A 试验样本量确定问题

# 问题背景

试验每类指标的试验数据来源各种各样，传统的汽车试验鉴定中依据实物试验结果存在较大的局限性，并且汽车碰撞试验非常昂贵故数据量很少，只利用小子样的汽车碰撞试验数据难于做出全面的、有效的评估。因此充分利用指标先验分布信息、较便宜的静态试验即通过小球撞击静止车辆进行测量得到刚度数据，结合少量汽车碰撞试验样本信息，得出高置信度的评估鉴定结果，成为汽车碰撞试验鉴定的趋势。

# 问题描述

现假设要对汽车前防撞梁刚度(GPa)指标进行估计。假设该指标服从高斯分布，下面请就不同情况分

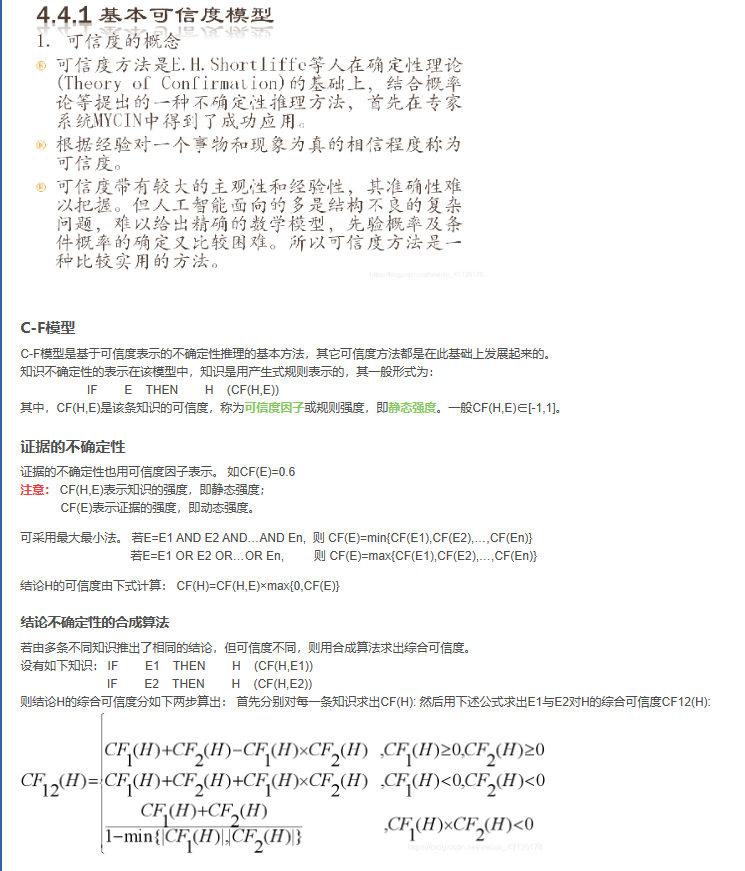
析达到需求所需的最少仿真试验样本量。基于集中力的挠度公式可得刚度与挠度的关系式如下：

 (1)

其中*c* = 160*mm−*1为与防撞梁尺寸相关的系数，*x*为测得的挠度，*F* = 20000*N* 为冲击力。

目前已知汽车碰撞试验测得的防撞梁挠度(mm)数据[15*.*92*,* 15*.*84*,* 15*.*92*,* 16*.*08*,* 16*.*16*,* 16*.*00]。通过静态试验测得的可信度为*p*1 = 0*.*8的刚度静态试验数据大致服从高斯分布*N* (2 *×* 105*,* 50002)。上述两组数据相互独立。后文中的汽车碰撞试验数据默认为根据公式(1)计算出的防撞梁刚度数据，刚度静态试验数据由已知分布*N* (2 *×* 105*,* 50002)随机生成。

可信度为p1=0.8的刚度静态试验数据： 大致服从的高斯分布：



## 问题一

假设刚度指标均值*µ* = 2 *×* 105已知、方差*σ*未知。试验精确度要求样本落在[*µ*0 *− ϵ*1*, µ*0 + *ϵ*2]区间的概率为1 *− α*，其中*ϵ*1 = 5000*, ϵ*2 = 4000*, α* = 0*.*05。使用无信息先验以及10到50个刚度静态试验数据和汽车碰撞试验数据建立合适的数学模型(数学模型的建立方法可参考文献[1])分析所需的最少试验样本量以满足上述试验精度需求，并给出最优静态试验量下的仿真样本量随汽车碰撞试验量变化曲线(最优静态试验量即使得所求的样本试验量最小的静态试验量)。

## 问题二

假设刚度指标均值*µ* = 2 *×* 105已知、方差*σ*未知。试验精确度要求试验样本落在[*µ*0 *− ϵ*1*, µ*0 +*ϵ*2]区间

的概率为1 *− α*，其中*ϵ*1 = 5000*, ϵ*2 = 4000*, α* = 0*.*05。下给出由可信度为*p*2 = 0*.*5的历史仿真试验求出的标准差数据，根据数据求出先验分布并计算找出仿真样本量随汽车碰撞试验数据量的变化规律。

表 2.1: 历史仿真试验求出的标准差数据

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 5010 | 6005 | 5050 | 6007 | 3010 | 5007 | 4032 | 3356 | 7354 | 6289 |
| 5001 | 5567 | 6322 | 5378 | 3804 | 5739 | 6382 | 4388 | 5282 | 3782 |
| 4782 | 4367 | 4892 | 6389 | 5738 | 5322 | 6271 | 7282 | 4285 | 3421 |

## 问题三

假设刚度指标均值为某个随机变量，方差*σ*未知。试验精确度要求试验样本落在[*µ*0*−a, µ*0+*b*]区间的概率为1 *− α*，其中*a* = 5000*, b* = 4000*, α* = 0*.*05。若已测得指标总体均值数据如下表，建立合适的代理模型并求出当汽车碰撞实验量为6时所需的仿真试验样本量区间。再选择出最优的指标总体均值将所需仿真样本量降到最低，画出该均值下仿真试验量随汽车碰撞试验数据量的变化曲线。

表 2.2: 指标总体均值数据(*×*105)

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 2.0233 | 2.0315 | 1.9614 | 2.0322 | 2.0069 | 1.9588 | 1.9751 | 1.9992 | 2.0362 | 2.0368 |
| 1.9642 | 2.0374 | 2.0361 | 1.9937 | 2.0220 | 1.9628 | 1.9880 | 2.0324 | 2.0213 | 2.0364 |
| 2.0090 | 1.9532 | 2.0264 | 2.0341 | 2.0111 | 2.0189 | 2.0169 | 1.9853 | 2.0090 | 1.9654 |

# 参考文献

[1]董光玲. 基于贝叶斯理论的靶场试验综合设计方法研究[D].哈尔滨工业大学,2017.

# B 空桶投球游戏

在游乐场里，经常可以看到一个名为空桶投球的游戏。在该游戏中，有一个圆台形的水桶，其上表面（桶口）的直径为49.5厘米，下表面的直径是40.0厘米，高62.0厘米。水桶以中心线与地面夹角10度的方式固定在距离地面100厘米的位置上。投球手在距离水桶口150厘米的位置向桶内投掷直径为8厘米的弹性球。如果连续投中三次，就可以赢得相应的奖品。游戏规则要求，投进空桶的球与桶的第一次接触必须是在桶的内壁上，不能是桶口边缘；每次投球时，桶内没有其它物体（之前投进的球会被取出）。

由于球具有很高的弹性，投进空桶里的球经常会被反弹出来。所以一般情况下连续三次投中的概率是比较小的。网上有一些关于投球的小技巧。例如，不要大力的投球；使球进行旋转；尽量投在桶内壁的上半部分等等。

请建立数学模型，分析空桶投球游戏的难度和投球技巧的有效性。

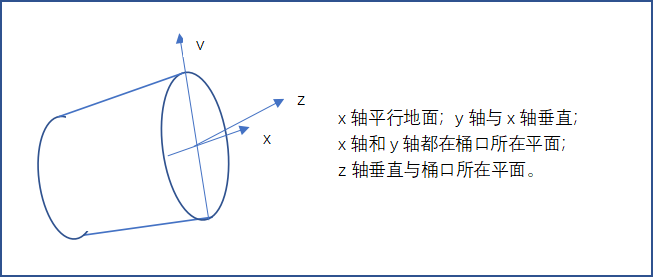
**问题一**、假设弹性球只进行平动，没有旋转。考虑两种类型的弹性球，它们碰撞一次的能量损失分别为5%和30%，请分析投手使用哪一种弹性球更容易引得比赛。

**问题二**、假设弹性球碰撞一次的能量损失为5%。考虑两种投球方式：弹性球仅围绕轴旋转和没有旋转，请分析哪种投球方式下投手更容易引得比赛。

**问题三**、假设弹性球碰撞一次的能量损失为5%。假设某投手对投球力度控制能力较强，即若投手拟投出从桶口平面点处进入空桶的球，则其投出的球的实际速度和旋转角速度与预想相同，但经过桶口平面时的实际位置可能存在一定偏差。假设实际经过桶口平面点处的概率

.

并且投手掌握了最佳的投球方式，请分析该投手连续投进三个球从而赢得游戏的最大概率。





**C 图像质量评估**

我们生活在数字的时代，图像数据作为最重要和使用最广泛的数据类型之一，已经成为了我们生活中不可或缺的一部分。图像是以最简单和直观的方式来展现物理世界。图像处理和分析技术广泛应用于自然科学、工程和多媒体领域，并已正式进入每个人的生活当中。

想象一个场景：当我们看到美景时，开启手机拍照模式，针对同一个拍照对象，先在不同时刻、不同角度、不同光照条件下拍下数张照片，然后再从中挑选出“拍的好”的照片，删去其他重复照片。请建立数学模型和算法进行图像质量评估，您可能需要先设定图像质量的评估标准和指标，然后根据此类指标给所有图像评分，区分出“质量好”的图像和“质量差”的图像。

图像的数据集可以参考如下链接，也可以采用其他网络公开的图像数据集：

https://www.ponomarenko.info/tid2013.htm







