,

Universidad Industrial de Santander

Universidad Industrial de Santander
Escuela de Matemáticas
ÁLGEBRA LINEAL I
11 de octubre de 2023

TALLER DE REFUERZO
Vectores en $\mathbb{R}^n$
Álgebra lineal
SEA

SEA-Matemáticas

- Este material fue desarrollado por los profesores de la asignatura álgebra lineal para el disfrute de todo el quiera retarse y aprender con los problemas aquí expuestos.

VECTORES EN $\mathbb{R}^n$

Problema 1. Sean $u, v \in \mathbb{R}^n$. Pruebe que:

(a) $u \cdot v = \frac{1}{4}||u+v||^2 - \frac{1}{4}||u-v||^2$.

(b) $||u+v||^2 + ||u-v||^2 = 2||u||^2 + 2||v||^2$

(c) Sea θ el ángulo formado entre los vectores u y v entonces $\tan\theta = \dfrac{||u \times v||}{u \cdot v}$

Problema 2. La desigualdad de Cauchy-Schwarz establece que

$$|u \cdot v| \leq ||u||||v||.$$

Utilice este hecho y tome u, v adecuadamente para mostrar que:

(a) $n \leq \left(\frac{1}{a_1^2} + \frac{1}{a_2^2} + \ldots + \frac{1}{a_n^2}\right)\left(a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2\right)$

(b) $n \leq \left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_n}\right)\left(a_1 + a_2 + \ldots + a_n\right)$, con $a_1, a_2, \ldots, a_n$ positivos.

Problema 3. Explique por qué no hay vectores $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ en $\mathbb{R}^n$ tales que $\|\mathbf{u}\| = 2$, $\|\mathbf{v}\| = 3$ y $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = -7$.

Problema 4. Sean $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ vectores de $\mathbb{R}^n$ tales que $\|\mathbf{u}\| = 7$ y $\|\mathbf{v}\| = 2$. Encuentre el máximo y el mínimo valor de $\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|^2$.

Problema 5. Considere los puntos $A = (1, 0, 2), B = (-2, 1, -1)$ y $C = (3, 2, 0)$.

(a) Calcule $Proy_{\overrightarrow{BC}}(\overrightarrow{BA})$.

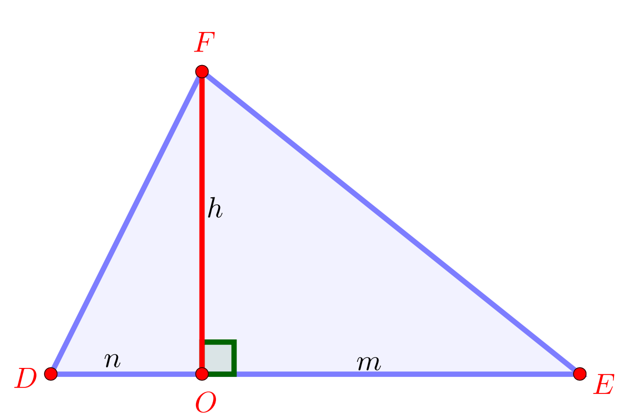
(b) Determine el perímetro y el área del triángulo ABC.

Problema 6. Considere el cuadrilátero formado por los vértices $A = (1, 2), B = (4, 1)$, $C = (2, -1)$ y $D = (x, y)$.

(a) Determine las coordenadas del vértice D tal que el cuadrilátero $ABCD$ sea un paralelogramo

(b) Calcule el área del paralelogramo $ABCD$

Problema 7. Si en la siguiente figura se cumple que $mn = h^2$, demuestre que el triángulo DEF es rectángulo.



Problema 8. Sean u y v vectores de $\mathbb{R}^n$ unitarios tales que u es ortogonal a v. Muestre que $||u - v|| = \sqrt{2}$
.

Problema 9. Considere $u = (2, -3, 5)$, $v = (3, 0, -5)$ y $w = (-1, 6, -7)$.

(a) Encontrar las componentes del vector x que satisface la expresión $x + 2u - v = 3(x - v) + 2(3v - w)$

(b) ¿Existen escalares a y b tales que $au + bv = w$? Justifique su respuesta.

Soluciones

Problema 1. a) Tomando el lado izquierdo de la igualdad

$$\frac{1}{4}||u+v||^2 - \frac{1}{4}||u-v||^2$$
$$= \frac{1}{4}(u+v)\cdot(u+v) - \frac{1}{4}(u-v)\cdot(u-v)$$
$$= \frac{1}{4}(u\cdot u + 2u\cdot v + v\cdot v) - \frac{1}{4}(u\cdot u - 2u\cdot v + v\cdot v)$$
$$= u\cdot v$$

b) Se procede de igual manera que el inciso anterior tomando $||u+v||^2 + ||u-v||^2$

c) Utilizando la identidad

$$\tan\theta = \frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta} = \frac{\frac{||u\times v||}{||u||||v||}}{\frac{u\cdot v}{||u||||v||}} = \frac{||u\times v||}{u\cdot v}$$

Problema 2. a) Tomando $u = (1/a_1, \ldots, 1/a_n)$ y $v = (a_1, \ldots, a_n)$.

b) Tomando $u = (1/\sqrt{a_1}, \ldots, 1/\sqrt{a_n})$ y $v = (\sqrt{a_1}, \ldots, \sqrt{a_n})$.

Problema 3. Supongamos que existen $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ de modo que $\|\mathbf{u}\| = 2$, $\|\mathbf{v}\| = 3$ y $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = -7$. Como $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = cos\,(\theta)\,\|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\|$, donde θ es el ángulo entre $\mathbf{u}, \mathbf{v}$, entonces $cos\,(\theta) = \frac{-7}{6} < -1$, lo cual es imposible.

Problema 4. $\|\mathbf{u}+\mathbf{v}\|^2 = (\mathbf{u}+\mathbf{v})\cdot(\mathbf{u}+\mathbf{v}) = \|\mathbf{u}\|^2 + 2(\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}) + \|\mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2 + 2cos\,(\theta)\,\|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\| + \|\mathbf{v}\|^2$. Como $-1 \leq cos\,(\theta) \leq 1$ el mínimo valor para $\|\mathbf{u}+\mathbf{v}\|^2$ se da cuando $cos\,(\theta) = -1$ y el máximo cuando $cos\,(\theta) = 1$.

Problema 5. (a) Sean $\mathbf{u} = \overrightarrow{BA} = A - B = (3,-1,3)$ y $\mathbf{v} = \overrightarrow{BC} = C - B = (5,1,1)$. Entonces

$$Proy_{\mathbf{v}}(\mathbf{u}) = \frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}}\mathbf{v} = \frac{17}{27}(5,1,1).$$

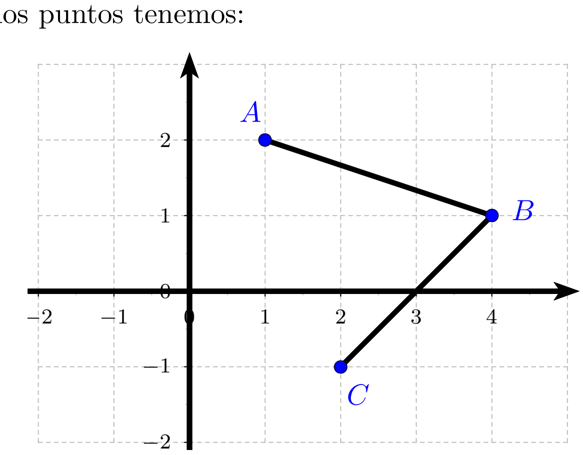
(b) Sea $\mathbf{w} = \overrightarrow{AC} = C - A = (2,2,-2)$. Entonces el perímetro del triángulo ABC es

$$\|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\| + \|\mathbf{w}\| = \sqrt{19} + \sqrt{27} + \sqrt{12}.$$

El área del triángulo ABC es

$$\frac{\|\mathbf{u}\times\mathbf{v}\|}{2} = \frac{\|(-4,12,8)\|}{2} = \frac{4\sqrt{14}}{2} = 2\sqrt{14}.$$

Problema 6. (a) Tenemos que los vértices del cuadrilátero son $A = (1,2), B = (4,1)$, $C = (2,-1)$ y $D = (x,y)$. Graficando los puntos tenemos:



Para que $ABCD$ sea un paralelogramo se debe cumplir que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$.

Como $\overrightarrow{AB} = B - A = (4,1) - (1,2) = (3,-1)$ y $\overrightarrow{DC} = C - D = (2,-1) - (x,y) - = (2-x, -1-y)$

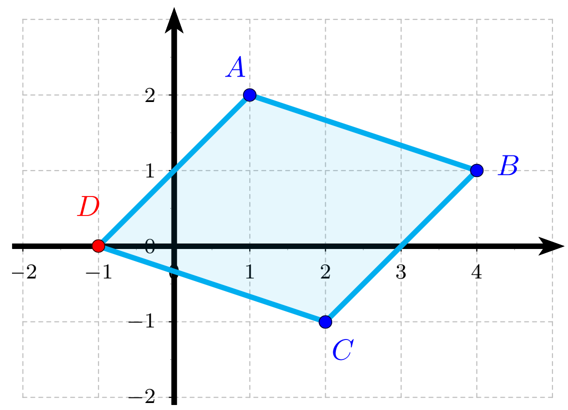
Entonces

$$(3,-1) = (2-x, -1-y)$$

Esto es, $3 = 2 - x$ y $-1 = -1 - y$.

Por lo tanto, las coordenadas del vértice D son $(-1,0)$.

(b) Graficando el paralelogramo tenemos:



El paralelogramo está formado por cuatro vectores $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{CB}$ $\overrightarrow{DB}$ y $\overrightarrow{DA}$

Tomando los vectores $\overrightarrow{DA}$ y $\overrightarrow{DB}$ para calcular el área del paralelogramo tenemos que $Area = ||\overrightarrow{DA} \times \overrightarrow{DB}||$

Como $\overrightarrow{DA} = A - D = (1,2) - (-1,0) = (2,2)$ y $\overrightarrow{DB} = B - D = (2,-1) - (-1,0) = (3,-1)$.

Luego,

$$\overrightarrow{DA} \times \overrightarrow{DB} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} \\ 2 & 2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = [2(-1) - 2(3)]\hat{k} = -8\hat{k}$$

Por lo tanto, el área del paralelogramo es $||\overrightarrow{DA} \times \overrightarrow{DB}|| = ||-8\hat{k}|| = \sqrt{0^2 + 0^2 + (-8)^2} = 8$

Problema 7. Sean $u = \overrightarrow{OE}$, $v = \overrightarrow{OD}$ y $w = \overrightarrow{OF}$, veamos que los lados DF y FE son perpendiculares. Note que $\overrightarrow{DF} = w - v$, $\overrightarrow{EF} = w - u$ y $w \cdot u = w \cdot v = 0$. Así

$$\overrightarrow{DF} \cdot \overrightarrow{EF} = (w - v) \cdot (w - u) = \|w\|^2 - w \cdot u - v \cdot w + v \cdot u = \|w\|^2 + v \cdot u.$$

Por otra parte, el ángulo entre u y v es π, lo cual implica

$$v \cdot u = \|v\|\|u\| \cos(\pi) = -\|v\|\|u\|.$$

Por lo tanto

$$\overrightarrow{DF} \cdot \overrightarrow{EF} = \|w\|^2 + v \cdot u = \|w\|^2 - \|v\|\|u\| = h^2 - nm = 0.$$

Problema 8. Por definición de norma de un vector se tiene que

$$\|u - v\| = \sqrt{(u - v) \cdot (u - v)}$$

Así,

$$\|u - v\|^2 = (u - v) \cdot (u - v) = u \cdot u - 2(u \cdot v) + v \cdot v = \|u\|^2 - 2(u \cdot v) + \|v\|^2$$

Como u y v son vectores unitarios entonces $\|u\| = 1 = \|v\|$. Además, se tiene que u es ortogonal a v, esto entonces, $u \cdot v = 0$.

Luego,

$$\|u - v\|^2 = 1 - 2(0) + 1 = 2$$

Por lo tanto,

$$\|u - v\| = \sqrt{2}$$

Problema 9. a) Se tiene que $u = (2,-3,5)$, $v = (3,0,-5)$ y $w = (-1,6,-7)$, x son vectores que cumplen:

$$x + 2u - v = 3(x - v) + 2(3v - w)$$

Desarrollando el producto por escalar en el lado derecho de la igualdad se tiene:

$$x + 2u - v = 3x - 3v + 6v - 2w$$

Luego,

$$x - 3x = -2u + v - 3v + 6v - 2w$$

$$-2x = 2u + 4v - 2w$$

$$x = -u - 2v + w$$

Por lo tanto,

$$x = -(2,-3,5) - 2(3,0,-5) + (-1,6,-7)$$

$$x = (-2,3,-5) + (-6,0,10) + (-1,6,-7) = (-9,9,-12)$$

b) Tenemos los vectores $u = (2,-3,5)$, $v = (3,0,-5)$ y $w = (-1,6,-7)$ y debemos encontrar los escalares a y b que cumplan con

$$au + bv = w$$

Desarrollando el lado izquierdo de la igualdad tenemos:

$$a(2,-3,5) + b(3,0,-5) = (-1,6,-7)$$
$$(2a,-3a,5a) + (3b,0,-5b) = (-1,6,-7)$$
$$(2a+3b,-3a,5a-5b) = (-1,6,-7)$$

Por igualdad de vectores se tiene que:

$$2a + 3b = -1, \; -3a = 6, \; 5a - 5b = -7$$

De la segunda ecuación se concluye que $a = -2$
Reemplazando $a = -2$ en la primera ecuación se tiene: $b = \frac{-1}{3} - \frac{-2}{3}(-2) = 1$
Reemplazando $a = -2$ y $b = 1$ en la tercera ecuación, se debe cumplir que $5(-2) - 5(1) = -7$
Como $-15 \neq -7$ entonces no existen escalares a y b que cumplan $au + bv = w$.