# Desenvolvimento de Fórmulas de Newton-Cotes Fechada e Aberta para Polinômio de Substituição de Grau 4

Claudemir Woche e Márcio Barros

29 de Março de 2020

# 1 Abordagem Aberta

Um polinômio de interpolação de grau 4 interpola cinco pontos. Na abordagem aberta, os pontos $x_i$ e $x_f$ são proibidos. Portanto, o polinômio de interpolação deve passar por $f(x_0), f(x_1), f(x_2), f(x_3)$ $e$ $f(x_4)$ tal que os pontos $x_i, x_0, x_1, x_2, x_3, x_4$ $e$ $x_f$ sejam igualmente espaçados. Chamando essa distância entre os valores de $x$ onde a função será interpolada de $h$, temos que:

$$h = \frac{\Delta x}{6} = \frac{x_f - x_i}{6}. \tag{1}$$

Assim,
$f(x_0) = f(x_i + h) = f(x(s = 0) = g(0)$,
$f(x_i + 2h) = f(x(s = 1) = g(1)$,
$f(x_i + 3h) = f(x(s = 2) = g(2)$,
$f(x_i + 4h) = f(x(s = 3) = g(3)$,
$f(x_i + 5h) = f(x(s = 4) = g(4)$
E

$$x(s) = x_i + h + sh. \tag{2}$$

Satisfaz essas relações, pois,

$$\begin{cases} x(0) = x_i + h + 0h = x_0 \\ x(1) = x_i + h + 1h = x_1 \\ x(2) = x_i + h + 2h = x_2 \\ x(3) = x_i + h + 3h = x_3 \\ x(4) = x_i + h + 4h = x_4 \end{cases}$$

Assim, aplicando a mudança de variável, temos que a integral

$$\int_{x_i}^{x_f} f(x)dx \approx \int_{x_i}^{x_f} p(x)dx = \int_{s_i}^{s_f} p(x(s))\frac{dx(s)}{ds}ds = h\int_{-1}^{5} p(x(s))ds = h\int_{-1}^{5} g(s)ds \tag{3}$$

$g(s) = \sum_{k=0}^{n=4} \frac{s!}{(s-k)!k!}.\Delta^k r_0 =$

$\frac{s!}{s!}.r(0) + \frac{s!}{(s-1)!}.(r(1) - r(0)) +$

$\frac{s!}{(s-2)!2}.(r(2) - 2r(1) + r(0)) +$

$\frac{s!}{(s-3)!3!}.(r(3) - 3r(2) + 3r(1) - r(0)) +$

$\frac{s!}{(s-4)!4!}.(r(4) - 4r(3) + 6r(2) - 4r(1) + r(0))$

$$g(s) = r(0) + \frac{s.(s-1)!}{(s-1)!}.(r(1) - r(0)) +$$
$$\frac{s.(s-1).(s-2)!}{(s-2)!2}.(r(2) - 2r(1) + r(0)) +$$
$$\frac{s.(s-1).(s-2).(s-3)!}{(s-3)!3!}.(r(3) - 3r(2) + 3r(1) - r(0)) +$$
$$\frac{s.(s-1).(s-2).(s-3).(s-4)!}{(s-4)!4!}.(r(4) - 4r(3) + 6r(2) - 4r(1) + r(0))$$

$$g(s) = r(0) + s.(r(1) - r(0)) +$$
$$\frac{1}{2}.s.(s-1).(r(2) - 2r(1) + r(0)) +$$
$$\frac{1}{6}.s.(s-1).(s-2).(r(3) - 3r(2) + 3r(1) - r(0)) +$$
$$\frac{1}{24}.s.(s-1).(s-2).(s-3).(r(4) - 4r(3) + 6r(2) - 4r(1) + r(0))$$

$$g(s) = r(0).\left(1 - s + \frac{1}{2}.s.(s-1) - \frac{1}{6}.s.(s-1).(s-2) + \frac{1}{24}.s.(s-1).(s-2).(s-3)\right) +$$
$$r(1).\left(s - s.(s-1) + \frac{1}{2}.s.(s-1).(s-2) - \frac{1}{6}.s.(s-1).(s-2).(s-3)\right) +$$
$$r(2).\left(\frac{1}{2}.s.(s-1) - \frac{1}{2}.s.(s-1).(s-2) + \frac{1}{4}.s.(s-1).(s-2).(s-3)\right) +$$
$$r(3).\left(\frac{1}{6}.s.(s-1).(s-2) - \frac{1}{6}.s.(s-1).(s-2).(s-3)\right) +$$
$$r(4).\left(\frac{1}{24}.s.(s-1).(s-2).(s-3)\right)$$

$$g(s) = r(0).\frac{1}{24}.\big((s-1).(s-2).(s-3).(s-4)\big) +$$
$$r(1). -\frac{1}{6}.\big(s.(s-2).(s-3).(s-4)\big) +$$
$$r(2).\frac{1}{4}.\big(s.(s-1).(s-3).(s-4)\big) +$$
$$r(3). -\frac{1}{6}.\big(s.(s-1).(s-2).(s-4)\big) +$$
$$r(4).\frac{1}{24}.\big(s^4 - 6s^3 + 11s^2 - 6^s\big)$$

$g(s) = r(0).\frac{1}{24}.\big(s^4 - 10s^3 + 35s^2 - 50s + 24\big) +$

$r(1). - \frac{1}{6}.\big(s^4 - 9s^3 + 26s^2 - 24s\big) +$

$r(2).\frac{1}{4}.\big(s^4 - 8s^3 + 19s^2 - 12s\big) +$

$r(3). - \frac{1}{6}.\big(s^4 - 7s^3 + 14s^2 - 8s\big) +$

$r(4).\frac{1}{24}.\big(s^4 - 6s^3 + 11s^2 - 6s\big)$

$$\begin{multline} g(s) = r(0).\frac{1}{24}.\big(s^4 - 10s^3 + 35s^2 - 50s + 24\big) + r(1). - \frac{1}{6}.\big(s^4 - 9s^3 + 26s^2 - 24s\big) + \\ r(2).\frac{1}{4}.\big(s^4 - 8s^3 + 19s^2 - 12s\big) + r(3). - \frac{1}{6}.\big(s^4 - 7s^3 + 14s^2 - 8s\big) + \\ r(4).\frac{1}{24}.\big(s^4 - 6s^3 + 11s^2 - 6s\big) \tag{4} \end{multline}$$

Substituindo (4) em (3) temos:

$\displaystyle\int_{x_i}^{x_f} f(x)dx \approx h \int_{-1}^{5} g(s)\ ds =$

$h.\Bigg(g(0).\frac{1}{24}.\displaystyle\int_{-1}^{5} s^4 - 10s^3 + 35s^2 - 50s + 24\ ds +$

$g(1). - \frac{1}{6}.\displaystyle\int_{-1}^{5} s^4 - 9s^3 + 26s^2 - 24s\ ds +$

$g(2).\frac{1}{4}.\displaystyle\int_{-1}^{5} s^4 - 8s^3 + 19s^2 - 12s\ ds +$

$g(3). - \frac{1}{6}.\displaystyle\int_{-1}^{5} s^4 - 7s^3 + 14s^2 - 8s\ ds +$

$g(4).\frac{1}{24}.\displaystyle\int_{-1}^{5} s^4 - 6s^3 + 11s^2 - 6s\ ds\Bigg) =$

$h.\Bigg(g(0).\frac{33}{10} + g(1). - \frac{21}{5} + g(2).\frac{39}{5} + g(3). - \frac{21}{5} + g(4).\frac{33}{10}\Bigg)$

Assim obtemos a fórmula que estima a integral do nosso subproblema.

$$\int_{x_i}^{x_f} f(x)dx \approx \frac{3h}{5}.\left(\frac{11}{2}.f(x_i+h) - 7.f(x_i+2h) + 13.f(x_i+3h) - 7.f(x_i+4h) + \frac{11}{2}.f(x_i+5h)\right) \tag{5}$$

onde, como vimos em (1) $h = \dfrac{\Delta x}{6} = \dfrac{x_f - x_i}{6}$.

# 2 Abordagem Fechada

Um polinômio de interpolação de grau 4 interpola cinco pontos. Na abordagem fechada, os pontos $x_i$ e $x_f$ são obrigatórios. Portanto, o polinômio de interpolação deve passar por $f(x_i), f(x_f)$ e por três pontos intermediários de maneira que os cinco pontos do intervalo $[x_i, x_f]$ sejam igualmente espaçados. Chamando essa distância entre os valores de $x$ onde a função será interpolada de $h$, temos que:

$$h = \frac{\Delta x}{4} = \frac{x_f - x_i}{4}. \tag{6}$$

Assim,
$f(x_i) = f(x(s=0) = g(0)$,
$f(x_i+h) = f(x(s=1) = g(1)$,
$f(x_i+2h) = f(x(s=2) = g(2)$,
$f(x_i+3h) = f(x(s=3) = g(3)$,
$f(x_i+4h) = f(x(s=4) = g(4)$
E

$$x(s) = x_i + sh. \tag{7}$$

Satisfaz essas relações, pois,

$$\begin{cases} x(0) = x_i + 0h = x_i \\ x(1) = x_i + 1h \\ x(2) = x_i + 2h \\ x(3) = x_i + 3h \\ x(4) = x_i + 4h = x_f \end{cases}$$

Assim, aplicando a mudança de variável, temos que a integral

$$\int_{x_i}^{x_f} f(x)dx \approx \int_{x_i}^{x_f} p(x)dx = \int_{s_i}^{s_f} p(x(s))\frac{dx(s)}{ds}ds = h\int_0^4 p(x(s))ds = h\int_0^4 g(s)ds \tag{8}$$

Substituindo (4) em (8) temos:

$$\int_{x_i}^{x_f} f(x)dx \approx h \int_0^4 g(s)\ ds =$$

$$h.\Bigg(g(0).\frac{1}{24}.\int_0^4 s^4 - 10s^3 + 35s^2 - 50s + 24\ ds +$$

$$g(1).-\frac{1}{6}.\int_0^4 s^4 - 9s^3 + 26s^2 - 24s\ ds +$$

$$g(2).\frac{1}{4}.\int_0^4 s^4 - 8s^3 + 19s^2 - 12s\ ds +$$

$$g(3).-\frac{1}{6}.\int_0^4 s^4 - 7s^3 + 14s^2 - 8s\ ds +$$

$$g(4).\frac{1}{24}.\int_0^4 s^4 - 6s^3 + 11s^2 - 6s\ ds\Bigg) =$$

$$h.\left(g(0).\frac{14}{45} + g(1).\frac{64}{45} + g(2).\frac{8}{15} + g(3).\frac{64}{45} + g(4).\frac{14}{45}\right)$$

Assim obtemos a fórmula que estima a integral do nosso subproblema.

$$\int_{x_i}^{x_f} f(x)dx \approx \frac{2h}{45}.\Big(7.f(x_i) + 32.f(x_i+h) + 12.f(x_i+2h) + 32.f(x_i+3h) + 7.f(x_i+4h)\Big) \tag{9}$$

onde, como vimos em (6) $h = \dfrac{\Delta x}{4} = \dfrac{x_f - x_i}{4}$.

# 3 Apêndice

Cálculo do $\Delta^4 r_0$.

$$\Delta^k r_i = \begin{cases} r(i), & \text{se } k = 0. \\ \Delta^{k-1} r_{i+1} - \Delta^{k-1} r_i, & \text{se } k \neq 0. \end{cases} \tag{10}$$

$\Delta^4 r_0 = \Delta^3 r_1 - \Delta^3 r_0$
$\Delta^3 r_0 = \Delta^2 r_1 - \Delta^2 r_0$
$\Delta^2 r_0 = \Delta^1 r_1 - \Delta^1 r_0$
$\Delta^1 r_0 = \Delta^0 r_1 - \Delta^0 r_0 = r(1) - r(0)$

$$\Delta^2 r_0 = \Delta^1 r_1 - (r(1) - r(0)) = \Delta^0 r_2 - \Delta^0 r_1 - (r(1) - r(0)) = r(2) - 2r(1) + r(0)$$

$$\Delta^3 r_0 = \Delta^2 r_1 - (r(2) - 2r(1) + r(0)) = \Delta^1 r_2 - \Delta^1 r_1 - (r(2) - 2r(1) + r(0)) =$$

$$= \Delta^0 r_3 - \Delta^0 r_2 - (\Delta^0 r_2 - \Delta^0 r_1) - (r(2) - 2r(1) + r(0)) =$$

$$= r(3) - r(2) - r(2) + r(1) - r(2) + 2r(1) - r(0) = r(3) - 3r(2) + 3r(1) - r(0)$$

$$\Delta^4 r_0 = \Delta^2 r_2 - \Delta^2 r_1 - \Delta^3 r_0 = \Delta^1 r_3 - \Delta^1 r_2 - (\Delta^1 r_2 - \Delta^1 r_1) - \Delta^3 r_0 =$$

$$= \Delta^0 r_4 - \Delta^0 r_3 - (\Delta^0 r_3 - \Delta^0 r_2) - ((\Delta^0 r_3 - \Delta^0 r_2) - (\Delta^0 r_2 - \Delta^0 r_1)) - \Delta^3 r_0 =$$

$$= r(4) - r(3) - r(3) + r(2) - (r(3) - r(2) - r(2) + r(1)) - \Delta^3 r_0 =$$

$$= r(4) - 4r(3) + 6r(2) - 4r(1) + r(0)$$