Hiperbolični prostori

Tjaša Vrhovnik
Fakulteta za matematiko in fiziko
Oddelek za matematiko

13. junij 2021

Kazalo

1 Osnovne definicije

Naslednje definicije opisujejo mnogoterosti z visoko simetrijo. Natančneje to pomeni, da so njihove grupe izometrij velike. Najpreprostejši primer so Evklidski prostori - zanje že intuitivno vemo, da obstajajo preslikave, izometrije, ki poljubni točki preslikajo eno v drugo, celo več, ortonormirano bazo v prvi točki lahko preslikajo v ortonormirano bazo v drugi. Izkazalo se bo, da to niso edini taki prostori. Drug primer so n-dimenzionalne sfere $\mathbb{S}^n$, mi pa se bomo posvetili študiju hiperboličnih prostorov.

Definicija 1 *Naj bosta* (M, g) *in* $(\tilde{M}, \tilde{g})$ *Riemannovi mnogoterosti. Gladka preslikava* $\phi\colon M \to \tilde{M}$ ohranja metriko*, če velja* $g = \phi^*\tilde{g}$*.*

Difeomorfizem, ki ohranja metriko, imenujemo izometrija*.* Lokalna izometrija *pa je lokalni difeomorfizem, ki ohranja metriko.*

Definicija 2 *Naj bo* (M, g) *Riemannova mnogoterost. Množico izometrij mnogoterosti* M*, ki je grupa za komponiranje, označimo z* $\mathrm{Iso}(M, g)$*. Pravimo, da je* (M, g) homogena Riemannova mnogoterost*, če grupa* $\mathrm{Iso}(M, g)$ *deluje tranzitivno na* M*. To pomeni, da za poljuben par točk* $p, q \in M$ *obstaja izometrija* $\phi\colon M \to M$ *z lastnostjo* $\phi(p) = q$*.*

Če je ϕ izometrija Riemannove mnogoterosti (M, g), je njen diferencial $d\phi$ preslikava na tangentnem prostoru TM. V vsaki točki $p \in M$ diferencial definira linearno izometrijo $d\phi_p\colon T_pM \to T_{\phi(p)}M$.

Definicija 3 *Naj bo* $p \in M$*. Podgrupo grupe* $\mathrm{Iso}(M, g)$ *izometrij, ki fiksirajo* p*, imenujemo* izotropična podgrupa *v* p *in označimo z* $\mathrm{Iso}_p(M, g)$*.*

Preslikavi $I_p\colon \mathrm{Iso}_p(M, g) \to \mathrm{GL}(T_pM)$*, definirani s predpisom* $I_p(\phi) = d\phi_p$*, pravimo* izotropična reprezentacija*.*

Mnogoterost M *je* izotropična v točki p*, kadar izotropična reprezentacija deluje tranzitivno na množico enotskih vektorjev v* T_pM*. Nadalje pravimo, da je* M izotropična*, če je izotropična v vsaki točki* $p \in M$*.*

Označimo z $\mathrm{O}(M) = \sqcup_{p\in M}\{\text{ortonormirane baze } T_pM\}$ množico vseh ortonormiranih baz na tangentnih prostorih mnogoterosti M. Delovanje grupe izometrij $\mathrm{Iso}(M, g)$ na množico $\mathrm{O}(M)$ povezuje ortonormirani bazi v točkah p in $\phi(p)$ na naslednji način. Naj bo $\phi \in \mathrm{Iso}(M, g)$ in $\{e_1, \ldots, e_n\} \in \mathrm{O}(M)$. Delovanje definiramo s predpisom

$$\phi \cdot (e_1, \ldots, e_n) = (d\phi_p(e_1), \ldots, d\phi_p(e_n)). \tag{1}$$

Definicija 4 *Riemannova mnogoterost* (M, g) *je* maksimalno simetrična*, če je delovanje 1 tranzitivno na množici* $\mathrm{O}(M)$*; natančneje, če za poljuben par* $p, q \in M$ *in poljuben izbor ortonormiranih baz na tangentnih prostorih* T_pM *in* T_qM *obstaja izometrija, ki preslika* p *v* q *ter ortonormirano bazo v točki* p *v izbrano ortonormirano bazo v točki* q*.*

Geometrično si homogeno Riemannovo mnogoterost predstavljamo kot tako, ki v vsaki točki na njej izgleda enako. Izotropična Riemannova mnogoterost pa izgleda enako tudi v vseh smereh.

Definicija 5 *Naj bosta* (M,g) *in* $(\tilde{M},\tilde{g})$ *Riemannovi mnogoterosti. Difeomorfizem* $\phi\colon M\to\tilde{M}$ *je* konformna preslikava*, če obstaja taka pozitivna funkcija* $\mu\in\mathcal{C}^\infty(M)$*, da velja*

$$\phi^*\tilde{g}=\mu g.$$

V tem primeru pravimo, da sta mnogoterosti (M,g) *in* $(\tilde{M},\tilde{g})$ konformno ekvivalentni*.*

Konformni difeomorfizmi med Riemannovimi mnogoterostmi so ravno difeomorfizmi, ki ohranjajo velikosti kotov. Tako se pomen zgornje definicije sklada s konformnostjo, ki jo poznamo iz kompleksne analize.

Posebej zanimive Riemannove mnogoterosti so tiste, ki jih (vsaj) lokalno lahko primerjamo z Evklidskim prostorom. Pravimo, da je Riemannova mnogoterost (M,g) *lokalno konformno ploska*, če ima vsaka točka $p\in M$ okolico, ki je konformno ekvivalentna odprti množici v $(\mathbb{R}^n,\bar{g})$, kjer $\bar{g}$ označuje običajno Evklidsko metriko. Videli bomo, da imajo hiperbolični prostori to lastnost.

2 O hiperboličnih prostorih

2.1 Modeli

V tem razdelku bomo navedli modele hiperboličnih prostorov, ki so maksimalno simetrične Riemannove mnogoterosti dimenzije $n\geq 1$. Sprva jih bomo le navedli, kasneje pa pokazali njihovo frame homogeneity. Izkaže se, da so vsi ti modeli med seboj izometrični, zato lahko v praksi izberemo kateregakoli izmed njih, na njem obravnavamo želeno in to prenesemo na splošen hiperbolični prostor te dimenzije.

Naj bo $n\geq 1$ in izberimo $R>0$. $(n+1)$*-dimenzionalni prostor Minkowskega* je prostor $\mathbb{R}^{n,1}$, ki ga v standardnih koordinatah $(x^1,\dots,x^n,\tau)$ opremimo z *metriko Minkowskega*

$$\bar{q}^{n,1}=(dx^1)^2+\cdots+(dx^n)^2-(d\tau)^2. \tag{2}$$

Metriko $\bar{q}^{n,1}$ bomo v nadaljevanju označevali preprosto s $\bar{q}$.

Primer 1 *4-dimenzionalni prostor Minkowskega* $\mathbb{R}^{3,1}$ *s koordinatami* (x,y,z,t) *opisuje prostor-čas v Einsteinovi teoriji relativnosti. Grupo izometrij,* $\mathrm{O}(3,1)$*, imenovano* Poncaréjeva grupa *sestavlja* 10 *generatorjev: tri prostorske in ena časovna translacija, tri rotacije (v ravninah* (x,y)*,* (x,z)*,* (y,z)*) in trije Lorentzovi potiski (rotacije v ravninah* (t,x)*,* (t,y)*,* (t,z)*).*

Sedaj definirajmo štiri Riemannove mnogoterosti, ki so osnovni modeli hiperboličnega prostora dimenzije n in polmera R.

1. Hiperboloid $\mathbb{H}^n(R)$.

   Vzemimo $(n+1)$-dimenzionalni prostor Minkowskega $\mathbb{R}^{n,1}$ s standardnimi koordinatami $(x^1,\dots,x^n,\tau)$ in metriko $\bar{q}$. Pozitivni del $(\tau>0)$ dvodelnega hiperboloida $(x^1)^2+\cdots+(x^n)^2-\tau^2=-R^2$ opremimo z metriko

   $$\breve{g}^1_R=\iota^*\bar{q}, \tag{3}$$

   kjer ι označuje inkluzijo $\iota\colon\mathbb{H}^n(R)\to\mathbb{R}^{n,1}$. Dobljeno podmnogoterost $(\mathbb{H}^n(R),\breve{g}^1_R)$ imenujemo *hiperboloid* dimenzije n s polmerom R.

2. BELTRAMI-KLEINOV MODEL $\mathbb{K}^n(R)$

   Na n-dimenzionalni krogli $\mathbb{K}^n(R)$ s središčem v izhodišču prostora $\mathbb{R}^n$ in polmerom R uvedimo koordinate $(w^1, \ldots, w^n)$. Kroglo opremimo z metriko

$$\breve{g}_R^2 = R^2 \frac{(dw^1)^2 + \cdots + (dw^n)^2}{R^2 - |w|^2} + R^2 \frac{(w^1 dw^1 + \cdots + w^n dw^n)^2}{(R^2 - |w|^2)^2}. \qquad (4)$$

   Mnogoterost $(\mathbb{K}^n(R), \breve{g}_R^2)$ se imenuje *Beltrami-Kleinov model.*

3. POINCARÉJEVA KROGLA $\mathbb{B}^n(R)$

   Na n-dimenzionalni krogli $\mathbb{B}^n(R)$ s središčem v izhodišču prostora $\mathbb{R}^n$ in polmerom R uvedimo koordinate $(u^1, \ldots, u^n)$. Kroglo opremimo z metriko

$$\breve{g}_R^3 = 4R^4 \frac{(du^1)^2 + \cdots + (du^n)^2}{(R^2 - |u|^2)^2}. \qquad (5)$$

   Mnogoterost $(\mathbb{B}^n(R), \breve{g}_R^3)$ definira *Poincaréjevo kroglo.*

4. POINCARÉJEV POLPROSTOR $\mathbb{U}^n(R)$

   Na Evklidskem prostoru $\mathbb{R}^n$ uvedimo koordinate $(x^1, \ldots, x^{n-1}, y)$ in njegov podprostor $\mathbb{U}^n(R) = \{(x, y);\ y > 0\}$ opremimo z metriko

$$\breve{g}_R^4 = R^2 \frac{(dx^1)^2 + \cdots + (dx^{n-1})^2 + dy^2}{y^2}. \qquad (6)$$

   Mnogoterosti $(\mathbb{U}^n(R), \breve{g}_R^4)$ pravimo *Poincaréjev polprostor.*

Zaradi izometričnosti zgornjih modelov pogosto hiperbolični prostor dimenzije n s polmerom R označimo z $\mathbb{H}^n(R)$, metriko pa z $\breve{g}_R$, pri čemer imamo v mislih poljubnega izmed modelov. Če za polmer izberemo $R = 1$, Riemannovo mnogoterost označimo s $(\mathbb{H}^n, \breve{g})$ in imenujemo *hiperbolični prostor* dimenzije n. V dveh dimenzijah dobimo *hiperbolično ravnino*, h kateri se bomo vrnili kasneje.

Primer 2 *Vzemimo enotsko n-dimenzionalno Poincaréjevo kroglo $\mathbb{B}^n(1)$. Izračunajmo razdaljo med izhodiščem in točko $P = (R, 0, \ldots, 0)$ v Poincaréjevi krogli:*

$$r = d(0, P) = \int_0^R \sqrt{\breve{g}_1^3} = \int_0^R \frac{2ds}{1 - |s|^2} = \ln \frac{1 + R}{1 - R}. \qquad (7)$$

S preoblikovanjem zgornje zveze dobimo

$$R = \frac{e^r - 1}{e^r + 1} = \tanh \frac{r}{2}, \qquad (8)$$

ki pove, kako se (evklidski) polmer Poincaréjeve krogle $\mathbb{B}^n(R)$ izraža s hiperbolično razdaljo r.
Kolikšna pa je njena prostornina? Naj bo $d\mu^n(w)$ volumski element za $\mathbb{B}^n(R)$

(koordinate $w=(u,v)$). Velja $d\mu^n(w)=u^{n-1}d\mathrm{Vol}(\mathbb{S}^{n-1})(v)$. Sledi

$$\begin{aligned}
\mathrm{Vol}(\mathbb{B}^n(R)) &= \int_{\mathbb{B}^n(R)} \frac{2^n d\mu^n(s)}{(1-|s|^2)^n} = \mathrm{Vol}(\mathbb{S}^{n-1})\int_0^R \frac{2^n y^{n-1}}{(1-y^2)^n}dy \\
&= 2^{n-1}\mathrm{Vol}(\mathbb{S}^{n-1})\int_0^{\tanh\frac{r}{2}} \frac{2y^{n-1}}{(1-y^2)^n}dy \quad \left[y=\tanh\frac{x}{2}\right] \\
&= 2^{n-1}\mathrm{Vol}(\mathbb{S}^{n-1})\int_0^r \sinh^{n-1}\frac{x}{2}\cosh^{n-1}\frac{x}{2}dx \\
&= \mathrm{Vol}(\mathbb{S}^{n-1})\int_0^r \sinh^{n-1} x dx
\end{aligned}$$

Opazimo, da za velike r, tj. v limiti, ko gre $r\to\infty$, dobimo približno oceno

$$\mathrm{Vol}(\mathbb{B}^n(R)) \sim \frac{1}{2^{n-1}}\mathrm{Vol}(\mathbb{S}^{n-1})e^{r(n-1)}.$$

Z besedami to pomeni, da je prostornina Poincaréjeve krogle eksponentno odvisna od njenega polmera. V Evklidskih prostorih je odvisnost polinomska.

2.2 Izometričnost modelov

Izrek 1 *Modeli n-dimenzionalnih hiperboličnih prostorov s polmerom R so paroma izometrični.*

Dokaz bo potekal v več korakih. Najprej bomo preverili, da je hiperbolični prostor Riemannova mnogoterost. Nato bomo konstruirali izometrije med naslednjimi pari modelov: hiperboloidom in Beltrami-Kleinovim modelom, hiperboloidom in Poincaréjevo kroglo ter Poincaréjevim polprostorom in Poincaréjevo kroglo.

Dokažimo najprej, da je hiperboloid $\mathbb{H}^n(R)$ Riemannova podmnogoterost prostora $\mathbb{R}^{n,1}$. To zadostuje, saj bo iz izometričnosti sledilo, da so vsi modeli Riemannove mnogoterosti. Prostor $\mathbb{H}^n(R)$ lahko opišemo kot

$$\mathbb{H}^n(R) = F^{-1}(-R^2)\cap\{\tau>0\}, \tag{9}$$

kjer je preslikava $F\colon \mathbb{R}^{n+1}\to\mathbb{R}$ definirana s predpisom $F(x^1,\dots,x^n,\tau)=\sum_{i=1}^n (x^i)^2-\tau^2$. Tangentni prostor v točki $p\in\mathbb{H}^n(R)$, ki je enak $T_p\mathbb{H}^n(R)=\ker dF_p$, razpenjajo vektorji $X^i=\tau\frac{\partial}{\partial x^i}+x^i\frac{\partial}{\partial\tau}$ za $i=1,\dots,n$. Ker je njihov produkt (glede na metriko $\bar{q}$) pozitiven, je metrika $\breve{g}^1_R$ pozitivno definitna in določa Riemannovo podmnogoterost $(\mathbb{H}^n(R),\breve{g}^1_R)$.

2.2.1 Centralna projekcija

Izometrija med hiperboloidom in Beltrami-Kleinovim modelom se imenuje *centralna projekcija*, $c\colon \mathbb{H}^n(R)\to\mathbb{K}^n(R)$.

Naj bo $T=(x^1,\dots,x^n,\tau)\in\mathbb{H}^n(R)$ poljubna točka. Presečišče premice OT skozi izhodišče v $\mathbb{R}^{n,1}$ in točko T s hiperravnino $\{(x,\tau);\ \tau=R\}$ označimo z $Y\in\mathbb{R}^{n,1}$. Pišimo $Y=(y,R)$, kjer je $y=c(T)\in\mathbb{K}^n(R)$ slika T s centralno projekcijo. Tedaj se koordinate točke Y izražajo s koordinatami T, natančneje, $Y=\frac{R}{\tau}T$. Preslikavo c zato podaja zveza

$$c(x,\tau)=\frac{R}{\tau}x. \tag{10}$$

Ker slika točke s preslikavo c leži na hiperboloidu, velja

$$|c(x,\tau)|^2 = \frac{R^2}{\tau^2}|x|^2 = \frac{R^2}{\tau^2}(\tau^2 - R^2) = R^2\left(1 - \frac{R^2}{\tau^2}\right) < R^2,$$

torej je $c(x,\tau) \in \mathbb{K}^n(R)$ in je centralna projekcija dobro definirana.

Da je preslikava c difeomorfizem, bomo pokazali s konstrukcijo njenega inverza. Vzemimo poljubno točko $y \in \mathbb{K}^n(R)$. Potem obstaja enoličen $\lambda > 0$, da velja $(x,\tau) = \lambda(y,R) \in \mathbb{H}^n(R)$. Slednja točka je določena z zvezo $\lambda^2(|y|^2 - R^2) = -R^2$, od koder sledi $\lambda = \frac{R}{(R^2-|y|^2)^{1/2}}$. Potem predpis

$$c^{-1}(y) = \left(\frac{Ry}{(R^2-|y|^2)^{1/2}}, \frac{R^2}{(R^2-|y|^2)^{1/2}}\right) \tag{11}$$

definira gladko preslikavo, ki je inverz centralne projekcije.

Nazadnje dokažimo, da je c izometrija. Želimo videti, da velja enakost $(c^{-1})^*\breve{g}^1_R = \breve{g}^2_R$. Diferenciali točke $(x,\tau) = c^{-1}(y)$ iz enačbe 11 za nek $y \in \mathbb{K}^n(R)$ so enaki

$$\begin{aligned} dx^i &= \frac{Rdy^i}{(R^2-|y|^2)^{1/2}} + \frac{Ry^i\sum_{k=1}^n y^k dy^k}{(R^2-|y|^2)^{3/2}}, \\ d\tau &= \frac{R^2\sum_{k=1}^n y^k dy^k}{(R^2-|y|^2)^{3/2}}. \end{aligned}$$

Od tod izračunamo

$$(c^{-1})^*\breve{g}^1_R = \sum_{i=1}^n (dx^i)^2 - (d\tau)^2 = R^2\frac{\sum_{i=1}^n (dy^i)^2}{R^2-|y|^2} + R^2\frac{(\sum_{i=1}^n y^i dy^i)^2}{(R^2-|y|^2)^2} = \breve{g}^2_R.$$

Torej je centralna projekcija res izometrija med $(\mathbb{H}^n(R), \breve{g}^1_R)$ in $(\mathbb{K}^n(R), \breve{g}^2_R)$.

2.2.2 Hiperbolična stereografska projekcija

Izometriji med hiperboloidom in Poincaréjevo kroglo pravimo *hiperbolična stereografska projekcija*, $h\colon \mathbb{H}^n(R) \to \mathbb{B}^n(R)$. Spominja na običajno stereografsko projekcijo za sfere, zato je tudi njena konstrukcija podobna le-tej.

Naj bo $S = (0,\dots,-R) \in \mathbb{R}^{n,1}$ in izberimo poljubno točko $T = (x^1,\dots,x^n,\tau)$ na hiperboloidu. Označimo presečišče premice ST s hiperravnino $\{(x,\tau);\ \tau = 0\}$ z $V = (v,0) \in \mathbb{R}^{n,1}$ in postavimo $h(T) = v \in \mathbb{B}^n(R)$. Sedaj bomo izračunali predpis, ki definira preslikavo h. Po konstrukciji točke V obstaja enoličen $\lambda > 0$, ki zadošča enakosti $V - S = \lambda(T - S)$. Ekvivalentno lahko po komponentah zapišemo

$$v^i = \lambda x^i, \quad i = 1,\dots n, \qquad\qquad R = \lambda(\tau + R),$$

od koder izračunamo koeficient $\lambda = \frac{R}{\tau+R}$. Formula, ki določa h, je enaka

$$h(x,\tau) = \frac{R}{\tau+R}x. \tag{12}$$

Ker točka (x,τ) leži na hiperboloidu, ocenimo

$$|h(x,\tau)|^2 = \frac{R^2}{(\tau+R)^2}|x|^2 = R^2\frac{\tau^2-R^2}{\tau^2+R^2} < R^2,$$

zato preslikava h res slika v Poincaréjevo kroglo $\mathbb{B}^n(R)$.

Konstruirajmo inverz preslikave. Komponente točke $T \in \mathbb{H}^n(R)$ se v odvisnosti od koeficienta λ izražajo kot

$$x^i = \frac{v^i}{\lambda}, \quad i = 1, \ldots n, \qquad\qquad \tau = R\frac{1-\lambda}{\lambda}.$$

To vstavimo v pogoj za točko na hiperboloidu, $|x|^2 - \tau^2 = -R^2$, kar nam da $\lambda = \frac{R^2 - |v|^2}{2R^2}$. Inverzna preslikava ima potem predpis

$$h^{-1}(v) = \left(\frac{2R^2 v}{R^2 - |v|^2}, R\frac{R^2 + |v|^2}{R^2 - |v|^2}\right). \tag{13}$$

Gladek inverz nam zagotavlja, da je hiperbolična stereografska projekcija difeomorfizem.

Podobno kot v prejšnjem primeru preverimo še enakost $(h^{-1})^* \breve{g}^1_R = \breve{g}^3_R$. Diferenciali komponent točke $(x, \tau) = h^{-1}(v)$ iz predpisa 13 so

$$\begin{aligned} dx^i &= \frac{2R^2 dv^i}{R^2 - |v|^2} + \frac{4R^2 v^i \sum_{k=1}^n v^k dv^k}{(R^2 - |v|^2)^2}, \\ d\tau &= \frac{2R \sum_{k=1}^n v^k dv^k}{R^2 - |v|^2} + \frac{2R(R^2 + |v|^2) \sum_{k=1}^n v^k dv^k}{(R^2 - |v|^2)^2}. \end{aligned}$$

Z nekaj računanja dobimo

$$(h^{-1})^* \breve{g}^1_R = \sum_{i=1}^n (dx^i)^2 - (d\tau)^2 = \breve{g}^3_R.$$

Pokazali smo, da je hiperbolična stereografska projekcija izometrija prostorov $(\mathbb{H}^n(R), \breve{g}^1_R)$ in $(\mathbb{B}^n(R), \breve{g}^3_R)$.

2.2.3 Posplošena Cayleyjeva transformacija

Omenimo še konstrukcijo izometrije med Poincaréjevo polravnino in Poincaréjevo kroglo. V dvodimenzionalnem primeru smo v domači nalogi videli, da izometrijo med Poincaréjevo polravnino $\mathbb{U}$ in Poincaréjevim diskom $\mathbb{D}$ (za $R = 1$) podaja Möbiusova transformacija $\tau \colon \mathbb{U} \to \mathbb{D}$, definirana s predpisom

$$\tau(z) = \frac{1 + iz}{z + i}, \tag{14}$$

kjer je $z = (x, y)$ kompleksen zapis točke v ravnini. S skaliranjem dobimo predpis za preslikavo $k \colon \mathbb{U}^2(R) \to \mathbb{B}^2(R)$,

$$k(z) = iR\frac{z - iR}{z + iR}. \tag{15}$$

Če preidemo v realne koordinate z identifikacijo $\Re z = x$, $\Im z = y$, kratek račun pokaže ekvivalenten predpis

$$k(x, y) = \left(\frac{2xR^2}{x^2 + (y + R)^2}, R\frac{x^2 + y^2 - R^2}{x^2 + (y + R)^2}\right). \tag{16}$$

Preslikavi k pravimo *Cayleyjeva transformacija*.

V splošnem primeru koordinate na Poincaréjevem polprostoru $\mathbb{U}^n(R)$ zapišimo kot $(x^1, \ldots, x^n, y) = (x, y)$ in uporabimo zgornji predpis. Novo preslikavo, ki je prav tako izometrija, imenujemo *posplošena Cayleyjeva transformacija*.

2.3 Lastnosti hiperboličnih prostorov

Trditev 1 *Hiperbolični prostor* $(\mathbb{H}^n(R), \breve{g})$ *je lokalno konformno ploščat.*

Dokaz: Za model hiperboličnega prostora vzemimo Poincaréjevo kroglo $\mathbb{B}^n(R)$. Identična preslikava $id\colon (\mathbb{B}^n(R), \breve{g}^3_R) \to (\mathbb{R}^n, \bar{g})$ je konformna in porodi konformno ekvivalenco Poincaréjeve krogle z odprto podmnožico Evklidskega prostora. Zaradi izometričnosti modelov sledi, da je hiperbolični prostor lokalno konformno ploščat. $\square$

Definicija 6 *Naj bo* $\mathbb{R}^{n,1}$ *prostor Minkowskega* ($n \geq 1$) *opremljen z metriko Minkowskega* $\bar{q}$. *Grupo linearnih preslikav, ki slikajo* $\mathbb{R}^{n,1}$ *vase in ohranjajo metriko Minkowskega, imenujemo* $(n+1)$-dimenzionalna Lorentzova grupa *in označimo z* $\mathrm{O}(n,1)$.

Njeno podgrupo, ki ohranja hiperboloid $\mathbb{H}^n(R)$ *označimo z* $\mathrm{O}^+(n,1)$. *Pravimo ji* ortokrona Lorentzova grupa.

Trditev 2 *Lorentzova grupa* $\mathrm{O}^+(n,1)$ *deluje tranzitivno na množico* $\mathrm{O}(\mathbb{H}^n(R))$. *Hiperbolični prostor* $\mathbb{H}^n(R)$ *je makismalno simetričen.*

Dokaz: Dovolj je pokazati, da za poljubno točko $p \in \mathbb{H}^n(R)$ in ortonormirano bazo $\{e_1, \dots, e_n\}$ prostora $T_p\mathbb{H}^n(R)$ obstaja ortogonalna preslikava, ki preslika točko $N = (0, \dots, 0, R)$ v p ter ortonormirano bazo $\{\partial_1, \dots, \partial_n\}$ za $T_N\mathbb{H}^n(R)$ v bazo $\{e_i\}_i$.

Naj bo $p \in \mathbb{H}^n(R)$ poljubna točka. Identificirajmo p z vektorjem dolžine R v $T_p\mathbb{R}^{n,1}$ in postavimo $\bar{p} = \frac{p}{R}$. $\bar{p}$ je enotski vektor glede na metriko Minkowskega $\bar{q}$, kaže v smeri p, in $\bar{p} \in T_p\mathbb{R}^{n,1}$. Prostor $\mathbb{H}^n(R)$ predstavimo kot v 9. Tedaj je gradient preslikave F glede na metriko $\bar{q}$ enak

$$\mathrm{grad}F = 2\sum_{i=1}^{n} x^i \frac{\partial}{\partial x^i} + 2\tau\frac{\partial}{\partial \tau}.$$

Opazimo, da je $\bar{p} = 2 \cdot \mathrm{grad}F$ in zato $\bar{p} \perp T_p\mathbb{H}^n(R)$. Potem je množica $\{e_1, \dots, e_n, \bar{p}\}$ ortonormirana baza prostora $\mathbb{R}^{n,1}$ glede na metriko $\bar{q}$.

Naj bo M matrika, katere stolpci so vektorji iz zgornje ortonormirane baze. Po konstrukciji velja $M \in \mathrm{O}^+(n,1)$ in M slika $\{\partial_1, \dots, \partial_{n+1}\}$ v $\{e_1, \dots, e_n, \bar{p}\}$ ter N v p. Ker je M kot preslikava linearna na $\mathbb{R}^{n,1}$, je njen diferencial v točki N, $dM_N\colon T_N\mathbb{R}^{n,1} \to T_p\mathbb{R}^{n,1}$, prav tako predstavljen z matriko M. To pa pomeni, da je $dM_n(\partial_i) = e_i$, $i = 1, \dots, n$. M je iskana preslikava in delovanje grupe je tranzitivno. Po definiciji je zato $\mathbb{H}^n(R)$ maksimalno simetričen. $\square$

Lastnost hiperboličnih prostorov, ki jo bomo dokazali v nadaljevanju, je šibkejša od maksimalne simetričnosti, a močnejša od homogenosti. Sprva jo definirajmo.

Definicija 7 *Naj bo* (M, g) *Riemannova mnogoterost in* $p \in M$ *točka na njej. Izometriji* $\phi\colon M \to M$, *za katero velja* $\phi(p) = p$ *in* $d\phi_p = -\mathrm{Id}\colon T_pM \to T_pM$, *pravimo* točkovno zrcaljenje *v točki* p.

Povezana Riemannova mnogoterost (M, g) *je* simetrična, *če v vsaki točki* $p \in M$ *premore točkovno zrcaljenje v* p.

Trditev 3 *Hiperbolični prostor je simetričen.*

Dokaz: Naj bo (M, g) povezana maksimalno simetrična Riemannova mnogoterost. Naj bo $p \in M$ poljubna točka in izberimo ortonormirano bazo $\{e_i\}_i$ za T_pM. Ker je mnogoterost maksimalno simetrična, obstaja izometrija $\phi\colon M \to M$, ki p preslika vase, ortonormirano bazo $\{e_i\}_i$ pa preslika v $\{-e_i\}_i$. Torej zadošča $d\phi_p = -\mathrm{Id}$. To pa je natanko simetričnost.

V posebnem, hiperbolični prostor je povezana Riemannova mnogoterost in po že dokazanem maksimalno simetričen. Iz zgornjega sledi njegova simetričnost. $\square$

2.4 Ukrivljenost

Gaussova ukrivljenost κ ploskve v točki je po definiciji enaka produktu glavnih ukrivljenosti v tej točki. Ničelna Gaussova ukrivljenost karakterizira ploskve, ki so lokalno izomorfne ravnini. Ploskve s pozitivno Gaussovo ukrivljenostjo v točki imajo lastnost, da sta glavni ukrivljenosti v točki istega predznaka (odvisni od izbora normale). Primer take ploskve je 2-sfera $\mathbb{S}^2(R)$ polmera R, za katero velja $\kappa = 1/R^2$. Negativna Gaussova ukrivljenost pa pomeni, da vektorja glavnih ukrivljenosti kažeta v nasprotno smer. Geometrijsko ima ploskev v taki točki obliko sedla.

Za študij so posebej zanimive ploskve s konstantno Gaussovo ukrivljenostjo. Najprej si oglejmo primer.

Primer 3 (Traktoid) *Opazujmo ploskev, vloženo v $\mathbb{R}^3$, in izračunajmo njeno Gaussovo ukrivljenost. Defnirajmo preslikavi*

$$f\colon (0,1) \to \mathbb{R}, \qquad f(r) = \sqrt{1-r^2} - \cosh^{-1}\left(\frac{1}{r}\right);$$
$$\sigma\colon (0,1)\times(0,2\pi) \to \mathbb{R}^3, \qquad \sigma(r,v) = (r\cos v, r\sin v, f(r)).$$

Preslikava σ je parametrizacija rotacijske ploskve, ki jo imenujemo traktoid.

Izračunajmo prvo in drugo fundamentalno formo ploskve.

$$\sigma_r = \left(\cos v, \sin v, \frac{\sqrt{1-r^2}}{r}\right),\ \sigma_v = (-r\sin v, r\cos v, 0),$$
$$\sigma_{rr} = \left(0, 0, -\frac{1}{r^2\sqrt{1-r^2}}\right),\ \sigma_{rv} = \sigma_{vr} = (-\sin v, \cos v, 0),\ \sigma_{vv} = (-r\cos v, -r\sin v, 0),$$
$$\sigma_r \times \sigma_v = \left(-\sqrt{1-r^2}\cos v, -\sqrt{1-r^2}\sin v, r\right),\ ||\sigma_r \times \sigma_v|| = 1,$$
$$n = -\frac{\sigma_r \times \sigma_v}{||\sigma_r \times \sigma_v||} = \left(\sqrt{1-r^2}\cos v, \sqrt{1-r^2}\sin v, -r\right),$$

kjer je n zunanja normala ploskve. Iz parcialnih odvodov izračunamo koeficiente

$$E = \sigma_r \cdot \sigma_r = \frac{1}{r^2},\ F = \sigma_r \cdot \sigma_v = 0,\ G = \sigma_v \cdot \sigma_v = r^2,$$
$$L = \sigma_{rr} \cdot n = \frac{1}{r\sqrt{1-r^2}},\ M = \sigma_{rv} \cdot n = 0,\ N = \sigma_{vv} \cdot n = -r\sqrt{1-r^2}.$$

Po formuli za Gaussovo ukrivljenost končno dobimo

$$\kappa = \frac{LN - M^2}{EG - F^2} = -1.$$

Traktoid ima konstantno negativno Gaussovo ukrivljenost in spada med hiperbolične ploskve. S ploskev, tj. dvodimenzionalnih prostorov, lahko preidemo na prostore poljubnih dimenzij. V razredu smo izračunali Gaussovo ukrivljenost hiperboloida $\mathbb{H}^n(R)$, ki je enaka

$$\kappa(\mathbb{H}^n(R)) = \left(-\frac{1}{iR}\right)^n. \tag{17}$$

Za fiksen izbor števil $n \in \mathbb{N}$, $R > 0$ je $\kappa =$ konst. < 0. Ker je $\mathbb{H}^n(R)$ model hiperboličnega prostora dimenzije n in polmera R, ter so vsi modeli med seboj izometrični, ima vsak hiperbolični prostor konstantno negativno Gaussovo ukrivljenost. Velja tudi $\sec(\mathbb{H}^n(R)) = -1/R^2$, kjer sec označuje *prerezno ukrivljenost*. Za poljubne $R > 0$ dobimo vse možne vrednosti konstantno negativne prerezne ukrivljenosti, ki ustrezajo hiperboličnim prostorom polmera R.

Naslednji rezultat bomo le navedli brez dokaza. Pomemben in zanimiv je zato, ker klasificira Riemannove mnogoterosti glede na njihovo prerezno ukrivljenost.

Izrek 2 (Killing-Hopf) *Naj bo $n \geq 2$ in (M, g) polna [1] enostavno povezana [2] Riemannova mnogoterost dimenzije n s konstantno prerezno ukrivljenostjo. Potem je M izometrična natanko enemu izmed prostorov: Evklidskemu prostoru $\mathbb{R}^n$, n-sferi $\mathbb{S}^n(R)$ ali hiperboličnemu prostoru $\mathbb{H}^n(R)$.*

Ker po zgornjih ugotovitvah vemo, da imajo hiperbolični prostori konstantno negativno prerezno ukrivljenost, bi model hiperboličnega prostora lahko definirali kot polno enostavno povezano Riemannovo mnogoterost s konstantno negativno prerezno ukrivljenostjo.

2.5 Geodetke na modelih hiperboličnih prostorov

Izrek 3 *Maksimalne geodetke na hiperboličnem prostoru so natanko*

1. *glavne hiperbole, natančneje, preseki $\mathbb{H}^n(R)$ z ravnino v $\mathbb{R}^{n,1}$, če je prostor* hiperboloid $\mathbb{H}^n(R)$*;*
2. *premice v notranjosti $\mathbb{K}^n(R)$ v* Beltrami-Kleinovem modelu $\mathbb{K}^n(R)$*;*
3. *premeri krogle $\mathbb{B}^n(R)$ ali krožni loki v notranjosti krogle, ki rob $\partial\mathbb{B}^n(R)$ sekajo pod pravim kotom, v primeru* Poincaréjeve krogle $\mathbb{B}^n(R)$*;*
4. *premice, vzporedne τ-osi, ali polkrožnice s središči na robu $\partial\mathbb{U}^n(R)$, kadar je model* Poincaréjev polprostor $\mathbb{U}^n(R)$*.*

Dodatno, hiperbolični prostor je geodetsko poln (maksimalne geodetke obstajajo za vse $t \in \mathbb{R}$).

Dokaz: Najprej bomo obravnavali model hiperboloida $\mathbb{H}^n(R)$. Opazimo, da je na hiperboloidu tangentna komponenta povezave $\nabla^\perp$ enaka Levi-Civita, saj je $\mathbb{H}^n(R)$ vložena podmnogoterost v $\mathbb{R}^{n,1}$. Geodetke na hiperboloidu zato lahko karakteriziramo z naslednjim pogojem: krivulja $\gamma\colon I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{H}^n(R)$ je geodetka

[1] Riemannova mnogoterost je *polna*, če so maksimalne geodetke definirane za vse $t \in \mathbb{R}$.
[2] Spomnimo se, da je s potmi povezana topološka mnogoterost *enostavno povezana* natanko tedaj, ko ima trivialno prvo fundamentalno grupo.

natanko tedaj, ko je za vse t vektor $\gamma''(t)$ pravokoten na tangentni prostor $T_{\gamma(t)}\mathbb{H}^n(R)$ glede na metriko Minkowskega $\bar{q}$.

Vzemimo poljubno točko $p \in \mathbb{H}^n(R)$ in jo kot v dokazu trditve 2 identificirajmo z vektorjem dolžine R v $T_p\mathbb{R}^{n,1}$. Naj bo F funkcija, ki definira hiperboloid (enakost 9). Opisati želimo elemente tangentnega prostora $T_p\mathbb{H}^n(R)$. Ker velja $\mathrm{grad}F|_p = 2 \cdot p$, neničelni vektor v zadošča $v \in T_p\mathbb{H}^n(R)$ natanko takrat, ko je $\bar{q}(p,v) = 0$ (vektorja p in v sta pravokotna glede na metriko $\bar{q}$).

Izberimo $v \in T_p\mathbb{H}^n(R)$ ter postavimo $a = \frac{|v|_{\bar{q}}}{R}$ in $\bar{v} = \frac{v}{a}$ (tj. $|\bar{v}| = R$). Definirajmo gladko krivuljo $\gamma\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{n,1}$ s predpisom

$$\gamma(t) = \cosh(at) \cdot p + \sinh(at) \cdot \bar{v}.$$

Krivulja leži na hiperboloidu, saj velja $|\sinh(at) \cdot \bar{v}|^2 - |\cosh(at) \cdot p|^2 = -R^2$. Nadalje je

$$\begin{aligned}\gamma'(t) &= a\sinh(at) \cdot p + a\cosh(at) \cdot \bar{v},\\ \gamma''(t) &= a^2\cosh(at) \cdot p + a^2\sinh(at) \cdot \bar{v} = a^2\gamma(t),\\ \bar{q}(\gamma'(t), \gamma''(t)) &= 0,\end{aligned}$$

od koder sledi, da je krivulja γ geodetka v $\mathbb{H}^n(R)$. Veljata še začetna pogoja $\gamma(0) = p$ in $\gamma'(0) = a\bar{v} = v$, zato je $\gamma = \gamma_v$ konstantne hitrosti a. Krivulja γ_v je gladka vložitev $\mathbb{R} \to \mathbb{H}^n(R)$, katere slika je glavna hiperbola (ravnino, ki seka hiperboloid, razpenjata vektorja p, $\bar{v}$).

Naj bo $\Sigma \subset \mathbb{R}^{n,1}$ taka ravnina z ortonormirano bazo $\{v, p\}$, da je njen presek s hiperboloidom $\mathbb{H}^n(R)$ glavna hiperbola H. Potem je H slika geodetke z začetno točko p (točka p in pripadajoč vektor sta identificirana) in začetno hitrostjo v.

Dokazali smo, da so maksimalne geodetke na hiperboloidu natanko glavne hiperbole. Modeli hiperboličnih prostorov so med seboj izometrični, zato zaradi naravnosti Levi-Civita sledi, da so geodetke v vseh modelih vložitve $\mathbb{R}$ v $\mathbb{R}^{n,1}$. Geodetke so torej definirane za vse čase t, kar je posebej lepa lastnost hiperboličnih prostorov, imenovana *geodetska polnost*.

Oglejmo si Beltrami-Kleinov model. Vemo, da izometrijo med hiperboloidom in Beltrami-Kleinovim modelom definira predpis $c\colon \mathbb{H}^n(R) \to \mathbb{K}^n(R)$, $c(x,\tau) = \frac{R}{\tau}x$. Iz zgornjega vemo še, da je slika maksimalne geodetke na hiperboloidu glavna hiperbola. Glavno hiperbolo opisuje sistem enačb

$$\lambda_i x^i + \mu\tau = 0,\ i = 1, \ldots, n \tag{18}$$

za $\lambda_i, \mu \in \mathbb{R}$. Točka (x, τ) zadošča zgornji enačbi natanko takrat, [3] ko za njeno sliko $c(x,\tau) = y$ velja

$$\lambda_i y^i + \mu R = 0,\ i = 1, \ldots, n. \tag{19}$$

Sledi, da izometrija c glavno hiperbolo preslika v presek $\mathbb{K}^n(R)$ in afinega podprostora v $\mathbb{R}^n$ (tega določa 19). Slika gladke krivulje s preslikavo c je gladka

[3] Res, če je $\lambda_i x^i + \mu\tau = 0$, je $\tau = -\frac{\lambda_i x^i}{\mu}$ in $y^i = \frac{Rx^i}{\tau} = -\frac{R\mu}{\lambda_i}$. Obratno, naj velja $\lambda_i y^i + \mu R = 0$. Računamo $\lambda_i x^i + \mu\tau = \lambda_i x^i - \frac{\lambda_i y^i \tau}{R} = \lambda_i(x^i - \frac{y^i\tau}{R}) = \lambda_i \cdot 0 = 0$. Ekvivalenca je dokazana.

krivulja, zato je slika glavne hiperbole, geodetka, evklidska premica v Klein-Beltramijevem modelu $\mathbb{K}^n(R)$.

Sedaj bomo poiskali geodetke na Poincaréjevi krogli. Ko je $n = 2$, z domače naloge vemo, da so geodetke na Poincaréjevem disku premeri diska ter krožni loki, ki rob diska $\partial\mathbb{B}^2(R)$ sekajo pravokotno.

Za splošen n je situacija podobna. Spomnimo se hiperbolične stereografske projekcije h med hiperboloidom in Poincaréjevo kroglo. Ker je geodetka na hiperboloidu določena z ravnino, ki hiperboloid seka netrivialno, je dovolj obravnavati dvodimenzionalni primer. Oglejmo si dve situaciji. Če glavna hiperbola H vsebuje točko $(0, \dots, 0, R) \in \mathbb{H}^n(R)$, nam predpis za preslikavo h pove, da slika hiperbole, $h(H)$, vsebuje izhodišče in je enaka notranjosti premera krogle $\mathbb{B}^n(R)$. V nasprotnem primeru z rotacijo koordinat $(x^1, \dots, x^n, \tau) \to (\tilde{x}^1, \dots, \tilde{x}^n, \tau)$ lahko dosežemo, da ravnina, ki vsebuje glavno hiperbolo H, leži na podprostoru $Lin\{\tilde{x}^1, \tilde{x}^2, \tau\}$. Nato uporabimo znanje iz dvodimenzionalnega primera ter zaključimo, da so geodetke na $\mathbb{B}^n(R)$ premeri krogle in krožni loki, ki rob $\partial\mathbb{B}^n(R)$ sekajo pod pravim kotom.

Na podoben način opišimo še geodetke na Poincaréjevem polprostoru. V dveh dimenzijah z vaj vemo, da so geodetke na Poincaréjevi polravnini natanko navpične premice (vzporednice τ-osi) in polkrožnice s središči na robu polravnine $\partial\mathbb{U}^2(R)$.

V splošnem primeru ($n \in \mathbb{N}$) si bomo pomagali z geodetkami v Poincaréjevi krogli in Cayleyjevo transformacijo k med Poincaréjevim polprostorom ter kroglo. Naj bo $\gamma\colon \mathbb{R} \to \mathbb{U}^n(R)$ maksimalna geodetka, za katero točka $\gamma(0)$ leži na τ-osi in je vektor $\gamma'(0) \in Lin\{\frac{\partial}{\partial x^1}, \frac{\partial}{\partial \tau}\}$. Označimo z (x, τ) koordinate na $\mathbb{U}^n(R)$ ter z (u, v) koordinate na $\mathbb{B}^n(R)$. Predpis za izometrijo k pove, da točka $k \circ \gamma(0)$ leži na v-osi in $(k \circ \gamma)'(0) \in Lin\{\frac{\partial}{\partial u^1}, \frac{\partial}{\partial v}\}$. Ker je k izometrija, je $k \circ \gamma$ geodetka v $\mathbb{B}^n(R)$, vsebovana v $\{u^1, v\}$-ravnini, katere slika je notranjost premera ali krožni lok, pravokoten na rob krogle. Po primeru iz dveh dimenzij sledi, da je geodetka γ vsebovana v $\{x^1, \tau\}$-ravnini, njena slika pa je navpičnica ali polkrožnica s središčem na $\{\tau = 0\}$.

Splošneje, vzemimo poljubno geodetko $\gamma\colon \mathbb{R} \to \mathbb{U}^n(R)$. S translacijo x-koordinat najprej začetno točko $\gamma(0)$ prestavimo na τ-os in nato s primerno rotacijo x-koordinat dobimo $\gamma'(0) \in Lin\{\frac{\partial}{\partial x^1}, \frac{\partial}{\partial \tau}\}$. Uporabimo posebni primer od prej. [4] Geodetke na Poincaréjevem polprosotoru so torej natanko premice, vzporedne τ-osi, ali polkrožnice s središči na $\partial\mathbb{U}^n(R)$. $\square$

3 Hiperbolična geometrija

Literatura

[4]Take transformacije x-koordinat slikajo navpične premice v navpične premice in polkrožnice s središčem na $\{\tau = 0\}$ v polkrožnice z enako lastnostjo, zato z njimi nismo izgubili nobene informacije o geodetkah.