B-最优投资计划问题的研究

摘要

本文针对投资决策问题，建立项目投资优化模型，在不考虑投资风险、考虑按投资金额为权重的风险、名义项目年化回报率、实际项目年化回报率等条件下基于投资收益最大为目标，建立线性规划模型并进行求解，最后给出在不同因素影响或约束下最优的投资方案及方案的调整措施。

针对问题 1，本文在假设不考虑风险的前提下，基于各项目单次投资限额、项目开始时间和项目时长限制，并根据投资开始和资金收回情况建立每月投资金额约束和三年后项目终止时收回的资金最大的要求建立整数线性规划模型，使用 matlab 求解得到最优投资计划，并求得最大收回资金为 14.0819 万元。

针对问题 2，本文在问题 1 模型的基础上考虑投资金额为权重的风险均值的约束，建立了三年后项目终止时收回的资金最大为目标，项目风险均值不大于 2.2 为约束的线性规划模型。使用 matlab 求解，得到能够获得最大收回资金的投资计划的不考虑项目时长的风险均值已小于 2.2，无需修改计划，而若用考虑项目时长的风险均值为约束，需要修改问题 1 中的投资计划才能满足风险均值不大于 2.2，给出新的投资方案，三年后最大收回资金为 14.0698 万元。

针对问题 3，考虑到实际中年化回报率的变化，本文用收回的资金期望作为“最优”要求的衡量标准，建立了三年后收回资金的古典概率模型并将收回资金的期望最大作为目标函数建立考虑年化回报率变化的投资优化模型，最终结果表明最大的期望收回资金为 13.9384 万元。对于投资行情变化的应对措施，实际上是多阶段决策问题，本文建立了以投资行情不同变化下三年后收回资金的期望最大为目标的优化模型，通过 matlab optimtool 工具箱求解出每一年每种变化发生时的投资调整方案，为投资者提供投资行情变化的应对措施。

关键词：线性规划 数学期望 最优投资 matlab 软件 优化模型

1. 问题的重述

某公司部门拟制定一个投资计划，可供投资的金额为 12 万，为期三年，从 2021 年 4 月 25 日计起。为充分了解项目投资相关细节制定出可行的符合各个要求的投资计划，现有可供选择的投资项目详细情况如下表：

表 1：开始投资时可供选择的投资项目

投资项目	项目开始时间	项目时长	年化回报率	投资额下/上限	项目风险
A	每年的 1 月 1 日 每年的 6 月 1 日	1 年	5.8%	最低 2 万 最高 8 万	3
B	每年的 1 月 1 日 每年的 5 月 1 日 每年的 9 月 1 日	3 个月	5.2%	无限制	2
C	每年的奇数月份 1 日	4 个月	5.4%	1 万起	2
D	不限	至少 2 个月	4.35%	1 万起	1

问题 1，主要研究如何制定投资计划，使得三年后(2024.4.25)项目终止时收回的资金最高。

问题 2，考虑如果按照投资金额为权重的风险均值不大于 2.2，对问题 1 中的投资计划进行修改。

问题 3，实际上不同年份某些投资项目的年化回报率会按一定概率发生一些调整，将年化回报率变化纳入考虑，提供最优的投资方案以及对投资行情变化的应对措施。其中，调整系数（当年年化回报率/前一年年化回报率）变化规则如下表：

表 2：调整系数变化规则

A 项目调整系数（%）	概率（%）	B 项目调整系数（%）	C 项目调整系数（%）
90	70	95	85
100	20	100	95
105	10	105	115

2. 对问题的分析

2.1 对问题的整体分析

本文研究的几个问题均为在各种条件下对投资计划的优化设计问题。

由表 1 可知，相比其他项目，D 项目的项目开始日期和项目时长均不是固定的，给投资计划的安排造成麻烦，因此首先关注 D 项目，对其进行等效和化简。容易想到，D 项目的投资时长如果超过 4 个月，则可以在投资时长内拆分为两次或若干次，而每完成一次收回的本息再作为本金放入下一次投资，产生的复利一定大于单次投资超过 4 个月的投资方法产生的回报。因此本文将 D 项目替换为一个项目即项目时长 2 个月的 E 项目和一个项目时长为 3 个月的 F 项目，E、F 项目除时长外其余的属性与 D 项目相同。这样的等效替换对于求解最优投资计划不会产生影响。(下文中若出现项目 E 或 F，实际为项目 D 投资 2 个月或 3 个月。)

2.2 对问题 1 的分析

对于问题 1，在不同项目的时间周期不同、不同项目的年化回报率不同、每个项目还有如投资限额等条件下，本问题需要建立以三年后投资收回资金最大为目标函数的优化模型，通过 matlab 软件进行求解。

2.3 对问题 2 的分析

对于问题 2，在问题 1 的基础上，增加了按照投资金额为权重的风险均值不大于 2.2 这一条件，对问题 1 的优化模型增加这一约束条件进行求解。

2.4 对问题 3 的分析

对于问题 3，已知的年化回报率仅适用于 2021 年，往后的时间（即 2022 年，2023 年，2024 年 1 到 4 月）项目 D 的年化回报率始终不变，而项目 A、B、C 的年化回报率情况有所调整，不同调整方式的概率不同，不同的调整方式会造成各 A、B、C 各项目年化回报率和三年后收回资金的改变。需要建立以三年后收回资金的最大期望为目标函数优化模型, 通过 matlab 软件进行求解。

3. 模型的假设与符号说明

3.1 模型的假设

(1)假设各项目到月末最后一天即视为满月,可收回资金且资金可立即进入次月 1 日的投资。

(2)假设投资所需的交易费、其他支出或损失等可以忽略不计。

(3)假设项目 E 和项目 F 的投资开始时期为每月的 1 日（这样假设能够避免资金闲置问题，对求解最优投资方案不会产生影响）。

(4)在考虑投资行情发生变化时，假设投资行情的变化仅指实际年化回报率有所调整而其余因素不考虑。

(5)在考虑实际年化回报率有所调整时，假设调整的时间为每年年初 1 月 1 日，调整后这一年里不再改变，且调整后在当年进行的项目按照新一年的年化回报率进行收益的计算。

3.2 符号说明

符号	含义
x_{ij}	第 i 个月初投入到 j 项目的资金 i=1,2,…,36，j=1,2,3,4,5
y_{ij}	第 i 个月末收回的投资到 j 项目的到期本金及利息 i=1,2,…,36，j=1,2,3,4,5
z_i	第 i 个月初所有可以用于投资的资金，i=1,2,…,36
T_j	项目 j 的项目时长（月），j=1,2,…,5
p_j	项目 j 的周期化回报率，j=1,2,…,5（周期化回报率=$\frac{\text{年化回报率}}{12}\times T_j$）
m_i	A 项目的调整系数，即 A 项目 $\frac{(2021+i)\text{年年化回报率}}{(2020+i)\text{年年化回报率}}$的值，$i$=1,2,3
$y_{ijm_1m_2m_3}$	当 A 的年化回报率增长率逐年依次为 m_1，m_2，m_3 时，公司第 i 个月末投资到 j 项目资金的到期本金及利息，i=1,2,…,35，j=1~5
$z_{im_1m_2m_3}$	当 A 的年化回报率增长率逐年依次为 m_1，m_2，m_3 时，公司第 i 个月初所有可以用于投资的资金，i=1,2,…,36
$p_{ijm_1m_2m_3}$	当 A 的调整系数逐年依次为 m_1，m_2，m_3 时，第 i 个月 j 项目的周期化回报率，i=1,2,…,36，j=1,2,…,5

注：其余变量的定义在下文的分析中会进行解释。

表 3：i 的值与实际月份对应关系

2021	月份					5	6	7	8	9	10	11	12
	i					1	2	3	4	5	6	7	8
2022	月份	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
	i	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
2023	月份	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
	i	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32
2024	月份	1	2	3	4								
	i	33	34	35	36								

表 4：项目对应的编号及周期化回报率

项目类型	A	B	C	E	F
项目编号 j	1	2	3	4	5
周期化回报率 p_j	0.058	0.013	0.018	0.00725	0.010875

4. 模型的建立与求解

4.1 问题 1 模型的建立与求解

4.1.1 投资模型细节的分析

(1)不满一个月部分投资收益的求解

为了不遗漏不满一个月部分的投资收益，将 2021 年 4 月 25 至 4 月 30 日的 6 天和 2024 年最后一个 4 月的 24 天归为项目 E、F 的投资可行区间，对假设(3)作改进，记项目 E 和项目 F 的第一次投资时间均为 2021 年 4 月 25 日，第一次资金收回时间分别为 2021 年 6 月 30 日和 7 月 31 日，最后一次投资的资金收回时间为 2024 年 4 月 25 日。则项目 E/F 第一次、最后一次投资时的周期分别为 2.2 个月，2.8 个月/3.2 个月、3.8 个月。

通过单独修改上述情况下项目 E 和 F 的周期化回报率来计算这部分收益。

(2)项目风险

由于问题 1 讨论的是最大的收回资金，考虑投资方法时认为该项投资不具有风险，即认

为项目风险的既不影响投资的决策，也不影响投资的收益。

(3)该投资模型的类型

问题 1 的投资模型为线性规划模型，列出目标函数、约束条件后，用 matlab 编程求解使收回资金最高的方案。

4.1.2 投资优化模型建立

(1)目标函数的确立

在问题 1 中，年化利润率不随时间改变而发生变化，故其均为定值。第 i 个月初所有可以用于投资的资金用 z_i 表示，第 1 个月初可用于投资的资金 z_1 为 12 万元，而往后各个月份可用资金均为之前所有月份的投资收入与投资投出之差的和。即：

$$z_i=\begin{cases}12, i=1\\ \sum_{j=1}^{5}\sum_{k=1}^{i}[y_{kj}-x_{kj}], i=2,3,\dots,36\end{cases}$$

收回资金相当于第 36 个月月初可支配资金总额。求出所有投资方案中收回资金最高的方案，则建立如下目标函数：

$$max\ z_{36}$$

(2)约束条件的构建

①单次投资限额的限制

A、C、E、F 项目有其投资额的下/上限，有以下约束：

$$\begin{cases}2\le x_{i1}\le 8 \text{ or } x_{i1}=0, i=1,2\dots36\\ x_{i3}\ge 1 \text{ or } x_{i3}=0, i=1,2\dots36\\ x_{i4}\ge 1 \text{ or } x_{i4}=0, i=1,2\dots36\end{cases}$$

②投资时间的限制

项目 A、B、C、D、E 只能在特定月份投资和规定时间内收回，故有以下约束：

$$\begin{cases}x_{i1}=0, i=1,3,4,5,6,7,8,10,11,12,13,15,16,17,18,19,20,22,23,24,25,26,27,28,29,30,31,32,34,35,36\\ x_{i2}=0, i=2,3,4,6,7,8,10,11,12,14,15,16,18,19,20,22,23,24,26,27,28,30,31,32,34,35,36\\ x_{i3}=0, i=2,4,6,8,10,12,14,16,18,20,22,24,26,28,30,32,33,34,35,36\\ x_{i4}=0, i=35,36\\ x_{i5}=0, i=34,35,36\end{cases}$$

③每月可用投资金额的限制

第 i 个月投资的资金不能多于该月可以用于投资的资金。有以下约束：

$$\sum_{j=1}^{5} x_{ij} \le z_i$$

④等式关系

每个项目有持续时长，以 A 项目为例，若第 i 月收回本息，则应于第(i-12)月时投入资金。各项目的收回本息金额与项目初始投入资金额的关系如下：

$$\begin{cases} y_{i1} = x_{i-12,1}(1+p_1), i = 14, 21, 26, 33 \\ y_{i2} = x_{i-3,2}(1+p_2), i = 4, 8, 12, 16, 20, 24, 28, 32, 36 \\ y_{i3} = x_{i-4,3}(1+p_3), i = 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21, 23, 25, 27, 29, 31, 33, 35 \\ y_{i4} = x_{i-2,4}(1+p_4), i = 3, 4, ..., 36 \\ y_{i5} = x_{i-3,5}(1+p_5), i = 4, 5, ..., 36 \end{cases}$$

(3)投资优化的具体模型

综合以上的分析，得到投资优化的数学模型为：

$$\max z_{36}$$

$$s.t.\begin{cases} 2 \le x_{i1} \le 8 \text{ or } x_{i1}=0, i=1, 2...36 \\ x_{i3} \ge 1 \text{ or } x_{i3}=0, i=1, 2...36 \\ x_{i4} \ge 1 \text{ or } x_{i4}=0, i=1, 2...36 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_{i1} = 0, i = 1, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 10, 11, 12, 13, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 34, 35, 36 \\ x_{i2} = 0, i = 2, 3, 4, 6, 7, 8, 10, 11, 12, 14, 15, 16, 18, 19, 20, 22, 23, 24, 26, 27, 28, 30, 31, 32, 34, 35, 36 \\ x_{i3} = 0, i = 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, 22, 24, 26, 28, 30, 32, 33, 34, 35, 36 \\ x_{i4} = 0, i = 35, 36 \\ x_{i5} = 0, i = 34, 35, 36 \end{cases}$$

$$\sum_{j=1}^{5} x_{ij} \le z_i$$

$$\begin{cases} y_{i1} = x_{i-12,1}(1+p_1), i = 14, 21, 26, 33 \\ y_{i2} = x_{i-3,2}(1+p_2), i = 4, 8, 12, 16, 20, 24, 28, 32, 36 \\ y_{i3} = x_{i-4,3}(1+p_3), i = 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21, 23, 25, 27, 29, 31, 33, 35 \\ y_{i4} = x_{i-2,4}(1+p_4), i = 3, 4, ..., 36 \\ y_{i5} = x_{i-3,5}(1+p_5), i = 4, 5, ..., 36 \\ y_{ij} = 0, i < 0 \end{cases}$$

4.1.3 模型的求解和结果

按目标函数和约束条件（并计入 E、F 项目在 2021 年 4 月 25 日到 5 月 1 日及 2024 年 4 月 1 日到 4 月 25 日这两段时间内的投资对结果的影响），用 matlab 编写程序（附录程序），后，最终求解出以下投资方案。（在月份代号 9 所在行，项目 A 所在列的数据“8”表示在改月投资到项目 A 上的资金为 8 万元。下文中该表格的意义同此处。）

表 5：问题 1 的最优投资计划

实际月份	月份代号	项目 A	项目 B	项目 C	项目 E	项目 F
2021.5	1	0	0	12	0	0
6	2	0	0	0	0	0
7	3	0	0	0	0	0
8	4	0	0	0	0	0
9	5	0	0	12.216	0	0
10	6	0	0	0	0	0
11	7	0	0	0	0	0
12	8	0	0	0	0	0
2022.1	9	8	0	4.435888	0	0
2	10	0	0	0	0	0
3	11	0	0	0	0	0
4	12	0	0	0	0	0
5	13	0	0	4.515733984	0	0
6	14	0	0	0	0	0
7	15	0	0	0	0	0
8	16	0	0	0	0	0
9	17	0	0	4.597017196	0	0
10	18	0	0	0	0	0
11	19	0	0	0	0	0
12	20	0	0	0	0	0
2023.1	21	8	0	5.143763505	0	0
2	22	0	0	0	0	0

3	23	0	0	0	0	0
4	24	0	0	0	0	0
5	25	0	0	5.236351248	0	0
6	26	0	0	0	0	0
7	27	0	0	0	0	0
8	28	0	0	0	0	0
9	29	0	0	5.330605571	0	0
10	30	0	0	0	0	0
11	31	0	0	0	0	0
12	32	0	0	0	0	0
2024.1	33	0	0	0	0	13.89055647
2	34	0	0	0	0	0
3	35	0	0	0	0	0
4	36	0	0	0	0	0

按上述投资计划，能使得三年后(2024 年 4 月 25 日)项目终止时收回的资金最高，最终最大收回资金为 14.0819 万元。

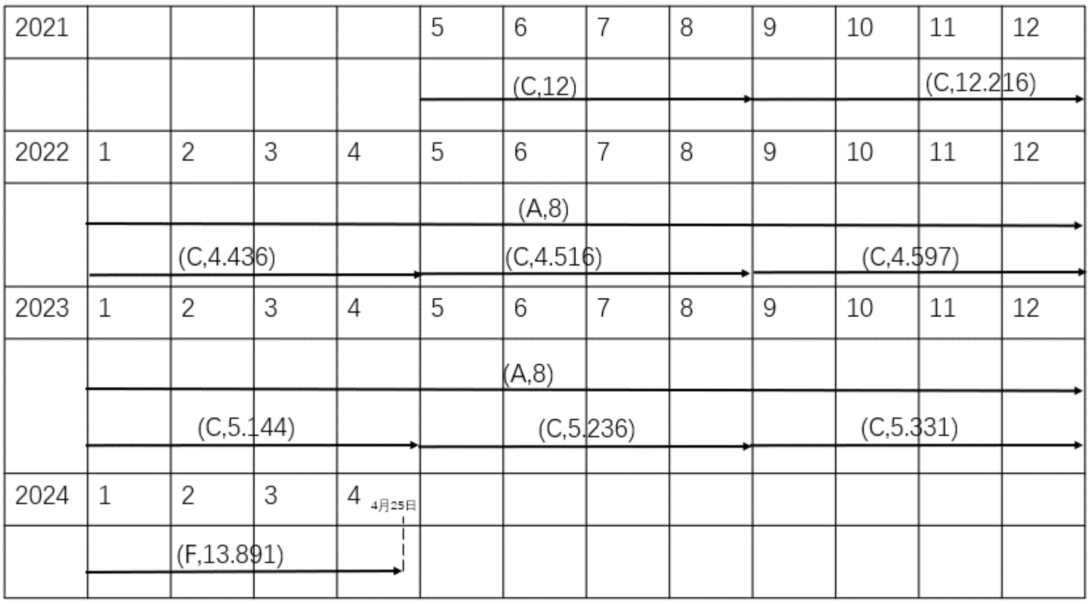

图1：求解问题1所得的投资方案项目、资金、时间可视图

4.2 问题 2 模型的建立分析与求解：

4.2.1 项目风险均值分析

题目所述的风险均值是指以投资金额为权重的风险期望。表 1 中每个项目的项目风险（记为 r_j）已给出，但未明确给出其定义，此时首先需要定量描述风险均值。

本文采用两种描述方式，一种是直接将题目所给的“项目风险”作为所求的均值的目标数据，此时以投资金额为权重的风险均值计算公式如下：

$$\bar{r} = \frac{\sum_{j=1}^{5}\sum_{i=1}^{36} x_{ij} r_j}{\sum_{j=1}^{5}\sum_{i=1}^{36} x_{ij}}$$

另一种方法是根据实际投资中风险与项目类型、时长等因素有关，项目所需时长越久，发生风险的可能性越大，项目所需时长越短，资金流通性越高，风险越低，假定项目风险 r_j 是指某项目 j 单位时间发生风险的一种相对系数，那么以投资金额为权重的风险均值计算公式如下：

$$\bar{r} = \frac{\sum_{j=1}^{5}\sum_{i=1}^{35} x_{ij} T_j r_j}{\sum_{j=1}^{5}\sum_{i=1}^{35} x_{ij} T_j}$$

本问模型按上述两种计算方式，接下来分别给出优化方案。

4.2.2 考虑风险均值的投资优化模型

(1)目标函数的建立

与问题 1 相同，问题 2 的目标函数是第 36 月的收回资金。以第 36 个月的收回资金最大为目标函数：

$$\max\ f = z_{36}$$

(2)约束条件的构建

由于问题 2 中引入了风险均值的因素，在问题 1 的约束条件基础上，同时要考虑按照投资金额为权重的风险均值不大于 2.2 的约束条件。对问题 1 的优化模型的约束条件进行适当的修改可得问题 2 的优化模型。要求的按照投资金额为权重的风险均值不大于 2.2 的约束：

$$\bar{r}=\frac{\sum_{j=1}^{5}\sum_{i=1}^{35}x_{ij}r_j}{\sum_{j=1}^{5}\sum_{i=1}^{35}x_{ij}}\le 2.2$$

$$\bar{r}=\frac{\sum_{j=1}^{5}\sum_{i=1}^{35}x_{ij}Q_{\mathrm{j}}r_j}{\sum_{j=1}^{5}\sum_{i=1}^{35}x_{ij}Q_j}\le 2.2$$

(3)考虑风险均值的投资具体优化模型

综合以上分析，得到考虑风险均值的投资优化具体模型如下。

方法一的模型：

$$\max z_{36}$$

$$s.t.\begin{cases}2\le x_{i1}\le 8 \text{ or } x_{i1}=0, i=1,2\ldots36\\ x_{i3}\ge 1 \text{ or } x_{i3}=0, i=1,2\ldots36\\ x_{i4}\ge 1 \text{ or } x_{i4}=0, i=1,2\ldots36\end{cases}$$

$$\begin{cases}x_{i1}=0, i=1,3,4,5,6,7,8,10,11,12,13,15,16,17,18,19,20,22,23,24,25,26,27,28,29,30,31,32,34,35,36\\ x_{i2}=0, i=2,3,4,6,7,8,10,11,12,14,15,16,18,19,20,22,23,24,26,27,28,30,31,32,34,35,36\\ x_{i3}=0, i=2,4,6,8,10,12,14,16,18,20,22,24,26,28,30,32,33,34,35,36\\ x_{i4}=0, i=35,36\\ x_{i5}=0, i=34,35,36\end{cases}$$

$$\sum_{j=1}^{5}x_{ij}\le z_i$$

$$\begin{cases}y_{i1}=x_{i-12,1}(1+p_1), i=14,21,26,33\\ y_{i2}=x_{i-3,2}(1+p_2), i=4,8,12,16,20,24,28,32,36\\ y_{i3}=x_{i-4,3}(1+p_3), i=5,7,9,11,13,15,17,19,21,23,25,27,29,31,33,35\\ y_{i4}=x_{i-2,4}(1+p_4), i=3,4,\ldots,36\\ y_{i5}=x_{i-3,5}(1+p_5), i=4,5,\ldots,36\end{cases}$$

$$\bar{r}=\frac{\sum_{j=1}^{5}\sum_{i=1}^{35}x_{ij}r_j}{\sum_{j=1}^{5}\sum_{i=1}^{35}x_{ij}}\le 2.2$$

方法二的模型：

$$\max z_{36}$$

$$
s.t.\begin{cases} 2 \le x_{i1} \le 8 \text{ or } x_{i1}=0, i=1,2...36 \\ x_{i3} \ge 1 \text{ or } x_{i3}=0, i=1,2...36 \\ x_{i4} \ge 1 \text{ or } x_{i4}=0, i=1,2...36 \end{cases}
$$

$$
\begin{cases} x_{i1}=0, i=1,3,4,5,6,7,8,10,11,12,13,15,16,17,18,19,20,22,23,24,25,26,27,28,29,30,31,32,34,35,36 \\ x_{i2}=0, i=2,3,4,6,7,8,10,11,12,14,15,16,18,19,20,22,23,24,26,27,28,30,31,32,34,35,36 \\ x_{i3}=0, i=2,4,6,8,10,12,14,16,18,20,22,24,26,28,30,32,33,34,35,36 \\ x_{i4}=0, i=35,36 \\ x_{i5}=0, i=34,35,36 \end{cases}
$$

$$
\sum_{j=1}^{5} x_{ij} \le z_i
$$

$$
\begin{cases} y_{i1}=x_{i-12,1}(1+p_1), i=14,21,26,33 \\ y_{i2}=x_{i-3,2}(1+p_2), i=4,8,12,16,20,24,28,32,36 \\ y_{i3}=x_{i-4,3}(1+p_3), i=5,7,9,11,13,15,17,19,21,23,25,27,29,31,33,35 \\ y_{i4}=x_{i-2,4}(1+p_4), i=3,4,...,36 \\ y_{i5}=x_{i-3,5}(1+p_5), i=4,5,...,36 \end{cases}
$$

$$
\bar{r}=\frac{\sum_{j=1}^{5}\sum_{i=1}^{35} x_{ij}T_j r_j}{\sum_{j=1}^{5}\sum_{i=1}^{35} x_{ij}T_j} \le 2.2
$$

4.2.3 模型的求解和结果

按模型所述的目标函数和约束条件，用 matlab 编程求解，得出修改后的投资计划如下。

若使用方法一计算风险均值，则投资计划为：

表 6：问题 2（方法一计算风险均值）的最优投资计划

实际月份	月份代号	项目 A	项目 B	项目 C	项目 E	项目 F
2021.5	1	0	0	12	0	0
6	2	0	0	0	0	0
7	3	0	0	0	0	0
8	4	0	0	0	0	0
9	5	0	0	12.216	0	0
10	6	0	0	0	0	0
11	7	0	0	0	0	0

12	8	0	0	0	0	0
2022.1	9	8	0	4.435888	0	0
2	10	0	0	0	0	0
3	11	0	0	0	0	0
4	12	0	0	0	0	0
5	13	0	0	4.515733984	0	0
6	14	0	0	0	0	0
7	15	0	0	0	0	0
8	16	0	0	0	0	0
9	17	0	0	4.597017196	0	0
10	18	0	0	0	0	0
11	19	0	0	0	0	0
12	20	0	0	0	0	0
2023.1	21	8	0	5.143763505	0	0
2	22	0	0	0	0	0
3	23	0	0	0	0	0
4	24	0	0	0	0	0
5	25	0	0	5.236351248	0	0
6	26	0	0	0	0	0
7	27	0	0	0	0	0
8	28	0	0	0	0	0
9	29	0	0	5.330605571	0	0
10	30	0	0	0	0	0
11	31	0	0	0	0	0
12	32	0	0	0	0	0
2024.1	33	0	0	0	0	13.89055647
2	34	0	0	0	0	0
3	35	0	0	0	0	0
4	36	0	0	0	0	0

如果按照投资金额为权重的风险均值不大于 2.2，投资计划不需要修改，与问题 1 保持不变。

这说明问题 1 的最优投资方案已经满足了“按照投资金额为权重的风险均值不大于 2.2”的条件，此时风险均值为 2.0253，三年后(2024 年 4 月 25 日)项目终止时收回的资金为 14.0819 万元。

若使用方法二计算风险均值，则投资计划为：

表 7：问题 2（方法二计算风险均值）的最优投资计划

实际月份	月份代号	项目 A	项目 B	项目 C	项目 E	项目 F
2021.5	1	0	0	12	0	0
6	2	0	0	0	0	0
7	3	0	0	0	0	0
8	4	0	0	0	0	0
9	5	0	0	12.216	0	0
10	6	0	0	0	0	0
11	7	0	0	0	0	0
12	8	0	0	0	0	0
2022.1	9	8	0	4.435888	0	0
2	10	0	0	0	0	0
3	11	0	0	0	0	0
4	12	0	0	0	0	0
5	13	0	0	4.515734	0	0
6	14	0	0	0	0	0
7	15	0	0	0	0	0
8	16	0	0	0	0	0
9	17	0	0	4.597017	0	0
10	18	0	0	0	0	0
11	19	0	0	0	0	0
12	20	0	0	0	0	0
2023.1	21	4.053197	0	9.090567	0	0

2	22	0	0	0	0	0
3	23	0	0	0	0	0
4	24	0	0	0	0	0
5	25	0	0	9.420773	0	0
6	26	0	0	0	0	0
7	27	0	0	0	0	0
8	28	0	0	0	0	0
9	29	0	0	0	0	0
10	30	0	0	0	0	0
11	31	0	0	0	0	0
12	32	0	0	0	0	0
2024.1	33	0	0	0	0	13.87863
2	34	0	0	0	0	0
3	35	0	0	0	0	0
4	36	0	0	0	0	0

这份投资计划相较问题 1 发生了改变，说明问题 1 所给出方案的风险均值大于了 2.2，于是若按照投资金额为权重的风险均值不大于 2.2，使得三年后(2024 年 4 月 25 日)项目终止时收回资金最大，应该按上述方案进行投资。三年后最大收回的资金为 14.0698 万元，风险均值为 2.2。

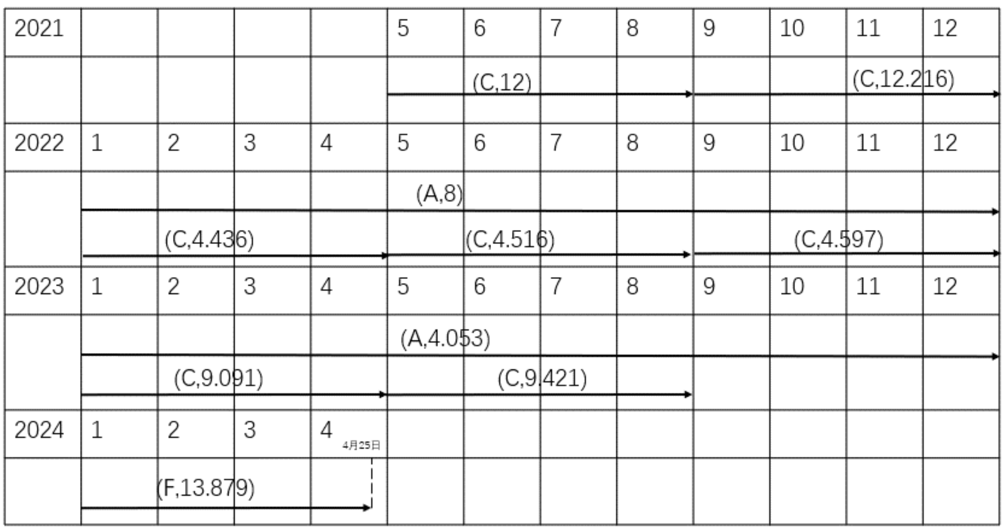

图2：求解问题2(使用方法二计算风险均值)所得的投资方案项目、资金、时间可视图

4.3 问题 3 模型的建立与求解

4.3.1 最优的投资方案

(1)关于“最优”的讨论

首先明确此时所考虑的最优方案是投资计划开始前制定的，项目 A、B、C 的不同年份的年化回报率均是随机变量，不会在投资开始前被确定下来，三年后(2024 年 4 月 25 日)项目终止时收回的资金也会随项目年化回报率的变化而变化。本文需要考虑的是针对于每个不同的 m_1，m_2，m_3 的组合，有一个最优方案使得三年后(2024 年 4 月 25 日)项目终止时收回的资金最大，鉴于收回的资金是随机变量，本文用收回的资金期望最大作为最优要求的衡量标准。

(2)最优投资方案优化模型目标函数的建立

根据古典概型将 3 年的全部周期化回报率可能出现的情况列出并计算每个情况的概率。基于每种不同的 m_1，m_2，m_3 组合，分别求三年后(2024 年 4 月 25 日)项目终止时收回的资金 $z_{36m_1m_2m_3}$，以 $z_{36m_1m_2m_3}$ 的期望最大为优化目标。即：

$$\max \sum_{m1}\sum_{m2}\sum_{m3} z_{36m_1m_2m_3} P_{m_1m_2m_3}$$

其中，$P_{m_1m_2m_3}$ 表示每一种 m_1，m_2，m_3 的组合发生时的概率。即以 m_1，m_2，m_3 的组合作为随机变量，$P_{m_1m_2m_3}$ 是该离散型随机变量的分布函数。$z_{im_1m_2m_3}$ 计算公式如下：

$$z_{im_1m_2m_3} = \begin{cases} 12, i=1 \\ \sum_{j=1}^{5}\sum_{k=1}^{i}[y_{kjm_1m_2m_3} - x_{kj}], i=2,3,\dots,36 \end{cases}$$

(3)最优投资方案优化模型约束条件的构建

①单次投资限额的限制

A、C、E、F 项目有其投资额的下/上限，有以下约束：

$$\begin{cases} 2 \le x_{i1} \le 8 \text{ or } x_{i1} = 0, i=1,2\dots36 \\ x_{i3} \ge 1 \text{ or } x_{i3} = 0, i=1,2\dots36 \\ x_{i4} \ge 1 \text{ or } x_{i4} = 0, i=1,2\dots36 \end{cases}$$

②投资时间的限制

项目 A、B、C、D、E 只能在特定月份投资和规定时间内收回，故有以下约束：

$$\begin{cases} x_{i1}=0, i=1,3,4,5,6,7,8,10,11,12,13,15,16,17,18,19,20,22,23,24,25,26,27,28,29,30,31,32,34,35,36 \\ x_{i2}=0, i=2,3,4,6,7,8,10,11,12,14,15,16,18,19,20,22,23,24,26,27,28,30,31,32,34,35,36 \\ x_{i3}=0, i=2,4,6,8,10,12,14,16,18,20,22,24,26,28,30,32,33,34,35,36 \\ x_{i4}=0, i=35,36 \\ x_{i5}=0, i=34,35,36 \end{cases}$$

③每月可用投资金额的限制

第 i 个月投资的资金不能多于该月可以用于投资的资金。有以下约束：

$$\sum_{j=1}^{5} x_{ij} \le z_{im_1m_2m_3}$$

④等式关系

每个项目有持续时长，以 A 项目为例，若第 i 月收回本息，则应于第(i-12)月时投入资金。各项目的收回本息金额与项目初始投入资金额的关系如下：

$$\begin{cases} y_{i1m_1m_2m_3}{}^{*}=x_{i-12,1}(1+p_{i1m_1m_2m_3}), i=14,21,26,33 \\ y_{i2m_1m_2m_3}=x_{i-3,2}(1+p_{i2m_1m_2m_3}), i=4,8,12,16,20,24,28,32,36 \\ y_{i3m_1m_2m_3}=x_{i-4,3}(1+p_{i3m_1m_2m_3}), i=5,7,9,11,13,15,17,19,21,23,25,27,29,31,33,35, \\ y_{i4m_1m_2m_3}=x_{i-2,4}(1+p_{i4m_1m_2m_3}), i=3,4,\ldots,36 \\ y_{i5m_1m_2m_3}=x_{i-3,5}(1+p_{i5m_1m_2m_3}), i=4,5,\ldots,36 \end{cases}$$

*注：含下标 $m_1m_2m_3$ 的方程在 m_1，m_2，m_3 取不同组合时会产生形式相同的方程，在此不对其进行分别列写。

(4)最优投资方案优化模型的建立

综合以上分析，得到投资优化的数学模型为：

$$\max \sum_{m1}\sum_{m2}\sum_{m3} z_{36m_1m_2m_3} p_{m_1m_2m_3}$$

$$s.t.\begin{cases} 2 \le x_{i1} \le 8 \text{ or } x_{i1}=0, i=1,2\ldots36 \\ x_{i3} \ge 1 \text{ or } x_{i3}=0, i=1,2\ldots36 \\ x_{i4} \ge 1 \text{ or } x_{i4}=0, i=1,2\ldots36 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_{i1}=0, i=1,3,4,5,6,7,8,10,11,12,13,15,16,17,18,19,20,22,23,24,25,26,27,28,29,30,31,32,34,35,36 \\ x_{i2}=0, i=2,3,4,6,7,8,10,11,12,14,15,16,18,19,20,22,23,24,26,27,28,30,31,32,34,35,36 \\ x_{i3}=0, i=2,4,6,8,10,12,14,16,18,20,22,24,26,28,30,32,33,34,35,36 \\ x_{i4}=0, i=35,36 \\ x_{i5}=0, i=34,35,36 \end{cases}$$

$$\sum_{j=1}^{5} x_{ij} \le z_{im_1m_2m_3}$$

$$\begin{cases} y_{i1m_1m_2m_3}{}^* = x_{i-12,1}(1+p_{i1m_1m_2m_3}), i=14,21,26,33 \\ y_{i2m_1m_2m_3} = x_{i-3,2}(1+p_{i2m_1m_2m_3}), i=4,8,12,16,20,24,28,32,36 \\ y_{i3m_1m_2m_3} = x_{i-4,3}(1+p_{i3m_1m_2m_3}), i=5,7,9,11,13,15,17,19,21,23,25,27,29,31,33,35, \\ y_{i4m_1m_2m_3} = x_{i-2,4}(1+p_{i4m_1m_2m_3}), i=3,4,\ldots,36 \\ y_{i5m_1m_2m_3} = x_{i-3,5}(1+p_{i5m_1m_2m_3}), i=4,5,\ldots,36 \end{cases}$$

(5)模型的求解和结果

按模型所述的目标函数和约束条件，用 matlab 编写程序（附录程序），最终求解出以下投资方案。

表 8：问题 3 的最优投资计划

实际月份	月份代号	项目 A	项目 B	项目 C	项目 E	项目 F
2021.5	1	0	0	12	0	0
6	2	0	0	0	0	0
7	3	0	0	0	0	0
8	4	0	0	0	0	0
9	5	0	0	12.216	0	0
10	6	0	0	0	0	0
11	7	0	0	0	0	0
12	8	0	0	0	0	0
2022.1	9	7.603117	4.832771	0	0	0
2	10	0	0	0	0	0
3	11	0	0	0	0	0
4	12	0	0	0	4.892455	0
5	13	0	0	0	0	0
6	14	4.927926	0	0	0	0
7	15	0	0	0	0	0
8	16	0	0	0	0	0
9	17	0	0	0	0	0
10	18	0	0	0	0	0
11	19	0	0	0	0	0

12	20	0	0	0	0	0
2023.1	21	8	0	0	0	0
2	22	0	0	0	0	0
3	23	0	0	0	0	0
4	24	0	0	0	0	0
5	25	0	0	0	0	0
6	26	0	0	0	0	5.174445
7	27	0	0	0	0	0
8	28	0	0	0	0	0
9	29	0	5.230717	0	0	0
10	30	0	0	0	0	0
11	31	0	0	0	0	0
12	32	0	0	0	5.292087	0
2024.1	33	0	0	0	0	8.37584
2	34	0	0	0	5.330454	0
3	35	0	0	0	0	0
4	36	0	0	0	0	0

按上述投资计划，能使得三年后(2024 年 4 月 25 日)项目终止时收回资金期望最高，最大收回资金为 13.9384 万元。

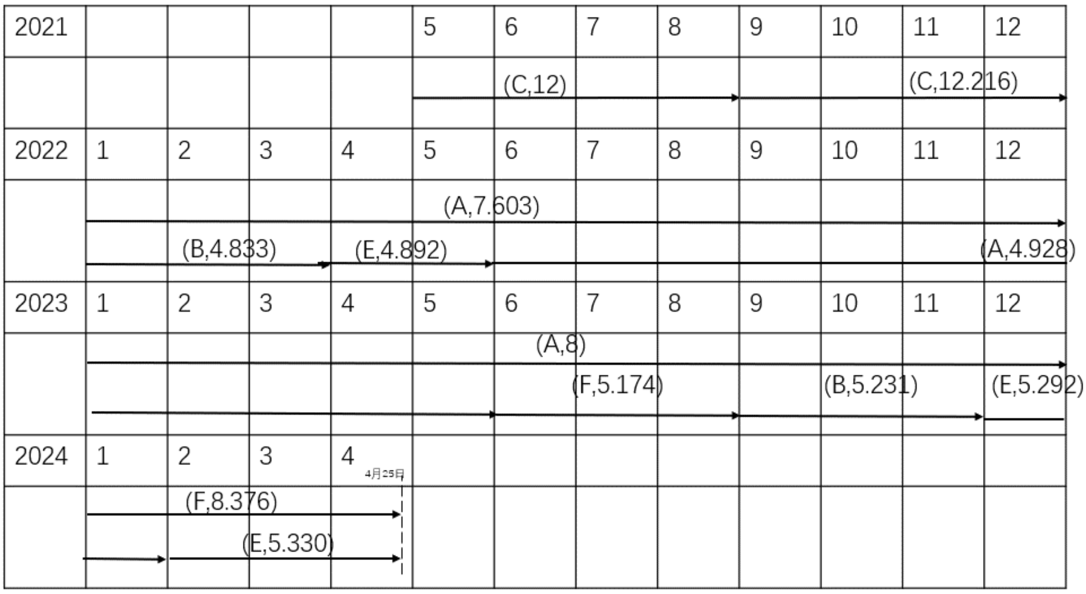

图3：求解问题3所得的投资方案项目、资金、时间可视图

4.3.2 投资行情变化的应对措施

(1)关于“应对措施”含义的分析

将三年投资期限分为四个阶段，如下图时间轴所示，中间有三个年化利润率会发生调整的时间节点，即每一年的 1 月 1 日。

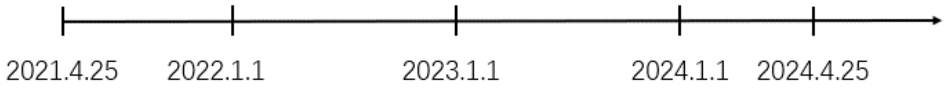

图4：投资分段时间轴

该问题需要考虑投资者的视角，考虑当投资行情随时间改变时该如何相应地做出方案更改。4.3.1 中已经基于所有可能发生的行情变化及其概率，建模求解产生了一个最优投资方案，那么在 2021 年 4 月 25 日，实际的 m_1，m_2，m_3 尚未明确的情况下，此时需要应用 4.3.1 中的最优投资方案进行投资。

当时间推进到 2022 年 1 月 1 日，投资行情发生第一次变化（即各项目的年化回报率发生了调整），此时变化已经是一个已知量，投资方案可以在此基础上进行修改，使得在当年的投资行情确定及之前的投资计划已经实施的情况下投资三年后能有最大收回资金。投资行情第一次改变后 2022 年的各项目年化回报率不再是随机变量，而是已知的定量，则问题转换成年化利润率还会发生两次变化（m_2，m_3 的不同组合）的条件下，制定出新的最优投资方案，此方案就是应对 2022 年投资行情发生改变的应对措施。

当时间推进到 2023 年 1 月 1 日 2024 年 1 月 1 日，该时间点已经可以确定当年的年化回报率是如何改变的，就可以在原有的投资计划的基础上进行修改，求解的方法同理。

各个阶段决策的选取不能任意确定，它依赖于当前面临的状态，又影响以后的发展，故建立以三年后收回资金期望最大为目标的动态规划模型来求解修改投资方案。

(2)修改投资方案优化模型目标函数的建立

与 4.3.1 中的模型类似，基于每种不同的 m_1，m_2，m_3 的情况组合，分别求三年后(2024 年 4 月 25 日)项目终止时收回的资金 $z_{36m_1m_2m_3}$，以 $z_{36m_1m_2m_3}$ 的期望最大为优化目标。但是，在 2022 年，m_1 不再是随机变量，可以取三个不同的定值，因此 2022 年修改方案优化模型有 3 个目标函数，其他年的改方案优化模型同理。即：

表 9：修改投资方案优化模型目标函数

2022 年修改方案优化模	$\max f = \sum_{m2}\sum_{m3} z_{36m_1m_2m_3} P_{m_1m_2m_3}\big\vert_{m_1=M_1}$	M_1=0.9,1,1.05

型目标函数(共3个)		
2023 年修改方案优化模型目标函数（共9个）	$\max f=\sum_{m3} z_{36m_1m_2m_3}P_{m_1m_2m_3}\mid_{(m_1,m_2)=(M_1,M_2)}$	$(M_1,M_2)=$ {(0.9,0.9),(0.9,1),(0.9,1.05), (1,0.9),(1,1),(1,1.05), (1.05,0.9),(1.05,1),(1.05,1.05)}
2024 年修改方案优化模型目标函数（共27个）	$\max f=z_{36m_1m_2m_3}P_{m_1m_2m_3}\mid_{(m_1,m_2,m_3)=(M_1,M_2,M_3)}$	$(M_1,M_2,M_3)=$ {(0.9,0.9,0.9),(0.9,0.9,1),(0.9,0.9,1.05), (0.9,1,0.9),(0.9,1,1),(0.9,1,1.05), (0.9,1.05,0.9),(0.9,1.05,1),(0.9,1.05,1.05), (1,0.9,0.9),(1,0.9,1),(1,0.9,1.05), (1,1,0.9), (1,1,1), (1,1,1.05), (1,1.05,0.9), (1,1.05,1),(1,1.05,1.05), (1.05,0.9,0.9), (1.05,0.9,1), (1.05,0.9,1.05) (1.05,1,0.9), (1.05,1,1), (1.05,1,1.05) (1.05,1.05,0.9),(1.05,1.05,1),(1.05,1.05,1.05)}

其中，$P_{m_1m_2m_3}$ 表示每一种 m_1，m_2，m_3 的组合发生时的概率。且 $z_{im_1m_2m_3}$ 计算公式如下：

$$z_{im_1m_2m_3}=\begin{cases}12, i=1\\ \sum_{j=1}^{5}\sum_{k=1}^{i}[y_{kjm_1m_2m_3}-x_{kj}], i=2,3,\ldots,36\end{cases}$$

(3)修改投资方案优化模型约束条件的构建

①单次投资限额的限制

A、C、E、F 项目有其投资额的下/上限，有以下约束：

$$\begin{cases}2\le x_{i1}\le 8 \text{ or } x_{i1}=0, i=1,2\ldots36\\ x_{i3}\ge 1 \text{ or } x_{i3}=0, i=1,2\ldots36\\ x_{i4}\ge 1 \text{ or } x_{i4}=0, i=1,2\ldots36\end{cases}$$

②投资时间的限制

项目 A、B、C、D、E 只能在特定月份投资和规定时间内收回，故有以下约束：

$$\begin{cases} x_{i1}=0, i=1,3,4,5,6,7,8,10,11,12,13,15,16,17,18,19,20,22,23,24,25,26,27,28,29,30,31,32,34,35,36 \\ x_{i2}=0, i=2,3,4,6,7,8,10,11,12,14,15,16,18,19,20,22,23,24,26,27,28,30,31,32,34,35,36 \\ x_{i3}=0, i=2,4,6,8,10,12,14,16,18,20,22,24,26,28,30,32,33,34,35,36 \\ x_{i4}=0, i=35,36 \\ x_{i5}=0, i=34,35,36 \end{cases}$$

③每月可用投资金额的限制

第 i 个月投资的资金不能多于该月可以用于投资的资金。有以下约束：

$$\sum_{j=1}^{5} x_{ij} \le z_{im_1m_2m_3}$$

④等式关系

每个项目有持续时长，以 A 项目为例，若第 i 月收回本息，则应于第(i-12)月时投入资金。各项目的收回本息金额与项目初始投入资金额的关系如下：

$$\begin{cases} y_{i1m_1m_2m_3}{}^{*} = x_{i-12,1}(1+p_{i1m_1m_2m_3}), i=14,21,26,33 \\ y_{i2m_1m_2m_3} = x_{i-3,2}(1+p_{i2m_1m_2m_3}), i=4,8,12,16,20,24,28,32,36 \\ y_{i3m_1m_2m_3} = x_{i-4,3}(1+p_{i3m_1m_2m_3}), i=5,7,9,11,13,15,17,19,21,23,25,27,29,31,33,35, \\ y_{i4m_1m_2m_3} = x_{i-2,4}(1+p_{i4m_1m_2m_3}), i=3,4,\dots,36 \\ y_{i5m_1m_2m_3} = x_{i-3,5}(1+p_{i5m_1m_2m_3}), i=4,5,\dots,36 \end{cases}$$

*注：含下标 $m_1m_2m_3$ 的方程在 m_1，m_2，m_3 取不同组合时会产生形式相同的方程，在此不对其进行分别列写。

⑤已经实施的项目的约束

在对投资计划进行调整时，已经有部分投资项目已经实施，故要对 x_{ij} 增加此约束条件。

记 4.3.1 中求得的最优投资方案的第 i 个月初投入到 j 项目的资金为 X_{ij}，2022 年修改方案的第 i 个月初投入到 j 项目的资金为 X'_{ij}，2023 年修改方案的第 i 个月初投入到 j 项目的资金为 X''_{ij}。

则对 3 个 2022 年修改方案优化模型目标函数分别增加以下约束条件：

$$x_{ij} = X_{ij}, i=1,2,\dots,8, j=1,2,\dots,5$$

对 9 个 2023 年修改方案优化模型目标函数分别增加以下约束条件：

$$x_{ij} = X'_{ij}, i=1,2,\dots,20, j=1,2,\dots,5$$

对 27 个 2024 年修改方案优化模型目标函数分别增加以下约束条件：

$$x_{ij} = X''_{ij}, i = 1,2,...,32, j = 1,2,...,5$$

(4)最优投资方案优化模型的建立

综合以上分析，得到修改投资方案优化的数学模型为：

$$\max f$$

$$s.t. \begin{cases} 2 \le x_{i1} \le 8 \text{ or } x_{i1} = 0, i = 1,2...36 \\ x_{i3} \ge 1 \text{ or } x_{i3} = 0, i = 1,2...36 \\ x_{i4} \ge 1 \text{ or } x_{i4} = 0, i = 1,2...36 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_{i1} = 0, i = 1,3,4,5,6,7,8,10,11,12,13,15,16,17,18,19,20,22,23,24,25,26,27,28,29,30,31,32,34,35,36 \\ x_{i2} = 0, i = 2,3,4,6,7,8,10,11,12,14,15,16,18,19,20,22,23,24,26,27,28,30,31,32,34,35,36 \\ x_{i3} = 0, i = 2,4,6,8,10,12,14,16,18,20,22,24,26,28,30,32,33,34,35,36 \\ x_{i4} = 0, i = 35,36 \\ x_{i5} = 0, i = 34,35,36 \end{cases}$$

$$\sum_{j=1}^{5} x_{ij} \le z_{im_1m_2m_3}$$

$$\begin{cases} y_{i1m_1m_2m_3} = x_{i-12,1}(1+p_{i1m_1m_2m_3}), i = 14,21,26,33 \\ y_{i2m_1m_2m_3} = x_{i-3,2}(1+p_{i2m_1m_2m_3}), i = 4,8,12,16,20,24,28,32,36 \\ y_{i3m_1m_2m_3} = x_{i-4,3}(1+p_{i3m_1m_2m_3}), i = 5,7,9,11,13,15,17,19,21,23,25,27,29,31,33,35, \\ y_{i4m_1m_2m_3} = x_{i-2,4}(1+p_{i4m_1m_2m_3}), i = 3,4,...,36 \\ y_{i5m_1m_2m_3} = x_{i-3,5}(1+p_{i5m_1m_2m_3}), i = 4,5,...,36 \end{cases}$$

$$x_{ij} = X_{ij}, i = 1,2,...,8, j = 1,2,...,5$$

（或 $x_{ij} = X'_{ij}, i = 1,2,...,20, j = 1,2,...,5$，或 $x_{ij} = X''_{ij}, i = 1,2,...,32, j = 1,2,...,5$）

(5)模型的求解和结果

按模型所述的目标函数和约束条件，用 matlab 编写程序（附录程序），最终可以求解出如下图所示的投资修改方案，各个节点处均有一种在当前变化发生时的最优投资方案，按此方案对当年的投资计划进行修改，具体方案内容见下表。

图 5：各年按投资行情变化情况所得投资修改方案示意图

表 10：各年各种投资行情变化时当年的投资方案（每个单元格第一行表示某一年 A 的调整系数值，如“2022 年 0.9”表示 2022 年 A 的调整系数为 0.9，下方为该情况发生时的投资方案）

<table>
<tr><th>2021 方案</th><th>2022 方案</th><th>2023 方案</th><th>2024 方案</th></tr>
<tr><td rowspan="9">2021 年 5 月投资 C 项目 12 万
2021 年 9 月投资 C 项目 12.216 万</td><td rowspan="9">2022 年 0.9
2022 年 1 月投资 A 项目 7.603117 万
2022 年 6 月投资 A 项目 4.927926 万
2022 年 1 月投资 B4.832771 万
2022 年 4 月投资 E 项目 4.892455 万</td><td rowspan="3">2023 年 0.9
2023 年 1 月投资 A 项目 8 万
2023 年 9 月份投资 B 项目 5.230717 万
2023 年 12 月投资 E 项目 5.292087 万
2023 年 6 月投资 F 项目 5.174445 万</td><td>2024 年 0.9
2024 年 2 月投资 E 项目 5.330454 万
2024 年 1 月投资 F 项目 8.55717 万</td></tr>
<tr><td>2024 年 1.0
2024 年 2 月投资 E 项目 5.330454 万
2024 年 1 月投资 F 项目 8.55717 万</td></tr>
<tr><td>2024 年 1.05
2024 年 2 月投资 E 项目 5.330454 万
2024 年 1 月投资 F 项目 8.55717 万</td></tr>
<tr><td rowspan="3">2023 年 1
2023 年 1 月投资 A 项目 8 万
2023 年 9 月份投资 B 项目 5.241552 万
2023 年 12 月投资 E 项目 5.306285 万
2023 年 6 月投资 F 项目 5.185163 万</td><td>2024 年 0.9
2024 年 2 月投资 E 项目 5.344756 万
2024 年 1 月投资 F 项目 8.543228 万</td></tr>
<tr><td>2024 年 1.0
2024 年 2 月投资 E 项目 5.344756 万
2024 年 1 月投资 F 项目 8.543228 万</td></tr>
<tr><td>2024 年 1.05
2024 年 2 月投资 E 项目 5.344756 万
2024 年 1 月投资 F 项目 8.543228 万</td></tr>
<tr><td rowspan="3">2023 年 1.05
2023 年 1 月投资 A 项目 8 万
2023 年 9 月投资 C 项目 5.24697 万
2023 年 6 月投资 F 项目 5.190523 万</td><td>2024 年 0.9
2024 年 1 月投资 F 项目 13.87588 万</td></tr>
<tr><td>2024 年 1.0
2024 年 1 月投资 F 项目 13.87588 万</td></tr>
<tr><td>2024 年 1.05
2024 年 1 月投资 F 项目 13.87588 万</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td rowspan="18"></td><td rowspan="9">2022 年 1
2022 年 1 月投资 A 项目 7.561437 万
2022 年 6 月投资 A 项目 4.93618 万
2022 年 1 月投资 B 项目 4.874451 万
2022 年 4 月投资 E 项目 4.937819 万</td><td rowspan="3">2023 年 0.9
2023 年 1 月投资 A 项目 8 万
2023 年 9 月份投资 B 项目 5.307163 万
2023 年 12 月投资 E 项目 5.372707 万
2023 年 6 月投资 F 项目 5.250069 万</td><td>2024 年 0.9
2024 年 2 月投资 E 项目 5.411659 万
2024 年 1 月投资 F 项目 8.497469 万</td></tr>
<tr><td>2024 年 1.0
2024 年 2 月投资 E 项目 5.411659 万
2024 年 1 月投资 F 项目 8.497469 万</td></tr>
<tr><td>2024 年 1.05
2024 年 2 月投资 E 项目 5.411659 万
2024 年 1 月投资 F 项目 8.497469 万</td></tr>
<tr><td rowspan="3">2023 年 1
2023 年 1 月投资 A 项目 8 万
2023 年 9 月份投资 B 项目 5.319313 万
2023 年 12 月投资 E 项目 5.388465 万
2023 年 6 月投资 F 项目 5.262088 万</td><td>2024 年 0.9
2024 年 2 月投资 E 项目 5.427531 万
2024 年 1 月投资 F 项目 8.464 万</td></tr>
<tr><td>2024 年 1.0
2024 年 2 月投资 E 项目 5.427531 万
2024 年 1 月投资 F 项目 8.464 万</td></tr>
<tr><td>2024 年 1.05
2024 年 2 月投资 E 项目 5.427531 万
2024 年 1 月投资 F 项目 8.464 万</td></tr>
<tr><td rowspan="3">2023 年 1.05
2023 年 1 月投资 A 项目 8 万
2023 年 9 月投资 C 项目 5.319313 万
2023 年 6 月投资 F 项目 5.262088 万</td><td>2024 年 0.9
2024 年 1 月投资 F 项目 13.87906 万</td></tr>
<tr><td>2024 年 1.0
2024 年 1 月投资 F 项目 13.87906 万</td></tr>
<tr><td>2024 年 1.05
2024 年 1 月投资 B 项目 13.87906 万</td></tr>
<tr><td rowspan="9">2022 年 1.05
2022 年 1 月投资 C 项目 12.43589 万
2022 年 5 月投资 C 项目 12.65973 万
2022 年 9 月投资 C 项目 12.88761 万</td><td rowspan="3">2023 年 0.9
2023 年 1 月投资 A 项目 8 万
2023 年 1 月投资 C 项目 5.119586 万
2023 年 5 月投资 C 项目 5.211739 万
2023 年 9 月投资 C 项目 5.30555 万</td><td>2024 年 0.9
2024 年 1 月投资 F 项目 13.86505</td></tr>
<tr><td>2024 年 1.0
2024 年 1 月投资 F 项目 13.86505</td></tr>
<tr><td>2024 年 1.05
2024 年 1 月投资 F 项目 13.86505</td></tr>
<tr><td rowspan="3">2023 年 1
2023 年 1 月投资 A 项目 8 万
2023 年 1 月投资 C 项目 5.119586 万
2023 年 5 月投资 C 项目 5.211739 万
2023 年 9 月投资 C 项目 5.30555 万</td><td>2024 年 0.9
2024 年 1 月投资 F 项目 13.86505 万</td></tr>
<tr><td>2024 年 1.0
2024 年 1 月投资 F 项目 13.86505 万</td></tr>
<tr><td>2024 年 1.05
2024 年 1 月投资 B 项目 13.86505 万</td></tr>
<tr><td rowspan="3">2023 年 1.05
2023 年 1 月投资 C 项目 13.11959 万
2023 年 5 月投资 C 项目 13.35574 万
2023 年 9 月投资 C 项目 13.59614 万</td><td>2024 年 0.9
2024 年 1 投资 F 项目 13.84087 万</td></tr>
<tr><td>2024 年 1.0
2024 年 1 月投资 B 项目 13.84087 万</td></tr>
<tr><td>2024 年 1.05
2024 年 1 月投资 B 项目 13.84087 万</td></tr>
</table>

5. 模型的误差分析

5.1 在问题 3 中最优方案的讨论

为了判断最优方案，本文对每一种可能的 m_1，m_2，m_3 进行了预测。本文运用的方法是计算每种情况下的三年后收回资金的数学期望，并将该期望最大作为目标函数。此时，最优的判断标准并未考虑收回资金的离散情况（即实际的收回资金可能偏移期望的程度），这样可能会造成模型的误差。

5.2 舍入误差

在进行模型的计算机求解时，会出现无限小数，而计算机只能进行有限位的存储。matlab 默认的变量类型是 double。求解时会产生小数的舍入，使数据不够精确。这样可能会造成模型的误差。

6. 模型的评价和推广

6.1 模型的评价

6.1.1 模型的优点

(1)建立了 3 个具体实用的模型，运用了合理简便的符号表述，简化论文思路的表述，同时便于编程时的查看，提高了代码的效率。

(2)对年化利润率进行转化，使用周期化回报率，对题目的数据进行预处理，在模型求解时直接调用，简便计算。

(3)模型精确建立，不存在被忽略的次要因素，实验结果的误差仅存在于计算机进行计算时的舍入误差，没有系统误差。

6.1.2 模型的缺点

(1)未建立广泛适用的基础模型，未对部分常量(例如：投资金额限制的上下限)进行符号处理。当这些条件改变时，模型的适用性有一定的局限。

(2)问题 3 中求解最优方案时只考虑其数学期望的数字特征，并未涉及投资金额的离散程度的度量，关于最优的定义存在一些局限性。

6.2 模型的推广

本文建立了各种各种约束条件下以收回资金最大为目标的优化模型以及用于多阶段决

策的修改方案优化模型。

在问题 1 中，建立了理想条件下，即认为风险为零时以收益最大化为目标的优化模型。这一模型不仅可以用于公司投资的情境，还可以适用于其他各种经济、社会领域的投资中投资对象有一定增长率时投资计划的设计，个人理财时选择储蓄方案等。

问题 2 中，建立了在控制风险在一定范围内的同时追求收益最大化的优化模型。这一模型可以推广至其他需要考虑风险的投资情境。由于现实生活中此类投资情境十分多样且常见，因此此模型有广阔的应用空间。

问题 3 中，建立了项目的年化收益率会随时间的推移浮动时，以收回资金最大为目标的优化模型，能给出投资者视角下的最佳投资方案以及面对投资行情变化时的应对策略。这种情况与现实更加贴近，可以为现实中投资者面对变化时如何应对提供思路。

7. 参考文献

[1] 邓庭俊. 银行存款组合最优化模型分析 [J]. 技术与市场, 2009, 16(07): 26+65.

[2] 姜启源,谢金星,叶俊.数学模型 [M].5 版.北京:高等教育出版社,2018.5.

[3] 司守奎,孙玺菁.数学建模算法与应用 [M].北京:国防工业出版社,2014.2.

[4] 杨桂元,朱家明.数学建模竞赛优秀论文评析 [M].合肥:中国科学技术大学出版社,2013.9.

[5] 卓金武,王鸿钧.MATLAB 数学建模方法与实践 [M].3 版.北京:北京航空航天大学出版社,2018.6.

附录

malab 求解本文中问题 1、问题 2 的源代码

```
%主函数
global AA
load('AA.mat')%AA 是 matlab 中 intlinprog 函数标准形式的约束条件矩阵，通过模型做一定处理转换而来
%%
%问题（1）
%c=[0.058.*ones(4,1);0.013.*ones(9,1);0.018.*ones(16,1);0.00725.*ones(34,1);0.010875.*ones(33,1);zeros(87,1)
];%不考虑 2021 年和 2024 年不足一个月的投资
c=[0.058.*ones(4,1);0.013.*ones(9,1);0.018.*ones(16,1);0.007975;0.00725.*ones(32,1);0.01015;0.0116;0.01087
5.*ones(31,1);0.013775;zeros(87,1)];
b=[12.*ones(34,1);zeros(174,1)];
lb=zeros(183,1);
ub=[8;8;8;8;inf.*ones(92,1);ones(87,1)];
intcon=97:183;
[x,y]=intlinprog(-c,intcon,AA,b,[],[],lb,ub);

%%
%问题(2)，在(1)的基础上增加约束条件
%模型 1  加权平均
risk_coef=2.2;
AA1=[AA;(3-risk_coef)*ones(1,4),(2-risk_coef)*ones(1,9+16),(1-risk_coef)*ones(1,34+33),zeros(1,87)];
c=[0.058.*ones(4,1);0.013.*ones(9,1);0.018.*ones(16,1);0.007975;0.00725.*ones(32,1);0.01015;0.0116;0.01087
5.*ones(31,1);0.013775;zeros(87,1)];
%c=[0.058.*ones(4,1);0.013.*ones(9,1);0.018.*ones(16,1);0.00725.*ones(34,1);0.010875.*ones(33,1);zeros(87,1)
];
b=[12.*ones(34,1);zeros(174,1);0];
lb=zeros(183,1);
ub=[8;8;8;8;inf.*ones(92,1);ones(87,1)];
start=zeros(183,1);
intcon=97:183;
[x1,y1]=intlinprog(-c,intcon,AA1,b,[],[],lb,ub,start);
%模型 2  带时间的加权平均
AA2=[AA;12*(3-risk_coef)*ones(1,4),3*(2-risk_coef)*ones(1,9),4*(2-risk_coef)*ones(1,16),2.2*(1-risk_coef),2*(1-
risk_coef)*ones(1,32),2.8*(1-risk_coef),3.2*(1-risk_coef),3*(1-risk_coef)*ones(1,31),3.8*(1-
risk_coef),zeros(1,87)];
[x2,y2]=intlinprog(-c,intcon,AA2,b,[],[],lb,ub);


%%
%问题(3)
%制定最优的投资方案
AA3=AA;
```

```
c=zeros(183,1);
b=[12.*ones(34,1);zeros(174,1);12.*ones(34*27,1)];
lb=zeros(183,1);
ub=[8;8;8;8;inf.*ones(92,1);ones(87,1)];
start=zeros(183,1);
intcon=97:183;
gain_A=[0.9 1 1.05];
for i=gain_A
    for j=gain_A
        for k=gain_A
            AA_increase=cal_Constraint_matrix(AA(1:34,:),i,j,k);
            AA3=[AA3;AA_increase];
            c_temp=cal_Coefficient_vector(AA_increase,i,j,k);
            c=c+p(i,j,k,0)*c_temp;
        end
    end
end
c0=c;
[x3,y3]=intlinprog(-c,intcon,AA3,b,[],[],lb,ub);

%制定应对行情变化的对策
lb=zeros(183,1);
ub=[8;8;8;8;inf.*ones(92,1);ones(87,1)];
intcon=97:183;
gain_A=[0.9 1 1.05];
n=1;

%2022 年初的决策
b=[12.*ones(34,1);zeros(174,1);12.*ones(34*9,1)];
Aeq=[[1,zeros(1,182)];
    [zeros(1,4),1,zeros(1,178)];
    [zeros(1,5),1,zeros(1,177)];
    [zeros(4,13),eye(4),zeros(4,166)];
    [zeros(8,29),eye(8),zeros(8,146)];
    [zeros(8,63),eye(8),zeros(8,112)];
    ];
beq=x3([1,5,6,14:17,30:37,64:71],1);%约束条件增加了，已经确定了 2021 年各项目投资的数额，所以增加了等式约束
plan_2022=zeros(103,3);
for i=gain_A
    AA4=AA;
    c=zeros(183,1);
    for j=gain_A
        for k=gain_A
```

```
                AA_increase=cal_Constraint_matrix(AA(1:34,:),i,j,k);
                AA4=[AA4;AA_increase];
                c_temp=cal_Coefficient_vector(AA_increase,i,j,k);
                c=c+p(i,j,k,1)*c_temp;
            end
        end
        [x4,y4]=intlinprog(-c,intcon,AA4,b,Aeq,beq,lb,ub);
       plan_2022=result_store(plan_2022,n,i,j,k,x4,y4);
       n=n+1;
end

%2023 年初的决策
b=[12.*ones(34,1);zeros(174,1);12.*ones(34*3,1)];
n=1;
plan_2023=zeros(103,9);
for i=gain_A
    for j=gain_A
        AA5=AA;
        c=zeros(183,1);
        for k=gain_A
            AA_increase=cal_Constraint_matrix(AA(1:34,:),i,j,k);
            AA5=[AA5;AA_increase];
            c_temp=cal_Coefficient_vector(AA_increase,i,j,k);
            c=c+p(i,j,k,2)*c_temp;
        end
    Aeq1=[Aeq;
    [zeros(2,1),eye(2),zeros(2,180)];
    [zeros(3,6),eye(3),zeros(3,174)];
    [zeros(6,17),eye(6),zeros(6,160)];
    [zeros(12,37),eye(12),zeros(12,134)];
    [zeros(12,71),eye(12),zeros(12,100)];
    ];
    x4=plan_2022(5:100,find(plan_2022(1,:)==i));
    beq1=x4([1,5,6,14:17,30:37,64:71,2,3,7:9,18:23,38:49,72:83],1);%约束条件增加了，已经确定了 2021/22 年
各项目投资的数额，所以增加了等式约束
    [x5,y5]=intlinprog(-c,intcon,AA5,b,Aeq1,beq1,lb,ub);
    plan_2023=result_store(plan_2023,n,i,j,k,x5,y5);
    n=n+1;
    end
end

%2024 年初的决策
b=[12.*ones(34,1);zeros(174,1);12.*ones(34*3,1)];
n=1;
```

```
plan_2024=zeros(103,27);
for i=gain_A
    for j=gain_A
        for k=gain_A
            AA6=AA;
            AA_increase=cal_Constraint_matrix(AA(1:34,:),i,j,k);
            AA6=[AA6;AA_increase];
            c=cal_Coefficient_vector(AA_increase,i,j,k);
            Aeq2=[Aeq1;
            [zeros(1,3),1,zeros(1,179)];
            [zeros(3,9),eye(3),zeros(3,171)];
            [zeros(6,23),eye(6),zeros(6,154)];
            [zeros(12,49),eye(12),zeros(12,122)];
            [zeros(12,83),eye(12),zeros(12,88)];
            ];
            x4=plan_2023(5:100,find(plan_2023(1,:)==i&plan_2023(2,:)==j));
            beq2=x4([1,5,6,14:17,30:37,64:71,2,3,7:9,18:23,38:49,72:83,4,10:12,24:29,50:61,84:95],1);% 约束条件增加了，已经确定了 2021/22 年各项目投资的数额，所以增加了等式约束
            [x5,y5]=intlinprog(-c,intcon,AA5,b,Aeq2,beq2,lb,ub);
            plan_2024=result_store(plan_2024,n,i,j,k,x5,y5);
            n=n+1;
        end
    end
end

%函数
function outputMatrix = cal_Constraint_matrix(AA,gain_A_21to22,gain_A_22to23,gain_A_23to24)
%    计算 3 年内发生的 27 种情况下的约束矩阵
%    由于前一年和后一年的各项目回报率不同，故产生了 27 种线性规划，通过不同年份不同的组合的 A 的增益倍数，可以计算出 27 次线性规划中的约束矩阵

outputMatrix=AA;

outputMatrix(14:34,1)=AA(14:34,1)/12*7+gain_A_21to22*AA(14:34,1)/12*5;
outputMatrix(21:34,2)=gain_A_21to22*AA(21:34,1);
outputMatrix(26:34,3)=gain_A_21to22*AA(26:34,3)/12*7+gain_A_21to22*gain_A_22to23*AA(26:34,3)/12*5;
outputMatrix(33:34,4)=gain_A_21to22*gain_A_22to23*AA(33:34,1);

outputMatrix(4:34,5)=AA(4:34,5);
outputMatrix(8:34,6)=AA(8:34,6);
outputMatrix(12:34,7)=fA_B(gain_A_21to22)*AA(12:34,7);
outputMatrix(16:34,8)=fA_B(gain_A_21to22)*AA(16:34,8);
outputMatrix(20:34,9)=fA_B(gain_A_21to22)*AA(20:34,9);
outputMatrix(24:34,10)=fA_B(gain_A_21to22)*fA_B(gain_A_22to23)*AA(24:34,10);
```

```
outputMatrix(28:34,11)=fA_B(gain_A_21to22)*fA_B(gain_A_22to23)*AA(28:34,11);
outputMatrix(32:34,12)=fA_B(gain_A_21to22)*fA_B(gain_A_22to23)*AA(32:34,12);
outputMatrix(:,13)=AA(:,13);

outputMatrix(5:34,14)=AA(5:34,14);
outputMatrix(7:34,15)=AA(7:34,15);
outputMatrix(9:34,16)=AA(9:34,16);
outputMatrix(11:34,17)=fA_C(gain_A_21to22)*AA(11:34,17);
outputMatrix(13:34,18)=fA_C(gain_A_21to22)*AA(13:34,18);
outputMatrix(15:34,19)=fA_C(gain_A_21to22)*AA(15:34,19);
outputMatrix(17:34,20)=fA_C(gain_A_21to22)*AA(17:34,20);
outputMatrix(19:34,21)=fA_C(gain_A_21to22)*AA(19:34,21);
outputMatrix(21:34,22)=fA_C(gain_A_21to22)*AA(21:34,22);
outputMatrix(23:34,23)=fA_C(gain_A_21to22)*fA_C(gain_A_22to23)*AA(23:34,23);
outputMatrix(25:34,24)=fA_C(gain_A_21to22)*fA_C(gain_A_22to23)*AA(25:34,24);
outputMatrix(27:34,25)=fA_C(gain_A_21to22)*fA_C(gain_A_22to23)*AA(27:34,25);
outputMatrix(29:34,26)=fA_C(gain_A_21to22)*fA_C(gain_A_22to23)*AA(29:34,26);
outputMatrix(31:34,27)=fA_C(gain_A_21to22)*fA_C(gain_A_22to23)*AA(31:34,27);
outputMatrix(33:34,28)=fA_C(gain_A_21to22)*fA_C(gain_A_22to23)*AA(33:34,28);
outputMatrix(:,29)=AA(:,29);
end

function outputc = cal_Coefficient_vector(AA,gain_A_21to22,gain_A_22to23,gain_A_23to24)
%用于计算在系数向量在 A 项目年化回报率增益倍数(记作 gain_A)变化时得到的新的目标函数系数向量

    outputc=[-AA(34,1:4)';...
        -AA(34,5:12)';...
        fA_B(gain_A_21to22)*fA_B(gain_A_22to23)*fA_B(gain_A_23to24)*0.013;...
        -AA(34,14:28)';...

0.009*fA_C(gain_A_21to22)*fA_C(gain_A_22to23)+0.009*fA_C(gain_A_21to22)*fA_C(gain_A_22to23)*fA_B(gai
n_A_23to24);...
        0.007975;0.00725.*ones(32,1);0.01015;0.0116;0.010875.*ones(31,1);0.013775;zeros(87,1)];
end

function gain_B = fA_B(gain_A)
%   注意，调整系数是今年的年化回报率/上一年的年化回报率
%   输入：A 的调整系数
%   输出：B 的调整系数
if gain_A==0.9
gain_B = 0.95;
elseif gain_A==1
gain_B = 1;
elseif gain_A==1
```

```
gain_B = 1.05;
end
end

function gain_C = fA_C(gain_A)
%	注意，调整系数是今年的年化回报率/上一年的年化回报率
%	输入：A 的调整系数
%	输出：C 的调整系数
if gain_A==0.9
gain_C = 0.85;
elseif gain_A==1
gain_C = 95;
elseif gain_A==1.05
gain_C = 1.15;
end
end

function avgrisk = risk1(x)
%计算投资额为权重的风险均值 1
%
avgrisk=[3*ones(1,4),2*ones(1,25),1*ones(1,67)]*x(1:96)/sum(x(1:96));
end

function avgrisk = risk2(x)
%计算投资额为权重的风险均值 2
%	含时间，减少流动性影响
avgrisk=[3*12*ones(1,4),2*3*ones(1,9),2*4*ones(1,16),1*2.2,1*2*ones(1,32),1*2.2,1*3.2,1*3*ones(1,31),1*3.8
]*x(1:96)/([12*ones(1,4),3*ones(1,9),4*ones(1,16),2.2,2*ones(1,32),2.8,3.2,3*ones(1,31),3.8]*x(1:96));
end

function probablity = p(i,j,k,n)
%计算 gain_A 三年不同变化情况的概率
%	gain_A_21to22 为 i，gain_A_21to22 为 j，gain_A_21to22 为 k
%	i/j/k=0.9,1,1.05 时概率为 0.7,0.2,0.1
%	转移函数为二次多项式[20 -43 23.2]
%	n 表示已经确定的 gain_A 的个数
if nargin==3
    probablity=0;
else
if n==0
        probablity=polyval([20 -43 23.2],i)*polyval([20 -43 23.2],j)*polyval([20 -43 23.2],k);
end
if n==1
        probablity=polyval([20 -43 23.2],j)*polyval([20 -43 23.2],k);
```

```
end
if n==2
        probablity=polyval([20 -43 23.2],k);
end
if n==3
        probablity=1;
end
end
end

function output = result_store(result,n,i,j,k,x3,y3)
%提取计算结果
%    一个表格，展示 n 个情况下的不同方案
%    第 1-3 行，ijk(gain_A 的在 21-22,22-23,23-24 的不同取值)
%    第 4 行，p(ijk),表示取到该组 ijk 的可能性
%    第 5-100 行，存储该 ijk 下各种投资项目的投资金额（投资方案）
%    第 101 行，存储该 ijk 下最大收回资金值
%    第 102 行，存储项目风险均值 1
%    第 103 行，存储项目风险均值 2
    output=result;
    output(1,n)=i;
    output(2,n)=j;
    output(3,n)=k;
    output(4,n)=p(i,j,k);
    output(5:100,n)=x3(1:96);
    output(101,n)=12-y3;
    output(102,n)=risk1(x3(1:96));
    output(103,n)=risk2(x3(1:96));
end
```