

# Un calcul de flot optique

BRUNEAU Basile

MASSET Camille

14 janvier 2015

## 1 Position du problème

**Q1** L'intensité d'un point matériel est supposée constante le long de son déplacement. On en déduit :

$$\begin{aligned}\frac{d\tilde{I}}{dt} &= \frac{dx}{dt}\partial_x I + \frac{dy}{dt}\partial_y I + \partial_t I \\ &= (\partial_x I, \partial_y I) \cdot (u, v) + \partial_t I \\ &= 0 \quad (\text{par hypothèse})\end{aligned}$$

On en déduit l'équation :

$$\nabla I \cdot h + \partial_t I = 0 \quad \text{sur } \Omega \times [0; T] \quad (1)$$

L'inconnue de cette équation est le vecteur  $h = (u, v)$ , correspondant à la vitesse d'un point matériel suivi, de coordonnées initiales  $(x_0, y_0)$ .

On ne peut pas résoudre cette équation sans hypothèse supplémentaire sur  $h$ . En effet, fondamentalement, l'information sur  $h$  nous provient de la connaissance de l'intensité  $I$ , or cette grandeur est « de *dimension 1* » alors que  $h$  a *deux* composantes indépendantes.

## 2 Méthode de Horn et Schunk

On fait l'hypothèse que le flot  $h$  est régulier (au moins de classe  $\mathcal{C}^2$  sur  $\Omega = [0; 1]^2$ ). On adopte une approche variationnelle du problème, et on se propose de déterminer le flot  $h = (u, v)$  qui minimise l'énergie suivante sur  $\Omega$  :

$$J(u, v) = \int_{\Omega} (I_x u + I_y v + I_t)^2 + \alpha^2 (|\nabla u|^2 + |\nabla v|^2)$$

où  $\alpha$  est une constante réelle, et  $I_{\mu}$  est la dérivée de  $I$  par rapport à  $\mu \in \{x, y, t\}$ .

Si  $\alpha = 0$ , l'énergie est nulle quel que soit le flot  $h$ , donc la formulation variationnelle ne nous apprend rien...

**Q2** On suppose que le minimum  $(u, v)$  existe (dans un espace plus grand que  $\mathcal{C}^2(\Omega)$ ).

On cherche un minimum dans  $K = \mathcal{C}^2([0; 1]^2, \mathbf{R})$  (ou un ensemble de fonctions, ou de distributions, définies sur  $[0; 1]^2$ ), qui est un ensemble convexe. Montrons que la fonctionnelle  $J$  est strictement convexe sur  $K$ .

Soient  $(u_1, v_1) \neq (u_2, v_2) \in K$  et  $\lambda \in ]0; 1[$ .

$$\begin{aligned} J((1 - \lambda)(u_1, v_1) + \lambda(u_2, v_2)) = \\ \int_{\Omega} \left[ ((1 - \lambda)(I_x u_1 + I_y v_1 + I_t) + \lambda(I_x u_2 + I_y v_2 + I_t))^2 \right. \\ \left. + \alpha^2 (|(1 - \lambda)\nabla u_1 + \lambda\nabla u_2|^2 + |(1 - \lambda)\nabla v_1 + \lambda\nabla v_2|^2) \right] \end{aligned}$$

Or, la fonction  $x \mapsto x^2$  est strictement convexe sur  $\mathbf{R}$ , donc :

$$\begin{aligned} ((1 - \lambda)(I_x u_1 + I_y v_1 + I_t) + \lambda(I_x u_2 + I_y v_2 + I_t))^2 \\ < (1 - \lambda)(I_x u_1 + I_y v_1 + I_t)^2 + \lambda(I_x u_2 + I_y v_2 + I_t)^2 \end{aligned}$$

De même, la fonction  $x \mapsto |x|^2$  est strictement convexe sur  $\mathbf{R}^d$  (comme somme de  $d$  fonctions strictement convexes), donc :

$$|(1 - \lambda)\nabla u_1 + \lambda\nabla u_2|^2 < (1 - \lambda)|\nabla u_1|^2 + \lambda|\nabla u_2|^2$$

et de même avec  $v_1$  et  $v_2$ .

N.B. — Ces inégalités sont écrites en tout point  $(x, y) \in \Omega$ , omis pour alléger l'écriture. Finalement, on a :

$$\forall \lambda \in ]0; 1[, \quad J((1 - \lambda)(u_1, v_1) + \lambda(u_2, v_2)) < (1 - \lambda)J(u_1, v_1) + \lambda J(u_2, v_2)$$

ce qui traduit que  $J$  est strictement convexe sur  $K$ .

D'après la proposition 4.1.6 p. 106 du polycopié de cours, *le minimum est global et unique*.

**Q3** On note  $\bar{h} = (\bar{u}, \bar{v})$  le flot minimisant. Pour tout  $u$  on a donc :

$$\begin{aligned} J(\bar{u} + u, \bar{v}) &= \int_{\Omega} (I_x(\bar{u} + u) + I_y \bar{v} + I_t)^2 + \alpha^2 (|\nabla(\bar{u} + u)|^2 + |\nabla \bar{v}|^2) \\ &= J(\bar{u} + u, \bar{v}) + \int_{\Omega} [2I_x u (I_x \bar{u} + I_y \bar{v} + I_t) + 2\alpha^2 \nabla \bar{u} \cdot \nabla u] + \alpha^2 \int_{\Omega} |\nabla u|^2 \end{aligned}$$

Le terme central est la différentielle de  $J$  en  $\bar{h}$  évaluée en  $(u, 0)$ , donc comme  $\bar{h}$  minimise  $J$ , on peut affirmer que :

$$\forall u, \quad \int_{\Omega} [I_x u (I_x \bar{u} + I_y \bar{v} + I_t) + \alpha^2 \nabla \bar{u} \cdot \nabla u] = 0$$

On peut en particulier choisir  $u$  dans  $\mathcal{C}^\infty(\Omega)$ . Par application de la formule de GREEN-RIEMANN, on obtient :

$$\forall u \in \mathcal{C}^\infty(\Omega), \quad \int_{\Omega} u [I_x (I_x \bar{u} + I_y \bar{v} + I_t) - \alpha^2 \Delta \bar{u}] = 0$$

Le lemme 3.1.7 du cours permet d'affirmer alors que :

$$I_x(I_x \bar{u} + I_y \bar{v} + I_t) - \alpha^2 \Delta \bar{u} = 0 \quad \text{sur } \Omega$$

On tient le même raisonnement en évaluant la différentielle de J au point  $\bar{h}$  calculée au point  $(0, v)$ . On obtient donc le système d'équations suivant :

$$I_x^2 u + I_x I_y v = \alpha^2 \Delta u - I_x I_t \quad (2)$$

$$I_x I_y u + I_y^2 v = \alpha^2 \Delta v - I_y I_t \quad (3)$$

**Q4** On « prolonge » les matrices I à  $\mathbf{Z}^2$  par le procédé suivant :

$$\begin{array}{ccc|ccc|ccc} \ddots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots & & \ddots \\ \dots & I_{11} & & I_{11} & \dots & I_{1N} & I_{1N} & \dots & \\ \dots & I_{11} & & I_{11} & \dots & I_{1N} & I_{1N} & \dots & \\ & \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & \\ \dots & I_{N1} & & I_{N1} & \dots & I_{NN} & I_{NN} & \dots & \\ \dots & I_{N1} & & I_{N1} & \dots & I_{NN} & I_{NN} & \dots & \\ \ddots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots & & \ddots \end{array}$$

Le code de la fonction se trouve dans le fichier `functions.sci`, et la fonction correspondante s'appelle `derivees`.

**Q5** Pour les pixels intérieurs, on utilise la formule proposée dans l'énoncé. Pour les pixels au bord et dans les coins, on pondère comme sur le schéma ci-dessous (le gros point symbolise le pixel  $(i, j)$ ) :

1/4	•	1/4
1/8	1/4	1/8

2/5	•
1/5	2/5

De cette manière, les pixels voisins ayant un *côté* en commun sont pondérés deux fois plus que ceux qui n'ont qu'un *coin* en commun avec le pixel  $(i, j)$ .

**Q6** CALCUL DU LAPLACIEN À JUSTIFIER!!!!.....

### 3 Lissage d'une image

**Q11** On implémente le lissage par convolution sous Scilab dans le fichier `functions.sci` :

★ la fonction `convolKernel(sigma, eta)` renvoie une matrice carrée G dont les coefficients sont de la forme

$$\frac{1}{2\pi\sigma^2} \exp\left(-\frac{k^2 + l^2}{2\sigma^2}\right)$$

et vérifient tous  $G_{i,j} \geq \eta$  ou sont nuls (où  $\sigma = \text{sigma}$  et  $\eta = \text{eta}$ ) ;

- ✦ la fonction `reflectMat(I, n)` renvoie une matrice au centre de laquelle on retrouve `I`. Les lignes et colonnes restantes sont remplies à partir de celles de `I`, par « symétrie d'axe les bords de `I` » ;
- ✦ la fonction `blur(I, sigma, eta)` calcule la convolée de `I` par la gaussienne de paramètre  $\sigma = \text{sigma}$  tronquée à la précision  $\eta = \text{eta}$ .

On peut voir quelques exemples sur des images ci-dessous :



(a) Image originale



(b) Flou avec  $\sigma = 2$



(c) Flou avec  $\sigma = 4$



(d) Image originale



(e) Flou avec  $\sigma = 2$



(f) Flou avec  $\sigma = 4$



(g) Image originale



(h) Flou avec  $\sigma = 4$



(i) Flou avec  $\sigma = 8$

FIGURE 1 – Quelques illustrations du lissage gaussien.

**Q13** Il faut mettre les deux couples d'images. Trop tard ce soir... :p