Curso: Métodos Numéricos II
Professor: Creto Augusto Vidal
Semestre: 2020.1
Aula # 16

1. Objetivo: Aplicar os métodos de integração estudados nas aulas anteriores para cálculo de áreas de superfícies e volumes (continuação para discutir o cálculo de volumes)

2. Volumes de sólidos.

O elemento básico para calcular volumes em coordenadas cartesianas é o paralelepípedo reto de lados a_x, a_y e a_z. Seu volume é dado por

(1) $V = a_x a_y a_z.$

Se os ângulos entre as arestas são todos ângulos retos, o volume é simplesmente o produto dos tamanhos das três arestas mutuamente perpendiculares. Se este paralelepípedo tiver lados extremamente pequenos dx, dy e dz, seu volume será definido como

(2) $dV = dxdydz.$

Usando este volume infinitesimal, podemos calcular o volume de qualquer sólido contando quantos volumes deste cabem dentro do sólido, em outras palavras, acumulando os volumes infinitesimais que preenchem todo o espaço volumétrico do sólido desejado.

No cálculo do volume de um sólido, o acúmulo dos volumes infinitesimais é representado por loops de empilhamento aninhados que, são "somatórios contínuos" marcados pelo sinal

(3) $V = \int_D dV,$

onde V é o volume do sólido, $D \subset \mathbb{R}^3$ é o domínio ou região finita do espaço 3D ocupado pelo sólido e dV é o elemento infinitesimal de volume o qual, no sistema cartesiano, é expresso como na equação (2).

No cálculo da integral que aparece na equação (3), muitas vezes se recorre a mudanças de variáveis do sistema cartesiano xyz para um outro sistema qualquer $\alpha\beta\gamma$, por exemplo. Assim, em alto nível, essa mudança de variáveis é escrita como

$$\begin{aligned} V &= \int_D dV = \int_D dxdydz \\ &= \int_\Omega |J| d\Omega = \int_D \left| det\left(\begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \alpha} & \frac{\partial x}{\partial \beta} & \frac{\partial x}{\partial \gamma} \\ \frac{\partial y}{\partial \alpha} & \frac{\partial y}{\partial \beta} & \frac{\partial y}{\partial \gamma} \\ \frac{\partial z}{\partial \alpha} & \frac{\partial z}{\partial \beta} & \frac{\partial z}{\partial \gamma} \end{bmatrix}\right)\right| d\alpha d\beta d\gamma \end{aligned} \quad (4)$$

onde $|J|$ é o valor absoluto do determinante da matriz Jacobiana, $\mathbf{J}$

$$(5) \quad \mathbf{J} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \alpha} & \frac{\partial x}{\partial \beta} & \frac{\partial x}{\partial \gamma} \\ \frac{\partial y}{\partial \alpha} & \frac{\partial y}{\partial \beta} & \frac{\partial y}{\partial \gamma} \\ \frac{\partial z}{\partial \alpha} & \frac{\partial z}{\partial \beta} & \frac{\partial z}{\partial \gamma} \end{bmatrix}.$$

Vamos começar por sólidos de geometria simples: Paralelepípedos retos, esferas, elipsoides etc.

2.1 Volume de um paralelepípedo reto de lados L_x, L_y e L_z

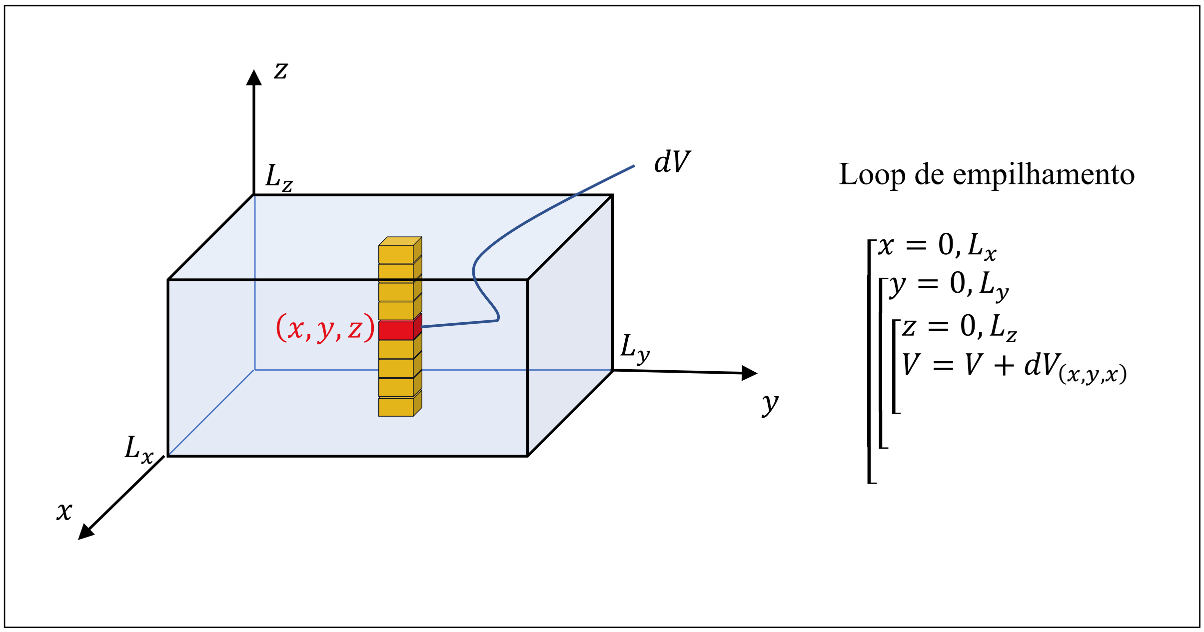


Figura 1. Paralelepípedo reto

Neste caso, não há necessidade de fazer mudança de sistema de coordenadas. Assim, basta definir os loops de empilhamento aninhados (Figura 1) e calcular a integral como

$$(6) \quad \begin{aligned} V &= \int_D dV = \int_0^{L_x} \left(\int_0^{L_y} \left(\int_0^{L_z} dz \right) dy \right) dx \\ &= \int_0^{L_x} \left(\int_0^{L_y} L_z dy \right) dx \\ &= \int_0^{L_x} (L_z L_y)\, dx \\ &= L_z L_y\, L_x \end{aligned}$$

Solução final: $V = L_x L_y L_z$

2.2 Volume de uma esfera de raio R

Vamos assumir que a esfera esteja centrada na origem. Assim, a equação implícita da superfície da esfera (quando nenhuma das coordenadas é expressa em função das outras duas) é

$$(7) \quad x^2 + y^2 + z^2 - R^2 = 0.$$

As coordenadas de um ponto no interior da esfera são tais que

$$(8) \quad x^2 + y^2 + z^2 - R^2 \leq 0.$$

Para calcular o volume da esfera em coordenadas cartesianas, um loop padrão de empilhamento geraria a seguinte integral

$$(9) \quad V \;=\; \int_D dV = \int_{-R}^{R} \left(\int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} \left(\int_{-\sqrt{R^2-x^2-y^2}}^{\sqrt{R^2-x^2-y^2}} dz \right) dy \right) dx.$$

O loop mais interno é trivial de resolver. Assim, após a integral mais interna ser resolvida, teremos

$$(10) \quad V \;=\; \int_D dV = \int_{-R}^{R} \left(\int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} \left(2\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}\right) dy \right) dx.$$

As técnicas estudadas em Cálculo para resolver a equação (10) envolvem mudanças de variáveis. Assim, vamos voltar à equação (9) e aplicar mudanças de variáveis conforme as equações (4) e (5).

Para isso, o novo sistema de coordenadas é o sistema de coordenadas esféricas. Essas coordenadas (Figura 2) se relacionam às coordenadas cartesianas através de

$$(11) \quad \begin{pmatrix} x(\rho,\phi,\theta) \\ y(\rho,\phi,\theta) \\ z(\rho,\phi,\theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho\cos(\phi)\cos(\theta) \\ \rho\cos(\phi)\sin(\theta) \\ \rho\sin(\phi) \end{pmatrix}.$$

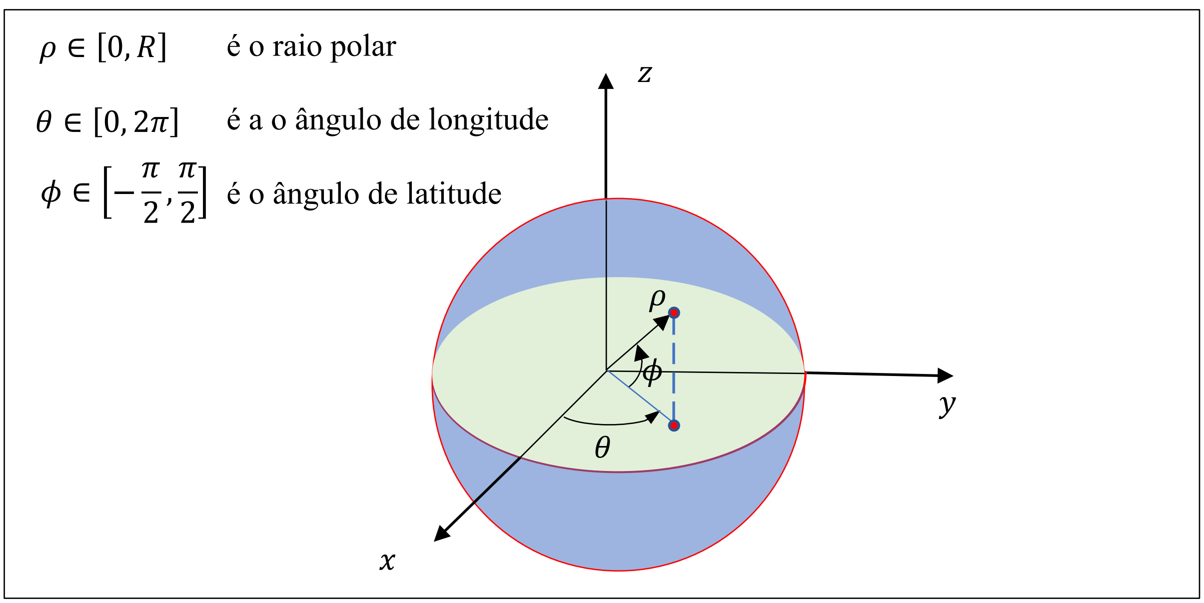


Figura 2. Coordenadas esféricas

Assim, aplicando as derivadas parciais na equação (11), obtemos a matriz Jacobiana

$$(12) \quad \mathbf{J} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \rho} & \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial x}{\partial \phi} \\ \frac{\partial y}{\partial \rho} & \frac{\partial y}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial \phi} \\ \frac{\partial z}{\partial \rho} & \frac{\partial z}{\partial \theta} & \frac{\partial z}{\partial \phi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\phi)\cos(\theta) & -\rho\cos(\phi)\sin(\theta) & -\rho\sin(\phi)\cos(\theta) \\ \cos(\phi)\sin(\theta) & \rho\cos(\phi)\cos(\theta) & -\rho\sin(\phi)\sin(\theta) \\ \sin(\phi) & 0 & \rho\cos(\phi) \end{bmatrix}.$$

Portanto, de acordo com a equação (5), temos

$$
\begin{aligned}
|J| &= \det\left(\begin{bmatrix} \cos(\phi)\cos(\theta) & -\rho\cos(\phi)\sin(\theta) & -\rho\sin(\phi)\cos(\theta) \\ \cos(\phi)\sin(\theta) & \rho\cos(\phi)\cos(\theta) & -\rho\sin(\phi)\sin(\theta) \\ \sin(\phi) & 0 & \rho\cos(\phi) \end{bmatrix}\right) \\
&= \rho^2\cos(\phi)\cos^2(\phi)\cos^2(\theta) + \rho^2\cos(\phi)\sin^2(\phi)\sin^2(\theta) \\
&+ \rho^2\cos(\phi)\sin^2(\phi)\cos^2(\theta) + \rho^2\cos(\phi)\cos^2(\phi)\sin^2(\theta) \\
&= \rho^2\cos(\phi)\cos^2(\phi)\left(\cos^2(\theta)+\sin^2(\theta)\right) \\
&+ \rho^2\cos(\phi)\sin^2(\phi)\left(\cos^2(\theta)+\sin^2(\theta)\right) = \rho^2\cos(\phi).
\end{aligned} \tag{13}
$$

O volume pode ser calculado de uma maneira mais simples neste novo sistemas de coordenadas como

$$
\begin{aligned}
V &= \int_D dV = \int_\Omega |J|d\Omega = \int_0^R\left(\int_0^{2\pi}\left(\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\rho^2\cos(\phi)d\phi\right)d\theta\right)d\rho \\
&= \int_0^R\rho^2\left(\int_0^{2\pi}\left(\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)-\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right)d\theta\right)d\rho \\
&= 2\int_0^R\rho^2\left(\int_0^{2\pi}d\theta\right)d\rho = 2\int_0^R\rho^2(2\pi-0)\,d\rho \\
&= 4\pi\int_0^R\rho^2\,d\rho = 4\pi\left(\frac{R^3}{3}-0\right) = \frac{4\pi R^3}{3}
\end{aligned} \tag{14}
$$

Solução final: $V = \frac{4\pi R^3}{3}$

2.3 Volume de um elipsoide

Vamos assumir que o elipsoide esteja centrado na origem. Assim, a equação implícita da superfície do elipsoide é

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1=0. \tag{15}$$

As coordenadas de um ponto no interior do elipsoide são tais que

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1\leq 0. \tag{16}$$

Calcular o volume usando loops de empilhamento em coordenadas cartesianas é complicado. Assim, vamos aplicar mudanças de variáveis conforme as equações (4) e (5).

Para isso, o novo sistema de coordenadas é parecido com o sistema de coordenadas esféricas. Essas novas coordenadas se relacionam às coordenadas cartesianas através das seguintes expressões

$$\begin{pmatrix} x(\rho,\phi,\theta) \\ y(\rho,\phi,\theta) \\ z(\rho,\phi,\theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho a\cos(\phi)\cos(\theta) \\ \rho b\cos(\phi)\sin(\theta) \\ \rho c\sin(\phi) \end{pmatrix} \tag{17}$$

onde

$\rho \in [0,1]$	é o raio polar,
$\phi \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$	é a o ângulo de longitude, e
$\theta \in [0, 2\pi]$	é o ângulo de latitude.

Assim, aplicando as derivadas parciais na equação (17), obtemos a matriz Jacobiana

$$\text{(18)} \quad \mathbf{J} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \rho} & \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial x}{\partial \phi} \\ \frac{\partial y}{\partial \rho} & \frac{\partial y}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial \phi} \\ \frac{\partial z}{\partial \rho} & \frac{\partial z}{\partial \theta} & \frac{\partial z}{\partial \phi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathrm{a}\cos(\phi)\cos(\theta) & -\rho a\cos(\phi)\sin(\theta) & -\rho a\sin(\phi)\cos(\theta) \\ \mathrm{b}\cos(\phi)\sin(\theta) & \rho b\cos(\phi)\cos(\theta) & -\rho b\sin(\phi)\sin(\theta) \\ \mathrm{c}\sin(\phi) & 0 & \rho c\cos(\phi) \end{bmatrix}.$$

Assim, de acordo com a equação (5), temos

$$\text{(19)} \quad \begin{aligned} |J| &= \det\left(\begin{bmatrix} \mathrm{a}\cos(\phi)\cos(\theta) & -\rho a\cos(\phi)\sin(\theta) & -\rho a\sin(\phi)\cos(\theta) \\ \mathrm{b}\cos(\phi)\sin(\theta) & \rho b\cos(\phi)\cos(\theta) & -\rho b\sin(\phi)\sin(\theta) \\ \mathrm{c}\sin(\phi) & 0 & \rho c\cos(\phi) \end{bmatrix}\right) \\ &= abc\rho^2\cos(\phi)\cos^2(\phi)\cos^2(\theta) + abc\rho^2\cos(\phi)\sin^2(\phi)\sin^2(\theta) \\ &+ abc\rho^2\cos(\phi)\sin^2(\phi)\cos^2(\theta) + abc\rho^2\cos(\phi)\cos^2(\phi)\sin^2(\theta) \\ &= abc\rho^2\cos(\phi)\cos^2(\phi)\left(\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta)\right) \\ &+ abc\rho^2\cos(\phi)\sin^2(\phi)\left(\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta)\right) = abc\rho^2\cos(\phi)\,. \end{aligned}$$

Portanto

$$\text{(20)} \quad \begin{aligned} V &= \int_{\mathrm{D}} dV = \int_{\Omega} |J|\,d\Omega = \int_0^1 \left(\int_0^{2\pi} \left(\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} abc\rho^2\cos(\phi)d\phi\right) d\theta\right) d\rho \\ &= abc\int_0^1 \rho^2 \left(\int_0^{2\pi} \left(\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) - \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right) d\theta\right) d\rho \\ &= 2abc\int_0^1 \rho^2 \left(\int_0^{2\pi} d\theta\right) d\rho = 2abc\int_0^1 \rho^2(2\pi - 0)\,d\rho \\ &= 4\pi abc\int_0^1 \rho^2\,d\rho = 4\pi abc\left(\frac{1^3}{3} - 0\right) = \frac{4\pi abc}{3} \end{aligned}$$

Solução final: $V = \frac{4\pi abc}{3}$

2.4 Volume de um cone reto de altura, H e raio da base, R

Vamos assumir que o círculo da base esteja centrado na origem e sobre o plano cartesiano xy. Como devemos planejar o loop de empilhamento dos nossos elementos de volume neste caso? O cone é uma tenda de base circular. Vamos empilhar os elementos de volume ocupando todo o piso da tenda e as pilhas de alturas variáveis vão até o limite da tenda (Figura 3).

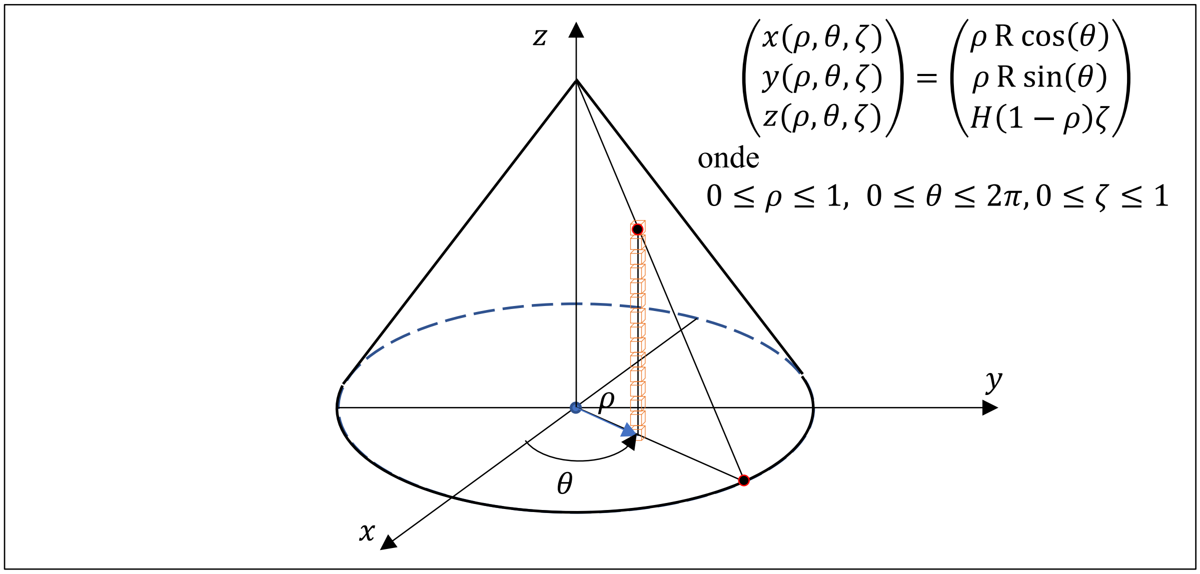


Figura 3. Cone reto

O posicionamento das pilhas no piso da tenda será controlado pelas coordenadas ρ e θ e o posicionamento do elemento de volume na pilha será controlado pela coordenada ζ.

As relações entre as coordenadas ρ, θ, ζ e as coordenadas x, y, z, mostradas na Figura 3, permitem calcular a matriz Jacobiana como

(21) $$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \rho} & \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial x}{\partial \zeta} \\ \frac{\partial y}{\partial \rho} & \frac{\partial y}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial \zeta} \\ \frac{\partial z}{\partial \rho} & \frac{\partial z}{\partial \theta} & \frac{\partial z}{\partial \zeta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathrm{R}\cos(\theta) & -\rho\mathrm{R}\sin(\theta) & 0 \\ \mathrm{R}\sin(\theta) & \rho R\cos(\theta) & 0 \\ -H\zeta & 0 & H(1-\rho) \end{bmatrix}.$$

Assim, de acordo com a equação (5), temos

(22) $$\begin{aligned} |J| &= \det\left(\begin{bmatrix} \mathrm{R}\cos(\theta) & -\rho\mathrm{R}\sin(\theta) & 0 \\ \mathrm{R}\sin(\theta) & \rho R\cos(\theta) & 0 \\ -H\zeta & 0 & H(1-\rho) \end{bmatrix}\right) \\ &= H\rho(1-\rho)R^2\cos^2(\theta) + H\rho(1-\rho)R^2\sin^2(\theta) \\ &= H\rho(1-\rho)R^2\left(\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta)\right) \\ &= H\rho(1-\rho)R^2 \end{aligned}$$

Portanto

$$
\begin{aligned}
V &= \int_D dV = \int_\Omega |J| d\Omega = \int_0^1 \left(\int_0^{2\pi} \left(\int_0^1 H\rho(1-\rho)R^2\, d\zeta \right) d\theta \right) d\rho \\
&= \int_0^1 (H\rho(1-\rho)R^2) \left(\int_0^{2\pi} d\theta \right) d\rho = \int_0^1 (H\rho(1-\rho)R^2)(2\pi - 0)\, d\rho \\
&= 2\pi H R^2 \int_0^1 (\rho - \rho^2)\, d\rho = 2\pi H R^2 \left(\frac{1^2}{2} - \frac{1^3}{3} \right) \\
&= 2\pi H R^2 \frac{1}{6} = \frac{1}{3}\pi R^2 H
\end{aligned} \tag{23}
$$

Solução final: $V = \frac{1}{3}\pi R^2 H = \frac{1}{3} A_{base} H$

2.5 Volume da região delimitada por uma superfície e por um domínio plano.

Este caso é tão simples quanto os outros anteriores. Como vimos nos casos anteriores, o processo de integração para cálculo de volumes nada mais é do que o acúmulo do volume do elemento infinitesimal dV num processo de empilhamento que deve ser planejado para que toda a região seja ocupada.

Se o domínio plano for retangular, podemos resolver o problema em coordenadas cartesianas. Caso o domínio plano seja arbitrário, muito provavelmente teremos que recorrer a uma mudança de variáveis.

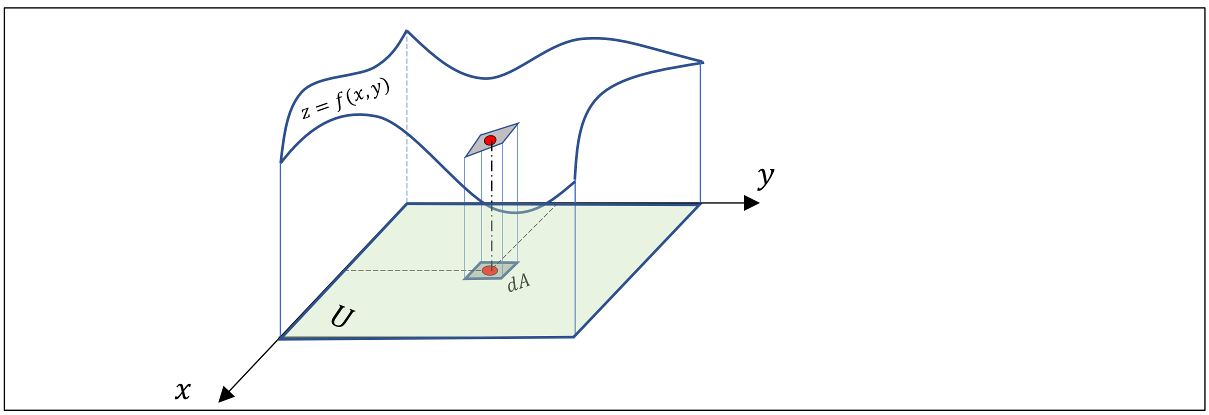


Figura 4. Volume abaixo da superfície $z = f(x, y)$ para $(x, y) \in U \subset \mathbb{R}^2$

Assim, o volume entre a superfície e a região $U \subset xy$ é dada por:

$$
\begin{aligned}
V &= \int_D dV = \int_U \left(\int_0^{f(x,y)} dz \right) dA \\
&= \int_U f(x,y) dA.
\end{aligned} \tag{24}
$$

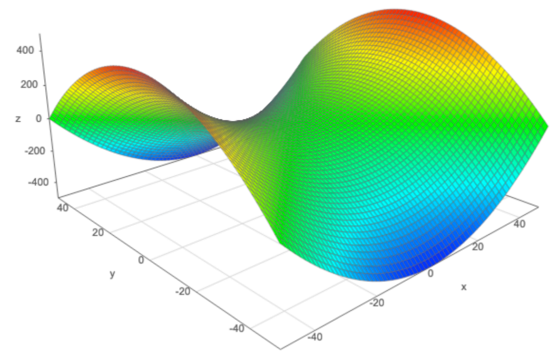
I) Em coordenadas cartesianas onde $U \subset xy$ é uma região retangular com limites $x_{\min}, x_{\max}$ no eixo x e $y_{\min}, y_{\max}$ no eixo y a equação (24) pode ser escrita como

$$
\begin{aligned}
V &= \int_U f(x,y) dA \\
&= \int_{x_{\min}}^{x_{\max}} \left(\int_{y_{\min}}^{y_{\max}} (f(x,y)) dy \right) dx.
\end{aligned} \tag{25}
$$

II) Em outras coordenadas α, β, faz-se uma mudança de variáveis na equação (24). Assim

$$
(26) \qquad
\begin{aligned}
V &= \int_U f(x,y)dA \\
&= \int_\Omega f(x(\alpha,\beta),y(\alpha,\beta)) \left| \det \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \alpha} & \frac{\partial x}{\partial \beta} \\ \frac{\partial y}{\partial \alpha} & \frac{\partial y}{\partial \beta} \end{bmatrix} \right| d\alpha d\beta
\end{aligned}
$$

Exemplo 1: Calcular o volume abaixo da superfície do paraboloide hiperbólico mostrado na Figura 5.



$$\boldsymbol{z \; = \; f(x,y) = 0.2(x^2 - y^2)}$$

Figura 5. Paraboloide hiperbólico $z = f(x,y) = 0.2(x^2 - y^2)$.

<u>Dados do problema</u>:

Problema 1: A região $U \in xy$ é $U = \{(x,y) | -40\text{m} \le x \le 40\text{m}, -20\text{m} \le y \le 20\text{m}\}$

Problema 2: A região $U \in xy$ é $U = \left\{(x,y) \; \in \frac{x^2}{1600} + \frac{y^2}{400} \le 1\right\}$

Solução do Problema 1.

- ***Solução exata***

Substituindo-se as expressões dadas na Figura 5 e a região especificada nos dados do problema na equação (25), temos

$$
(27) \qquad
\begin{aligned}
V &= \int_U f(x,y)dA = \int_{x_{\min}}^{x_{\max}} \left(\int_{y_{\min}}^{y_{\max}} (f(x,y))dy \right) dx. \\
&= \int_{-40}^{40} \left(\int_{-20}^{20} (0.2(x^2 - y^2))dy \right) dx \\
&= 0.2 \left(\int_{-20}^{20} \left(\int_{-40}^{40} (x^2)dx \right) dy - \int_{-40}^{40} \left(\int_{-20}^{20} (y^2)dy \right) dx \right)
\end{aligned}
$$

$$
(27) \qquad
\begin{aligned}
V &= 0.2 \left(\int_{-20}^{20} \left(\frac{40^3}{3} - \frac{(-40)^3}{3} \right) dy - \int_{-40}^{40} \left(\frac{20^3}{3} - \frac{(-20)^3}{3} \right) dx \right) \\
&= 0.2 \left(2\frac{40^3}{3} \int_{-20}^{20} dy - 2\frac{20^3}{3} \int_{-40}^{40} dx \right) \\
&= 0.2 \left(2\frac{40^3}{3} 40 - 2\frac{20^3}{3} 80 \right) = 0.2 \left(2\frac{20^3}{3} 320 - 2\frac{20^3}{3} 80 \right) = 0.4\frac{20^3}{3}(320 - 80) \\
\color{red}{V} &\color{red}{= \mathbf{256000m^3}}
\end{aligned}
$$

- ***Solução aproximada por Quadratura de Gauss-Legendre com três pontos na direção x e três pontos na direção y.***

A quadratura de Gauss-Legendre exige uma mudança de coordenadas dada pela expressão

(28) $$\begin{pmatrix} x(\alpha,\beta) \\ y(\alpha,\beta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-40+40}{2} + \frac{40-(-40)}{2}\alpha \\ \frac{-20+20}{2} + \frac{20-(-20)}{2}\beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 40\alpha \\ 20\beta \end{pmatrix}.$$

Assim,

(29) $$|J| = \det\begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \alpha} & \frac{\partial x}{\partial \beta} \\ \frac{\partial y}{\partial \alpha} & \frac{\partial y}{\partial \beta} \end{bmatrix} \overset{eq.(34)}{\cong} \det\begin{bmatrix} 40 & 0 \\ 0 & 20 \end{bmatrix} = 800$$

e a mudança de variáveis na equação (27) fica

(36) $$\begin{aligned} A &= \int_{-1}^{1}\left(\int_{-1}^{1}\left(\left(0.2((40\alpha)^2-(20\beta)^2)\right)\right)800d\alpha\right)d\beta \\ &= 160\int_{-1}^{1}\left(\int_{-1}^{1}((40\alpha)^2-(20\beta)^2)d\alpha\right)d\beta \\ &\approx 160\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}\left(w_iw_j\left(\left(40\alpha_j\right)^2-\left(20\beta_i\right)^2\right)\right) = 256000\mathrm{m}^3. \end{aligned}$$

A forma final na equação (36) indica que os termos entre parênteses têm de ser calculados nos nove pares ordenados (α_j, β_i). Na forma tabular temos

(α_j, β_i)	$w_j w_i$	$g(\alpha_j,\beta_i) = (40\alpha_j)^2 - (20\beta_i)^2$	$w_i w_j\, g(\alpha_j,\beta_i)$	*160
$\left(-\sqrt{\frac{3}{5}}, -\sqrt{\frac{3}{5}}\right)$	$\frac{5}{9}.\frac{5}{9} = \frac{25}{81}$	720	222.222222222	
$\left(0, -\sqrt{\frac{3}{5}}\right)$	$\frac{8}{9}.\frac{5}{9} = \frac{40}{81}$	-240	-118.518518518	
$\left(\sqrt{\frac{3}{5}}, -\sqrt{\frac{3}{5}}\right)$	$\frac{5}{9}.\frac{5}{9} = \frac{25}{81}$	720	222.222222222	
$\left(-\sqrt{\frac{3}{5}}, 0\right)$	$\frac{5}{9}.\frac{8}{9} = \frac{40}{81}$	960	474.074074074	
(0,0)	$\frac{8}{9}.\frac{8}{9} = \frac{64}{81}$	0	0.	
$\left(\sqrt{\frac{3}{5}}, 0\right)$	$\frac{5}{9}.\frac{8}{9} = \frac{40}{81}$	960	474.074074074	
$\left(\sqrt{\frac{3}{5}}, \sqrt{\frac{3}{5}}\right)$	$\frac{5}{9}.\frac{5}{9} = \frac{25}{81}$	720	222.222222222	
$\left(0, \sqrt{\frac{3}{5}}\right)$	$\frac{8}{9}.\frac{5}{9} = \frac{40}{81}$	-240	-118.518518518	

$\left(\sqrt{\frac{3}{5}}, \sqrt{\frac{3}{5}}\right)$	$\frac{5}{9} \cdot \frac{5}{9} = \frac{25}{81}$	720	222.222222222	
			1600	**256000**

Note que, como o integrando é um polinômio, a integração numérica com quadratura de Gauss-Legendre usada encontrou a solução exata do problema.

Tarefa: Resolver o Problema 2, seguindo os seguintes passos:

1) **Mudança de variável 1 como feito no caso da elipse da Aula#15;**
2) **Mudança de variável 2 como feito na solução do problema 1;**
3) **Usar quadratura de Gauss-Legendre com 3 pontos em cada direção.**