Un calcul de flot optique

BRUNEAU Basile   MASSET Camille

14 janvier 2015

1 Position du problème

$\boxed{\textbf{Q1}}$ L'intensité d'un point matériel est supposée constante le long de son déplacement. On en déduit :

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}\tilde{\mathrm{I}}}{\mathrm{d}t} &= \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\partial_x \mathrm{I} + \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\partial_y \mathrm{I} + \partial_t \mathrm{I} \\ &= (\partial_x \mathrm{I}, \partial_y \mathrm{I}) \cdot (u, v) + \partial_t \mathrm{I} \\ &= 0 \quad \text{(par hypothèse)}\end{aligned}$$

On en déduit l'équation :

$$\nabla \mathrm{I} \cdot h + \partial_t \mathrm{I} = 0 \quad \text{sur } \Omega \times [0\,;\mathrm{T}] \tag{1}$$

L'inconnue de cette équation est le vecteur $h = (u, v)$, correspondant à la vitesse d'un point matériel suivi, de coordonnées initiales (x_0, y_0).
On ne peut pas résoudre cette équation sans hypothèse supplémentaire sur h. En effet, fondamentalement, l'information sur h nous provient de la connaissance de l'intensité I, or cette grandeur est « de *dimension 1* » alors que h a *deux* composantes indépendantes.

2 Méthode de Horn et Schunk

On fait l'hypothèse que le flot h est régulier (au moins de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\Omega = [0\,;1]^2$). On adopte une approche variationnelle du problème, et on se propose de déterminer le flot $h = (u, v)$ qui minimise l'énergie suivante sur Ω :

$$\mathrm{J}(u, v) = \int_\Omega (\mathrm{I}_x u + \mathrm{I}_y v + \mathrm{I}_t)^2 + \alpha^2 \left(|\nabla u|^2 + |\nabla v|^2 \right)$$

où α est une constante réelle, et I_μ est la dérivée de I par rapport à $\mu \in \{x, y, t\}$.
Si $\alpha = 0$, l'énergie est nulle quel que soit le flot h, donc la formulation variationnelle ne nous apprend rien...

$\boxed{\textbf{Q2}}$ On suppose que le minimum existe dans un espace plus grand que $\mathscr{C}^2(\Omega)$.
JE NE SAIS PAS COMMENT MONTRER L'UNICITE..................

$\boxed{\textbf{Q3}}$ On note $\bar{h} = (\bar{u}, \bar{v})$ le flot minimisant. Pour tout u on a donc :

$$\begin{aligned}
\mathrm{J}(\bar{u}+u, \bar{v}) &= \int_\Omega (\mathrm{I}_x(\bar{u}+u) + \mathrm{I}_y\bar{v} + \mathrm{I}_t)^2 + \alpha^2 \left(|\nabla(\bar{u}+u)|^2 + |\nabla\bar{v}|^2 \right) \\
&= \mathrm{J}(\bar{u}+u, \bar{v}) + \int_\Omega \left[2\mathrm{I}_x u(\mathrm{I}_x\bar{u} + \mathrm{I}_y\bar{v} + \mathrm{I}_t) + 2\alpha^2 \nabla\bar{u}\cdot\nabla u \right] + \alpha^2 \int_\Omega |\nabla u|^2
\end{aligned}$$

Le terme central est la différentielle de J en $\bar{h}$ évaluée en $(u, 0)$, donc comme $\bar{h}$ minimise J, on peut affirmer que :

$$\forall u, \qquad \int_\Omega \left[\mathrm{I}_x u(\mathrm{I}_x\bar{u} + \mathrm{I}_y\bar{v} + \mathrm{I}_t) + \alpha^2 \nabla\bar{u}\cdot\nabla u \right] = 0$$

On peut en particulier choisir u dans $\mathscr{C}^\infty(\Omega)$. Par application de la formule de Green-Riemann, on obtient :

$$\forall u \in \mathscr{C}^\infty(\Omega), \qquad \int_\Omega u \left[\mathrm{I}_x(\mathrm{I}_x\bar{u} + \mathrm{I}_y\bar{v} + \mathrm{I}_t) - \alpha^2 \Delta\bar{u} \right] = 0$$

Le lemme 3.1.7 du cours permet d'affirmer alors que :

$$\mathrm{I}_x(\mathrm{I}_x\bar{u} + \mathrm{I}_y\bar{v} + \mathrm{I}_t) - \alpha^2 \Delta\bar{u} = 0 \quad \text{sur } \Omega$$

On tient le même raisonnement en évaluant la différentielle de J au point $\bar{h}$ calculée au point $(0, v)$. On obtient donc le système d'équations suivant :

$$\mathrm{I}_x^2 u + \mathrm{I}_x\mathrm{I}_y v = \alpha^2 \Delta u - \mathrm{I}_x\mathrm{I}_t \tag{2}$$
$$\mathrm{I}_x\mathrm{I}_y u + \mathrm{I}_y^2 v = \alpha^2 \Delta v - \mathrm{I}_y\mathrm{I}_t \tag{3}$$