Formulaire de mathématiques

Titouan Christophe

4 septembre 2014

1 Suites

Si la suite $|a_k|_k$ converge, alors la suite $(a_k)_k$ converge également, mais la réciproque n'est pas vraie

$$\lim_{k \to \inf}(1 + \frac{1}{k})^{xk} = e^x \tag{1}$$

2 Séries

2.1 Opérations

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda i = \lambda \sum_{i=1}^{n} i \tag{2}$$

$$\sum_{i=1}^{n}(i^x + i^y) = \sum_{i=1}^{n} i^x + \sum_{i=1}^{n} i^y \tag{3}$$

2.2 Valeur

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2} \tag{4}$$

$$\sum_{i=k}^{n}(ai + b) = a \times \frac{n(n+1) - k(k-1)}{2} + b(n - k + 1) \tag{5}$$

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \tag{6}$$

2.3 Convergence

Si $|x| < 1$

$$\sum_{i=1}^{\inf} x^i = \frac{1}{1-x} \tag{7}$$

Série harmonique

$$\sum_{i=1}^{\inf} \frac{1}{i^m} \tag{8}$$

Converge ssi $m > 1$

3 Analyse de fonctions

3.1 Fonctions réelles

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : (x, y) \to f(x, y) = z$. Sa matrice Hessienne est donnée par

$$\mathbb{H}_f = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r(x, y) & s(x, y) \\ s(x, y) & t(x, y) \end{pmatrix} \tag{9}$$

— Si $det(\mathbb{H}_f)(x, y) < 0$, alors (x, y) est un point de selle
— Si $r(x, y) > 0$, alors (x, y) est un **minimum** local
— Si $r(x, y) < 0$, alors (x, y) est un **maximum** local

4 Série de Fourier réelle

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, 2π périodique. Sa série de Fourier est

$$\begin{cases} S_f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\inf} a_n \cos(nt) + b_n \sin(nt) \\ a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) dt \\ a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos(nt) dt \\ b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin(nt) dt \end{cases} \tag{10}$$

— Si f est **paire**, tous les coefficients b_n sont nuls.
— Si f est **impaire**, tous les coefficients a_n sont nuls.

5 Quelques dérivées et intégrales utiles

$$\frac{\partial f}{\partial x} \sin(kx) = k \cos(kx) \Leftrightarrow \int \sin(kx) dx = \frac{-\cos(kx)}{k} \tag{11}$$

$$a \tag{12}$$