Hiperbolični prostori

Tjaša Vrhovnik
Fakulteta za matematiko in fiziko
Oddelek za matematiko

9. junij 2021

Kazalo

1 Modeli hiperboličnih prostorov

1.1 Osnovne definicije

Naslednje definicije opisujejo mnogoterosti z visoko simetrijo. Natančneje to pomeni, da so njihove grupe izometrij velike. Najpreprostejši primer so Evklidski prostori - zanje že intuitivno vemo, da obstajajo preslikave, izometrije, ki poljubni točki preslikajo eno v drugo, celo več, ortonormirano bazo v prvi točki lahko preslikajo v ortonormirano bazo v drugi. Izkazalo se bo, da to niso edini taki prostori. Drug primer so n-dimenzionalne sfere $\mathbb{S}^n$, mi pa se bomo posvetili študiju hiperboličnih prostorov.

Definicija 1 *Naj bosta* (M, g) *in* $(\tilde{M}, \tilde{g})$ *Riemannovi mnogoterosti. Gladka preslikava* $\phi \colon M \to \tilde{M}$ ohranja metriko, *če velja* $g = \phi^* \tilde{g}$.

Difeomorfizem, ki ohranja metriko, imenujemo izometrija. Lokalna izometrija *pa je lokalni difeomorfizem, ki ohranja metriko.*

Definicija 2 *Naj bo* (M, g) *Riemannova mnogoterost. Množico izometrij mnogoterosti* M*, ki je grupa za komponiranje, označimo z* $\mathrm{Iso}(M, g)$*. Pravimo, da je* (M, g) homogena Riemannova mnogoterost*, če grupa* $\mathrm{Iso}(M, g)$ *deluje tranzitivno na* M*. To pomeni, da za poljuben par točk* $p, q \in M$ *obstaja izometrija* $\phi \colon M \to M$ *z lastnostjo* $\phi(p) = q$.

Če je ϕ izometrija Riemannove mnogoterosti (M, g), je njen diferencial $d\phi$ preslikava na tangentnem prostoru TM. V vsaki točki $p \in M$ diferencial definira linearno izometrijo $d\phi_p \colon T_pM \to T_{\phi(p)}M$.

Definicija 3

1. *Naj bo* $p \in M$*. Podgrupo grupe* $\mathrm{Iso}(M, g)$ *izometrij, ki fiksirajo* p*, imenujemo* izotropična podgrupa *v* p *in označimo z* $\mathrm{Iso}_p(M, g)$.
2. *Preslikavi* $I_p \colon \mathrm{Iso}_p(M, g) \to \mathrm{GL}(T_pM)$*, definirani s predpisom* $I_p(\phi) = d\phi_p$*, pravimo* izotropična reprezentacija.
3. *Mnogoterost* M *je* izotropična v točki p*, kadar izotropična reprezentacija deluje tranzitivno na množico enotskih vektorjev v* T_pM*. Nadalje pravimo, da je* M izotropična*, če je izotropična v vsaki točki* $p \in M$.

Označimo z $\mathrm{O}(M) = \sqcup_{p \in M}\{\text{ortonormirane baze } T_pM\}$ množico vseh ortonormiranih baz na tangentnih prostorih mnogoterosti M. Delovanje grupe izometrij $\mathrm{Iso}(M, g)$ na množico $\mathrm{O}(M)$ povezuje ortonormirani bazi v točkah p in $\phi(p)$ na naslednji način. Naj bo $\phi \in \mathrm{Iso}(M, g)$ in $e_1, \ldots, e_n \in \mathrm{O}(M)$. Delovanje definiramo s predpisom

$$\phi \cdot (e_1, \ldots, e_n) = (d\phi_p(e_1), \ldots, d\phi_p(e_n)). \tag{1}$$

Definicija 4 *Riemannova mnogoterost* (M, g) *je* frame homogeneous *oziroma* maksimalno simetrična*, če je delovanje 1 tranzitivno na množici* $\mathrm{O}(M)$*; natančneje, če za poljuben par* $p, q \in M$ *in poljuben izbor ortonormiranih baz na tangentnih prostorih* T_pM *in* T_qM *obstaja izometrija, ki preslika* p *v* q *ter ortonormirano bazo v točki* p *v izbrano ortonormirano bazo v točki* q.

Geometrično si homogeno Riemannovo mnogoterost predstavljamo kot tako, ki ne glede na izbor točke na njej, izgleda enako. Izotropična Riemannova mnogoterost pa izgleda enako tudi v vseh smereh.

Definicija 5 *Naj bosta (M, g) in $(\tilde{M}, \tilde{g})$ Riemannovi mnogoterosti. Difeomorfizem $\phi\colon M \to \tilde{M}$ je* konformna preslikava*, če obstaja taka pozitivna funkcija $\mu \in \mathcal{C}^\infty(M)$, da velja*

$$\phi^*\tilde{g} = \mu g.$$

V tem primeru pravimo, da sta mnogoterosti (M, g) in $(\tilde{M}, \tilde{g})$ konformno ekvivalentni*.*

Konformni difeomorfizmi med Riemannovimi mnogoterostmi so ravno difeomorfizmi, ki ohranjajo velikosti kotov. Tako se pomen zgornje definicije sklada s konformnostjo, ki jo poznamo iz kompleksne analize.

Posebej zanimive Riemannove mnogoterosti so tiste, ki jih (vsaj) lokalno lahko primerjamo z Evklidskim prostorom. Pravimo, da je Riemannova mnogoterost (M, g) *lokalno konformno ploska*, če ima vsaka točka $p \in M$ okolico, ki je konformno ekvivalentna odprti množici v $(\mathbb{R}^n, \bar{g})$, kjer $\bar{g}$ označuje običajno Evklidsko metriko.

1.2 Modeli

V tem razdelku bomo navedli modele hiperboličnih prostorov, ki so "frame homogeneous"Riemannove mnogoterosti dimenzije $n \geq 1$. Sprva jih bomo le navedli, kasneje pa pokazali njihovo frame homogeneity. Izkaže se, da so vsi ti modeli med seboj izometrični, zato lahko v praksi izberemo kateregakoli izmed njih, na njem obravnavamo želeno in to prenesemo na splošen hiperbolični prostor te dimenzije.

Naj bo $n \geq 1$ in izberimo $R > 0$. $(n+1)$*-dimenzionalni prostor Minkowskega* je prostor $\mathbb{R}^{n,1}$, ki ga v standardnih koordinatah $(x^1, \ldots, x^n, \tau)$ opremimo z *metriko Minkowskega*

$$\bar{q}^{n,1} = (dx^1)^2 + \cdots + (dx^n)^2 - (d\tau)^2. \tag{2}$$

Metriko $\bar{q}^{n,1}$ bomo v nadaljevanju označevali preprosto s $\bar{q}$.

Sedaj definirajmo štiri Riemannove mnogoterosti, ki so osnovni modeli hiperboličnega prostora dimenzije n in polmera R.

1. HIPERBOLOID $\mathbb{H}^n(R)$.

   Vzemimo $(n+1)$-dimenzionalni prostor Minkowskega $\mathbb{R}^{n,1}$ s standardnimi koordinatami $(x^1, \ldots, x^n, \tau)$ in metriko $\bar{q}$. Pozitivni del $(\tau > 0)$ dvodelnega hiperboloida $(x^1)^2 + \cdots + (x^n)^2 - \tau^2 = -R^2$ opremimo z metriko

   $$\breve{g}^1_R = \iota^*\bar{q}, \tag{3}$$

   kjer ι označuje inkluzijo $\iota\colon \mathbb{H}^n(R) \to \mathbb{R}^{n,1}$. Dobljeno podmnogoterost $(\mathbb{H}^n(R), \breve{g}^1_R)$ imenujemo *hiperboloid* dimenzije n s polmerom R.

2. BELTRAMI-KLEINOV MODEL $\mathbb{K}^n(R)$

   Na n-dimenzionalni krogli $\mathbb{K}^n(R)$ s središčem v izhodišču prostora $\mathbb{R}^n$ in polmerom R uvedimo koordinate $(w^1, \ldots, w^n)$. Kroglo opremimo z metriko

   $$\breve{g}^2_R = R^2\frac{(dw^1)^2 + \cdots + (dw^n)^2}{R^2 - |w|^2} + R^2\frac{(w^1dw^1 + \cdots + w^ndw^n)^2}{(R^2 - |w|^2)^2}. \tag{4}$$

   Mnogoterost $(\mathbb{K}^n(R), \breve{g}^2_R)$ se imenuje *Beltrami-Kleinov model.*

3. Poincaréjeva krogla $\mathbb{B}^n(R)$

   Na n-dimenzionalni krogli $\mathbb{B}^n(R)$ s središčem v izhodišču prostora $\mathbb{R}^n$ in polmerom R uvedimo koordinate $(u^1, \ldots, u^n)$. Kroglo opremimo z metriko

$$\breve{g}_R^3 = 4R^4 \frac{(du^1)^2 + \cdots + (du^n)^2}{(R^2 - |u|^2)^2}. \tag{5}$$

   Mnogoterost $(\mathbb{B}^n(R), \breve{g}_R^3)$ definira *Poincaréjevo kroglo.*

4. Poincaréjev polprostor $\mathbb{U}^n(R)$

   Na Evklidskem prostoru $\mathbb{R}^n$ uvedimo koordinate $(x^1, \ldots, x^{n-1}, y)$ in njegov podprostor $\mathbb{U}^n(R) = \{(x, y);\ y > 0\}$ opremimo z metriko

$$\breve{g}_R^4 = R^2 \frac{(dx^1)^2 + \cdots + (dx^{n-1})^2 + dy^2}{y^2}. \tag{6}$$

   Mnogoterosti $(\mathbb{U}^n(R), \breve{g}_R^4)$ pravimo *Poincaréjev polprostor.*

Zaradi izometričnosti zgornjih modelov pogosto hiperbolični prostor dimenzije n s polmerom R označimo z $\mathbb{H}^n(R)$, metriko pa z $\breve{g}_R$, pri čemer imamo v mislih poljubnega izmed modelov. Če za polmer izberemo $R = 1$, Riemannovo mnogoterost označimo z $(\mathbb{H}^n, \breve{g})$ in imenujemo *hiperbolični prostor* dimenzije n. V dveh dimenzijah dobimo *hiperbolično ravnino*, h kateri se bomo vrnili kasneje.

1.3 Izometričnost modelov

Izrek 1 *Modeli n-dimenzionalnih hiperboličnih prostorov s polmerom R so paroma izometrični.*

Trditev 1 *Hiperbolični prostor $(\mathbb{H}^n(R), \breve{g})$ je lokalno konformno ploščat.*

Trditev 2 *Lorentzova grupa $\mathrm{O}^+(n, 1)$ deluje tranzitivno na množico $\mathrm{O}(\mathbb{H}^n(R))$. Hiperbolični prostor $\mathbb{H}^n(R)$ je "frame homogeneous".*

Dovolj je pokazati, da za poljubno točko $p \in \mathbb{H}^n(R)$ in ortonormirano bazo $\{e_1, \ldots, e_n\}$ prostora $T_p\mathbb{H}^n(R)$ obstaja ortogonalna preslikava, ki preslika točko $N = (0, \ldots, 0, R)$ v p ter ortonormirano bazo $\{\partial_1, \ldots, \partial_n\}$ za $T_N\mathbb{H}^n(R)$ v bazo $\{e_i\}_i$.

Naj bo $p \in \mathbb{H}^n(R)$ poljubna točka. Identificirajmo p z vektorjem dolžine R v $T_p\mathbb{R}^{n,1}$ in postavimo $\bar{p} = \frac{p}{R}$. $\bar{p}$ je enotski vektor glede na metriko Minkowskega $\bar{q}$, kaže v smeri p, in $\bar{p} \in T_p\mathbb{R}^{n,1}$. Prostor $\mathbb{H}^n(R)$ lahko opišemo kot

$$\mathbb{H}^n(R) = F^{-1}(-R^2) \cap \{\tau > 0\},$$

kjer je preslikava $F\colon \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$ definirana s predpisom $F(x^1, \ldots, x^n, \tau) = \sum_{i=1}^n (x^i)^2 - \tau^2$. Tedaj je gradient preslikave F glede na metriko $\bar{q}$ enak

$$\mathrm{grad} F = 2 \sum_{i=1}^n x^i \frac{\partial}{\partial x^i} + 2\tau \frac{\partial}{\partial \tau}.$$

Opazimo, da je $\bar{p} = 2 \cdot \mathrm{grad} F$ in zato $\bar{p} \perp T_p\mathbb{H}^n(R)$. Potem je množica $\{e_1, \ldots, e_n, \bar{p}\}$ ortonormirana baza prostora $\mathbb{R}^{n,1}$ glede na metriko $\bar{q}$.

Naj bo M matrika, katere stolpci so vektorji iz zgornje ortonormirane baze. Po konstrukciji velja $M \in \mathrm{O}^+(n,1)$ in M slika $\{\partial_1, \ldots, \partial_{n+1}\}$ v $\{e_1, \ldots, e_n, \bar{p}\}$ ter N v p. Ker je M kot preslikava linearna na $\mathbb{R}^{n,1}$, je njen diferencial v točki N, $dM_N \colon T_N\mathbb{R}^{n,1} \to T_p\mathbb{R}^{n,1}$, prav tako predstavljen z matriko M. To pa pomeni, da je $dM_n(\partial_i) = e_i$, $i = 1, \ldots, n$. M je iskana preslikava in delovanje grupe je tranzitivno. Po definiciji je zato $\mathbb{H}^n(R)$ frame homogeneous.

2 Hiperbolična geometrija

Literatura