

Hiperbolični prostori

TJAŠA VRHOVNIK
Fakulteta za matematiko in fiziko
Oddelek za matematiko

13. junij 2021

Kazalo

1	Osnovne definicije	3
2	O hiperboličnih prostorih	4
2.1	Modeli	4
2.2	Izometričnost modelov	6
2.2.1	Centralna projekcija	6
2.2.2	Hiperbolična stereografska projekcija	7
2.2.3	Posplošena Cayleyjeva transformacija	8
2.3	Lastnosti hiperboličnih prostorov	9
2.4	Ukrivljenost	9
2.5	Geodetke na modelih hiperboličnih prostorov	11
3	Hiperbolična geometrija	13

1 Osnovne definicije

Naslednje definicije opisujejo mnogoterosti z visoko simetrijo. Natančneje to pomeni, da so njihove grupe izometrij velike. Najpreprostejši primer so Evklidski prostori - zanje že intuitivno vemo, da obstajajo preslikave, izometrije, ki poljubni točki preslikajo eno v drugo, celo več, ortonormirano bazo v prvi točki lahko preslikajo v ortonormirano bazo v drugi. Izkazalo se bo, da to niso edini taki prostori. Drug primer so n -dimenzionalne sfere \mathbb{S}^n , mi pa se bomo posvetili študiju hiperboličnih prostorov.

Definicija 1 Naj bosta (M, g) in (\tilde{M}, \tilde{g}) Riemannovi mnogoterosti. Gladka preslikava $\phi: M \rightarrow \tilde{M}$ ohranja metriko, če velja $g = \phi^* \tilde{g}$.

Difeomorfizem, ki ohranja metriko, imenujemo izometrija. Lokalna izometrija pa je lokalni difeomorfizem, ki ohranja metriko.

Definicija 2 Naj bo (M, g) Riemannova mnogoterost. Množico izometrij mnogoterosti M , ki je grupa za komponiranje, označimo z $\text{Iso}(M, g)$. Pravimo, da je (M, g) homogena Riemannova mnogoterost, če grupa $\text{Iso}(M, g)$ deluje tranzitivno na M . To pomeni, da za poljuben par točk $p, q \in M$ obstaja izometrija $\phi: M \rightarrow M$ z lastnostjo $\phi(p) = q$.

Če je ϕ izometrija Riemannove mnogoterosti (M, g) , je njen diferencial $d\phi$ preslikava na tangentnem prostoru TM . V vsaki točki $p \in M$ diferencial definira linearno izometrijo $d\phi_p: T_p M \rightarrow T_{\phi(p)} M$.

Definicija 3 Naj bo $p \in M$. Podgrupo grupe $\text{Iso}(M, g)$ izometrij, ki fiksirajo p , imenujemo izotropična podgrupa v p in označimo z $\text{Iso}_p(M, g)$.

Preslikavi $I_p: \text{Iso}_p(M, g) \rightarrow \text{GL}(T_p M)$, definirani s predpisom $I_p(\phi) = d\phi_p$, pravimo izotropična reprezentacija.

Mnogoterost M je izotropična v točki p , kadar izotropična reprezentacija deluje tranzitivno na množico enotskih vektorjev v $T_p M$. Nadalje pravimo, da je M izotropična, če je izotropična v vsaki točki $p \in M$.

Označimo z $O(M) = \sqcup_{p \in M} \{\text{ortonormirane baze } T_p M\}$ množico vseh ortonormiranih baz na tangentnih prostorih mnogoterosti M . Delovanje grupe izometrij $\text{Iso}(M, g)$ na množico $O(M)$ povezuje ortonormirani bazi v točkah p in $\phi(p)$ na naslednji način. Naj bo $\phi \in \text{Iso}(M, g)$ in $\{e_1, \dots, e_n\} \in O(M)$. Delovanje definiramo s predpisom

$$\phi \cdot (e_1, \dots, e_n) = (d\phi_p(e_1), \dots, d\phi_p(e_n)). \quad (1)$$

Definicija 4 Riemannova mnogoterost (M, g) je maksimalno simetrična, če je delovanje 1 tranzitivno na množici $O(M)$; natančneje, če za poljuben par $p, q \in M$ in poljuben izbor ortonormiranih baz na tangentnih prostorih $T_p M$ in $T_q M$ obstaja izometrija, ki preslika p v q ter ortonormirano bazo v točki p v izbrano ortonormirano bazo v točki q .

Geometrično si homogeno Riemannovo mnogoterost predstavljamo kot tako, ki v vsaki točki na njej izgleda enako. Izotropična Riemannova mnogoterost pa izgleda enako tudi v vseh smereh.

Definicija 5 Naj bosta (M, g) in (\tilde{M}, \tilde{g}) Riemannovi mnogoterosti. Difeomorfizem $\phi: M \rightarrow \tilde{M}$ je konformna preslikava, če obstaja taka pozitivna funkcija $\mu \in C^\infty(M)$, da velja

$$\phi^* \tilde{g} = \mu g.$$

V tem primeru pravimo, da sta mnogoterosti (M, g) in (\tilde{M}, \tilde{g}) konformno ekvivalentni.

Konformni difeomorfizmi med Riemannovimi mnogoterostmi so ravno difeomorfizmi, ki ohranjajo velikosti kotov. Tako se pomen zgornje definicije sklada s konformnostjo, ki jo poznamo iz kompleksne analize.

Posebej zanimive Riemannove mnogoterosti so tiste, ki jih (vsaj) lokalno lahko primerjamo z Evklidskim prostorom. Pravimo, da je Riemannova mnogoterost (M, g) *lokalno konformno ploska*, če ima vsaka točka $p \in M$ okolico, ki je konformno ekvivalentna odprti množici v (\mathbb{R}^n, \bar{g}) , kjer \bar{g} označuje običajno Evklidsko metriko. Videli bomo, da imajo hiperbolični prostori to lastnost.

2 O hiperboličnih prostorih

2.1 Modeli

V tem razdelku bomo navedli modele hiperboličnih prostorov, ki so maksimalno simetrične Riemannove mnogoterosti dimenzije $n \geq 1$. Sprva jih bomo le navedli, kasneje pa pokazali njihovo frame homogeneity. Izkaže se, da so vsi ti modeli med seboj izometrični, zato lahko v praksi izberemo kateregakoli izmed njih, na njem obravnavamo želeno in to prenesemo na splošen hiperbolični prostor te dimenzije.

Naj bo $n \geq 1$ in izberimo $R > 0$. $(n+1)$ -dimenzionalni prostor Minkowskega je prostor $\mathbb{R}^{n,1}$, ki ga v standardnih koordinatah (x^1, \dots, x^n, τ) opremimo z metriko Minkowskega

$$\bar{q}^{n,1} = (dx^1)^2 + \dots + (dx^n)^2 - (d\tau)^2. \quad (2)$$

Metriko $\bar{q}^{n,1}$ bomo v nadaljevanju označevali preprosto s \bar{q} .

Primer 1 4-dimenzionalni prostor Minkowskega $\mathbb{R}^{3,1}$ s koordinatami (x, y, z, t) opisuje prostor-čas v Einsteinovi teoriji relativnosti. Grupo izometrij, $O(3,1)$, imenovano Poncaréjeva grupa sestavlja 10 generatorjev: tri prostorske in ena časovna translacija, tri rotacije (v ravninah (x, y) , (x, z) , (y, z)) in trije Lorentzovi potiski (rotacije v ravninah (t, x) , (t, y) , (t, z)).

Sedaj definirajmo štiri Riemannove mnogoterosti, ki so osnovni modeli hiperboličnega prostora dimenzije n in polmera R .

1. HIPERBOLOID $\mathbb{H}^n(R)$.

Vzemimo $(n+1)$ -dimenzionalni prostor Minkowskega $\mathbb{R}^{n,1}$ s standardnimi koordinatami (x^1, \dots, x^n, τ) in metriko \bar{q} . Pozitivni del ($\tau > 0$) dvodelnega hiperboloida $(x^1)^2 + \dots + (x^n)^2 - \tau^2 = -R^2$ opremimo z metriko

$$\check{g}_R^1 = \iota^* \bar{q}, \quad (3)$$

kjer ι označuje inkluzijo $\iota: \mathbb{H}^n(R) \rightarrow \mathbb{R}^{n,1}$. Dobljeno podmnogoterost $(\mathbb{H}^n(R), \check{g}_R^1)$ imenujemo *hiperbolooid* dimenzije n s polmerom R .

2. BELTRAMI-KLEINOV MODEL $\mathbb{K}^n(R)$

Na n -dimenzionalni krogli $\mathbb{K}^n(R)$ s središčem v izhodišču prostora \mathbb{R}^n in polmerom R uvedimo koordinate (w^1, \dots, w^n) . Kroglo opremimo z metriko

$$\check{g}_R^2 = R^2 \frac{(dw^1)^2 + \dots + (dw^n)^2}{R^2 - |w|^2} + R^2 \frac{(w^1 dw^1 + \dots + w^n dw^n)^2}{(R^2 - |w|^2)^2}. \quad (4)$$

Mnogoterost $(\mathbb{K}^n(R), \check{g}_R^2)$ se imenuje *Beltrami-Kleinov model*.

3. POINCARÉJEVA KROGLA $\mathbb{B}^n(R)$

Na n -dimenzionalni krogli $\mathbb{B}^n(R)$ s središčem v izhodišču prostora \mathbb{R}^n in polmerom R uvedimo koordinate (u^1, \dots, u^n) . Kroglo opremimo z metriko

$$\check{g}_R^3 = 4R^4 \frac{(du^1)^2 + \dots + (du^n)^2}{(R^2 - |u|^2)^2}. \quad (5)$$

Mnogoterost $(\mathbb{B}^n(R), \check{g}_R^3)$ definira *Poincaréjevo kroglo*.

4. POINCARÉJEV POLPROSTOR $\mathbb{U}^n(R)$

Na Evklidskem prostoru \mathbb{R}^n uvedimo koordinate (x^1, \dots, x^{n-1}, y) in njegov podprostor $\mathbb{U}^n(R) = \{(x, y); y > 0\}$ opremimo z metriko

$$\check{g}_R^4 = R^2 \frac{(dx^1)^2 + \dots + (dx^{n-1})^2 + dy^2}{y^2}. \quad (6)$$

Mnogoterosti $(\mathbb{U}^n(R), \check{g}_R^4)$ pravimo *Poincaréjev polprostor*.

Zaradi izometričnosti zgornjih modelov pogosto hiperbolični prostor dimenzije n s polmerom R označimo z $\mathbb{H}^n(R)$, metriko pa z \check{g}_R , pri čemer imamo v mislih poljubnega izmed modelov. Če za polmer izberemo $R = 1$, Riemannovo mnogoterost označimo s $(\mathbb{H}^n, \check{g})$ in imenujemo *hiperbolični prostor* dimenzije n . V dveh dimenzijah dobimo *hiperbolično ravnino*, h kateri se bomo vrnili kasneje.

Primer 2 *Vzemimo enotsko n -dimenzionalno Poincaréjevo kroglo $\mathbb{B}^n(1)$. Izračunajmo razdaljo med izhodiščem in točko $P = (R, 0, \dots, 0)$ v Poincaréjevi krogli:*

$$r = d(0, P) = \int_0^R \sqrt{\check{g}_1^3} = \int_0^R \frac{2ds}{1 - |s|^2} = \ln \frac{1+R}{1-R}. \quad (7)$$

S preoblikovanjem zgornje zveze dobimo

$$R = \frac{e^r - 1}{e^r + 1} = \tanh \frac{r}{2}, \quad (8)$$

ki pove, kako se (evklidski) polmer Poincaréjeve krogle $\mathbb{B}^n(R)$ izraža s hiperbolično razdaljo r .

Kolikšna pa je njena prostornina? Naj bo $d\mu^n(w)$ volumski element za $\mathbb{B}^n(R)$

(koordinate $w = (u, v)$). Velja $d\mu^n(w) = u^{n-1}d\text{Vol}(\mathbb{S}^{n-1})(v)$. Sledi

$$\begin{aligned}\text{Vol}(\mathbb{B}^n(R)) &= \int_{\mathbb{B}^n(R)} \frac{2^n d\mu^n(s)}{(1-|s|^2)^n} = \text{Vol}(\mathbb{S}^{n-1}) \int_0^R \frac{2^n y^{n-1}}{(1-y^2)^n} dy \\ &= 2^{n-1} \text{Vol}(\mathbb{S}^{n-1}) \int_0^{\tanh \frac{r}{2}} \frac{2y^{n-1}}{(1-y^2)^n} dy \quad \left[y = \tanh \frac{x}{2} \right] \\ &= 2^{n-1} \text{Vol}(\mathbb{S}^{n-1}) \int_0^r \sinh^{n-1} \frac{x}{2} \cosh^{n-1} \frac{x}{2} dx \\ &= \text{Vol}(\mathbb{S}^{n-1}) \int_0^r \sinh^{n-1} x dx\end{aligned}$$

Opazimo, da za velike r , tj. v limiti, ko gre $r \rightarrow \infty$, dobimo približno oceno

$$\text{Vol}(\mathbb{B}^n(R)) \sim \frac{1}{2^{n-1}} \text{Vol}(\mathbb{S}^{n-1}) e^{r(n-1)}.$$

Z besedami to pomeni, da je prostornina Poincaréjeve krogle eksponentno odvisna od njenega polmera. V Evklidskih prostorih je odvisnost polinomska.

2.2 Izometričnost modelov

Izrek 1 *Modeli n -dimenzionalnih hiperboličnih prostorov s polmerom R so paroma izometrični.*

Dokaz bo potekal v več korakih. Najprej bomo preverili, da je hiperbolični prostor Riemannova mnogoterost. Nato bomo konstruirali izometrije med naslednjimi pari modelov: hiperboloidom in Beltrami-Kleinovim modelom, hiperboloidom in Poincaréjevo kroglo ter Poincaréjevim polprostorom in Poincaréjevo kroglo.

Dokažimo najprej, da je hiperboloid $\mathbb{H}^n(R)$ Riemannova podmnogoterost prostora $\mathbb{R}^{n,1}$. To zadostuje, saj bo iz izometričnosti sledilo, da so vsi modeli Riemannove mnogoterosti. Prostor $\mathbb{H}^n(R)$ lahko opišemo kot

$$\mathbb{H}^n(R) = F^{-1}(-R^2) \cap \{\tau > 0\}, \quad (9)$$

kjer je preslikava $F: \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$ definirana s predpisom $F(x^1, \dots, x^n, \tau) = \sum_{i=1}^n (x^i)^2 - \tau^2$. Tangentni prostor v točki $p \in \mathbb{H}^n(R)$, ki je enak $T_p \mathbb{H}^n(R) = \ker dF_p$, razpenjajo vektorji $X^i = \tau \frac{\partial}{\partial x^i} + x^i \frac{\partial}{\partial \tau}$ za $i = 1, \dots, n$. Ker je njihov produkt (glede na metriko \bar{q}) pozitiven, je metrika \check{g}_R^1 pozitivno definitna in določa Riemannovo podmnogoterost $(\mathbb{H}^n(R), \check{g}_R^1)$.

2.2.1 Centralna projekcija

Izometrija med hiperboloidom in Beltrami-Kleinovim modelom se imenuje *centralna projekcija*, $c: \mathbb{H}^n(R) \rightarrow \mathbb{K}^n(R)$.

Naj bo $T = (x^1, \dots, x^n, \tau) \in \mathbb{H}^n(R)$ poljubna točka. Presečišče premice OT skozi izhodišče v $\mathbb{R}^{n,1}$ in točko T s hiperravnino $\{(x, \tau); \tau = R\}$ označimo z $Y \in \mathbb{R}^{n,1}$. Pišimo $Y = (y, R)$, kjer je $y = c(T) \in \mathbb{K}^n(R)$ slika T s centralno projekcijo. Tedaj se koordinate točke Y izražajo s koordinatami T , natančneje, $Y = \frac{R}{\tau} T$. Preslikavo c zato podaja zveza

$$c(x, \tau) = \frac{R}{\tau} x. \quad (10)$$

Ker slika točke s preslikavo c leži na hiperboloidu, velja

$$|c(x, \tau)|^2 = \frac{R^2}{\tau^2} |x|^2 = \frac{R^2}{\tau^2} (\tau^2 - R^2) = R^2 \left(1 - \frac{R^2}{\tau^2}\right) < R^2,$$

torej je $c(x, \tau) \in \mathbb{K}^n(R)$ in je centralna projekcija dobro definirana.

Da je preslikava c difeomorfizem, bomo pokazali s konstrukcijo njenega inverza. Vzemimo poljubno točko $y \in \mathbb{K}^n(R)$. Potem obstaja enoličen $\lambda > 0$, da velja $(x, \tau) = \lambda(y, R) \in \mathbb{H}^n(R)$. Slednja točka je določena z zvezo $\lambda^2(|y|^2 - R^2) = -R^2$, od koder sledi $\lambda = \frac{R}{(R^2 - |y|^2)^{1/2}}$. Potem predpis

$$c^{-1}(y) = \left(\frac{Ry}{(R^2 - |y|^2)^{1/2}}, \frac{R^2}{(R^2 - |y|^2)^{1/2}} \right) \quad (11)$$

definira gladko preslikavo, ki je inverz centralne projekcije.

Nazadnje dokažimo, da je c izometrija. Želimo videti, da velja enakost $(c^{-1})^* \check{g}_R^1 = \check{g}_R^2$. Diferenciali točke $(x, \tau) = c^{-1}(y)$ iz enačbe 11 za nek $y \in \mathbb{K}^n(R)$ so enaki

$$\begin{aligned} dx^i &= \frac{R dy^i}{(R^2 - |y|^2)^{1/2}} + \frac{R y^i \sum_{k=1}^n y^k dy^k}{(R^2 - |y|^2)^{3/2}}, \\ d\tau &= \frac{R^2 \sum_{k=1}^n y^k dy^k}{(R^2 - |y|^2)^{3/2}}. \end{aligned}$$

Od tod izračunamo

$$(c^{-1})^* \check{g}_R^1 = \sum_{i=1}^n (dx^i)^2 - (d\tau)^2 = R^2 \frac{\sum_{i=1}^n (dy^i)^2}{R^2 - |y|^2} + R^2 \frac{(\sum_{i=1}^n y^i dy^i)^2}{(R^2 - |y|^2)^2} = \check{g}_R^2.$$

Torej je centralna projekcija res izometrija med $(\mathbb{H}^n(R), \check{g}_R^1)$ in $(\mathbb{K}^n(R), \check{g}_R^2)$.

2.2.2 Hiperbolična stereografska projekcija

Izometriji med hiperboloidom in Poincaréjevo kroglo pravimo *hiperbolična stereografska projekcija*, $h: \mathbb{H}^n(R) \rightarrow \mathbb{B}^n(R)$. Spominja na običajno stereografsko projekcijo za sfere, zato je tudi njena konstrukcija podobna le-tej.

Načrt bo $S = (0, \dots, -R) \in \mathbb{R}^{n,1}$ in izberimo poljubno točko $T = (x^1, \dots, x^n, \tau)$ na hiperboloidu. Označimo presečišče premice ST s hiperravnino $\{(x, \tau); \tau = 0\}$ z $V = (v, 0) \in \mathbb{R}^{n,1}$ in postavimo $h(T) = v \in \mathbb{B}^n(R)$. Sedaj bomo izračunali predpis, ki definira preslikavo h . Po konstrukciji točke V obstaja enoličen $\lambda > 0$, ki zadošča enakosti $V - S = \lambda(T - S)$. Ekvivalentno lahko po komponentah zapišemo

$$v^i = \lambda x^i, \quad i = 1, \dots, n, \quad R = \lambda(\tau + R),$$

od koder izračunamo koeficient $\lambda = \frac{R}{\tau + R}$. Formula, ki določa h , je enaka

$$h(x, \tau) = \frac{R}{\tau + R} x. \quad (12)$$

Ker točka (x, τ) leži na hiperboloidu, ocenimo

$$|h(x, \tau)|^2 = \frac{R^2}{(\tau + R)^2} |x|^2 = R^2 \frac{\tau^2 - R^2}{\tau^2 + R^2} < R^2,$$

zato preslikava h res slika v Poincaréjevo kroglo $\mathbb{B}^n(R)$.

Konstruirajmo inverz preslikave. Komponente točke $T \in \mathbb{H}^n(R)$ se v odvisnosti od koeficienta λ izražajo kot

$$x^i = \frac{v^i}{\lambda}, \quad i = 1, \dots, n, \quad \tau = R \frac{1 - \lambda}{\lambda}.$$

To vstavimo v pogoj za točko na hiperboloidu, $|x|^2 - \tau^2 = -R^2$, kar nam da $\lambda = \frac{R^2 - |v|^2}{2R^2}$. Inverzna preslikava ima potem predpis

$$h^{-1}(v) = \left(\frac{2R^2 v}{R^2 - |v|^2}, R \frac{R^2 + |v|^2}{R^2 - |v|^2} \right). \quad (13)$$

Gladek inverz nam zagotavlja, da je hiperbolična stereografska projekcija difeomorfizem.

Podobno kot v prejšnjem primeru preverimo še enakost $(h^{-1})^* \check{g}_R^1 = \check{g}_R^3$. Diferenciali komponent točke $(x, \tau) = h^{-1}(v)$ iz predpisa 13 so

$$\begin{aligned} dx^i &= \frac{2R^2 dv^i}{R^2 - |v|^2} + \frac{4R^2 v^i \sum_{k=1}^n v^k dv^k}{(R^2 - |v|^2)^2}, \\ d\tau &= \frac{2R \sum_{k=1}^n v^k dv^k}{R^2 - |v|^2} + \frac{2R(R^2 + |v|^2) \sum_{k=1}^n v^k dv^k}{(R^2 - |v|^2)^2}. \end{aligned}$$

Z nekaj računanja dobimo

$$(h^{-1})^* \check{g}_R^1 = \sum_{i=1}^n (dx^i)^2 - (d\tau)^2 = \check{g}_R^3.$$

Pokazali smo, da je hiperbolična stereografska projekcija izometrija prostorov $(\mathbb{H}^n(R), \check{g}_R^1)$ in $(\mathbb{B}^n(R), \check{g}_R^3)$.

2.2.3 Posplošena Cayleyjeva transformacija

Omenimo še konstrukcijo izometrije med Poincaréjevo polravnino in Poincaréjevo kroglo. V dvodimenzionalnem primeru smo v domači nalogi videli, da izometrijo med Poincaréjevo polravnino \mathbb{U} in Poincaréjevim diskom \mathbb{D} (za $R = 1$) podaja Möbiusova transformacija $\tau: \mathbb{U} \rightarrow \mathbb{D}$, definirana s predpisom

$$\tau(z) = \frac{1 + iz}{z + i}, \quad (14)$$

kjer je $z = (x, y)$ kompleksen zapis točke v ravnini. S skaliranjem dobimo predpis za preslikavo $k: \mathbb{U}^2(R) \rightarrow \mathbb{B}^2(R)$,

$$k(z) = iR \frac{z - iR}{z + iR}. \quad (15)$$

Če preidemo v realne koordinate z identifikacijo $\Re z = x$, $\Im z = y$, kratek račun pokaže ekvivalenten predpis

$$k(x, y) = \left(\frac{2xR^2}{x^2 + (y + R)^2}, R \frac{x^2 + y^2 - R^2}{x^2 + (y + R)^2} \right). \quad (16)$$

Preslikavi k pravimo *Cayleyjeva transformacija*.

V splošnem primeru koordinate na Poincaréjevem polprostoru $\mathbb{U}^n(R)$ zapišimo kot $(x^1, \dots, x^n, y) = (x, y)$ in uporabimo zgornji predpis. Novo preslikavo, ki je prav tako izometrija, imenujemo *posplošena Cayleyjeva transformacija*.

2.3 Lastnosti hiperboličnih prostorov

Trditev 1 *Hiperbolični prostor $(\mathbb{H}^n(R), \bar{g})$ je lokalno konformno ploščat.*

Dokaz: Za model hiperboličnega prostora vzemimo Poincaréjevo kroglo $\mathbb{B}^n(R)$. Identična preslikava $id: (\mathbb{B}^n(R), \bar{g}_R^3) \rightarrow (\mathbb{R}^n, \bar{g})$ je konformna in porodi konformno ekvivalenco Poincaréjeve krogle z odprto podmnožico Evklidskega prostora. Zaradi izometričnosti modelov sledi, da je hiperbolični prostor lokalno konformno ploščat. \square

Definicija 6 *Naj bo $\mathbb{R}^{n,1}$ prostor Minkowskega ($n \geq 1$) opremljen z metriko Minkowskega \bar{q} . Grupo linearnih preslikav, ki slikajo $\mathbb{R}^{n,1}$ vase in ohranjajo metriko Minkowskega, imenujemo $(n+1)$ -dimenzionalna Lorentzova grupa in označimo z $O(n, 1)$.*

Njeno podgrupo, ki ohranja hiperboloid $\mathbb{H}^n(R)$ označimo z $O^+(n, 1)$. Pravimo ji ortokrona Lorentzova grupa.

Trditev 2 *Lorentzova grupa $O^+(n, 1)$ deluje tranzitivno na množico $O(\mathbb{H}^n(R))$. Hiperbolični prostor $\mathbb{H}^n(R)$ je makismalno simetričen.*

Dokaz: Dovolj je pokazati, da za poljubno točko $p \in \mathbb{H}^n(R)$ in ortonormirano bazo $\{e_1, \dots, e_n\}$ prostora $T_p\mathbb{H}^n(R)$ obstaja ortogonalna preslikava, ki preslika točko $N = (0, \dots, 0, R)$ v p ter ortonormirano bazo $\{\partial_1, \dots, \partial_n\}$ za $T_N\mathbb{H}^n(R)$ v bazo $\{e_i\}_i$.

Naj bo $p \in \mathbb{H}^n(R)$ poljubna točka. Identificirajmo p z vektorjem dolžine R v $T_p\mathbb{R}^{n,1}$ in postavimo $\bar{p} = \frac{p}{R}$. \bar{p} je enotski vektor glede na metriko Minkowskega \bar{q} , kaže v smeri p , in $\bar{p} \in T_p\mathbb{R}^{n,1}$. Prostor $\mathbb{H}^n(R)$ predstavimo kot v 9. Tedaj je gradient preslikave F glede na metriko \bar{q} enak

$$\text{grad}F = 2 \sum_{i=1}^n x^i \frac{\partial}{\partial x^i} + 2\tau \frac{\partial}{\partial \tau}.$$

Opazimo, da je $\bar{p} = 2 \cdot \text{grad}F$ in zato $\bar{p} \perp T_p\mathbb{H}^n(R)$. Potem je množica $\{e_1, \dots, e_n, \bar{p}\}$ ortonormirana baza prostora $\mathbb{R}^{n,1}$ glede na metriko \bar{q} .

Naj bo M matrika, katere stolpci so vektorji iz zgornje ortonormirane baze. Po konstrukciji velja $M \in O^+(n, 1)$ in M slika $\{\partial_1, \dots, \partial_{n+1}\}$ v $\{e_1, \dots, e_n, \bar{p}\}$ ter N v p . Ker je M kot preslikava linearna na $\mathbb{R}^{n,1}$, je njen diferencial v točki N , $dM_N: T_N\mathbb{R}^{n,1} \rightarrow T_p\mathbb{R}^{n,1}$, prav tako predstavljen z matriko M . To pa pomeni, da je $dM_n(\partial_i) = e_i$, $i = 1, \dots, n$. M je iskana preslikava in delovanje grupe je tranzitivno. Po definiciji je zato $\mathbb{H}^n(R)$ maksimalno simetričen. \square

2.4 Ukrivljenost

Gaussova ukrivljenost κ ploskve v točki je po definiciji enaka produktu glavnih ukrivljenosti v tej točki. Ničelna Gaussova ukrivljenost karakterizira ploskve, ki so lokalno izomorfne ravnini. Ploskve s pozitivno Gaussovo ukrivljenostjo v točki imajo lastnost, da sta glavni ukrivljenosti v točki istega predznaka (odvisni od izbora normale). Primer take ploskve je 2-sfera $\mathbb{S}^2(R)$ polmera R , za katero velja $\kappa = 1/R^2$. Negativna Gaussova ukrivljenost pa pomeni, da vektorja glavnih ukrivljenosti kažeta v nasprotno smer. Geometrijsko ima ploskev v taki točki obliko sedla.

Za študij so posebej zanimive ploskve s konstantno Gaussovo ukrivljenostjo. Najprej si oglejmo primer.

Primer 3 (Traktoid) Opazujmo ploskev, vloženo v \mathbb{R}^3 , in izračunajmo njeno Gaussovo ukrivljenost. Defnirajmo preslikavi

$$\begin{aligned} f: (0, 1) &\rightarrow \mathbb{R}, & f(r) &= \sqrt{1-r^2} - \cosh^{-1}\left(\frac{1}{r}\right); \\ \sigma: (0, 1) \times (0, 2\pi) &\rightarrow \mathbb{R}^3, & \sigma(r, v) &= (r \cos v, r \sin v, f(r)). \end{aligned}$$

Preslikava σ je parametrizacija rotacijske ploskve, ki jo imenujemo traktoid. Izračunajmo prvo in drugo fundamentalno formo ploskve.

$$\begin{aligned} \sigma_r &= \left(\cos v, \sin v, \frac{\sqrt{1-r^2}}{r} \right), \quad \sigma_v = (-r \sin v, r \cos v, 0), \\ \sigma_{rr} &= \left(0, 0, -\frac{1}{r^2 \sqrt{1-r^2}} \right), \quad \sigma_{rv} = \sigma_{vr} = (-\sin v, \cos v, 0), \quad \sigma_{vv} = (-r \cos v, -r \sin v, 0), \\ \sigma_r \times \sigma_v &= \left(-\sqrt{1-r^2} \cos v, -\sqrt{1-r^2} \sin v, r \right), \quad \|\sigma_r \times \sigma_v\| = 1, \\ n &= -\frac{\sigma_r \times \sigma_v}{\|\sigma_r \times \sigma_v\|} = \left(\sqrt{1-r^2} \cos v, \sqrt{1-r^2} \sin v, -r \right), \end{aligned}$$

kjer je n zunanja normala ploskve. Iz parcialnih odvodov izračunamo koeficiente

$$\begin{aligned} E &= \sigma_r \cdot \sigma_r = \frac{1}{r^2}, \quad F = \sigma_r \cdot \sigma_v = 0, \quad G = \sigma_v \cdot \sigma_v = r^2, \\ L &= \sigma_{rr} \cdot n = \frac{1}{r \sqrt{1-r^2}}, \quad M = \sigma_{rv} \cdot n = 0, \quad N = \sigma_{vv} \cdot n = -r \sqrt{1-r^2}. \end{aligned}$$

Po formuli za Gaussovo ukrivljenost končno dobimo

$$\kappa = \frac{LN - M^2}{EG - F^2} = -1.$$

Traktoid ima konstantno negativno Gaussovo ukrivljenost in spada med hiperbolične ploskve. S ploskev, tj. dvodimenzionalnih prostorov, lahko preidemo na prostore poljubnih dimenzij. V razredu smo izračunali Gaussovo ukrivljenost hiperboloida $\mathbb{H}^n(R)$, ki je enaka

$$\kappa(\mathbb{H}^n(R)) = \left(-\frac{1}{iR} \right)^n. \quad (17)$$

Za fiksni izbor števil $n \in \mathbb{N}$, $R > 0$ je $\kappa = \text{konst.} < 0$. Ker je $\mathbb{H}^n(R)$ model hiperboličnega prostora dimenzije n in polmera R , ter so vsi modeli med seboj izometrični, ima vsak hiperbolični prostor konstantno negativno Gaussovo ukrivljenost. Velja tudi $\sec(\mathbb{H}^n(R)) = -1/R^2$, kjer \sec označuje *prerezno ukrivljenost*. Za poljubne $R > 0$ dobimo vse možne vrednosti konstantno negativne prerezne ukrivljenosti, ki ustrezajo hiperboličnim prostorom polmera R .

Naslednji rezultat bomo le navedli brez dokaza. Pomemben in zanimiv je zato, ker klasificira Riemannove mnogoterosti glede na njihovo prerezno ukrivljenost.

Izrek 2 (Killing-Hopf) Naj bo $n \geq 2$ in (M, g) polna¹ enostavno povezana² Riemannova mnogoterost dimenzije n s konstantno prerezno ukrivljenostjo. Po-

¹Riemannova mnogoterost je *polna*, če so maksimalne geodetke definirane za vse $t \in \mathbb{R}$.

²Spomnimo se, da je s potmi povezana topološka mnogoterost *enostavno povezana* natanko tedaj, ko ima trivialno prvo fundamentalno grupo.

tem je M izometrična natanko enemu izmed prostorov: Evklidskemu prostoru \mathbb{R}^n , n -sferi $\mathbb{S}^n(R)$ ali hiperboličnemu prostoru $\mathbb{H}^n(R)$.

Ker po zgornjih ugotovitvah vemo, da imajo hiperbolični prostori konstantno negativno prerezno ukrivljenost, bi model hiperboličnega prostora lahko definirali kot polno enostavno povezano Riemannovo mnogoterost s konstantno negativno prerezno ukrivljenostjo.

2.5 Geodetke na modelih hiperboličnih prostorov

Izrek 3 *Maksimalne geodetke na hiperboličnem prostoru so natanko*

1. glavne hiperbole, natančneje, preseki $\mathbb{H}^n(R)$ z ravnino v $\mathbb{R}^{n,1}$, če je prostor hiperboloid $\mathbb{H}^n(R)$;
2. premice v notranjosti $\mathbb{K}^n(R)$ v Beltrami-Kleinovem modelu $\mathbb{K}^n(R)$;
3. premeri krogle $\mathbb{B}^n(R)$ ali krožni loki v notranjosti krogle, ki rob $\partial\mathbb{B}^n(R)$ sekajo pod pravim kotom, v primeru Poincaréjeve krogle $\mathbb{B}^n(R)$;
4. premice, vzporedne τ -osi, ali polkrožnice s središči na robu $\partial\mathbb{U}^n(R)$, kadar je model Poincaréjev polprostor $\mathbb{U}^n(R)$.

Dodatno, hiperbolični prostor je geodetsko poln (maksimalne geodetke obstajajo za vse $t \in \mathbb{R}$).

Dokaz: Najprej bomo obravnavali model hiperboloida $\mathbb{H}^n(R)$. Opazimo, da je na hiperboloidu tangentna komponenta povezave ∇^\perp enaka Levi-Civita, saj je $\mathbb{H}^n(R)$ vložena podmnogoterost v $\mathbb{R}^{n,1}$. Geodetke na hiperboloidu zato lahko karakteriziramo z naslednjim pogojem: krivulja $\gamma: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{H}^n(R)$ je geodetka natanko tedaj, ko je za vse t vektor $\gamma''(t)$ pravokoten na tangentni prostor $T_{\gamma(t)}\mathbb{H}^n(R)$ glede na metriko Minkowskega \bar{q} .

Vzemimo poljubno točko $p \in \mathbb{H}^n(R)$ in jo kot v dokazu trditve 2 identificirajmo z vektorjem dolžine R v $T_p\mathbb{R}^{n,1}$. Naj bo F funkcija, ki definira hiperboloid (enakost 9). Opisati želimo elemente tangentnega prostora $T_p\mathbb{H}^n(R)$. Ker velja $\text{grad}F|_p = 2 \cdot p$, neničelni vektor v zadošča $v \in T_p\mathbb{H}^n(R)$ natanko takrat, ko je $\bar{q}(p, v) = 0$ (vektorja p in v sta pravokotna glede na metriko \bar{q}).

Izberimo $v \in T_p\mathbb{H}^n(R)$ ter postavimo $a = \frac{|v|_{\bar{q}}}{R}$ in $\bar{v} = \frac{v}{a}$ (tj. $|\bar{v}| = R$). Definirajmo gladko krivuljo $\gamma: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{n,1}$ s predpisom

$$\gamma(t) = \cosh(at) \cdot p + \sinh(at) \cdot \bar{v}.$$

Krivulja leži na hiperboloidu, saj velja $|\sinh(at) \cdot \bar{v}|^2 - |\cosh(at) \cdot p|^2 = -R^2$. Nadalje je

$$\begin{aligned}\gamma'(t) &= a \sinh(at) \cdot p + a \cosh(at) \cdot \bar{v}, \\ \gamma''(t) &= a^2 \cosh(at) \cdot p + a^2 \sinh(at) \cdot \bar{v} = a^2 \gamma(t), \\ \bar{q}(\gamma'(t), \gamma''(t)) &= 0,\end{aligned}$$

od koder sledi, da je krivulja γ geodetka v $\mathbb{H}^n(R)$. Veljata še začetna pogoja $\gamma(0) = p$ in $\gamma'(0) = a\bar{v} = v$, zato je $\gamma = \gamma_v$ konstantne hitrosti a . Krivulja γ_v je gladka vložitev $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{H}^n(R)$, katere slika je glavna hiperbola (ravnino, ki seka hiperboloid, razpenjata vektorja p , \bar{v}).

Naj bo $\Sigma \subset \mathbb{R}^{n,1}$ taka ravnina z ortonormirano bazo $\{v, p\}$, da je njen presek s hiperboloidom $\mathbb{H}^n(R)$ glavna hiperbola H . Potem je H slika geodetke z začetno točko p (točka p in pripadajoč vektor sta identificirana) in začetno hitrostjo v .

Dokazali smo, da so maksimalne geodetke na hiperboloidu natanko glavne hiperbole. Modeli hiperboličnih prostorov so med seboj izometrični, zato zaradi naravnosti Levi-Civita sledi, da so geodetke v vseh modelih vložitve \mathbb{R} v $\mathbb{R}^{n,1}$. Geodetke so torej definirane za vse čase t , kar je posebej lepa lastnost hiperboličnih prostorov, imenovana *geodetska polnost*.

Oglejmo si Beltrami-Kleinov model. Vemo, da izometrijo med hiperboloidom in Beltrami-Kleinovim modelom definira predpis $c: \mathbb{H}^n(R) \rightarrow \mathbb{K}^n(R)$, $c(x, \tau) = \frac{R}{\tau}x$. Iz zgornjega vemo še, da je slika maksimalne geodetke na hiperboloidu glavna hiperbola. Glavno hiperbolo opisuje sistem enačb

$$\lambda_i x^i + \mu \tau = 0, \quad i = 1, \dots, n \quad (18)$$

za $\lambda_i, \mu \in \mathbb{R}$. Točka (x, τ) zadošča zgornji enačbi natanko takrat, ³ ko za njeno sliko $c(x, \tau) = y$ velja

$$\lambda_i y^i + \mu R = 0, \quad i = 1, \dots, n. \quad (19)$$

Sledi, da izometrija c glavno hiperbolo preslika v presek $\mathbb{K}^n(R)$ in afinega podprostora v \mathbb{R}^n (tega določa 19). Slika gladke krivulje s preslikavo c je gladka krivulja, zato je slika glavne hiperbole, geodetka, evklidska premica v Klein-Beltramijevem modelu $\mathbb{K}^n(R)$.

Sedaj bomo poiskali geodetke na Poincaréjevi krogli. Ko je $n = 2$, z domače naloge vemo, da so geodetke na Poincaréjevem disku premeri diska ter krožni loki, ki rob diska $\partial \mathbb{B}^2(R)$ sekajo pravokotno.

Za splošen n je situacija podobna. Spomnimo se hiperbolične stereografske projekcije h med hiperboloidom in Poincaréjevo kroglo. Ker je geodetka na hiperboloidu določena z ravnino, ki hiperboloid seka netrivialno, je dovolj obravnavati dvodimenzionalni primer. Oglejmo si dve situaciji. Če glavna hiperbola H vsebuje točko $(0, \dots, 0, R) \in \mathbb{H}^n(R)$, nam predpis za preslikavo h pove, da slika hiperbole, $h(H)$, vsebuje izhodišče in je enaka notranjosti premera krogle $\mathbb{B}^n(R)$. V nasprotnem primeru z rotacijo koordinat $(x^1, \dots, x^n, \tau) \rightarrow (\tilde{x}^1, \dots, \tilde{x}^n, \tau)$ lahko dosežemo, da ravnina, ki vsebuje glavno hiperbolo H , leži na podprostoru $\text{Lin}\{\tilde{x}^1, \tilde{x}^2, \tau\}$. Nato uporabimo znanje iz dvodimenzionalnega primera ter zaključimo, da so geodetke na $\mathbb{B}^n(R)$ premeri krogle in krožni loki, ki rob $\partial \mathbb{B}^n(R)$ sekajo pod pravim kotom.

Na podoben način opišimo še geodetke na Poincaréjevem polprostoru. V dveh dimenzijah z vaj vemo, da so geodetke na Poincaréjevi polravnini natanko navpične premice (vzporednice τ -osi) in polkrožnice s središči na robu polravnine $\partial \mathbb{U}^2(R)$.

³Res, če je $\lambda_i x^i + \mu \tau = 0$, je $\tau = -\frac{\lambda_i x^i}{\mu}$ in $y^i = \frac{R x^i}{\tau} = -\frac{R \mu}{\lambda_i}$. Obratno, naj velja $\lambda_i y^i + \mu R = 0$. Računamo $\lambda_i x^i + \mu \tau = \lambda_i x^i - \frac{\lambda_i y^i \tau}{R} = \lambda_i (x^i - \frac{y^i \tau}{R}) = \lambda_i \cdot 0 = 0$. Ekvivalenca je dokazana.

V splošnem primeru ($n \in \mathbb{N}$) si bomo pomagali z geodetskami v Poincaréjevi krogli in Cayleyjevo transformacijo k med Poincaréjevim polprostorom ter kroglo. Naj bo $\gamma: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{U}^n(R)$ maksimalna geodetka, za katero točka $\gamma(0)$ leži na τ -osi in je vektor $\gamma'(0) \in \text{Lin}\{\frac{\partial}{\partial x^1}, \frac{\partial}{\partial \tau}\}$. Označimo z (x, τ) koordinate na $\mathbb{U}^n(R)$ ter z (u, v) koordinate na $\mathbb{B}^n(R)$. Predpis za izometrijo k pove, da točka $k \circ \gamma(0)$ leži na v -osi in $(k \circ \gamma)'(0) \in \text{Lin}\{\frac{\partial}{\partial u^1}, \frac{\partial}{\partial v}\}$. Ker je k izometrija, je $k \circ \gamma$ geodetka v $\mathbb{B}^n(R)$, vsebovana v $\{u^1, v\}$ -ravnini, katere slika je notranjost premera ali krožni lok, pravokoten na rob krogle. Po primeru iz dveh dimenzij sledi, da je geodetka γ vsebovana v $\{x^1, \tau\}$ -ravnini, njena slika pa je navpičnica ali polkrožnica s središčem na $\{\tau = 0\}$.

Splošneje, vzemimo poljubno geodetko $\gamma: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{U}^n(R)$. S translacijo x -koordinat najprej začetno točko $\gamma(0)$ prestavimo na τ -os in nato s primerno rotacijo x -koordinat dobimo $\gamma'(0) \in \text{Lin}\{\frac{\partial}{\partial x^1}, \frac{\partial}{\partial \tau}\}$. Uporabimo posebni primer od prej.⁴ Geodetke na Poincaréjevem polprosotoru so torej natanko premice, vzporedne τ -osi, ali polkrožnice s središči na $\partial\mathbb{U}^n(R)$. \square

3 Hiperbolična geometrija

Literatura

⁴Take transformacije x -koordinat slikajo navpične premice v navpične premice in polkrožnice s središčem na $\{\tau = 0\}$ v polkrožnice z enako lastnostjo, zato z njimi nismo izgubili nobene informacije o geodetkah.