

## Introduction aux *Graphes*

### 1.1 Décrire un *Graphe*

1.1.1 Ci-dessous, le plan du reseau de *tramway* de la ville de Strasbourg.



FIGURE 1 – reseau du tramway

S'agit-il d'un graphe ? Est-il *connexe* ? Comporte-t-il un cycle ? Est-il *complet* ?

1.1.2 Mêmes questions pour le reseau d'ordinateur :

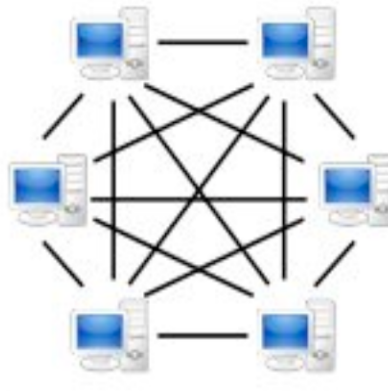


FIGURE 2 – reseau

### 1.1.3 Mêmes questions pour le schéma de la molécule

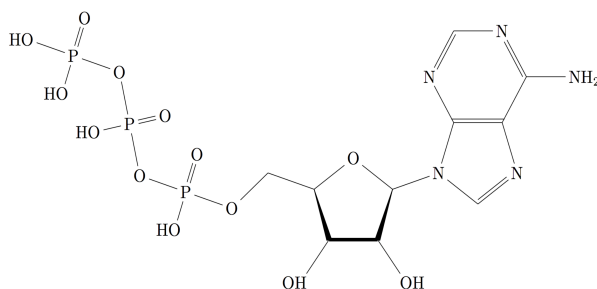


FIGURE 3 – molécule en formule développée : graphe non orienté et annoté

1.1.4 Pour le schéma du réseau d'ordinateurs, puis le schéma de la molécule, utiliser la loi permettant le calcul de l'ordre, de la taille, puis de la densité de chacun de ces réseaux.

## 1.2 Choisir la structure de donnée adaptée

Pour chacun des exemples suivants :

- choisir le type de graphe adapté parmi : graphe orienté/non orienté, pondéré, non connexe, sans cycle.
  - Précisez également ce que représentera un *sommet*, et ce qui sera une *arête*.
  - Donner une représentation simplifiée du graphe dans chaque cas.
- un réseau de villes reliées par des routes, comportant l'information de leur longueur (en km). Toutes les villes sont supposées être reliées par au moins une route. Ces routes sont toutes en double sens.
  - un réseau social de type Facebook, où les participants ont des liens d'*amitié* entre-eux. Ce lien est réciproque (si Marcel est ami avec Justine, alors Justine est aussi amie avec Marcel). Les sous-réseaux ne sont pas tous reliés entre eux. (Il existe au moins deux groupes A et B complètement indépendants : aucune des personnes de A n'est amie avec celles de B).
  - un réseau social de type Twitter : les participants ont des *followers*. Cette relation n'est pas réciproque. Les followers suivent les participants qui partagent les mêmes centres d'intérêt.
  - une partie de jeu de morpion (tic-tac-toe), où les états de la partie sont liés aux états suivants possibles.

Partie 2

## Exercices

### 2.1 Tournoi de Rugby

On souhaite organiser un tournoi de rugby avec 5 équipes (numérotées de 1 à 5).

- Représenter la situation avec un graphe.
- Combien d'arêtes ce graphe possède-t-il ? En déduire le nombre de matchs du tournoi.
- Ce graphe est-il connexe ?
- Ce graphe est-il complet ?

## 2.2 Tournoi de Tennis

Un club de tennis doit sélectionner deux joueurs parmi 4 pour représenter le club à un tournoi national/ Les quatre joueurs sont notés A, B, C et D. Pour cette sélection, chaque joueur rencontre les trois autres.

- Chaque match gagné rapporte un point.
- Chaque match perdu enlève un point.

Les résultats des matchs entre ces 4 joueurs est donné sous la forme d'un graphe orienté.

Le sens de l'arc  $A \rightarrow B$  indique que le joueur A a battu le joueur B.

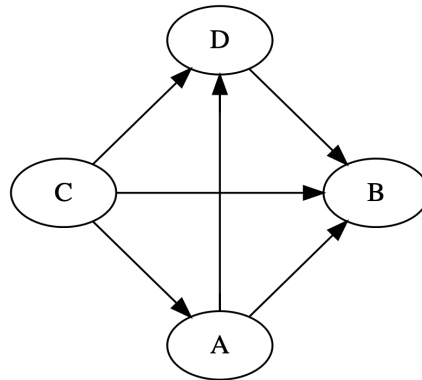


FIGURE 4 – graphe orienté du tournoi

1. Donner le nombre de points de chaque joueur.
2. En déduire les joueurs sélectionnés.

Partie 3

## Structure de données 3 Graphes et internet - COURS

### 3.1 Complexité et morphologie d'un graphe

Un graphe permet de construire un schéma qui met en évidence une structure sur des données.

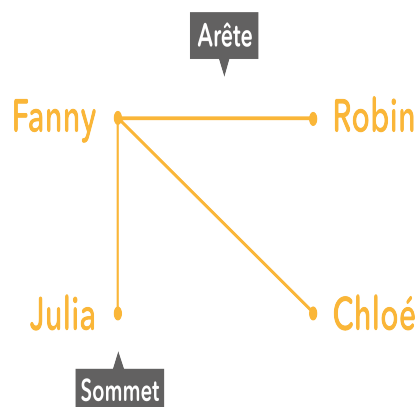


FIGURE 5 – exemple de graphe modélisant un réseau social

On appelle **graphe** la donnée d'un ensemble fini  $V$  de points (ou **sommets** du graphe, *vertices* en anglais) et d'un ensemble  $E$  de liens entre ces points.

$$G = (V, E)$$

L'ensemble  $E$  de liens peut être vu comme une relation  $R$  sur  $V \times V$ . Il peut être représenté par une matrice d'adjacence.

- Lorsque cette relation est **symétrique** (c'est à dire que l'existence d'un lien entre un sommet  $s_1$  et un sommet  $s_2$  est réciproque) le graphe est dit **non orienté**. Un lien est appelé une **arête**.
- Lorsque cette relation n'est pas **symétrique**, le graphe est dit **orienté**. On parle alors d'**arc** entre deux **sommets**.

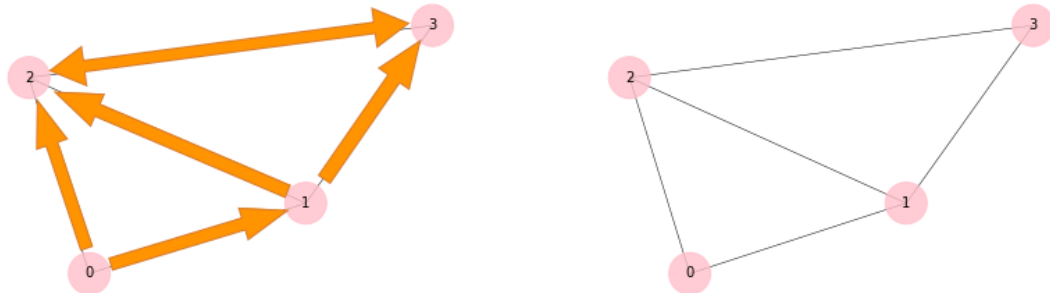


FIGURE 6 – exemple de graphes orienté/non orienté

Un **chemin**  $C$  est une **suite consécutive d'arêtes** :  $C = \{s_0s_1, s_1s_2, \dots, s_{k-1}s_k\}$  où  $C \subset E$ .

Des **poids** peuvent être associés aux liens d'un graphe, par exemple pour représenter la distance. Il s'agit alors d'un **graphe pondéré**.

*Schéma : exemple de graphe pondéré*

Un graphe peut servir à modéliser le réseau d'ordinateurs, un réseau social, les distances entre villes par la route...

Lorsqu'un graphe non orienté est en *un seul morceau*, c'est à dire lorsqu'il existe pour tous sommets  $s_1$  et  $s_2$  un chemin les reliant, le graphe est dit **connexe**.

*Schéma : graphe connexe / non connexe*

Et lorsqu'un chemin mène d'un sommet  $s$  à lui-même, on parle de **cycle**.

*Schéma : cycle dans un graphe*

La **connexité**, les **graphes eulériens** et les **cycles** sont traités dans le cours sur les graphes de *Y Monka*. Se reporter au pdf du dossier *docs*.

### 3.2 Mesures sur un graphe

- **Ordre** : le nombre de ses sommets
- **taille** : le nombre de ses arêtes
- **degré d'un sommet  $s$**  : nombre d'arêtes qui relient ce sommet à d'autres sommets.
- un graphe est dit **complet** si tous ses sommets sont connectés entre eux deux-à-deux. Pour  $N$  sommets, cela correspond à un nombre d'arcs égal à :  $N * (N-1)$ . Et si le graphe est non orienté :

$$\frac{N \times (N-1)}{2}$$

- La **densité**  $D$  d'un graphe est une indication générale de sa connectivité et indique s'il y a beaucoup ou peu d'arêtes. C'est le rapport entre le nombre d'arêtes existantes et leur nombre possible :

$$D = \frac{A}{N \times (N-1)}$$

Le graphe est **creux** si sa densité est proche de zero, et **dense** si elle se rapproche de 1.