Problema de PVI

Marcio Barros e Claudemir Woche

24 de Setembro de 2020

1 Introdução

Seja o problema de uma partícula em queda livre com resistência do ar dado pela eqição diferencial ordianária.

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{dy}{dt}.(\frac{k}{m}) + g = 0 \tag{1}$$

Podemos então definir o estado da particula como $S(t) = (v(t), y(t))$, e assim reescrever o problema como.

$$\frac{dS}{dt} = (\frac{dv}{dt}, v(t)) \tag{2}$$

pela equação (1) e (2) temos que

$$\frac{dS}{dt} = (-g - (\frac{k}{m})v(t), v(t)) \tag{3}$$

com $S(t_0) = (v_0, y_0)$

Aplicando o método de Euler explícito em (3), obtemos.

$$S_k = S_{k-1} + \Delta t \frac{dS}{dt} \tag{4}$$

portanto.

$$S_k = (y_k, v_k) = (y_{k-1} + \Delta t.v_{k-1}, v_{k-1} + \Delta t.(-g - \frac{k}{m}v_{k-1})) \tag{5}$$

Agora pelo método de Euler implícito a equação (5) ficará.

$$S_k = (y_k, v_k) = (y_{k-1} + \Delta t.v_k, v_{k-1} + \Delta t.(-g - \frac{k}{m}v_k)) \tag{6}$$

desenvolvendo tal que v_k saia da equação.

$$S_k = (y_k, v_k) = (\frac{m}{m + k\Delta t}(y_k - g\Delta t), y_k + \frac{m\Delta t}{m + k\Delta t}(y_k - g\Delta t)) \tag{7}$$

2 Código Método Euler Explícito

```
def PVI(h, v, k, m, delta):
    list_t=[]
    list_h=[]
    i=0
    list_t.append(0)
    list_h.append(h)
    critico=0
    while(list_h[i]>0):
        i=i+1
        list_t.append(delta*i)
        list_h.append(list_h[i-1]+delta*v)
        vant=v
        v=v+delta*(-10-(k/m)*v)
        if(vant*v<0):
            critico=list_t[i-1]+delta/2
            hmax=list_h[i-1]+(delta/2)*v
    list_t.append(list_t[i-1]+delta/2)
    list_h.append(list_h[i-1]+(delta/2)*v)
    plt.plot(list_t,list_h)
    return v,list_t[i+1],critico,hmax,list_h[i+1]
```

Figura 1: Código do método de Euler explícito

Podemos ver o código onde dado os parametros de altura inicial, velocidade inicial, constante k, massa e o Δt respectivamente, irá obter a sequência de valores S_k e nos devolve os valores da velocidade final, o tempo final, ponto crítico, altura máxima e o valor aproximado do nível do mar, respectivamente.

Aplicando para os valores de $H_0 = 200$, $v_0 = 5$, $k = 0.25$, $m = 2$, e com diferentes valores de Δt, obtemos os seguintes resultados.

Δt	t	Altura Máxima
0.1	0.45	201.35872903312685
0.01	0.485	201.22388635009906
0.001	0.4845	201.20265739951964
0.0001	0.48495	201.20048444234698

Δt	Tempo Final	Velocidade Final
0.1	7.8500000000000005	-48.533374942779815
0.01	7.795	-47.95819766723352
0.001	7.7905	-47.904514416104774
0.0001	7.789750000000001	-47.89794102320015

Δt	Tempo Final	Nível do Mar
0.1	7.8500000000000005	-1.3461628815810993
0.01	7.795	-0.09502869760505603
0.001	7.7905	-0.019936426391585663
0.0001	7.789750000000001	0.0019230425297018941

3 Código Método Euler Implícito

Código análogo ao anterior, com a mesmas entradas e saídas.

```
def PVI(h, v, k, m, delta):
    list_t=[]
    list_h=[]
    i=0
    list_t.append(0)
    list_h.append(h)
    critico=0
    while(list_h[i]>0):
        i=i+1
        list_t.append(delta*i)
        list_h.append(list_h[i-1]+((m*delta)/(m+k*delta))*(v-10*delta))
        vant=v
        v=(m/(m+k*delta))*(v-10*delta)
        if(vant*v<0):
            critico=list_t[i-1]+delta/2
            hmax=list_h[i-1]+((m*(delta/2))/(m+k*(delta/2)))*(v-10*delta)
    list_t.append(list_t[i-1]+delta/2)
    list_h.append(list_h[i-1]+((m*(delta/2))/(m+k*(delta/2)))*(v-10*delta))
    plt.plot(list_t,list_h)
    return v,list_t[i+1],critico,hmax,list_h[i+1]
```

Figura 2: Código do método de Euler Implícito

Aplicando para os valores de $H_0 = 200$, $v_0 = 5$, $k = 0.25$, $m = 2$, e com diferentes valores de Δt, obtemos os seguintes resultados.

Δt	t	Altura Máxima
0.1	0.45	200.9078928655108
0.01	0.485	201.1753873876815
0.001	0.4855	201.1978073734709
0.0001	0.48505000000000004	201.19999943950728

Δt	Tempo Final	Velocidade Final
0.1	7.75	-47.74430242587237
0.01	7.785	-47.879021787358916
0.001	7.7895	-47.89659463025376
0.0001	7.789750000000001	-47.89755028855338

Δt	Tempo Final	Nível do Mar
0.1	7.75	0.3067725103913994
0.01	7.785	0.07121924859540313
0.001	7.7895	-0.00329816368739759
0.0001	7.789750000000001	-0.001202848632990106

4 Comparação

Comparação dos tempos finais com $t = 7.7897573665027$ sendo o tempo exato.

Δt	Implícito	Erro	Explícito	Erro
0.1	7.75	0.03975737	7.8500000000000005	0.06024263
0.01	7.785	0.004757367	7.795	0.005242633
0.001	7.7895	0.0002573665	7.7905	0.0007426335
0.0001	7.789750000000001	7.366503e-6	7.789750000000001	7.366503e-6

Comparação das alturas máximas com $Hmax = 201.2002420374817$ sendo a altura exata.

Δt	Implícito	Erro	Explícito	Erro
0.1	200.9078928655108	0.29234917	201.35872903312685	0.06024263
0.01	201.1753873876815	0.02485465	201.22388635009906	0.005242633
0.001	201.1978073734709	0.002434664	201.20265739951964	0.0007426335
0.0001	201.19999943950728	0.000242598	201.20048444234698	7.366503e-6

Comparação dos pontos críticos com $t = 0.4849969722874$ sendo ponto crítico exata.

Δt	Implícito	Erro	Explícito	Erro
0.1	0.45	0.03499697	0.45	0.03499697
0.01	0.485	3.027713e-6	0.485	3.027713e-6
0.001	0.4855	0.0005030277	0.4845	0.0004969723
0.0001	0.48505000000000004	5.302771e-5	0.48495	4.697229e-5

Comparação das velocidades finais com $v = -47.8975745754916$ sendo a velocidade final exata.

Δt	Implícito	Erro	Explícito	Erro
0.1	-47.74430242587237	0.1532721	-48.533374942779815	0.63580037
0.01	-47.879021787358916	0.01855279	-47.95819766723352	0.06062309
0.001	-47.89659463025376	0.0009799452	-47.904514416104774	0.006939841
0.0001	-47.89755028855338	2.428694e-5	-47.89794102320015	0.0003664477