



# Método das Diferenças Finitas

Claudemir Woche e Márcio Barros

18 de outubro de 2020

# 1 PVC1

Primeiro Problema de Valor de Contorno.

$$PVC1 : \begin{cases} \frac{d^2 y(x)}{dx^2} - y(x) = 0 \\ y(0) = 0 \\ y(1) = 1 \end{cases} \quad (1)$$

Este PVC busca a função  $y(x)$  que satisfaz a equação diferencial e as condições de contorno especificadas ( $y(0) = 0$  e  $y(1) = 0$ ). Neste exemplo, o domínio é o intervalo  $[0, 1] \subset \mathbf{R}$ .

## 1.1 Solução do Problema

A solução exata de um PVC deve satisfazer tanto a Equação Diferencial do problema quanto as condições de contorno. Assim, para o problema (1) – PVC1 –, a solução exata é

$$y(x) = \frac{1}{e^{-1} - e}(e^{-x} - e^x) \quad (2)$$

A solução aproximada obtida pelo método das diferenças finitas está compilada abaixo. Para  $N = 8$  temos o seguinte sistema de equações:

$$\begin{bmatrix} -129 & 64 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 64 & -129 & 64 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 64 & -129 & 64 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 64 & -129 & 64 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 64 & -129 & 64 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 64 & -129 & 64 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 64 & -129 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -64 \end{bmatrix} \quad (3)$$

Com as seguintes comparações:

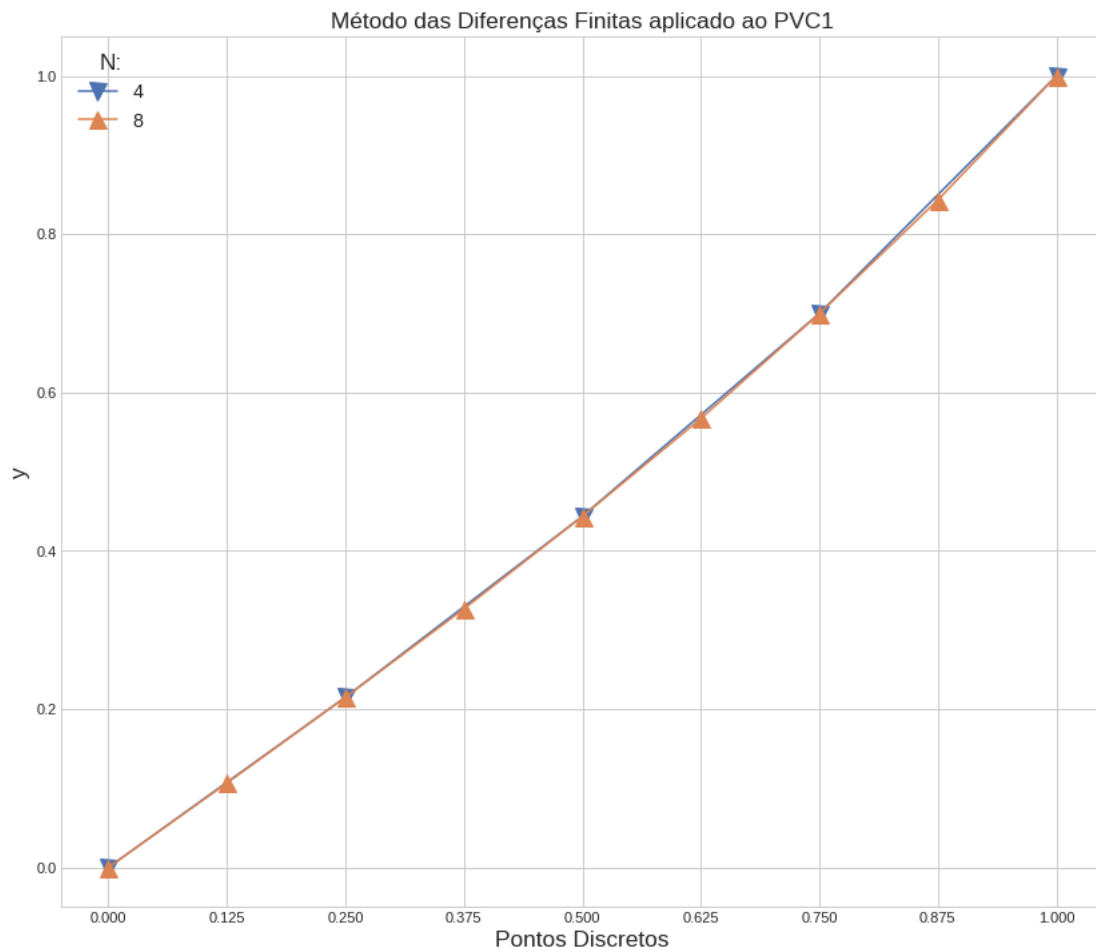
$x$	y Obtido	y Real	Erro Relativo
0	0	0	0
0.125	0.10666	0.10664	0.00020
<b>0.25</b>	<b>0.21499</b>	<b>0.21495</b>	<b>0.00018</b>
0.375	0.32666	0.32662	0.00017
<b>0.5</b>	<b>0.44347</b>	<b>0.44340</b>	<b>0.00015</b>
0.625	0.56719	0.56713	0.00012
<b>0.75</b>	<b>0.69978</b>	<b>0.69972</b>	<b>8.59041e-05</b>
0.875	0.84330	0.84326	4.54633 e-05
1	1	1	0

OBS1: Os valores foram truncados a partir da quinta casa decimal.

OBS2: Os valores obtidos para N=4 estão em negrito.

## 1.2 Gráfico

Para  $N = 4$  e  $N = 8$  temos o seguinte gráfico comparativo.



## 2 PVC2

Segundo Problema de Valor de Contorno.

$$PVC2 : \begin{cases} \frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2} = 4 \\ u(x, 0) = 0 \\ u(x, 1) = 0 \\ u(0, y) = 0 \\ u(1, y) = 0 \end{cases} \quad (4)$$

Este PVC busca a função  $u(x, y)$  que satisfaz a equação diferencial e as condições de contorno especificadas nas quatro bordas (contorno) do domínio bidimensional (quadrado de lado 1):  $[0, 1] \times [0, 1] \subset \mathbf{R}^2$ .

### 2.1 Solução do Problema

A solução aproximada obtida pelo método das diferenças finitas está compilada abaixo.

Para  $N = 8$  temos um sistema de 49 equações e 49 incógnitas.  
Que tem o seguinte resultado:

```
[ -0.07112 -0.11098 -0.13166 -0.1381 -0.13166 -0.11098 -0.07112 -0.11098  
-0.17865 -0.21507 -0.22656 -0.21507 -0.17865 -0.11098 -0.13166 -0.21507  
-0.26091 -0.27551 -0.26091 -0.21507 -0.13166 -0.1381 -0.22656 -0.27551  
-0.29113 -0.27551 -0.22656 -0.1381 -0.13166 -0.21507 -0.26091 -0.27551  
-0.26091 -0.21507 -0.13166 -0.11098 -0.17865 -0.21507 -0.22656 -0.21507  
-0.17865 -0.11098 -0.07112 -0.11098 -0.13166 -0.1381 -0.13166 -0.11098  
-0.07112]
```

## 2.2 Gráficos

Para  $N = [4, 8, 30]$  temos os seguintes gráficos.

