

# Strutture Dati, Algoritmi e Complessità

## Esercitazione del 23 Aprile 2024

Scopo di questa esercitazione è implementare algoritmi su grafi diretti, in particolare per l'individuazione di componenti fortemente connesse e per l'ordinamento topologico.

**Attenzione.** Per realizzare questa esercitazione è necessario implementare funzioni (metodi) contenuti nel file `graph_services.c` (`GraphServices.java`). A tale scopo si possono usare tutte le funzionalità implementate nella classe `Graph.java` (modulo `graph.c` in C), all'interno delle cartelle su cui dovreste lavorare.

### Task 1. Classificazione degli archi

Dato un grafo diretto  $G$ , l'esercizio richiede di sviluppare un algoritmo (`sweep`) che visita tutti i nodi effettuando una DFS. Durante la visita degli archi, tale funzione deve classificare ogni arco  $(u, v)$  in base a queste tipologie:

1. se  $v$  è visitato per la prima volta quando attraversiamo l'arco  $(u, v)$ , allora l'arco  $(u, v)$  è un *tree edge*.
2. altrimenti:
  - se  $v$  è un antenato di  $u$ , allora l'arco  $(u, v)$  è un *back edge*.
  - se  $v$  è un discendente di  $u$ , allora l'arco  $(u, v)$  è un *forward edge*.
  - se  $v$  non è né antenato né discendente di  $u$ , allora l'arco  $(u, v)$  è un *cross edge*.

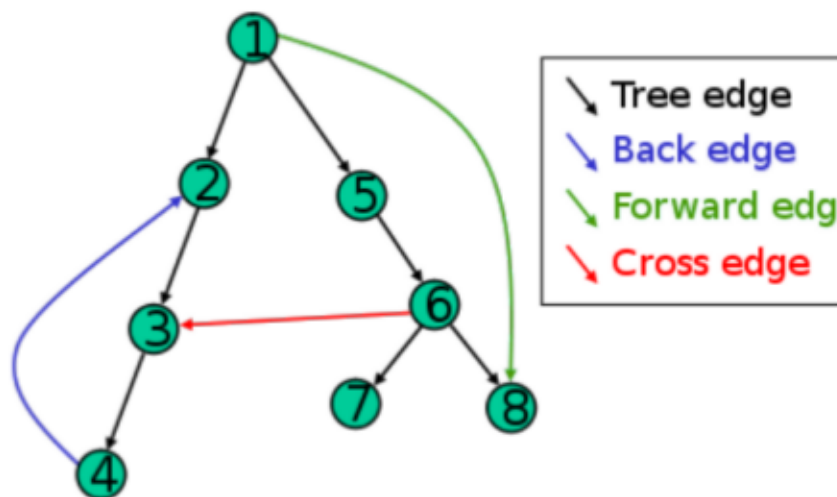


Figura 1: Esempio di esecuzione della funzione `sweep`. Visita DFS del grafo indotto dal nodo 1 con classificazione degli archi.

La Figura 1 mostra un esempio con valori di tipo intero. La DFS viene fatta iniziare dal nodo 1 e l'ordine della visita è 1 2 3 4 5 6 7 8.

Per far sì che `sweep` stampi, durante l'esecuzione, la tipologia di un arco, si può procedere come segue. Sia  $(u, v)$  un arco del grafo:

- Se  $v$  non è mai stato visitato, l'arco da  $u$  a  $v$  è un *tree edge*
- Se  $v$  è ancora "in visita", l'arco da  $u$  a  $v$  è un *back edge*

- Se  $v$  è stato visitato:
  - dopo  $u$ , l'arco  $(u, v)$  è un forward edge
  - prima di  $u$ , l'arco  $(u, v)$  è un cross edge

**Specifiche.** Realizzare la funzione sweep descritta nel header graph `services.h` (`GraphServices.java`) che, preso in ingresso un grafo, stampa a video la classificazione di tutti i suoi archi nel formato:

```
v1 -> v2 : {TREE, FORWARD, BACK, CROSS}
```

```
void graph_sweep(graph * g , char * format_string);

public static <V > void sweep(Graph<V> g);
```

In C, `format_string` può essere utilizzata dalla funzione per stampare il valore memorizzato in un nodo (ad esempio, `printf(format_string, node_value)`). Tale funzione visita il grafo, effettuando una DFS su ogni nodo del grafo che non è stato ancora visitato, e stampa in `stdout` il tipo di arco {tree, back, cross, forward} per ogni arco presente nel grafo. Alla fine dell'esecuzione tutti gli archi devono essere stati classificati. Si ricorda che il grafo potrebbe non essere completamente connesso.

Si proceda a testare il codice sviluppato utilizzando `driver.c` (rispettivamente `Driver.java`) passando come argomento `sweep`.

## Task 2. Componenti fortemente connesse

Un grafo diretto si dice fortemente connesso se esiste un percorso per ogni coppia dei suoi vertici. Una componente fortemente connessa di un grafo diretto, è un sottografo (diretto) fortemente connesso con il maggior numero possibile di vertici. In questa esercitazione, siamo interessati ad identificare tutte le componenti fortemente connesse di un grafo diretto, facendo uso della visita DFS. La Fig. 3 mostra un esempio di grafo diretto, con evidenziate le sue componenti fortemente connesse.

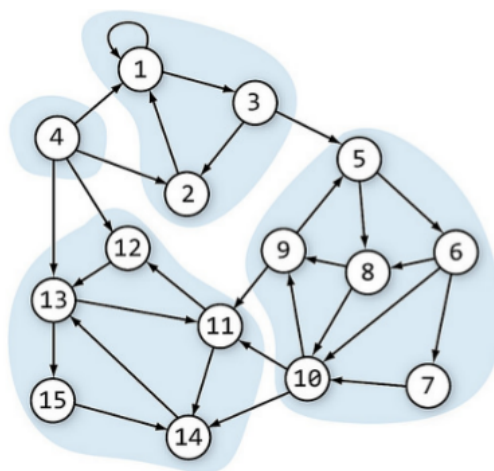


Figura 3: Esempio di grafo diretto aciclico con evidenziate le sue componenti fortemente connesse.

**Specifiche.** Realizzare la funzione strong connected components descritta nell' header `graph_services.h` (`GraphServices.java`) che, preso in ingresso un grafo, stampa a video tutte le componenti fortemente connesse del grafo nel formato:

```
Sottografo fortemente connesso
V1, V2, V3, ..., Vn
.
.
Sottografo fortemente connesso
Vk, Vk+1, ..., Vm
```

```
void strong_connected_components(graph * g);

public static <V > void strongConnectedComponents(Graph <V> g);
```

**Suggerimento.** Le componenti fortemente connesse di un grafo diretto, e quelle del suo grafo trasposto (cioè il grafo in cui ogni arco  $V_m \rightarrow V_n$  è sostituito con l'arco  $V_n \rightarrow V_m$ ) sono uguali.

### Task 3. Ordinamento topologico

Dato un grafo diretto aciclico (DAG), un ordine topologico del grafo è una lista ordinata dei nodi tale che ogni nodo viene prima di tutti quelli collegati ai suoi archi uscenti. Si noti che, nel caso peggiore, esistono  $n!$  diversi ordinamenti. In questa esercitazione siamo interessati a risolvere il problema dell'ordinamento topologico facendo uso di una visita DFS.

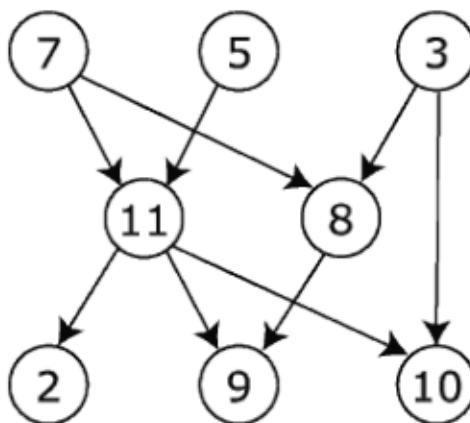


Figura 2: Esempio di grafo diretto aciclico.

La Fig. 2 mostra un'esempio di un grafo diretto aciclico i cui diversi ordinamenti topologici sono (lista non completa):

- 7, 5, 3, 11, 8, 2, 9, 10;
- 3, 5, 7, 8, 11, 2, 9, 10;
- 3, 7, 8, 5, 11, 10, 2, 9;
- ...

**Specifiche.** Realizzare la funzione topological sort descritta nel header `graph_services.h` (`GraphServices.java`) che, preso in ingresso un grafo, stampa a video un possibile ordinamento topologico dello stesso. Si ricorda che, nel caso il grafo passato alla funzione non sia diretto ed aciclico, non è possibile derivare alcun ordinamento topologico.

```
void topological_sort(graph * g);
```

```
public static <V> void topologicalSort(Graph <V> g);
```