

Fareyevo zaporedje in Riemannova hipoteza

Tjaša Vrhovnik

Mentor: izr. prof. dr. Aleš Vavpetič
Univerza v Ljubljani
Fakulteta za matematiko in fiziko
Oddelek za matematiko

8. maj 2019

Fareyevo zaporedje

Trditev

Obstajajo 3003 racionalna števila $\frac{p}{q}$, za katera velja $0 < \frac{p}{q} < 1$ ter je $q \leq 100$.

1751, R. Flitcon

Definicija

Fareyevo zaporedje reda n oz. n -to Fareyevo zaporedje je množica racionalnih števil $\frac{p}{q}$ urejenih po velikosti, kjer sta p in q tuji si števili, ter velja $0 \leq p \leq q \leq n$. Označimo ga z F_n .

Ekvivalentno, F_n vsebuje vse okrajšane ulomke med 0 in 1 z imenovalci, kvečjemu enakimi n .

Definicija

Fareyevo zaporedje reda n oz. n -to Fareyevo zaporedje je množica racionalnih števil $\frac{p}{q}$ urejenih po velikosti, kjer sta p in q tuji si števili, ter velja $0 \leq p \leq q \leq n$. Označimo ga z F_n .

Ekvivalentno, F_n vsebuje vse okrajšane ulomke med 0 in 1 z imenovalci, kvečjemu enakimi n .

Definicija

Sosednja člena v Fareyevem zaporedju imenujemo Fareyeva soseda.

Definicija

Naj bosta $\frac{a}{b}$ in $\frac{c}{d}$ sosednja člena nekega Fareyevega zaporedja. Člen

$$\frac{a + c}{b + d}$$

imenujemo medianta.

Fareyevo zaporedje

Definicija

Naj bosta $\frac{a}{b}$ in $\frac{c}{d}$ sosednja člena nekega Fareyevega zaporedja. Člen

$$\frac{a+c}{b+d}$$

imenujemo medianta.

Trditev

Za medianto okrajšanih ulomkov $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ velja $\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}$.

Fareyevo zaporedje

Definicija

Naj bosta $\frac{a}{b}$ in $\frac{c}{d}$ sosednja člena nekega Fareyvega zaporedja. Člen

$$\frac{a + c}{b + d}$$

imenujemo medianta.

Trditev

Za medianto okrajšanih ulomkov $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ velja $\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}$.

Trditev

Naj velja $0 \leq \frac{a}{b} < \frac{c}{d} \leq 1$. Ulomka $\frac{a}{b}$ in $\frac{c}{d}$ sta Fareyeva soseda v nekem Fareyevem zaporeju natanko tedaj, ko velja $bc - ad = 1$.

Definicija

Preslikava $\varphi: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, ki za vsako naravno število n prešteje števila, manjša od n , ki so n tuja, se imenuje Eulerjeva funkcija φ .

Definicija

Preslikava $\varphi: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, ki za vsako naravno število n prešteje števila, manjša od n , ki so n tuja, se imenuje Eulerjeva funkcija φ .

Trditev

Naj bo φ Eulerjeva funkcija. Dolžina Fareyvega zaporedja reda n je

$$|F_n| = |F_{n-1}| + \varphi(n).$$

Fareyevo zaporedje

Definicija

Preslikava $\varphi: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, ki za vsako naravno število n prešteje števila, manjša od n , ki so n tuja, se imenuje Eulerjeva funkcija φ .

Trditev

Naj bo φ Eulerjeva funkcija. Dolžina Fareyvega zaporedja reda n je

$$|F_n| = |F_{n-1}| + \varphi(n).$$

Trditev

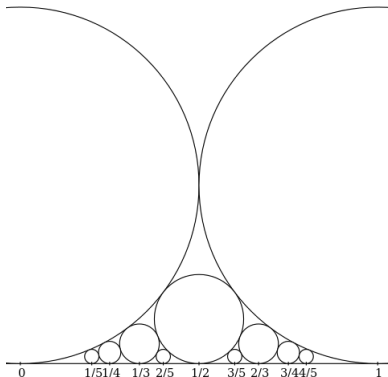
Asimptotično se dolžina Fareyvega zaporedja obnaša kot

$$|F_n| \sim \frac{3n^2}{\pi^2}.$$

Fordovi krogi

Definicija

Naj bosta p in q tuji si števili v množici celih števil. Fordov krog $C(\frac{p}{q})$ je krog v zgornji polravnini, ki se abscisne osi dotika v točki $\frac{p}{q}$, njegov polmer pa meri $\frac{1}{2q^2}$.



Trditev

Fordova kroga, ki pripadata različnima okrajšanima ulomkoma, sta bodisi tangentna bodisi disjunktna.

Trditev

Fordova kroga, ki pripadata različnima okrajšanima ulomkoma, sta bodisi tangentna bodisi disjunktna.

Trditev

Fordova kroga $C(\frac{a}{b})$ in $C(\frac{c}{d})$ sta tangentna natanko tedaj, ko velja $|bc - ad| = 1$.

Definicija

Tangentna Fordova kroga imenujemo Fordova soseda.

Definicija

Tangentna Fordova kroga imenujemo Fordova soseda.

Izrek

Naj bosta kroga $C(\frac{p}{q})$ in $C(\frac{P}{Q})$ Fordova soseda. Vse Fordove sosede Fordovega kroga $C(\frac{p}{q})$ lahko zapišemo v obliki $C(\frac{P_n}{Q_n})$, kjer je $\frac{P_n}{Q_n} = \frac{P+np}{Q+nq}$ in n preteče vsa cela števila.

Riemannova hipoteza

- praštevila (Evklid, Euler)

- praštevila (Evklid, Euler)
- $\zeta(n) = \sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{r^n}$; $n, r \in \mathbb{R}$

- praštevila (Evklid, Euler)
- $\zeta(n) = \sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{r^n}$; $n, r \in \mathbb{R}$

Eulerjeva produktna formula

$$\sum_n \frac{1}{n^s} = \prod_p \frac{1}{1 - p^{-s}}; n \in \mathbb{N}, p \in \mathbb{P}$$

Dokaz l. 1737, *Variae observationes circa series infinitas*

- Bernhard Riemann (1826 – 1866)
- l. 1859 razširi Eulerjevo definicijo

Definicija

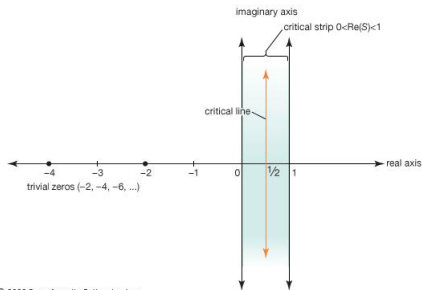
Riemannova funkcija zeta je za $s \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$ definirana kot

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}.$$

Riemannova hipoteza

Riemannova hipoteza

Vse netrivialne ničle Riemannove funkcije zeta ležijo na premici $s = \frac{1}{2} + it$.



© 2009 Encyclopædia Britannica, Inc.

Definicija

Naj bo $k \in \mathbb{N}$. Möbiusova funkcija je definirana kot

$$\mu(k) = \begin{cases} 0 & ; k \text{ vsebuje kvadrat} \\ (-1)^p & ; k \text{ je produkt } p \text{ različnih praštevil.} \end{cases}$$

Definicija

Naj bo $k \in \mathbb{N}$. Möbiusova funkcija je definirana kot

$$\mu(k) = \begin{cases} 0 & ; k \text{ vsebuje kvadrat} \\ (-1)^p & ; k \text{ je produkt } p \text{ različnih praštevil.} \end{cases}$$

Definicija

Za $n \in \mathbb{N}$ je Mertensova funkcija definirana kot

$$M(n) = \sum_{k \leq n} \mu(k).$$

Definicija

Naj bo $k \in \mathbb{N}$. Möbiusova funkcija je definirana kot

$$\mu(k) = \begin{cases} 0 & ; k \text{ vsebuje kvadrat} \\ (-1)^p & ; k \text{ je produkt } p \text{ različnih praštevil.} \end{cases}$$

Definicija

Za $n \in \mathbb{N}$ je Mertensova funkcija definirana kot

$$M(n) = \sum_{k \leq n} \mu(k).$$

$$\forall \epsilon > 0. M(n) = o(n^{1/2+\epsilon}) \iff \text{Riemannova hipoteza}$$

Definicija

Naj bosta $L(n)$ dolžina Fareyvega zaporedja F_n in r_v njegov v -ti element. Definiramo razliko

$$\delta_v = r_v - v/L(n).$$

Definicija

Naj bosta $L(n)$ dolžina Fareyevega zaporedja F_n in r_v njegov v -ti element. Definiramo razliko

$$\delta_v = r_v - v/L(n).$$

Franel-Landau (1924):

$$\forall \epsilon > 0. \sum_{v=1}^{L(n)} |\delta_v| = o(n^{1/2+\epsilon}) \iff \text{Riemannova hipoteza}$$

Za vsak $\varepsilon > 0$

$$\sum_{v=1}^{L(n)} |\delta_v| = o(n^{1/2+\varepsilon}) \iff M(n) = o(n^{1/2+\varepsilon}).$$