Curso: Métodos Numéricos II
Professor: Creto Augusto Vidal
Semestre: 2020.1
Aula # 8

Objetivo: Exemplo de aplicação das fórmulas de integração de Newton-Cotes

Problema: Calcular a integral definida mostrada na equação (1).

(1) $I = \int_a^b f(x)dx$

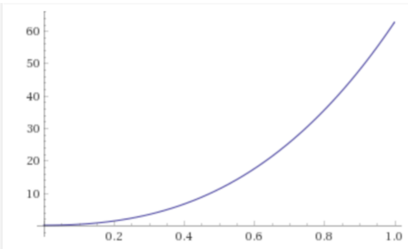
onde *a* e *b* são o início e o fim do intervalo de integração e *f(x)* é uma função dada, por exemplo, f(x) = (sen(2x) + 4x^2 + 3x)^2.

Exemplo: $\int_0^1 (\mathrm{sen}(2\mathrm{x}) + 4\,\mathrm{x}^2 + 3\,\mathrm{x})^2 dx$

Essa integral não é tão difícil de calcular usando seus conhecimentos de Cálculo II. Na verdade, a solução exata é a seguinte:

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 (\mathrm{sen}(2\mathrm{x}) + 4\,\mathrm{x}^2 + 3\,\mathrm{x})^2 dx \\ &= \frac{1}{40}(428 + 220\mathrm{sen}(2) - 5\mathrm{sen}(4)) - 5\cos(2) = 17.8764703 \end{aligned}$$

Vamos tentar obter uma aproximação do valor 17.876, usando nossas fórmulas de integração nas duas abordagens Fechada e Aberta com polinômios de substituição de graus 1, 2 e 3. Neste exercício nós não vamos subdividir o problema. Veja o gráfico da função a ser integrada e tente imaginar qual polinômio poderia ser uma boa aproximação desse gráfico (uma linha reta, uma parábola, um polinômio do terceiro grau?).



Fórmulas de Newton-Cotes Fechadas

. Polinômio de substituição de grau 1 (Regra do Trapézio)

$$I = \int_0^1 (\mathrm{sen}(2\mathrm{x}) + 4\,\mathrm{x}^2 + 3\,\mathrm{x})^2 dx \approx \frac{\Delta x}{2}\big(f(0) + f(1)\big) = \frac{(1-0)}{2}(0 + 62.557) = 31.28$$

. Polinômio de substituição de grau 2 (Regra de Simpson 1/3)

$$I \approx \frac{h}{3}\big(f(0) + 4f(0.5) + f(1)\big) = \frac{\frac{(1-0)}{2}}{3}(0 + 44.6617 + 62.557) = 17.87$$

. Polinômio de substituição de grau 3 (Regra de Simpson 3/8)

$$\begin{aligned} I &\approx \frac{3h}{8}\left(f(0) + 3f\left(\frac{1}{3}\right) + 3f\left(\frac{2}{3}\right) + f(1)\right) \\ &= \frac{\frac{3(1-0)}{3}}{8}(0 + 12.766 + 67.679 + 62.557) = 17.86 \end{aligned}$$

Fórmulas de Newton-Cotes Abertas

. Polinômio de substituição de grau 1 (Regra do Trapézio Aberta)

$$I \approx \frac{\Delta x}{2}\left(f\left(\frac{1}{3}\right)+f\left(\frac{2}{3}\right)\right)=\frac{(1-0)}{2}(4.2552+22.5598)=13.41$$

. Polinômio de substituição de grau 2 (Fórmula de Milne)

$$I \approx \frac{4h}{3}\left(2f\left(\frac{1}{4}\right)-f\left(\frac{1}{2}\right)+2f\left(\frac{3}{4}\right)\right)=\frac{\frac{4(1-0)}{4}}{3}(4.3774-11.1654+60.4449)=17.89$$

. Polinômio de substituição de grau 3

$$\begin{aligned} I &\approx \frac{5h}{24}\left(11f\left(\frac{1}{5}\right)+f\left(\frac{2}{5}\right)+f\left(\frac{3}{5}\right)+11f\left(\frac{4}{5}\right)\right) \\ &= \frac{\frac{5(1-0)}{5}}{24}(14.5328+6.5401+17.4059+390.682)=17.88 \end{aligned}$$

Tarefa: Implemente as fórmulas Fechadas e Abertas da Aula#7 bem como as fórmulas que você desenvolveu para polinômios de substituição de grau 4 (Fechada e Aberta) e teste os resultados com tolerância de 10^{-6}. O seu código (como já discutido em sala de aula) implementa a estratégia de partição do problema. Veja, em cada caso, quantas iterações foram necessárias até atingir a tolerância especificada.