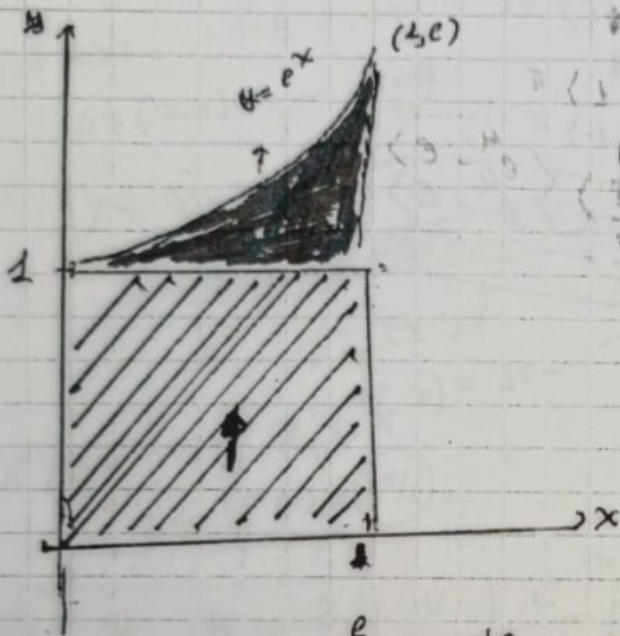


4. (10 pts) Evalúe la integral

$$\int_0^1 \int_0^1 \sin(e^x) dx dy + \int_1^e \int_{\ln y}^1 \sin(e^x) dx dy.$$



$$\int_0^1 \int_0^1 \sin(e^x) dy dx$$

$$\int_0^1 \sin(e^x) (y)_0^1 dx$$

$$= \int_0^1 e^x \sin(e^x) dx$$

$$p = e^x \wedge dp = e^x dx \rightarrow \int_1^e \sin(p) dp = -\langle \cos p \rangle_1^e = -\langle \cos e - \cos 1 \rangle_1^e$$

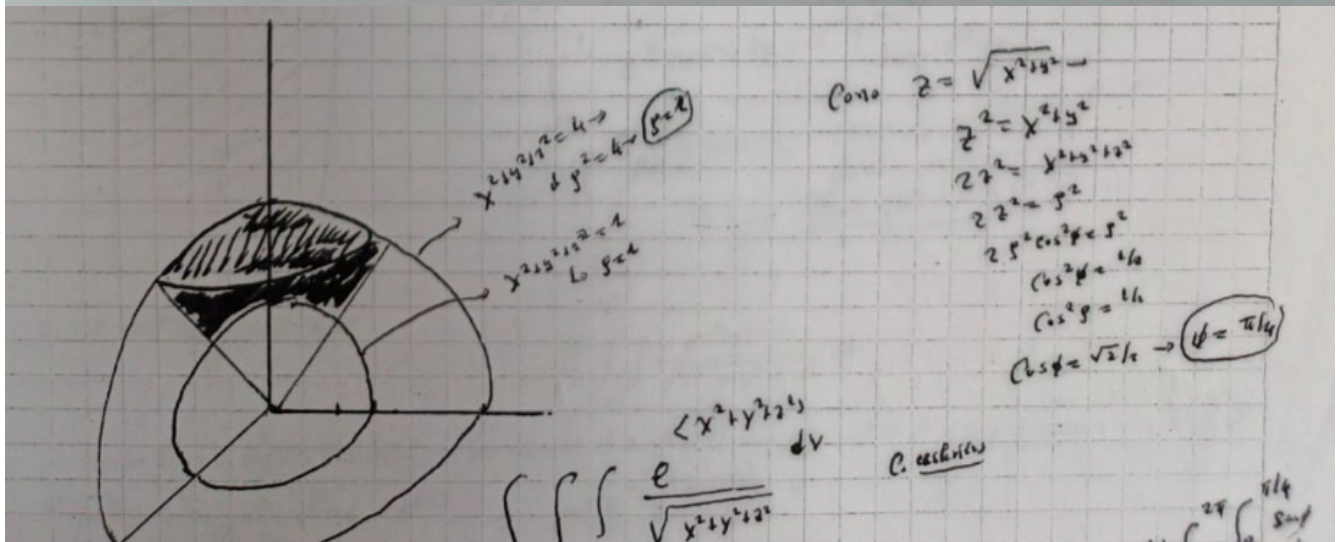
$$= \cos 1 - \cos e$$

$$= \cos 1 - \cos e^x$$

$$= \boxed{\cos 1 - \cos e^x}$$

IV. Utilice el cambio de variables a coordenadas polares para calcular

$$\int_0^1 \int_{\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} \frac{x^2}{x^2+y^2} dy dx + \int_1^2 \int_0^{\sqrt{4-x^2}} \frac{x^2}{x^2+y^2} dy dx.$$



Problema 3. Considere el sólido entre las esferas $x^2 + y^2 + z^2 = 4$, $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ y dentro del cono de un manto $z = \sqrt{x^2 + y^2}$.

(a) $[0, 2]$ Bosqueje el sólido.

(b) $[0, 6]$ Establezca el volumen del sólido usando coordenadas cartesianas, cilíndricas y esféricas.

(c) $[0, 5]$ Calcule el volumen del sólido en el sistema (del ítem anterior) que usted considere más apropiado.

(estudiar coordenadas esfericas, polares)

I. Encuentre y clasifique los puntos críticos de la función $f(x, y) = xye^{-x^2-y^2}$.

II. Determine el volumen máximo de una caja rectangular, con lados paralelos a los planos coordenados, que puede ser inscrita en el elipsoide $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$, $a > 0, b > 0, c > 0$.

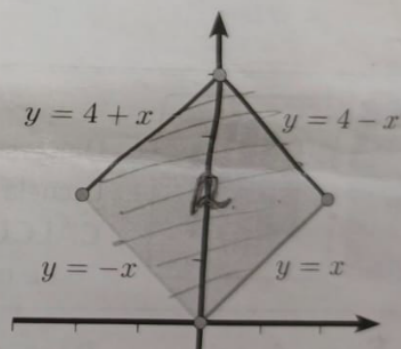
III. Evalúe la integral

$$\int_0^1 \int_y^1 \frac{1}{1+x^4} dx dy.$$

Problema 2. [1,0] Evaluar la integral

$$\iint_{\mathcal{R}} (y^2 - x^2) e^{(x+y)^2} dA,$$

siendo \mathcal{R} el cuadrilátero que se muestra en la figura.



Problema 2. VALOR: 1,0.

Encuentre el volumen del sólido acotado por la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ dentro del cilindro $x^2 + y^2 + 2x = 0$.

Solución

Problema 1. VALOR: 2,0.

Bosqueje la región de integración y calcule paso a paso las siguientes integrales.

(a) $\int_0^1 \int_0^e \operatorname{sgn}(y - e^x) dy dx.$

(b) $\int_0^4 \int_{\sqrt{x}}^2 \frac{1}{y^3 + 1} dy dx.$

Sin hacer

Problema 3. [10 puntos] Evalúe la integral doble $\iint_R xy dA$, haciendo el cambio de variables apropiado; donde R es la región del primer cuadrante acotada por las líneas $y = x$ y $y = 3x$ y las hipérbolas $xy = 1$ y $xy = 3$.

Nota: para simplificar los cálculos se puede usar el hecho de que $\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \left(\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} \right)^{-1}$.

Problema 5. [8 puntos] Evalúe la integral de línea $\oint_C (x - y) dx + (x + y) dy$, donde $C(t) = (2 \cos(t), 2 \sin(t))$, con $0 \leq t \leq 2\pi$.

Determine si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas.

(a) $\int_{-\pi}^{\pi} \int_0^1 e^{x^2+y^2} \operatorname{sen}(y) dx dy = 0$

(b) El área de la región comprendida entre los círculos $r = \cos(\theta)$ y $r = \operatorname{sen}(\theta)$ es $\frac{\pi - 2}{8} u^2$.