Un calcul de flot optique

Bruneau Basile Masset Camille

14 janvier 2015

1 Position du problème

Q1 L'intensité d'un point matériel est supposée constante le long de son déplacement. On en déduit :

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}\tilde{\mathrm{I}}}{\mathrm{d}t} &= \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\partial_x \mathrm{I} + \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\partial_y \mathrm{I} + \partial_t \mathrm{I} \\ &= (\partial_x \mathrm{I}, \partial_y \mathrm{I}) \cdot (u, v) + \partial_t \mathrm{I} \\ &= 0 \quad \text{(par hypothèse)}\end{aligned}$$

On en déduit l'équation :

$$\nabla \mathrm{I} \cdot h + \partial_t \mathrm{I} = 0 \quad \text{sur } \Omega \times [0\,;\mathrm{T}] \tag{1}$$

L'inconnue de cette équation est le vecteur $h = (u, v)$, correspondant à la vitesse d'un point matériel suivi, de coordonnées initiales (x_0, y_0).
On ne peut pas résoudre cette équation sans hypothèse supplémentaire sur h. En effet, fondamentalement, l'information sur h nous provient de la connaissance de l'intensité I, or cette grandeur est « de *dimension 1* » alors que h a *deux* composantes indépendantes.

2 Méthode de Horn et Schunk

On adopte une approche variationnelle du problème, et on se propose de déterminer le flot $h = (u, v)$ qui minimise l'énergie suivante sur $\Omega = [0\,;1]^2$:

$$\mathrm{J}(u, v) = \int_\Omega (\mathrm{I}_x u + \mathrm{I}_y v + \mathrm{I}_t)^2 + \alpha^2 \left(|\nabla u|^2 + |\nabla v|^2 \right)$$

où α est une constante réelle, et I_μ est la dérivée de I par rapport à $\mu \in \{x, y, t\}$.

Q2 Le minimum existe...