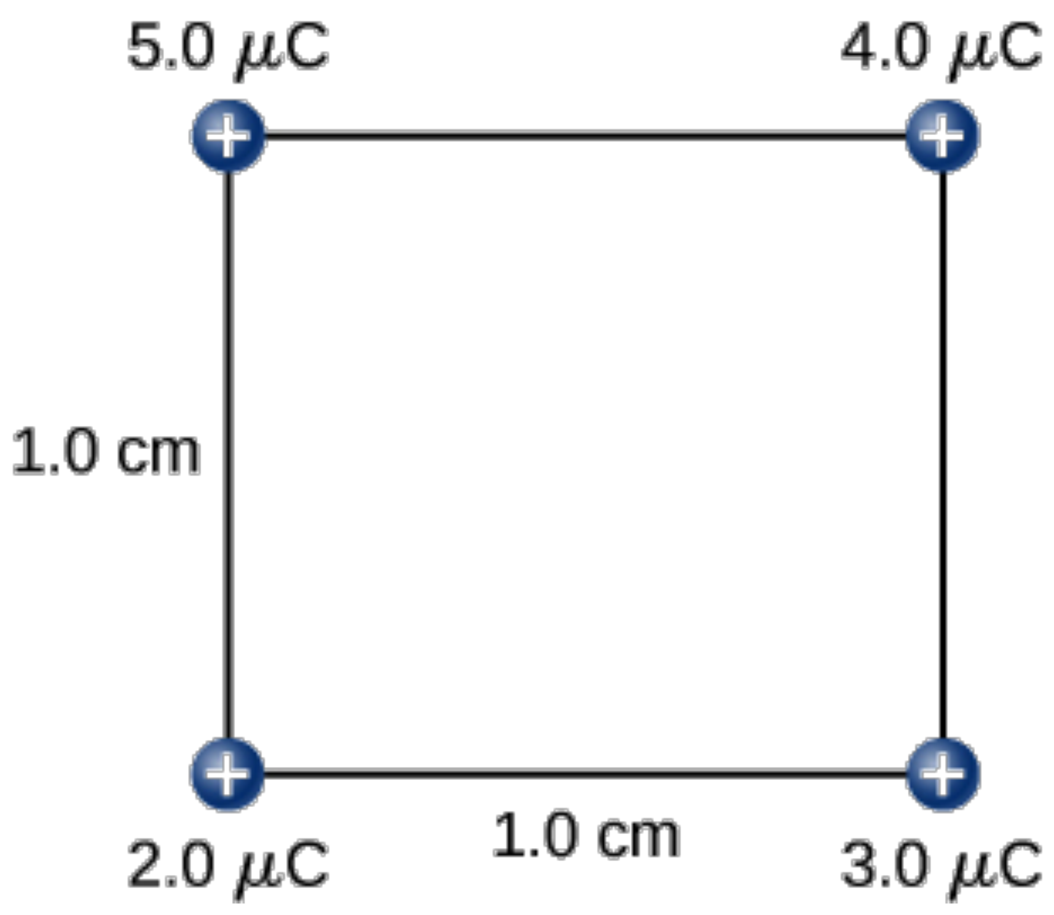
$\Delta U = -\Delta K$

- ¿Cuál es la energía potencial de Q en r_2 respecto a la referencia cero en el infinito?

Ejemplo : Ensamblaje de cuatro cargas positivas

- Encontrar la cantidad de trabajo que debe realizar un agente externo para reunir cuatro cargas: +2,0 μC, +3,0 μC, +4,0 μC y +5,0 μC en los vértices de un cuadrado de lado 1,0 cm, partiendo cada carga desde el infinito 1 2 3

4



$W = -\Delta U$

$\cancel{\Delta W} =$

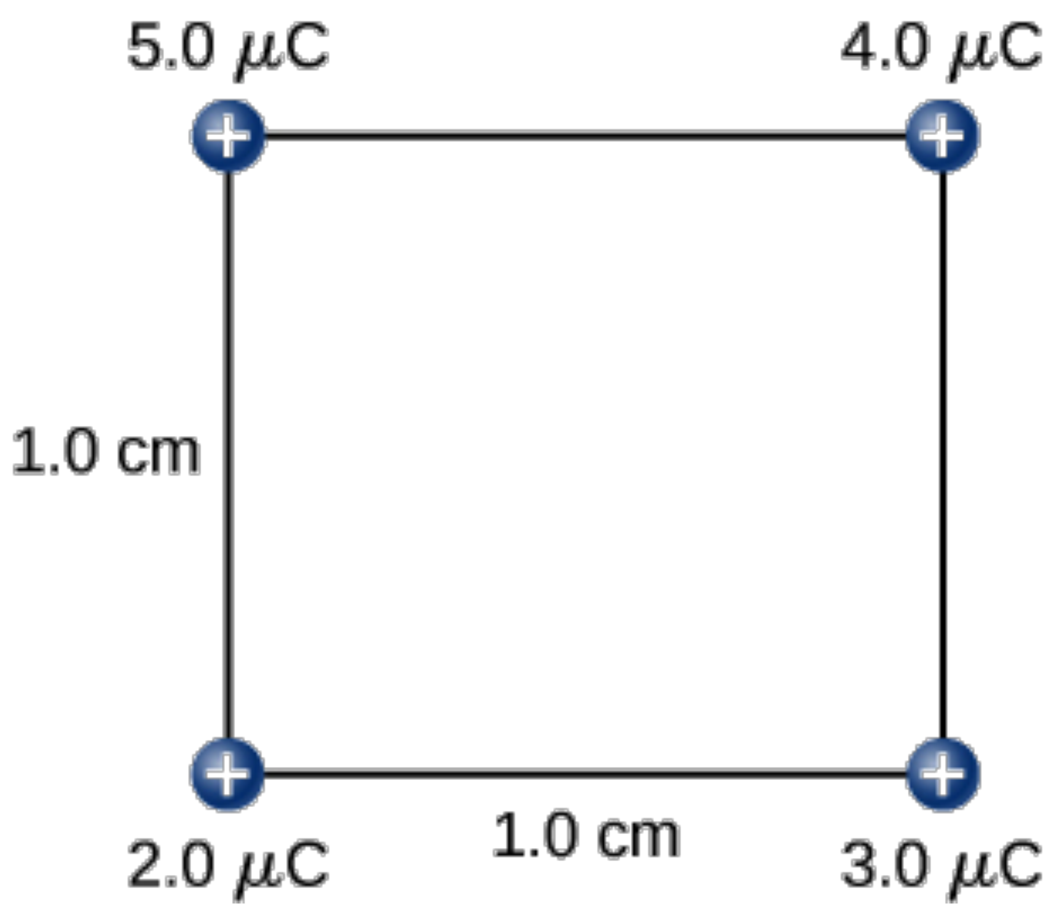
1 2 3 4

$$U(r) = k\left(\frac{2\cdot 10^{-6}\cdot 3\times 10^{-6}}{0.01\,m} + \frac{2\cdot 10^{-6}\cdot 4\times 10^{-6}}{0.014\,m} + \frac{2\cdot 10^{-6}\cdot 5\times 10^{-6}}{0.01\,m}\right.$$

$$\left. + \frac{3\times 10^{-6}\cdot 4\cdot 10^{-6}}{0{,}01\,m} + \frac{3\times 10^{-6}\cdot 5\times 10^{-6}}{0.014\,m} + \frac{4\times 10^{-6}\cdot 5\times 10^{-6}}{0.01}\right)$$

Ejemplo : Ensamblaje de cuatro cargas positivas

- Encontrar la cantidad de trabajo que debe realizar un agente externo para reunir cuatro cargas: +2,0 μC, +3,0 μC, +4,0 μC y +5,0 μC en los vértices de un cuadrado de lado 1,0 cm, partiendo cada carga desde el infinito



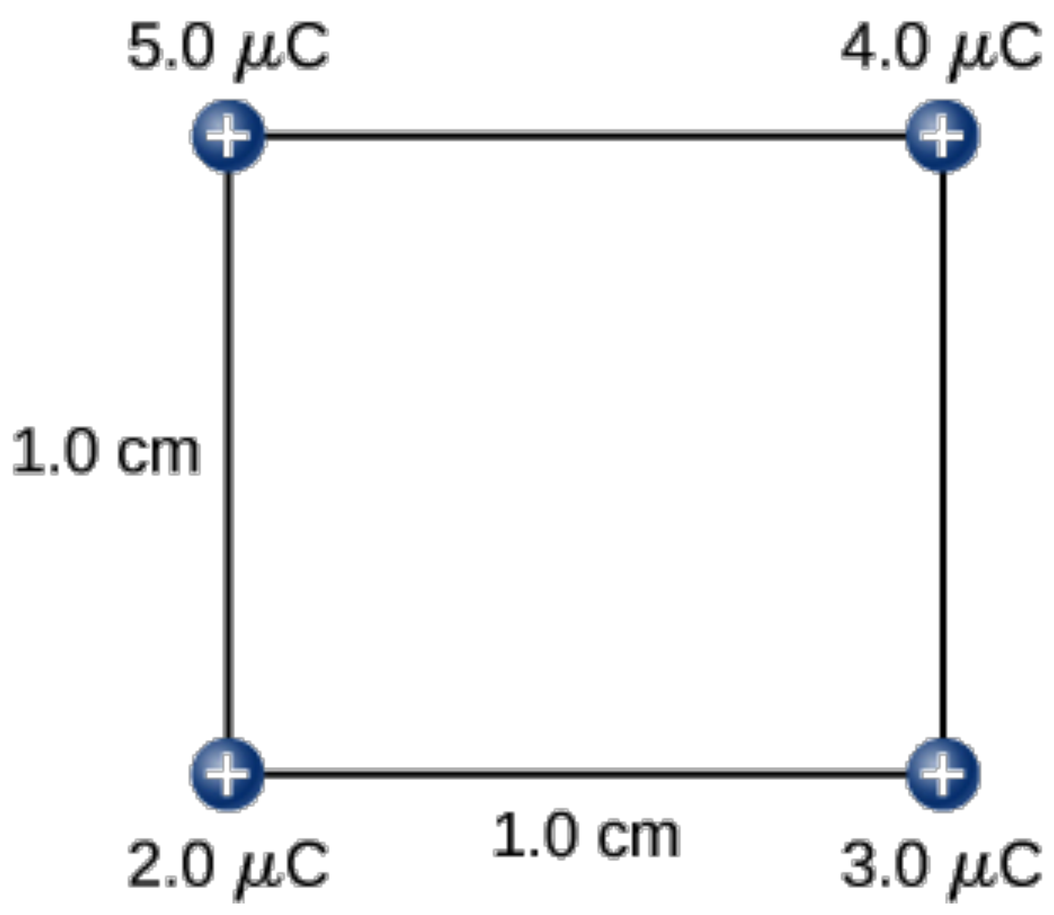
- Para la primera carga de +2,0 μC:

  como no hay otras cargas no se realiza ningún trabajo al traerla desde el infinito.

$$W_1 = 0$$

Ejemplo : Ensamblaje de cuatro cargas positivas

- Encontrar la cantidad de trabajo que debe realizar un agente externo para reunir cuatro cargas: +2,0 μC, +3,0 μC, +4,0 μC y +5,0 μC en los vértices de un cuadrado de lado 1,0 cm, partiendo cada carga desde el infinito



- Traer la segunda carga de +3,0 μC

$$W_2 = k\frac{q_1 q_2}{r_{12}} = \left(9.0 \times 10^9 \frac{N \cdot m^2}{C^2}\right) \frac{\left(2.0 \times 10^{-6} C\right)\left(3.0 \times 10^{-6} C\right)}{1.0 \times 10^{-2}\ \mathrm{m}} = 5.4\ \mathrm{J}$$

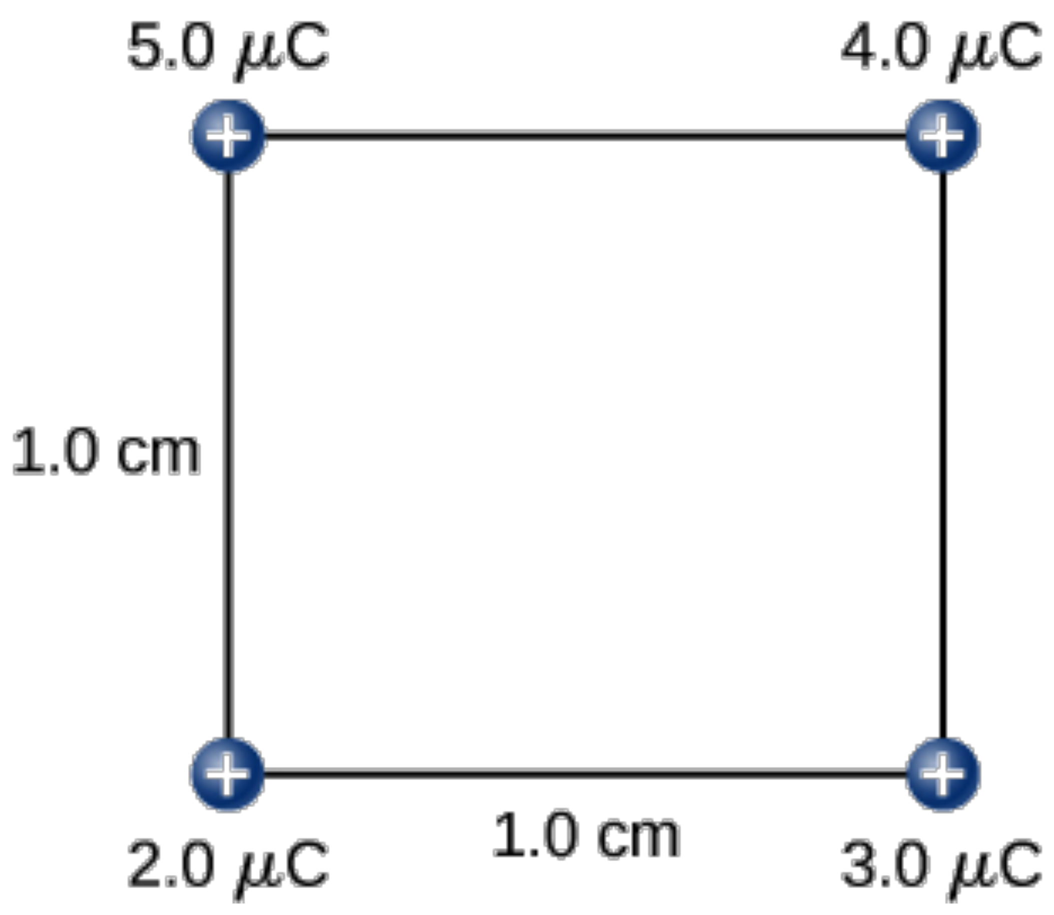
- Para la primera carga de +2,0 μC:

  como no hay otras cargas no se realiza ningún trabajo al traerla desde el infinito.

$$W_1 = 0$$

Ejemplo : Ensamblaje de cuatro cargas positivas

- Encontrar la cantidad de trabajo que debe realizar un agente externo para reunir cuatro cargas: +2,0 μC, +3,0 μC, +4,0 μC y +5,0 μC en los vértices de un cuadrado de lado 1,0 cm, partiendo cada carga desde el infinito



- Traer la segunda carga de +3,0 μC

$$W_2 = k\frac{q_1 q_2}{r_{12}} = \left(9.0 \times 10^9 \frac{N \cdot m^2}{C^2}\right) \frac{\left(2.0 \times 10^{-6} C\right)\left(3.0 \times 10^{-6} C\right)}{1.0 \times 10^{-2}\ \mathrm{m}} = 5.4\ \mathrm{J}$$

- Traer la tercera carga de +4,0 μC

$$W_3 = k\frac{q_1 q_3}{r_{13}} + k\frac{q_2 q_3}{r_{23}}$$
$$= \left(9.0 \times 10^9 \frac{N \cdot m^2}{C^2}\right)\left[\frac{\left(2.0 \times 10^{-6} C\right)\left(4.0 \times 10^{-6} C\right)}{\sqrt{2} \times 10^{-2} m} + \frac{\left(3.0 \times 10^{-6} C\right)\left(4.0 \times 10^{-6} C\right)}{1.0 \times 10^{-2} m}\right] = 15.9\ J$$

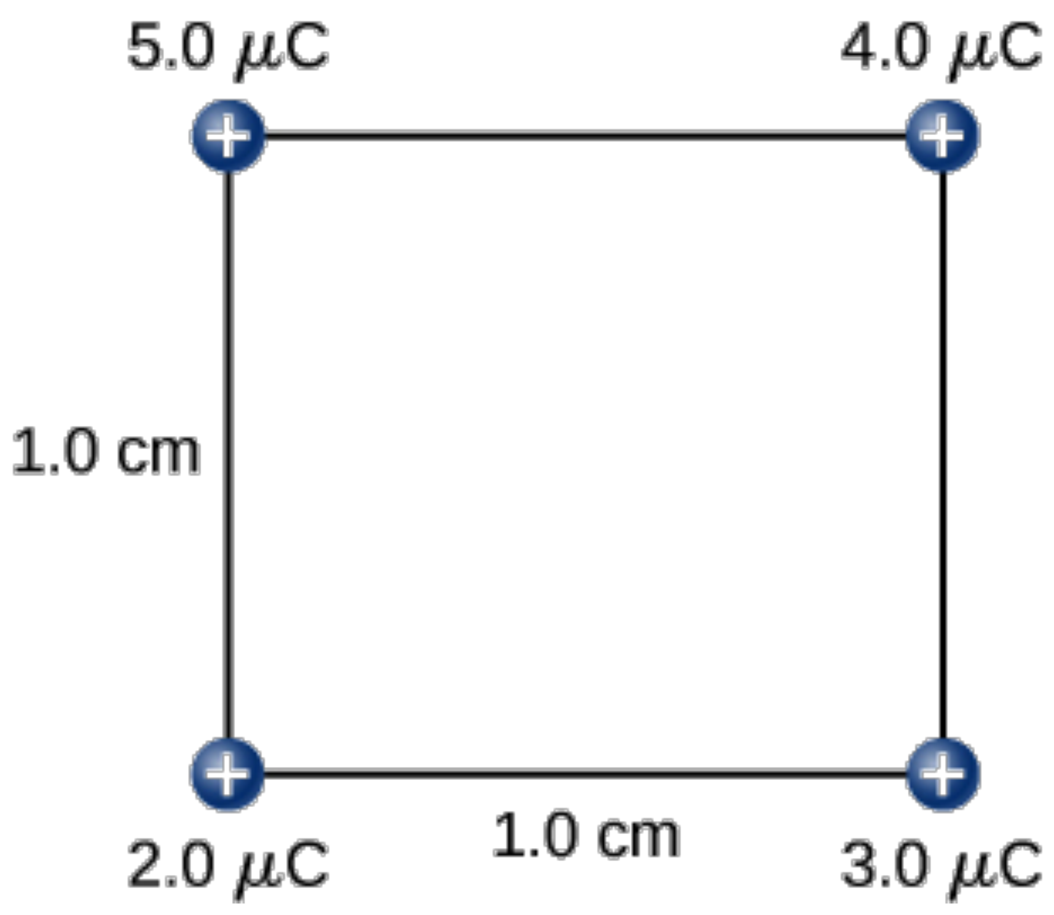
- Para la primera carga de +2,0 μC:

  como no hay otras cargas no se realiza ningún trabajo al traerla desde el infinito.

$$W_1 = 0$$

Ejemplo : Ensamblaje de cuatro cargas positivas

- Encontrar la cantidad de trabajo que debe realizar un agente externo para reunir cuatro cargas: +2,0 μC, +3,0 μC, +4,0 μC y +5,0 μC en los vértices de un cuadrado de lado 1,0 cm, partiendo cada carga desde el infinito



- Para la primera carga de +2,0 μC: como no hay otras cargas no se realiza ningún trabajo al traerla desde el infinito.

$$W_1 = 0$$

- Traer la segunda carga de +3,0 μC

$$W_2 = k\frac{q_1 q_2}{r_{12}} = \left(9.0 \times 10^9 \frac{N \cdot m^2}{C^2}\right) \frac{\left(2.0 \times 10^{-6} C\right)\left(3.0 \times 10^{-6} C\right)}{1.0 \times 10^{-2}\ \mathrm{m}} = 5.4\ \mathrm{J}$$

- Traer la tercera carga de +4,0 μC

$$W_3 = k\frac{q_1 q_3}{r_{13}} + k\frac{q_2 q_3}{r_{23}}$$
$$= \left(9.0 \times 10^9 \frac{N \cdot m^2}{C^2}\right)\left[\frac{\left(2.0 \times 10^{-6} C\right)\left(4.0 \times 10^{-6} C\right)}{\sqrt{2} \times 10^{-2} m} + \frac{\left(3.0 \times 10^{-6} C\right)\left(4.0 \times 10^{-6} C\right)}{1.0 \times 10^{-2} m}\right] = 15.9\ J$$

- Traer la cuarta carga de +5,0 μC

$$W_4 = kq_4\left[\frac{q_1}{r_{14}} + \frac{q_2}{r_{24}} + \frac{q_3}{r_{34}}\right]$$
$$= \left(9.0 \times 10^9 \frac{N \cdot m^2}{C^2}\right)\left(5.0 \times 10^{-6} \mathrm{C}\right)\left[\frac{\left(2.0 \times 10^{-6} \mathrm{C}\right)}{1.0 \times 10^{-2}\ \mathrm{m}} + \frac{\left(3.0 \times 10^{-6} \mathrm{C}\right)}{\sqrt{2} \times 10^{-2}\ \mathrm{m}} + \frac{\left(4.0 \times 10^{-6} \mathrm{C}\right)}{1.0 \times 10^{-2}\ \mathrm{m}}\right] = 36.5\ J.$$

$$W_T = W_1 + W_2 + W_3 + W_4$$
$$= 0 + 5.4J + 15.9J + 36.5J = 57.8\ J$$

2 Potencial eléctrico y diferencia de potencial

- Para los cambios en la energía potencial de un sistema, sería útil encontrar una cantidad que sea independiente de la carga de la partícula que se mueve a través de una región. Entonces podríamos simplemente multiplicar esta cantidad por la carga, para obtener el cambio en la energía potencial del sistema.

- En los dos casos discutidos anteriormente (protón o electrón moviéndose en un campo uniforme), muchas cantidades sobre el sistema eran las mismas: el capacitor, el campo eléctrico en la región, y el camino tomado por la partícula entre la ubicación inicial *A* y la ubicación final *B*. Reescribamos el cambio en la energía potencial eléctrica en cada caso como el producto de la carga de la partícula desplazada y otra cantidad:

Si la partícula es un protón: $\Delta U_{\text{electrico}} = -eE_x\Delta x = (+e)(-E_x\Delta x)$

Si la partícula es un electrón: $\Delta U_{\text{electrico}} = +eE_x\Delta x = (-e)(-E_x\Delta x)$

$\Rightarrow \Delta U_{\text{electrico}} = q\Delta V$

- La cantidad que es la misma en ambos casos es ($-E_x\Delta x$). Esta cantidad se denomina **diferencia de potencial eléctrico entre los lugares *A* y *B***, y recibe el símbolo $\Delta V = -E_x\Delta x$

$$\Delta U_{\text{electrico}} = q\Delta V \quad \text{y por lo tanto} \quad \Delta V = \frac{\Delta U_{\text{electrico}}}{q}$$

- Para el trabajo, es conveniente definir una cantidad que nos permita calcular el trabajo sobre una carga independientemente de la magnitud de la carga.

- Calcular el trabajo directamente puede ser difícil, ya que $W = \vec{F} \cdot \vec{d}$ y la dirección y la magnitud de $\vec{F}$ pueden ser complejas para múltiples cargas y a lo largo de trayectorias arbitrarias.

- Para tener una cantidad física que sea independiente de la carga de prueba, definimos el <u>potencial eléctrico</u> *V* como la energía potencial por unidad de carga:

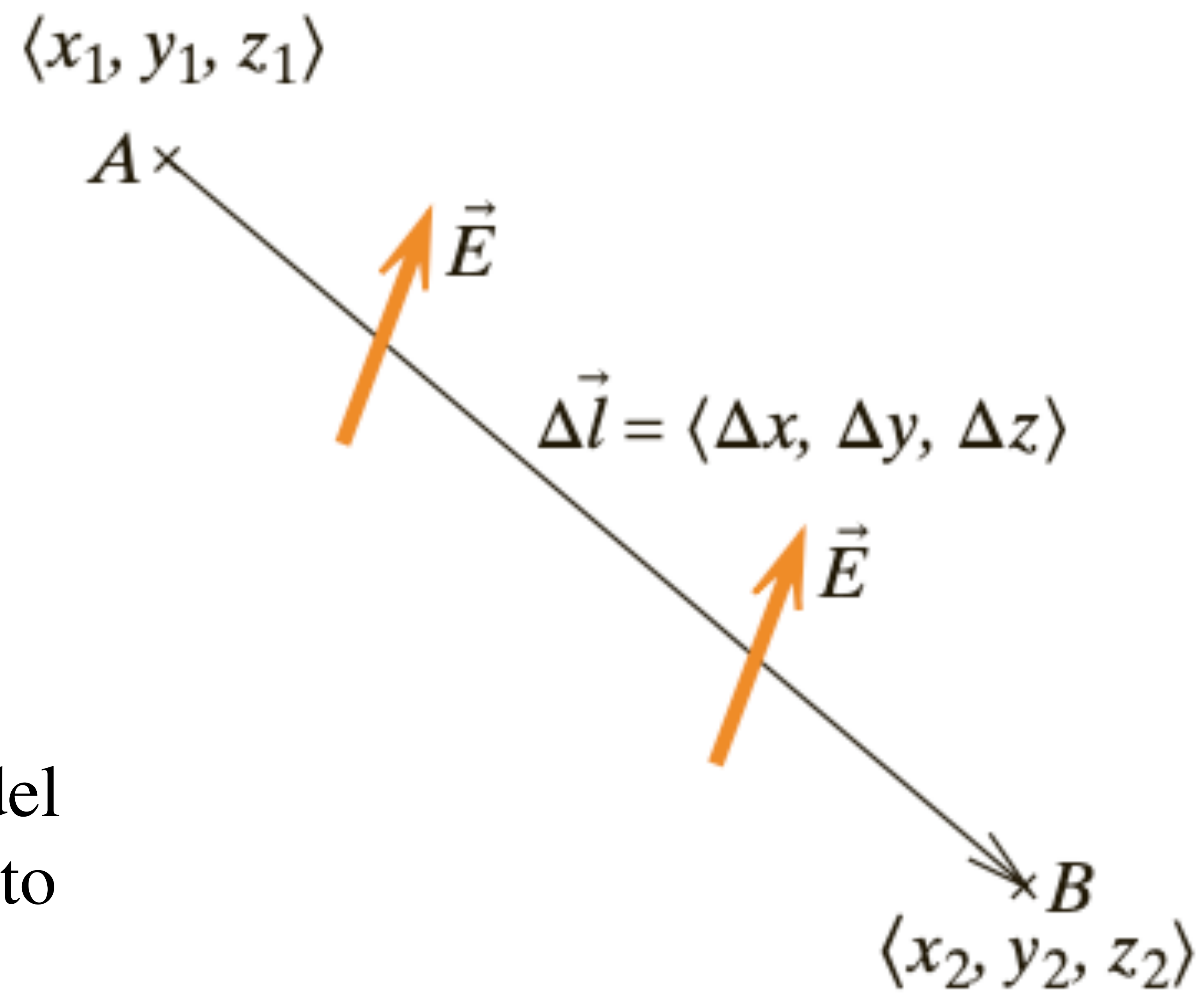
$$V = \frac{U}{q}$$

- La <u>diferencia de potencial eléctrico</u> entre los puntos *A* y *B*, V_B-V_A se define como el cambio de energía potencial de una carga *q* desplazada de *A* a *B*, dividido por la carga. Las unidades son julios por culombio, y reciben el nombre de voltios (V) en honor a Alessandro Volta.

$$\Delta V = \frac{\Delta U}{q} \qquad [1\ \mathrm{V} = 1\ \mathrm{J/\ C}]$$

- Notemos que como $\Delta V = -E x\ \Delta x$, y las unidades de ΔV son voltios, entonces las unidades del campo eléctrico deben ser voltios por metro (V/m). De hecho, esto es equivalente a los newtons por culombio, y se puede utilizar indistintamente.

- La trayectoria entre dos puntos no tiene que ser paralela al campo eléctrico. La expresión general tridimensional para el cambio de potencial eléctrico en un campo uniforme es



$$\Delta V = -(E_x\Delta x + E_y\Delta y + E_z\Delta z)$$

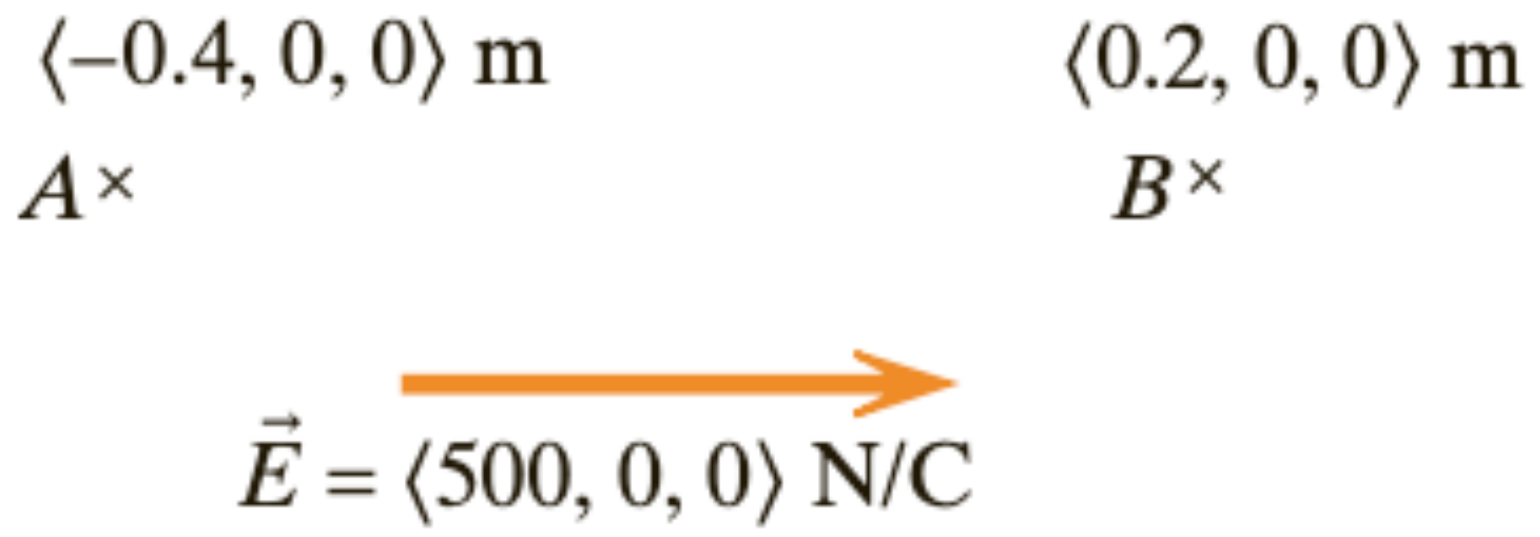
- Notemos que esta cantidad puede ser positiva o negativa, ya que cada componente del campo eléctrico puede ser positiva o negativa, y cada componente del desplazamiento también puede ser positiva o negativa.

- La cantidad ($Ex\Delta x+Ey\Delta y+Ez\Delta z$) puede escribirse como el producto punto de el campo eléctrico y el vector de desplazamiento $\Delta l = \langle \Delta x, \Delta y, \Delta z\rangle$:

$$\Delta V = -\vec{E}\cdot\Delta\vec{l} = -\langle E_x, E_y, E_z\rangle \cdot \langle \Delta x, \Delta y, \Delta z\rangle$$

Ejemplo:

- La figura muestra dos puntos, A y B, en una región con un campo eléctrico uniforme. Para una trayectoria que comienza en A y va a B, calculemos las siguientes cantidades:



(a) La diferencia de potencial eléctrico,
(b) El cambio de energía potencial para el sistema cuando un protón se mueve a lo largo de esta trayectoria
(c) El cambio de energía potencial para el sistema cuando un electrón se mueve a lo largo de esta trayectoria.

- (a) Punto inicial A y punto final B

$$\Delta\vec{l} = \langle 0,2;0;0\rangle\text{m} - \langle -0,4;0;0\rangle\text{m} = \langle 0,6;0;0\rangle\text{m}$$

$$\begin{aligned}\Delta V &= -(E_x\Delta x + E_y\Delta y + E_z\Delta z)\\ &= -\left(500\frac{N}{\text{C}}\cdot 0,6\ \text{m} + 0\cdot 0 + 0\cdot 0\right) = -300\ \text{V}\end{aligned}$$

- (b) Para el protón:

$$\Delta U = (+e)(\Delta V) = \left(1,6\times 10^{-19}\text{C}\right)(-300\ \text{V}) = -4,8\times 10^{-17}\ \text{J}$$

- (c) Para el electrón:

$$\Delta U = (-e)(\Delta V) = \left(-1,6\times 10^{-19}\text{C}\right)(-300\ \text{V}) = 4,8\times 10^{-17}\ \text{J}$$

- Resaltemos que el voltaje no es lo mismo que la energía, el voltaje es la energía por unidad de carga.
- Una batería de motocicleta y una batería de carro pueden tener el mismo voltaje (la misma diferencia de potencial entre los terminales de la batería) sin embargo, una almacena mucha más energía que la otra porque $\Delta U = q\,\Delta V$.
- La batería del carro puede mover más carga que la de la moto, aunque ambas son baterías de 12 V.

Ejemplo: una batería de moto de 12,0 V puede mover 5000 C de carga, y una batería de carro de 12,0 V puede mover 60000 C de carga ¿Cuánta energía entrega cada una?

Para la batería de la moto, $q = 5000\ C$ y $\Delta V = 12{,}0 V$. La energía total entregada por la batería de la moto es

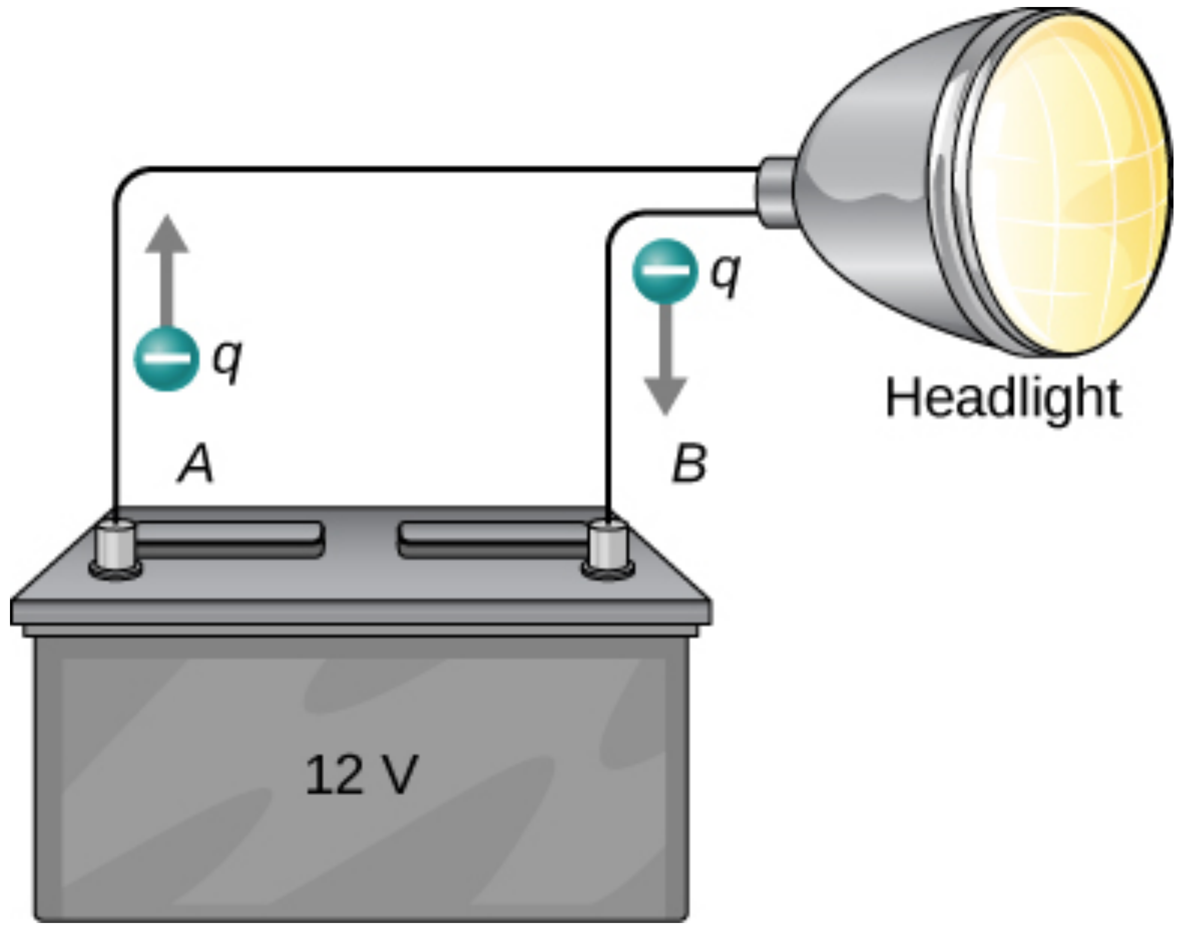
$$\Delta U_{moto} = (5000\ \mathrm{C})(12.0\ \mathrm{V}) = (5000\ \mathrm{C})(12.0\ \mathrm{J/\ C}) = 6.00 \times 10^4\ \mathrm{J}$$

Para la batería del carro, $q = 60000\ C$

$$\Delta U_{carro} = (60000\ \mathrm{C})(12.0\ \mathrm{V}) = 7.20 \times 10^5\ \mathrm{J}$$

¿Con cuánta energía una pila AAA de 1,5 V puede mover 100 C?

- Si el cambio en la energía potencial de la batería es negativo: pierde energía.
- Las baterías mueven cargas negativas (electrones).
- Las baterías repelen los electrones de sus terminales negativos (A) a través de cualquier circuito y los atraen a sus terminales positivos (B).
- El cambio de potencial es $\Delta V = V_B - V_A = +12\ V$. La carga q es negativa, por lo que $\Delta U = q\ \Delta V$ es negativa, lo que significa que la energía potencial de la pila ha disminuido cuando q se ha desplazado de A a B.



- Una batería de carro de 12,0 V alimenta un faro de 30,0 W ¿Cuántos electrones pasan por ella cada segundo?

Para encontrar el número de electrones, se calcula la carga que se mueve en 1,00 s. La carga movida está relacionada con el voltaje y la energía a través de: $\Delta U = q\ \Delta V$.

Una lámpara de 30,0 W consume 30,0 julios por segundo. Como la batería pierde energía, tenemos que $\Delta U = -\ 30\ J$ y, como los electrones van del terminal negativo al positivo, vemos que $\Delta V = +\ 12{,}0\ V$.

$$q = \frac{\Delta U}{\Delta V} = \frac{-30{,}0\ \mathrm{J}}{+12{,}0\ \mathrm{V}} = \frac{-30{,}0\ \mathrm{J}}{+12{,}0\ \mathrm{J/\ C}} = -2{,}50\ \mathrm{C}.$$

El número de electrones n_e es la carga total dividida por la carga por electrón:

$$n_e = \frac{-2.50\ \mathrm{C}}{-1.60 \times 10^{-19}\ \mathrm{C/e^-}} = 1.56 \times 10^{19}\ \text{electrones.}$$

Conservación de la energía

- La energía total de un sistema se conserva si no hay adición (o sustracción) neta debida al trabajo o a la transferencia de calor. Para las fuerzas conservativas, como la fuerza electrostática, la conservación de la energía establece que la energía mecánica es una constante.

- La energía mecánica es la suma de la energía cinética y la energía potencial de un sistema; es decir, $K + U =$ const. Una pérdida de U para una partícula cargada se convierte en un aumento de su K. La conservación de la energía se establece en forma de ecuación como:

$$K + U = \text{constante}$$

$$K_i + U_i = K_f + U_f$$

- Calculemos la velocidad final de un electrón libre acelerado desde el reposo a través de una diferencia de potencial de 100 V.

Suponiendo que el electrón es acelerado en el vacío, y despreciando la fuerza gravitatoria, toda la energía potencial eléctrica se convierte en energía cinética. Podemos identificar las formas de energía inicial y final como

$$K_i = 0, K_f = \frac{1}{2}mv^2, U_i = qV, U_f = 0$$

$$K_i + U_i = K_f + U_f$$

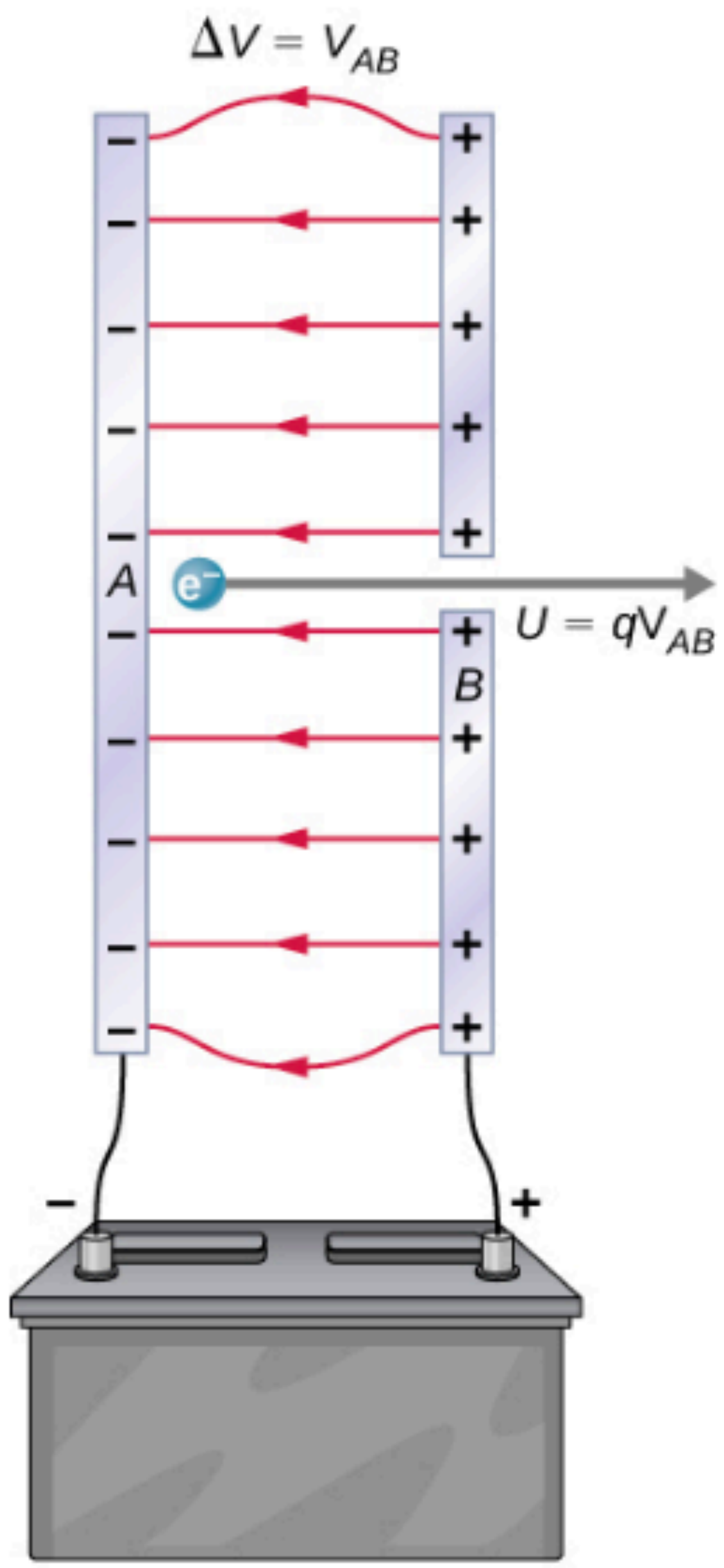
$$qV = \frac{mv^2}{2}$$

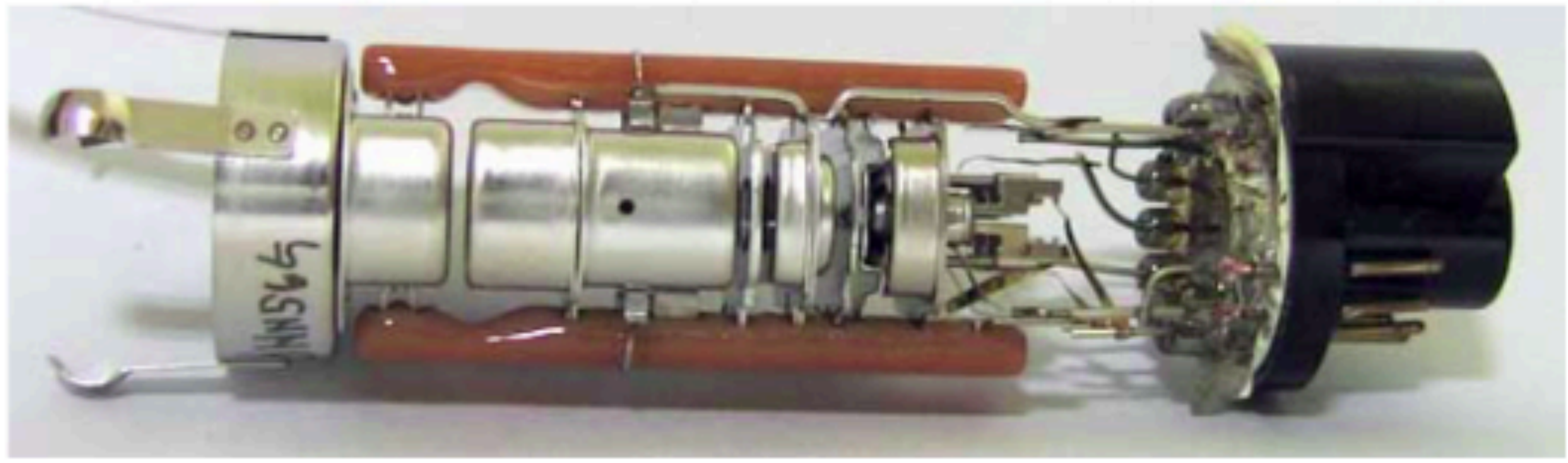
$$v = \sqrt{\frac{2qV}{m}} = \sqrt{\frac{2(-1,60 \times 10^{-19}\ \mathrm{C})(-100\ \mathrm{J/\ C})}{9,11 \times 10^{-31}\ \mathrm{Kg}}} = 5,93 \times 10^{6}\ \mathrm{m/s}.$$

Note que tanto la carga como el voltaje inicial son negativas.

El electron-volt

- En situaciones macroscópicas la energía por electrón es muy pequeña: una pequeña fracción de un julio.
- Pero a escala submicroscópica, esa energía por partícula (electrón, protón o ion) puede ser de gran importancia.
- Una fracción minúscula de un julio puede ser lo suficientemente grande como para que estas partículas destruyan las moléculas orgánicas y dañen los tejidos vivos.
- Es útil disponer de una unidad de energía relacionada con los efectos submicroscópicos.





- Resulta conveniente definir una unidad de energía llamada electrón-voltio (eV), que es la energía dada a una carga fundamental acelerada a través de una diferencia de potencial de 1 V:

$$
\begin{aligned}
1\text{eV} &= \left(1.60 \times 10^{-19}\ \text{C}\right)(1\ \text{V}) \\
&= \left(1.60 \times 10^{-19}\ \text{C}\right)(1\ \text{J}/\ \text{C}) \\
&= 1.60 \times 10^{-19}\ \text{J}
\end{aligned}
$$

- Un electrón se acelera entre dos placas metálicas cargadas. El electrón adquiere energía cinética que luego se puede convertir en otra forma de energía. Como la energía está relacionada con el voltaje mediante $\Delta U = q\Delta V$, podemos pensar en el julio como un culomb-voltio.

- Un electrón acelerado a través de una diferencia de potencial de 1 V recibe una energía de 1 eV. Por lo tanto, un electrón acelerado a través de 50 V obtiene 50 eV.

Voltaje y campo eléctrico

- Hemos explorado la relación entre el voltaje y la energía. Exploremos ahora la relación entre el voltaje y el campo eléctrico.
- Empezaremos con el caso general de un campo $\vec{E}$ no uniforme.
- Recordemos la ecuación general para la energía potencial de una carga de prueba q en el punto P respecto al punto de referencia R es:

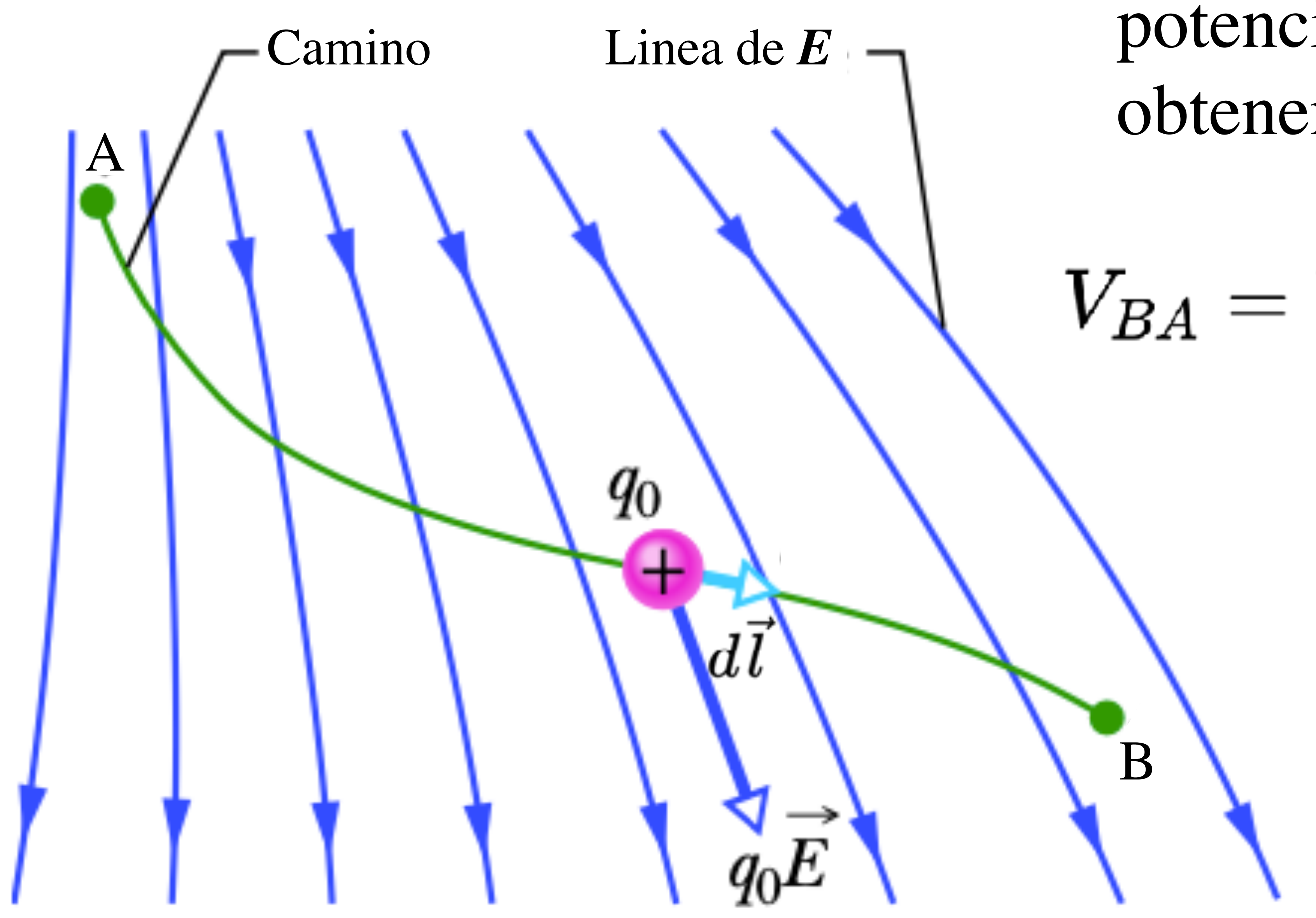
Como $V = \dfrac{U}{q}$

$$U_p = -\int_R^P \vec{F}\cdot d\vec{l} = -q\int_R^P \vec{E}\cdot d\vec{l} \quad \Rightarrow \quad V_p = -\int_R^P \vec{E}\cdot d\vec{l}$$

- Consideremos el caso especial de una carga puntual positiva q en el origen,
- El potencial causado por q a una distancia r del origen con $P = r$, $R => \infty$ y con $d\vec{l} = d\vec{r} = \hat{r}\, dr$

Como: $\vec{E} = \dfrac{kq}{r^2}\hat{r}$

$$V_r = -\int_\infty^r \frac{kq}{r^2}dr = \frac{kq}{r} - \frac{kq}{\infty} = \frac{kq}{r}$$



- De la definición de la diferencia de potencial entre los puntos A y B, obtenemos:

$$V_{BA} = V_B - V_A = -\int_A^B \vec{E}\cdot d\vec{l}$$

Campo eléctrico uniforme

- Sea un campo eléctrico uniforme $\vec{E}$ ajustado a una diferencia de potencial ΔV a través de dos placas metálicas paralelas A y B ¿Qué voltaje es necesario para producir una determinada intensidad de campo eléctrico?

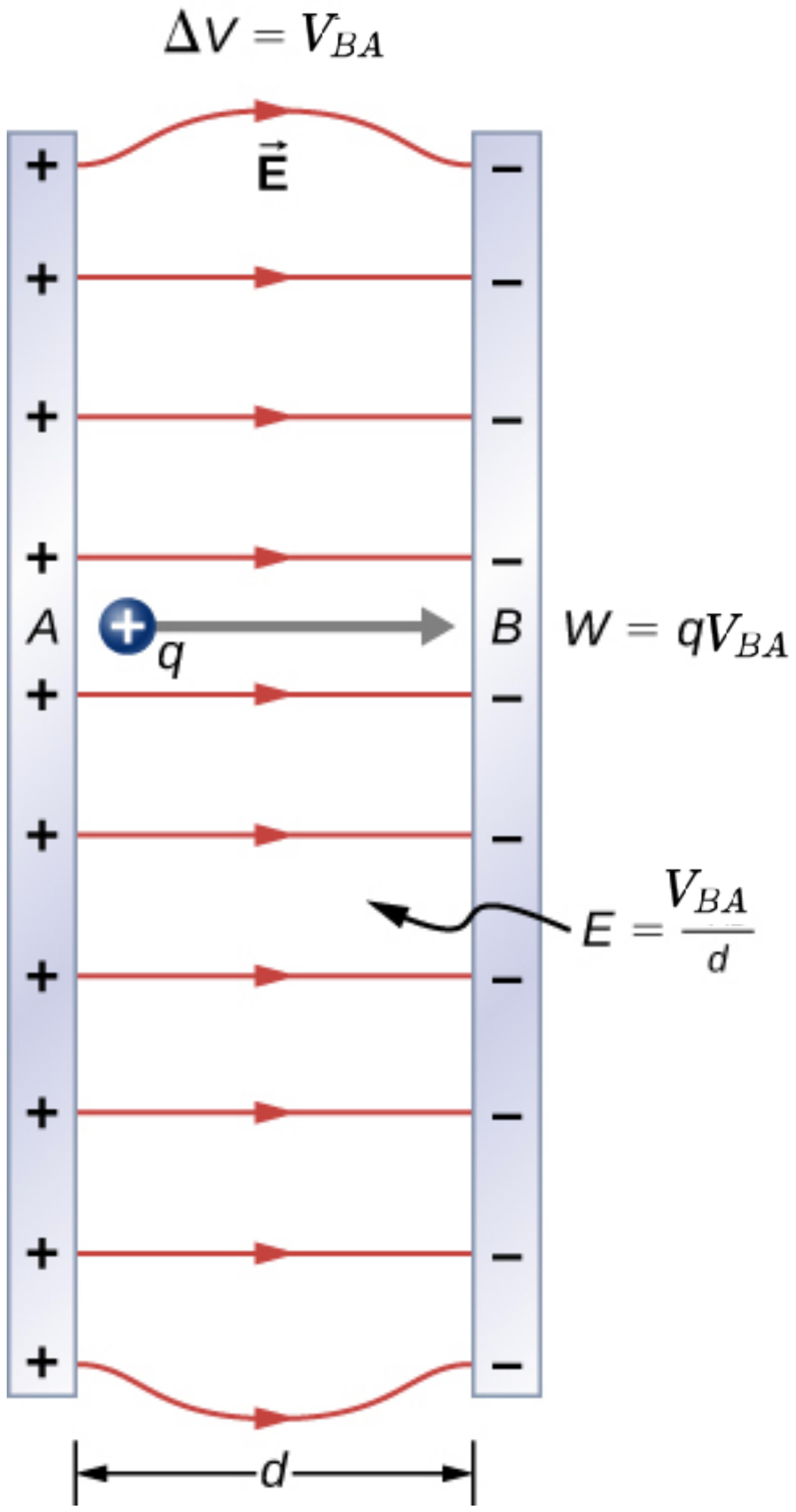
- La relación entre ΔV y $\vec{E}$ se revela calculando el trabajo realizado por la fuerza eléctrica al mover una carga del punto A al punto B.

  - El trabajo realizado por el campo eléctrico para mover una carga positiva q desde A, la placa positiva de mayor potencial, hasta B, la placa negativa de menor potencial, es

$$W = -\Delta U = -q\Delta V$$
$$\Delta V = V_B - V_A = V_{BA}$$
$$W = -qV_{BA}$$

  - El trabajo es $W = \vec{F} \cdot \vec{d} = Fd\ cos\theta$, pero $cos\theta = 1$ ya que la trayectoria es paralela al campo. Por tanto, $W = Fd = qEd$.

$$qEd = -qV_{BA}$$
$$E = -\frac{V_{BA}}{d}$$

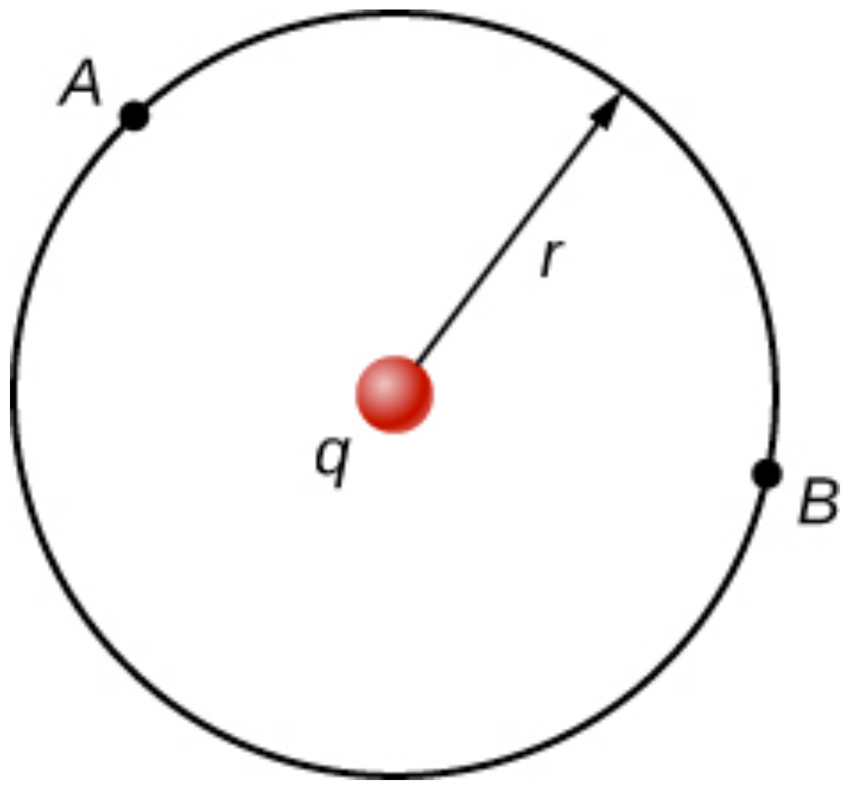


- Esta ecuación implica que las unidades de campo eléctrico son voltios por metro: $1\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{C}} = 1\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}$

Ejemplo:

- Calcular la diferencia de potencial entre dos puntos (A y B) que son equidistantes de una carga puntual q en el origen

$$\Delta V = V_B - V_A = -\int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l}$$



Debemos integrar alrededor de un arco de círculo de radio r constante entre A y B, lo que implica que:

$$d\vec{l} = r\hat{\varphi}\, d\varphi$$

El campo eléctrico sobre la circunferencia es: $\vec{E} = \frac{kq}{r^2}\hat{r}$ Pero: $\hat{r} \cdot \hat{\varphi} = 0$

$$V_B - V_A = -\int_A^B \frac{kq}{r^2}\hat{r} \cdot \hat{\varphi}\, d\varphi = 0$$

Ejemplo:

- El aire seco puede soportar una intensidad de campo eléctrico máxima de aproximadamente 3×10^6 V/m. Por encima de ese valor, el campo crea la suficiente ionización en el aire como para convertirlo en conductor produciendo una descarga o chispa que reduce el campo ¿Cuál es la tensión máxima entre dos placas conductoras paralelas separadas por 2,5 cm de aire seco?

La magnitud de la diferencia de potencial o voltaje entre las placas es la siguiente: $V_{AB} = Ed$

Por lo tanto:

$$V_{AB} = (3,0 \times 10^6 \text{ V/m})(0,025 \text{ m}) = 7,5 \times 10^4 \text{ V} = 75 \text{ kV}$$

Ejemplo

- Un cañón de electrones, formado por placas paralelas separadas por 4,00 cm, da a los electrones 25,0 keV de energía.

(a) ¿Cuál es la intensidad del campo eléctrico entre las placas?
(b) ¿Qué fuerza ejercería este campo sobre un trozo de plástico con una carga de 0,500 μC que se introduce entre las placas?

La expresión para la magnitud del campo eléctrico uniforme entre dos placas metálicas es

$$E = \frac{V_{BA}}{d}$$

Por lo tanto:

$$E = \frac{25,0\mathrm{kV}}{0,0400\ \mathrm{m}} = 6,25 \times 10^{5}\,\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}$$

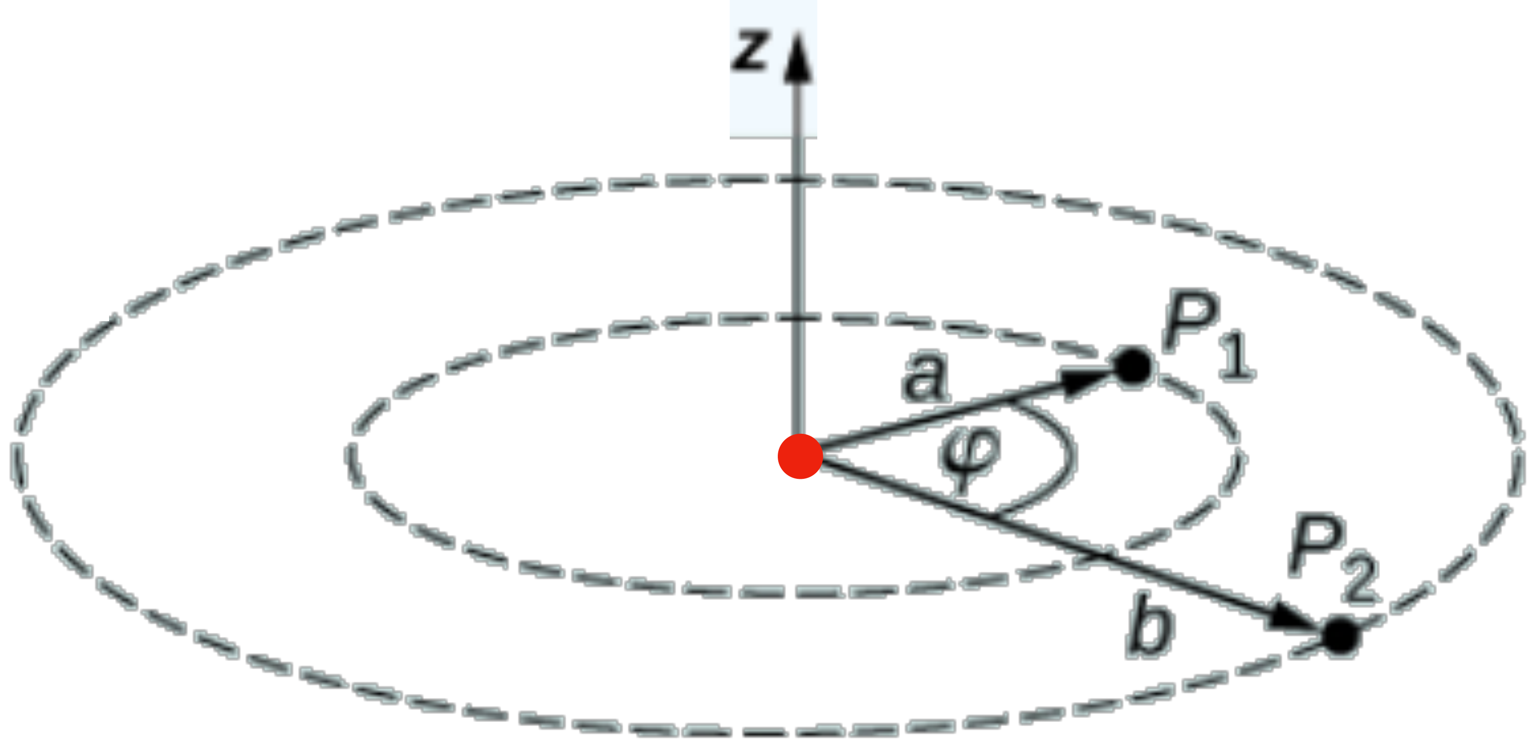
La magnitud de la fuerza sobre una carga en un campo eléctrico se obtiene a partir de la ecuación

$$F = qE$$

$$F = \left(0,500 \times 10^{-6}\ \mathrm{C}\right)\left(6,25 \times 10^{5}\ \mathrm{V/\ m}\right) = 0,313\ \mathrm{N}$$

Ejemplo

- Dada una carga puntual q=+2,0 nC en el origen, calcular la diferencia de potencial entre el punto P_1 a una distancia a = 4,0 cm de q, y P_2 a una distancia b = 12,0 cm de q.



$$d\vec{l} = d\vec{r} = \hat{r}\,dr$$

$$V_B - V_A = -\int_A^B \vec{E}\cdot d\vec{l} \;= -\int_a^b \frac{kq}{r^2}\hat{r}\cdot\hat{r}dr = -\int_a^b \frac{kq}{r^2}dr = kq\left[\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right]$$

$$= \left(8,99\times 10^9\ \mathrm{Nm}^2/\ \mathrm{C}^2\right)\left(2,0\times 10^{-9}\ \mathrm{C}\right)\left[\frac{1}{0,040\ \mathrm{m}} - \frac{1}{0,12\ \mathrm{m}}\right] = 300\ \mathrm{V}.$$

- Hemos demostrado el uso de la forma integral de la diferencia de potencial para obtener un resultado numérico. En este sistema particular, también podríamos haber utilizado la fórmula del potencial debido a una carga puntual en los dos puntos y simplemente tomar la diferencia.

3 Energía electrostática

- Recordemos que el potencial eléctrico en un punto r en un campo eléctrico estático $\vec{E}$ viene dado por la integral de línea, donde C es una trayectoria arbitraria desde algún punto de referencia fijo hasta r ⇨ $V = -\int_{\mathcal{C}} \mathbf{E} \cdot d\boldsymbol{\ell}$

- En electrostática, la ecuación de Maxwell-Faraday revela que el rotor de $\vec{E}$ es cero ⇨ $\nabla \times \vec{E} = \vec{0}$

- Por lo que el campo eléctrico es conservativo, la integral de línea anterior no depende de la trayectoria específica C, sino sólo de sus puntos finales, resultando que: ⇨ $\vec{E} = -\nabla V$

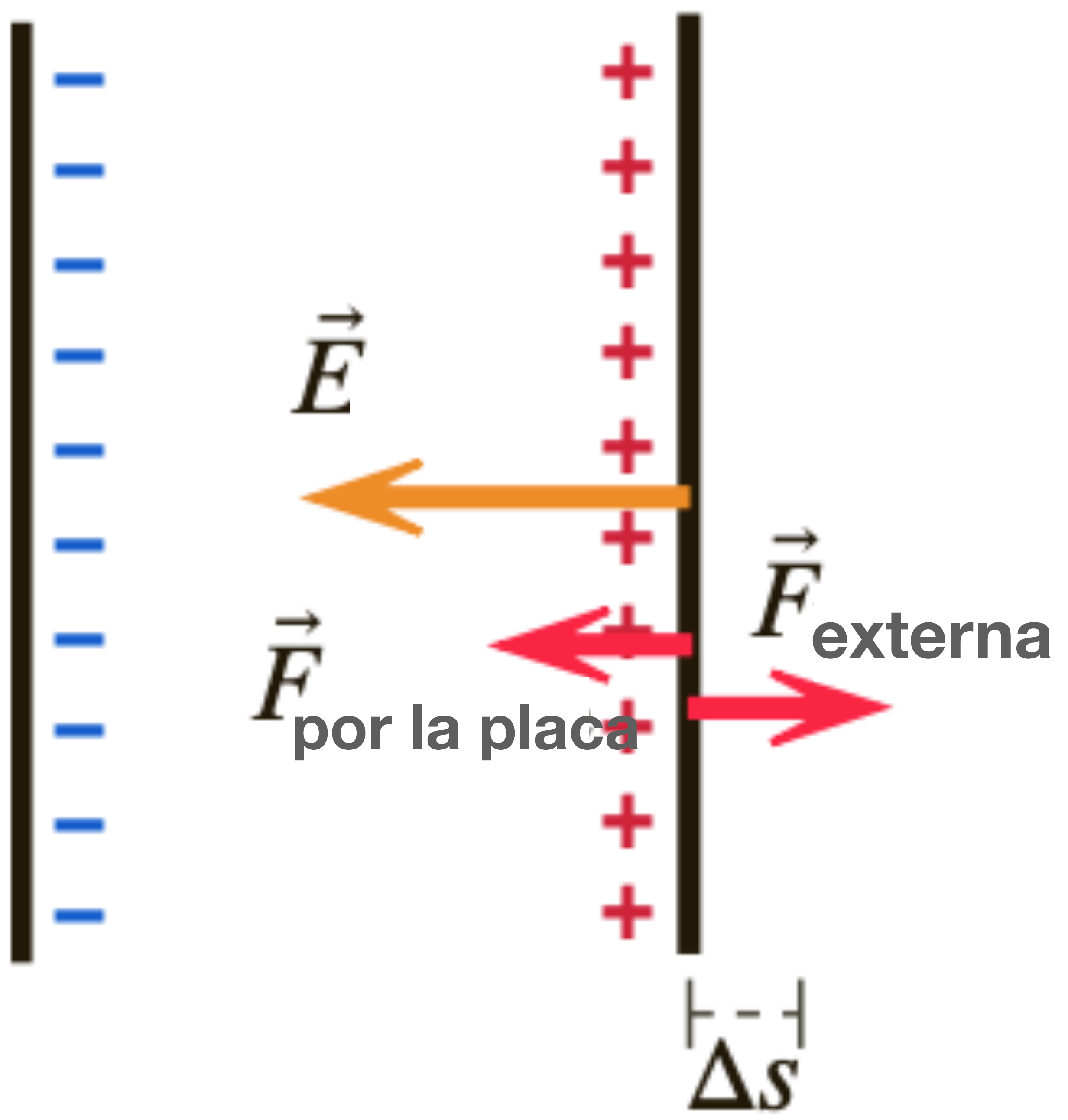
- Es decir, el campo eléctrico apunta hacia tensiones más bajas. Por la ley de Gauss, también se puede encontrar que el potencial satisface la ecuación de Poisson:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \nabla \cdot (-\nabla V) = -\nabla^2 V = \rho/\varepsilon_0$$

- El concepto de potencial eléctrico está estrechamente relacionado con la energía potencial. Una carga de prueba, q, tiene una energía potencial eléctrica dada por: ⇨ $U = qV$

- Si la partícula se mueve a través de una diferencia de potencial ΔV, el cambio en la energía potencial eléctrica es ⇨ $\Delta U = q\Delta V = q(V_f - V_i)$

Densidad de energía y campo eléctrico



Para mover una placa del capacitor hay que ejercer una fuerza igual a la que ejerce la otra placa sobre ella.

- Hemos pensado en la energía potencial eléctrica como asociada a las partículas cargadas que interactúan. Existe una visión alternativa que considera que la energía se almacena en los propios campos eléctricos.

- La fuerza que una placa del capacitor ejerce sobre la otra es igual a la carga Q de una placa por el campo producido por la otra placa, que es

$$E_{\text{una placa}} = \frac{(Q/A)}{2\varepsilon_0} \qquad \text{(para una distancia muy pequeña)}$$

- La fuerza sobre una de las placas es

$$F = Q\frac{(Q/A)}{2\varepsilon_0}$$

- Si una fuerza externa tira de la placa positiva alejándola lentamente, ejerciendo una fuerza sólo infinitesimalmente mayor que la ejercida por la otra placa, entonces, el trabajo que al mover la placa una distancia Δs se destina a aumentar la energía potencial eléctrica U:

$$\Delta U = W = Q\left(\frac{Q/A}{2\varepsilon_0}\right)\Delta s \;\Rightarrow\; \Delta U = \frac{1}{2}\varepsilon_0\left(\frac{Q/A}{\varepsilon_0}\right)^2 A\Delta s \qquad \Delta \mathrm{V} = A\Delta s$$

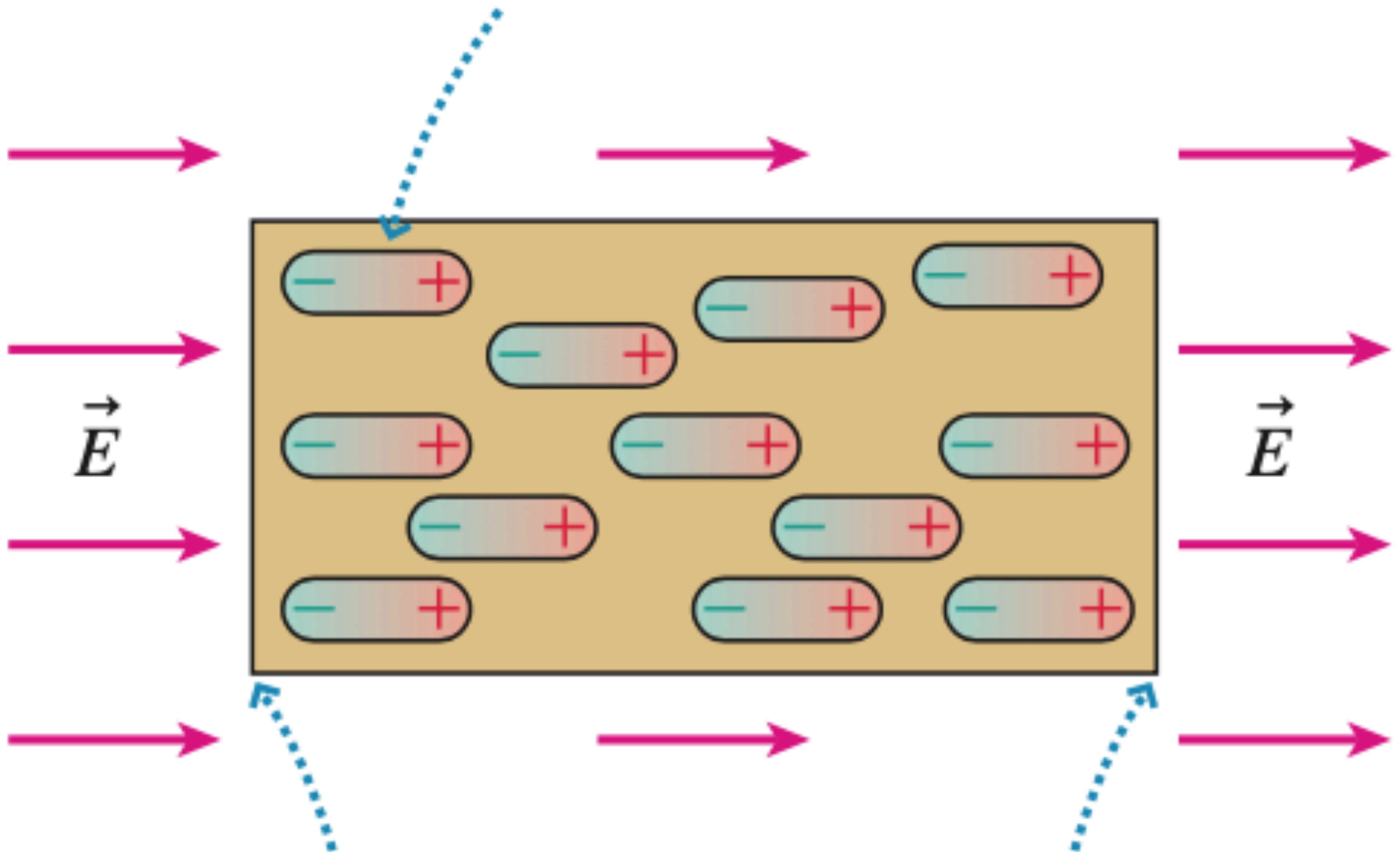
Energía por unidad de volumen $\Rightarrow$ $\dfrac{\Delta U}{\Delta \mathrm{V}} = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2$

Energía de un dipolo eléctrico

- Sabemos que la carga puede polarizar un objeto neutro, con la posibilidad de crear un dipolo eléctrico inducido.

- La carga ejerce entonces una fuerza de atracción en el extremo cercano del dipolo que es ligeramente más fuerte que la fuerza de repulsión en el extremo lejano.

Los dipolos se alinean con el campo eléctrico

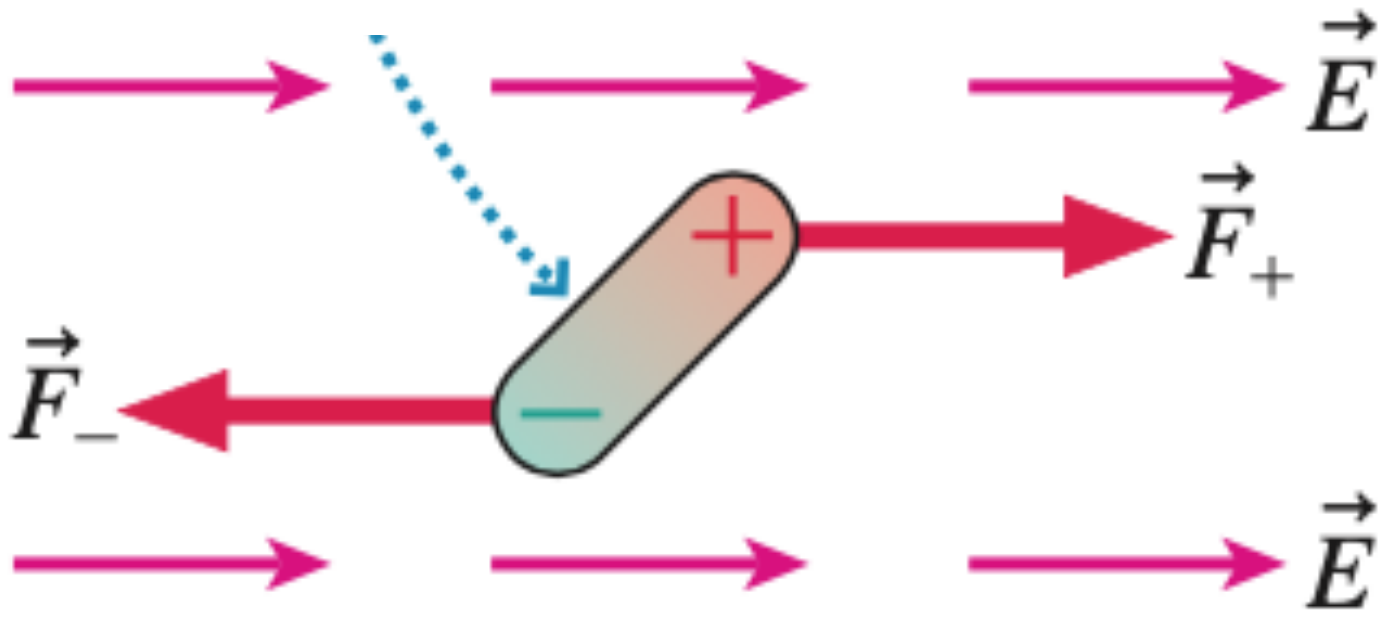


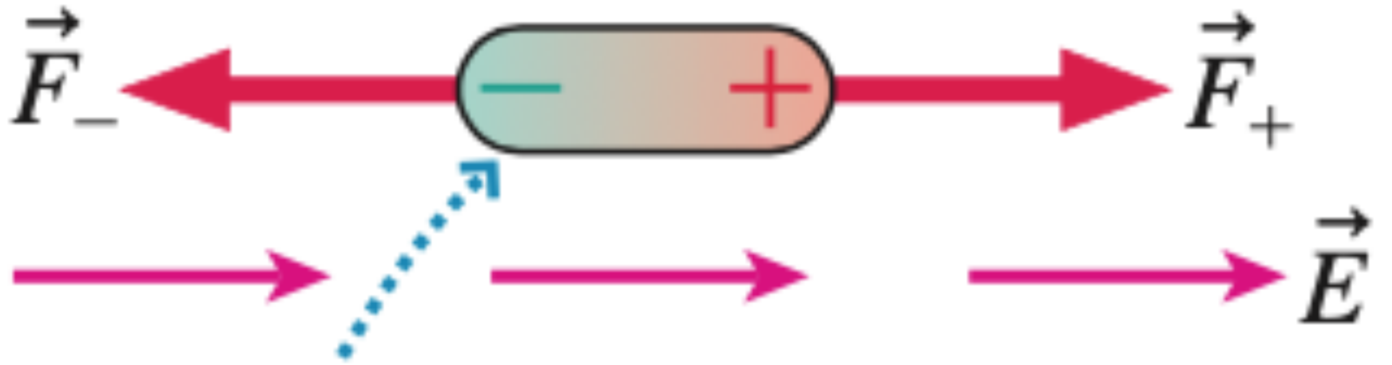
Exceso de carga negativa

Exceso de carga positiva

- Dipolos permanentes, como las moléculas de agua, en un campo eléctrico externo.

El campo eléctrico ejerce un torque sobre el dipolo





El dipolo está en equilibrio

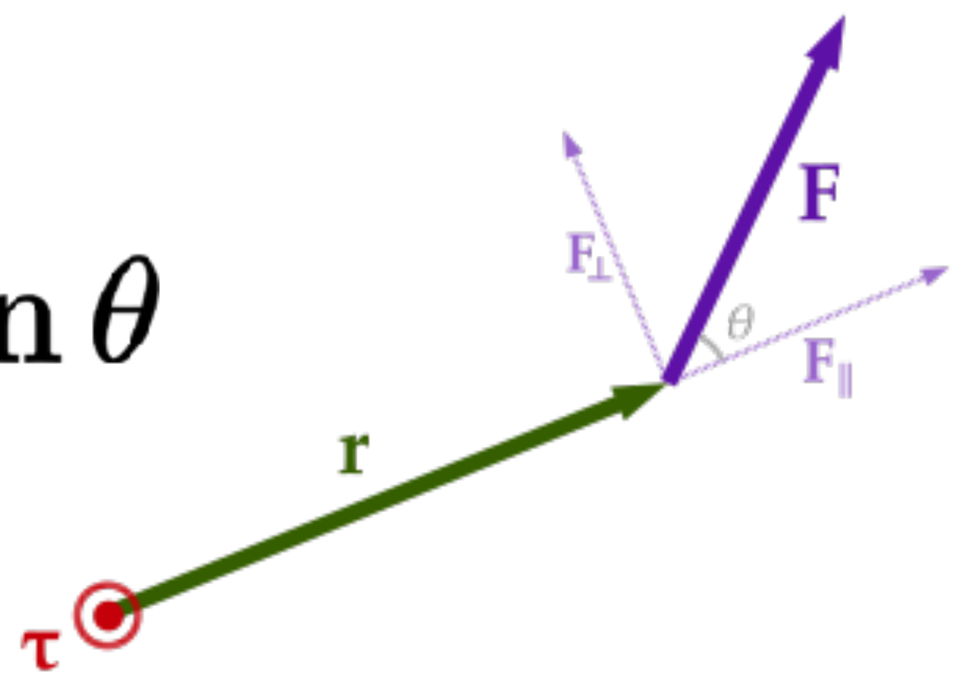
$$\vec{F}_{\text{net}} = \vec{F}_+ + \vec{F}_- = \vec{0}$$

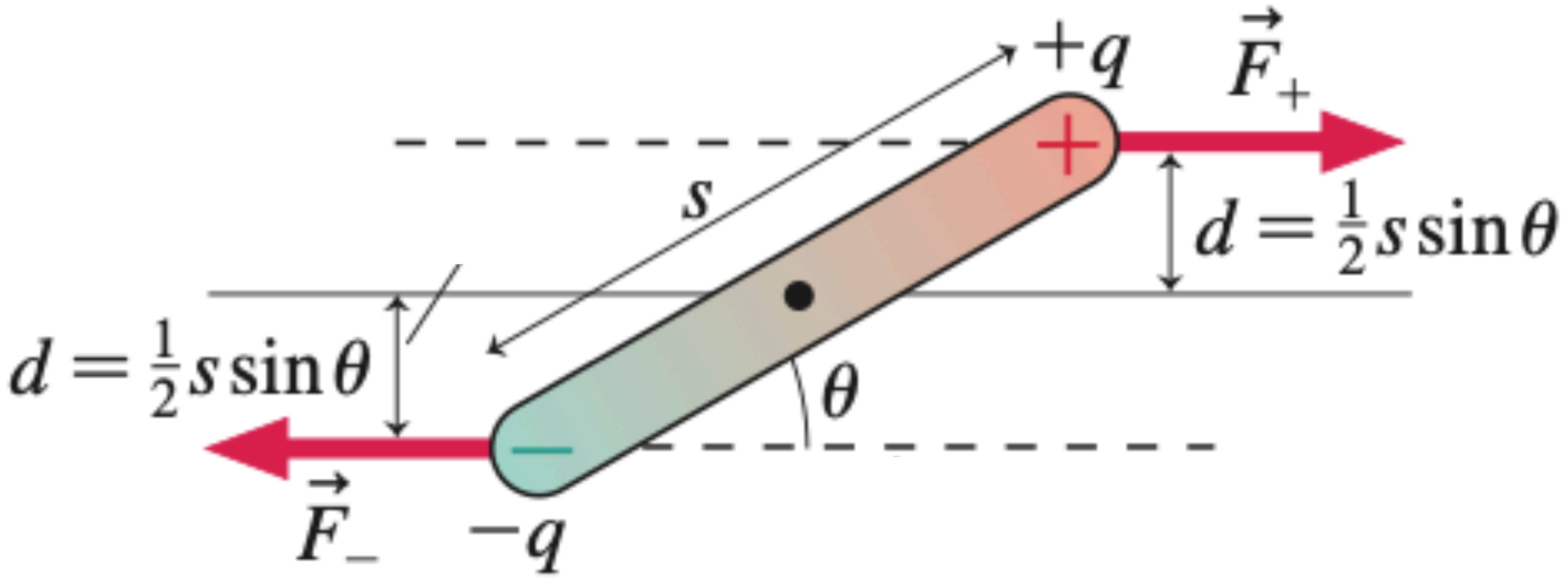
$$\vec{F}_{\text{net}} = +q\vec{E} - q\vec{E} = \vec{0}$$

- El campo eléctrico ejerce un torque sobre el dipolo y hace que éste gire

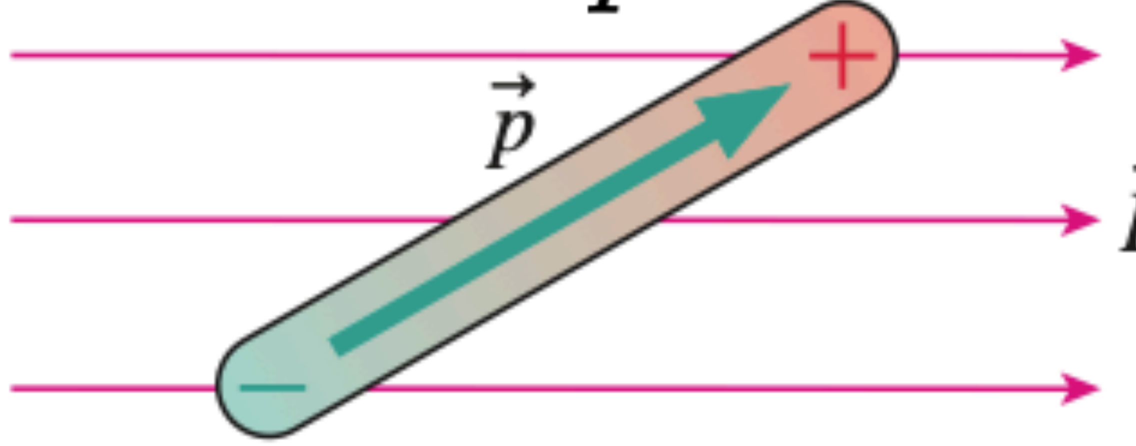
$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$$

$$\tau = rF\sin\theta$$





$$\vec{\tau} = \vec{p} \times \vec{E}$$



- Existen dos fuerzas de la misma magnitud produciendo el mismo torque

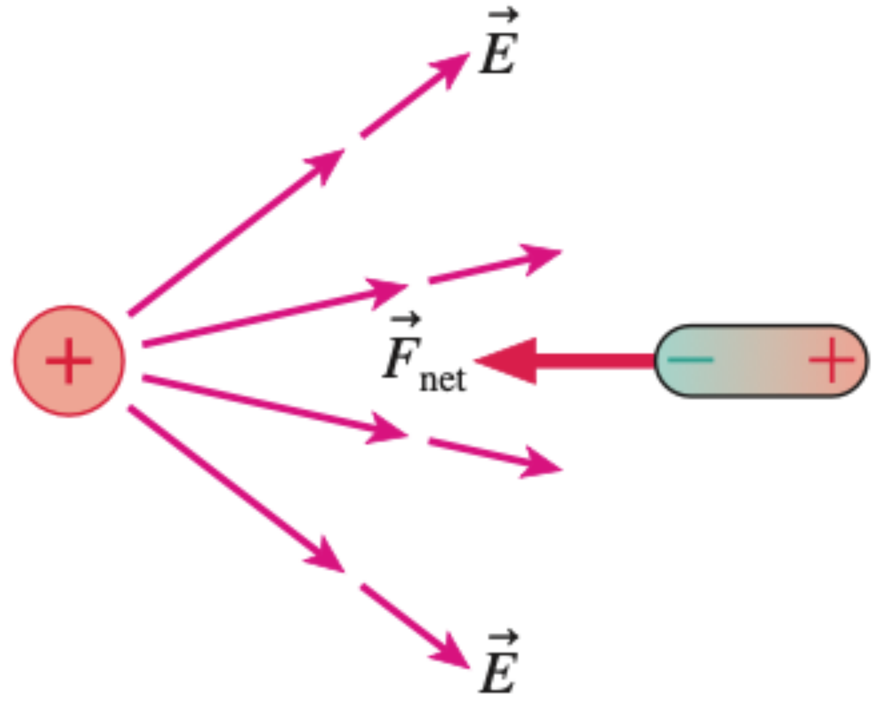
$$F_+ = F_- = qE$$

$$d = \frac{1}{2}s\sin\theta$$

$$\tau = 2 \times dF_+ = 2\left(\frac{1}{2}s\sin\theta\right)(qE) = pE\sin\theta$$

- El torque es cero cuando el dipolo está alineado con el campo eléctrico: $\theta = 0$

Dipolo en un campo eléctrico no uniforme

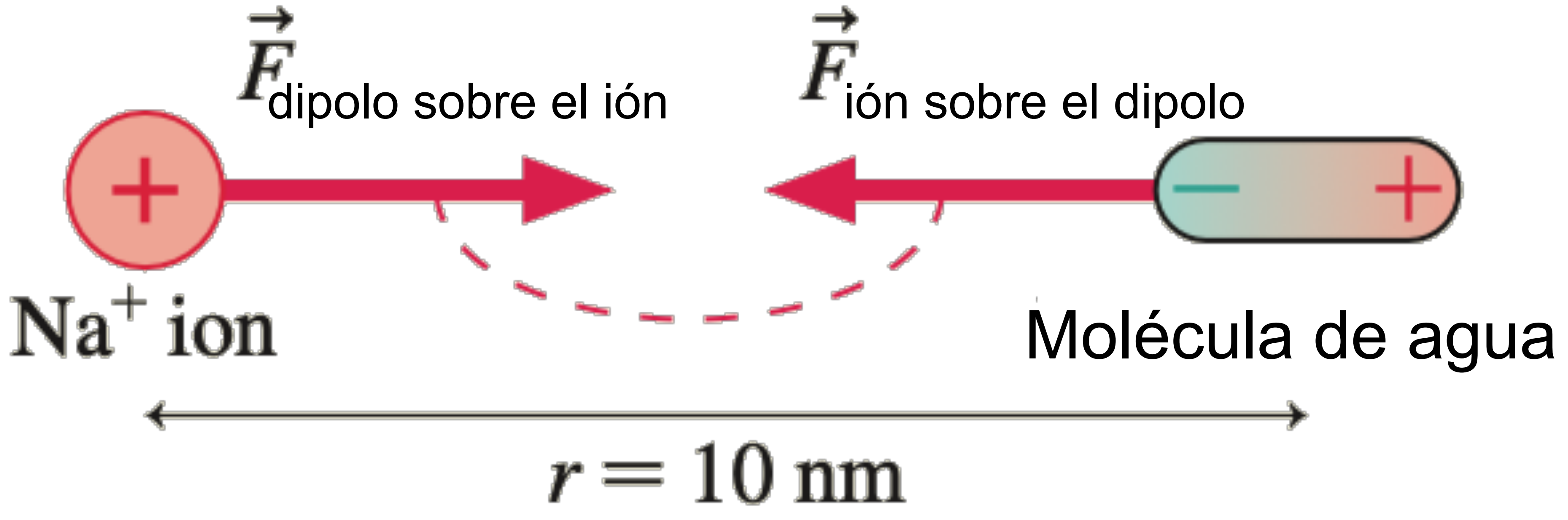


- El campo eléctrico, que depende de la distancia a la carga puntual, es más fuerte en el extremo del dipolo más cercano a la carga.
- Esto hace que se ejerza una fuerza neta sobre el dipolo.

Ejemplo

La molécula de agua H_2O tiene un momento dipolar permanente de magnitud $6,2 \times 10^{-30}$Cm.
La molécula de agua se encuentra a 10 nm de un ión Na^+ en una solución de agua salada

¿Qué fuerza ejerce el ión sobre la molécula de agua?

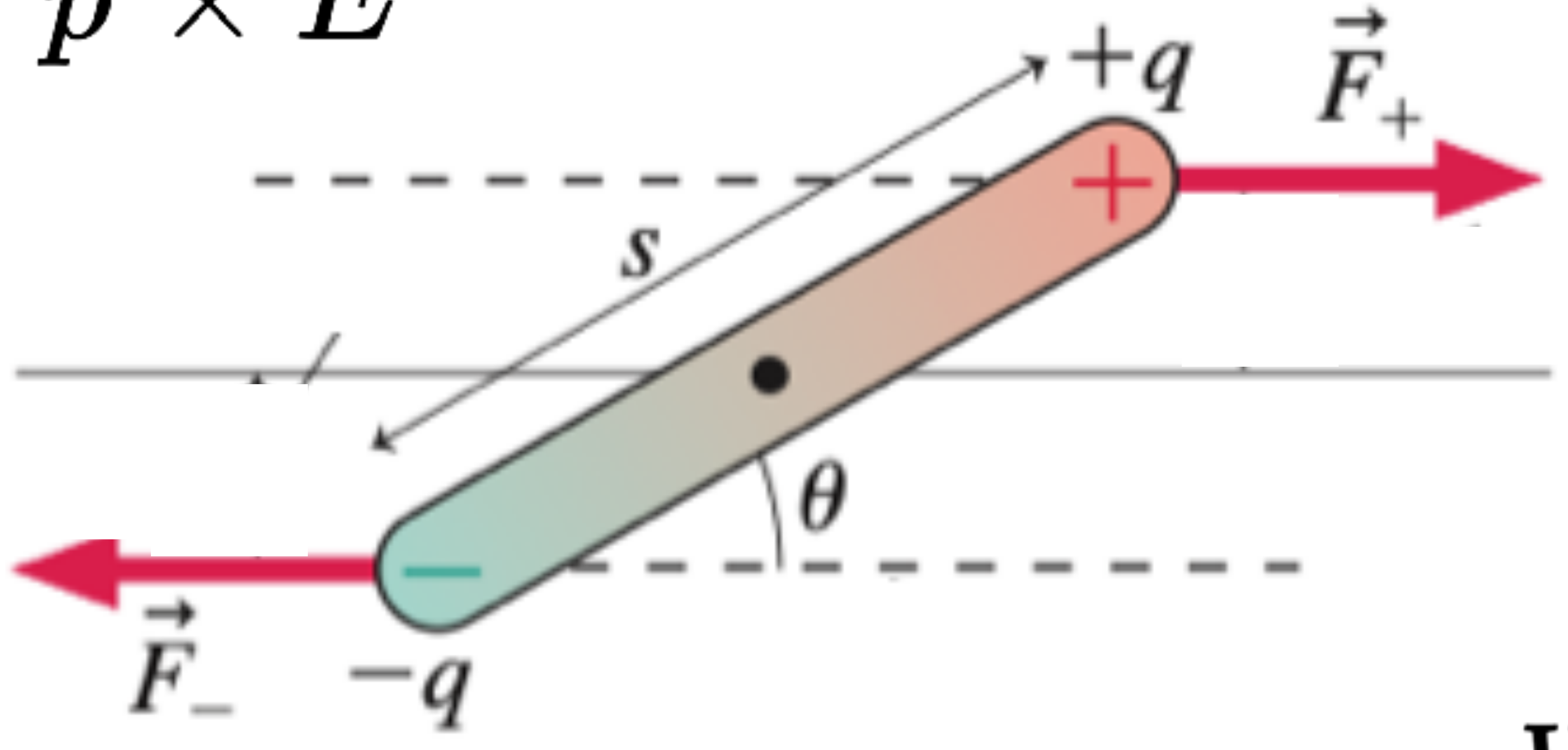


$$F = qE_{\text{dipolo}} = eE_{\text{dipolo}}$$

$$E_{\text{dipolo}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{2p}{r^3}$$

$$F_{\text{dipolo sobre el ión}} = eE_{\text{dipolo}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{2ep}{r^3} = 1.8 \times 10^{-14}\ \text{N} = F_{\text{ión sobre el dipolo}}$$

$$\vec{\tau} = \vec{p} \times \vec{E}$$



- Si el dipolo se rota lejos de su posición de equilibrio y luego se libera, ganará energía cinética rotacional a medida que intenta regresar al equilibrio, y oscilará alrededor de la posición de equilibrio.

- Cuando el dipolo se mantiene fuera de equilibrio tiene energía potencia

- Si el torque está en la dirección opuesta al aumento de θ

$$\tau = -pE\sin\theta$$

- A medida que el dipolo se alinea con el campo eléctrico externo va cambiando su energía potencial

$$W = -\Delta U$$

$$W = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \tau d\theta = \int_{\theta_1}^{\theta_2} -pE\sin\theta d\theta = -pE\int_{\theta_1}^{\theta_2} \sin\theta d\theta$$

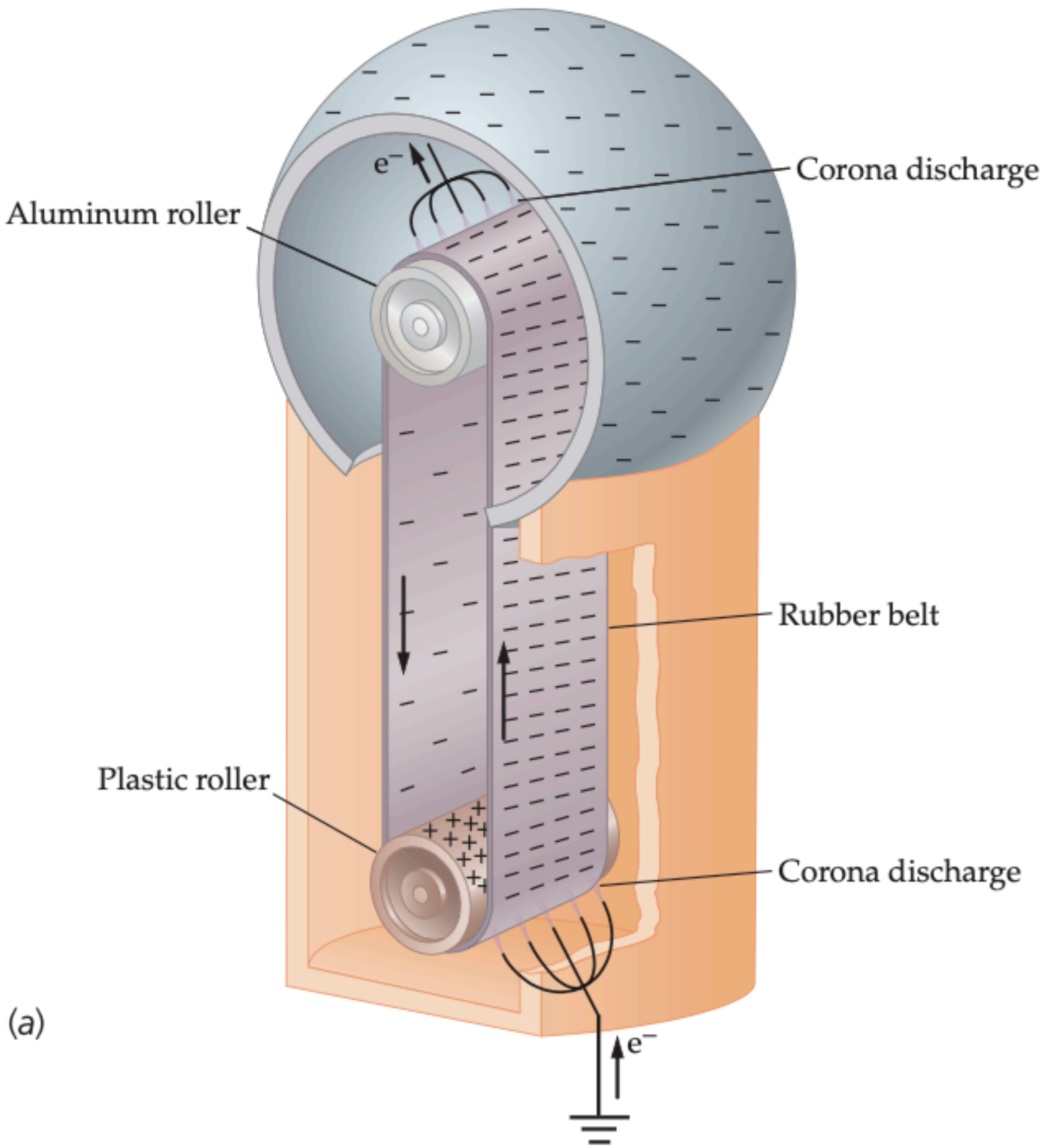
$$= pE[\cos\theta]_{\theta_1}^{\theta_2} = pE\cos\theta_2 - pE\cos\theta_1$$

$$U = -pE\cos\theta = -\vec{p}\cdot\vec{E}$$

- El signo negativo indica que estos sistemas experimentan una fuerza/torque que disminuirá su energía potencial

4 Aplicaciones de la electrostática

El generador Van de Graaff

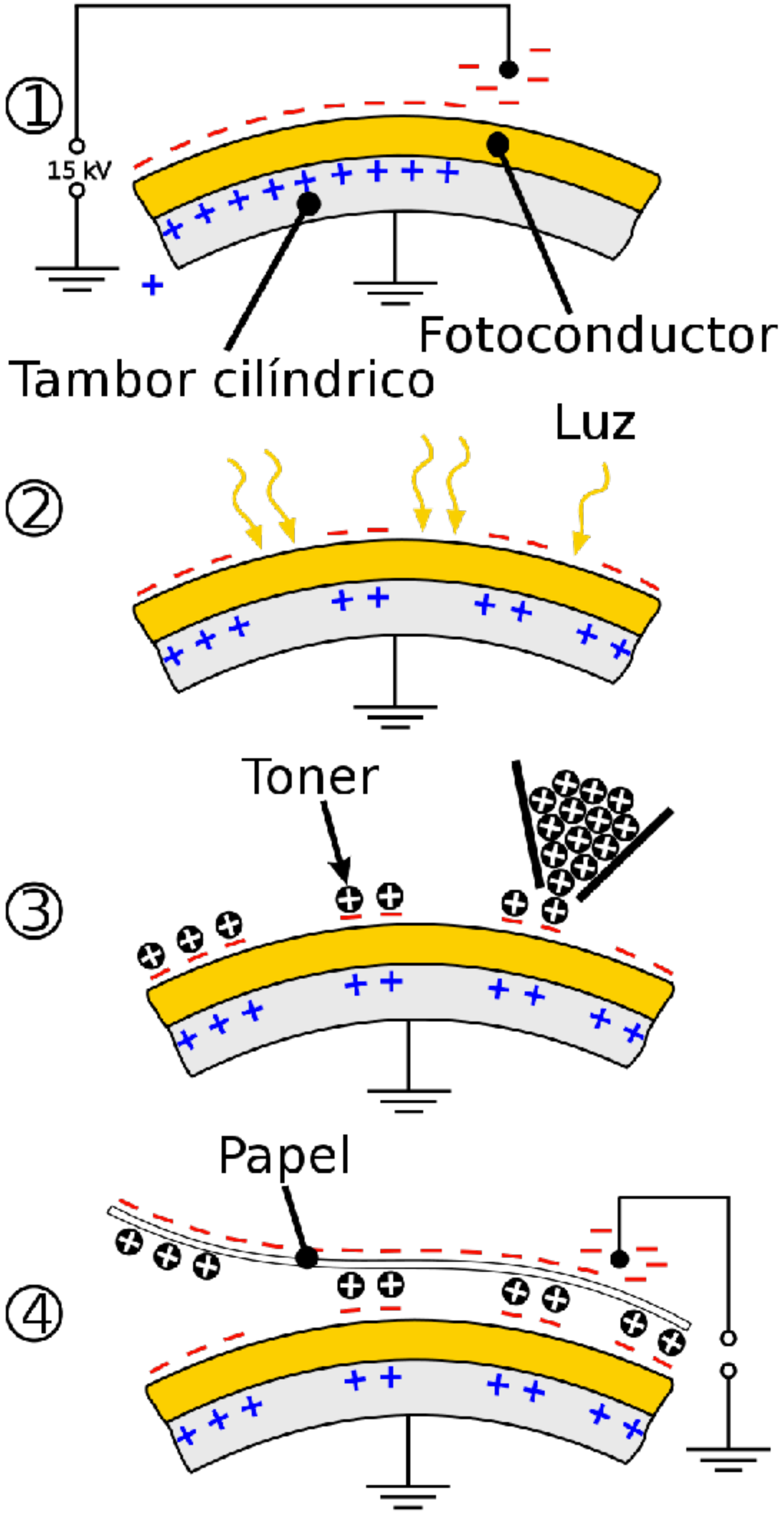


(a)

- El rodillo inferior se carga positivamente debido al contacto con la cinta en movimiento. (La superficie interior de la cinta adquiere una cantidad igual de carga negativa que se distribuye en un área mayor).
- La carga positiva del rodillo atrae electrones a las puntas del peine inferior, la carga negativa se transporta a la cinta mediante una descarga de corona.
- En el rodillo superior, la cinta cargada negativamente repele los electrones de las puntas del peine y la carga negativa se transfiere de la cinta al peine. La carga se transfiere entonces a la superficie exterior de la cúpula o esfera conductora

Xerografía

- La xerografía es un proceso de copia en seco basado en la electrostática.
- Una superficie es cargada con electricidad estática en forma uniforme.
- Dicha superficie es expuesta a luz que descarga o destruye la carga eléctrica, quedando cargadas solo aquellas áreas donde hay sombra.
- Un pigmento de polvo (tinta seca o tóner) se fija en estas áreas cargadas haciendo visible la imagen, que es transferida al papel mediante un campo electrostático.
- El uso de calor y presión fijan la tinta al papel.



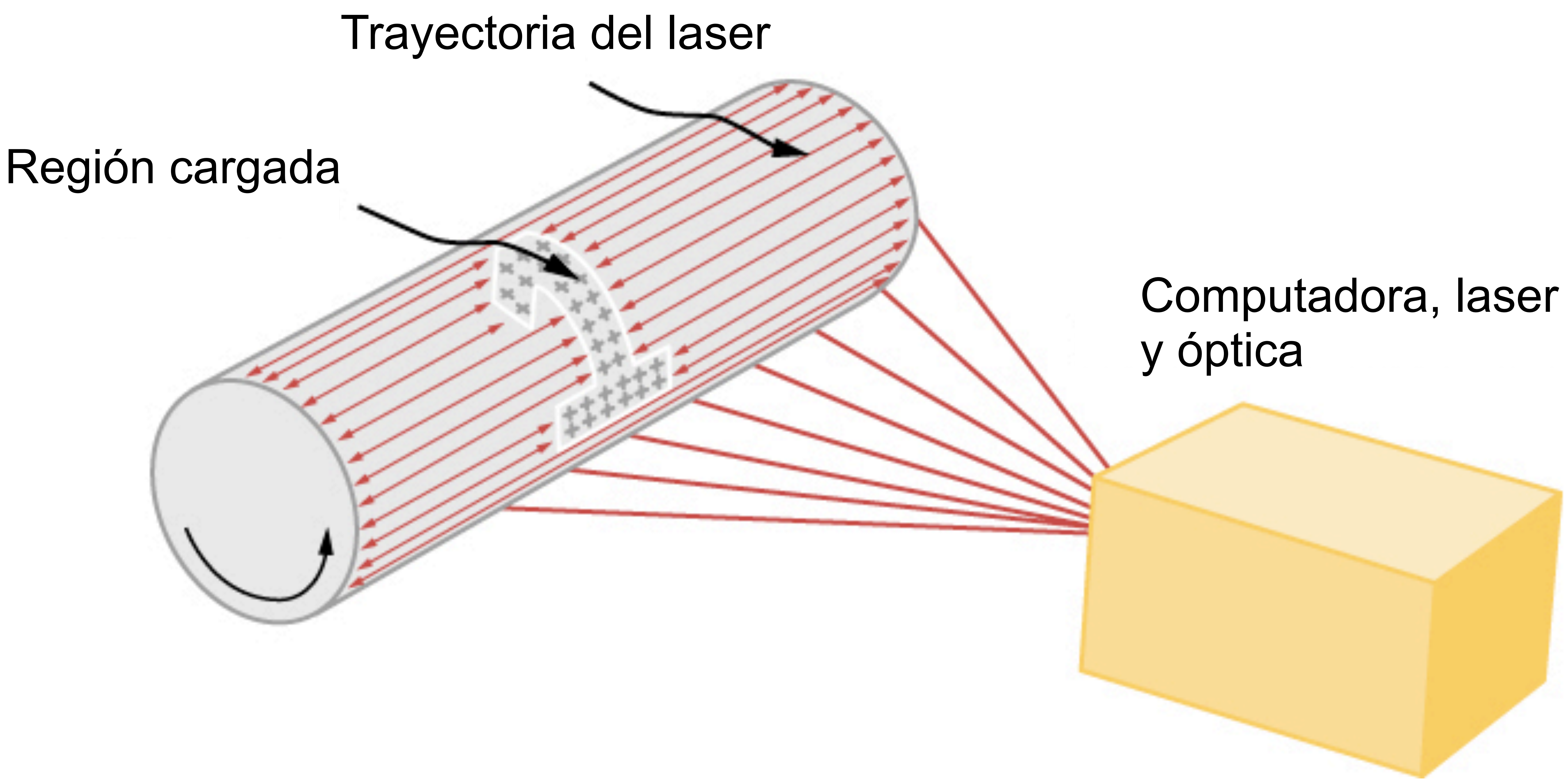
Impresoras láser

- Las impresoras láser utilizan el proceso xerográfico para crear imágenes de alta calidad en papel, empleando un láser para producir una imagen en el tambor fotoconductor, como se muestra en la figura.

- En su aplicación más común, la impresora láser recibe la salida de un ordenador, y puede lograr una impresión de alta calidad debido a la precisión con la que se puede controlar la luz láser.

- Un rayo láser se hace pasar por un tambor fotoconductor, dejando una imagen cargada positivamente.

- La luz láser puede controlarse con gran precisión, lo que permite a las impresoras láser producir imágenes de alta calidad.



Problemas propuestos

1. Una interacción entre dos partículas elementales hace que un electrón y un positrón (un electrón positivo) salgan disparados en sentidos contrarios con igual velocidad ¿Qué velocidad mínima debe tener cada uno cuando originalmente se encuentran a 100 fm (1 fm= 1 $\times 10^{-15}$ m) de distancia para poder escapar el uno del otro?

   Sol: $v = 5{,}0 \times 10^7$ m/s.

2. Supongamos que de $x_A = 0$ a $x_B = 3$ el campo eléctrico es uniforme y viene dado por $\vec{E} = \langle 400, 0, 0\rangle$N/C, y que desde $x_B = 3$ hasta $x_C = 5$ el campo eléctrico es uniforme y viene dado por $\vec{E} = \langle 1000, 500, 0\rangle$N/C ¿Cuál es la diferencia de potencial $\Delta V = V_C - V_A$?

   Sol: $\Delta V = -3200$ V.

3. Un protón se encuentra en el origen. El punto C está a $1{,}0 \times 10^{-10}$ m del protón, y el punto D está a $2{,}0 \times 10^{-8}$ m del protón, a lo largo de una línea radial hacia afuera. (a) ¿Cuál es la diferencia de potencial $V_D - V_C$? (b) ¿Cuánto trabajo se necesitaría para mover un electrón desde el punto C hasta el punto D?

   Sol: (a) $\Delta V = -14{,}3$ V (b) $W_{ext} = 2{,}3 \times 10^{-18}$ J