Curso: Métodos Numéricos II
Professor: Creto Augusto Vidal
Semestre: 2020.1
Aula # 15

1. Objetivo: Aplicar os métodos de integração estudados nas aulas anteriores para cálculo de áreas de superfícies e volumes.

2. Áreas de superfícies 2D.

Vamos começar por figuras geométricas simples: Retângulos, Triângulos, Trapézios, Círculos e Elipses (Figura 1)

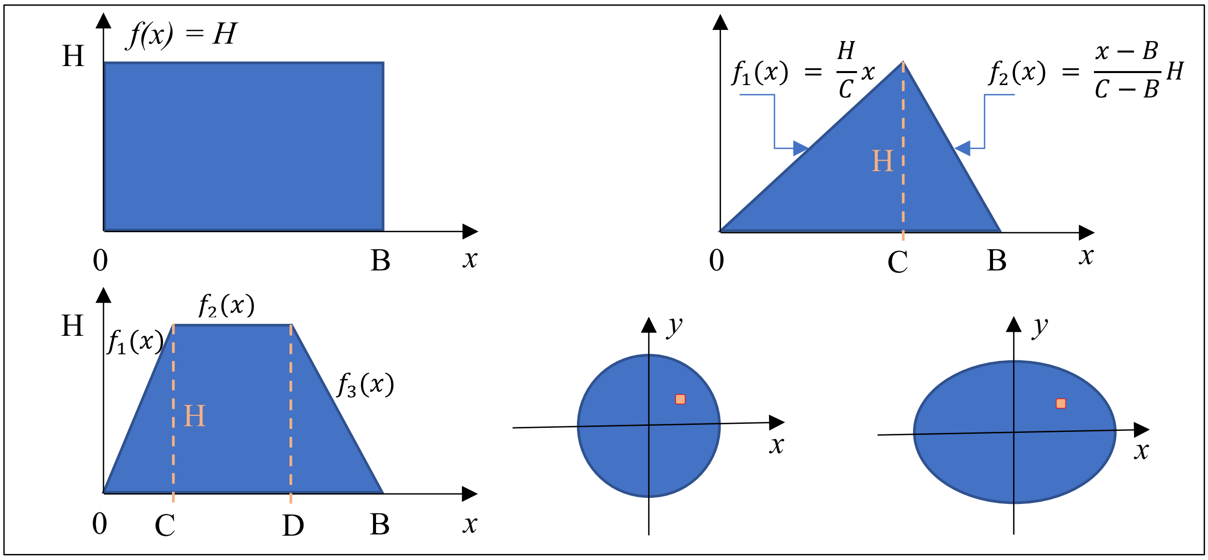


Figura 1. Retângulos, Triângulos, Trapézios, Círculos e Elipses

2.1 Área do retângulo

(1) $A = \int_0^B f(x)dx = \int_0^B Hdx = H\int_0^B dx = H[x]_0^B = H(B-0) = HB = BH.$

De maneira trivial, usando Newton-Cotes fechada de grau 1

(2) $A = \int_0^B f(x)dx = \frac{B-0}{2}(f(0) + f(B)) = \frac{B}{2}(H + H) = \frac{B}{2}(2H) = BH.$

Usando-se Gauss-Legendre com dois pontos (um canhão para matar um mosquito), tem-se

(3) $A = \int_0^B f(x)dx = \frac{B-0}{2}\left(f\left(\frac{B}{2} - \frac{B}{2}\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + f\left(\frac{B}{2} + \frac{B}{2}\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right) = \frac{B}{2}(H + H) = \frac{B}{2}(2H) = BH.$

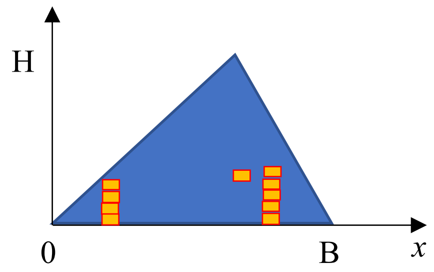
2.2 Área do triângulo

$$
\begin{aligned}
A &= \int_0^C f_1(x)dx + \int_C^B f_2(x)dx \\
&= \int_0^C \frac{H}{C}xdx + \int_C^B \frac{x-B}{C-B}Hdx \\
\text{(4)} \quad &= \frac{H}{C}\left(\frac{x^2}{2}\right)_0^C + \frac{H}{C-B}\left[\left(\frac{x^2}{2}\right)_C^B - B(x)_C^B\right] \quad . \\
&= \frac{H}{C}\frac{C^2}{2} + \frac{H}{C-B}\left[\frac{1}{2}(B^2 - C^2) - B(B-C)\right] \\
&= \frac{HC}{2} + \frac{H}{C-B}\left[\frac{1}{2}(B+C)(B-C) - B(B-C)\right]
\end{aligned}
$$

(5) $A \;=\; \frac{HC}{2} + \frac{H(B-C)}{C-B}\left[\frac{1}{2}(C-B)\right] = \frac{HC}{2} + \frac{H(B-C)}{2} = \frac{BH}{2}$

(6) $\boldsymbol{A} \;=\; \frac{\boldsymbol{BH}}{\boldsymbol{2}}$

A fórmula da área do triângulo pode ser obtida de maneira mais simples se pensarmos que ela é a soma de pequenos retângulos de área $\boldsymbol{dA} = \boldsymbol{dx.dy}$, onde $\boldsymbol{dx}$ e $\boldsymbol{dy}$ são os tamanhos dos lados de cada um desses pequenos retângulos (Figura 2).



$$
\begin{aligned}
& A = 0 \\
& \left\{\begin{aligned}
& x = 0, B \\
& \left\{\begin{aligned} & y = 0, f_1(x) \\ & \qquad A = A + dA \end{aligned}\right. \\
& \left\{\begin{aligned} & y = 0, f_2(x) \\ & \qquad A = A + dA \end{aligned}\right.
\end{aligned}\right.
\end{aligned}
$$

Figura 2. Preenchimento da área: para cada posição x, os elementos retangulares $\boldsymbol{dA}$ são empilhados até encontra o segmento de reta (lado do triângulo) acima daquela posição.

Porém, para preencher toda a área do triângulo, o empilhamento dos pequenos retângulos dA deve ser feito de forma organizada num processo que parece um loop aninhado (Figura 2). Neste caso particular do triângulo, a varredura (empilhamento) em coordenadas cartesianas (x, y) necessita as equações das retas $f_1(x)$ e $f_2(x)$. Quase sempre, é possível escolher outras variáveis que facilitam o processo.

Vamos ver como isso funciona. Na Figura 3, o elemento de área dA, vai deslizar ao longo da reta que liga o vértice superior, V, do triângulo ao ponto deslizante, P, que se move sobre a base do triângulo. Assim, a posição do ponto P vai ser descrita pela variável $\alpha \in [0,1]$ e a posição do elemento de área dA vai ser descrita pela variável $\beta \in [0,1]$. Portanto, as coordenadas x e y de dA são obtidas como função de α e β da seguinte forma

(7) $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} x_P \\ y_P \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} C - x_P \\ H - y_P \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha B \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} C - \alpha B \\ H - 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha B + \beta(C - \alpha B) \\ \beta H \end{pmatrix}.$

Essas variáveis funcionam como um outro par de coordenadas em um sistema de coordenadas diferente do sistema (x, y). O elemento de área infinitesimal (muito pequeno) neste novo sistema de coordenadas se relaciona com o elemento de área dA no sistema (x, y) por meio da seguinte equação

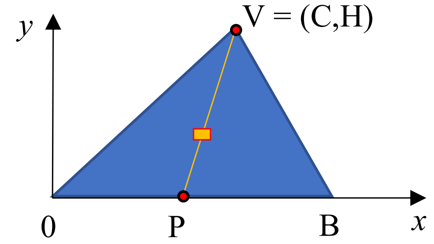
(8) $dA = |J| d\Omega,$

onde $|J|$ é o determinante da matriz Jacobiana mostrada na equação (9), e $d\Omega$ é o elemento de área infinitesimal do sistema (α, β), isto é

(9) $|J| = \det \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \alpha} & \frac{\partial x}{\partial \beta} \\ \frac{\partial y}{\partial \alpha} & \frac{\partial y}{\partial \beta} \end{bmatrix} \overset{eq.(7)}{\triangleq} \det \begin{bmatrix} (B - \beta B) & (C - \alpha B) \\ 0 & H \end{bmatrix} = BH(1 - \beta)$

e

(10) $d\Omega = \mathrm{d}\alpha . d\beta.$



$\alpha = 0,1$

$\quad \beta = 0,1$

$\quad\quad A = A + |J|d\Omega$

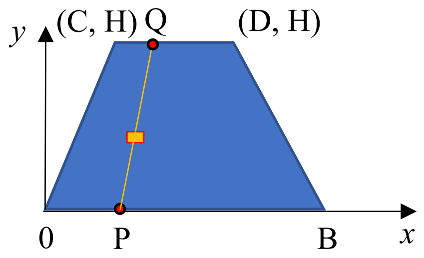
Figura 3. Mudança de variáveis para facilitar o processo de varredura.

Assim, fazendo-se mudança de variáveis, a área do triângulo pode ser calculada como

$$
(11) \quad
\begin{aligned}
A &= \int_A dA = \int_\Omega |J|d\Omega \\
&= \int_\Omega BH(1-\beta)d\Omega \\
&= \int_0^1 \left(\int_0^1 BH(1-\beta)d\beta\right) d\alpha \\
&= BH\int_0^1 \left(\int_0^1 d\beta - \int_0^1 \beta d\beta\right) d\alpha \\
&= BH\int_0^1 \left(1-\frac{1}{2}\right) d\alpha = \frac{BH}{2}\int_0^1 d\alpha \\
A &= \boldsymbol{\frac{BH}{2}}
\end{aligned}
$$

2.3 Área do trapézio

Fazendo uma mudança de variáveis análoga à que foi feita no caso do triângulo (Figura 4), temos que o elemento de área desliza sobre a reta PQ, e P e Q deslizam horizontalmente sobre os segmentos de retas horizontais inferior e superior, respectivamente. Assim



$\alpha = 0,1$

$\quad \beta = 0,1$

$\quad\quad A = A + |J|d\Omega$

Figura 4. Mudança de variáveis para facilitar o processo de varredura no trapézio.

$$
(12) \quad
\begin{aligned}
\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} x_P \\ y_P \end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix} x_Q - x_P \\ y_Q - y_P \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \alpha B \\ 0 \end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix} C + \alpha(D-C) - \alpha B \\ H - 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \alpha B + \beta(C + \alpha(D - C - B)) \\ \beta H \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Assim, análogo ao que foi feito nas equações (8) e (9), temos

$$(13) \quad dA = |J|d\Omega$$

onde $|J|$ é o determinante da matriz Jacobiana mostrada na equação (14), e $d\Omega$ é o elemento de área infinitesimal do sistema (α, β), isto é

$$
\text{(14)}\qquad
\begin{aligned}
|J| &= \det\begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \alpha} & \frac{\partial x}{\partial \beta} \\ \frac{\partial y}{\partial \alpha} & \frac{\partial y}{\partial \beta} \end{bmatrix} \\
&\overset{eq.(12)}{\cong} \det\begin{bmatrix} (B+\beta(D-C-B)) & (C+\alpha(D-C-B)) \\ 0 & H \end{bmatrix} \\
&= BH + H(D-C-B)\beta
\end{aligned}
$$

e

(15) $d\Omega = d\alpha . d\beta .$

Assim, fazendo-se mudança de variáveis, a área do trapézio pode ser calculada como

$$
\text{(16)}\qquad
\begin{aligned}
A &= \int_A dA = \int_\Omega |J| d\Omega \\
&= \int_\Omega (BH + H(D-C-B)\beta) d\Omega \\
&= \int_0^1 \left(\int_0^1 (BH + H(D-C-B)\beta) d\beta \right) d\alpha \\
&= \int_0^1 \left(BH \int_0^1 d\beta + H(D-C-B) \int_0^1 \beta d\beta \right) d\alpha \\
&= \int_0^1 \left(BH + \frac{1}{2} H(D-C-B) \right) d\alpha = H \frac{1}{2} [B + (D-C)] \int_0^1 d\alpha
\end{aligned}
$$

(17) $\boldsymbol{A = H \frac{1}{2} [B + (D-C)] =}$ **(Altura vezes a média das bases)**

2.4 Área do círculo de raio R

Fazendo uma mudança de variáveis análoga à que foi feita nos casos anteriores (Figura 5), temos que o elemento de área desliza sobre a reta OP, e P desliza sobre a circunferência de acordo com o ângulo β. Assim

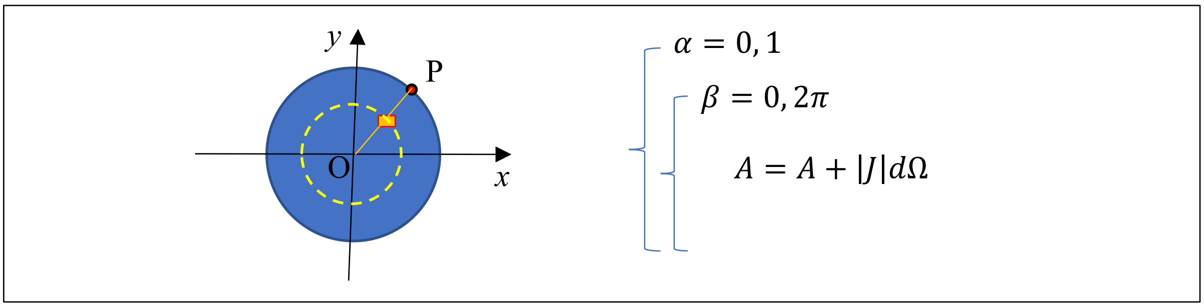


Figura 5. Mudança de variáveis para facilitar o processo de varredura no círculo: para cada posição ao longo do segmento OP, o loop interno descreve uma circunferência completa.

$$
\text{(18)}\qquad
\begin{aligned}
\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} x_P \\ y_P \end{pmatrix} \\
&= \alpha \begin{pmatrix} R\cos(\beta) \\ R\,\mathrm{sen}(\beta) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \alpha R\cos(\beta) \\ \alpha R\,\mathrm{sen}(\beta) \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Assim, análogo ao que foi feito nas equações (8) e (9), temos

(19) $dA = |J| d\Omega$

onde $|J|$ é o determinante da matriz Jacobiana mostrada na equação (20), e $d\Omega$ é o elemento de área infinitesimal do sistema (α, β), isto é

$$
\begin{aligned}
|J| &= \det\begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \alpha} & \frac{\partial x}{\partial \beta} \\ \frac{\partial y}{\partial \alpha} & \frac{\partial y}{\partial \beta} \end{bmatrix} \\
&\overset{eq.(18)}{\cong} \det\begin{bmatrix} R\cos(\beta) & -\alpha R\,\mathrm{sen}\,(\beta) \\ R\,\mathrm{sen}\,(\beta) & \alpha R\cos(\beta) \end{bmatrix} \\
&= R^2\alpha\left(\cos^2(\beta) + \mathrm{sen}^2(\beta)\right) = R^2\alpha
\end{aligned}
\tag{20}
$$

e

$$d\Omega = \mathrm{d}\,\alpha . d\,\beta. \tag{21}$$

Assim, fazendo-se mudança de variáveis, a área do círculo pode ser calculada como

$$
\begin{aligned}
A &= \int_A dA = \int_\Omega |J| d\Omega \\
&= \int_\Omega (R^2\alpha) d\Omega \\
&= \int_0^1 \left(\int_0^{2\pi} R^2 \alpha \, d\beta \right) d\alpha \\
&= R^2 \int_0^1 \alpha \left(\int_0^{2\pi} d\beta \right) d\alpha \\
&= 2\pi R^2 \int_0^1 \alpha \, d\alpha = 2\pi R^2 \frac{1}{2}
\end{aligned}
\tag{22}
$$

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{\pi R^2} \tag{23}$$

2.5 Área da elipse de semieixos a e b

Fazendo uma mudança de variáveis análoga à que foi feita nos casos anteriores (Figura 6), temos que o elemento de área desliza sobre a reta OP, e P desliza sobre a curva elíptica de acordo com o ângulo β. Assim

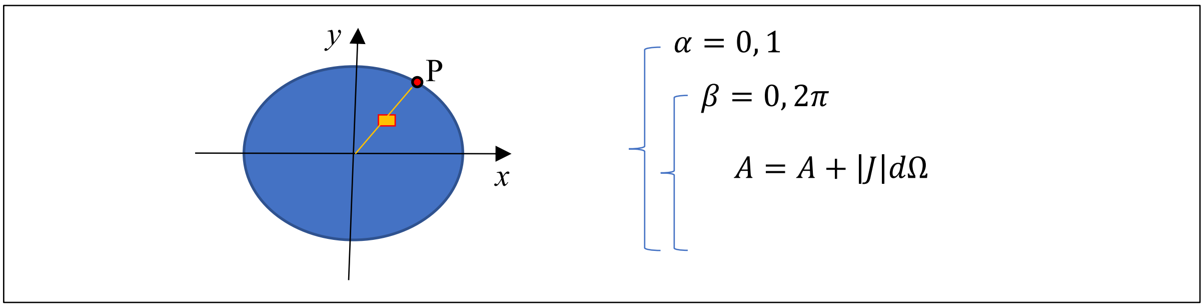


Figura 6. Mudança de variáveis para facilitar o processo de varredura na elipse.

$$
\begin{aligned}
\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} x_P \\ y_P \end{pmatrix} \\
&= \alpha \begin{pmatrix} a\cos(\beta) \\ b\,\mathrm{sen}\,(\beta) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \alpha a \cos(\beta) \\ \alpha b\,\mathrm{sen}\,(\beta) \end{pmatrix}
\end{aligned}
\tag{24}
$$

Assim, análogo ao que foi feito nas equações (8) e (9), temos

(25) $dA = |J| d\Omega$

onde $|J|$ é o determinante da matriz Jacobiana mostrada na equação (26), e $d\Omega$ é o elemento de área infinitesimal do sistema (α, β), isto é

$$
\begin{aligned}
|J| &= \det\begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \alpha} & \frac{\partial x}{\partial \beta} \\ \frac{\partial y}{\partial \alpha} & \frac{\partial y}{\partial \beta} \end{bmatrix} \\
&\overset{eq.(24)}{\cong} \det\begin{bmatrix} a\cos(\beta) & -\alpha a \operatorname{sen}(\beta) \\ b\operatorname{sen}(\beta) & \alpha b\cos(\beta) \end{bmatrix} \\
&= ab\alpha(\cos^2(\beta) + \operatorname{sen}^2(\beta)) = ab\alpha
\end{aligned} \qquad (26)
$$

e

(27) $d\Omega = d\alpha . d\beta.$

Assim, fazendo-se mudança de variáveis, a área da elipse pode ser calculada como

$$
\begin{aligned}
A &= \int_A dA = \int_\Omega |J| d\Omega \\
&= \int_\Omega (ab\alpha) d\Omega \\
&= \int_0^1 \left(\int_0^{2\pi} ab\alpha \, d\beta \right) d\alpha \\
&= ab \int_0^1 \alpha \left(\int_0^{2\pi} d\beta \right) d\alpha \\
&= 2\pi ab \int_0^1 \alpha \, d\alpha = 2\pi ab \frac{1}{2}
\end{aligned} \qquad (28)
$$

(29) $\boldsymbol{A = \pi ab}$

Note que, se os semieixos da elipse forem iguais $a = b = R$, a elipse é um círculo e a área fica

(30) $\boldsymbol{A = \pi ab = \pi RR = \pi R^2}$

3. Áreas de superfícies 3D no formato $z = f(x, y)$.

Em coordenadas cartesianas, o elemento infinitesimal de superfície dS associado à área infinitesimal dA no plano xy é dado por

(31) $dS = \left(\sqrt{\left(\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right)^2 + 1} \right) dA.$

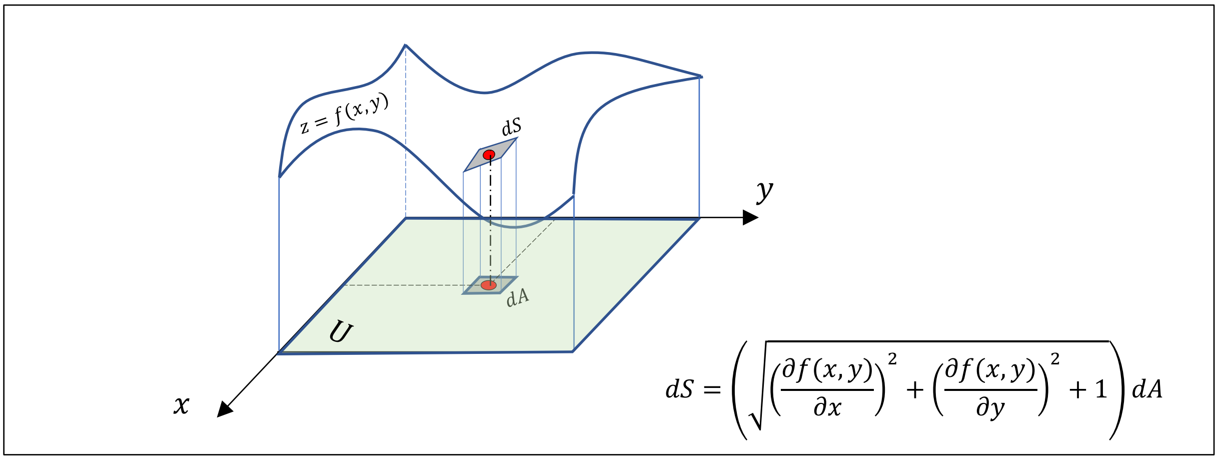


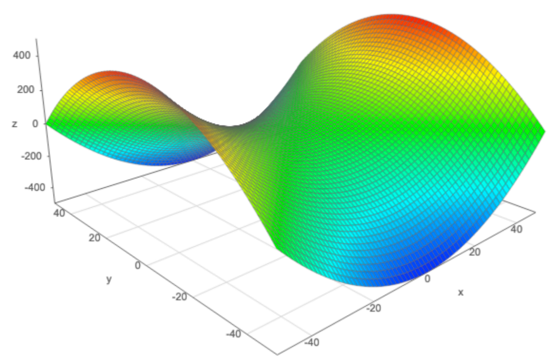
Figura 7. Área da superfície $z = f(x, y)$ para $(x, y) \in U \subset \mathbb{R}^2$

Assim, a área da superfície acima da região $U \subset xy$ é dada por

$$(32) \quad A = \int_S dS = \int_U \left(\sqrt{\left(\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right)^2 + 1} \right) dA.$$

Geralmente, a integral que aparece na equação (32) é difícil de obter analiticamente. Assim, o uso das quadraturas neste caso é imprescindível. Vamos preparar um exemplo para ser resolvido numericamente.

Exemplo 1: Calcular a área da superfície do paraboloide hiperbólico mostrado na Figura 8.



$$z = f(x,y) = 0.2(x^2 - y^2)$$

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = 0.4x$$

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = -0.4y$$

Figura 8. Paraboloide hiperbólico $z = f(x,y) = 0.2(x^2 - y^2)$.

Dados do problema:

Problema 1: A região $U \in xy$ é $U = \{(x,y)| -50\text{m} \leq x \leq 50\text{m}, -50\text{m} \leq y \leq 50\text{m}\}$

Problema 2: A região $U \in xy$ é $U = \left\{(x,y) \in \frac{x^2}{1600} + \frac{y^2}{1600} \leq 1\right\}$

Solução do Problema 1.

Substituindo-se as expressões dadas na Figura 8 e a região especificada nos dados do problema na equação (32), temos

$$(33) \quad \begin{aligned} A &= \int_S dS = \int_U \left(\sqrt{\left(\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right)^2 + 1} \right) dA \\ &= \int_{-50}^{50} \left(\int_{-50}^{50} \left(\sqrt{(0.4x)^2 + (0.4y)^2 + 1} \right) dx \right) dy = 153467.00 \end{aligned}.$$

- ***Quadratura de Gauss-Legendre com três pontos na direção x e três pontos na direção y.***

A quadratura de Gauss-Legendre exige uma mudança de coordenadas dada pela expressão

$$(34) \quad \begin{pmatrix} x(\alpha,\beta) \\ y(\alpha,\beta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-50+50}{2} + \frac{50-(-50)}{2}\alpha \\ \frac{-50+50}{2} + \frac{50-(-50)}{2}\beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 50\alpha \\ 50\beta \end{pmatrix}.$$

Assim,

$$(35) \quad |J| = \det \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \alpha} & \frac{\partial x}{\partial \beta} \\ \frac{\partial y}{\partial \alpha} & \frac{\partial y}{\partial \beta} \end{bmatrix} \overset{eq.(34)}{\hat{=}} \det \begin{bmatrix} 50 & 0 \\ 0 & 50 \end{bmatrix} = 2500$$

e a mudança de variáveis na equação (33) fica

$$
\begin{aligned}
A &= \int_{-1}^{1}\left(\int_{-1}^{1}\left(\sqrt{(0.4x(\alpha,\beta))^2+(0.4y(\alpha,\beta))^2+1}\right)2500d\alpha\right)d\beta \\
&= \int_{-1}^{1}\left(\int_{-1}^{1}\left(\sqrt{(0.4(50\alpha))^2+(0.4(50\beta))^2+1}\right)2500d\alpha\right)d\beta \\
&= \int_{-1}^{1}\left(\int_{-1}^{1}\left(\sqrt{(20\alpha)^2+(20\beta)^2+1}\right)2500d\alpha\right)d\beta \\
&\approx 2500\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}\left(w_i w_j\sqrt{\left(20\alpha_j\right)^2+\left(20\beta_i\right)^2+1}\right) = 146328.37\mathrm{m}^2.
\end{aligned} \tag{36}
$$

A forma final na equação (36) indica que os termos entre parênteses têm de ser calculados nos nove pares ordenados (α_j, β_i). Na forma tabular temos

(α_j, β_i)	$w_j w_i$	$g(\alpha_j, \beta_i) = \sqrt{(20\alpha_j)^2 + (20\beta_i)^2 + 1}$	$w_i w_j\, g(\alpha_j, \beta_i)$	*2500
$\left(-\sqrt{\frac{3}{5}}, -\sqrt{\frac{3}{5}}\right)$	$\frac{5}{9}\cdot\frac{5}{9}=\frac{25}{81}$	21.93171219956	6.76904697514	
$\left(0, -\sqrt{\frac{3}{5}}\right)$	$\frac{8}{9}\cdot\frac{5}{9}=\frac{40}{81}$	15.52417469626	7.66625910926	
$\left(\sqrt{\frac{3}{5}}, -\sqrt{\frac{3}{5}}\right)$	$\frac{5}{9}\cdot\frac{5}{9}=\frac{25}{81}$	21.93171219956	6.76904697514	
$\left(-\sqrt{\frac{3}{5}}, 0\right)$	$\frac{5}{9}\cdot\frac{8}{9}=\frac{40}{81}$	15.52417469626	7.66625910926	
$(0,0)$	$\frac{8}{9}\cdot\frac{8}{9}=\frac{64}{81}$	1	0.79012345679	
$\left(\sqrt{\frac{3}{5}}, 0\right)$	$\frac{5}{9}\cdot\frac{8}{9}=\frac{40}{81}$	15.52417469626	7.66625910926	
$\left(\sqrt{\frac{3}{5}}, \sqrt{\frac{3}{5}}\right)$	$\frac{5}{9}\cdot\frac{5}{9}=\frac{25}{81}$	21.93171219956	6.76904697514	
$\left(0, \sqrt{\frac{3}{5}}\right)$	$\frac{8}{9}\cdot\frac{5}{9}=\frac{40}{81}$	15.52417469626	7.66625910926	
$\left(\sqrt{\frac{3}{5}}, \sqrt{\frac{3}{5}}\right)$	$\frac{5}{9}\cdot\frac{5}{9}=\frac{25}{81}$	21.93171219956	6.76904697514	
			58.53134779439	**146 328.37**

Tarefa: Resolver o Problema 2, seguindo os seguintes passos:

1) **Mudança de variável 1 como feito no caso da elipse;**
2) **Mudança de variável 2 como feito na solução do problema 1;**
3) **Usar quadratura de Gauss-Legendre com 3 pontos em cada direção.**