Un calcul de flot optique

Bruneau Basile Masset Camille

14 janvier 2015

Le code Scilab se trouve dans deux fichiers : `functions.sci` et `projet.sce` :

- `functions.sci` regroupe l'ensemble des fonctions qu'il fallait implémenter dans chaque question du problème. Une fois ce fichier chargé dans Scilab, il est donc possible de tester ces fonctions indépendamment ;
- `projet.sce` fait appel au fichier précédent et utilise les fonctions pour répondre aux questions 7 et 14. Lorsqu'il est exécuté, le résultat de la question 7 est affiché pendant 4 s, suivi de celui de la question 14.

1 Position du problème

Q1 L'intensité d'un point matériel est supposée constante le long de son déplacement. On en déduit :

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}\tilde{\mathrm{I}}}{\mathrm{d}t} &= \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\partial_x \mathrm{I} + \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\partial_y \mathrm{I} + \partial_t \mathrm{I} \\ &= (\partial_x \mathrm{I}, \partial_y \mathrm{I}) \cdot (u, v) + \partial_t \mathrm{I} \\ &= 0 \quad \text{(par hypothèse)}\end{aligned}$$

On en déduit l'équation :

$$\nabla \mathrm{I} \cdot h + \partial_t \mathrm{I} = 0 \quad \text{sur } \Omega \times [0\,;\mathrm{T}] \tag{1}$$

L'inconnue de cette équation est le vecteur $h = (u, v)$, correspondant à la vitesse d'un point matériel suivi, de coordonnées initiales (x_0, y_0).

On ne peut pas résoudre cette équation sans hypothèse supplémentaire sur h. En effet, fondamentalement, l'information sur h nous provient de la connaissance de l'intensité I, or cette grandeur est « de *dimension 1* » alors que h a *deux* composantes indépendantes.

2 Méthode de Horn et Schunk

On fait l'hypothèse que le flot h est régulier (au moins de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\Omega = [0\,;1]^2$). On adopte une approche variationnelle du problème, et on se propose de déterminer le flot $h = (u, v)$ qui minimise l'énergie suivante sur Ω :

$$\mathrm{J}(u,v) = \int_\Omega (\mathrm{I}_x u + \mathrm{I}_y v + \mathrm{I}_t)^2 + \alpha^2 \left(|\nabla u|^2 + |\nabla v|^2 \right)$$

où α est une constante réelle, et I_μ est la dérivée de I par rapport à $\mu \in \{x, y, t\}$.
Si $\alpha = 0$, l'énergie est nulle quel que soit le flot h, donc la formulation variationnelle ne nous apprend rien...

Q2 On suppose que le minimum (u, v) existe (dans un espace plus grand que $\mathscr{C}^2(\Omega)$).
On cherche un minimum dans $\mathrm{K} = \mathscr{C}^2([0\,;1]^2, \mathbf{R})$ (ou un ensemble de fonctions, ou de distributions, définies sur $[0\,;1]^2$), qui est un ensemble convexe. Montrons que la fonctionnelle J est strictement convexe sur K.
Soient $(u_1, v_1) \neq (u_2, v_2) \in \mathrm{K}$ et $\lambda \in]0\,;1[$.

$$\begin{aligned}\mathrm{J}((1-\lambda)(u_1,v_1) + \lambda(u_2,v_2)) = \\ \int_\Omega \Big[\left((1-\lambda)\left(\mathrm{I}_x u_1 + \mathrm{I}_y v_1 + \mathrm{I}_t\right) + \lambda\left(\mathrm{I}_x u_2 + \mathrm{I}_y v_2 + \mathrm{I}_t\right)\right)^2 \\ + \alpha^2 \left(|(1-\lambda)\nabla u_1 + \lambda \nabla u_2|^2 + |(1-\lambda)\nabla v_1 + \lambda \nabla v_2|^2 \right) \Big]\end{aligned}$$

Or, la fonction $x \mapsto x^2$ est strictement convexe sur $\mathbf{R}$, donc :

$$\begin{aligned}\left((1-\lambda)\left(\mathrm{I}_x u_1 + \mathrm{I}_y v_1 + \mathrm{I}_t\right) + \lambda\left(\mathrm{I}_x u_2 + \mathrm{I}_y v_2 + \mathrm{I}_t\right)\right)^2 \\ < (1-\lambda)\left(\mathrm{I}_x u_1 + \mathrm{I}_y v_1 + \mathrm{I}_t\right)^2 + \lambda\left(\mathrm{I}_x u_2 + \mathrm{I}_y v_2 + \mathrm{I}_t\right)^2\end{aligned}$$

De même, la fonction $x \mapsto |x|^2$ est strictement convexe sur $\mathbf{R}^d$ (comme somme de d fonctions strictement convexes), donc :

$$|(1-\lambda)\nabla u_1 + \lambda \nabla u_2|^2 < (1-\lambda)|\nabla u_1|^2 + \lambda |\nabla u_2|^2$$

et de même avec v_1 et v_2.
N.B. — Ces inégalités sont écrites en tout point $(x, y) \in \Omega$, omis pour alléger l'écriture.
Finalement, on a :

$$\forall \lambda \in]0\,;1[\,, \quad \mathrm{J}((1-\lambda)(u_1,v_1) + \lambda(u_2,v_2)) < (1-\lambda)\mathrm{J}(u_1,v_1) + \lambda \mathrm{J}(u_2,v_2)$$

ce qui traduit que J est strictement convexe sur K.
D'après la proposition 4.1.6 p. 106 du polycopié de cours, *le minimum est global et unique.*

Q3 On note $\bar{h} = (\bar{u}, \bar{v})$ le flot minimisant. Pour tout u on a donc :

$$\begin{aligned}\mathrm{J}(\bar{u}+u, \bar{v}) &= \int_\Omega (\mathrm{I}_x(\bar{u}+u) + \mathrm{I}_y \bar{v} + \mathrm{I}_t)^2 + \alpha^2 \left(|\nabla(\bar{u}+u)|^2 + |\nabla \bar{v}|^2 \right) \\ &= \mathrm{J}(\bar{u}, \bar{v}) + \int_\Omega \left[2\mathrm{I}_x u (\mathrm{I}_x \bar{u} + \mathrm{I}_y \bar{v} + \mathrm{I}_t) + 2\alpha^2 \nabla \bar{u} \cdot \nabla u \right] + \alpha^2 \int_\Omega |\nabla u|^2\end{aligned}$$

Le terme central est la différentielle partielle de J par rapport à sa première coordonnée, en $\bar{h}$, évaluée en $(u, 0)$, donc comme $\bar{h}$ minimise J, on peut affirmer que :

$$\forall u, \qquad \int_\Omega \left[\mathrm{I}_x u(\mathrm{I}_x \bar{u} + \mathrm{I}_y \bar{v} + \mathrm{I}_t) + \alpha^2 \nabla \bar{u} \cdot \nabla u \right] = 0$$

On peut en particulier choisir u dans $\mathscr{C}^\infty(\Omega)$. Par application de la formule de Green-Riemann, on obtient :

$$\forall u \in \mathscr{C}^\infty(\Omega), \qquad \int_\Omega u \left[\mathrm{I}_x(\mathrm{I}_x \bar{u} + \mathrm{I}_y \bar{v} + \mathrm{I}_t) - \alpha^2 \Delta \bar{u} \right] = 0$$

Le lemme 3.1.7 du cours permet d'affirmer alors que :

$$\mathrm{I}_x(\mathrm{I}_x \bar{u} + \mathrm{I}_y \bar{v} + \mathrm{I}_t) - \alpha^2 \Delta \bar{u} = 0 \quad \text{sur } \Omega$$

On tient le même raisonnement en évaluant la différentielle de J au point $\bar{h}$ calculée au point $(0, v)$. On obtient donc le système d'équations suivant :

$$\begin{cases} \mathrm{I}_x^2 u + \mathrm{I}_x \mathrm{I}_y v = \alpha^2 \Delta u - \mathrm{I}_x \mathrm{I}_t \\ \mathrm{I}_x \mathrm{I}_y u + \mathrm{I}_y^2 v = \alpha^2 \Delta v - \mathrm{I}_y \mathrm{I}_t \end{cases} \tag{2}$$

Q4 On « prolonge » les matrices I à $\mathbf{Z}^2$ par le procédé suivant :

$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$	$\iddots$
$\dots$	I_{11}	I_{11}	$\dots$	I_{1N}	I_{1N}	$\dots$
$\dots$	I_{11}	I_{11}	$\dots$	I_{1N}	I_{1N}	$\dots$
	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$	
$\dots$	I_{N1}	I_{N1}	$\dots$	I_{NN}	I_{NN}	$\dots$
$\dots$	I_{N1}	I_{N1}	$\dots$	I_{NN}	I_{NN}	$\dots$
$\iddots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$

Le code de la fonction se trouve dans le fichier `functions.sci`, et la fonction correspondante s'appelle `derivees`.

Q5 Pour calculer la moyennée de la matrice U, on la prolonge d'abord sur ses quatre « côtés » comme ceci :

U_{11}	U_{11}	$\dots$	U_{1N}	U_{1N}
U_{11}	U_{11}	$\dots$	U_{1N}	U_{1N}
$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$
U_{N1}	U_{N1}	$\dots$	U_{NN}	U_{NN}
U_{N1}	U_{N1}	$\dots$	U_{NN}	U_{NN}

On applique alors la formule proposée dans l'énoncé à cette nouvelle matrice notée $\hat{\mathrm{U}}$. Enfin, on extrait la sous-matrice (« notation Scilab ») :

$$\bar{\mathrm{U}} = \hat{\mathrm{U}}_{2:N+1,2:N+1}$$

L'implémentation est faite dans la fonction `moyenneMat` du fichier `functions.sci`.

Q6 Afin de résoudre numériquement le système d'équations (2) page précédente, on approche le laplacien par une fonction plus simple.
En effet, la formule de Taylor-Young nous donne :

$$u(x+h,y+k) = u(x,y) + h\partial_x u + k\partial_y u + \frac{h^2}{2}\partial^2_{xx}u + hk\partial^2_{xy}u + \frac{k^2}{2}\partial^2_{yy}u + \mathrm{O}(h^3+k^3)$$

Par définition, on a :

$$\bar{u}_{i,j} = \frac{1}{6}\left(u_{i-1,j} + u_{i+1,j} + u_{i,j+1} + u_{i,j-1}\right) + \frac{1}{12}\left(u_{i-1,j-1} + u_{i-1,j+1} + u_{i+1,j-1} + u_{i+1,j+1}\right)$$

On écrit dorénavant u au point (i,j) :

$$\begin{aligned}\bar{u} \simeq \frac{1}{6}\Big(u - \partial_x u + \frac{1}{2}\partial^2_{xx}u + u + \partial_x u + \frac{1}{2}\partial^2_{xx}u + u + \partial_y u + \frac{1}{2}\partial^2_{yy}u + u - \partial_y u + \frac{1}{2}\partial^2_{yy}u\Big)\\ + \frac{1}{12}\Big(u - \partial_x u - \partial_y u + \frac{1}{2}\partial^2_{xx}u + \partial^2_{xy}u + \frac{1}{2}\partial^2_{yy}u + \cdots\\ + \cdots + u + \partial_x u + \partial_y u + \frac{1}{2}\partial^2_{xx}u + \partial^2_{xy}u + \frac{1}{2}\partial^2_{yy}u\Big)\end{aligned}$$

d'où, après simplification :

$$\bar{u} \simeq u + \frac{1}{3}\Delta u \iff \Delta u \simeq 3(\bar{u} - u)$$

On peut alors réécrire le système (2) page précédente :

$$\begin{cases}\mathrm{I}_x^2 u + \mathrm{I}_x\mathrm{I}_y v = \alpha^2(\bar{u} - u) - \mathrm{I}_x\mathrm{I}_t\\ \mathrm{I}_x\mathrm{I}_y u + \mathrm{I}_y^2 v = \alpha^2(\bar{v} - v) - \mathrm{I}_y\mathrm{I}_t\end{cases} \iff \begin{cases}(\mathrm{I}_x^2 + \alpha^2)u + \mathrm{I}_x\mathrm{I}_y v = \alpha^2\bar{u} - \mathrm{I}_x\mathrm{I}_t\\ \mathrm{I}_x\mathrm{I}_y u + (\mathrm{I}_y^2 + \alpha^2)v = \alpha^2\bar{v} - \mathrm{I}_y\mathrm{I}_t\end{cases}$$

Ce dernier système se réécrit matriciellement :

$$\begin{pmatrix}\mathrm{I}_x^2 + \alpha^2 & \mathrm{I}_x\mathrm{I}_y\\ \mathrm{I}_x\mathrm{I}_y & \mathrm{I}_y^2 + \alpha^2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u\\ v\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\alpha^2\bar{u} - \mathrm{I}_x\mathrm{I}_t\\ \alpha^2\bar{v} - \mathrm{I}_y\mathrm{I}_t\end{pmatrix} \iff \mathrm{A}\begin{pmatrix}u\\ v\end{pmatrix} = b$$

Le déterminant de la matrice A est égal à $\alpha^2(\alpha^2 + \mathrm{I}_x^2 + \mathrm{I}_y^2) > 0$ donc A est inversible. On a alors :

$$\begin{pmatrix}u\\ v\end{pmatrix} = \mathrm{A}^{-1}b = \begin{pmatrix}\bar{u} - \mathrm{I}_x\dfrac{\mathrm{I}_x\bar{u} + \mathrm{I}_y\bar{v} + \mathrm{I}_t}{\alpha^2 + \mathrm{I}_x^2 + \mathrm{I}_y^2}\\ \bar{v} - \mathrm{I}_y\dfrac{\mathrm{I}_x\bar{u} + \mathrm{I}_y\bar{v} + \mathrm{I}_t}{\alpha^2 + \mathrm{I}_x^2 + \mathrm{I}_y^2}\end{pmatrix}$$

On peut considérer cette égalité comme une équation linéaire de la forme $\mathrm{I}_2\mathrm{X} = \mathrm{B}$ avec I_2 la matrice identité d'ordre 2 et B un vecteur de $\mathbf{R}^2$. L'identité est à diagonale dominante, donc on peut appliquer le schéma de Jacobi :

$$\mathrm{I}_2\mathrm{X}_{n+1} = 0_2\mathrm{X}_n + \mathrm{B}_n$$

où 0_2 est la matrice nulle d'ordre 2, soit encore :

$$\begin{cases}u^{n+1} = \bar{u}^n - \mathrm{I}_x\dfrac{\mathrm{I}_x\bar{u}^n + \mathrm{I}_y\bar{v}^n + \mathrm{I}_t}{\alpha^2 + \mathrm{I}_x^2 + \mathrm{I}_y^2}\\ v^{n+1} = \bar{v}^n - \mathrm{I}_y\dfrac{\mathrm{I}_x\bar{u}^n + \mathrm{I}_y\bar{v}^n + \mathrm{I}_t}{\alpha^2 + \mathrm{I}_x^2 + \mathrm{I}_y^2}\end{cases}$$

Q7 On implémente l'algorithme dans le fichier `functions.sci`, avec la fonction `flow` qui prend en entrée les matrices des images et affiche le flot calculé dans un graphique. On l'a testé avec les images ci-dessous.

On voit que les zones présentant de fortes discontinuités de luminosité sont bien traitées : le flot est bien défini en direction, et il est distribué de façon homogène. En revanche, dans les zones uniformes, le flot est erratique et ne permet de conclure quant au mouvement des points matériels représentés (cf. figure 1).

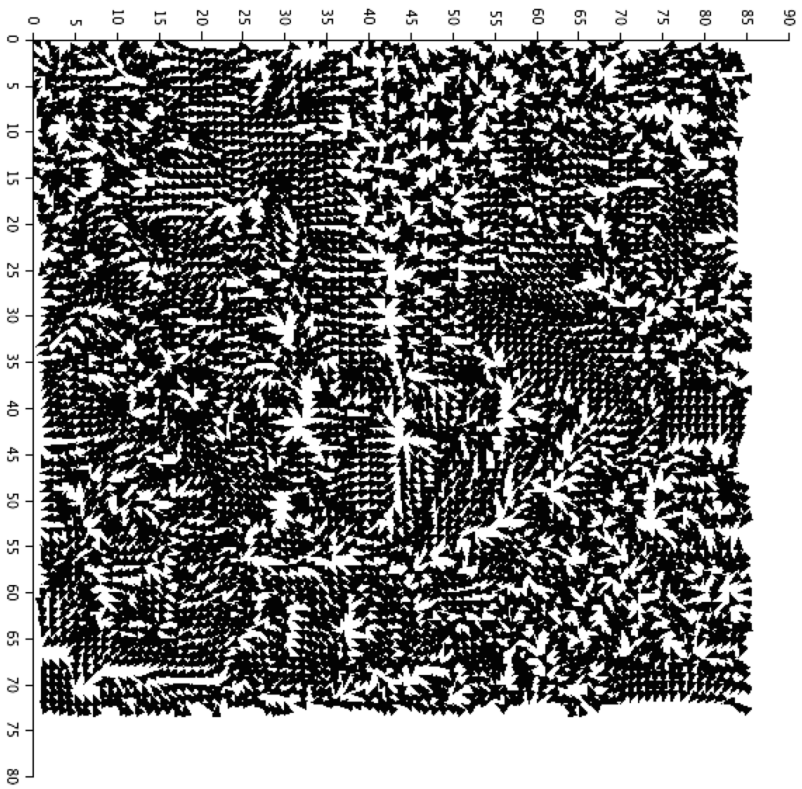


FIGURE 1 – Résultat de la question 7.

3 Lissage d'une image

Q11 On implémente le lissage par convolution sous Scilab dans le fichier `functions.sci` :

- la fonction `convolKernel(sigma, eta)` renvoie une matrice carrée G dont les coefficients sont de la forme

$$\frac{1}{2\pi\sigma^2}\exp\left(-\frac{k^2+l^2}{2\sigma^2}\right)$$

  et vérifient tous $G_{i,j} \geq \eta$ ou sont nuls (où $\sigma =$ `sigma` et $\eta =$ `eta`) ;
- la fonction `reflectMat(I, n)` renvoie une matrice au centre de laquelle on retrouve I. Les lignes et colonnes restantes sont remplies à partir de celles de I, par « symétrie d'axe les bords de I » ;
- la fonction `blur(I, sigma, eta)` calcule la convolée de I par la gaussienne de paramètre $\sigma =$ `sigma` tronquée à la précision $\eta =$ `eta`.

On peut voir quelques exemples sur des images ci-dessous :

(a) Image originale

(b) Flou avec $\sigma = 2$

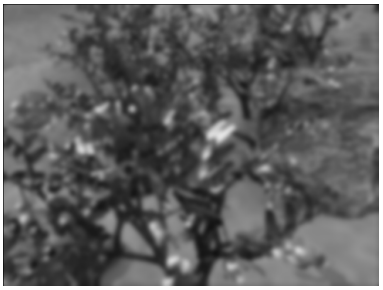
(c) Flou avec $\sigma = 4$

(d) Image originale

(e) Flou avec $\sigma = 2$

(f) Flou avec $\sigma = 4$

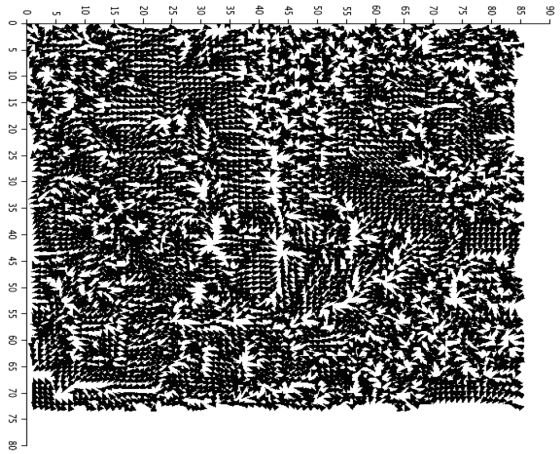
(g) Image originale

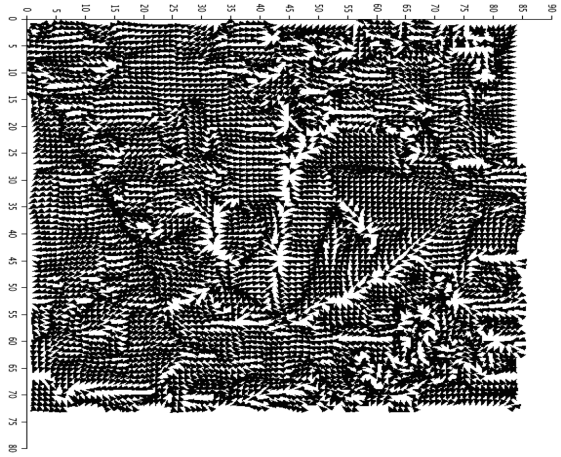


(h) Flou avec $\sigma = 4$

(i) Flou avec $\sigma = 8$

Q13 On travaille avec l'image suivante et sa version lissée. On applique l'algorithme de la question 7.



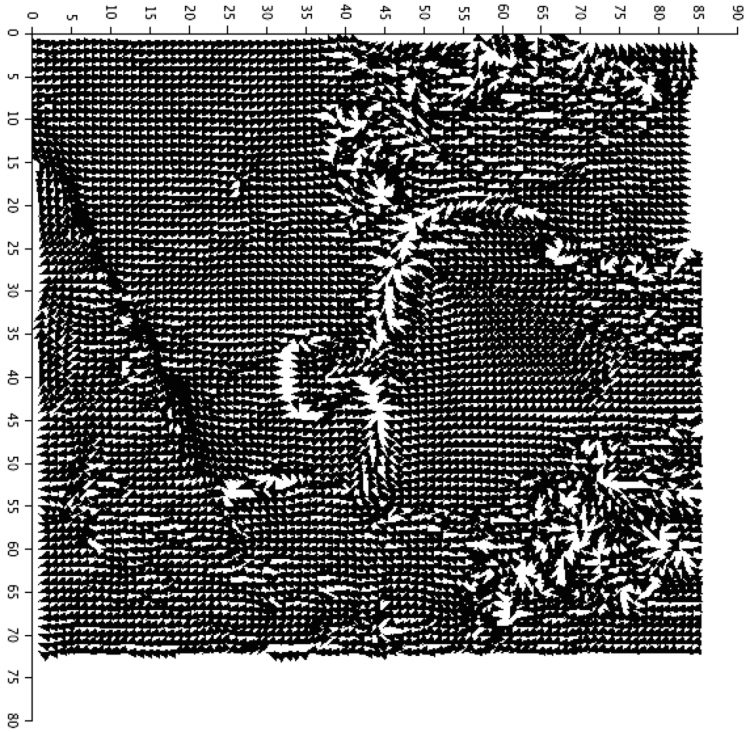


On constate que le lissage permet d'avoir un flot optique mieux déterminé dans les régions moins contrastées. En revanche, on perd de l'information sur l'image au niveau des zones des contrastées. Par exemple, le mouvement de la cheminée que l'on peut observer sur le résultat de gauche n'est plus visible sur celui de droite.

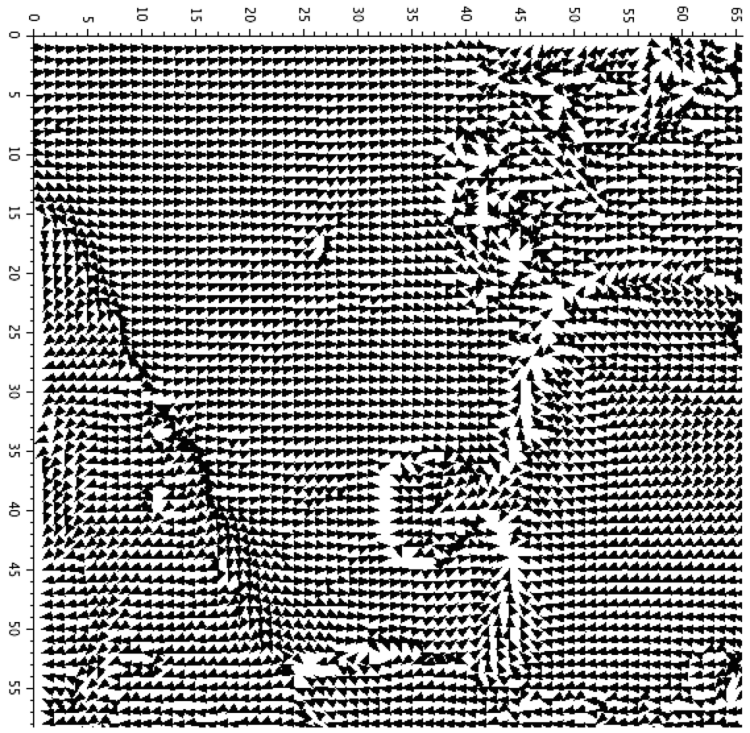
Q14 On implémente l'algorithme, dans le fichier `functions.sci`, en plusieurs fonctions qui seront appelées par une fonction globale :

- `simpleSmall(I,f)` réduit la taille d'une matrice d'un facteur `f` ;
- `simpleBig(I,f)` agrandit la taille d'une matrice d'un facteur `f` ;
- `applyNegativeFlow(I,u,v)` retranche le flot (u, v) à la matrice I ;
- `smartFlow(I1, I2)` calcule le flot optique entre les deux images de la façon décrite dans l'énoncé.

On a testé ce programme sur la même image que précédemment. Le résultat est visible sur la figure 3 page suivante. On remarque que le flot est plus régulier que dans les questions 7 ou 13, et la partie agrandie nous montre que les zones où l'intensité est quasi-constante sont bien traitées dans le sens où le flot est constant et non « chaotique » comparé aux résultats des questions précédentes.



(a) Résultat global.



(b) Zoom sur une partie de la matrice.

FIGURE 3 – Résultats de la question 14.