Curso: Métodos Numéricos II
Professor: Creto Augusto Vidal
Semestre: 2020.1
Aula # 11

Objetivo: Deduzir as fórmulas de integração de Gauss-Legendre para 2 e 3 pontos e aplicá-las a um problema.

Quadratura de Gauss-Legendre

(1) $I = \int_{x_i}^{x_f} f(x)dx \approx \frac{x_f - x_i}{2}\left[\sum_{k=1}^{n} \bar{p}(\alpha_k)\, w_k\right] = \frac{x_f - x_i}{2}\left[\sum_{k=1}^{n} f(x(\alpha_k))\, w_k\right]$

onde

i) $x(\alpha_k) = \frac{x_i + x_f}{2} + \frac{x_f - x_i}{2}\alpha_k$

ii) $\alpha_k,\ k = 1, 2, \ldots n$ são as raízes do polinômio de Legendre de grau n, $P_n(\alpha)$ e

iii) $w_k,\ k = 1, 2, \ldots n$ são os pesos correspondentes dados por $w_k = \int_{-1}^{1} L_k(\alpha)d\alpha$.

1. Cálculo dos ingredientes para as fórmulas de Gauss-Legendre de 2 e 3 pontos.

Observando a equação (1) acima, vemos que os dados do problema a ser resolvido são:

1) A função $f(x)$ – integrando – que deve ser programada para receber x e retornar o valor $f(x)$;
2) Os limites de integração inferior (início do intervalo) e superior (final do intervalo), x_i e x_f respectivamente.

Com essas informações, o usuário passa a analisar o problema para tomar a decisão de qual fórmula deve usar para resolver o problema de forma aproximada.

Vamos **fazer de conta** que o gráfico da função $f(x)$ tenha um ponto de inflexão no intervalo $[x_i, x_f]$. Isso indica que o polinômio de grau 3 é o polinômio de grau mais baixo que pode se ajustar bem a esse gráfico.

Assim, sabendo que a Quadratura de Gauss-Legendre com n pontos integra de forma exata um polinômio de grau $G = 2n - 1$, então, se $G = 3$, $n = \frac{(G+1)}{2} = \frac{(3+1)}{2} = 2$.

Precisamos achar todos os ingredientes para aplicar a fórmula de Gauss-Legendre com 2 pontos de interpolação.

1.1 Ingredientes da fórmula de Gauss-Legendre com 2 pontos de interpolação.

Para este caso particular, a fórmula (1) pode ser escrita como

(2) $I = \int_{x_i}^{x_f} f(x)dx \approx \frac{x_f - x_i}{2}\left[\sum_{k=1}^{2} f(x(\alpha_k))\, w_k\right] = \frac{x_f - x_i}{2}\left[f(x(\alpha_1))w_1 + f(x(\alpha_2))w_2\right]$

1) Quem são $\boldsymbol{\alpha_1}$ e $\boldsymbol{\alpha_2}$?

Os valores de α_1 e α_2 são as raízes do polinômio de Legendre de grau 2, $P_2(\alpha)$.

Na aula passada (Aula #10), vimos que

(3) $P_2(\alpha) = \frac{1}{2^2 2!}\frac{d^2}{d\alpha^2}\left[(\alpha^2 - 1)^2\right] = \frac{1}{2}(3\alpha^2 - 1)$.

Também vimos que suas raízes eram encontradas resolvendo a equação

(4) $P_2(\alpha) = \frac{1}{2}(3\alpha^2 - 1) = 0 \rightarrow \alpha_1 = -\sqrt{\frac{1}{3}}, \quad \alpha_2 = +\sqrt{\frac{1}{3}}.$

Com esses valores, já podemos calcular os valores correspondentes da variável x.

2) Cálculo de $x(\alpha_1)$ e $x(\alpha_2)$

Com os dados de entrada x_i e x_f e com os valores $\alpha_1 = -\sqrt{\frac{1}{3}}, \quad \alpha_2 = +\sqrt{\frac{1}{3}}$ podemos usar a fórmula

(5) $x(\alpha_k) = \frac{x_i + x_f}{2} + \frac{x_f - x_i}{2}\alpha_k$

para obter

(6) $x(\alpha_1) = x\left(-\sqrt{\frac{1}{3}}\right) = \frac{x_i + x_f}{2} - \frac{x_f - x_i}{2}\sqrt{\frac{1}{3}}$

e

(7) $x(\alpha_2) = x\left(\sqrt{\frac{1}{3}}\right) = \frac{x_i + x_f}{2} + \frac{x_f - x_i}{2}\sqrt{\frac{1}{3}}.$

Por fim, precisamos calcular os valores dos pesos w_1 e w_2.

3) Cálculo de w_1 e w_2

Pela fórmula (8),

(8) $w_k = \int_{-1}^{1} L_k(\alpha) d\alpha,$

vemos que o peso w_k depende do polinômio interpolador de Lagrange $L_k(\alpha)$.

Assim, vamos construir os polinômios interpoladores de Lagrange $L_1(\alpha)$ e $L_2(\alpha)$.

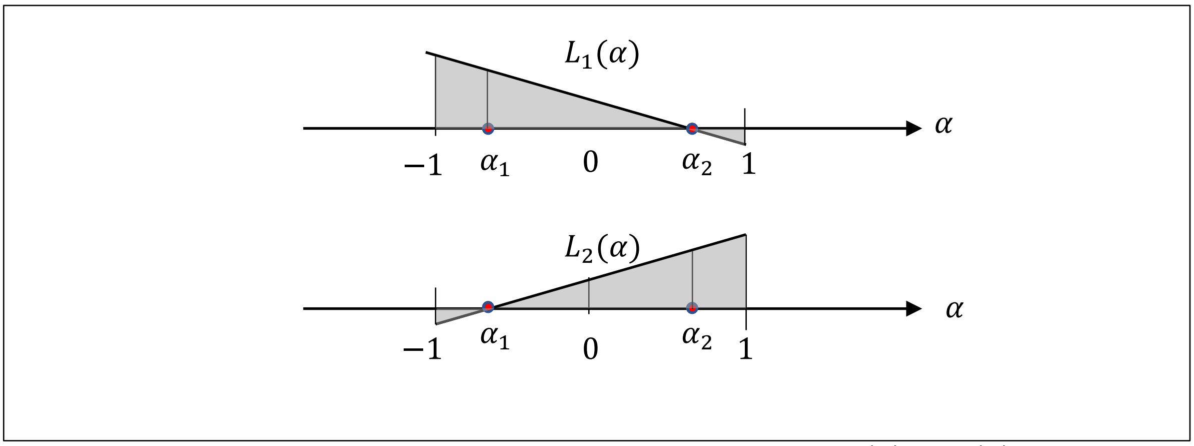

Figura 1. Polinômios interpoladores de Lagrange $L_1(\alpha)$ e $L_2(\alpha)$

Como os polinômios $L_1(\alpha)$ e $L_2(\alpha)$ só passam por dois pontos de interpolação, eles são polinômios do primeiro grau escritos como

(9) $L_1(\alpha) = \frac{(\alpha - \alpha_2)}{(\alpha_1 - \alpha_2)} = \frac{\left(\alpha - \sqrt{\frac{1}{3}}\right)}{\left(-\sqrt{\frac{1}{3}} - \sqrt{\frac{1}{3}}\right)} = -\frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{\sqrt{3}\alpha - 1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{1}{2}\left(1 - \sqrt{3}\alpha\right)$

(10) $\quad L_2(\alpha) = \frac{(\alpha-\alpha_1)}{(\alpha_2-\alpha_1)} = \frac{\left(\alpha+\sqrt{\frac{1}{3}}\right)}{\left(\sqrt{\frac{1}{3}}+\sqrt{\frac{1}{3}}\right)} = \frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{\sqrt{3}\alpha+1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{1}{2}\left(1+\sqrt{3}\alpha\right)$

Logo, substituindo (9) em (8) temos

(11)
$$\begin{aligned} w_1 &= \int_{-1}^{1} L_1(\alpha)d\alpha = \int_{-1}^{1}\frac{1}{2}\left(1-\sqrt{3}\alpha\right)d\alpha = \frac{1}{2}\left[\int_{-1}^{1}(1)d\alpha - \sqrt{3}\int_{-1}^{1}(\alpha)d\alpha\right] \\ &= \frac{1}{2}\left[2-\sqrt{3}\times 0\right] = 1 \end{aligned}$$

Na Figura 1, pode-se observar que a integral $\int_{-1}^{1} L_1(\alpha)d\alpha$ tem o mesmo valor que $\int_{-1}^{1} L_2(\alpha)d\alpha$. Assim, os pesos associados às raízes simétricas são sempre os mesmos.

Se quisermos verificar isso, vamos substituir (10) em (8) para obtermos

(11)
$$\begin{aligned} w_2 &= \int_{-1}^{1} L_2(\alpha)d\alpha = \int_{-1}^{1}\frac{1}{2}\left(1+\sqrt{3}\alpha\right)d\alpha = \frac{1}{2}\left[\int_{-1}^{1}(1)d\alpha + \sqrt{3}\int_{-1}^{1}(\alpha)d\alpha\right] \\ &= \frac{1}{2}\left[2+\sqrt{3}\times 0\right] = 1 \end{aligned}$$

Terminamos! Todos os ingredientes para a Quadratura de Gauss-Legendre com dois pontos já foram obtidos. Agora, vamos fazer o mesmo para a Quadratura de Gauss-Legendre com três pontos.

1.2 Ingredientes da fórmula de Gauss-Legendre com 3 pontos de interpolação.

Para este caso particular, a fórmula (1) pode ser escrita como

(12)
$$\begin{aligned} I &= \int_{x_i}^{x_f} f(x)dx \approx \frac{x_f-x_i}{2}\left[\sum_{k=1}^{3} f(x(\alpha_k))\, w_k\right] \\ &= \frac{x_f-x_i}{2}\left[f(x(\alpha_1))w_1 + f(x(\alpha_2))w_2 + f(x(\alpha_3))w_3\right] \end{aligned}$$

1) Quem são $\boldsymbol{\alpha_1}$, $\boldsymbol{\alpha_2}$ e $\boldsymbol{\alpha_3}$?

Os valores de α_1, α_2 e α_3 são as raízes do polinômio de Legendre de grau 3, $P_3(\alpha)$.

Na aula passada (Aula #10), vimos que

(13) $P_3(\alpha) = \frac{1}{2^3 3!}\frac{d^3}{d\alpha^3}\left[(\alpha^2-1)^3\right] = \frac{1}{2}(5\alpha^3-3\alpha)$.

Também vimos que suas raízes eram encontradas resolvendo a equação

(14) $P_3(\alpha) = \frac{1}{2}\alpha(5\alpha^2-3) = 0 \rightarrow \alpha_1 = -\sqrt{\frac{3}{5}},\ \alpha_2 = 0$ e $\alpha_3 = +\sqrt{\frac{3}{5}}$.

Com esses valores, já podemos calcular os valores correspondentes da variável x.

2) Cálculo de $\boldsymbol{x(\alpha_1)}$, $\boldsymbol{x(\alpha_2)}$ e $\boldsymbol{x(\alpha_3)}$

Com os dados de entrada x_i e x_f e com os valores $\alpha_1 = -\sqrt{\frac{3}{5}},\ \alpha_2 = 0$ e $\alpha_3 = +\sqrt{\frac{3}{5}}$, podemos usar a fórmula

(15) $\quad x(\alpha_k) = \frac{x_i+x_f}{2} + \frac{x_f-x_i}{2}\alpha_k$

para obter

(16) $\quad x(\alpha_1) = x\left(-\sqrt{\frac{3}{5}}\right) = \frac{x_i+x_f}{2} - \frac{x_f-x_i}{2}\sqrt{\frac{3}{5}}$

(17) $x(\alpha_2) = x(0) = \frac{x_i + x_f}{2} + \frac{x_f - x_i}{2} 0 = \frac{x_i + x_f}{2}$.

e

(18) $x(\alpha_3) = x\left(\sqrt{\frac{3}{5}}\right) = \frac{x_i + x_f}{2} + \frac{x_f - x_i}{2}\sqrt{\frac{3}{5}}$.

Por fim, precisamos calcular os valores dos pesos w_1, w_2 e w_3.

3) Cálculo dos pesos $\boldsymbol{w_1}$, $\boldsymbol{w_2}$ e $\boldsymbol{w_3}$

Pela fórmula (19),

(19) $w_k = \int_{-1}^{1} L_k(\alpha) d\alpha$,

vemos que o peso w_k depende do polinômio interpolador de Lagrange $L_k(\alpha)$.

Assim, vamos construir os polinômios interpoladores de Lagrange $L_1(\alpha)$, $L_2(\alpha)$ e $L_3(\alpha)$.

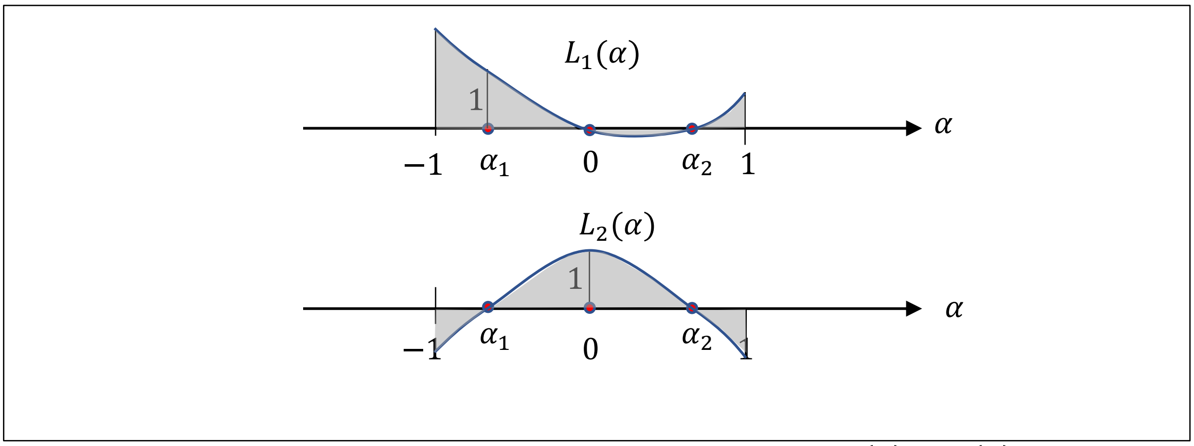

Figura 1. Polinômios interpoladores de Lagrange $L_1(\alpha)$ e $L_2(\alpha)$

Já sabemos que a área de $L_3(\alpha)$ é igual à área de $L_1(\alpha)$. Portanto, não precisamos fazer o cálculo do peso $\boldsymbol{w_3}$ já que ele será igual a $\boldsymbol{w_1}$. Como os polinômios $L_1(\alpha)$ e $L_2(\alpha)$ passam por três pontos de interpolação, eles são polinômios do segundo grau escritos como

(20) $$L_1(\alpha) = \frac{(\alpha - \alpha_2)}{(\alpha_1 - \alpha_2)}\frac{(\alpha - \alpha_3)}{(\alpha_1 - \alpha_3)} = \frac{(\alpha - 0)}{\left(-\sqrt{\frac{3}{5}} - 0\right)}\frac{\left(\alpha - \sqrt{\frac{3}{5}}\right)}{\left(-\sqrt{\frac{3}{5}} - \sqrt{\frac{3}{5}}\right)} = \frac{5}{6}\left(\alpha^2 - \sqrt{\frac{3}{5}}\alpha\right)$$

(21) $$L_2(\alpha) = \frac{(\alpha - \alpha_1)}{(\alpha_2 - \alpha_1)}\frac{(\alpha - \alpha_3)}{(\alpha_2 - \alpha_3)} = \frac{\left(\alpha + \sqrt{\frac{3}{5}}\right)}{\left(0 + \sqrt{\frac{3}{5}}\right)}\frac{\left(\alpha - \sqrt{\frac{3}{5}}\right)}{\left(0 - \sqrt{\frac{3}{5}}\right)} = -\frac{5}{3}\left(\alpha^2 - \frac{3}{5}\right)$$

Logo, substituindo (20) em (19) temos

(22) $$\begin{aligned} w_1 &= \int_{-1}^{1} L_1(\alpha) d\alpha = \int_{-1}^{1} \frac{5}{6}\left(\alpha^2 - \sqrt{\frac{3}{5}}\alpha\right) d\alpha = \frac{5}{6}\left[\int_{-1}^{1} (\alpha^2) d\alpha - \sqrt{\frac{3}{5}}\int_{-1}^{1} (\alpha) d\alpha\right] \\ &= \frac{5}{6}\left[\frac{2}{3} - \sqrt{\frac{3}{5}} \times 0\right] = \frac{5}{9} = w_3 \end{aligned}$$

Agora, substituindo (21) em (19) temos.

(23) $$\begin{aligned} w_2 &= \int_{-1}^{1} L_2(\alpha)d\alpha = \int_{-1}^{1} -\tfrac{5}{3}\left(\alpha^2 - \tfrac{3}{5}\right) d\alpha = -\tfrac{5}{3}\left[\int_{-1}^{1}(\alpha^2)d\alpha - \tfrac{3}{5}\int_{-1}^{1}(1)d\alpha\right] \\ &= -\tfrac{5}{3}\left[\tfrac{2}{3} - \tfrac{6}{5}\right] = -\tfrac{5}{3}\left[\tfrac{2}{3} - \tfrac{6}{5}\right] = \tfrac{8}{9} \end{aligned}$$

Terminamos! Todos os ingredientes para a Quadratura de Gauss-Legendre com três pontos já foram obtidos. Agora, vamos resolver um problema com elas. Vamos resolver o mesmo problema que fizemos na Aula#8.

2. Aplicação das Quadraturas de Gauss-Legendre com 2 e 3 pontos a um problema

Vamos resolver o problema

(24) $I = \int_0^1 (\mathrm{sen}(2\mathrm{x}) + 4\,\mathrm{x}^2 + 3\,\mathrm{x})^2 dx = 17.8764703$

2.1 Solução com Gauss-Legendre com 2 pontos.

Para facilitar, vamos colocar na forma de uma tabela

α_k	$x(\alpha_k) = \frac{0+1}{2} + \frac{1-0}{2}\alpha_k$	$f(x(\alpha_k))$	w_k	$f(x(\alpha_k))w_k$
$\alpha_1 = -\sqrt{\frac{1}{3}}$	$x(\alpha_1) = \frac{1}{2}\left(1 - \sqrt{\frac{1}{3}}\right)$	1.49520523	$w_1 = 1$	1.49520523
$\alpha_2 = \sqrt{\frac{1}{3}}$	$x(\alpha_2) = \frac{1}{2}\left(1 + \sqrt{\frac{1}{3}}\right)$	34.26975855	$w_2 = 1$	34.26975855
			Total:	**35,76496378**

Assim, o resultado final é

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 (\mathrm{sen}(2\mathrm{x}) + 4\,\mathrm{x}^2 + 3\,\mathrm{x})^2 dx \approx \frac{x_f - x_i}{2}\left[\sum_{k=1}^{2} f(x(\alpha_k))\, w_k\right] \\ &= \frac{1}{2}[35{,}76496378] = 17.8824819 \end{aligned}$$

2.2 Solução com Gauss-Legendre com 3 pontos.

Para facilitar, vamos colocar na forma de uma tabela

α_k	$x(\alpha_k) = \frac{1}{2}(1+\alpha_k)$	$f(x(\alpha_k))$	w_k	$f(x(\alpha_k))w_k$
$\alpha_1 = -\sqrt{\frac{3}{5}}$	$x(\alpha_1) = \frac{1}{2}\left(1 - \sqrt{\frac{3}{5}}\right)$	0.37504744	$w_1 = \frac{5}{9}$	0.20835969
$\alpha_2 = 0$	$x(\alpha_2) = \frac{1}{2}(1+0)$	11.16542834	$w_2 = \frac{8}{9}$	9.92482519
$\alpha_3 = \sqrt{\frac{3}{5}}$	$x(\alpha_2) = \frac{1}{2}\left(1 + \sqrt{\frac{3}{5}}\right)$	46.10943483	$w_2 = \frac{5}{9}$	25.61635268
			Total:	**35,74953756**

Assim, o resultado final é

$$
\begin{aligned}
I &= \int_0^1 (\mathrm{sen}(2\mathrm{x}) + 4\,\mathrm{x}^2 + 3\,\mathrm{x})^2 dx \approx \frac{x_f - x_i}{2}\left[\sum_{k=1}^{3} f(x(\alpha_k))\, w_k\right] \\
&= \frac{1}{2}[35{,}74953756] = 17.87476878
\end{aligned}
$$

Tarefa: Desenvolva a Quadratura de Gauss-Legendre com 4 pontos seguindo o roteiro apresentado nesta aula. Implemente as Quadraturas de Gauss-Legendre de 2 a 4 pontos e teste os resultados com tolerância de 10^{-6}. O seu código (como já discutido em sala de aula) implementa a estratégia de partição do problema. Veja, em cada caso, quantas iterações foram necessárias até atingir a tolerância especificada.