Fareyevo zaporedje in Riemannova hipoteza

Tjaša Vrhovnik

Mentor: izr. prof. dr. Aleš Vavpetič
Univerza v Ljubljani
Fakulteta za matematiko in fiziko
Oddelek za matematiko

10. december 2018

Zgodovinski okvir

- *"The Ladies Diary: or, the Woman's Almanack"*, 1747
  Zanima nas število ulomkov različnih vrednosti, manjših od 1, katerih imenovalec ni večji od 100.
- R. Flitcon, 1751: rešitev je 3003
- Charles Haros
- Henry Goodwyn
- John Farey, 1816

Definicija

FAREYEVO ZAPOREDJE *reda n oz. n-to Fareyevo zaporedje je množica racionalnih števil $\frac{p}{q}$ urejenih po velikosti, kjer sta p in q tuji si števili, ter velja $0 \leq p \leq q \leq n$. Označimo ga z F_n. Ekvivalentno, F_n vsebuje vse okrajšane ulomke med 0 in 1 z imenovalci, kvečjemu enakimi n.*

Fareyevo zaporedje

Definicija

FAREYEVO ZAPOREDJE *reda n oz. n-to Fareyevo zaporedje je množica racionalnih števil* $\frac{p}{q}$ *urejenih po velikosti, kjer sta p in q tuji si števili, ter velja* $0 \leq p \leq q \leq n$. *Označimo ga z* F_n. *Ekvivalentno,* F_n *vsebuje vse okrajšane ulomke med 0 in 1 z imenovalci, kvečjemu enakimi n.*

Primer

$$F_1 = \{\tfrac{0}{1}, \tfrac{1}{1}\}$$
$$F_2 = \{\tfrac{0}{1}, \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{1}\}$$
$$F_3 = \{\tfrac{0}{1}, \tfrac{1}{3}, \tfrac{1}{2}, \tfrac{2}{3}, \tfrac{1}{1}\}$$
$$F_4 = \{\tfrac{0}{1}, \tfrac{1}{4}, \tfrac{1}{3}, \tfrac{1}{2}, \tfrac{2}{3}, \tfrac{3}{4}, \tfrac{1}{1}\}$$
$$F_5 = \{\tfrac{0}{1}, \tfrac{1}{5}, \tfrac{1}{4}, \tfrac{1}{3}, \tfrac{2}{5}, \tfrac{1}{2}, \tfrac{3}{5}, \tfrac{2}{3}, \tfrac{3}{4}, \tfrac{4}{5}, \tfrac{1}{1}\}$$

Fareyevo zaporedje

Definicija

Naj bosta $\frac{a}{b}$ in $\frac{c}{d}$ sosednja člena Fareyevega zaporedja. Člen

$$\frac{a+c}{b+d}$$

imenujemo MEDIANTA.

Fareyevo zaporedje

Definicija

Naj bosta $\frac{a}{b}$ *in* $\frac{c}{d}$ *sosednja člena Fareyevega zaporedja. Člen*

$$\frac{a+c}{b+d}$$

imenujemo MEDIANTA.

Trditev

Naj velja $0 \leq \frac{a}{b} < \frac{c}{d} \leq 1$. $\frac{a}{b}$ *in* $\frac{c}{d}$ *sta Fareyeva soseda v* F_n *natanko tedaj, ko velja* $bc - ad = 1$.

Fareyevo zaporedje

Definicija

Naj bo $\varphi(n)$ Eulerjeva funkcija. Dolžina Fareyevega zaporedja je

$$|F_n| = |F_{n-1}| + \varphi(n).$$

Fareyevo zaporedje

Definicija

Naj bo $\varphi(n)$ Eulerjeva funkcija. Dolžina Fareyevega zaporedja je

$$|F_n| = |F_{n-1}| + \varphi(n).$$

Trditev

Asimptotično se dolžina Fareyevega zaporedja obnaša kot

$$|F_n| \sim \frac{3n^2}{\pi^2}.$$

Fibonaccijevo zaporedje

Definicija

Zaporedje Fibonaccijevih ulomkov definiramo kot

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{3}{8}, \ldots, \frac{\varphi_m}{\varphi_{m+2}}, \ldots$$

Fibonaccijevo zaporedje

Definicija

Zaporedje Fibonaccijevih ulomkov definiramo kot

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{3}{8}, \ldots, \frac{\varphi_m}{\varphi_{m+2}}, \ldots$$

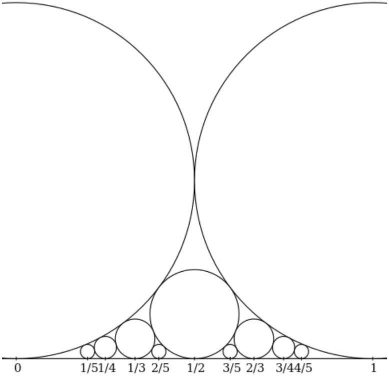
Trditev

Sosednja Fibonaccijeva ulomka sta Fareyeva soseda.

Fordovi krogi

Definicija

Fordov krog $C(\frac{p}{q})$ *je krog v zgornji polravnini, ki se abscisne osi dotika v točki* $\frac{p}{q}$ *in ima polmer* $\frac{1}{2q^2}$. *Pri tem sta* p *in* q *tuji si števili.*



Riemannova hipoteza

- Bernhard Riemann (1826 – 1866)
- obnašanje praštevil

Definicija

RIEMANNOVA FUNKCIJA ZETA *je za* $s \in \mathbb{C} \backslash \{1\}$ *definirana kot*

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}.$$

$$\zeta(s) = \prod_{p} \frac{1}{1 - p^{-s}} = \frac{1}{1 - 2^{-s}} \cdot \frac{1}{1 - 3^{-s}} \cdot \frac{1}{1 - 5^{-s}} \cdots$$

Definicija

RIEMANNOVA FUNKCIJA ZETA *je za* $s \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$ *definirana kot*

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}.$$

$$\zeta(s) = \prod_p \frac{1}{1-p^{-s}} = \frac{1}{1-2^{-s}} \cdot \frac{1}{1-3^{-s}} \cdot \frac{1}{1-5^{-s}} \cdots$$

Riemannova hipoteza

Vse netrivialne ničle Riemannove funkcije zeta ležijo na premici $s = \frac{1}{2} + it$.

Definicija

MÖBIUSOVA FUNKCIJA *je definirana kot*

$$\mu(k) = \begin{cases} 0 & ; \ k \text{ vsebuje kvadrat} \\ (-1)^p & ; \ k \text{ je produkt } p \text{ različnih praštevil.} \end{cases}$$

Definicija

MERTENSOVA FUNKCIJA *je definirana kot*

$$M(n) = \sum_{k \leq n} \mu(k).$$

Definicija

Naj bosta $L(n)$ dolžina Fareyevega zaporedja F_n in r_v njegov v-ti element. Definiramo razliko

$$\delta_v = r_v - v/L(n).$$

Primer

$$F_5 = \{\frac{0}{1}, \frac{1}{5}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{1}{2}, \frac{3}{5}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{1}{1}\}$$

$$L(5) = 11$$

$$\delta_1 = \frac{0}{1} - \frac{1}{11} = -\frac{1}{11}$$

$$\delta_2 = \frac{1}{5} - \frac{2}{11} = \frac{1}{55}$$

Za vsak $\varepsilon > 0$

$$\sum_{v=1}^{L(n)} |\delta_v| = o(n^{1/2+\varepsilon}) \iff M(n) = o(n^{1/2+\varepsilon}).$$