# Un calcul de flot optique

Bruneau Basile    Masset Camille

14 janvier 2015

## 1 Position du problème

$\boxed{\textbf{Q1}}$ L'intensité d'un point matériel est supposée constante le long de son déplacement. On en déduit :

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}\tilde{\mathrm{I}}}{\mathrm{d}t} &= \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\partial_x \mathrm{I} + \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\partial_y \mathrm{I} + \partial_t \mathrm{I} \\ &= (\partial_x \mathrm{I}, \partial_y \mathrm{I}) \cdot (u, v) + \partial_t \mathrm{I} \\ &= 0 \quad \text{(par hypothèse)}\end{aligned}$$

On en déduit l'équation :

$$\nabla \mathrm{I} \cdot h + \partial_t \mathrm{I} = 0 \quad \text{sur } \Omega \times [0\,;\mathrm{T}] \tag{1}$$

L'inconnue de cette équation est le vecteur $h = (u, v)$, correspondant à la vitesse d'un point matériel suivi, de coordonnées initiales $(x_0, y_0)$.
On ne peut pas résoudre cette équation sans hypothèse supplémentaire sur $h$. En effet, fondamentalement, l'information sur $h$ nous provient de la connaissance de l'intensité I, or cette grandeur est « de *dimension 1* » alors que $h$ a *deux* composantes indépendantes.

## 2 Méthode de Horn et Schunk

On fait l'hypothèse que le flot $h$ est régulier (au moins de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\Omega = [0\,;1]^2$). On adopte une approche variationnelle du problème, et on se propose de déterminer le flot $h = (u, v)$ qui minimise l'énergie suivante sur $\Omega$ :

$$\mathrm{J}(u, v) = \int_\Omega (\mathrm{I}_x u + \mathrm{I}_y v + \mathrm{I}_t)^2 + \alpha^2 \left(|\nabla u|^2 + |\nabla v|^2\right)$$

où $\alpha$ est une constante réelle, et $\mathrm{I}_\mu$ est la dérivée de I par rapport à $\mu \in \{x, y, t\}$.
Si $\alpha = 0$, l'énergie est nulle quel que soit le flot $h$, donc la formulation variationnelle ne nous apprend rien...

$\boxed{\textbf{Q2}}$ On suppose que le minimum $(u, v)$ existe (dans un espace plus grand que $\mathscr{C}^2(\Omega)$).
On cherche un minimum dans $\mathrm{K} = \mathscr{C}^2([0\,;1]^2, \mathbf{R})$ (ou un ensemble de fonctions, ou de distributions, définies sur $[0\,;1]^2$), qui est un ensemble convexe. Montrons que la fonctionnelle J est strictement convexe sur K.
Soient $(u_1, v_1) \neq (u_2, v_2) \in \mathrm{K}$ et $\lambda \in \,]0\,;1[$.

$$\begin{aligned}\mathrm{J}((1-\lambda)(u_1, v_1) + \lambda(u_2, v_2)) = \\ \int_\Omega \Big[&((1-\lambda)\left(\mathrm{I}_x u_1 + \mathrm{I}_y v_1 + \mathrm{I}_t\right) + \lambda\left(\mathrm{I}_x u_2 + \mathrm{I}_y v_2 + \mathrm{I}_t\right))^2 \\ &+\alpha^2 \left(\left|(1-\lambda)\nabla u_1 + \lambda \nabla u_2\right|^2 + \left|(1-\lambda)\nabla v_1 + \lambda\nabla v_2\right|^2\right)\Big]\end{aligned}$$

Or, la fonction $x \mapsto x^2$ est strictement convexe sur $\mathbf{R}$, donc :

$$\begin{aligned}&((1-\lambda)\left(\mathrm{I}_x u_1 + \mathrm{I}_y v_1 + \mathrm{I}_t\right) + \lambda\left(\mathrm{I}_x u_2 + \mathrm{I}_y v_2 + \mathrm{I}_t\right))^2 \\ &\qquad < (1-\lambda)\left(\mathrm{I}_x u_1 + \mathrm{I}_y v_1 + \mathrm{I}_t\right)^2 + \lambda\left(\mathrm{I}_x u_2 + \mathrm{I}_y v_2 + \mathrm{I}_t\right)^2\end{aligned}$$

De même, la fonction $x \mapsto |x|^2$ est strictement convexe sur $\mathbf{R}^d$ (comme somme de $d$ fonctions strictement convexes), donc :

$$\left|(1-\lambda)\nabla u_1 + \lambda\nabla u_2\right|^2 < (1-\lambda)\left|\nabla u_1\right|^2 + \lambda\left|\nabla u_2\right|^2$$

et de même avec $v_1$ et $v_2$.
N.B. — Ces inégalités sont écrites en tout point $(x, y) \in \Omega$, omis pour alléger l'écriture.
Finalement, on a :

$$\forall \lambda \in \,]0\,;1[\,, \quad \mathrm{J}((1-\lambda)(u_1, v_1) + \lambda(u_2, v_2)) < (1-\lambda)\mathrm{J}(u_1, v_1) + \lambda \mathrm{J}(u_2, v_2)$$

ce qui traduit que J est strictement convexe sur K.
D'après la proposition 4.1.6 p. 106 du polycopié de cours, *le minimum est global et unique.*

$\boxed{\textbf{Q3}}$ On note $\bar{h} = (\bar{u}, \bar{v})$ le flot minimisant. Pour tout $u$ on a donc :

$$\begin{aligned}\mathrm{J}(\bar{u} + u, \bar{v}) &= \int_\Omega (\mathrm{I}_x(\bar{u} + u) + \mathrm{I}_y\bar{v} + \mathrm{I}_t)^2 + \alpha^2\left(\left|\nabla(\bar{u} + u)\right|^2 + \left|\nabla\bar{v}\right|^2\right) \\ &= \mathrm{J}(\bar{u} + u, \bar{v}) + \int_\Omega \Big[2\mathrm{I}_x u(\mathrm{I}_x\bar{u} + \mathrm{I}_y\bar{v} + \mathrm{I}_t) + 2\alpha^2 \nabla\bar{u}\cdot\nabla u\Big] + \alpha^2 \int_\Omega \left|\nabla u\right|^2\end{aligned}$$

Le terme central est la différentielle de J en $\bar{h}$ évaluée en $(u, 0)$, donc comme $\bar{h}$ minimise J, on peut affirmer que :

$$\forall u, \qquad \int_\Omega \Big[\mathrm{I}_x u(\mathrm{I}_x\bar{u} + \mathrm{I}_y\bar{v} + \mathrm{I}_t) + \alpha^2\nabla\bar{u}\cdot\nabla u\Big] = 0$$

On peut en particulier choisir $u$ dans $\mathscr{C}^\infty(\Omega)$. Par application de la formule de Green-Riemann, on obtient :

$$\forall u \in \mathscr{C}^\infty(\Omega), \qquad \int_\Omega u\Big[\mathrm{I}_x(\mathrm{I}_x\bar{u} + \mathrm{I}_y\bar{v} + \mathrm{I}_t) - \alpha^2\Delta\bar{u}\Big] = 0$$

Le lemme 3.1.7 du cours permet d'affirmer alors que :

$$\mathrm{I}_x(\mathrm{I}_x\bar{u} + \mathrm{I}_y\bar{v} + \mathrm{I}_t) - \alpha^2\Delta\bar{u} = 0 \quad \text{sur } \Omega$$

On tient le même raisonnement en évaluant la différentielle de J au point $\bar{h}$ calculée au point $(0, v)$. On obtient donc le système d'équations suivant :

$$\mathrm{I}_x^2 u + \mathrm{I}_x\mathrm{I}_y v = \alpha^2\Delta u - \mathrm{I}_x\mathrm{I}_t \tag{2}$$
$$\mathrm{I}_x\mathrm{I}_y u + \mathrm{I}_y^2 v = \alpha^2\Delta v - \mathrm{I}_y\mathrm{I}_t \tag{3}$$

$\boxed{\textbf{Q4}}$ On « prolonge » les matrices I à $\mathbf{Z}^2$ par le procédé suivant :

$$\begin{array}{cc|ccc|cc}
\ddots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \iddots \\
\dots & \mathrm{I}_{11} & \mathrm{I}_{11} & \dots & \mathrm{I}_{1\mathrm{N}} & \mathrm{I}_{1\mathrm{N}} & \dots \\
\hline
\dots & \mathrm{I}_{11} & \mathrm{I}_{11} & \dots & \mathrm{I}_{1\mathrm{N}} & \mathrm{I}_{1\mathrm{N}} & \dots \\
 & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \\
\dots & \mathrm{I}_{\mathrm{N}1} & \mathrm{I}_{\mathrm{N}1} & \dots & \mathrm{I}_{\mathrm{NN}} & \mathrm{I}_{\mathrm{NN}} & \dots \\
\hline
\dots & \mathrm{I}_{\mathrm{N}1} & \mathrm{I}_{\mathrm{N}1} & \dots & \mathrm{I}_{\mathrm{NN}} & \mathrm{I}_{\mathrm{NN}} & \dots \\
\iddots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \ddots
\end{array}$$

Le code de la fonction se trouve dans le fichier `functions.sci`, et la fonction correspondante s'appelle `derivees`.

$\boxed{\textbf{Q5}}$ Pour les pixels intérieurs, on utilise la formule proposée dans l'énoncé. Pour les pixels au bord et dans les coins, on pondère comme sur le schéma ci-dessous (le gros point symbolise le pixel $(i, j)$) :

| | | |
|---|---|---|
| 1/4 | • | 1/4 |
| 1/8 | 1/4 | 1/8 |

| | |
|---|---|
| 2/5 | • |
| 1/5 | 2/5 |

De cette manière, les pixels voisins ayant un *côté* en commun sont pondérés deux fois plus que ceux qui n'ont qu'un *coin* en commun avec le pixel $(i, j)$.

$\boxed{\textbf{Q6}}$ Afin de résoudre numériquement les équations 2 et 3, on approche le laplacien par une fonction plus simple.
En effet, la formule de Taylor-Young nous donne :

$$u(x+h, y+k) = u(x,y) + h\partial_x u + k\partial_y u + \frac{h^2}{2}\partial^2_{xx}u + hk\partial^2_{xy}u + \frac{k^2}{2}\partial^2_{yy}u + \mathrm{O}(\partial^3 u)$$

Par définition, on a :

$$\bar{u}_{i,j} = \frac{1}{6}\left(u_{i-1,j} + u_{i+1,j} + u_{i,j+1} + u_{i,j-1}\right) + \frac{1}{12}\left(u_{i-1,j-1} + u_{i-1,j+1} + u_{i+1,j-1} + u_{i+1,j+1}\right)$$

On écrit dorénavant $u$ au point $(i, j)$ :

$$\begin{aligned}
\bar{u} = {} & \frac{1}{6}\left(u - \partial_x u + \frac{1}{2}\partial^2_{xx}u + u + \partial_x u + \frac{1}{2}\partial^2_{xx}u + u + \partial_y u + \frac{1}{2}\partial^2_{yy}u + u - \partial_y u + \frac{1}{2}\partial^2_{yy}u\right) \\
& + \frac{1}{12}\left(u - \partial_x u - \partial_y u + \frac{1}{2}\partial^2_{xx}u + \partial^2_{xy}u + \frac{1}{2}\partial^2_{yy}u + u - \partial_x u + \partial_y u + \frac{1}{2}\partial^2_{xx}u - \partial^2_{xy}u + \frac{1}{2}\partial^2_{yy}u\right. \\
& \left. + u + \partial_x u - \partial_y u + \frac{1}{2}\partial^2_{xx}u - \partial^2_{xy}u + \frac{1}{2}\partial^2_{yy}u + u + \partial_x u + \partial_y u + \frac{1}{2}\partial^2_{xx}u + \partial^2_{xy}u + \frac{1}{2}\partial^2_{yy}u\right)
\end{aligned}$$

d'où, après simplification :

$$\bar{u} = u + \frac{1}{3}\Delta u \iff \Delta u = 3(\bar{u} - u)$$

On peut alors réécrire les équations 2 à 3 page précédente :

$$\begin{cases} \mathrm{I}_x^2 u + \mathrm{I}_x \mathrm{I}_y v = \alpha^2(\bar{u} - u) - \mathrm{I}_x \mathrm{I}_t \\ \mathrm{I}_x \mathrm{I}_y u + \mathrm{I}_y^2 v = \alpha^2(\bar{v} - v) - \mathrm{I}_y \mathrm{I}_t \end{cases} \iff \begin{cases} (\mathrm{I}_x 2 + \alpha^2) u + \mathrm{I}_x \mathrm{I}_y v = \alpha^2 \bar{u} - \mathrm{I}_x \mathrm{I}_t \\ \mathrm{I}_x \mathrm{I}_y u + (\mathrm{I}_y^2 + \alpha^2) v = \alpha^2 \bar{v} - \mathrm{I}_y \mathrm{I}_t \end{cases}$$

# 3 Lissage d'une image

**Q11** On implémente le lissage par convolution sous Scilab dans le fichier `functions.sci` :

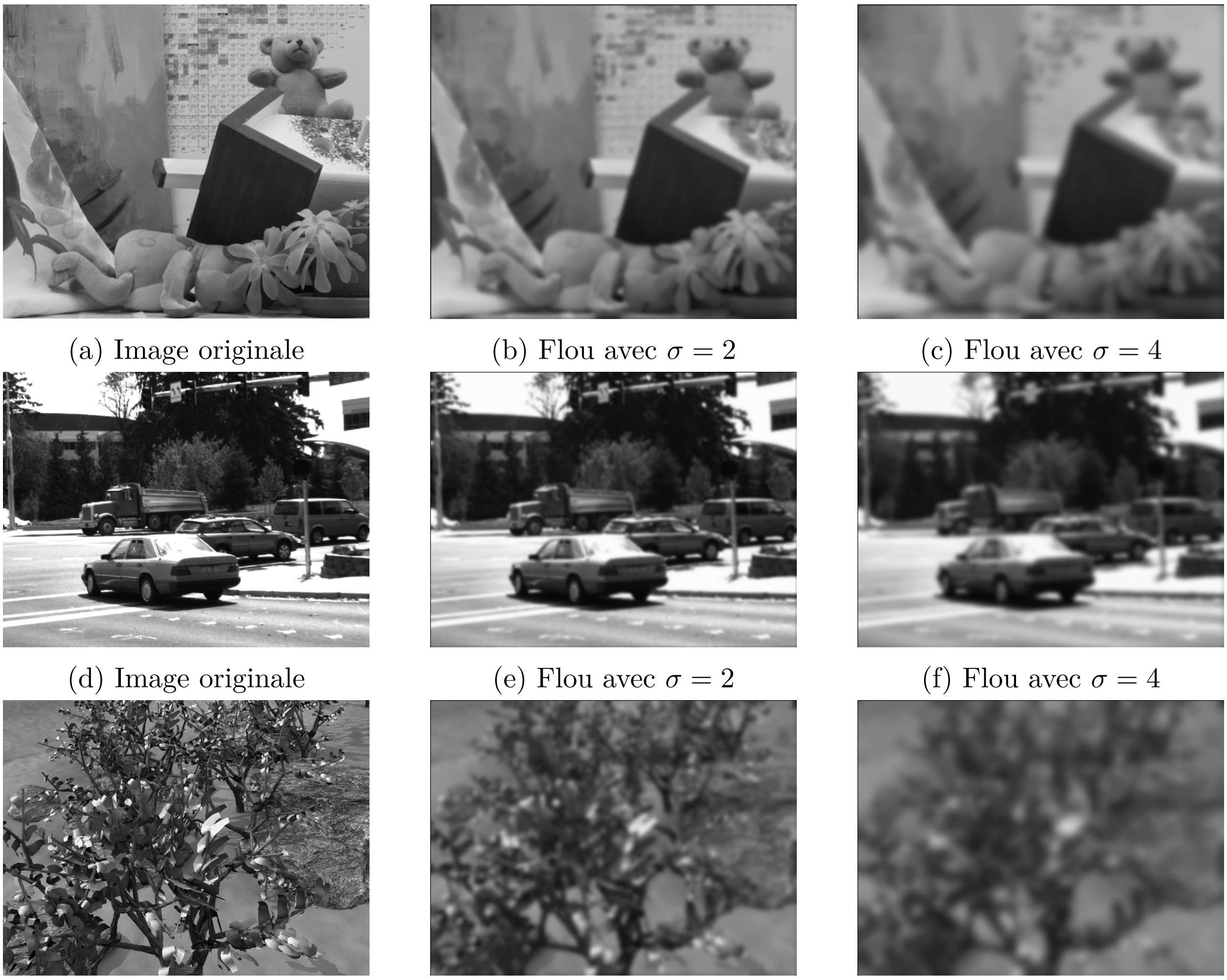
- la fonction `convolKernel(sigma, eta)` renvoie une matrice carrée G dont les coefficients sont de la forme

$$\frac{1}{2\pi\sigma^2} \exp\left(-\frac{k^2 + l^2}{2\sigma^2}\right)$$

  et vérifient tous $\mathrm{G}_{i,j} \geq \eta$ ou sont nuls (où $\sigma =$ `sigma` et $\eta =$ `eta`) ;
- la fonction `reflectMat(I, n)` renvoie une matrice au centre de laquelle on retrouve I. Les lignes et colonnes restantes sont remplies à partir de celles de I, par « symétrie d'axe les bords de I » ;
- la fonction `blur(I, sigma, eta)` calcule la convolée de I par la gaussienne de paramètre $\sigma =$ `sigma` tronquée à la précision $\eta =$ `eta`.

On peut voir quelques exemples sur des images ci-dessous :

**Q13** Il faut mettre les deux couples d'images. Trop tard ce soir... :p



(a) Image originale (b) Flou avec $\sigma = 2$ (c) Flou avec $\sigma = 4$

(d) Image originale (e) Flou avec $\sigma = 2$ (f) Flou avec $\sigma = 4$

(g) Image originale (h) Flou avec $\sigma = 4$ (i) Flou avec $\sigma = 8$

FIGURE 1 – Quelques illustrations du lissage gaussien.