

Pilar Tormos Juan  
Antonio Lova Ruiz

**INVESTIGACIÓN  
OPERATIVA  
PARA INGENIEROS**

**EDITORIAL  
UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE VALÈNCIA**

Primera edición 2003 ▪ Reimpresión, 2016

© Pilar Tormos Juan  
Antonio Lova Ruiz

© 2003 de la presente edición: Editorial Universitat Politècnica de València

*Distribución:* Telf. 963 877 012 / [www.lalibreria.upv.es](http://www.lalibreria.upv.es) / Ref. 0591\_02\_01\_03

Imprime: Byprint Percom, sl.

Depósito Legal: V-3439-2003  
ISBN: 978-84-9705-430-0

Queda prohibida la reproducción, la distribución, la comercialización, la transformación y, en general, cualquier otra forma de explotación, por cualquier procedimiento, de la totalidad o de cualquier parte de esta obra sin autorización expresa y por escrito de los autores.

Impreso en España

## ÍNDICE

<b>1. INTRODUCCIÓN A LA INVESTIGACIÓN OPERATIVA .....</b>	<b>5</b>
1.1. LA TOMA DE DECISIONES.....	7
1.2. RESEÑA HISTÓRICA DE LA INVESTIGACIÓN OPERATIVA .....	7
1.3. DEFINICIÓN DE INVESTIGACIÓN OPERATIVA .....	10
1.4. CARACTERÍSTICAS DE LA INVESTIGACIÓN OPERATIVA.....	11
1.5. TÉCNICAS DE INVESTIGACIÓN OPERATIVA: APLICACIONES .....	12
1.6. FASES DE LA APLICACIÓN DE LAS TÉCNICAS DE INVESTIGACIÓN OPERATIVA .....	16
1.7. LA INGENIERÍA INFORMÁTICA Y LA INVESTIGACIÓN OPERATIVA .....	22
1.8. BIBLIOGRAFÍA .....	23
ANEXO 1: ANTECEDENTES DE LA INVESTIGACIÓN OPERATIVA .....	24
<b>2. FORMULACIÓN DE MODELOS .....</b>	<b>31</b>
2.1. DEFINICIÓN DE MODELO.....	33
2.2. FORMA GENERAL DE UN MODELO MATEMÁTICO .....	33
2.3. MODELOS MATEMÁTICOS: CLASIFICACIÓN.....	35
2.4. RECOMENDACIONES PARA LA FORMULACIÓN DE MODELOS ....	36
2.5. ALGUNOS MODELOS .....	37
2.6. BIBLIOGRAFÍA .....	40
2.7. CASOS PRÁCTICOS .....	41
ANEXO 1: INVESTIGACIÓN OPERATIVA: ENTREVISTA CON GEORGE B. DANTZIG.....	43
<b>3. CONCEPTOS BÁSICOS DE PROGRAMACIÓN LINEAL: EL     MÉTODO GRÁFICO.....</b>	<b>45</b>
3.1. EJEMPLO PROTOTIPO: UN PROBLEMA DE PRODUCCIÓN .....	47
3.1.1. VARIABLES .....	47
3.1.2. FUNCIÓN OBJETIVO Y RESTRICCIONES .....	48
3.2. REGIÓN FACTIBLE Y SOLUCIÓN GRÁFICA .....	50
3.3. VARIABLES DE HOLGURA .....	54
3.4. ANÁLISIS DE SENSIBILIDAD .....	56
3.4.1. A.S. COEFICIENTES DE LA FUNCIÓN OBJETIVO ( $C_i$ ) .....	56
3.4.2. A.S. VECTOR RECURSOS ( $b_i$ ) .....	59

3.5. RESOLUCIÓN DE MODELOS CON EL SOFTWARE DE OPTIMIZACIÓN LINGO .....	62
3.6. BIBLIOGRAFÍA .....	63
3.7. EJERCICIOS PROPUESTOS .....	64
3.8. CASOS PRÁCTICOS .....	66
<b>4. SOLUCIÓN DE PROBLEMAS DE PROGRAMACIÓN LINEAL: MÉTODO SIMPLEX .....</b>	<b>69</b>
4.1. CONCEPTOS BÁSICOS DE PROGRAMACIÓN LINEAL .....	71
4.2. SOLUCIÓN: CONCEPTOS IMPORTANTES.....	74
4.3. EL MÉTODO SIMPLEX: CONCEPTOS BÁSICOS .....	76
4.4. EL MÉTODO SIMPLEX MEDIANTE ECUACIONES SIMULTÁNEAS .....	77
4.5. CRITERIOS DEL MÉTODO SIMPLEX: VARIABLE QUE ENTRA Y VARIABLE QUE SALE DE LA BASE .....	82
4.6. EL MÉTODO SIMPLEX EN FORMA DE TABLAS .....	84
4.7. ALGORITMO SIMPLEX REVISADO .....	89
4.8. ADAPTACIÓN A OTRAS FORMAS DE MODELO: VARIABLES ARTIFICIALES .....	100
4.8.1. MÉTODO SIMPLEX PENAL O DE LA 'M' GRANDE.....	101
4.8.2. MÉTODO DE LAS 2 FASES.....	107
4.8.3. COMPARACIÓN ENTRE EL MÉTODO DE LA M Y DE LAS 2 FASES.....	113
4.9. REDUCCIÓN DEL ESFUERZO COMPUTACIONAL: TÉCNICA DE LAS COTAS .....	114
4.9.1. TÉCNICA DE LA COTA INFERIOR.....	115
4.9.2. TÉCNICA DE LA COTA SUPERIOR .....	117
4.10. SITUACIONES ESPECIALES EN LA TABLA SIMPLEX.....	125
4.11. OTROS ALGORITMOS DE PROGRAMACIÓN LINEAL .....	126
4.11.1. COMPARACIÓN CON EL MÉTODO SIMPLEX .....	128
4.12. LA PROGRAMACIÓN LINEAL Y EL SOFTWARE DE OPTIMIZACIÓN .....	128
4.13. BIBLIOGRAFÍA .....	130
4.14. CASOS PRÁCTICOS .....	130
<b>5. DUALIDAD Y ANÁLISIS DE SENSIBILIDAD .....</b>	<b>137</b>
5.1. INTRODUCCIÓN .....	139
5.2. EL PROBLEMA DUAL Y LAS RELACIONES DE DUALIDAD.....	141

<b>5.3. INTERPRETACIÓN ECONÓMICA DE LAS VARIABLES DUALES EN EL ÓPTIMO.....</b>	<b>143</b>
<b>5.4. ALGORITMO SIMPLEX DUAL .....</b>	<b>144</b>
<b>5.5. ANÁLISIS POST-ÓPTIMO .....</b>	<b>147</b>
<b>5.6. ANÁLISIS DE SENSIBILIDAD.....</b>	<b>148</b>
5.6.1 ANÁLISIS DE SENSIBILIDAD DE COEFICIENTES DE LA FUNCIÓN OBJETIVO .....	150
5.6.2 ANÁLISIS DE SENSIBILIDAD DE SEGUNDOS MIEMBROS DE LAS RESTRICCIONES .....	153
5.6.3 INTRODUCCIÓN DE UNA NUEVA VARIABLE .....	156
<b>5.7. PROGRAMACIÓN PARAMÉTRICA .....</b>	<b>158</b>
5.7.1 PROGRAMACIÓN PARAMÉTRICA DE COEFICIENTES EN LA FUNCIÓN OBJETIVO .....	158
5.7.2 PROGRAMACIÓN PARAMÉTRICA DEL SEGUNDO MIEMBRO DE LAS RESTRICCIONES.....	162
<b>5.8. BIBLIOGRAFÍA .....</b>	<b>168</b>
<b>5.9. CASOS PRÁCTICOS .....</b>	<b>168</b>
<b>6. PROGRAMACIÓN ENTERA .....</b>	<b>175</b>
6.1. INTRODUCCIÓN .....	177
6.2. UN PROBLEMA ENTERO SENCILLO .....	178
6.3. ALGUNAS APLICACIONES DE PROGRAMACIÓN ENTERA.....	179
6.4. TÉCNICAS DE PROGRAMACIÓN ENTERA: ALGORITMO DE BIFURCACIÓN Y ACOTACIÓN .....	182
6.4.1. INTRODUCCIÓN.....	182
6.4.2. RESOLUCIÓN GRÁFICA .....	183
6.4.3. RESOLUCIÓN ALGEBRAICA.....	188
6.4.4. CRITERIOS DE SELECCIÓN DEL NODO A BIFURCAR.....	193
6.4.5. CRITERIOS DE SELECCIÓN DE LA VARIABLE A ACOTAR.....	194
6.5. DESARROLLOS RECIENTES EN PROGRAMACIÓN ENTERA.....	195
6.6. BIBLIOGRAFÍA .....	197
6.7. CASOS PRÁCTICOS .....	197
<b>7. INTRODUCCIÓN A OTRAS TÉCNICAS DE INVESTIGACIÓN OPERATIVA .....</b>	<b>203</b>
7.1. GESTIÓN DE PROYECTOS.....	205
7.1.1. INTRODUCCIÓN.....	205
7.1.2. FASES DE LA GESTIÓN DE PROYECTOS.....	206
7.1.3. TÉCNICAS DE GESTIÓN DE PROYECTOS .....	208

7.1.4. PROGRAMACIÓN DE PROYECTOS: EL MÉTODO DEL CAMINO CRÍTICO .....	209
7.1.5. SOFTWARE DE GESTIÓN DE PROYECTOS .....	212
<b>7.2. PROGRAMACIÓN MULTICRITERIO.....</b>	<b>212</b>
7.2.1 CONCEPTOS BÁSICOS.....	213
7.2.2 PRINCIPALES ENFOQUES MULTICRITERIO .....	215
7.2.3 INTRODUCCIÓN A PROGRAMACIÓN MULTI OBJETIVO.....	215
7.2.4 INTRODUCCIÓN A PROGRAMACIÓN POR METAS.....	220
<b>7.3. BIBLIOGRAFÍA .....</b>	<b>222</b>

# CAPÍTULO 1

## *INTRODUCCIÓN A LA INVESTIGACIÓN OPERATIVA*

1.1. LA TOMA DE DECISIONES .....	7
1.2. RESEÑA HISTÓRICA DE LA INVESTIGACIÓN OPERATIVA.....	7
1.3. DEFINICIÓN DE INVESTIGACIÓN OPERATIVA.....	10
1.4. CARACTERÍSTICAS DE LA INVESTIGACIÓN OPERATIVA .....	11
1.5. TÉCNICAS DE INVESTIGACIÓN OPERATIVA: APLICACIONES.....	12
1.6. FASES DE LA APLICACIÓN DE LAS TÉCNICAS DE INVESTIGACIÓN OPERATIVA.....	16
1.7. LA INGENIERÍA INFORMÁTICA Y LA INVESTIGACIÓN OPERATIVA .	22
1.8. BIBLIOGRAFÍA.....	23
ANEXO 1: ANTECEDENTES DE LA INVESTIGACIÓN OPERATIVA .....	24





### **1.1. LA TOMA DE DECISIONES**

La toma de decisiones estratégicas es la principal responsabilidad del gerente de una empresa. El proceso de toma de decisiones, generalmente empieza cuando se detecta un problema. Conocido el problema, el gerente (o el responsable en la toma de decisiones) debe proceder a definirlo de manera clara y formular el objetivo, seguidamente identifica las restricciones, evalúa las alternativas y seguramente el mejor curso de acción que lo llevará a la solución óptima.

El proceso de toma de decisiones se puede hacer de manera cualitativa o cuantitativa. Si se hace bajo el enfoque cualitativo, el gerente está confiando en su juicio personal o en su experiencia pasada en situaciones similares. Si se hace bajo el enfoque cuantitativo, no necesariamente debe tener experiencia en casos similares, pero si debe hacer un análisis exhaustivo, especialmente si la decisión involucra una gran cantidad de dinero, un conjunto de variables muy grande o se trata de un problema altamente repetitivo, en cuyo caso, el desarrollo de un procedimiento cuantitativo ahorrará tiempo valioso al gerente.

La habilidad para resolver problemas mediante el análisis cuantitativo, es propio de cada gerente, pero puede adquirirse o aumentarse con la experiencia. Esta habilidad puede adquirirse mediante el estudio de las herramientas matemáticas que ofrece la Investigación Operativa, y que permiten maximizar la efectividad en la toma de decisiones ya que permiten comparar y combinar información cualitativa y cuantitativa.

### **1.2. RESEÑA HISTÓRICA DE LA INVESTIGACIÓN OPERATIVA**

Hacer un uso óptimo de los recursos disponibles es un problema tan antiguo como la humanidad. Sin embargo, el inicio real de la Investigación Operativa se remonta a la época de la Segunda Guerra Mundial en donde surgió la necesidad urgente de asignar recursos escasos a las diferentes operaciones militares y a las actividades dentro de cada operación, en la forma más efectiva. Por este motivo, las administraciones militares americana e inglesa hicieron un llamamiento a un gran número de científicos para que aplicaran el método científico a los problemas estratégicos y tácticos que tenían planteados. A dichos científicos se les pidió que hicieran investigaciones sobre las operaciones militares. El esfuerzo de este equipo de científicos (que fueron el primer equipo de Investigación Operativa) logró el éxito de muchas acciones bélicas.

El inicio formal de la Investigación Operativa tuvo lugar en Inglaterra a finales de 1939, cuando la estación de investigación de Bawdsey, bajo la dirección de A. Rowe, fue encargada del desarrollo de políticas óptimas para el nuevo sistema de detección militar llamado radar. Poco después, se presentó un estudio de las fases de las operaciones nocturnas en lo que sería un modelo para los estudios posteriores del mismo tipo.

Más tarde, debido a las extremas necesidades de personal que se plantearon durante la guerra y a la complejidad de los nuevos sistemas de defensa y ataque que se introdujeron, pareció indicado el empleo de científicos en el estudio global de los problemas planteados. La finalidad era conseguir la máxima eficiencia posible. Así, en Agosto de 1940, el físico P.M.S. Blackett de la Universidad de

Manchester fue responsabilizado de formar un grupo de trabajo para estudiar el sistema de defensa antiaérea gobernado por radar. Este grupo, estaba constituido por tres psicólogos, dos físicos matemáticos, un astrofísico, un oficial del ejército, un topógrafo, un físico y dos matemáticos. Fue jocosamente denominado el “circo de Blackett”, siendo generalmente admitido que en él se daban todas las características de los grupos que trabajan en Investigación Operativa:

- **Grupo de trabajo interdisciplinar**
- **Empleo de modelos matemáticos**
- **Punto de vista de análisis de sistemas**

Uno de los primeros esfuerzos de este grupo fue dirigido al estudio del ataque aéreo a los submarinos. Las bombas estaban programadas para estallar a una profundidad de unos treinta metros, argumentando que al divisar el submarino al bombardero se sumergiría. Dado que desde el instante en que fuera localizado el bombardero hasta el del lanzamiento de la bomba, transcurrirían aproximadamente dos minutos, unos treinta metros, era aproximadamente, la profundidad alcanzada por el submarino en su precipitada inmersión. Pero aunque el razonamiento era válido, los resultados obtenidos con esta política eran muy limitados. Cuando el grupo de Blackett fue encargado del estudio, su primera decisión consistió en la observación directa de la situación, acompañando a los bombarderos en sus misiones de ataque a submarinos. Tras un elevado número de observaciones llegaron a la conclusión, con el análisis de los datos de los ataques, de que se producían las siguientes circunstancias:

- a) Debido a la falta de precisión del bombardeo, muy pocas de las bombas explotaban cerca de su objetivo, a treinta metros de profundidad.
- b) La precisión aumentaba cuando el submarino no había tenido tiempo de sumergirse, pero en ese caso las bombas estallaban a demasiada profundidad y no producían grandes daños.

En definitiva, la profundidad de treinta metros era adecuada cuando el submarino divisaba con antelación al bombardero, pero la falta de precisión impedía obtener resultados. Y cuando la precisión era buena, la profundidad a que estaba programada la explosión era inadecuada, pues esto sólo ocurría cuando el submarino se mantenía cercano a la superficie.

A la vista de los datos estadísticos sobre la precisión del bombardeo y la inmersión de los submarinos, se llegó a la conclusión de que la alternativa más adecuada era optar por causar daños cuando el submarino estuviera en la superficie. Así se hizo y los resultados mejoraron de forma espectacular. En este trabajo ya estaban incluidos los aspectos que caracterizan a los estudios de Investigación Operativa:

1. Toma de datos.
2. Empleo de modelos matemáticos para el análisis de la situación, que en este caso era simplemente estadístico.
3. Obtención de las políticas óptimas que corresponden al modelo.

4. Modificación de dichas políticas de acuerdo con factores reales no considerados en el modelo: en este caso se emplearon espoletas que explotaban a diez metros de profundidad, pues no se disponía de otras que lo hiciesen más cerca de la superficie. Un resultado del estudio fue iniciar su fabricación.

Como consecuencia de los resultados obtenidos, por éste y otros estudios sobre problemas de índole militar, el Almirantazgo Británico creó el grupo funcional "Naval Operational Research". El punto de vista empleado para el análisis de los problemas por este grupo, y los que le siguieron inmediatamente, fue denominado **Operational Research**. Dicha acepción fue modificada en Estados Unidos por **Operations Research**. Según narran autores ingleses, como Sir Robert Watson-Watt, fue a sugerencia suya el que los norteamericanos introdujeran también grupos de científicos para el estudio de operaciones militares tras el inicio de su participación en la guerra. Para el mes de abril de 1942, las Fuerzas Aéreas, el Ejército y la Marina poseían grupos funcionales conocidos como Operations Analysis, Operations Research y Operations Evaluations, respectivamente. El último de estos grupos era dirigido por Philip M. Morse, del Massachusetts Institute of Technology, que años más tarde sería el primer presidente de la sociedad norteamericana de Investigación Operativa (O.R.S.A.) y uno de sus principales difusores.

Durante la guerra, otros países aliados como Canadá y Francia, también introdujeron grupos de Investigación Operativa en sus respectivos ejércitos.

Una vez terminada la guerra, el éxito de la Investigación Operativa en las actividades bélicas generó un gran interés en sus aplicaciones fuera del campo militar. Sin embargo, las circunstancias en Gran Bretaña y Estados Unidos fueron distintas para estos grupos. En Estados Unidos, los fondos para la investigación en el campo militar se incrementaron, por lo que la mayoría de los grupos se consolidaron, aumentando su número y tamaño. Debido a ello, la industria y la administración norteamericanas permanecieron indiferentes a la Investigación Operativa durante el resto de la década. Uno de los primeros centros de investigación, dependiente del ejército del aire y que tuvo gran influencia en el posterior desarrollo de esta disciplina, fue la RAND Corporation fundada por Donald Douglas en 1946. En la primera conferencia sobre la Investigación Operativa en la Industria, que tuvo lugar en el Case Institute of Technology de Cleveland en 1951, fue casi imposible encontrar aplicaciones industriales de carácter no militar. Quizás las causas de este lento desarrollo en Estados Unidos, sea necesario buscarlas en la situación de la Organización Industrial tradicional, que estaba plenamente establecida, difundida y reputada. La Investigación Operativa se percibía como un dudoso competidor de aquélla, a lo que hay que añadir el celoso secreto con el que se mantenían las limitadas experiencias que se llevaban a cabo.

En cambio, en Gran Bretaña, los componentes de los grupos que se habían desarrollado en el medio militar pasaron a la sociedad civil. Los nuevos problemas que se le plantearon a la nueva administración laborista inglesa, con la nacionalización de importantes sectores de su economía y la reconstrucción de gran parte

de sus instalaciones industriales, estimularon la implantación de la Investigación Operativa. Sir Charles Ellis, responsable durante la guerra del grupo de Investigación Operativa del Ejército, fue nombrado asesor científico en el Comité del Carbón, creando un grupo de Investigación Operativa. Análogas circunstancias se dieron en los sectores nacionalizados de la electricidad y el transporte. En el sector privado, la industria inglesa mantiene instituciones cooperativas de investigación, por lo que la difusión de nuevos métodos está menos mediatizada por el secreto industrial. Quizás debido a ello, casi inmediatamente la industria del acero y la textil introdujeron grupos de Investigación Operativa. Otro aspecto importante en este contexto es que el desarrollo de la Organización Industrial tradicional en Gran Bretaña había sido más limitado, y con la excepción del Estudio del Trabajo, era todavía una novedad en los círculos industriales. Por ello, todavía ciertos campos como la gestión de inventarios se identifican con la Organización de la Producción en Estados Unidos y con la Investigación Operativa en Inglaterra. Así, toda una serie de metodologías de carácter cuantitativo se difundieron en la industria de este último país bajo la denominación y con el prestigio de la Investigación Operativa.

Desde la década de 1950, se había introducido el uso de la Investigación Operativa en la industria, los negocios y la administración pública, desde entonces, esta disciplina se ha desarrollado con rapidez.

Un factor importante de la implantación de la Investigación Operativa en este periodo es la mejora de las técnicas disponibles en esta área. Muchos de los científicos que participaron en la guerra, se centraron en la búsqueda de resultados sustanciales en este campo; un ejemplo sobresaliente es el método Simplex para resolución de problemas de Programación Lineal, desarrollado en 1947 por George Dantzig. Muchas de las herramientas utilizadas en la Investigación Operativa como la Programación Lineal, la Programación Dinámica, Teoría de Colas y Teoría de Inventarios fueron desarrollados al final de los años 50.

Un segundo factor importante para el desarrollo de este campo fue el advenimiento de la revolución de las computadoras. Para manejar los complejos problemas relacionados con esta disciplina, generalmente se requiere un número de cálculos tan elevados que llevarlos a cabo a mano es casi imposible. Por lo tanto el desarrollo de la computadora digital, fue una gran ayuda para la Investigación Operativa, su desarrollo y posterior implantación.

En la década de los 80, la aparición de los computadores personales (PC's) cada vez más rápidos así como la proliferación de buenos paquetes de Software para resolver problemas de Investigación Operativa puso la técnica al alcance de muchas personas.

### **1.3. DEFINICIÓN DE INVESTIGACIÓN OPERATIVA (IO)**

Se han propuesto distintas definiciones de Investigación Operativa. Aunque no existe una generalmente aceptada, podemos citar cronológicamente algunas de las más significativas.

### MORSE y KIMBALL (1951)

“la Investigación Operativa es un método científico para proporcionar a los departamentos ejecutivos bases cuantitativas para la toma de decisiones relativas a las operaciones bajo su control”.

Por su parte, ACKOFF y SASIENI (1968) la definen como

“la aplicación del método científico mediante equipos interprofesionales a los problemas de gobierno de sistemas organizados para proporcionar soluciones que sirvan lo mejor posible a la organización considerada como un todo”.

ASSAD, WASIL y LILIEN (1992):

“La Investigación Operativa (Operation Research/Management Science) es la aplicación del método científico a la toma de decisiones o a profesiones que abordan la mejor manera de diseñar y operar los sistemas, normalmente en condiciones donde se requiere la asignación de recursos escasos.”

Recientemente, ROBINSON (1999) adapta la definición de Morse y Kimball al contexto actual y define la moderna Investigación Operativa como

“aplicación de métodos científicos a la mejora de la efectividad de las operaciones, decisiones y gestión. Para ello se utilizarán medios tales como análisis de datos, creación de modelos matemáticos y se propondrán aproximaciones innovadoras; los profesionales de la Investigación Operativa obtienen información sobre una base científica que orienta el proceso de toma de decisiones. Además ellos son los encargados de desarrollar el software necesario, sistemas, servicios y productos”.

Existen otras muchas conceptualizaciones de la Investigación Operativa, tales como,

1. Aplicación del método científico a los problemas relativos a la dirección y gestión de grandes sistemas.
2. Es el método científico para ayudar en la toma de decisiones a los departamentos ejecutivos.
3. Es la ciencia de decidir la mejor forma de diseñar y operar los sistemas.

En todas estas definiciones es destacable la visión de la Investigación Operativa como una disciplina de ayuda a la toma de decisiones que tiene como objetivo determinar la "mejor" forma de operar los sistemas, su carácter interdisciplinar y científico.

## 1.4. CARACTERÍSTICAS DE LA INVESTIGACIÓN OPERATIVA

- La Investigación Operativa aspira a determinar la mejor solución, o solución óptima, de un problema de decisión con la restricción de recursos limitados.

- Como técnica para la resolución de problemas, la Investigación Operativa debe visualizarse como una ciencia y como un arte.

Como Ciencia: radica en ofrecer técnicas y algoritmos matemáticos para resolver problemas de decisión.

Como Arte: debido al éxito que se alcanza en todas las fases anteriores y posteriores a la solución de un modelo matemático, depende de la creatividad y la habilidad personal de los analistas encargados de tomar las decisiones.

En un equipo de Investigación Operativa es importante la habilidad adecuada en los aspectos científicos y creativos. Si se destaca un aspecto y no el otro probablemente se impedirá la utilización efectiva de la Investigación Operativa en la práctica.

- La Investigación Operativa en la Ingeniería se emplea principalmente en los aspectos de coordinación de operaciones y actividades de la organización o sistema que se analice, mediante el empleo de modelos que describan las interacciones entre los componentes del sistema y de éste con su entorno.
- En la Investigación Operativa la parte de “Investigación” se refiere a que aquí se usa un enfoque similar a la manera en la que se lleva a cabo la investigación en los campos científicos establecidos. La parte de “Operaciones” es porque en ella se resuelven problemas que se refieren a la conducción de operaciones dentro de una organización.
- La Investigación Operativa usa el **método científico** para investigar el problema en cuestión. En particular, el proceso comienza por la observación cuidadosa y la formulación del problema incluyendo la recolección de datos pertinentes.
- La Investigación Operativa adopta un punto de vista organizacional. De esta manera intenta resolver los conflictos de interés entre los componentes de la organización de forma que el resultado sea el mejor para la organización completa.
- La Investigación Operativa intenta encontrar una mejor solución (llamada solución óptima), para el problema bajo consideración. En lugar de contentarse con mejorar el estado de las cosas, la meta es identificar las mejores acciones posibles.
- La Investigación Operativa tiende a representar el problema cuantitativamente para poder analizarlo y evaluarlo según criterios objetivos comunes en la organización.

## 1.5. TÉCNICAS DE INVESTIGACIÓN OPERATIVA: APLICACIONES

Las diferentes técnicas que están englobadas bajo el nombre de técnicas de Investigación Operativa fueron desarrolladas para la resolución de problemas concretos que determinan sus campos de aplicación:

### **a) Control de Inventarios**

Tienen como característica resolver problemas de logística de almacenes, relacionado con dos decisiones:

- ¿cuánto ha de pedirse en cada ocasión?, y
- ¿cuándo debe pedirse dicha cantidad?

De modo que se minimice el coste total.

Se obtiene el modelo de eficacia que permita el equilibrio entre los costes de compra y los de deterioro de inventarios. Se determinan los costes de mantenimiento de inventario, coste de ordenar, coste unitario de falta de stock, ...

#### Aplicaciones de la teoría de inventarios:

- La compra óptima a proveedores.
- La producción deseada con los costes mínimos de inventarios.
- La programación de la producción, relacionado con el coste total de producción, con el nivel deseado de servicio a clientes.
- Tener el nivel óptimo de existencias de seguridad, previniendo cualquier ruptura de existencia durante el año.
- Considerar la cantidad económica de ordenar un pedido, en el punto exacto en que deba pedirse.
- Tiempo entre pedidos.
- ...

### **b) Teoría de Colas**

Su característica es el número de clientes que llega a solicitar cierto servicio, según funciones de distribución probabilísticas tanto en tiempos de llegada del cliente, como del servicio de la línea de espera del centro del servicio. La cola se generará en función del tiempo promedio de llegada y el tiempo promedio de servicio.

Las decisiones a tener en cuenta son:

¿Cuál es el número de instalaciones que deberán operar para que mejore el servicio a los clientes?

Teniendo en cuenta, el tiempo promedio que pasan los clientes en el sistema, el tiempo promedio de espera en el servicio, ...

#### Aplicaciones de los modelos de teoría de colas:

- Número óptimo de cajas de pago y determinación del personal.
- Número de servidores, procesadores, etc. para que el rendimiento del sistema informático sea óptimo.

- Evaluación de retrasos en el servicio.
- Costes de operación.

### **c) Proceso de sustitución o reemplazo (Fiabilidad)**

Operación que puede realizarse de manera preventiva o correctiva, ya sea por vejez, desgaste, o por fallo general de un componente de un sistema.

#### Aplicaciones de Fiabilidad:

- Poder adquirir máquinas y/o equipo de innovación tecnológica que permita optimizar los recursos humanos, materiales y económicos.
- En caso de que sea posible reutilizar el equipo o la maquinaria, proporcionarle el servicio necesario, evitando así el mantenimiento de tipo correctivo.
- Evaluar la conveniencia para la organización el tener un equipo que sea de uso ocasional, quizá sea más rentable, alquilarlo durante cierto tiempo.
- Si la máquina falla con frecuencia, no se utiliza, resultará conveniente venderla, o recuperar parte de su inversión comercializándola como chatarra.

### **d) Teoría de Juegos**

Tiene como característica al menos dos competidores que tienen varias acciones a seleccionar. El fin es determinar la selección siguiente de acuerdo a probabilidades, teniendo en cuenta la primera selección de los competidores. Cada combinación de las decisiones de los contrincantes tiene un valor esperado del juego. ¿Cuál es la decisión que optimiza el juego o competencia?

#### Aplicaciones de la Teoría de Juegos:

- Conocer de manera fiable la lealtad de los clientes de la empresa frente a la aparición de otra marca u otro producto.
- Medir la efectividad de las campañas publicitarias en comparación con las anteriores llevadas a cabo.

### **e) Modelos de Optimización de Redes**

Los problemas de redes surgen en gran variedad de situaciones. Son problemas que pueden representarse mediante un grafo y que en general disponen de un algoritmo específico para obtener la solución óptima. Dicho algoritmo saca partido de la estructura especial del problema.



Aplicaciones de los Modelos de Redes:

- Problema de Transporte.
- Problema de Asignación.
- Problema de la Ruta Más Corta.
- Problema del Árbol de Expansión Mínima: Diseño de redes de telecomunicaciones, redes de transporte, ...
- Problema del Flujo Máximo (a Coste Mínimo): Maximizar el flujo de una red de transmisión de datos.

**f) Gestión de Proyectos (PERT/CPM)**

Son técnicas que permiten planificar, programar y controlar proyectos, entendiendo como proyecto la realización de una actividad compleja susceptible de descomponerse en tareas más pequeñas relacionadas entre sí en cuanto a su orden de ejecución.

Aplicaciones de la Gestión de Proyectos:

- Obtención del plazo óptimo de entrega de un proyecto.
- Estudio de la relación entre el plazo de entrega y el coste del proyecto.
- En un contexto de recursos limitados, obtener un calendario de ejecución factible de ser ejecutado con los recursos disponibles en la organización.
- Permitir realizar un seguimiento y un control "on-line" del proyecto.

**g) Simulación**

Este proceso requiere el uso de la computadora para la resolución de problemas aplicando uno o más procesos de IO, para dar una serie de alternativas. La computadora muestra los resultados (generados por números aleatorios), que podrían haberse obtenido si se hubieran usado ciertas líneas de criterios de decisión.

Aplicación de la Simulación:

- Integración de los esfuerzos de mercado, combinación de productos, distribución, sumado a una perfecta sincronización de esfuerzos, empleando un simulador de mercados
- Analizar los lugares óptimos donde deban situarse los almacenes que permita minimizar los costes de distribución.
- Evaluar las alternativas de inversión más rentables de la empresa.
- Simular reglas de decisión de operaciones de fabricación, que lleven a la programación y el control efectivo de la producción.

### **h) Programación matemática**

La característica principal de los problemas que aborda la programación matemática es la toma de decisiones en un contexto en el que los recursos están disponibles en la organización en cantidades limitadas (materias primas, inversión, horas-máquina, horas-hombre,...) con el objetivo de determinar la asignación de estos recursos limitados de la manera más eficiente posible con el coste mínimo, mínimo tiempo, mínimo de desperdicios, trabajo más eficiente,...

#### Aplicaciones de la Programación Matemática:

- Asignación de trabajadores, para situarlos en el trabajo adecuado ya que se logrará el tiempo óptimo, en función directa a sus habilidades.
- Asignación correcta de las órdenes de fábrica para las máquinas, minimiza costos y dar el tiempo de entrega del producto.
- Distribución óptima de activos fijos. La máquina que debe de utilizarse en el lugar que se necesite, el tipo de transporte que necesita la comercialización del producto,...

La programación matemática es la técnica de Investigación Operativa que más se ha utilizado y se utiliza para obtener la solución óptima a problemas complejos. Como parte de la programación matemática, hay que destacar la Programación Lineal a la que dedicaremos el grueso de la asignatura Investigación Operativa I de la titulación Ingeniero en Informática. El algoritmo que estudiaremos durante el curso que permite resolver problemas que se pueden abordar mediante la programación lineal, **Algoritmo Simplex** ha sido considerado por prestigiosos científicos como *uno de los diez algoritmos de mayor influencia en el desarrollo y la práctica de la ciencia y la ingeniería en el siglo XX* (Nash, 2002).

### **i) Proceso Combinado**

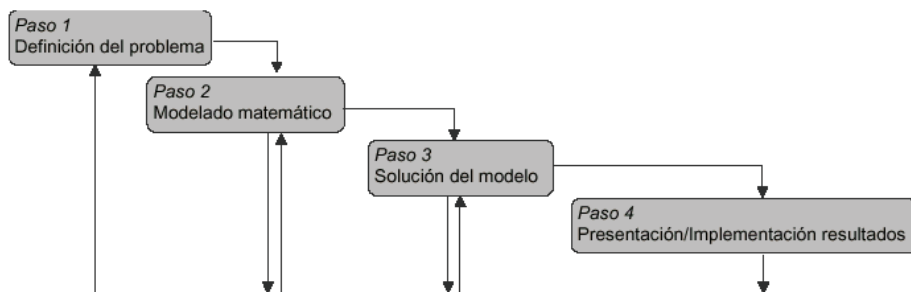
Este proceso hace uso de más de una de las técnicas de Investigación Operativa, ya que el problema necesita de más de una herramienta para llegar a la solución integral del mismo.

Aplicaciones de los Procesos Combinados:

Puede presentarse el caso de algún problema de Control de la Producción, que requiera el uso de la Programación matemática, Teoría de Inventarios así como Teoría de Colas. Lo usual sería resolver uno a uno, siguiendo secuencias lógicas, y combinar sólo donde haya interrelaciones para obtener una solución óptima.

## **1.6. FASES DE LA APLICACIÓN DE LAS TÉCNICAS DE INVESTIGACIÓN OPERATIVA**

Las **etapas o pasos** de un estudio de Investigación Operativa son las siguientes:



### **Paso 1. Definición del problema**

Quizás la parte más importante de todo el proceso sea la definición del problema. Una respuesta incorrecta a una pregunta correcta no suele tener consecuencias fatales, ya que se pueden hacer revisiones y explorar otras alternativas. Sin embargo, **la respuesta correcta a una pregunta incorrecta puede ser desastrosa**. Es importante que el problema esté claramente definido antes de invertir una gran cantidad de trabajo y energía en resolverlo.

A la hora de **definir el problema**, el analista debe enfrentarse a uno o más de los factores siguientes:

- datos incompletos, conflictivos o difusos
- diferencias de opinión
- presupuesto
- límite de tiempo para tomar la decisión
- cuestiones políticas
- el decisor no tiene una idea firme de qué quiere realmente

Para tratar con estos problemas, **un buen plan de trabajo** es el siguiente:

#### ***1. Observar.***

El analista debe realizar un esfuerzo para contemplar el problema desde diferentes puntos de vista, de modo que termine entendiendo el problema tan bien o mejor que las personas directamente implicadas.

#### ***2. Ser consciente de las realidades políticas.***

Casi siempre hay conflictos entre los jefes y los trabajadores, o entre varios jefes. Para el analista, esto significa que a menudo recibirá información distorsionada o incompleta de cada grupo.

### 3. Decidir qué se quiere realmente.

El analista debe estar seguro de que la compañía tiene claros sus objetivos antes de desarrollar y resolver un modelo.

### 4. Identificar las restricciones.

Es importante saber qué tipo de limitaciones pueden afectar la decisión final, para posteriormente incluirlas en el modelo.

### 5. Buscar información de modo continuo.

A lo largo de todo el proceso, el analista no debería perder el contacto con el decisor. Esto permite que ambos modifiquen de forma continua sus observaciones iniciales y estén al día del desarrollo del proceso.

## **Paso 2. Modelado matemático (Modelización)**

La modelización es un procedimiento que reconoce y verbaliza un problema para posteriormente cuantificarlo transformando las expresiones verbales en expresiones matemáticas.

La modelización es un **arte**, que mejora con la práctica. El proceso de la modelización de un problema consta de cuatro pasos, que se ilustran en la siguiente figura:

### MODELADO MATEMÁTICO

Paso 1. Identificar las variables de decisión

Paso 2. Identificar la función objetivo

Paso 3. Identificar las restricciones

Paso 4. Traducir los elementos anteriores a un modelo matemático

### 1. Identificar las variables de decisión.

Un **paso crucial** en la construcción de un modelo matemático es determinar aquellos factores *sobre los que el decisor tiene control*, que normalmente se llaman **variables decisión** del problema.

Hay que distinguir entre lo que está a nuestro alcance cambiar (por ejemplo, la cantidad de artículos a producir de cada producto o el material a utilizar) de aquello que no podemos modificar (como la temperatura exterior de una nave industrial o fechas límite a cumplir).

En muchos casos, definir las variables de decisión es la etapa más difícil, pues una vez que están bien definidas, el resto del proceso fluye de modo natural.

Sin embargo, **una definición incorrecta de las variables decisión pueden bloquear o complicar el resto de la modelización.**

Para **identificar las variables de decisión**, puede ser útil hacerse las siguientes preguntas:

- ¿qué es lo que hay que decidir?
- ¿sobre qué elementos tenemos control?
- ¿cuál sería una respuesta clara, directa y válida para este caso?

## **2. Identificar la función objetivo.**

El objetivo de la mayoría de los estudios de IO, y el de todos los modelos de optimización, es encontrar el modo de optimizar alguna medida respetando las restricciones existentes.

Aunque una compañía quizás esté satisfecha con una mejora sustancial de la situación actual, normalmente el objetivo es buscar el valor óptimo para cierta función.

A la hora de **encontrar la función objetivo**, la pregunta que podemos hacernos es:

- ¿qué es lo que queremos conseguir?
- Si yo fuera el jefe de esta empresa, ¿qué me interesaría más?

## **3. Identificar las restricciones.**

En la búsqueda de la solución óptima, normalmente existen ciertas restricciones (limitaciones, requisitos) que limitan nuestra decisión.

Ejemplos de restricciones frecuentes son:

- los **recursos** disponibles (trabajadores, máquinas, material, etc.) son limitados
- fechas límite impuestas por los contratos
- restricciones impuestas por la naturaleza del problema (por ejemplo: el flujo de entrada a un nodo debe ser igual al flujo de salida)

## **4. Traducir todos los elementos básicos a un modelo matemático.**

Una vez identificados los elementos básicos hay que expresarlos matemáticamente. Dependiendo de la naturaleza de las funciones matemáticas, el modelo será de un tipo u otro; por ejemplo, si todas ellas son lineales, el problema será de Programación Lineal; si existe más de una función objetivo, será de programación multicriterio, etc.

### **Paso 3. Resolución del modelo**

Aceptado ya el modelo matemático que mejor describe la situación en estudio, se aplican los algoritmos y métodos matemáticos diseñados para su resolución. Las etapas en la resolución del modelo son:

#### **RESOLUCIÓN DEL MODELO**

- Paso 1. Elegir la técnica de resolución adecuada
- Paso 2. Generar las soluciones del modelo
- Paso 3. Comprobar/validar los resultados
- Paso 4. Si los resultados son inaceptables, revisar el modelo matemático
- Paso 5. Realizar análisis de sensibilidad

#### ***1. Elegir la técnica de resolución adecuada.***

Afortunadamente, muchos de los modelos de IO pueden resolverse utilizando técnicas eficientes ya existentes, que proporcionan una **solución óptima** para el modelo. En otros casos, el problema es demasiado complejo o el algoritmo de resolución tiene una complejidad computacional inaceptable y hay que recurrir a **métodos heurísticos** de resolución.

#### ***2. Generar las soluciones del modelo.***

Una vez elegida la técnica de resolución, el siguiente paso es resolver el problema. Como normalmente la mayoría de los modelos conllevan la manipulación de una gran cantidad de datos, los problemas deben ser resueltos con ayuda del **ordenador**, utilizando alguno de los muchos algoritmos de IO que existen o incluso hojas de cálculo (las versiones actuales de la mayoría de ellas incluyen módulos que realizan análisis de optimización).

#### ***3. Comprobar/validar los resultados.***

Dado que los modelos matemáticos no son más que simplificaciones de la realidad, las soluciones óptimas generadas para un modelo pueden no ser óptimas para el problema de la vida real.

En el peor de los casos, puede que ni siquiera sean factibles. De este modo, comprobar la validez de dichas soluciones constituye un paso crucial, igual que comprobar que efectivamente proporcionan un mejor rendimiento que el plan de trabajo que actualmente sigue la empresa.

El desarrollo de un modelo matemático grande es análogo en algunos aspectos al desarrollo de un gran proyecto software. Cuando se completa la primera versión, es inevitable que contenga fallos. El programa debe probarse de manera exhaustiva para tratar de encontrar y corregir tantos problemas como sea posible.

Este proceso de prueba y mejora de un modelo para incrementar su validez se conoce como validación del modelo, que implica volver a la etapa 1 o 2 para refinar la solución obtenida.

#### **4. Si los resultados son inaceptables, revisar el modelo matemático.**

Como ningún modelo es totalmente exacto ni ninguna técnica de validación está exenta de errores, si los resultados de la validación son inaceptables puede ser necesario revisar el modelo.:

- Las hipótesis deben ser estudiadas
- La exactitud de los datos comprobados
- Las aproximaciones relajadas o endurecidas
- Las restricciones revisadas.

#### **5. Realizar análisis de sensibilidad.**

Normalmente, la solución que nos proporciona el ordenador es una respuesta para el modelo. Pero el decisor suele querer no una solución, sino varias soluciones entre las que elegir. **La decisión última con respecto a la solución a implantar no la va a tomar el sistema de optimización sino el decisor.**

El analista debe estar preparado para estudiar los cambios posibles y su alcance. Para ello resulta muy útil realizar el llamado **análisis de sensibilidad**, que estudia los cambios que puede sufrir la solución si se alteran los parámetros del modelo, o bien en qué rango de variación de los parámetros la solución sigue siendo válida.

### **Paso 4. Presentación/Implementación de los resultados**

Éste es el paso final dentro del proceso. Implica los siguientes pasos:

#### **PRESENTACIÓN DE RESULTADOS**

Paso 1. Preparar informes y/o presentaciones

Paso 2. Vigilar el proceso de implementación de la solución propuesta

#### **1. Preparar informes y/o presentaciones.**

La **comunicación efectiva de los resultados** de un estudio es esencial para el éxito del mismo.

La utilidad del análisis será nula si las personas que toman las decisiones no aprecian totalmente su valor. Los decisores deben comprender completamente el enfoque del analista, las hipótesis y simplificaciones que se han hecho, y la lógica subyacente en la recomendación.

## 2. Vigilar el proceso de implementación.

Una vez que se ha emitido el informe o se ha hecho la presentación y aprobado el estudio, debe **implementarse la solución propuesta**, que a veces puede suponer cambios que sean conflictivos y encuentren resistencia en los miembros de la empresa. El apoyo del analista puede resultar crítico.

Es importante instalar un sistema bien documentado para aplicar el modelo según lo establecido por la organización.

Este sistema casi siempre es una **solución informática** para automatizar la optimización del problema. De hecho, con frecuencia se necesitan varios programas integrados. La base de datos y los sistemas de información de la organización proporcionan entrada actualizada para el modelo cada vez que se use, en cuyo caso se necesitan programas de interfaz (con interacción con el usuario). Después de aplicar el procedimiento de solución al modelo, la implantación de los resultados se puede hacer de manera automática. En otros casos se instala un **sistema interactivo de ayuda a la toma de decisiones (DSS)**, para ayudar a la gerencia a usar datos y modelos para apoyar (no para sustituir) su toma de decisiones cuando lo necesiten.

Una vez implementada la **solución**, debe **ser supervisada de forma continua**. Dada la naturaleza dinámica y cambiante de la mayoría de las empresas, es casi inevitable que haya que realizar cambios en el modelo. El analista debe estar preparado para saber cuándo ha llegado el momento de cambiar y para realizar dichos cambios.

## 1.7. LA INGENIERÍA INFORMÁTICA Y LA INVESTIGACIÓN OPERATIVA

Las técnicas que se aplican en la Ingeniería Informática y en la Investigación Operativa tienen varios aspectos en común:

- Tienen como fin mejorar y optimizar el funcionamiento de las organizaciones (competitividad).
- Son aplicables en una gran cantidad de contextos y sectores económicos (flexibilidad).
- Proporcionan soluciones a los diferentes componentes de la organización con un objetivo global (integración).
- Son responsables de cambios drásticos (en ocasiones) y controlados de los procesos que se utilizan (mejora continua).

Esta versatilidad de la Ingeniería Informática y de la Investigación Operativa hace que un Ingeniero en Informática con amplios conocimientos de las técnicas de Investigación Operativa tenga un valor añadido para su futuro profesional.



## 1.8. BIBLIOGRAFÍA

- [1] Daellenbach, H.G.; George, J.A. and McNickle, D.C. (1987): *Introducción a las técnicas de Investigación de Operaciones*. CECSA.
- [2] Hillier, F.S. and Lieberman, G.J. (2001): *Introducción a la Investigación de Operaciones*. Séptima edición. McGraw-Hill.
- [3] Schrage, L. (1997): Optimization modeling with *LINDO*. 5<sup>th</sup> Edition. International Thompson Publishing Inc.
- [4] Schrage, L. (1999): Optimization modeling with *LINGO*. Lingo Systems Inc.
- [5] Williams, H.P. (1999): *Model building in Mathematical Programming*. Fourth Edition. Wiley, England.
- [6] Winston, W. (1994): *Operations Research. Applications and Algorithms*. Third edition. Duxbury Press. California.

## ANEXO 1: ANTECEDENTES DE LA INVESTIGACIÓN OPERATIVA

Con la Investigación Operativa ya firmemente establecida en los años 50, su rápida evolución arrastró consigo la de la Organización de la Producción, de forma tal que existe una correlación profunda y completa entre ambas materias. Para destacar el solape se introduce ahora la reciente evolución de los Métodos Cuantitativos hasta la situación en que se encuentran en la actualidad.

Toda disciplina científica emerge de la convergencia de un creciente interés en alguna clase de problemas y del desarrollo de métodos, técnicas e instrumentos científicos adecuados para resolver esos problemas. La Investigación Operativa utiliza resultados de muchas áreas científicas, aunque su base fundamental se encuentra en la matemática, la economía y el cálculo de probabilidades y estadística. Desde un punto de vista matemático se podrían establecer los orígenes en diferentes trabajos sobre modelos lineales debidos a Jordan, Minkowsky y Farkas a finales del siglo XIX. En relación con la estadística, sus orígenes se encuentran en los trabajos de Erlang sobre fenómenos de espera en los años veinte. En economía se deben a Quesnay (XVIII) y Walras (XIX), que plantearon los primeros modelos de programación matemática, que fueron posteriormente perfeccionados por autores como Von Neumann, Kantorovich y Dantzig,

Como puede observarse en los primeros estudios que se etiquetaron como de Investigación Operativa, el aspecto técnico más característico consistió en la estructuración estadística de los datos y en el empleo de modelos descriptivos de tipo probabilístico. Sin embargo, el prestigio y difusión de la Investigación Operativa está cimentado en la Programación Lineal, aunque ello corresponda a una simplificación de la realidad.

Los fundamentos matemáticos de los modelos lineales discretos se encuentran en la teoría de las desigualdades lineales desarrollada en el siglo XIX. Otros conceptos que son paralelos a los de la Programación Lineal fueron formulados por von Neumann en 1928, con la aplicación del teorema del minimax a los juegos de estrategia. Como un antecedente inmediato, se encuentra el planteamiento del problema de transporte, por F. L. Hitchcock, en 1941 en los Estados Unidos. En el contexto de la planificación óptima de la asignación de obligaciones productivas, el mismo modelo había sido estudiado y resuelto por Kantorovich en la Unión Soviética en 1939, empleando lo que puede interpretarse como variables duales. También, en un contexto concreto, Stiegler planteó el problema lineal de obtener una dieta adecuada con coste mínimo a partir de setenta y siete alimentos y considerando nueve nutrientes, reconociéndose en él la estructura de optimizar una función lineal sujeta a restricciones lineales. Pero el proyecto de formulación y ataque al problema lineal de forma general, fue propuesto por el departamento del Ejército del Aire bajo el nombre de proyecto SCOOP en 1947. El resultado inmediato fue el algoritmo de resolución simplex, debido a George B. Dantzig, y su implementación en un ordenador UNIVAC para la resolución de modelos lineales de gran tamaño.

En el resto de los años cincuenta, la Programación Lineal quedó completamente establecida, con los trabajos de Charnes sobre la degeneración, de Lemke sobre la dualidad, de Dantzig, Orden y Wolfe sobre la forma compacta y la descomposición de grandes programas. En estos mismos años, Ford y Fulkerson, también contratados por la RAND Corporation, establecen los resultados sobre flujos en grafos y el método primal-dual para los problemas de distribución. Sin embargo, la Programación Lineal Entera no recibe atención hasta finales de esta década, en que Gomory obtiene la expresión general para aproximar la envoltura convexa del conjunto admisible empleando única y exclusivamente planos secantes. A pesar de las esperanzas que el procedimiento generó, sigue siendo un campo con métodos limitados e insatisfactorios, donde la enumeración parcial e inteligente de posibles soluciones es el socorrido último recurso que se hace necesario en multitud de situaciones.

En los modelos no lineales, los resultados fundamentales proceden del desarrollo del cálculo matemático en el siglo XVIII, siendo el concepto básico el del Lagrangiano. La caracterización de las condiciones necesarias de optimalidad en problemas restringidos, se generaliza a partir de los resultados de Lagrange en el conocido teorema de Kuhn-Tucker, que recopila y estructura un conjunto de investigaciones llevadas a cabo por numerosos autores en los años cuarenta, entre los que también ha de citarse a Dantzig, y Fritz John. La Programación no Lineal progresó durante los años sesenta y setenta, pudiendo atacarse la resolución de problemas de tamaño medio con varias decenas de restricciones y algunos cientos de variables. Sin embargo, la investigación en la búsqueda de algoritmos eficientes seguía siendo muy activa, pues los existentes no eran plenamente satisfactorios.

En cuanto a la Programación Dinámica, su inicio y desarrollo básico se debe a Richard Bellman al principio de los cincuenta. La trascendencia de esta metodología no se limita a la Investigación Operativa, sino que es también de gran importancia en la Teoría del Control Óptimo, en estrecha relación con el principio del máximo de Pontryagin. En lo que aquí nos concierne, el desarrollo de la Programación Dinámica se ha visto limitado en su aplicabilidad concreta debido a la complejidad computacional que le acompaña, tanto debido a la cardinalidad del espacio de estado como al número de períodos que intervienen. En este sentido, el trabajo de Larson ha colaborado a su tratamiento, pero muchos autores aún consideran a la Programación Dinámica como un punto de vista conceptual y un bagaje teórico para el análisis de problemas; y no como un método o conjunto de ellos, implantable en algoritmos de tipo general. En esta dirección, los trabajos de Denardo, identificando la estructura de los procesos de decisiones secuenciales, suponen un avance para establecerlos.

La Teoría de Colas se inicia con el trabajo del ingeniero danés A. K. Erlang en la industria telefónica de principios de siglo. El estudio en detalle de los modelos más usuales, en que tanto la distribución de llegadas al sistema como la del tiempo de servicio son conocidas, y pertenecen a categorías bien establecidas, está completamente caracterizado. Pero los recursos técnicos de carácter matemático que se requieren para llevar a cabo estos análisis hacen que sea la simulación el

método habitual de estudio cuando los procesos de colas son de cierta complejidad. Debe resaltarse la existencia de multitud de lenguajes de simulación a disposición de los usuarios de computadores de las empresas de mayor importancia en el sector.

La Teoría de Juegos se inicia con los primeros resultados de von Neumann sobre el teorema del minimax en 1926. Sobre todo a partir de la publicación de su obra básica en unión de Morgenstern, asentando la teoría de juegos matriciales. Posteriormente, y como consecuencia de las aportaciones de la Teoría del Control Óptimo, se bifurca en los Juegos Diferenciales, que ahora no nos conciernen, y en el estudio de los juegos cooperativos. Dentro de estos últimos, el desarrollo se sustenta en el estudio de la teoría del núcleo, incluyendo el concepto de valor de Shapley y los resultados de Nash. En cualquier caso, la influencia de esta teoría sobre la Organización de la Producción ha sido muy limitada. En cuanto a la Teoría de la Decisión en condiciones de incertidumbre, toda ella se basa en la estadística bayesiana y la estimación subjetiva de las probabilidades de los sucesos. La estructuración de la teoría axiomática de la utilidad es más reciente, encontrándose en fase de pleno desarrollo, como muestran las publicaciones de Schlaifer y Raiffa. En la actualidad se la considera un instrumento válido para la estructuración de la toma de decisiones con incertidumbre cuando la información no es completa. La aplicabilidad a la Organización de la Producción es reducida debido a que en ella la situación es bastante estructurada, pudiendo accederse a una satisfactoria información sobre el contexto. Si acaso, en los planteamientos estratégicos que pueden darse en la fase de diseño en que la información es menor o incluso no existe, pueden emplearse estos métodos.

Desde su origen, la Investigación Operativa se encuentra encarada con problemas para los que no existe método analítico alguno que permita obtener, con seguridad y en un tiempo conveniente, el óptimo teórico. Éste es, por ejemplo, el caso de los problemas combinatorios en que el sentido común da por imposible la enumeración. Es más que normal que el tamaño y la naturaleza de ciertos problemas combinatorios nos prohibían abordarlos por la vía del sentido común. Nuestro buen sentido, educado por la ciencia, sabe distinguir particularmente los problemas NP completos, para los cuales no existe un algoritmo que en tiempo polinomial sea capaz de encontrar la solución (Garey and Johnson). De siempre, la Investigación Operativa ha establecido, por tales razones, métodos denominados heurísticos, incapaces de proporcionar el óptimo formal, pero susceptibles de llegar a soluciones buenas, tanto más fiables en cuanto que permiten determinar al mismo tiempo una cota (superior o inferior) del óptimo teórico con el que se comparan. Con el auge de los microordenadores, hacia principios de los ochenta, estos métodos han ido ganando terreno, puesto que se iba haciendo, cada vez más, factible y fácil intentar diferentes heurísticas y juzgar su eficacia relativa.

Es de destacar también la gran difusión que ha sufrido el «software» de optimización debido al incremento en la potencia de cálculo de los ordenadores y al abaratamiento del coste de las aplicaciones y del «hardware». Entre algunas de ellas se pueden citar nombres de aplicaciones de programación matemática (para la resolución de modelos lineales, mixtos y no lineales) como LINGO, MINOS,

IMSL, XA, GPSS y CPLEX. También se pueden mencionar otras aplicaciones relacionadas con las anteriores: ANALYZE, GAMS, AMPL, etc. que permiten de una forma amigable generar los modelos y analizar sus resultados.

Durante los últimos años han aparecido una serie de métodos, denominados metaheurísticas, cuya finalidad es la de encontrar buenas soluciones a problemas de optimización (lineal o no lineal y con o sin restricciones). Entre ellos se pueden enumerar los algoritmos genéticos, el templado simulado, la búsqueda tabú y las redes neuronales. Su aplicación a los problemas de secuenciación de todo tipo es una finalidad típica y clásica. Es más, prácticamente todos ellos están basados en intentar resolver, de la mejor forma posible, problemas típicos de Organización de la Producción. Así, los problemas típicos de secuenciación de trabajos en máquinas, de equilibrado de líneas de montaje, de asignación de rutas, de planificación de la producción, etc. han sido, son y, casi con toda seguridad, serán el banco de pruebas de las más modernas técnicas de búsqueda de soluciones a problemas en los que, de entrada, se declina la posibilidad de encontrar la solución óptima.

Los algoritmos genéticos («genetic algorithms») fueron introducidos por Holland para imitar algunos de los mecanismos que se observan en la evolución de las especies. Los mecanismos no son conocidos en profundidad pero sí algunas de sus características: la evolución ocurre en los cromosomas; un ser vivo da vida a otro mediante la decodificación de los cromosomas de sus progenitores, el cruce de los mismos, y la codificación de los nuevos cromosomas formando los descendientes; las mejores características de los progenitores se trasladan a los descendientes, mejorando progresivamente las generaciones.

Basándose en estas características, Holland creó un algoritmo que genera nuevas soluciones a partir de la unión de soluciones progenitoras utilizando operadores similares a los de la reproducción, sin necesidad de conocer el tipo de problema a resolver.

Los algoritmos de templado simulado (simulated annealing) fueron introducidos por Cerny y Kirkpatrick et al. para la optimización de problemas combinatorios con mínimos locales. Utilizan técnicas de optimización no determinista: no buscan la mejor solución en el entorno de la solución actual sino que generan aleatoriamente una solución cercana y la aceptan como la mejor si tiene menor coste, o en caso contrario con una cierta probabilidad  $p$ ; esta probabilidad de aceptación irá disminuyendo con el número de iteraciones y está relacionada con el empeoramiento del coste.

Estos algoritmos derivan de la analogía termodinámica con el proceso metalúrgico del templado: cuando se enfría un metal fundido suficientemente despacio, tiende a solidificar en una estructura de mínima energía (equilibrio térmico); a medida que disminuye la temperatura, las moléculas tienen menos probabilidad de moverse de su nivel energético; la probabilidad de movimiento se ajusta a la función de Boltzmann.

Entre los distintos métodos y técnicas heurísticas de resolución de problemas combinatorios surge, en un intento de dotar de "inteligencia" a los algoritmos de búsqueda local, el algoritmo de búsqueda tabú (tabu search, Glover).

La búsqueda tabú, a diferencia de otros algoritmos basados en técnicas aleatorias de búsqueda de soluciones cercanas, se caracteriza porque utiliza una estrategia basada en el uso de estructuras de memoria para escapar de los óptimos locales, en los que se puede caer al "moverse" de una solución a otra por el espacio de soluciones. Al igual que en la búsqueda local, la búsqueda tabú selecciona de modo agresivo el mejor de los movimientos posibles en cada paso. Al contrario que sucede en la búsqueda local, se permiten movimientos a soluciones del entorno aunque se produzca un empeoramiento de la función objetivo, de manera que sea posible escapar de los óptimos locales y continuar estratégicamente la búsqueda de mejores soluciones.

Las redes neuronales ("neural networks") son modelos analógicos que tienen como objetivo reproducir en la medida de lo posible las características y la capacidad de procesamiento de información del conjunto de neuronas presentes en el cerebro de los seres vivos. Las características principales de estos modelos son su robustez, tolerancia a fallos, capacidad de adaptación y aprendizaje y la capacidad de procesar información defectuosa.

Los modelos de redes neuronales intentan conseguir unos buenos resultados basándose en una densa interconexión de unos sencillos nodos computacionales llamados neuronas. Aleksander y Morton definen una red neuronal como un "Procesador distribuido paralelo que posee una propensión natural para el almacenamiento de conocimiento experimental haciéndolo disponible para su uso. Recuerda al cerebro humano en dos aspectos: el conocimiento se adquiere mediante un proceso de aprendizaje, y la conexión interneuronal se utiliza para el almacenamiento del conocimiento.

Una ventaja importante que presentan las heurísticas frente a las técnicas que buscan soluciones exactas es que, por lo general, permiten una mayor flexibilidad para el manejo de las características del problema. No suele ser complejo utilizar algoritmos heurísticos que en lugar de funciones lineales utilicen no linealidades. Habitualmente las heurísticas proponen un conjunto de soluciones, ampliando de esta forma las posibilidades de elección del decisor, especialmente cuando existen factores no cuantificables que no han podido ser reflejados en el modelo pero deben ser tenidos en cuenta.

En resumen, podría decirse que el uso de estas técnicas supone la posibilidad de resolver, de forma práctica, problemas de gran complejidad que resultaban intratables mediante técnicas exactas.

## RESUMEN ANTECEDENTES DE LA INVESTIGACIÓN OPERATIVA

<u>AÑO.</u>	<u>AUTOR.</u>	<u>TECNICA DESARROLLADA.</u>
1759	Quesnay	Modelos primarios de programación matemática.
1873	G.Jordan.	Modelos lineales.
1874	Warlas.	Modelos primarios de programación matemática.
1891	Minkousky.	Modelos lineales.
1903	Farkas.	Modelos lineales.
1897	Markov.	Modelos dinámicos probabilísticos.
1905	Erlang.	Líneas de espera.
1920-30	Konig Egervary	Asignación.
1937	Morgerstern.	Lógica estadística.
1937	Von Newman.	Teoría de juegos.
1939	Kantorovich.	Distribución.
1947	G.Dantzig.	Método SIMPLEX.
1950's	Bellman.	Programación dinámica.
	Kun-Tucker.	Programación no lineal.
	Gomory.	Programación entera.
	Ford-Fulkerson.	Redes de flujo.





# CAPÍTULO 2

## FORMULACIÓN DE MODELOS

2.1. DEFINICIÓN DE MODELO .....	33
2.2. FORMA GENERAL DE UN MODELO MATEMÁTICO .....	33
2.3. MODELOS MATEMÁTICOS: CLASIFICACIÓN .....	35
2.4. RECOMENDACIONES PARA LA FORMULACIÓN DE MODELOS .....	36
2.5. ALGUNOS MODELOS .....	37
2.6. BIBLIOGRAFÍA .....	40
2.7. CASOS PRÁCTICOS .....	41
ANEXO 1: INVESTIGACIÓN OPERATIVA: ENTREVISTA CON GEORGE B. DANTZIG .....	43



## 2.1. DEFINICIÓN DE MODELO

- La modelización es una de las áreas más atractivas de la Ingeniería y las ciencias aplicadas. De hecho, los ingenieros necesitan construir modelos para resolver problemas de la vida real.
- El objetivo de un modelo consiste en reproducir la realidad de la forma más fiel posible, tratando de entender cómo se comporta el mundo real y obteniendo las respuestas que pueden esperarse de determinadas acciones.
- En la práctica se utilizan muchos tipos de modelos, la selección del modelo adecuado para reproducir la realidad es una etapa crucial para obtener una solución satisfactoria a un problema real.
- Un modelo de decisión debe considerarse como un vehículo para resumir un problema de decisión en forma tal que haga posible la identificación y evaluación sistemática de todas las alternativas de decisión del problema. Después se llega a una decisión seleccionando la alternativa que se juzgue sea la mejor entre todas las opciones disponibles.
- Un modelo es una abstracción selectiva de la realidad.
- El modelo se define como una **función objetivo** y **restricciones** que se expresan en términos de las **variables** (alternativas) de decisión del problema.
- Una solución a un modelo, aún siendo exacta, no será útil a menos que el modelo mismo ofrezca una representación adecuada de la situación de decisión verdadera.
- El modelo de decisión debe contener tres elementos:
  1. Alternativas de decisión, de las cuales se hace una selección (variables decisión).
  2. Restricciones, para excluir alternativas no factibles.
  3. Criterios para evaluar y clasificar alternativas factibles (función objetivo).

## 2.2. FORMA GENERAL DE UN MODELO MATEMÁTICO

Un modelo matemático comprende principalmente tres conjuntos de elementos:

### 1. Variables Decisión

Como primer paso para poder modelizar ordenadamente un problema de optimización debemos distinguir qué variables son aquellas sobre las que podemos tomar decisiones en el problema y darles un nombre, es decir, debemos darnos cuenta de qué variables están **bajo nuestro control**. Las variables son las incógnitas o decisiones que deben determinarse según se vaya resolviendo el problema ( $X_i$ ). A las variables decisión se les suele llamar *Actividad* y a sus valores *niveles de la actividad*.

## 2. Parámetros de decisión y restricciones

Los parámetros pueden ser determinísticos o probabilísticos y son los valores conocidos que se relacionan con las variables, restricciones y la función objetivo.

Por otro lado, en un problema de optimización intentaremos buscar combinaciones de variables decisión que satisfagan todas las restricciones. Las restricciones son aquellas limitaciones que se deben tener en cuenta, como las tecnológicas, legales, económicas y otras del sistema que van a restringir a las variables decisión en un rango de valores que resulte factible.

## 3. Función objetivo

Define la medida de efectividad que obtiene el sistema cuando los valores de las variables decisión con sus respectivos parámetros y restricciones, dan como resultado una mejora del sistema.

La forma general de un modelo matemático será la siguiente:

**Función Objetivo:**

**MAX**

$$Z = c_1 X_1 + c_2 X_2 + c_3 X_3 + \dots + c_n X_n$$

**MIN**

**Sujeto a:**

$$\begin{array}{rcl}
 a_{11} X_1 + a_{12} X_2 + a_{13} X_3 + \dots + a_{1n} X_n & \begin{array}{c} \geq \\ = \\ \leq \end{array} & b_1 \\
 a_{21} X_1 + a_{22} X_2 + a_{23} X_3 + \dots + a_{2n} X_n & \begin{array}{c} \geq \\ = \\ \leq \end{array} & b_2 \\
 a_{31} X_1 + a_{32} X_2 + a_{33} X_3 + \dots + a_{3n} X_n & \begin{array}{c} \geq \\ = \\ \leq \end{array} & b_3 \\
 \begin{array}{ccccc} -- & -- & -- & -- & -- \\ -- & -- & -- & -- & -- \\ -- & -- & -- & -- & -- \\ -- & -- & -- & -- & -- \end{array} & & \\
 a_{m1} X_1 + a_{m2} X_2 + a_{m3} X_3 + \dots + a_{mn} X_n & \begin{array}{c} \geq \\ = \\ \leq \end{array} & b_m
 \end{array}$$

*Donde :*

$Z$  = Representa la función que se desea optimizar (Maximizar o Minimizar)

$c_j$  = Coeficientes en la Función Objetivo

$X_j$  = **VARIABLES DECISION**

$a_{ij}$  = Coeficientes técnicos.

$b_i$  = Valor que representa la disponibilidad de un recurso **Limitación**: límites de producción, disponibilidad de materia prima, disponibilidad de horas/hombre, etc., o un **Requerimiento**: demanda, compromiso de entrega, etc.

$n$  = número de Variables Decisión.

$m$  = número de Restricciones.

( $n$  no necesariamente debe ser igual a  $m$ )

### 2.3. MODELOS MATEMÁTICOS: CLASIFICACIÓN

Dependiendo de las propiedades de un modelo matemático, éste se puede clasificar fundamentalmente como:

#### - Modelo Lineal

Función Objetivo y Restricciones lineales.

Variables decisión continuas.

Ejemplo: Kilogramos de materia prima ...

#### - Modelo de programación entera (pura o mixta)

Función Objetivo y Restricciones lineales.

Alguna variable decisión discreta.

Ejemplo: N° de servidores a instalar en un sistema informático ...

#### - Modelo no lineal

Función Objetivo y/o Restricciones no lineales.

Ejemplo: Cantidad a comprar de un determinado componente informático en el que dependiendo de la cantidad final el precio cambia ...

Algoritmos a aplicar según las propiedades del modelo:

#### - Modelo Lineal (Obtiene óptimo global)

Algoritmo del Simplex

Algoritmo del Punto Interior

#### - Modelo de programación entera (pura o mixta) (Obtiene óptimo global)

Algoritmo de Bifurcación y Acotación

Algoritmo de Planos de Corte

#### - Modelo no lineal (Obtiene óptimo local)

Algoritmo del Gradiente Reducido Generalizado

**Para seguir leyendo haga click aquí**