# Fareyevo zaporedje in Riemannova hipoteza

Tjaša Vrhovnik

Mentor: izr. prof. dr. Aleš Vavpetič
Univerza v Ljubljani
Fakulteta za matematiko in fiziko
Oddelek za matematiko

8. maj 2019

# Fareyevo zaporedje

# Fareyevo zaporedje

**Trditev**

*Obstajajo* 3003 *racionalna števila* $\frac{p}{q}$, *za katera velja* $0 < \frac{p}{q} < 1$ *ter je* $q \leq 100$.

1751, R. Flitcon

# Fareyevo zaporedje

## Definicija

*Fareyevo zaporedje reda n oz. n-to Fareyevo zaporedje je množica racionalnih števil* $\frac{p}{q}$ *urejenih po velikosti, kjer sta p in q tuji si števili, ter velja* $0 \leq p \leq q \leq n$. *Označimo ga z* $F_n$.
*Ekvivalentno,* $F_n$ *vsebuje vse okrajšane ulomke med* 0 *in* 1 *z imenovalci, kvečjemu enakimi n.*

# Fareyevo zaporedje

**Definicija**

*Fareyevo zaporedje reda n oz. n-to Fareyevo zaporedje je množica racionalnih števil* $\frac{p}{q}$ *urejenih po velikosti, kjer sta p in q tuji si števili, ter velja* $0 \leq p \leq q \leq n$. *Označimo ga z* $F_n$.
*Ekvivalentno,* $F_n$ *vsebuje vse okrajšane ulomke med* 0 *in* 1 *z imenovalci, kvečjemu enakimi n.*

**Definicija**

*Sosednja člena v Fareyevem zaporedju imenujemo Fareyeva soseda.*

# Fareyevo zaporedje

## Definicija

*Naj bosta $\frac{a}{b}$ in $\frac{c}{d}$ sosednja člena nekega Fareyevega zaporedja. Člen*

$$\frac{a+c}{b+d}$$

*imenujemo medianta.*

# Fareyevo zaporedje

## Definicija

*Naj bosta $\frac{a}{b}$ in $\frac{c}{d}$ sosednja člena nekega Fareyevega zaporedja. Člen*

$$\frac{a+c}{b+d}$$

*imenujemo medianta.*

## Trditev

*Za medianto okrajšanih ulomkov $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ velja $\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}$ .*

# Fareyevo zaporedje

## Definicija

*Naj bosta $\frac{a}{b}$ in $\frac{c}{d}$ sosednja člena nekega Fareyevega zaporedja. Člen*

$$\frac{a+c}{b+d}$$

*imenujemo medianta.*

## Trditev

*Za medianto okrajšanih ulomkov $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ velja $\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}$ .*

## Trditev

*Naj velja $0 \leq \frac{a}{b} < \frac{c}{d} \leq 1$. Ulomka $\frac{a}{b}$ in $\frac{c}{d}$ sta Fareyeva soseda v nekem Fareyevem zaporeju natanko tedaj, ko velja $bc - ad = 1$.*

## Definicija

*Preslikava $\varphi\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, ki za vsako naravno število n prešteje števila, manjša od n, ki so n tuja, se imenuje Eulerjeva funkcija $\varphi$.*

# Fareyevo zaporedje

## Definicija

*Preslikava* $\varphi\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, *ki za vsako naravno število n prešteje števila, manjša od n, ki so n tuja, se imenuje Eulerjeva funkcija* $\varphi$.

## Trditev

*Naj bo* $\varphi$ *Eulerjeva funkcija. Dolžina Fareyevega zaporedja reda n je*

$$|F_n| = |F_{n-1}| + \varphi(n).$$

# Fareyevo zaporedje

**Definicija**

*Preslikava* $\varphi\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, *ki za vsako naravno število n prešteje števila, manjša od n, ki so n tuja, se imenuje Eulerjeva funkcija* $\varphi$.

**Trditev**

*Naj bo* $\varphi$ *Eulerjeva funkcija. Dolžina Fareyevega zaporedja reda n je*

$$|F_n| = |F_{n-1}| + \varphi(n).$$

**Trditev**

*Asimptotično se dolžina Fareyevega zaporedja obnaša kot*

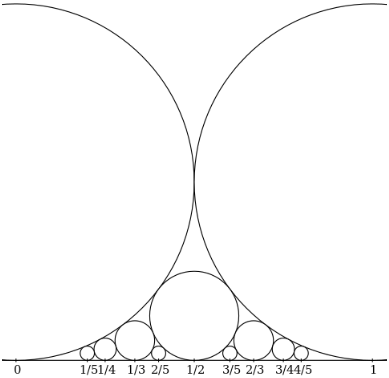
$$|F_n| \sim \frac{3n^2}{\pi^2}.$$

# Fordovi krogi

# Fordovi krogi

## Definicija

*Naj bosta p in q tuji si števili v množici celih števil. Fordov krog* $C(\frac{p}{q})$ *je krog v zgornji polravnini, ki se abscisne osi dotika v točki* $\frac{p}{q}$, *njegov polmer pa meri* $\frac{1}{2q^2}$.



# Fordovi krogi

**Trditev**

*Fordova kroga, ki pripadata različnima okrajšanima ulomkoma, sta bodisi tangentna bodisi disjunktna.*

# Fordovi krogi

**Trditev**

*Fordova kroga, ki pripadata različnima okrajšanima ulomkoma, sta bodisi tangentna bodisi disjunktna.*

**Trditev**

*Fordova kroga $C(\frac{a}{b})$ in $C(\frac{c}{d})$ sta tangentna natanko tedaj, ko velja $|bc - ad| = 1$.*

**Definicija**

*Tangentna Fordova kroga imenujemo Fordova soseda.*

# Fordovi krogi

## Definicija

*Tangentna Fordova kroga imenujemo Fordova soseda.*

## Izrek

*Naj bosta kroga* $C(\frac{p}{q})$ *in* $C(\frac{P}{Q})$ *Fordova soseda. Vse Fordove sosede Fordovega kroga* $C(\frac{p}{q})$ *lahko zapišemo v obliki* $C(\frac{P_n}{Q_n})$*, kjer je* $\frac{P_n}{Q_n} = \frac{P+np}{Q+nq}$ *in* $n$ *preteče vsa cela števila.*

# Riemannova hipoteza

# Riemannova hipoteza

- praštevila (Evklid, Euler)

# Riemannova hipoteza

- praštevila (Evklid, Euler)
- $\zeta(n) = \sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{r^n}$; $n \in \mathbb{R}$

# Riemannova hipoteza

- praštevila (Evklid, Euler)
- $\zeta(n) = \sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{r^n}$; $n \in \mathbb{R}$

**Eulerjeva produktna formula**

$$\sum_n \frac{1}{n^s} = \prod_p \frac{1}{1 - p^{-s}}; n \in \mathbb{N}, p \in \mathbb{P}$$

Dokaz l. 1737, *Variae observationes circa series infinitas*

- Bernhard Riemann (1826 – 1866)
- l. 1859 razširi Eulerjevo definicijo

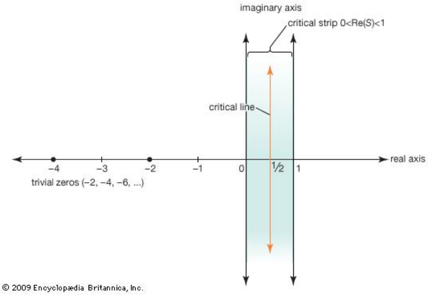
**Definicija**

*Riemannova funkcija zeta je za* $s \in \mathbb{C} \backslash \{1\}$ *definirana kot*

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}.$$

## Riemannova hipoteza

Vse netrivialne ničle Riemannove funkcije zeta ležijo na premici $s = \frac{1}{2} + it$.



# Riemannova hipoteza

**Definicija**

*Naj bo $k \in \mathbb{N}$. Möbiusova funkcija je definirana kot*

$$\mu(k) = \begin{cases} 0 & ; \ \textit{k vsebuje kvadrat praštevila} \\ (-1)^p & ; \ \textit{k je produkt p različnih praštevil.} \end{cases}$$

**Definicija**

*Naj bo $k \in \mathbb{N}$. Möbiusova funkcija je definirana kot*

$$\mu(k) = \begin{cases} 0 & ; \ k \text{ vsebuje kvadrat praštevila} \\ (-1)^p & ; \ k \text{ je produkt } p \text{ različnih praštevil.} \end{cases}$$

**Definicija**

*Za $n \in \mathbb{N}$ je Mertensova funkcija definirana kot*

$$M(n) = \sum_{k \le n} \mu(k).$$

**Definicija**

*Naj bo $k \in \mathbb{N}$. Möbiusova funkcija je definirana kot*

$$\mu(k) = \begin{cases} 0 & ; \ \textit{k vsebuje kvadrat praštevila} \\ (-1)^p & ; \ \textit{k je produkt p različnih praštevil.} \end{cases}$$

**Definicija**

*Za $n \in \mathbb{N}$ je Mertensova funkcija definirana kot*

$$M(n) = \sum_{k \le n} \mu(k).$$

$$\forall \epsilon > 0. \ M(n) = o(n^{1/2+\epsilon}) \iff \text{Riemannova hipoteza}$$

### Definicija

*Naj bosta $L(n)$ dolžina Fareyevega zaporedja $F_n$ in $r_v$ njegov v-ti element. Definiramo razliko*

$$\delta_v = r_v - v/L(n).$$

**Definicija**

*Naj bosta $L(n)$ dolžina Fareyevega zaporedja $F_n$ in $r_v$ njegov v-ti element. Definiramo razliko*

$$\delta_v = r_v - v/L(n).$$

Franel-Landau (1924):

$$\forall \epsilon > 0. \sum_{v=1}^{L(n)} |\delta_v| = o(n^{1/2+\varepsilon}) \iff \text{Riemannova hipoteza}$$

Za vsak $\varepsilon > 0$

$$\sum_{v=1}^{L(n)} |\delta_v| = o(n^{1/2+\varepsilon}) \iff M(n) = o(n^{1/2+\varepsilon}).$$