Exercice 1

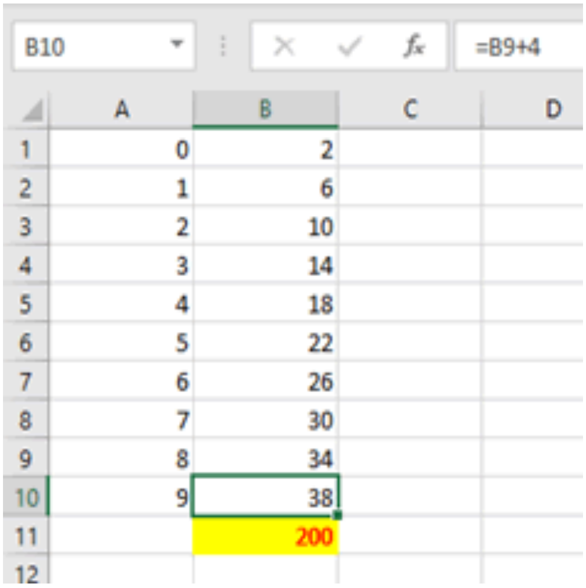
Exercices

1.1 Exercice 1 : suites arithmétiques

Une suite arithmétique (u_n) de raison `r` peut être définie par la formule de récurence :

$$u_{n+1} = u_n + r$$

Le tableau suivant montre 2 listes calculées à partir de suites arithmétiques.



B10 =B9+4

	A	B	C	D
1	0	2		
2	1	6		
3	2	10		
4	3	14		
5	4	18		
6	5	22		
7	6	26		
8	7	30		
9	8	34		
10	9	38		
11		200		
12				

Figure 1 – tableau Excel

1. Utiliser la formule générale pour le calcul de la somme des termes d'une suite arithmétique, $S_n = \frac{n \times (u_1 + u_n)}{2}$ pour :

- Calculer la somme des termes de la colonne de gauche
- Calculer la somme des termes de la colonne de droite

2. Soit `u(n)` la fonction python qui calcule et retourne toutes les valeurs de la suite (u_n) jusqu'au rang `n`, dans une liste. Ecrire le script de cette fonction `u(n)`
3. Ecrire une fonction `somme_arithmetique` en python qui calcule la somme des `n` premiers termes de la suite arithmetique (u_n). Utiliser la fonction `u(n)`
4. Combien d'itération sont necessaires pour calculer la somme des `n` premiers termes de la suite arithmetique (u_n) à l'aide de la fonction `somme_arithmetique` ?

1.2 Exercice 2 : Compléxité algorithmique

1.2.1 notation de landau O()

En mathématiques, la comparaison asymptotique est une méthode consistant à étudier la vitesse de croissance d'une fonction.

On utilise une fonction de référence $g(n) = log(n), n, n^2, ...2^n$ qui permet d'étudier la vitesse d'une fonction quelconque `T(n)` en l'approchant d'une fonction plus « simple ».

Comme la comparaison se fait pour de grandes valeurs de n ($n \to$), on utilise la notation $O(g(n))$ pour faire référence à la croissance de $g(n)$ pour $n \to$. C'est à l'aide de cette notation O que l'on exprime la complexité algorithmique asymptotique d'une fonction python.

*Voyons quelques exemples à l'aide de la fonction `multiplie`, qui réalise une multiplication sans utiliser le signe `*`.

```
1 def multiplie1(b,n):
2   L=[]
3   for i in range(n):
4     L.append(b*i)
5   return L
```

Le programme execute n fois la ligne 4. Le nombre d'*opérations significatives* effectuée est $T(n) = 2 \times n$: 1 opération `append` et 1 opération `b*i`.

On aura pour `multiplie1`une classe de complexité algorithmique

$$O(n)$$

.

Si on ajoute des lignes dans la boucle `for`, pour faire par exemple :

```
def multiplie2(b,n):
  L=[]
  for i in range(n):
      y = b * i
      L.append(y)
  return L
```

Le nombre d'opérations significatives effectuée par `multiplie2` devient $T(n) = 3 \times n$.

C'est deux fois plus que `multiplie1`. Or cette différence ne vient que d'une différence des **details d'implémentation** du même algorithme, et ne doit pas être considérée pour le calcul de la complexité.

On aura aussi pour `multiplie2` une compléxité algorithmique asymptotique

$$O(n)$$

.

Enfin, ce même algorithme peut être implémenté avec une boucle non bornée :

```
def multiplie3(b,n):
  L=[]
  i = n - 1
  while i >=0 :
    y = b * i
    L.append(y)
```

```
    i -= 1
  return L
```

1.2.2 Questions

1. Pour les fonctions `multiplie1` et `multiplie2` : Enoncer un ensemble de règles pour déterminer T(n).
2. Pour les fonctions `multiplie1` et `multiplie2` : Enoncer une règle pour évaluer la complexité algorithmique asymptotique $O(g(n))$ à partir de T(n).
3. Déterminer T(n) pour `multiplie3`. Vérifier que l'on obtient aussi une classe de complexité $O(n)$ pour `multiplie3`.

1.3 Exercice 3 : fonction `chose`

```
def truc(n):
  res=0
  for i in range(0,n):
    res = res + 1
  return res

def chose(n):
  res=0
  for i in range(n):
    res = res + truc(i)
  return res
```

1. Déterminer T(n) et $O(g(n))$ pour la fonction `truc`
2. Idem pour la fonction `chose`

1.4 Exercice 4 : deplacer des objets dans une liste

On donne l'une des fonctions de l'interface de programmation du `serpent` dans le jeu *Snake* :

```
def supprime_queue(S):
    # decale toutes les valeurs de la liste S vers la gauche:
    # copie toutes les valeurs S[i+1] dans S[i]
    # puis supprime le dernier element
    for i in range(len(S)-1):
        S[i] = S[i+1]
    S.pop()
```

1. Determiner la fonction T(n) qui exprime le nombre d'opérations effectuées par la fonction pour une liste de taille `n`
2. Déterminer la classe de complexité algorithmique **O(g(n))** de cette fonction.

1.5 Exercice 5 : Recherche dans un jeu de cartes

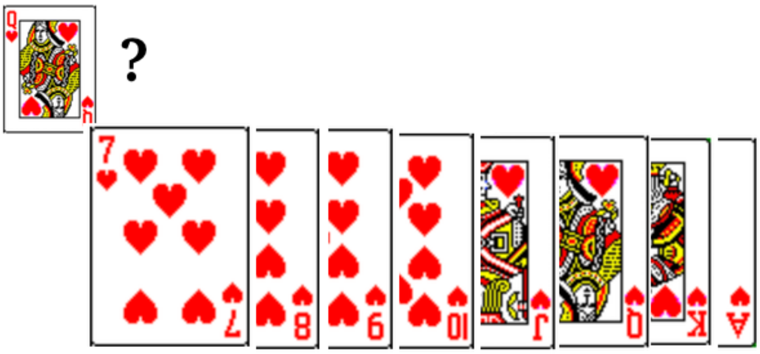


Figure 2 – cartes triées

1. Ecrire une liste L représentant le jeu de cartes de l'image. La carte qui a pour valeur 7 sera représentée par l'entier 1, puis celle de valeur 8 aura la valeur 2, etc ... jusqu'à l'As qui vaut 8.
2. Compléter le *tableau de suivi* et expliquer comment l'algorithme de recherche réduit cette liste jusqu'à trouver la carte de la Dame de Coeur. Comparer ainsi l'efficacité des 2 algorithmes, celui de recherche sequentielle et celui de recherche dichotomique.

g	d	m	L[m]	trouve
0	7	3	4	False

3. Fonction logarithmique : Le logarithme en base a d'un nombre x strictement positif peut être calculé à partir de :

$$log_a(x) = \frac{log(x)}{log(a)}$$

En informatique, on uitlise préferentiellement la fonction logarithmique en base 2.

- Calculer les logarithmes en base 2 de 8, 16, 32, 64. Que remarquez-vous ?
- Combien de fois successives faut-il diviser 8 par 2 pour arriver à 1 ?
- Même question pour 16 puis 32. Conclure : Exprimer d'une autre manière ce que signifie le logarithme en base 2 d'un nombre.
- En déduire la complexité algorithmique asymptotique de la recherche dichotomique.

1.6 Exercice 6 : Tri par selection

1.6.1 Principe :

On recherche le plus petit élément et on le met à sa place (en l'échangeant avec le premier). On recherche le second plus petit et on le met à sa place, etc.

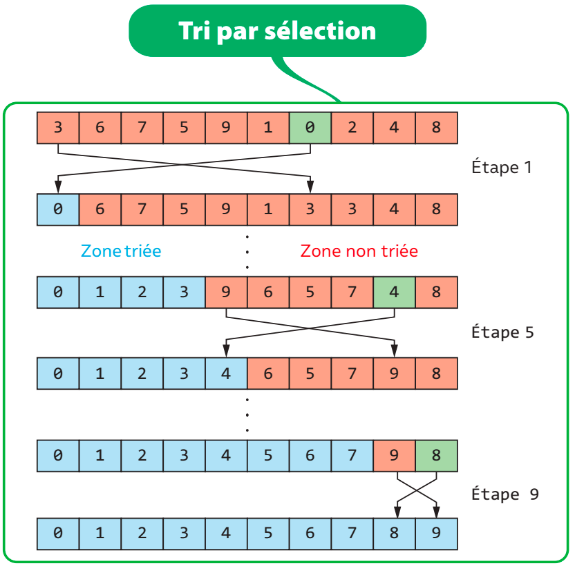


FIGURE 3 – illustration du tri par selection

```python
def tri_selection(L):
  n = len(L)
  for i in range(0, n - 1):
    #recherche le plus petit élément de i à la fin
    mini = i
    for j in range(i + 1, n):
        if L[j] < L[mini]:
          mini = j
    #échanger les cases i et mini
    tmp = L[i]
    L[i] = L[mini]
    L[mini] = tmp
```

1. Dans un tableau : Représenter la liste L entre les étapes 1 et 5. Indiquer à chaque fois le nombre d'opérations de comparaisons effectuées dans la boucle interne.

iteration n°	i	L[i]	L[min]	L apres exec de la boucle interne	Comparaisons
1	0	3	0	[0,6,7,5,9,1,3,3,4,8]	9

2. Supposons maintenant que les éléments de la liste L à trier sont rangés en sens inverse. Cela va-t-il augmenter ou diminuer le nombre d'opérations effectuées pour trier cette liste ?

3. Calculer la complexité dans le pire des cas **O(g(n))** de cet algorithme.