Método preditor-corretor de quarta ordem

Claudemir Woche e Márcio Barros

12 de outubro de 2020

1 Desenvolvimento do método preditor-corretor de quarta ordem

1.1 Preditor

Neste método $k = 3$. Portanto, os pontos $(t_{i-3}, \mathcal{F}(S_{i-3}, t_{i-3}))$, $(t_{i-2}, \mathcal{F}(S_{i-2}, t_{i-2}))$, $(t_{i-1}, \mathcal{F}(S_{i-1}, t_{i-1}))$ e $(t_i, \mathcal{F}(S_i, t_i))$ serão usados para construir a função $\frac{dS(t)}{dt} \approx g(t)$ que será usada como integrando na equação:

$$S_{i+1} = S_i + \int_{t_i}^{t_{i+1}} g(t)dt \tag{1}$$

Neste caso, a função $g(t)$ é um polinômio de interpolação de terceiro grau. A integral que aparece na equação (1) fica mais fácil de calcular se for feita uma mudança de variáveis como no caso do desenvolvimento das fórmulas de integração de Newton-Cotes. Assim

$$I = \int_{t_i}^{t_{i+1}} g(t)dt = \int_3^4 g(t(r))\frac{dt(r)}{dr}dr = \int_3^4 \hat{g}(r)\frac{dt(r)}{dr}dr \tag{2}$$

onde $\hat{g}(r)$ é o polinômio de interpolação de Newton de terceiro grau na variável r com os pontos de interpolação $(t_{i-3}, \mathcal{F}(S_{i-3}, t_{i-3}))$, $(t_{i-2}, \mathcal{F}(S_{i-2}, t_{i-2}))$, $(t_{i-1}, \mathcal{F}(S_{i-1}, t_{i-1}))$, $(t_i, \mathcal{F}(S_i, t_i))$ e $t(r)$ é a parametrização da variável t como função da nova variável r em que $r = 0$ corresponde a t_{i-3}. Assim, tem-se

$$t(r) = t_{i-3} + r\Delta t \tag{3}$$

$$\tfrac{dt(r)}{dr} = \Delta t \tag{4}$$

$$\hat{g}(r) = \sum_{i=0}^{3} \Delta_0^i \mathcal{F}_{i-3} \frac{r!}{i!(r-i)!} = \Delta_0^0 \mathcal{F}_{i-3} + \Delta_0^1 \mathcal{F}_{i-3} r + \frac{1}{2}\Delta_0^2 \mathcal{F}_{i-3} r(r-1) + \frac{1}{6}\Delta_0^3 \mathcal{F}_{i-3} r(r-1)(r-2) \tag{5}$$

$$\begin{array}{l} \Delta_0^0 \mathcal{F}_{i-3} = \mathcal{F}_{i-3} \\ \Delta_0^1 \mathcal{F}_{i-3} = \mathcal{F}_{i-2} - \mathcal{F}_{i-3} \\ \Delta_0^2 \mathcal{F}_{i-3} = \mathcal{F}_{i-1} - 2\mathcal{F}_{i-2} + \mathcal{F}_{i-3} \\ \Delta_0^2 \mathcal{F}_{i-3} = \mathcal{F}_{i} - 3\mathcal{F}_{i-1} + 3\mathcal{F}_{i-2} - \mathcal{F}_{i-3} \end{array} \tag{6}$$

Substituindo (4), (5) e (6) na fórmula (2):

$$
\begin{aligned}
I &= \int_3^4 \hat{g}(r)\frac{dt(r)}{dr}dr \\
&= \Delta t\left(\Delta_0^0\mathcal{F}_{i-3}\int_3^4 dr + \Delta_0^1\mathcal{F}_{i-3}\int_3^4 rdr + \frac{1}{2}\Delta_0^2\mathcal{F}_{i-3}\int_3^4 (r^2-r)dr + \frac{1}{6}\Delta_0^3\mathcal{F}_{i-3}\int_3^4 (r^3-3r^2+2r)dr\right) \\
&= \Delta t\left(\Delta_0^0\mathcal{F}_{i-3} + \Delta_0^1\mathcal{F}_{i-3}\frac{7}{2} + \frac{1}{2}\Delta_0^2\mathcal{F}_{i-3}\frac{53}{6} + \frac{1}{6}\Delta_0^3\mathcal{F}_{i-3}\frac{55}{4}\right) \\
&= \Delta t\left(\mathcal{F}_{i-3} + \frac{7}{2}(\mathcal{F}_{i-2}-\mathcal{F}_{i-3}) + \frac{53}{12}(\mathcal{F}_{i-1}-2\mathcal{F}_{i-2}+\mathcal{F}_{i-3}) + \frac{55}{24}(\mathcal{F}_{i}-3\mathcal{F}_{i-1}+3\mathcal{F}_{i-2}-\mathcal{F}_{i-3})\right) \\
&= \Delta t\left(\mathcal{F}_{i-3}(1-\frac{7}{2}+\frac{53}{12}-\frac{55}{24}) + \mathcal{F}_{i-2}(\frac{7}{2}-\frac{53}{6}+\frac{55}{8}) + \mathcal{F}_{i-1}(\frac{53}{12}-\frac{55}{8}) + \mathcal{F}_{i}\frac{55}{24}\right) \\
&= \Delta t\left(-\frac{3}{8}\mathcal{F}_{i-3} + \frac{37}{24}\mathcal{F}_{i-2} - \frac{59}{24}\mathcal{F}_{i-1} + \frac{55}{24}\mathcal{F}_{i}\right)
\end{aligned}
\tag{7}
$$

Substituindo-se o resultado de (7) em (1), temos a fórmula da predição:

$$\bar{S}_{i+1} = S_i + \frac{\Delta t}{24}(-9\mathcal{F}_{i-3} + 37\mathcal{F}_{i-2} - 59\mathcal{F}_{i-1} + 55\mathcal{F}_i)$$

1.2 Corretor

Agora que se tem uma estimativa de $\bar{S}_{i+1}$ calculada a partir da história formada pelos últimos 4 estados, pode-se repetir o processo construindo $g(t)$ a partir dos pontos $\mathcal{F}(S_{i-2}, t_{i-2}), \mathcal{F}(S_{i-1}, t_{i-1}), \mathcal{F}(S_i, t_i)$ e $\mathcal{F}(\bar{S}_{i+1}, t_{i+1})$. Assim

$$\hat{g}(r) = \sum_{i=0}^{3}\Delta_0^i\mathcal{F}_{i-2}\frac{r!}{i!(r-i)!} = \Delta_0^0\mathcal{F}_{i-2} + \Delta_0^1\mathcal{F}_{i-2}r + \frac{1}{2}\Delta_0^2\mathcal{F}_{i-2}r(r-1) + \frac{1}{6}\Delta_0^2\mathcal{F}_{i-2}r(r-1)(r-2) \tag{8}$$

$$
\begin{aligned}
\Delta_0^0\mathcal{F}_{i-2} &= \mathcal{F}_{i-2} \\
\Delta_0^1\mathcal{F}_{i-2} &= \mathcal{F}_{i-1} - \mathcal{F}_{i-2} \\
\Delta_0^2\mathcal{F}_{i-2} &= \mathcal{F}_{i} - 2\mathcal{F}_{i-1} + \mathcal{F}_{i-2} \\
\Delta_0^2\mathcal{F}_{i-2} &= \mathcal{F}_{i+1} - 3\mathcal{F}_{i} + 3\mathcal{F}_{i-1} - \mathcal{F}_{i-2}
\end{aligned}
\tag{9}
$$

Substituindo (8) e (9) na fórmula (2):

$$
\begin{aligned}
I &= \int_2^3 \hat{g}(r)\frac{dt(r)}{dr}dr \\
&= \Delta t\left(\Delta_0^0\mathcal{F}_{i-2}\int_2^3 dr + \Delta_0^1\mathcal{F}_{i-2}\int_2^3 rdr + \frac{1}{2}\Delta_0^2\mathcal{F}_{i-2}\int_2^3(r^2-r)dr + \frac{1}{6}\Delta_0^3\mathcal{F}_{i-2}\int_2^3(r^3-3r^2+2r)dr\right) \\
&= \Delta t\left(\Delta_0^0\mathcal{F}_{i-2} + \Delta_0^1\mathcal{F}_{i-2}\frac{5}{2} + \frac{1}{2}\Delta_0^2\mathcal{F}_{i-2}\frac{23}{6} + \frac{1}{6}\Delta_0^3\mathcal{F}_{i-2}\frac{9}{4}\right) \\
&= \Delta t\left(\mathcal{F}_{i-2} + \frac{5}{2}(\mathcal{F}_{i-1}-\mathcal{F}_{i-2}) + \frac{23}{12}(\mathcal{F}_i - 2\mathcal{F}_{i-1} + \mathcal{F}_{i-2}) + \frac{3}{8}(\mathcal{F}_{i+1} - 3\mathcal{F}_i + 3\mathcal{F}_{i-1} - \mathcal{F}_{i-2})\right) \\
&= \Delta t\left(\mathcal{F}_{i-2}(1-\frac{5}{2}+\frac{23}{12}-\frac{3}{8}) + \mathcal{F}_{i-1}(\frac{5}{2}-\frac{23}{6}+\frac{9}{8}) + \mathcal{F}_i(\frac{23}{12}-\frac{9}{8}) + \mathcal{F}_{i+1}\frac{3}{8}\right) \\
&= \Delta t\left(\frac{1}{24}\mathcal{F}_{i-2} - \frac{5}{24}\mathcal{F}_{i-1} + \frac{19}{24}\mathcal{F}_i + \frac{3}{8}\mathcal{F}_{i+1}\right)
\end{aligned} \tag{10}
$$

Substituindo-se o resultado de (10) em (1), temos a fórmula da correção:

$$S_{i+1} = S_i + \frac{\Delta t}{24}(\mathcal{F}_{i-2} - 5\mathcal{F}_{i-1} + 19\mathcal{F}_i + 9\mathcal{F}_{i+1})$$