Facultad de Ciencias
Escuela de Matemáticas

Primer taller de refuerzo

Curvas y superficies

Cálculo III - 20254

Fecha: Agosto 2025

Nombre: ______________________ Código: ______________ Grupo: ______________

1. Calcular todos los límites (en caso de que existan):

   (a) $\lim_{t\to 0}\left\langle t^3+1, \cos^2 t, \dfrac{\sin t}{t}\right\rangle$

   (b) $\lim_{t\to 0}\left\langle e^{-1/t^2}, 2t+9, t|t|\right\rangle$

2. Halle la ecuación del plano que pasa por los puntos $(2,3,-2)$, $(3,4,2)$ y $(1,-1,0)$ y realice un bosquejo usando *GeoGebra*.

3. Identifique la superficie cuadrática dada por la ecuación $x^2-y+z^2=0$. Bosqueje la superficie utilizando GeoGebra.

4. Una muestra representativa de las trazas xz de una superficie cuadrática S es dada por la *figura 1*. Se sabe además que la traza $z=-3$ de S es como se muestra en la *figura 2* . Determine la ecuación que describe a la superficie S. Realice un bosquejo de la superficie usando *GeoGebra*.

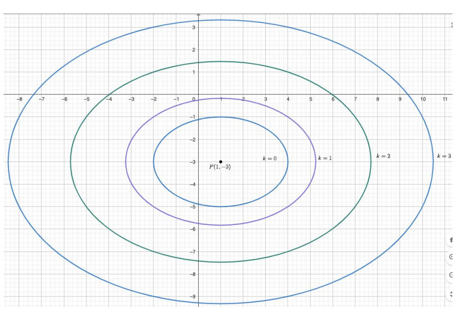

Figura 1

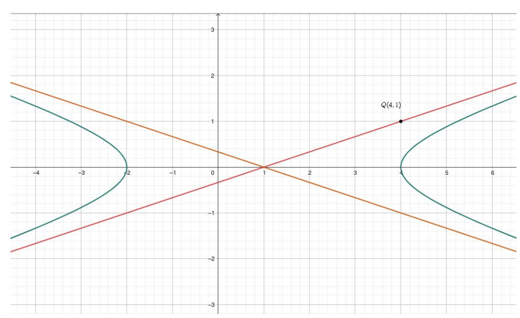

Figura 2

5. Encuentre una ecuación para la superficie que consta de todos los puntos que son equidistantes del punto $(-1,0,0)$ y el plano $x=1$. Realice un bosquejo de la superficie.

6. Encuentre la longitud de un arco de la cicloide

$$F(t)=\langle r(t-sen(t)),\ r(1-\cos(t))\rangle\,,\quad \text{donde } r>0.$$

7. Para la siguiente función vectorial $\mathbf{r}(t)$:

$$\mathbf{r}(t) = \left\langle t^2\cos(t),\ t\sin(t),\ \ln(1+t^2)\right\rangle$$

   (a) Halle la derivada de $\mathbf{r}(t)$, $\mathbf{r}'(t)$
   (b) Calcule la velocidad de la curva en el tiempo $t = 1$, es decir, evalúa $\mathbf{r}'(1)$
   (c) Encuentre la aceleración de la curva en el tiempo $t = 1$, $\mathbf{r}''(1)$
   (d) Calcule el valor de la longitud de la curva desde $t = 0$ hasta $t = 2$
   (e) ¿En qué valor de t la velocidad de la curva es paralela al eje z?

8. Encuentre una función vectorial $r(t)$ que satisfaga las condiciones indicadas:

$$r''(t) = -3t^{-1/2}\, i + \sec^2(t)\, j - \ sen(t)\, k, \quad r'(0) = -i + j - k, \quad r(0) = -2i + 3k$$

9. Una partícula parte del origen con velocidad inicial $\hat{i} - \hat{j} + 3\hat{k}$. Su aceleración es $a(t) = 6t\hat{i} + 12t^2\hat{j} - 6t\hat{k}$. Calcule la función posición.

10. Dos partículas siguen las trayectorias definidas por las funciones vectoriales $r_1(t) = \langle t, t^2, t^3\rangle$ y $r_2(t) = \langle 1+2t, 1+6t, 1+14t\rangle$ respectivamente.
   (a) ¿Es posible que las partículas se choquen?
   (b) ¿Sus trayectorias se intersectan?

11. Demuestre que el lugar geométrico (puntos en el espacio que cumplen con las condiciones pedidas) en los puntos (x, y, z) en $\mathbb{R}^3$ cuya distancia al punto $A = (2, -3, 5)$ es dos veces la distancia de (x, y, z) al punto $B = (-4, 1, 2)$ es una esfera. Además, determine su centro, radio . Realice un bosquejo usando *GeoGebra*

12. Deducir la ecuación de la superficie cilíndrica de generatriz paralela al vector $(1, 1, 3)$ y cuya directriz es

$$\Gamma : \begin{cases} x^2 = 4y \\ z = 0 \end{cases}$$

13. La curva llamada *"folium de Descartes"* está definida por las ecuaciones paramétricas:

$$x(t) = \frac{3t}{1+t^3}\ , \qquad y(t) = \frac{3t^2}{1+t^3}$$

   (a) Muestre que el *folium de Descartes* es simétrico respecto a la recta $y = x$. ¿En dónde se interseca la curva con esta recta?
   (b) Encuentre los puntos sobre la curva donde las rectas tangentes son horizontales o verticales.
   (c) Demuestre que la recta $y = -x - 1$ es una asíntota oblicua al *folium de Descartes*
   (d) Demuestre que una ecuación cartesiana de esta curva es del *folium de Descartes* $x^3 + y^3 = 3xy$
   (e) Trace la curva *"folium de Descartes"*.

⊡