

# Méthode des éléments finis

## 1 But du projet et travail demandé

Dans ce projet, on se propose de programmer la méthode des éléments finis en 2D. Cette méthode de résolution d'EDP est très puissante et général car elle repose sur un maillage non structuré de l'espace comme montré en figure 1.

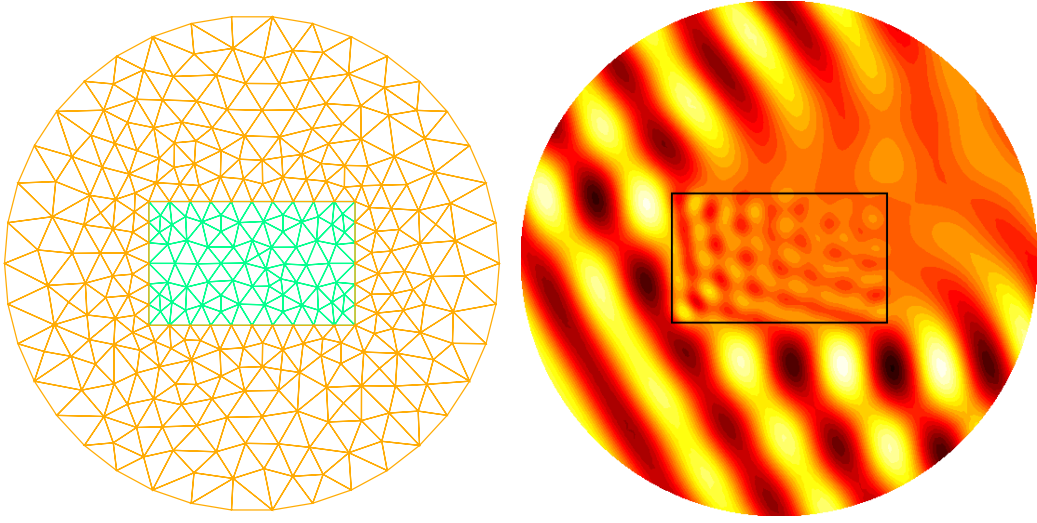


FIGURE 1 – Exemple de maillage non structuré conforme et de carte de champ.

### 1.1 Le problème de diffraction

On souhaite résoudre un problème de diffraction en 2D. Une onde plane est incidente sur un objet de forme quelconque de support  $\Omega^d$ . On se place dans le cas de polarisation TE. On dit que c'est un cas scalaire puisqu'on cherche un champ électrique  $\mathbf{E}$  de la forme  $\mathbf{E} = u(x, y) \mathbf{z}$ . Le champ électrique incident est de la forme :

$$u_i(x, y) = A \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}), \quad (1)$$

avec  $\mathbf{x} = (x, y)$ ,  $\mathbf{k} = (k_0 \cos \theta, k_0 \sin \theta)$  et  $k_0 = 2\pi/\lambda_0$ . On considère l'obstacle plongé dans un milieu homogène isotrope et amagétique caractérisé par sa permittivité relative notée  $\varepsilon_r^m$  ( $m$  comme milieu ambiant). L'obstacle diffractant est caractérisé par sa permittivité relative  $\varepsilon_r^d$  et sa perméabilité relative  $\mu_r^d$  ( $d$  comme diffractant).

La cellule de calcul FEM étant bornée, le premier problème auquel on est confronté est la modélisation du champ incident : par nature, les sources de l'onde plane sont à l'infini. On va dans un premier temps transformer notre problème de diffraction en un problème de rayonnement à sources localisées dans le domaine de calcul.

Notre problème consiste à calculer le champ électromagnétique total (au voisinage de l'objet). Il vérifie l'équation de propagation (Helmholtz) suivante :

$$\operatorname{div} [\mu_r(\mathbf{r})^{-1} \operatorname{grad} u] + k_0^2 \varepsilon_r(\mathbf{r}) u = 0, \quad (2)$$

où  $\varepsilon_r$  et  $\mu_r$  sont des fonctions définies par morceau de la manière suivante :

$$\varepsilon_r(\mathbf{r}) = \begin{cases} \varepsilon_r^d & \text{si } \mathbf{r} \in \Omega_d \\ \varepsilon_r^m & \text{sinon} \end{cases} \quad \text{et} \quad \mu_r(\mathbf{r}) = \begin{cases} \mu_r^d & \text{si } \mathbf{r} \in \Omega_d \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}. \quad (3)$$

Le champ incident est par définition le champ en l'absence d'objet diffractant et il vérifie lui aussi une équation de propagation :

$$\operatorname{div} [\mu_r^a(\mathbf{r})^{-1} \operatorname{grad} u_i] + k_0^2 \varepsilon_r^a(\mathbf{r}) u_i = 0, \quad (4)$$

où les caractéristiques opto-géométriques d'un problème annexe sont introduites :  $\varepsilon_r^a(\mathbf{r})$  et  $\mu_r^a(\mathbf{r})$  qui sont partout constants et valent respectivement  $\varepsilon_r^m$  et 1. Ce problème annexe correspond en fait simplement à la propagation dans le milieu ambiant homogène et est trivial (cf équation 1).

On introduit à présent le champ diffracté  $u_d$  qui sera notre inconnue numérique.

$$u_d := u - u_i. \quad (5)$$

En introduisant cette expression dans l'éq. 2, on obtient par linéarité :

$$\operatorname{div} [\mu_r(\mathbf{r})^{-1} \operatorname{grad} u_d] + k_0^2 \varepsilon_r(\mathbf{r}) u_d + \operatorname{div} [\mu_r(\mathbf{r})^{-1} \operatorname{grad} u_i] + k_0^2 \varepsilon_r(\mathbf{r}) u_i = 0, \quad (6)$$

à laquelle il est habile de retrancher l'équation 4 correspondant au problème annexe :

$$\operatorname{div} [\mu_r(\mathbf{r})^{-1} \operatorname{grad} u_d] + k_0^2 \varepsilon_r(\mathbf{r}) u_d = \operatorname{div} [(\mu_r^a(\mathbf{r})^{-1} - \mu_r(\mathbf{r})^{-1}) \operatorname{grad} u_i] + k_0^2 (\varepsilon_r^a(\mathbf{r}) - \varepsilon_r(\mathbf{r})) u_i, \quad (7)$$

On reconnaît aisément à gauche notre terme « propagateur » de type Helmholtz. En ce qui concerne le membre de droite, il est fondamentale de remarquer deux choses. D'abord, il est non nul uniquement dans l'obstacle diffractant. En effet,  $\varepsilon_r^a(\mathbf{r}) - \varepsilon_r(\mathbf{r})$  est nul en dehors de  $\Omega_d$  et vaut  $\varepsilon_r^m - \varepsilon_r^d$  dans  $\Omega_d$ , soit le contraste de permittivité entre l'objet et son milieu (même chose pour l'inverse de la perméabilité). Ensuite, tous les termes sont des données d'entrée du problème :  $k_0$ , les contrastes de permittivité et de perméabilité et le champ incident  $u_i$  sont connus. Ainsi le membre de droite est un terme source localisé dans l'objet diffractant et le champ diffracté « rayonne » depuis l'objet. Il peut satisfaire une *condition d'onde sortante* (ou de *Sommerfeld*) [1], soit en 2D et avec une dépendance temporelle en  $e^{-i\omega t}$  :

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} \sqrt{r} \left[ \frac{\partial u_d}{\partial r} - ik_0 u_d \right] = 0 \quad \text{avec } r = \sqrt{x^2 + y^2}. \quad (8)$$

Cela traduit que le champ diffracté recherché se propage de manière sortante. La propagation se fait depuis les sources vers l'extérieur, et ce avec une décroissance plus rapide que  $1/\sqrt{r}$  (en 2D,  $1/r$  en 3D). On notera que l'onde plane champ incidente quant à elle entre d'un côté de la cellule de calcul et ressort de l'autre. C'est très important car cette condition garantit l'unicité de la solution (il pourrait y avoir des solutions entrantes). En conclusion, le champ diffracté paraît plus adapté que le champ total. On recherche donc le champ  $u_d$  tel que :

$$\begin{cases} \operatorname{div} [\mu_r(\mathbf{r})^{-1} \operatorname{grad} u_d] + k_0^2 \varepsilon_r(\mathbf{r}) u_d = \mathcal{S}(\mathbf{r}) \\ \text{où } u_d \text{ satisfait une condition d'onde sortante} \end{cases}, \quad (9)$$

avec  $\mathcal{S}(\mathbf{r}) = \operatorname{div} [(\mu_r^a(\mathbf{r})^{-1} - \mu_r(\mathbf{r})^{-1}) \operatorname{grad} u_i] + k_0^2 (\varepsilon_r^a(\mathbf{r}) - \varepsilon_r(\mathbf{r})) u_i$ .

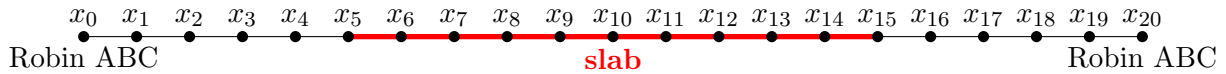


FIGURE 2 – Un premier maillage 1D pour traiter le cas du slab.

## 1.2 Travail demandé

### 1.2.1 Cas 1D

Commencer par le cas 1D avec un maillage uniforme. Le problème de diffraction en 1D revient au problème canonique du *slab* en incidence normale, comme indiqué en figure 2. On commencera par adapter les détails ci-dessus au cas 1D. C'est un calcul classique [2, 3, 4]. Vous vérifiez vos résultats (bilan d'énergie) auprès de vos camarades du projet « empilement multicouches ».

### 1.2.2 Cas 2D

On souhaite à présent traiter le cas 2D avec maillage non structuré. Il s'agit donc de résoudre l'équation 9 en utilisant la méthode des éléments finis. L'inconnue étant scalaire, on peut utiliser une base dite nodale d'ordre 1 (dits éléments Lagrange ou de type  $\mathcal{P}_1$ ). On tronquera le milieu ambiant par une condition de type Robin (ou ABC, *Absorbing Boundary Condition*).

On utilisera le puissant logiciel libre Gmsh<sup>1</sup> pour définir la géométrie du problème et générer le maillage. Il restera cependant à lire le fichier de maillage (`.msh`<sup>2</sup>). On pourra s'aider de routines existantes<sup>3,4</sup>. Pour l'étape dite d'assemblage des éléments finis, on pourra par exemple consulter les ouvrages [2, 3, 4]. Les cartes de champ seront tracées avec `matplotlib` dans un premier temps.

## 2 Validation sur un exemple connu

Pour le modèle 1D, il suffit de comparer les résultats au calcul analytique sur le slab [1].

On donne en figure 3 un résultat de calcul correct. Demander et comparer vos résultats avec vos camarades du projet « la diffraction par une tige circulaire ». Un autre exemple de validation est d'ailleurs présent dans le sujet de ce projet.

## 3 Applications

Plusieurs exemples d'application sont listés ci-dessous :

- On éclaire en incidence normale une couche d'or<sup>5</sup> de 8nm en lévitation dans l'air. Calculer l'énergie transmise, absorbée et réfléchie sur tout le spectre visible. Calculer la couleur perçue en réflexion. Faire de même avec du cuivre et de l'aluminium.
- Illustrer le concept de bandgap d'un cristal photonique [5].
- Modéliser une cape d'invisibilité [6].
- Aider à l'interprétation du projet « tube acoustique » (Luminy).
- Modéliser une équation de la chaleur et se rapprocher des camarades du projet correspondant (Saint-Jérôme). pour comparaisons et discussions.

1. [www.gmsh.info](http://www.gmsh.info)

2. [www.gmsh.info/doc/texinfo/gmsh.html#index-MSH4-file](http://www.gmsh.info/doc/texinfo/gmsh.html#index-MSH4-file)

3. [pypi.org/project/meshio](http://pypi.org/project/meshio)

4. <https://gitlab.onelab.info/gmsh/gmsh/tree/master/utils/converters/matlab>

5. [refractiveindex.info](http://refractiveindex.info)

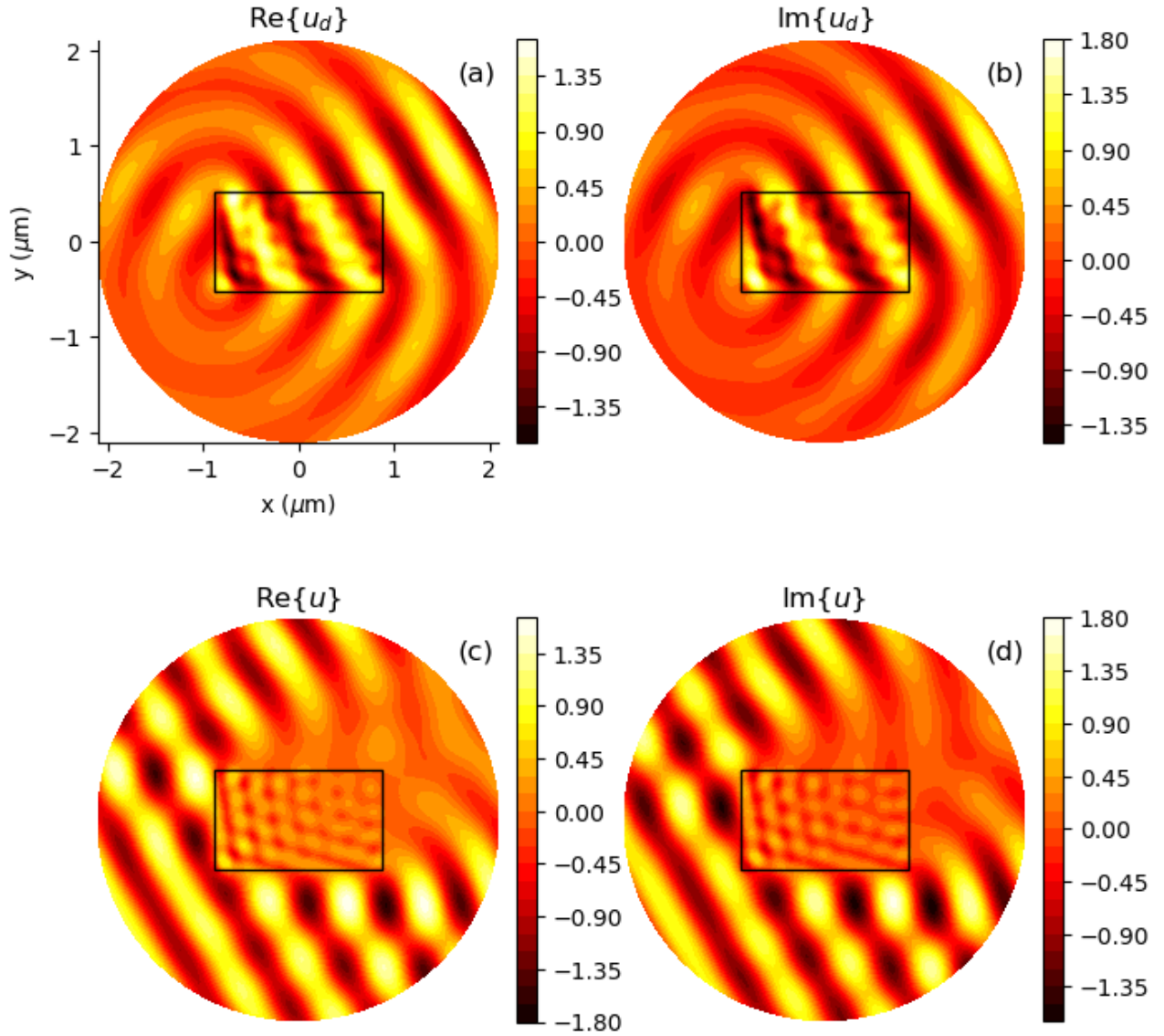


FIGURE 3 – Parties réelles et imaginaires du champ diffracté et du champ total en polarisation TE pour  $\lambda_0 = 700\text{nm}$ ,  $\theta_0 = 30^\circ$ ,  $d_x = 2.5\lambda_0$ ,  $d_y = 1.5\lambda_0$ ,  $\varepsilon_r^d = 9 + i$  et  $\varepsilon_r^m = 1$ . Le rayon du domaine de calcul est de  $3\lambda_0$  et l'amplitude de l'onde plane incidente vaut  $A = 1$ .

#### 4 Pour aller plus loin ...

- L'assemblage est plus longue que l'étape de résolution du système linéaire. Accélérer cette étape en utilisant `cython`<sup>6</sup>[7].
- Remplacer la condition de Robin extérieure (ABC) par des PMLs (Perfectly Matched Layers).

#### Références

- [1] Roger Petit. *Ondes électromagnétiques en radioélectricité et en optique*, volume 2. Masson Paris, 1989.

---

6. [cython.org](http://cython.org)

- [2] Mats G Larson and Fredrik Bengzon. The finite element method : theory, implementation, and practice. *Texts in Computational Science and Engineering*, 10, 2010.
- [3] Jian-Ming Jin. *Theory and computation of electromagnetic fields*. John Wiley & Sons, 2011.
- [4] voir à la BU rayon Maths.
- [5] John D Joannopoulos, Steven G Johnson, Joshua N Winn, and Robert D Meade. *Photonic crystals : molding the flow of light*. Princeton university press, 2011.
- [6] Frédéric Zolla, Sébastien Guenneau, André Nicolet, and JB Pendry. Electromagnetic analysis of cylindrical invisibility cloaks and the mirage effect. *Optics letters*, 32(9) :1069–1071, 2007.
- [7] Dag Sverre Seljebotn. Fast numerical computations with cython. In *Proceedings of the 8th Python in Science Conference*, volume 37, 2009.