UNIVERZA V LJUBLJANI
FAKULTETA ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

Matematika – 1. stopnja

Tjaša Bajc

Geometrijska interpolacija štirih točk s parabolično krivuljo

Delo diplomskega seminarja

Mentorica: izr. prof. dr. Marjetka Knez

Ljubljana, 2018

Kazalo

Geometrijska interpolacija štirih točk s parabolično krivuljo

Povzetek

Angleški prevod slovenskega naslova dela

Abstract

Math. Subj. Class. (2010):
Ključne besede:
Keywords:

1. Uvod

Imamo štiri točke v ravnini. Zanima nas, kdaj lahko skoznje potegnemo parabolično krivuljo, to je parametrično polinomsko krivuljo stopnje dve, oziroma koliko je takih krivulj. Na primer, če so točke kolinearne, take prave paraboične krivulje očitno ne bomo našli. Kaj pa v ostalih primerih? Izkaže se, da je dovolj opazovati štirikotnik, katerega oglišča so dane točke. Pokazali bomo, da oglišča konveksnega štirikotnika, ki ni trapez, lahko interpoliramo z natanko dvema paraboličnima krivuljama, oglišča trapeza, ki ni paralelogram, pa z natanko eno parabolično krivuljo. V preostalih primerih štirih točk ne moremo interpolirati s parabolično krivuljo.

Poleg geometrijskega pristopa, ki smo ga na kratko povzeli zgoraj, se interpolacije lahko lotimo tudi z Lagrangeevimi baznimi polinomi. Vemo, da lahko štiri točke vedno interpoliramo s kubično krivuljo. Definirali bomo Lagrangeeve polinome stopnje tri in določili pogoje za proste parametre tako, da bo vodilni koeficient interpolacijskega polinoma enak 0. Tako bomo dobili interpolacijsko polinomsko krivuljo stopnje dve, torej parabolično krivuljo.

V nadaljevanju si bomo ogledali še Hermitov problem. Namesto štirih točk bomo opazovali le dve, v katerih pa bomo poleg vrednosti predpisali tudi smer tangentnega vektorja. Poiskali bomo interpolacijsko krivuljo, ki bo zadoščala danim pogojem. Hermitov problem lahko posplošimo na več točk in opazujemo zlepke, ki jih dobimo z interpolacijo posameznih parov točk. Zlepek, ki ga dobimo na tak način, je geometrijsko zvezna krivulja, ki interpolira dane točke.

Nazadnje bomo obravnavali aproksimacijo parametrično podanih krivulj s paraboličnimi krivuljami. Definirali bomo razdaljo med parametričnima krivuljama in opazovali konvergenco. Neformalno, opazovali bomo, kako hitro se parabolična krivulja približuje dani parametrični krivulji, ko aproksimiramo vedno manjši delček krivulje. Tabelirali bomo nekaj vrednosti in iz njih približno izračunali red konvergence. Izkaže se, da je v primeru aproksimacije s paraboličnimi krivuljami, red konvergence enak štiri, česar pa formalno ne bomo dokazali.

2. Geometrijska interpolacija

V prvem razdelku se bomo interpolacijskega problema lotili geometrijsko. Za dane štiri točke v ravnini bomo iskali parabolično krivuljo, ki jih interpolira. Definirali bomo parabolično krivuljo kot množico točk v ravnini preko afinih matrik, opisali bomo kvadratično parametrizacijo parabolične krivulje in jo konkretno izračunali. Uvedli bomo baricentrične koordinate, navedli nekaj lastnosti in na koncu dokazali izrek, ki povezuje obstoj interpolacijske krivulje z obliko štirikotnika, katerega oglišča so dane točke. Konkretneje, dokazali bomo, da oglišč paralelograma ali konkavnega lika ne moremo interpolirati s parabolično krivuljo, oglišča trapeza lahko interpoliramo z natanko eno parabolično krivuljo, oglišča konveksnega štrirkotnika, ki ni trapez, pa z dvema takima krivuljama. Razdelek bomo zaključili s primerom konkretne interpolacijske naloge.

Za začetek definirajmo nekaj pojmov, ki jih bomo potrebovali v nadaljevanju.

Definicija 2.1. Naj bo A' nesingularna 2×2 realna matrika, d, e realni števili ter

$$A = \begin{bmatrix} \multicolumn{2}{c}{\multirow{2}{*}{A'}} & 0 \\ & & 0 \\ d & e & 1 \end{bmatrix}.$$

Matriko A imenujemo *afina matrika*.

Preko afinih matrik vpeljemo ekvivalenčno relacijo na množici realnih simetričnih 3×3 matrik.

Definicija 2.2. Matriki B in C sta *afino podobni*, če obstaja afina matrika A, da velja $B = ACA^T$. Da sta matriki afino podobni, označimo z $B \approx C$.

Definicija 2.3. Definirajmo matriko

$$D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Definirajmo še podmnožico realnih simetričnih 3×3 matrik

$$\mathbb{P} = \{B; B \approx dD, d \neq 0\}.$$

Parabolična krivulja je množica točk v ravnini

$$C_B = \{(x,y); (x,y,1)B(x,y,1)^T = 0, B \in \mathbb{P}\}. \tag{1}$$

Če je matrika B enaka D, je množica C_B kar $C_B = \{(x,y); x = y^2\}$.

Zgled 2.4. (bom pripravila zgled:
matriko B in sliko parabole, ki jo podaja C_B)

$\diamondsuit$

Parabolično krivuljo lahko podamo v implicitni obliki kot v (1) ali pa v parametrični obliki. Definirajmo kvadratično parametrizacijo parabolične krivulje, podane s C_B.

Definicija 2.5. Naj bodo $p(t)$, $q(t)$ in $r(t) \equiv 1$ linearno neodvisni polinomi stopnje največ dve. Če za nek B iz množice $\mathbb{P}$ velja

$$C_B = \{(x,y); (x,y,1)B(x,y,1)^T = 0\} = \{(p(t), q(t)); t \in \mathbb{R}\},$$

pravimo, da je $(p(t), q(t), 1)$ *kvadratična parametrizacija* parabolične krivulje C_B.

Poglejmo, kako bi parametrično krivuljo zapisali v standardni bazi $t^2, t, 1$. Najprej bomo definirali matriko koeficientov, ki povezuje kvadratično parametrizacijo in zapis v standardni bazi, nato pa bomo pokazali, da lahko vsako parabolično krivuljo zapišemo v kvadratični parametrizaciji.

Definicija 2.6. Naj bodo $p(t)$, $q(t)$ in $r(t) \equiv 1$ linearno neodvisni polinomi stopnje največ dve. *Matrika koeficientov* K je taka matrika, da velja $(p(t), q(t), 1) = (t^2, t, 1)K$.

Trditev 2.7. *Naj bodo $p(t)$, $q(t)$ in $r(t) \equiv 1$ linearno neodvisni polinomi stopnje največ dve, K matrika koeficientov in $B \in \mathbb{P}$. Tedaj velja*

- *K je afina matrika,*
- *$(p(t), q(t), 1)$ je kvadratična parametrizacija za C_B natanko tedaj, ko velja $KBK^T = dD$ za neki neničelni d.*

Dokaz. Matrika K je nesingularna, ker so $p(t), q(t)$ in 1 linearno neodvisni. Zadnja komponenta vektorja $(p(t), q(t), 1)$ je 1, torej mora biti zadnji stolpec matrike K enak

$(0,0,1)^T$. Sledi, da je matrika K afina. Za dokaz druge točke trditve se spomnimo definicije kvadratične parametrizacije. Velja:

$$\begin{aligned}0 &= (p(t),q(t),1)B(p(t),q(t),1)^T \\ &= (t^2,t,1)KBK^T(t^2,t,1)^T \\ &= (t^2,t,1)\begin{bmatrix} a & b & d \\ b & c & e \\ d & e & f \end{bmatrix}(t^2,t,1)^T \\ &= at^4 + 2bt^3 + (c+2d)t^2 + 2et + f.\end{aligned}$$

Zgornja enakost velja natanko tedaj, ko je $a = b = e = f = 0$ in $c = -2d$. Tedaj je matrika KBK^T oblike

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & d \\ 0 & -2d & 0 \\ d & 0 & 0 \end{bmatrix} = dD.$$

□

Zgornja trditev ima dve koristni posledici. Najprej bomo dokazali, da lahko vsako parabolično krivuljo parametriziramo s kvadratično parametrizacijo, kasneje pa še, da različni matriki iz množice $\mathbb{P}$ ne porodita nujno različnih paraboličnih krivulj.

Posledica 2.8. *Vsaka parabolična krivulja ima kvadratično parametrizacijo.*

Dokaz. Res, saj smo parabolično krivuljo definirali kot

$$C_B = \{(x,y); (x,y,1)B(x,y,1)^T = 0, B \in \mathbb{P}\}.$$

Matrika B je iz množice $\mathbb{P}$, ki je definirana kot množica matrik, ki so afino podobne D. Matriko B torej gotovo lahko zapišemo kot ABA^T za neko afino matriko A. Po zgornji trditvi ima parabolična krivulja C_B kvadratično parametrizacijo. Matrika koeficientov iz definicije 2.6 je tedaj matrika A. □

Posledica 2.9. *Naj bosta matriki B in $\widetilde{B}$ elementa množice $\mathbb{P}$. Enakost $C_B = C_{\widetilde{B}}$ velja natanko tedaj, ko velja $B = d\widetilde{B}$, $d \neq 0$.*

Dokaz. Upoštevamo definicijo parabolične krivulje in hitro vidimo:

$$\begin{aligned}C_B &= \{(x,y); (x,y,1)B(x,y,1)^T = 0\} \\ &= \{(x,y); (x,y,1)d\widetilde{B}(x,y,1)^T = 0\} \\ &= \{(x,y); (x,y,1)\widetilde{B}(x,y,1)^T = 0\} \\ &= C_{\widetilde{B}}.\end{aligned}$$

□

Interpolacije štirih točk s parabolično krivuljo se bomo lotili na naslednji način. Najprej bomo obravnavali tri točke in jih interpolirali. Izkazalo se bo, da v tem primeru dobimo družino parametrično podanih paraboličnih krivulj, torej, da interpolacijska krivulja še ni enolično določena. Nato bomo med krivuljami iz te družine poiskali tisto krivuljo, ki bo potekala tudi skozi četrto točko, seveda, če bo taka krivulja obstajala. Zato se najprej vprašajm, ali lahko vsako trojico različnih točk interpoliramo s parabolično krivuljo. Ne, hiter razmislek ali enostavna skica pokaže, da kolinearnih točk ne moremo interpolirati s parabolično krivuljo. Oglejmo si dokaz te trditve.

Trditev 2.10. *Različnih kolinearnih točk T_0, T_1, T_2 ne moremo interpolirati s parabolično krivuljo.*

Dokaz. Vsako parabolično krivuljo lahko parametriziramo s $(t^2, t, 1)K$ za neko afino matriko K. Izberimo tri različne vrednosti parametra t, iz katerih dobimo tri linearno neodvisne trojice $(t^2, t, 1)$. Ko vsako od teh trojic pomnožimo z matriko K, dobimo tri točke na paraboli, ki so gotovo nekolinearne, ker je K afina matrika. Pokazali smo, da ne za nobene tri vrednosti parametra t ne dobimo kolinearnih točk, torej ne moremo najti parabolične krivulje, ki bi potekala skozi kolinearne točke. $\square$

Imejmo sedaj tri nekolinearne točke v ravnini T_0, T_1, T_2. Iščemo parabolično krivuljo (p, q), ki bo pri nekih parametrih t_0, t_1, t_2 interpolirala dane točke, to je

$$T_0 = (p(t_0), q(t_0)), \qquad T_1 = (p(t_1), q(t_1)), \qquad T_2 = (p(t_2), q(t_2)).$$

Za parametre t_0, t_1, t_2 lahko zahtevamo $t_0 < t_1 < t_2$ in še dodatno $t_0 = 0$ in $t_2 = 1$. Za poljuben $t_1 \in (0, 1)$ lahko najdemo taka $p(t), q(t)$ stopnje največ dve, da bo krivulja $\{(p, q), t \in [0, 1]\}$ rešila naš interpolacijski problem. Označimo t_1 z α. Polinoma p in q lahko dobimo z reševanjem sistema enačb

$$T_0 = (p(0), q(0)), \qquad T_1 = (p(\alpha), q(\alpha)), \qquad T_2 = (p(1), q(1)). \tag{2}$$

Omenimo še, da je z izbiro α interpolacijska krivulja natanko določena, saj je zgornji sistem linearni sistem šestih enačb za šest neznank (koeficienti polinomov p in q). Problem interpolacije štirih točk smo torej prevedli na iskanje take vrednosti parametra α, da bo krivulja, ki jo določata polinoma p in q, potekala skozi dano četrto točko. Ko bomo našli takšen α, smo našli krivuljo, ki interpolira vse štiri dane točke v ravnini.

Opomba 2.11. Sistem (2) je rešljiv za katerokoli število α iz $\mathbb{R} - \{0, 1\}$, a se zaradi urejenosti parametrov $t_0 = 0$, $t_1 = \alpha$ in $t_2 = 1$ omejimo na interval $(0, 1)$. Izbira $\alpha = 0$ ali $\alpha = 1$ očitno nima smisla, saj bi glede na sistem (2) to pomenilo, da mora krivulja (p, q) pri neki vrednosti parametra t potekati skozi dve različni točki, kar je nemogoče.

Opazimo lahko, da dobimo pri drugačni vrednosti α drugo interpolacijsko krivujo. Dokler vrednosti parametra α ne fiksiramo, imamo torej družino paraboličnih krivulj, ki so sicer različnih oblik, a vse potekajo skozi točke T_0, T_1 in T_2. Povejmo to še formalno.

Definicija 2.12. Za nekolinearne točke T_0, T_1, T_2 naj bo $\mathbb{B}(T_0, T_1, T_2)$ množica vseh paraboličnih krivulj, ki potekajo skozi dane točke.

Naslednja trditev pokaže, da obstaja bijekcija med zgoraj definirano množico $\mathbb{B}(T_0, T_1, T_2)$ in množico $\mathbb{R} - \{0, 1\}$, torej, da za drug α dobimo drugačno parabolo, kot smo neformalno napisali že v opombi zgoraj.

Trditev 2.13. *Za nekolinearne točke (T_0, T_1, T_2) je preslikava, ki α priredi matriko B_α, bijekcija med $\mathbb{R} - \{0, 1\}$ in množico $\mathbb{B}(T_0, T_1, T_2)$.*

Dokaz. Iz trditve 2.15 sledi, da za vsak $\alpha \in \mathbb{R} - \{0, 1\}$ parametrizacija $\Phi_\alpha(t)$ parametrizira neko parabolo C_B iz množice $\mathbb{B}(T_0, T_1, T_2)$. Obratno, zaradi posledice 2.8 velja, da za vsako parabolo iz $\mathbb{B}(T_0, T_1, T_2)$ obstaja kvadratična parametrizacija, označimo jo s $\Psi(t)$. Če za parametrizacijo $\Psi(t)$ velja, da je $\Psi(t_i) = (T_i, 1)$, postavimo $\alpha = \frac{t_1 - t_0}{t_2 - t_0}$. Opazimo, da velja $\Phi_\alpha(t) = \Psi(t_0 + (t_2 - t_0)t)$, torej tudi Φ_α

parametrizira parabolo C_B. Sledi, da je C_B element množice $\mathbb{B}(T_0, T_1, T_2)$ natanko tedaj, ko jo lahko parametriziramo s Φ_α za nek $\alpha \in \mathbb{R} - \{0, 1\}$. $\square$

Pokazali bomo, da lahko kvadratično parametrizacijo $(p(t), q(t), 1)$ dobimo tudi drugače kot z dejanskim reševanjem sistema (2). Pred tem definirajmo še Vandermondovo matriko za naš primer, torej za parametre $t_0 = 0, t_1 = \alpha$ in $t_2 = 1$, in konfiguracijsko matriko za dane točke.

Definicija 2.14. Za realno število α definiramo *Vandermondovo matriko* $V(\alpha)$,

$$V(\alpha) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \alpha^2 & \alpha & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Za točke v ravnini T_0, T_1, T_2 definiramo *konfiguracijsko matriko*

$$R(T_0, T_1, T_2) = \begin{bmatrix} T_0 & 1 \\ T_1 & 1 \\ T_2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Trditev 2.15. *Naj bodo T_0, T_1, T_2 nekolinearne točke. Enolična kvadratična parametrizacija $\Phi_\alpha(t; T_0, T_1, T_2)$ krivulje, ki zadošča sistemu (2), je podana z naslednjim predpisom:*

$$\Phi_\alpha(t; T_0, T_1, T_2) = (t^2, t, 1)V(\alpha)^{-1}R(T_0, T_1, T_2).$$

Opomba 2.16. Inverz Vandermondove matrike v eksplicitni obliki je

$$V(\alpha)^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\alpha} & \frac{1}{\alpha^2-\alpha} & \frac{1}{1-\alpha} \\ -\frac{\alpha+1}{\alpha} & \frac{1}{\alpha-\alpha^2} & \frac{\alpha}{\alpha-1} \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Dokaz. Označimo najprej $T_0 = (x_0, y_0), T_1 = (x_1, y_1), T_2 = (x_2, y_2)$. Računamo:

$$\begin{aligned} \Phi_\alpha(t; T_0, T_1, T_2) &= (t^2, t, 1)V(\alpha)^{-1}R(T_0, T_1, T_2) \\ &= (t^2, t, 1) \begin{bmatrix} \frac{1}{\alpha} & \frac{1}{\alpha^2-\alpha} & \frac{1}{1-\alpha} \\ -\frac{\alpha+1}{\alpha} & \frac{1}{\alpha-\alpha^2} & \frac{\alpha}{\alpha-1} \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 & y_0 & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{\alpha^2 - \alpha} \begin{bmatrix} t^2(\alpha-1) - t(\alpha^2-1) + \alpha(\alpha-1) \\ t^2 - t \\ \alpha t(\alpha - t) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} x_0 & y_0 & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Ko rezultat uredimo, dobimo naslednje:

$$\begin{bmatrix} t^2(\frac{x_0}{\alpha} + \frac{x_1}{\alpha^2-\alpha} - \frac{x_2}{\alpha-1}) + t(-\frac{x_0(\alpha+1)}{\alpha} - \frac{x_1}{\alpha^2-\alpha} + \frac{x_2\alpha}{\alpha-1}) + x_0 \\ t^2(\frac{y_0}{\alpha} + \frac{y_1}{\alpha^2-\alpha} - \frac{y_2}{\alpha-1}) + t(-\frac{y_0(\alpha+1)}{\alpha} - \frac{y_1}{\alpha^2-\alpha} + \frac{y_2\alpha}{\alpha-1}) + y_0 \\ 1 \end{bmatrix}^T = (p(t), q(t), 1).$$

Preverimo, da polinom p ustreza trditvi, torej da interpolira prve koordinate točk T_0, T_1, T_2. Res:

$$
\begin{aligned}
p(0) &= x_0, \\
p(\alpha) &= x_0\alpha + \frac{x_1\alpha}{\alpha-1} - \frac{x_2\alpha^2}{\alpha-1} - x_0(\alpha+1) - \frac{x_1}{\alpha-1} + \frac{x_2\alpha^2}{\alpha-1} + x_0 = x_1, \\
p(1) &= \frac{x_0}{\alpha} + \frac{x_1}{\alpha^2-\alpha} - \frac{x_2}{\alpha-1} - \frac{x_0(\alpha+1)}{\alpha} - \frac{x_1}{\alpha^2-\alpha} + \frac{x_2\alpha}{\alpha-1} + x_0 = x_2.
\end{aligned}
$$

Analogno velja za polinom q, torej smo res našli kvadratično parametrizacijo interpolacijske krivulje. □

Spomnimo se definicije parabolične krivulje 2.3. V definiciji nastopi matrika B iz množice $\mathbb{P}$. Kasneje smo povedali, da ima vsaka tako definirana krivulja kvadratično parametrizacijo $(p(t), q(t), 1)$. Trditev 2.15 nam da parametrizacijo krivulje, ki poteka skozi točke T_0, T_1 in T_2. Katera pa je tista matrika B iz definicije 2.3, ki porodi to krivuljo? Očitno bo ta matrika odvisna tudi od vrednosti parametra α, zato jo bomo označili z B_α.

Definicija 2.17. Definiramo matriki

$$A_\alpha = V(\alpha)\ D\ V(\alpha)^T$$

in

$$B_\alpha = R(T_0, T_1, T_2)^{-1}\ A_\alpha\ (R(T_0, T_1, T_2)^{-1})^T.$$

Opomba 2.18. Matriko A_α enostavno izračunamo in zapišemo eksplicitno z

$$A_\alpha = \begin{bmatrix} 0 & \alpha^2 & 1 \\ \alpha^2 & 0 & (\alpha-1)^2 \\ 1 & (\alpha-1)^2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Na začetku razdelka smo napovedali izrek, ki bo povezal obliko štirikotnika z obstojem parabolične krivulje, ki interpolira njegova oglišča. Ker je pomembna oblika štirikotnika, bi želeli nekako opisati relativni položaj četrte točke glede na prve tri. Na primer, želeli bi na enostaven način preveriti, ali recimo leži četrta točka znotraj ali zunaj trikotnika, katerega oglišča so prve tri točke. Iz tega bomo lahko sklepali o konveksnosti ali konkavnosti lika. Vpeljimo torej baricentrične koordinate točke T_3 glede na točke T_0, T_1 in T_2.

Definicija 2.19. Za dane nekolinearne točke T_0, T_1, T_2 definiramo *vektor baricentričnih koordinat* $b = (b_0, b_1, b_2)$, da za neko četrto točko T_3 velja

$$
\begin{aligned}
(T_3, 1) &= \sum_{i=0}^{2} b_i(T_i, 1) \\
&= bR(T_0, T_1, T_2).
\end{aligned}
$$

Sledi $b = (T_3, 1)R(T_0, T_1, T_2)^{-1}$. Nekaj lastnosti tako definiranega vektorja p podaja spodnja trditev.

Trditev 2.20. *Za zgoraj definiran b velja $b_0 + b_1 + b_2 = 1$ in $b_i = 0$ natanko tedaj, ko točka T_3 leži na isti premici kot točki T_j in T_k, $i, j, k \in \{0, 1, 2\}, i \neq j, j \neq k, i \neq k$.*

Dokaz. Dovolj je dokazati, da velja $b_0 = 0$ in $b_2 = 1 - b_1$ natanko tedaj, ko točka T_3 leži na isti premici kot točki T_1 in T_2. Vektor b je v tem primeru enak $(0, b_1, 1 - b_1)$. Glede na definicijo baricentričnih koordinat velja

$$(T_3, 1) = (x_3, y_3, 1) = (b_1x_1 + (1 - b_2)x_2, b_1y_1 + (1 - b_2)y_2, 1).$$

Premica, ki poteka skozi točki T_1 in T_2, je podana z enačbo

$$y = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}x + \frac{x_2y_1 - x_1y_2}{x_2 - x_1}.$$

Z enostavnim računom se prepričamo, da točka T_3 leži na tej premici.

□

Označimo sedaj s $T = \{T_0, T_1, T_2, T_3\}$ nabor štirih točk v ravnini, od katerih nobene tri niso kolinearne. Take točke so oglišča konveksnega štirikotnika, če nobena točka T_i ni v konveksni lupini preostalih treh točk, torej znotraj trikotnika, katerega oglišča so preostale tri točke.

Trditev 2.21. *Točke iz T so oglišča konveksnega štirikotnika natanko tedaj, ko velja $b_0b_1b_2 < 0$, kjer so b_0, b_1, b_2 komponente vektorja b, za katerega velja $(T_3, 1) = bR(T_0, T_1, T_2)$.*

Dokaz. □

Sedaj lahko zapišemo glavni izrek prvega razdelka.

Izrek 2.22. *Naj bo $T = \{T_0, T_1, T_2, T_3\}$ nabor štirih točk v ravnini, od katerih nobene tri niso kolinearne.*

i) Če so točke iz T oglišča konkavnega štirikotnika, danih točk ne moremo interpolirati s parabolično krivuljo.
ii) Če so točke iz T oglišča paralelograma, danih točk ne moremo interpolirati s parabolično krivuljo.
iii) Če so točke iz T oglišča trapeza, ki ni paralelogram, lahko dane točke interpoliramo z natanko eno parabolično krivuljo.
iv) Če so točke iz T oglišča konveksnega štirikotnika, ki ni trapez, lahko dane točke interpoliramo z natanko dvema paraboličnima krivuljama.

Dokaz. Najprej bomo poiskali družino interpolacijskih krivulj za prve tri točke T_0, T_1 in T_2 in jo označili z $\mathbb{B}(T_0, T_1, T_2)$. Zaenkrat je parameter α še prost. Spomnimo se matrik A_α in B_α iz definicije 2.17. Četrta točke T_3 leži na neki parabolični krivulji iz množice $\mathbb{B}(T_0, T_1, T_2)$ natanko tedaj, ko obstaja tak $\alpha \in \mathbb{R} - \{0, 1\}$, da točka T_3 leži na C_{B_α}. Po definiciji 1 točka leži na parabolični krivulji natanko tedaj, ko velja

$$\begin{aligned} 0 &= (T_3, 1)B_\alpha(T_3, 1)^T \\ &= (T_3, 1)R(T_0, T_1, T_2)^{-1}\ A_\alpha\ (R(T_0, T_1, T_2)^{-1})^T(T_3, 1)^T \\ &= (b_0, b_1, b_2)A_\alpha(b_0, b_1, b_2)^T \\ &= \alpha^2b_0b_1 + (\alpha - 1)^2b_1b_2 + b_0b_2 \qquad (3) \\ &= \alpha^2b_1(b_0 + b_2) - 2\alpha b_1b_2 + b_2(b_0 + b_1). \qquad (4) \end{aligned}$$

Dobili smo kvadratno enačbo za α, katere diskriminanta je

$$\begin{aligned} D &= 4b_1^2b_2^2 - 4b_1b_2(b_0+b_2)(b_0+b_1) \\ &= 4b_1b_2(b_1b_2 - (1-b_1)(1-b_2)) \\ &= 4b_1b_2(b_1b_2 - 1 + b_1 + b_2 - b_1b_2) \\ &= -4b_0b_1b_2. \end{aligned}$$

Upoštevali smo, da velja $b_0 + b_1 + b_2 = 1$. Produkt $b_0b_1b_2$ je različen od nič, saj nobene tri točke niso kolinearne. Obravnavajmo sedaj rešitve enačbe (4) glede na to, koliko baricentričnih koordinat točke T_3 je enakih 1.

Najprej naj bosta dva od b_0, b_1, b_2 enaka 1, tretji pa -1. Preverimo vsako od možnosti. Za $b_0 = -1$ dobimo rešitev $\alpha = 0$, za $b_1 = -1$ dobimo $\alpha(1-\alpha) = 0$, torej je $\alpha = 0$ ali $\alpha = 1$, za $b_2 = -1$ pa dobimo rešitev $\alpha = 1$. V nobenem od primerov se točk torej ne da interpolirati s parabolično krivuljo. Izkaže se, da v primeru, da sta dve baricentrični koordinati enaki 1, dane štiri točke tvorijo oglišča paralelograma.

Sedaj naj bo natanko ena od baricentričnih koordinat enaka 1. Drugi dve se v tem primeru razlikujeta le za predznak. Spet poračunamo vse tri možnosti in dobimo naslednje rezultate:

- če je $b_0 = 1$, je rešitev $\alpha = \frac{b_1+1}{b_1-1} = \frac{b_2-1}{b_2+1}$,
- če je $b_1 = 1$, je rešitev $\alpha = \frac{b_0+1}{2} = \frac{1-b_2}{2}$,
- če je $b_2 = 1$, je rešitev $\alpha = \frac{2}{b_0+1} = \frac{2}{1-b_2}$.

Vidimo, da v vseh primerih dobimo natanko eno rešitev, torej natanko eno interpolacijsko krivuljo. Če je natanko ena od baricentričnih koordinat enaka 1, so dane štiri točke oglišča trapeza.

Če so vse vrednosti parametrov b_0, b_1, b_2 različne od 1, točke iz T niso oglišča trapeza. Iz posledice 2.21 sledi, da so točke iz T oglišča konveksnega štirikotnika natanko tedaj, ko je $b_0b_1b_2 < 0$, kar pomeni, da je diskriminanta enačbe (4) strogo pozitivna in obstajata dve različni rešitvi. To sta

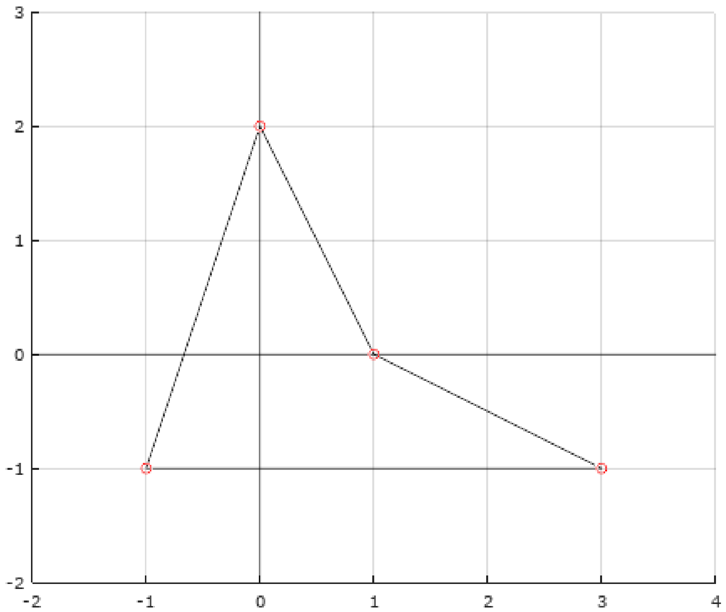
$$\alpha_{1,2} = \frac{b_1b_2 \pm \sqrt{b_0b_1b_2}}{b_1(b_0+b_2)}.$$

Tedaj lahko točke iz T interpoliramo z dvema različnima paraboličnima krivuljama.

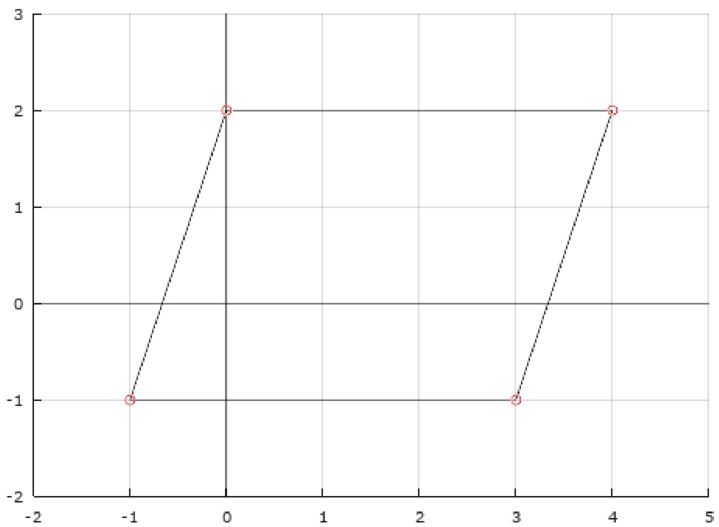
Enačba (4) nima rešitve, če je njena diskriminanta negativna. Kot zgoraj je to natanko tedaj, ko so točke iz T oglišča konkavnega štirikotnika. □

Konkreten interpolacijski problem rešimo tako, da izračunamo vektor b iz trditve 2.20, iz njegovih komponent pa izračunamo ustrezen α kot v dokazu zgoraj. Parametrizacijo krivulje – torej polinoma p in q – smo eksplicitno zapisali v dokazu trditve 2.15, za implicitno obliko parabolične krivulje C_{B_α} pa izračunamo še matriki A_α in B_α iz definicije 2.17.

Primer 2.23. Dane so točke $T_0 = (0, 2), T_1 = (-1, -1)$ in $T_2 = (3, -1)$. Tem točkam dodamo še četrto točko T_3. Iz zgornjega izreka sledi, da dobljenih štirih točk ne bo mogoče interpolirati s parabolično krivuljo v primeru, da bodo tvorile konkaven lik ali paralelogram. Na sliki 1 smo prvim trem točkam dodali točko $(1, 0)$ in tako dobili konkaven lik, na sliki 2 pa točko $(4, 2)$ in dobili paralelogram. V nobenem primeru oglišč ne moremo interpolirati s parabolično krivuljo. Na sliki 3 smo danim trem točkam dodali točko $(-1/2, -3/2)$. Skupaj s prejšnjimi točkami tvori oglišča trapeza in zato obstaja natanko ena parabolična krivulja $(p(t), q(t))$, ki jih interpolira. Na sliki je narisan del krivulje za vrednosti t med 0 in 1. Za točke

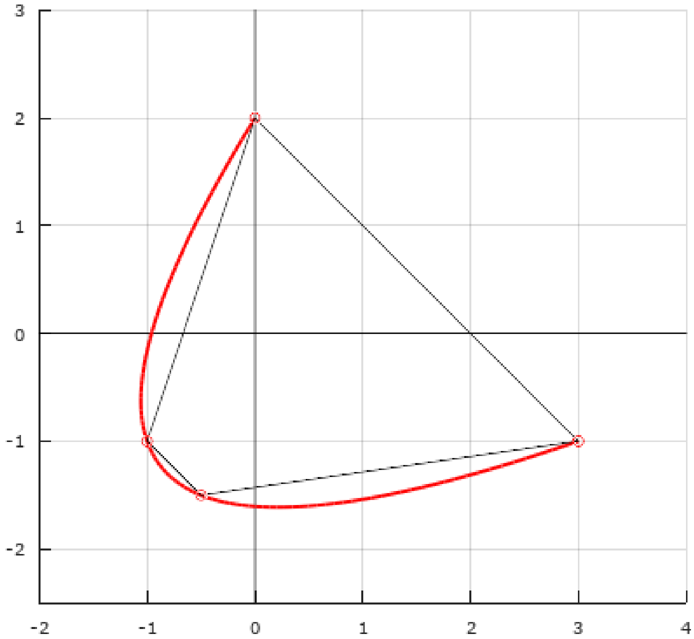


SLIKA 1. Oglišč konkavnega lika ne moremo interpolirati s parabolično krivuljo.



SLIKA 2. Tudi paralelograma ne moremo interpolirati s parabolično krivuljo.

na sliki 3 velja $(p(0), q(0)) = (0, 2) = T_0$ in $(p(1), q(1)) = (3, -1) = T_2$. Kaj pa parameter α, za katerega velja $p(\alpha), q(\alpha)) = (-1, 0) = T_1$? Izkaže se, da je za točke T_0, T_1 in T_2 vektor baricentričnih koordinat b iz trditve 2.20 enak $(-1/6, 1, 1/6)$. Iz dokaza izreka 2.22 preberemo, da je $\alpha = \frac{b_0+1}{2} = 5/12$. Zapišimo še eksplicitno



SLIKA 3. Oglišča trapeza interpolira natanko ena parabolična krivulja.

polinoma p in q s pomočjo trditve 2.15:

$$\begin{aligned}
p(t) &= t^2\left(\frac{x_0}{\alpha} + \frac{x_1}{\alpha^2-\alpha} - \frac{x_2}{\alpha-1}\right) + t\left(-\frac{x_0(\alpha+1)}{\alpha} - \frac{x_1}{\alpha^2-\alpha} + \frac{x_0\alpha}{\alpha-1}\right) + x_0 \\
&= t^2\frac{324}{35} - t\frac{219}{35}, \\
q(t) &= t^2\left(\frac{y_0}{\alpha} + \frac{y_1}{\alpha^2-\alpha} - \frac{y_2}{\alpha-1}\right) + t\left(-\frac{y_0(\alpha+1)}{\alpha} - \frac{y_1}{\alpha^2-\alpha} + \frac{y_0\alpha}{\alpha-1}\right) + y_0 \\
&= t^2\frac{36}{5} - t\frac{51}{5} + 2.
\end{aligned}$$

Parabolično krivuljo smo uvodoma definirali kot množico točk v ravnini preko matrike B_α. Oglejmo si še, kako izgleda v našem primeru ta matrika, ki jo dobimo kar iz definicije 2.17:

$$\begin{aligned}
B_{5/12} &= R(T_0,T_1,T_2)^{-1}\; A_{5/12}\; (R(T_0,T_1,T_2)^{-1})^T \\
&= \begin{bmatrix} 0 & -1/4 & 1/4 \\ 1/3 & -1/4 & -1 \\ 1/3 & 1/2 & 1/6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 25/144 & 1 \\ 25/144 & 0 & 49/144 \\ 1 & 49/144 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1/3 & 1/3 \\ -1/4 & -1/4 & 1/2 \\ 1/4 & -1 & 1/6 \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{1152}\begin{bmatrix} -49 & 63 & 112 \\ 63 & -81 & 16 \\ 112 & 16 & 260 \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Interpolacijska parabolična krivulja za oglišča trapeza $T_0 = (0,2)$, $T_1 = (-1,-1)$, $T_2 = (3,-1)$ in $T_3 = (-1/2,-3/2)$ je torej $C_{B_{5/12}} = \{(x,y); (x,y,1)B_{5/12}(x,y,1)^T = 0\}$. Njena kvadratična parametrizacija je $(p(t),q(t),1)$, kjer sta p in q zgoraj izračunana polinoma. $\diamondsuit$

3. Interpolacija z Lagrangeevimi baznimi polinomi

V tem razdelku si bomo ogledali rešitev interpolacijskega problema na bolj algebraičen način. Vemo, da lahko štiri točke interpoliramo s kubično krivuljo. Interpolacijsko krivuljo bomo zapisali z Lagrangeevimi baznimi polinomi, kar bo enostavneje, kot če bi delali v standardni bazi. Nato bomo reševali sistem enačb, ki ga dobimo, ko vodilni koeficient polinoma v Lagrangeevi bazi izenačimo z nič, s čimer znižamo stopnjo s tri na dve. Definirajmo najprej interpolacijski problem.

Za dane točke T_i v ravnini, $i = 0, 1, 2, 3$, iščemo parabolično krivuljo $\mathbf{p} : [0, 1] \to \mathbb{R}^2$, da bo veljalo

$$\mathbf{p}(t_i) = T_i, \qquad i = 0, 1, 2, 3.$$

Dodatno zahtevamo, da so parametri urejeni, torej $t_0 < t_1 < t_2 < t_3$. Brez škode za splošnost lahko postavimo $t_0 = 0$ in $t_3 = 1$.

Definirajmo Lagrangeeve bazne polinome najprej v splošnem, kasneje pa bomo konkretno zapisali tiste, ki jih bomo potrebovali pri reševanju našega problema, torej polinome stopnje tri.

Definicija 3.1. *Lagrangeeve bazne polinome* stopnje n definiramo

$$\ell_{i,n}(t) = \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{n} \frac{t - t_j}{t_i - t_j}, \qquad i = 0, 1, \ldots n.$$

Lagrangeevi bazni polinomi so vsi stopnje n. Poleg tega zanje velja

$$\ell_{i,n}(t_j) = \delta_{ij}.$$

Omenimo še, da tvorijo Lagrangeevi bazni polinomi particijo enote. Velja torej naslednje

$$\sum_{i=0}^{n} \ell_{i,n}(t) = 1.$$

Oglejmo si polinome $\ell_{0,3}(t), \ell_{1,3}(t), \ell_{2,3}(t)$ in $\ell_{3,3}(t)$, ki so baza za prostor polinomov tretje stopnje:

$$\begin{aligned}
\ell_{0,3}(t) &= \frac{(t - t_1)(t - t_2)(t - t_3)}{(t_0 - t_1)(t_0 - t_2)(t_0 - t_3)}, \\
\ell_{1,3}(t) &= \frac{(t - t_0)(t - t_2)(t - t_2)}{(t_1 - t_0)(t_1 - t_2)(t_1 - t_3)}, \\
\ell_{2,3}(t) &= \frac{(t - t_0)(t - t_1)(t - t_3)}{(t_2 - t_0)(t_2 - t_1)(t_2 - t_3)}, \\
\ell_{3,3}(t) &= \frac{(t - t_0)(t - t_1)(t - t_2)}{(t_3 - t_0)(t_3 - t_1)(t_3 - t_2)}.
\end{aligned}$$

Interpolacijsko krivuljo lahko razvijemo po Lagrangeevih baznih polinomih kot

$$p(t) = \sum_{i=0}^{3} a_i \ell_{i,n}(t), \tag{5}$$

kjer so $a_i \in \mathbb{R}$ neznani koeficienti.

Hitro lahko vidimo, kaj so koeficienti a_i pri interpolacijskem polinomu. Uvodoma smo zapisali, da naj za $\mathbf{p}$ velja, da je $\mathbf{p}(t_j) = T_j$. Ko vstavimo t_j v (5), dobimo

$$\begin{aligned}\mathbf{p}(t_j) &= \sum_{i=0}^{3} a_i \ell_{i,n}(t_j) \\ &= \sum_{i=0}^{3} a_i \delta_{ij} \\ &= a_j,\end{aligned}$$

od koder sledi, da so iskani koeficienti kar točke, ki jih interpoliramo. Interpolacijski polinom v Lagrangeevi obliki torej zapišemo kot

$$\mathbf{p}(t) = \sum_{i=0}^{3} T_i \ell_{i,n}(t).$$

Spomnimo, da so polinomi $\ell_{i,n}$ stopnje tri. Ker iščemo parabolično krivuljo, mora biti vodilni koeficient enak nič. To nam da nelinearen sistem

$$\sum_{i=0}^{3} \frac{T_i}{\prod_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{3} (t_i - t_j)} = 0 \tag{6}$$

za neznana parametra t_1 in t_2, enačbi pa dobimo iz komponent (6), saj so T_i točke v ravnini.

Za preglednejše računanje bomo sproti vpeljali nekaj novih količin. Najprej definirajmo polinom $w(t) = (t - t_0)(t - t_1)(t - t_2)(t - t_3)$. Opazimo, da je vrednost odvoda tega polinoma v t_i enaka produktu, ki v enačbi (6) nastopa v imenovalcu ulomka, saj

$$w'(t_i) = \prod_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{3} (t_i - t_j).$$

Zdaj lahko enačbo (6) zapišemo malo drugače:

$$\sum_{i=0}^{3} \frac{T_i}{w'(t_i)} = 0. \tag{7}$$

Ker so Lagrangeevi bazni polinomi particija enote, velja naslednja enakost:

$$\sum_{i=0}^{3} T_0 \ell_{i,3}(t) = T_0.$$

Zgornji polinom je enak konstanti, zato je vodilni koeficient gotovo enak nič, kar lahko zapišemo s pomočjo polinoma w takole:

$$\sum_{i=0}^{3} \frac{T_0}{w'(t_i)} = 0. \tag{8}$$

Enačbi (7) in (8) odštejemo in dobimo sistem enačb:

$$\sum_{i=0}^{3} \frac{T_i}{w'(t_i)} - \sum_{i=0}^{3} \frac{T_0}{w'(t_i)} = 0$$

$$\sum_{i=0}^{3} \frac{T_i - T_0}{w'(t_i)} = 0 \tag{9}$$

Preden nadaljujemo, vpeljimo še nekaj oznak. Vektor razlike točk T_{i+1} in T_i bomo označili z ΔT_i. Torej velja

$$\begin{aligned} T_1 - T_0 &= \Delta T_0, \\ T_2 - T_0 &= T_2 - T_1 + T_1 + T_0 = \Delta T_1 + \Delta T_0, \\ T_3 - T_0 &= T_3 - T_2 + T_2 - T_0 = \Delta T_2 + \Delta T_1 + \Delta T_0. \end{aligned}$$

Sedaj lahko razpišemo enačbo (9) s pomočjo zgornjih enakosti, kar nam da

$$\frac{\Delta T_0}{w'(t_1)} + \frac{\Delta T_0 + \Delta T_1}{w'(t_2)} + \frac{\Delta T_0 + \Delta T_1 + \Delta T_2}{w'(t_3)} = 0.$$

Enačbo uredimo tako, da združimo člene z istim vektorjem ΔT_i in dobimo

$$\Delta T_0 \underbrace{\left(\frac{1}{w'(t_1)} + \frac{1}{w'(t_2)} + \frac{1}{w'(t_3)} \right)}_{w_0} + \Delta T_1 \underbrace{\left(\frac{1}{w'(t_2)} + \frac{1}{w'(t_3)} \right)}_{w_1} + \frac{\Delta T_2}{w'(t_3)} = 0. \tag{10}$$

Zaradi jasnosti bomo vsako od vsot w_0 in w_1 sešteli posebej. Pri tem bomo upoštevali, da je $t_0 = 0$ in $t_3 = 1$. Poračunajmo prvo vsoto

$$\begin{aligned} w_0 &= \frac{1}{t_1(t_1 - t_2)(t_1 - 1)} + \frac{1}{t_2(t_2 - t_1)(t_2 - 1)} + \frac{1}{(1 - t_1)(1 - t_2)} \\ &= \frac{t_2(t_2 - 1) - t_1(t_1 - 1) + t_1 t_2 (t_1 - t_2)}{t_1 t_2 (t_1 - 1)(t_2 - 1)(t_1 - t_2)} \\ &= \frac{t_2^2 - t_2 - t_1^2 + t_1 + t_1 t_2 (t_1 - t_2)}{t_1 t_2 (t_1 - 1)(t_2 - 1)(t_1 - t_2)} \\ &= \frac{(t_2 - t_1)(t_2 + t_1) - t_2 + t_1 + t_1 t_2 (t_1 - t_2)}{t_1 t_2 (t_1 - 1)(t_2 - 1)(t_1 - t_2)} \\ &= \frac{(t_1 - t_2)(-t_2 - t_1 + 1 + t_1 t_2)}{t_1 t_2 (t_1 - 1)(t_2 - 1)(t_1 - t_2)} \\ &= \frac{(t_1 - t_2)(t_1 - 1)(t_2 - 1)}{t_1 t_2 (t_1 - 1)(t_2 - 1)(t_1 - t_2)} \\ &= \frac{1}{t_1 t_2}. \end{aligned}$$

Drugo vsoto izračunamo podobno

$$\begin{aligned}
w_1 &= \frac{1}{t_2(t_2-t_1)(t_2-1)} + \frac{1}{(1-t_1)(1-t_2)} \\
&= \frac{t_1 - 1 + t_2(t_2-t_1)}{t_2(t_1-1)(t_2-1)(t_2-t_1)} \\
&= \frac{t_1 - 1 + t_2^2 - t_1 t_2}{t_2(t_1-1)(t_2-1)(t_2-t_1)} \\
&= \frac{t_1(1-t_2) - 1 + t_2^2}{t_2(t_1-1)(t_2-1)(t_2-t_1)} \\
&= \frac{(t_2-1)(-t_1+t_2+1)}{t_2(t_1-1)(t_2-1)(t_2-t_1)} \\
&= \frac{1-t_1+t_2}{t_2(t_1-1)(t_2-t_1)}.
\end{aligned}$$

Enačbo (10) smo poenostavili v

$$\frac{1}{t_1 t_2}\Delta T_0 + \frac{1-t_1+t_2}{t_2(t_1-1)(t_2-t_1)}\Delta T_1 + \frac{1}{(1-t_1)(1-t_2)}\Delta T_2 = 0.$$

Pomnožimo zgornjo enačbo tako, da se znebimo ulomkov. Dobimo

$$(t_1-1)(t_2-1)(t_2-t_1)\Delta T_0 + t_1(t_2-1)(1-t_1+t_2)\Delta T_1 + t_1 t_2 (t_2-t_1)\Delta T_2 = 0. \tag{11}$$

Recimo, da sta vektorja ΔT_0 in ΔT_2 nekolinearna. Enačbo (11) bomo vektorsko pomnožili prvič z ΔT_0 in drugič z ΔT_2, s čimer bomo dobili dve enačbi.

Opomba 3.2. Ker računamo s točkami v ravnini, imamo pri vektorskem produktu v mislih planarni vektorski produkt. Za $A = (a_1, a_2)$ in $B = (b_1, b_2)$ je

$$A \times B = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = a_1 b_2 - a_2 b_1.$$

Označimo še $\gamma_{ij} = \Delta T_i \times \Delta T_j$. Opazimo, da je $\gamma_{ii} = \Delta T_i \times \Delta T_i = 0$. Velja tudi, da je za nekolinearna ΔT_i in ΔT_j produkt γ_{ij} neničeln. Množenje (11) z ΔT_0 nam da

$$t_1(t_2-1)(1-t_1+t_2)\gamma_{01} + t_1 t_2 (t_2-t_1)\gamma_{02} = 0, \tag{12}$$

množenje z ΔT_2 pa

$$(t_1-1)(t_2-1)(t_2-t_1)\gamma_{02} + t_1(t_2-1)(1-t_1+t_2)\gamma_{12} = 0. \tag{13}$$

Opazimo, da sta si prvi člen v (12) in drugi člen v (13) podobna, zato bomo enačbo (12) pomnožili z γ_{12} in enačbo (13) z γ_{02}, nato pa ju bomo odšteli. Dobimo naslednjo enačbo:

$$\begin{aligned}
0 &= t_1 t_2 (t_2-t_1)\gamma_{02}\gamma_{12} - (1-t_1)(1-t_2)(t_2-t_1)\gamma_{02}\gamma_{01} \\
&= (t_2-t_1)\gamma_{02}(t_1 t_2 \gamma_{12} - (1-t_1)(1-t_2)\gamma_{01}.
\end{aligned}$$

Zaradi nekolinearnosti γ_{02} ne more biti enak nič. Parametra t_1 in t_2 ne moreta biti enaka, saj mora interpolacijska krivulja interpolirati štiri različne točke. Zato sledi

$$t_1 t_2 \gamma_{12} - (1-t_1)(1-t_2)\gamma_{01} = 0.$$

Izrazimo recimo parameter t_1

$$t_1 = \frac{(1-t_2)\gamma_{01}}{t_2\gamma_{12} + (1-t_2)\gamma_{01}}$$

in ga vstavimo v (12). Dobimo naslednjo kvadratno enačbo za t_2:

$$(\gamma_{01}+\gamma_{02})(\gamma_{01}-\gamma_{12})t_2^2 - 2\gamma_{01}(\gamma_{01}+\gamma_{02})t_2 + \gamma_{01}(\gamma_{01}+\gamma_{12}+\gamma_{02}) = 0.$$

Z diskriminanto dobimo rešitvi zgornje enačbe in izražavo obeh parametrov t_2 in t_1:

$$t_2 = \frac{\gamma_{01}(\gamma_{01}+\gamma_{02}) \pm \sqrt{\gamma_{01}(\gamma_{01}+\gamma_{02})\gamma_{12}(\gamma_{02}+\gamma_{12})}}{(\gamma_{01}+\gamma_{02})(\gamma_{01}-\gamma_{12})}$$

$$t_1 = \frac{\gamma_{01}(\gamma_{01}+\gamma_{12}) \pm \sqrt{\gamma_{01}(\gamma_{01}+\gamma_{02})\gamma_{12}(\gamma_{02}+\gamma_{12})}}{(\gamma_{01}-\gamma_{12})(\gamma_{02}+\gamma_{12})}$$

Količino pod korenom označimo z G, torej $G = \gamma_{01}(\gamma_{01}+\gamma_{02})\gamma_{12}(\gamma_{02}+\gamma_{12})$. Veljati mora $G \geq 0$ in $0 < t_1 < t_2 < 1$, kot smo zahtevali na začetku razdelka. Če želimo, da bo $t_2 > t_1$, mora biti njuna razlika pozitivna. Podobno mora biti pozitivna razlika $1 - t_2$.

4. Hermitov primer

V tem razdelku bomo obravnavali problem interpolacije dveh točk s parabolično krivuljo, poleg tega pa bomo v teh dveh točkah predpisali tudi velikost in smer tangentnih vektorjev. Poiskali bomo pogoj, ki mu morata zadoščati vektorja, da bo imel interpolacijski problem rešitev. Dokazali bomo izrek, ki povezuje obstoj interpolacijske krivulje s kolinearnostjo predpisanih tangentnih vektorjev in vektorja razlike med danima točkama in s predznačenostjo planarnih vektorskih produktov teh treh vektorjev.

Za dani različni točki T_0 in T_1 v ravnini in dani smeri $\mathbf{d}_0, \mathbf{d}_1, \|\mathbf{d}_0\| = \|\mathbf{d}_1\| = 1$, želimo najti parabolično krivuljo $\mathbf{p} : [0,1] \to \mathbb{R}^2$, da bo veljalo

$$\mathbf{p}(0) = T_0, \qquad \mathbf{p}(1) = T_1,$$
$$\mathbf{p}'(0) = d_0\mathbf{d}_0, \qquad \mathbf{p}'(1) = d_1\mathbf{d}_1$$

za skalarja $d_0, d_1 > 0$. Podobno kot v prejšnjem poglavju bomo zapisali interpolacijsko krivuljo stopnje tri in določili taki d_0 in d_1 tako, da bo vodilni koeficient enak nič. Na ta način bomo dobili parabolično krivuljo. Interpolacijsko krivuljo zapišemo s pomočjo deljenih diferenc:

$$\begin{aligned}\mathbf{p}(t) &= \mathbf{p}(0) + t[0,0]\mathbf{p} + t^2[0,0,1]\mathbf{p} + t^2(t-1)[0,0,1,1]\mathbf{p} \\ &= T_0 + td_0\mathbf{d}_0 + t^2(T_1 - T_0 - d_0\mathbf{d}_0) + t^2(t-1)(d_0\mathbf{d}_0 + d_1\mathbf{d}_1 - 2(T_1-T_0)). \quad (14)\end{aligned}$$

Rešiti moramo torej enačbo

$$d_0\mathbf{d}_0 + d_1\mathbf{d}_1 - 2(T_1 - T_0) = 0. \quad (15)$$

Kot na strani 16 označimo $T_{i+1} - T_i = \Delta T_i$ in zgornjo enačbo podobno kot v prejšnjem poglavju najprej pomnožimo vektorsko z d_0 in nato še z d_1. Dobimo dve enačbi:

$$d_1\mathbf{d}_1 \times \mathbf{d}_0 = 2\Delta T_0 \times \mathbf{d}_0, \qquad d_0\mathbf{d}_0 \times \mathbf{d}_1 = 2\Delta T_0 \times \mathbf{d}_1,$$

iz katerih izrazimo d_0 in d_1

$$d_0 = \frac{2\Delta T_0 \times \mathbf{d}_1}{\mathbf{d}_0 \times \mathbf{d}_1}, \qquad d_1 = \frac{2\Delta T_0 \times \mathbf{d}_0}{\mathbf{d}_1 \times \mathbf{d}_0}.$$

Vektorji $\mathbf{d}_0, \mathbf{d}_1$ in ΔT_0 morajo biti paroma nekolinearni, da so vsi vektorski produkti zgoraj neničelni. Vidimo lahko, da bosta oba skalarja d_0, d_1 pozitivna natanko tedaj, ko bodo predznaki $\Delta T_0 \times \mathbf{d}_0$, $\mathbf{d}_1 \times \mathbf{d}_0$ in $\Delta T_0 \times \mathbf{d}_1$ enaki. V tem primeru bo obstajala rešitev interpolacijskega problema. Spomnimo se še, da velja $a \times b = -(b \times a)$.

Kaj pa, če so vektorji $\mathbf{d}_0, \mathbf{d}_1$ in ΔT_0 kolinearni? Obravnavajmo najprej primer, ko vsi trije kažejo v isto smer.

Naj bo torej $\mathbf{d}_0 = \mathbf{d}_1$ in $\Delta T_0 = \|\Delta T_0\|\mathbf{d}_0$. Tedaj enačbo (15) prepišemo v

$$(d_0 + d_1 - 2\|\Delta T_0\|)\mathbf{d}_0 = 0.$$

Vsaka izbira d_0 in d_1, ki zadoščata zgornji zvezi, nam da rešitev. Če si izberemo $d_0 = \|\Delta T_0\| = d_1$, se krivulja izrodi v premico, saj v enačbi (15) poleg kubičnega odpade tudi kvadratični člen, ker je $T_1 - T_0 - d_0\mathbf{d}_0 = \Delta T_0 - d_0\mathbf{d}_0 = (\|\Delta T_0\| - d_0)\mathbf{d}_0 = 0$.

Naj bodo $\mathbf{d}_0, \mathbf{d}_1$ in ΔT_0 še zmeraj kolinearni, a naj sedaj velja recimo $d_1 = -d_0$. Spet je $\Delta T_0 = \|\Delta T_0\|\mathbf{d}_0$. Brez škode za splošnost vzemimo kar $T_0 = (0, 0), \mathbf{d}_0 = (1, 0)$ in $\mathbf{d}_1 = (-1, 0)$. Tedaj iz enačbe (15) dobimo

$$\begin{aligned} d_0 - d_1 &= 2\|\Delta T_0\| \\ d_1 &= d_0 - 2\|\Delta T_0\|. \end{aligned}$$

Zahtevali smo, dasta skalarja d_0 in d_1 pozitivna, torej mora biti $d_0 > 2\|\Delta T_0\|$. Krivulja, ki je podana v (14) je torej taka

$$\begin{aligned} \mathbf{p}(t) &= T_0 + td_0\mathbf{d}_0 + t^2(T_1 - t_0 - d_o) + t^2(\|\Delta T_0\| - d_0)\mathbf{d}_0 \\ &= (td_0 + t^2(\|\Delta T_0\| - d_0))\mathbf{d}_0. \end{aligned}$$

Da bi bila krivulja $\mathbf{p}$ regularna, mora biti njen odvod na [0, 1] neničeln. Oglejmo si torej odvod $\mathbf{p}$:

$$(d0 + 2t(\|\Delta T_0\| - d_0)\mathbf{d}_0.$$

Vidimo, da bi bil odvod enak nič, če bi za t vzeli $\frac{-d_0}{2(\|\Delta T_0\| - d_0)}$. Ker smo zgoraj zahtevali $d_0 > 2\|\Delta T_0\|$, je tak t gotovo pozitiven. Ali je t manjši od 1? Računamo:

$$\begin{aligned} \frac{d_0}{2(d_0 - \|\Delta T_0\|)} &< 1 \\ d_0 &< 2d_0 - 2\|\Delta T_0\| \\ -d_0 &< -2\|\Delta T_0\| \\ d_0 &> 2\|\Delta T_0\|. \end{aligned}$$

Ker smo dobili ravno to, kar smo zahtvali že zgoraj, začetna neenakost drži. Tak t je večji od 0 in manjši od 1, kar pomeni, da krivulja $\mathbf{p}$na [0, 1] ni regularna.

Tudi v ostalih primerih, ko bi bili $\mathbf{d}_0, \mathbf{d}_1$ in ΔT_0 kolinearni, ne obstaja interpolacijska krivulja. Če bi recimo veljalo, da sta $\mathbf{d}_0$ in ΔT_0 kolinearna, $\mathbf{d}_0$ in $\mathbf{d}_1$ pa ne, bi dobili naslednji pogoj

$$(d_0 \pm 2\|\Delta T_0\|)\mathbf{d}_0 + d_1\mathbf{d}_1 = 0$$

. Če zgornjo enačbo vektorsko pomnožimo z $\mathbf{d}_0$, prvi člen odpade, ostane pa

$$d_1\mathbf{d}_1 \times \mathbf{d}_0 = 0,$$

iz česar sledi $d_1 = 0$, kar pa ni dopustna rešitev.

Z razpravo v tem razdelku smo dokazali naslednji izrek.

Izrek 4.1. *Regularna parabolična krivulja* $\boldsymbol{p} : [0,1] \to \mathbb{R}^2$*, ki zadošča pogoju* $\boldsymbol{p}(0) = T_0, \boldsymbol{p}(1) = T_1, \boldsymbol{p}'(0) = d_0\boldsymbol{d}_0$ *in* $\boldsymbol{p}'(1) = d_1\boldsymbol{d}_1$*, kjer sta* T_0 *in* T_1 *točki v ravnini,* d_0 *in* d_1 *pozitivni realni števili in* $\boldsymbol{d}_0$ *in* $\boldsymbol{d}_1$ *smeri v ravnini, obstaja natanko tedaj, ko je izpolnjen eden od pogojev*

(1) *vektorji* $\boldsymbol{d}_0, \boldsymbol{d}_1$ *in* $\Delta T_0 = T_1 - T_0$ *so paroma nekolinearni, predznaki* $\Delta T_0 \times \boldsymbol{d}_0$, $\boldsymbol{d}_1 \times \boldsymbol{d}_0$ *in* $\boldsymbol{d}_1 \times \Delta T_0$ *so enaki,*

(2) *vektorji* $\boldsymbol{d}_0, \boldsymbol{d}_1$ *in* $\Delta T_0 = T_1 - T_0$ *so kolinearni in imajo isto smer kot* ΔT_0*. Če velja* $d_0 = d_1 = \|\Delta T_0\|$*, se parabolična krivulja izrodi v premico.*

5. Aproksimacije

Nazadnje si oglejmo praktično uporabo interpolacije s paraboličnimi krivuljami. Recimo, da imamo dano neko parabolično krivuljo, na primer lemniskato ali spiralo, ki bi jo želeli aproksimirati. Kako se lotimo problema? Na krivulji izberemo štiri točke in jih interpoliramo s parabolično krvuljo, nato pa pogledamo, kako dobra je aproksimacija. Pričakovali bi, da bo aproskcimacija vedno boljša, ko bodo točke bližje skupaj, torej ko bomo aproksimirali manjši delček krivulje. Za ta namen bomo definirali metriko, ki meri razdalje med parametričnima krivuljama, s pomočjo te metrike pa bomo ocenili tudi hitrost konvegence.

Slovar strokovnih izrazov

Literatura