Fareyevo zaporedje in Riemannova hipoteza

Tjaša Vrhovnik

Mentor: izr. prof. dr. Aleš Vavpetič
Univerza v Ljubljani
Fakulteta za matematiko in fiziko
Oddelek za matematiko

8. maj 2019

Fareyevo zaporedje

Fareyevo zaporedje

Trditev

Obstajajo 3003 *racionalna števila* $\frac{p}{q}$*, za katera velja* $0 < \frac{p}{q} < 1$ *ter je* $q \leq 100$*.*

1751, R. Flitcon

Fareyevo zaporedje

Definicija

Fareyevo zaporedje reda n oz. n-to Fareyevo zaporedje je množica racionalnih števil $\frac{p}{q}$ *urejenih po velikosti, kjer sta p in q tuji si števili, ter velja* $0 \leq p \leq q \leq n$. *Označimo ga z* F_n.
Ekvivalentno, F_n *vsebuje vse okrajšane ulomke med* 0 *in* 1 *z imenovalci, kvečjemu enakimi n.*

Fareyevo zaporedje

Definicija

Fareyevo zaporedje reda n oz. n-to Fareyevo zaporedje je množica racionalnih števil $\frac{p}{q}$ *urejenih po velikosti, kjer sta p in q tuji si števili, ter velja* $0 \leq p \leq q \leq n$. *Označimo ga z* F_n.
Ekvivalentno, F_n *vsebuje vse okrajšane ulomke med* 0 *in* 1 *z imenovalci, kvečjemu enakimi n.*

Definicija

Sosednja člena v Fareyevem zaporedju imenujemo Fareyeva soseda.

Fareyevo zaporedje

Definicija

Naj bosta $\frac{a}{b}$ in $\frac{c}{d}$ sosednja člena nekega Fareyevega zaporedja. Člen

$$\frac{a+c}{b+d}$$

imenujemo medianta.

Fareyevo zaporedje

Definicija

Naj bosta $\frac{a}{b}$ *in* $\frac{c}{d}$ *sosednja člena nekega Fareyevega zaporedja. Člen*

$$\frac{a+c}{b+d}$$

imenujemo medianta.

Trditev

Za medianto okrajšanih ulomkov $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ *velja* $\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}$ *.*

Fareyevo zaporedje

Definicija

Naj bosta $\frac{a}{b}$ in $\frac{c}{d}$ sosednja člena nekega Fareyevega zaporedja. Člen

$$\frac{a+c}{b+d}$$

imenujemo medianta.

Trditev

Za medianto okrajšanih ulomkov $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ velja $\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}$.

Trditev

Naj velja $0 \leq \frac{a}{b} < \frac{c}{d} \leq 1$. Ulomka $\frac{a}{b}$ in $\frac{c}{d}$ sta Fareyeva soseda v nekem Fareyevem zaporedju natanko tedaj, ko velja $bc - ad = 1$.

Fareyevo zaporedje

Definicija

Preslikava $\varphi\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, *ki za vsako naravno število n prešteje števila, manjša od n, ki so n tuja, se imenuje Eulerjeva funkcija* φ.

Fareyevo zaporedje

Definicija

Preslikava $\varphi\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, *ki za vsako naravno število n prešteje števila, manjša od n, ki so n tuja, se imenuje Eulerjeva funkcija* φ.

Trditev

Naj bo φ *Eulerjeva funkcija. Dolžina Fareyevega zaporedja reda n je*

$$|F_n| = |F_{n-1}| + \varphi(n).$$

Fareyevo zaporedje

Definicija

Preslikava $\varphi\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, *ki za vsako naravno število n prešteje števila, manjša od n, ki so n tuja, se imenuje Eulerjeva funkcija* φ.

Trditev

Naj bo φ *Eulerjeva funkcija. Dolžina Fareyevega zaporedja reda n je*

$$|F_n| = |F_{n-1}| + \varphi(n).$$

Trditev

Asimptotično se dolžina Fareyevega zaporedja obnaša kot

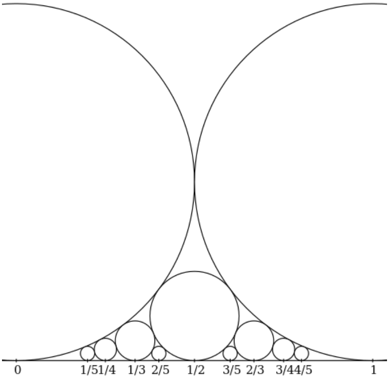
$$|F_n| \sim \frac{3n^2}{\pi^2}.$$

Fordovi krogi

Fordovi krogi

Definicija

Naj bosta p in q tuji si števili v množici celih števil. Fordov krog $C(\frac{p}{q})$ je krog v zgornji polravnini, ki se abscisne osi dotika v točki $\frac{p}{q}$, njegov polmer pa meri $\frac{1}{2q^2}$.



Fordovi krogi

Trditev

Fordova kroga, ki pripadata različnima okrajšanima ulomkoma, sta bodisi tangentna bodisi disjunktna.

Fordovi krogi

Trditev

Fordova kroga, ki pripadata različnima okrajšanima ulomkoma, sta bodisi tangentna bodisi disjunktna.

Trditev

Fordova kroga $C(\frac{a}{b})$ in $C(\frac{c}{d})$ sta tangentna natanko tedaj, ko velja $|bc - ad| = 1$.

Fordovi krogi

Definicija

Tangentna Fordova kroga imenujemo Fordova soseda.

Fordovi krogi

Definicija

Tangentna Fordova kroga imenujemo Fordova soseda.

Izrek

Naj bosta kroga $C(\frac{p}{q})$ *in* $C(\frac{P}{Q})$ *Fordova soseda. Vse Fordove sosede Fordovega kroga* $C(\frac{p}{q})$ *lahko zapišemo v obliki* $C(\frac{P_n}{Q_n})$*, kjer je* $\frac{P_n}{Q_n} = \frac{P+np}{Q+nq}$ *in* n *preteče vsa cela števila.*

Riemannova hipoteza

Riemannova hipoteza

- praštevila (Evklid, Euler)

Riemannova hipoteza

- praštevila (Evklid, Euler)
- $\zeta(n) = \sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{r^n}$; $n \in \mathbb{R}$

Riemannova hipoteza

- praštevila (Evklid, Euler)
- $\zeta(n) = \sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{r^n}$; $n \in \mathbb{R}$

Eulerjeva produktna formula

$$\sum_n \frac{1}{n^s} = \prod_p \frac{1}{1 - p^{-s}}; n \in \mathbb{N}, p \in \mathbb{P}$$

Dokaz l. 1737, *Variae observationes circa series infinitas*

Riemannova hipoteza

- Bernhard Riemann (1826 – 1866)
- l. 1859 razširi Eulerjevo definicijo

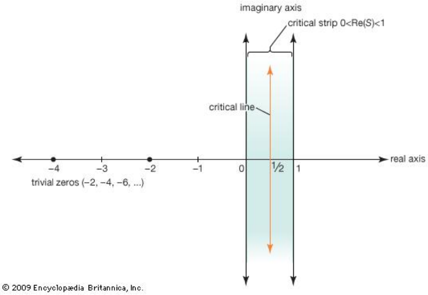
Definicija

Riemannova funkcija zeta je za $s \in \mathbb{C} \backslash \{1\}$ *definirana kot*

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}.$$

Riemannova hipoteza

Vse netrivialne ničle Riemannove funkcije zeta ležijo na premici $s = \frac{1}{2} + it$.



Riemannova hipoteza

Definicija

Naj bo $k \in \mathbb{N}$. Möbiusova funkcija je definirana kot

$$\mu(k) = \begin{cases} 0 & ; \ k \text{ vsebuje kvadrat praštevila} \\ (-1)^p & ; \ k \text{ je produkt } p \text{ različnih praštevil.} \end{cases}$$

Definicija

Naj bo $k \in \mathbb{N}$. Möbiusova funkcija je definirana kot

$$\mu(k) = \begin{cases} 0 & ; \ k \text{ vsebuje kvadrat praštevila} \\ (-1)^p & ; \ k \text{ je produkt } p \text{ različnih praštevil.} \end{cases}$$

Definicija

Za $n \in \mathbb{N}$ je Mertensova funkcija definirana kot

$$M(n) = \sum_{k \leq n} \mu(k).$$

Definicija

Naj bo $k \in \mathbb{N}$. Möbiusova funkcija je definirana kot

$$\mu(k) = \begin{cases} 0 & ; \ k \text{ vsebuje kvadrat praštevila} \\ (-1)^p & ; \ k \text{ je produkt } p \text{ različnih praštevil.} \end{cases}$$

Definicija

Za $n \in \mathbb{N}$ je Mertensova funkcija definirana kot

$$M(n) = \sum_{k \leq n} \mu(k).$$

$$\forall \epsilon > 0.\ M(n) = o(n^{1/2+\epsilon}) \iff \text{Riemannova hipoteza}$$

Definicija

Naj bosta $L(n)$ dolžina Fareyevega zaporedja F_n in r_v njegov v-ti element. Definiramo razliko

$$\delta_v = r_v - v/L(n).$$

Riemannova hipoteza

Definicija

Naj bosta $L(n)$ dolžina Fareyevega zaporedja F_n in r_v njegov v-ti element. Definiramo razliko

$$\delta_v = r_v - v/L(n).$$

Franel-Landau (1924):

$$\forall \epsilon > 0. \sum_{v=1}^{L(n)} |\delta_v| = o(n^{1/2+\varepsilon}) \iff \text{Riemannova hipoteza}$$

Riemannova hipoteza

Za vsak $\varepsilon > 0$

$$\sum_{v=1}^{L(n)} |\delta_v| = o(n^{1/2+\varepsilon}) \iff M(n) = o(n^{1/2+\varepsilon}).$$