

# Un calcul de flot optique

BRUNEAU Basile

MASSET Camille

14 janvier 2015

## 1 Position du problème

**Q1** L'intensité d'un point matériel est supposée constante le long de son déplacement. On en déduit :

$$\begin{aligned}\frac{d\tilde{I}}{dt} &= \frac{dx}{dt}\partial_x I + \frac{dy}{dt}\partial_y I + \partial_t I \\ &= (\partial_x I, \partial_y I) \cdot (u, v) + \partial_t I \\ &= 0 \quad (\text{par hypothèse})\end{aligned}$$

On en déduit l'équation :

$$\nabla I \cdot h + \partial_t I = 0 \quad \text{sur } \Omega \times [0; T] \quad (1)$$

L'inconnue de cette équation est le vecteur  $h = (u, v)$ , correspondant à la vitesse d'un point matériel suivi, de coordonnées initiales  $(x_0, y_0)$ .

On ne peut pas résoudre cette équation sans hypothèse supplémentaire sur  $h$ . En effet, fondamentalement, l'information sur  $h$  nous provient de la connaissance de l'intensité  $I$ , or cette grandeur est « de *dimension 1* » alors que  $h$  a *deux* composantes indépendantes.

## 2 Méthode de Horn et Schunk

On fait l'hypothèse que le flot  $h$  est régulier (au moins de classe  $\mathcal{C}^2$  sur  $\Omega = [0; 1]^2$ ). On adopte une approche variationnelle du problème, et on se propose de déterminer le flot  $h = (u, v)$  qui minimise l'énergie suivante sur  $\Omega$  :

$$J(u, v) = \int_{\Omega} (I_x u + I_y v + I_t)^2 + \alpha^2 (|\nabla u|^2 + |\nabla v|^2)$$

où  $\alpha$  est une constante réelle, et  $I_{\mu}$  est la dérivée de  $I$  par rapport à  $\mu \in \{x, y, t\}$ .

Si  $\alpha = 0$ , l'énergie est nulle quel que soit le flot  $h$ , donc la formulation variationnelle ne nous apprend rien...

**Q2** On suppose que le minimum  $(u, v)$  existe (dans un espace plus grand que  $\mathcal{C}^2(\Omega)$ ).

On cherche un minimum dans  $K = \mathcal{C}^2([0; 1]^2, \mathbf{R})$  (ou un ensemble de fonctions, ou de distributions, définies sur  $[0; 1]^2$ ), qui est un ensemble convexe. Montrons que la fonctionnelle  $J$  est strictement convexe sur  $K$ .

Soient  $(u_1, v_1) \neq (u_2, v_2) \in K$  et  $\lambda \in ]0; 1[$ .

$$\begin{aligned} J((1 - \lambda)(u_1, v_1) + \lambda(u_2, v_2)) = \\ \int_{\Omega} \left[ ((1 - \lambda)(I_x u_1 + I_y v_1 + I_t) + \lambda(I_x u_2 + I_y v_2 + I_t))^2 \right. \\ \left. + \alpha^2 (|(1 - \lambda)\nabla u_1 + \lambda\nabla u_2|^2 + |(1 - \lambda)\nabla v_1 + \lambda\nabla v_2|^2) \right] \end{aligned}$$

Or, la fonction  $x \mapsto x^2$  est strictement convexe sur  $\mathbf{R}$ , donc :

$$\begin{aligned} ((1 - \lambda)(I_x u_1 + I_y v_1 + I_t) + \lambda(I_x u_2 + I_y v_2 + I_t))^2 \\ < (1 - \lambda)(I_x u_1 + I_y v_1 + I_t)^2 + \lambda(I_x u_2 + I_y v_2 + I_t)^2 \end{aligned}$$

De même, la fonction  $x \mapsto |x|^2$  est strictement convexe sur  $\mathbf{R}^d$  (comme somme de  $d$  fonctions strictement convexes), donc :

$$|(1 - \lambda)\nabla u_1 + \lambda\nabla u_2|^2 < (1 - \lambda)|\nabla u_1|^2 + \lambda|\nabla u_2|^2$$

et de même avec  $v_1$  et  $v_2$ .

N.B. — Ces inégalités sont écrites en tout point  $(x, y) \in \Omega$ , omis pour alléger l'écriture. Finalement, on a :

$$\forall \lambda \in ]0; 1[, \quad J((1 - \lambda)(u_1, v_1) + \lambda(u_2, v_2)) < (1 - \lambda)J(u_1, v_1) + \lambda J(u_2, v_2)$$

ce qui traduit que  $J$  est strictement convexe sur  $K$ .

D'après la proposition 4.1.6 p. 106 du polycopié de cours, *le minimum est global et unique*.

**Q3** On note  $\bar{h} = (\bar{u}, \bar{v})$  le flot minimisant. Pour tout  $u$  on a donc :

$$\begin{aligned} J(\bar{u} + u, \bar{v}) &= \int_{\Omega} (I_x(\bar{u} + u) + I_y \bar{v} + I_t)^2 + \alpha^2 (|\nabla(\bar{u} + u)|^2 + |\nabla \bar{v}|^2) \\ &= J(\bar{u} + u, \bar{v}) + \int_{\Omega} [2I_x u (I_x \bar{u} + I_y \bar{v} + I_t) + 2\alpha^2 \nabla \bar{u} \cdot \nabla u] + \alpha^2 \int_{\Omega} |\nabla u|^2 \end{aligned}$$

Le terme central est la différentielle de  $J$  en  $\bar{h}$  évaluée en  $(u, 0)$ , donc comme  $\bar{h}$  minimise  $J$ , on peut affirmer que :

$$\forall u, \quad \int_{\Omega} [I_x u (I_x \bar{u} + I_y \bar{v} + I_t) + \alpha^2 \nabla \bar{u} \cdot \nabla u] = 0$$

On peut en particulier choisir  $u$  dans  $\mathcal{C}^\infty(\Omega)$ . Par application de la formule de GREEN-RIEMANN, on obtient :

$$\forall u \in \mathcal{C}^\infty(\Omega), \quad \int_{\Omega} u [I_x (I_x \bar{u} + I_y \bar{v} + I_t) - \alpha^2 \Delta \bar{u}] = 0$$

Le lemme 3.1.7 du cours permet d'affirmer alors que :

$$I_x(I_x \bar{u} + I_y \bar{v} + I_t) - \alpha^2 \Delta \bar{u} = 0 \quad \text{sur } \Omega$$

On tient le même raisonnement en évaluant la différentielle de J au point  $\bar{h}$  calculée au point  $(0, v)$ . On obtient donc le système d'équations suivant :

$$I_x^2 u + I_x I_y v = \alpha^2 \Delta u - I_x I_t \quad (2)$$

$$I_x I_y u + I_y^2 v = \alpha^2 \Delta v - I_y I_t \quad (3)$$

**Q4** On « prolonge » les matrices I à  $\mathbf{Z}^2$  par le procédé suivant :

$$\begin{array}{cc|cc|cc} \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \ddots \\ \dots & I_{11} & I_{11} & \dots & I_{1N} & I_{1N} & \dots & \\ \dots & I_{11} & I_{11} & \dots & I_{1N} & I_{1N} & \dots & \\ & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & \\ \dots & I_{N1} & I_{N1} & \dots & I_{NN} & I_{NN} & \dots & \\ \dots & I_{N1} & I_{N1} & \dots & I_{NN} & I_{NN} & \dots & \\ \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \ddots \end{array}$$

Le code de la fonction se trouve dans le fichier **functions.sci**, et la fonction correspondante s'appelle **derivees**.

**Q5** Pour calculer la moyennée de la matrice U, on la prolonge d'abord sur ses quatre « côtés » comme ceci :

U <sub>11</sub>	U <sub>11</sub>	...	U <sub>1N</sub>	U <sub>1N</sub>
U <sub>11</sub>	U <sub>11</sub>	...	U <sub>1N</sub>	U <sub>1N</sub>
⋮	⋮	⋱	⋮	⋮
U <sub>N1</sub>	U <sub>N1</sub>	...	U <sub>NN</sub>	U <sub>NN</sub>
U <sub>N1</sub>	U <sub>N1</sub>	...	U <sub>NN</sub>	U <sub>NN</sub>

On applique alors la formule proposée dans l'énoncé à cette nouvelle matrice notée  $\tilde{U}$ . Enfin, on extrait la sous-matrice (« notation Scilab ») :

$$\bar{U} = \tilde{U}_{2:N+1, 2:N+1}$$

L'implémentation est faite dans la fonction **moyenneMat** du fichier **functions.sci**.

**Q6** Afin de résoudre numériquement les équations 2 et 3, on approche le laplacien par une fonction plus simple.

En effet, la formule de TAYLOR-YOUNG nous donne :

$$u(x+h, y+k) = u(x, y) + h\partial_x u + k\partial_y u + \frac{h^2}{2}\partial_{xx}^2 u + hk\partial_{xy}^2 u + \frac{k^2}{2}\partial_{yy}^2 u + O(\partial^3 u)$$

Par définition, on a :

$$\bar{u}_{i,j} = \frac{1}{6} (u_{i-1,j} + u_{i+1,j} + u_{i,j+1} + u_{i,j-1}) + \frac{1}{12} (u_{i-1,j-1} + u_{i-1,j+1} + u_{i+1,j-1} + u_{i+1,j+1})$$

On écrit dorénavant  $u$  au point  $(i, j)$  :

$$\begin{aligned}\bar{u} = \frac{1}{6} & \left( u - \partial_x u + \frac{1}{2} \partial_{xx}^2 u + u + \partial_x u + \frac{1}{2} \partial_{xx}^2 u + u + \partial_y u + \frac{1}{2} \partial_{yy}^2 u + u - \partial_y u + \frac{1}{2} \partial_{yy}^2 u \right) \\ & + \frac{1}{12} \left( u - \partial_x u - \partial_y u + \frac{1}{2} \partial_{xx}^2 u + \partial_{xy}^2 u + \frac{1}{2} \partial_{yy}^2 u + \dots \right. \\ & \left. + \dots + u + \partial_x u + \partial_y u + \frac{1}{2} \partial_{xx}^2 u + \partial_{xy}^2 u + \frac{1}{2} \partial_{yy}^2 u \right)\end{aligned}$$

d'où, après simplification :

$$\bar{u} = u + \frac{1}{3} \Delta u \iff \Delta u = 3(\bar{u} - u)$$

On peut alors réécrire les équations 2 à 3 page précédente :

$$\begin{cases} I_x^2 u + I_x I_y v = \alpha^2 (\bar{u} - u) - I_x I_t \\ I_x I_y u + I_y^2 v = \alpha^2 (\bar{v} - v) - I_y I_t \end{cases} \iff \begin{cases} (I_x^2 + \alpha^2) u + I_x I_y v = \alpha^2 \bar{u} - I_x I_t \\ I_x I_y u + (I_y^2 + \alpha^2) v = \alpha^2 \bar{v} - I_y I_t \end{cases}$$

**Q7** On implémente l'algorithme dans le fichier `functions.sci`, avec la fonction `flow` qui prend en entrée les matrices des images et affiche le flot calculé dans un graphique. On l'a testée avec les images ci-dessous.



On voit que les zones présentant de fortes discontinuités de luminosité sont bien traitées : le flot est bien défini en direction, et il est distribué de façon homogène. En revanche, dans les zones uniformes, le flot est erratique et ne permet de conclure quant au mouvement des points matériels représentés (cf. figure 1 page suivante).

### 3 Lissage d'une image

**Q11** On implémente le lissage par convolution sous Scilab dans le fichier `functions.sci` :

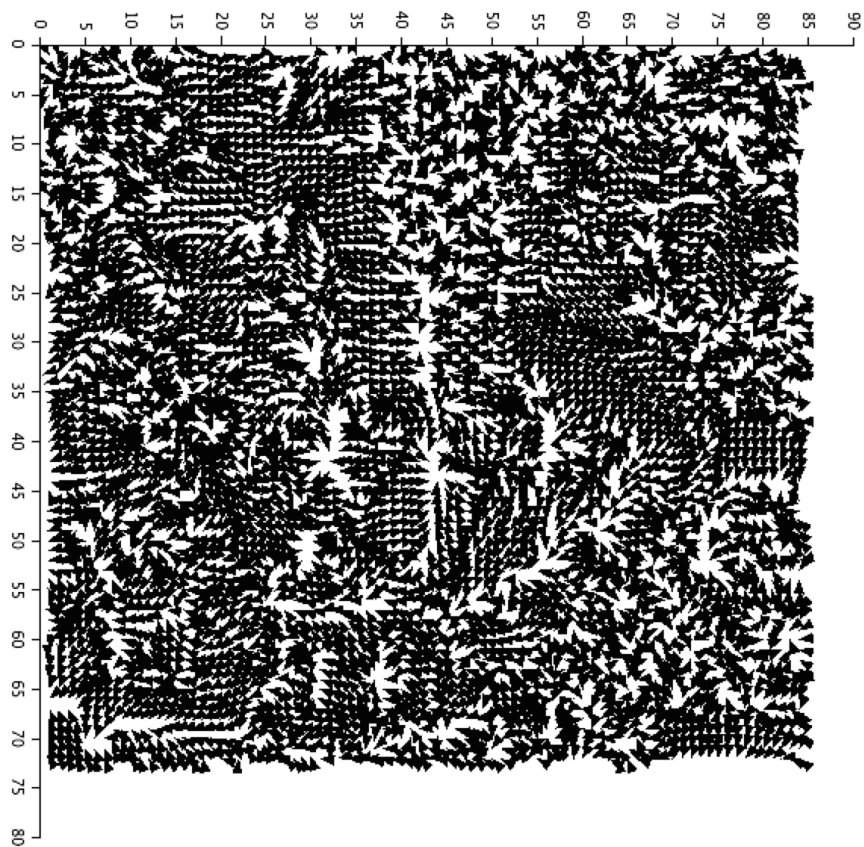


FIGURE 1 – Résultat de la question 7.

- ✦ la fonction `convolKernel(sigma, eta)` renvoie une matrice carrée  $G$  dont les coefficients sont de la forme

$$\frac{1}{2\pi\sigma^2} \exp\left(-\frac{k^2 + l^2}{2\sigma^2}\right)$$

et vérifient tous  $G_{i,j} \geq \eta$  ou sont nuls (où  $\sigma = \text{sigma}$  et  $\eta = \text{eta}$ );

- ✦ la fonction `reflectMat(I, n)` renvoie une matrice au centre de laquelle on retrouve  $I$ . Les lignes et colonnes restantes sont remplies à partir de celles de  $I$ , par « symétrie d'axe les bords de  $I$  »;
- ✦ la fonction `blur(I, sigma, eta)` calcule la convolée de  $I$  par la gaussienne de paramètre  $\sigma = \text{sigma}$  tronquée à la précision  $\eta = \text{eta}$ .

On peut voir quelques exemples sur des images ci-dessous :



(a) Image originale



(b) Flou avec  $\sigma = 2$



(c) Flou avec  $\sigma = 4$



(d) Image originale



(e) Flou avec  $\sigma = 2$



(f) Flou avec  $\sigma = 4$



(g) Image originale



(h) Flou avec  $\sigma = 4$



(i) Flou avec  $\sigma = 8$

FIGURE 2 – Quelques illustrations du lissage gaussien.

**Q13** Il faut mettre les deux couples d'images. Trop tard ce soir... :p