

**Curso: Métodos Numéricos II**  
**Professor: Creto Augusto Vidal**  
**Semestre: 2020.1**

**Aula # 12**

**Objetivo:** Deduzir as fórmulas de integração especiais de Gauss-Hermite, Gauss-Laguerre, e Gauss-Chebyshev (Чебышёв).

**Problema:** Desenvolver simultaneamente as fórmulas de Gauss para integrações especiais.

$$(1) \quad I = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} f(x) dx \approx \sum_{k=1}^n w_k f(x_k) \quad - \text{Gauss-Hermite}$$

$$(2) \quad I = \int_0^{+\infty} e^{-x} f(x) dx \approx \sum_{k=1}^n w_k f(x_k) \quad - \text{Gauss-Laguerre}$$

$$(3) \quad I = \int_{-1}^{+1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} f(x) dx \approx \sum_{k=1}^n w_k f(x_k) \quad - \text{Gauss-Chebyshev}$$

Obviamente, **cada fórmula terá seus próprios pontos de interpolação  $x_k$ , com seus pesos correspondentes**. Você já deve esperar que estes pontos  $x_k$  serão, respectivamente, as raízes dos polinômios de Hermite,  $H_n(x)$ , de Laguerre,  $L_n(x)$ , e de Chebyshev,  $T_n(x)$ .

### 1. Observações preliminares.

Na solução dos problemas (1), (2) e (3) acima, é importante cuidar para não desrespeitar o que está indicado em cada uma delas, ou seja:

- 1) Os limites de integração têm de ser os que estão indicados;
- 2) As funções que multiplicam  $f(x)$  têm que ser exatamente as indicadas;
- 3) No lado direito, a função a ser usada é  $f(x)$  e não o integrando inteiro.

### 2. Observações gerais feitas para Gauss-Legendre que continuam válidas

Na aplicação das fórmulas de Gauss aos problemas (1), (2) e (3), o ideal seria:

- 1) Desenhar o gráfico da função  $f(x)$  entre os limites de integração.
- 2) Olhar para os pontos de inflexão do gráfico, e definir qual o grau adequado para o polinômio de aproximação.
- 3) Não podemos subdividir o problema pois isso desrespeitaria a observação 1.1 acima.

### 3. Desenvolvimento das fórmulas de integração de Gauss-{Hermite, Laguerre, Chebyshev}

Suponha que o grau do polinômio adequado seja  $G$ .

A **proposta de Gauss** é, com uma fórmula de  $n$  pontos, integrar exatamente as respectivas integrais (1), (2) e (3), considerando que  $f(x)$  seja substituída por um polinômio de grau  $G = 2n - 1$ , ou seja, a fórmula de Gauss seria exata se, ao invés de  $f(x)$ , tivéssemos um polinômio  $p(x)$  de grau  $2n - 1$ .

#### 3.1 Preparação para o desenvolvimento das quadraturas de Gauss

Para o desenvolvimento dessas quadraturas, necessitaremos:

- 1) Os polinômios de Hermite, Laguerre e Chebyshev;
- 2) As raízes dos polinômios de Hermite, Laguerre e Chebyshev;
- 3) Os produtos internos nos espaços de funções polinomiais de grau  $n$ ;
- 4) Bases de um espaço vetorial de polinômios de grau  $n$ ;
- 5) Fórmula de divisão de polinômios.

### 3.1.1 Polinômios de Hermite, Laguerre e Chebyshev

As fórmulas que definem os polinômios de Hermite, Laguerre e Chebyshev de grau  $n$  são:

$$(4) H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2};$$

$$(5) L_n(x) = \frac{e^x}{n!} \frac{d^n}{dx^n} (e^{-x} x^n);$$

$$(6) T_n(x) = \frac{(-2)^n n!}{(2n)!} \sqrt{1-x^2} \frac{d^n}{dx^n} (1-x^2)^{n-\frac{1}{2}}$$

Exemplos:

$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2}$	$L_n(x) = \frac{e^x}{n!} \frac{d^n}{dx^n} (e^{-x} x^n)$	$T_n(x) = \frac{(-2)^n n!}{(2n)!} \sqrt{1-x^2} \frac{d^n}{dx^n} (1-x^2)^{n-\frac{1}{2}}$
$H_0(x) = 1$	$L_0(x) = 1$	$T_0(x) = 1$
$H_1(x) = 2x$	$L_1(x) = -x + 1$	$T_1(x) = x$
$H_2(x) = 4x^2 - 2$	$L_2(x) = \frac{1}{2}(x^2 - 4x + 2)$	$T_2(x) = 2x^2 - 1$
$H_3(x) = 8x^3 - 12x$	$L_3(x) = \frac{1}{6}(-x^3 + 9x^2 - 18x + 6)$	$T_3(x) = 4x^3 - 3x$

### 3.1.2 Raízes dos Polinômios de Hermite, Laguerre e Chebyshev

O que é uma raiz de um polinômio  $p(x)$ ? É o valor  $\bar{x}$  tal que  $p(\bar{x}) = 0$ .

Esses polinômios têm propriedades interessantes com relação às suas raízes:

- 1) Todas as raízes são distintas, isto é, a multiplicidade de cada raiz é 1;
- 2) As raízes dos polinômios de Hermite e de Chebyshev são simétricas (cada raiz  $\bar{x}$  tem sua correspondente simétrica  $-\bar{x}$ )
- 3) Todas as raízes do polinômio de Chebyshev estão no intervalo  $(-1, 1)$ .

Assim,

**um polinômio de grau  $n$ :**

**de Hermite tem  $n$  raízes distintas situadas, simetricamente, entre  $-\infty$  e  $+\infty$ ;**

**de Laguerre tem  $n$  raízes distintas positivas situadas entre 0 e  $+\infty$ ; e**

**de Chebyshev tem  $n$  raízes distintas situadas, simetricamente, entre  $-1$  e  $+1$ .**

Exemplos de raízes:

$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2}$	$L_n(x) = \frac{e^x}{n!} \frac{d^n}{dx^n} (e^{-x} x^n)$	$T_n(x) = \frac{(-2)^n n!}{(2n)!} \sqrt{1-x^2} \frac{d^n}{dx^n} (1-x^2)^{n-\frac{1}{2}}$
$H_1(x) = 2x = 0 \rightarrow x_1 = 0$	$L_1(x) = -x + 1 = 0 \rightarrow x_1 = 1$	$T_1(x) = x = 0 \rightarrow x_1 = 0$
$H_2(x) = 4x^2 - 2 = 0 \rightarrow \begin{cases} x_1 = -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ x_2 = +\frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}$	$L_2(x) = \frac{1}{2}(x^2 - 4x + 2) = 0 \rightarrow \begin{cases} x_1 = 2 - \sqrt{2} \\ x_2 = 2 + \sqrt{2} \end{cases}$	$T_2(x) = 2x^2 - 1 = 0 \rightarrow \begin{cases} x_1 = -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ x_2 = +\frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}$
$H_3(x) = 8x^3 - 12x = 0 \rightarrow \begin{cases} x_1 = -\sqrt{\frac{3}{2}} \\ x_2 = 0 \\ x_3 = +\sqrt{\frac{3}{2}} \end{cases}$	$L_3(x) = \frac{1}{6}(-x^3 + 9x^2 - 18x + 6) = 0 \rightarrow \begin{cases} x_1 = 0.425775 \\ x_2 = 2.29428 \\ x_3 = 6.28995 \end{cases}$	$T_3(x) = 4x^3 - 3x = 0 \rightarrow \begin{cases} x_1 = -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ x_2 = 0 \\ x_3 = +\frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$

Obs.: As raízes do polinômio de Chebyshev  $T_n(x)$  podem ser encontradas facilmente com a fórmula:  $x_k = \cos\left(\frac{2k-1}{2n}\pi\right)$ . A ordenação em ordem crescente é sua responsabilidade.

Por exemplo, para  $n = 3$  e  $k = 1, 2, 3$

$$x_1 = \cos\left(\frac{2 \times 1 - 1}{2 \times 3}\pi\right) = 0.86602540,$$

$$x_2 = \cos\left(\frac{2 \times 2 - 1}{2 \times 3}\pi\right) = 0 \text{ e}$$

$$x_3 = \cos\left(\frac{2 \times 3 - 1}{2 \times 3}\pi\right) = -0.86602540$$

### 3.1.3 Ortogonalidade dos polinômios de Hermite, Laguerre e Chebyshev

Aqui, o produto interno igual a zero continua definindo se dois polinômios são ortogonais. Porém, diferentemente dos polinômios de Legendre, os produtos internos para os polinômios de Hermite, Laguerre e Chebyshev têm uma função de ponderação.

Assim, os produtos internos de:

dois polinômios de Hermite  $H_i(x)$  e  $H_j(x)$ ,

dois polinômios de Laguerre  $L_i(x)$  e  $L_j(x)$  e

dois polinômios de Chebyshev  $T_i(x)$  e  $T_j(x)$

com  $i$  e  $j$  entre 0 e  $n$ , podem ser escritos, respectivamente, como

$$\begin{aligned} (7) \quad & \langle H_i(x), H_j(x) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} H_i(x) H_j(x) dx = \begin{cases} 0, & \text{se } i \neq j; \\ \sqrt{\pi} 2^i i!, & \text{se } i = j. \end{cases} \\ (8) \quad & \langle L_i(x), L_j(x) \rangle = \int_0^{\infty} e^{-x} L_i(x) L_j(x) dx = \begin{cases} 0, & \text{se } i \neq j; \\ 1, & \text{se } i = j. \end{cases} \\ (9) \quad & \langle T_i(x), T_j(x) \rangle = \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} T_i(x) T_j(x) dx = \begin{cases} 0, & \text{se } i \neq j; \\ \pi/2, & \text{se } i = j \neq 0 \\ \pi, & \text{se } i = j = 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Essas equações (equações (7), (8) e (9)) indicam que os polinômios de graus diferentes são ortogonais entre si nos respectivos intervalos (indicados nos limites de integração).

### 3.1.4 Base ortogonal de um espaço vetorial de polinômios

Cada conjunto de polinômios (Hermite, Laguerre e Chebyshev) de graus 0 a  $n$ , são bases distintas do espaço vetorial de polinômios de grau  $n$ . Assim, qualquer polinômio de grau  $n$  pode ser escrito como uma combinação linear de  $n + 1$  polinômios linearmente independentes como os polinômios de Hermite, Laguerre e Chebyshev de graus de 0 a  $n$ .

### 3.1.5 Divisão de polinômios.

Analogamente ao que fizemos na Aula#10, suponha que queiramos dividir um polinômio  $p(x)$  de grau  $G = 2n - 1$  pelo polinômio de Hermite, Laguerre ou Chebyshev de grau  $n$ , ou seja  $p(x)$  é o dividendo e  $H_n(x)$  ou  $L_n(x)$  ou  $T_n(x)$  é o divisor. Assim, existe um polinômio  $q(x)$  de grau  $n - 1$  que é o quociente e um polinômio  $r(x)$  de grau  $n - 1$  que é o resto da divisão.

Portanto,

$$(10) \quad p(x) = H_n(x)q(x) + r(x) \text{ ou}$$

$$(11) \quad p(x) = L_n(x)q(x) + r(x) \text{ ou}$$

$$(12) \quad p(x) = T_n(x)q(x) + r(x).$$

### 3.2 Desenvolvimento propriamente dito das quadraturas especiais de Gauss

De volta ao problema a ser resolvido de forma aproximada, isto é

$$(1) \quad I = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} f(x) dx \approx \sum_{k=1}^n w_k f(x_k) \quad - \text{Gauss-Hermite}$$

$$(2) \quad I = \int_0^{+\infty} e^{-x} f(x) dx \approx \sum_{k=1}^n w_k f(x_k) \quad - \text{Gauss-Laguerre}$$

$$(3) \quad I = \int_{-1}^{+1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} f(x) dx \approx \sum_{k=1}^n w_k f(x_k) \quad - \text{Gauss-Chebyshev}$$

vamos assumir que  $f(x)$  seja substituída por um polinômio  $p(x)$  de grau  $2n - 1$  em  $x$ .

Se  $p(x)$  for considerado o Dividendo na divisão em que o Divisor é  $H_n(x)$  ou  $L_n(x)$  ou  $T_n(x)$ , então podemos escrever

$$(13) \quad p(x) = H_n(x)q(x) + r(x), \text{ ou}$$

$$(14) \quad p(x) = L_n(x)q(x) + r(x), \text{ ou}$$

$$(15) \quad p(x) = T_n(x)q(x) + r(x).$$

Vamos substituir (13) em (1), (14) em (2) e (15) em (3), para obter

$$(16) \quad I = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} p(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} (H_n(x)q(x) + r(x)) dx.$$

$$(17) \quad I = \int_0^{+\infty} e^{-x} p(x) dx = \int_0^{+\infty} e^{-x} (L_n(x)q(x) + r(x)) dx.$$

$$(18) \quad I = \int_{-1}^{+1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} p(x) dx = \int_{-1}^{+1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} (T_n(x)q(x) + r(x)) dx.$$

Sabendo que  $q(x)$  é um polinômio de grau  $n - 1$ , ele pode ser escrito como uma combinação linear dos elementos da base polinomial formada pelos polinômios  $H_n(x)$  ou  $L_n(x)$  ou  $T_n(x)$  de graus 0 a  $n - 1$ , isto é

$$(19) \quad q(x) = c_0 H_0(x) + c_1 H_1(x) + \dots + c_{n-1} H_{n-1}(x) = \sum_{k=0}^{n-1} c_k H_k(x), \text{ ou}$$

$$(20) \quad q(x) = c_0 L_0(x) + c_1 L_1(x) + \dots + c_{n-1} L_{n-1}(x) = \sum_{k=0}^{n-1} c_k L_k(x), \text{ ou}$$

$$(21) \quad q(x) = c_0 T_0(x) + c_1 T_1(x) + \dots + c_{n-1} T_{n-1}(x) = \sum_{k=0}^{n-1} c_k T_k(x).$$

Substituindo (19) em (16), (20) em (17), e (21) em (18), temos

$$(20) \quad \begin{aligned} I &\approx \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} \left( H_n(x) \sum_{k=0}^{n-1} c_k H_k(x) + r(x) \right) dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} \left( \sum_{k=0}^{n-1} c_k H_n(x) H_k(x) + r(x) \right) dx \end{aligned}$$

$$(21) \quad \begin{aligned} I &\approx \int_0^{\infty} e^{-x} \left( L_n(x) \sum_{k=0}^{n-1} c_k L_k(x) + r(x) \right) dx \\ &= \int_0^{\infty} e^{-x} \left( \sum_{k=0}^{n-1} c_k L_n(x) L_k(x) + r(x) \right) dx \end{aligned}$$

$$(22) \quad \begin{aligned} I &\approx \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \left( T_n(x) \sum_{k=0}^{n-1} c_k T_k(x) + r(x) \right) dx \\ &= \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \left( \sum_{k=0}^{n-1} c_k T_n(x) T_k(x) + r(x) \right) dx \end{aligned}$$

Mas a integral da soma é igual à soma das integrais. Assim, podemos reescrever (20), (21) e (22) como

$$(23) \quad I \approx \left[ \sum_{k=0}^{n-1} \left( c_k \int_{-\infty}^{\infty} \left( e^{-x^2} H_n(x) H_k(x) \right) dx \right) + \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} r(x) dx \right],$$

$$(24) \quad I \approx \left[ \sum_{k=0}^{n-1} \left( c_k \int_0^{\infty} \left( e^{-x} L_n(x) L_k(x) \right) dx \right) + \int_0^{\infty} e^{-x} r(x) dx \right], \text{ e}$$

$$(25) \quad I \approx \left[ \sum_{k=0}^{n-1} \left( c_k \int_{-1}^1 \left( \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} T_n(x) T_k(x) \right) dx \right) + \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} r(x) dx \right].$$

Porém, como  $n \neq k = 0, 1, \dots, n-1$ , as integrais dentro dos somatórios são todas nulas por conta da ortogonalidade dos polinômios de Hermite, Laguerre e Chebyshev mostrada em (7), (8) e (9).

Assim, as equações (23), (24) e (25) são reduzidas a

$$(26) \quad I \approx \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} r(x) dx,$$

$$(27) \quad I \approx \int_0^{\infty} e^{-x} r(x) dx, \text{ e}$$

$$(28) \quad I \approx \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} r(x) dx$$

Sabemos que  $r(x)$  são polinômios de grau  $n-1$ . Assim, se soubermos  $n$  pontos por onde esse polinômio passa, podemos reconstruir o polinômio, usando interpolação de Lagrange. De fato, o polinômio de interpolação de Lagrange passando por aqueles  $n$  pontos tem grau  $n-1$  e é o próprio  $r(x)$  já que não existem polinômios diferentes de grau  $n$  que passem pelos mesmos  $n-1$  pontos. Por exemplo, a reta que passa por dois pontos é única. Também, só existe uma parábola que passa por três pontos dados, e assim por diante.

Vamos fazer uma experiência com as  $n$  raízes dos polinômios  $H_n(x)$ ,  $L_n(x)$  e  $T_n(x)$ , substituindo cada uma delas nas equações (13), (14) e (15) respectivamente. Assim, para cada raiz  $x_i$  de  $H_n(x)$ ,  $L_n(x)$  e  $T_n(x)$ , as equações (13), (14) e (15) são escritas como

$$(29) \quad p(x_i) = H_n(x_i)q(x_i) + r(x_i).$$

$$(30) \quad p(x_i) = L_n(x_i)q(x_i) + r(x_i).$$

$$(31) \quad p(x_i) = T_n(x_i)q(x_i) + r(x_i).$$

Porém, como  $x_i$  são raízes,  $H_n(x_i) = 0$ ,  $L_n(x_i) = 0$ , e  $T_n(x_i) = 0$ , Portanto, em cada raiz  $x_i$

$$(32) \quad p(x_i) = r(x_i), \text{ para as raízes, } x_i, \quad i = 1, \dots, n, \text{ de } H_n(x).$$

$$(33) \quad p(x_i) = r(x_i), \text{ para as raízes, } x_i, \quad i = 1, \dots, n, \text{ de } L_n(x).$$

$$(34) \quad p(x_i) = r(x_i), \text{ para as raízes, } x_i, \quad i = 1, \dots, n, \text{ de } T_n(x).$$

Os  $n$  pontos que precisamos para construir os polinômios  $r(x)$  vêm dos próprios integrandos calculados em cada raiz dos polinômios  $H_n(x)$ ,  $L_n(x)$  e  $T_n(x)$ . Finalmente, como foi visto em Métodos Numéricos I,  $r(x)$  pode ser escrito como o polinômio de interpolação de Lagrange que passa por esses  $n$  pontos de interpolação. Assim

$$(35) \quad r(x) = f(x_1)L_{g_1}(\alpha) + f(x_2)L_{g_2}(\alpha) + \dots + f(x_n)L_{g_n}(\alpha) = \sum_{k=1}^n f(x_k)L_{g_k}(x).$$

Aqui, para não confundir com o polinômio de Laguerre,  $L_k(x)$ , chamamos os polinômios interpoladores de Lagrange de  $L_{g_k}(x)$ . Vamos substituir (35) em (26), (27) e (28) para

obtemos as Quadraturas especiais de Gauss-Hermite, Gauss-Laguerre e Gauss-Chebyshev, isto é

$$(36) \quad I \approx \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} r(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} \sum_{k=1}^n f(x_k) L_{g_k}(x) dx = \sum_{k=1}^n f(x_k) \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} L_{g_k}(x) dx.$$

$$(37) \quad I \approx \int_0^{\infty} e^{-x} r(x) dx = \int_0^{\infty} e^{-x} \sum_{k=1}^n f(x_k) L_{g_k}(x) dx = \sum_{k=1}^n f(x_k) \int_0^{\infty} e^{-x} L_{g_k}(x) dx.$$

$$(38) \quad I \approx \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} r(x) dx = \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \sum_{k=1}^n f(x_k) L_{g_k}(x) dx = \sum_{k=1}^n f(x_k) \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} L_{g_k}(x) dx$$

Finalmente, obtemos as

#### Quadraturas especiais de Gauss

$$(39) \quad I = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} f(x) dx \approx \sum_{k=1}^n w_k f(x_k) \quad - \text{Gauss-Hermite}$$

$$(40) \quad I = \int_0^{+\infty} e^{-x} f(x) dx \approx \sum_{k=1}^n w_k f(x_k) \quad - \text{Gauss-Laguerre}$$

$$(41) \quad I = \int_{-1}^{+1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} f(x) dx \approx \sum_{k=1}^n w_k f(x_k) \quad - \text{Gauss-Chebyshev}$$

onde

i)  $x_k, k = 1, 2, \dots, n$  são as raízes dos polinômios,  $H_n(x)$ ,  $L_n(x)$  e  $T_n(x)$  respectivamente nas fórmulas (39), (40) e (41);

ii)  $w_k, k = 1, 2, \dots, n$  são os pesos correspondentes dados, respectivamente, por

$$w_k = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} L_{g_k}(x) dx. \quad (\text{veja equação (36)})$$

$$w_k = \int_0^{\infty} e^{-x} L_{g_k}(x) dx \quad (\text{veja equação (37)})$$

$$w_k = \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} L_{g_k}(x) dx \quad (\text{veja equação (38)})$$

#### Exemplos

$n$	$H_n(x)$		$L_n(x)$		$T_n(x)$	
	$x_k$	$w_k = \frac{2^{n-1} n! \sqrt{\pi}}{n^2 [H_{n-1}(x_k)]^2}$	$x_k$	$w_k = \frac{x_k}{(n+1)^2 [L_{n+1}(x_k)]^2}$	$x_k$	$w_k = \frac{\pi}{n}$
2	$\begin{cases} x_1 = -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ x_2 = +\frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}$	$w_1 = w_2 = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$	$\begin{cases} x_1 = 2 - \sqrt{2} \\ x_2 = 2 + \sqrt{2} \end{cases}$	$\begin{cases} w_1 = \frac{1}{4}(2 + \sqrt{2}) \\ w_2 = \frac{1}{4}(2 - \sqrt{2}) \end{cases}$	$\begin{cases} x_1 = -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ x_2 = +\frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}$	$w_1 = w_2 = \frac{\pi}{2}$
3	$\begin{cases} x_1 = -\sqrt{\frac{3}{2}} \\ x_2 = 0 \\ x_3 = +\sqrt{\frac{3}{2}} \end{cases}$	$w_1 = w_3 = \frac{\sqrt{\pi}}{6}$ $w_2 = \frac{2\sqrt{\pi}}{3}$	$\begin{cases} x_1 = 0.4157745568 \\ x_2 = 2.2942803603 \\ x_3 = 6.2899450829 \end{cases}$	$\begin{cases} w_1 = 0.7110930099 \\ w_2 = 0.2785177336 \\ w_3 = 0.0103892565 \end{cases}$	$\begin{cases} x_1 = -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ x_2 = 0 \\ x_3 = +\frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$	$w_1 = w_2 = w_3 = \frac{\pi}{3}$
4	$\begin{cases} x_1 = \\ x_2 = \\ x_3 = \\ x_4 = \end{cases}$	$w_1 = w_4 =$ $w_2 = w_3 =$	$\begin{cases} x_1 = \\ x_2 = \\ x_3 = \\ x_4 = \end{cases}$	$\begin{cases} w_1 = \\ w_2 = \\ w_3 = \\ w_4 = \end{cases}$	$\begin{cases} x_1 = \\ x_2 = \\ x_3 = \\ x_4 = \end{cases}$	$w_1 = \dots = w_4 =$

**Tarefa:** Seguindo o desenvolvimento apresentado nesta aula, complete a linha  $n=4$  da tabela. Em seguida, implemente as Quadraturas especiais para  $n=2, 3$  e  $4$ . Não há partição!!