Hiperbolični prostori

Tjaša Vrhovnik
Fakulteta za matematiko in fiziko
Oddelek za matematiko

9. junij 2021

Kazalo

1 Modeli hiperboličnih prostorov

1.1 Osnovne definicije

Naslednje definicije opisujejo mnogoterosti z visoko simetrijo. Natančneje to pomeni, da so njihove grupe izometrij velike. Najpreprostejši primer so Evklidski prostori - zanje že intuitivno vemo, da obstajajo preslikave, izometrije, ki poljubni točki preslikajo eno v drugo, celo več, ortonormirano bazo v prvi točki lahko preslikajo v ortonormirano bazo v drugi. Izkazalo se bo, da to niso edini taki prostori. Drug primer so n-dimenzionalne sfere $\mathbb{S}^n$, mi pa se bomo posvetili študiju hiperboličnih prostorov.

Definicija 1 *Naj bosta* (M, g) *in* $(\tilde{M}, \tilde{g})$ *Riemannovi mnogoterosti. Gladka preslikava* $\phi\colon M \to \tilde{M}$ ohranja metriko*, če velja* $g = \phi^* \tilde{g}$*.*

Difeomorfizem, ki ohranja metriko, imenujemo izometrija. Lokalna izometrija *pa je lokalni difeomorfizem, ki ohranja metriko.*

Definicija 2 *Naj bo* (M, g) *Riemannova mnogoterost. Množico izometrij mnogoterosti* M*, ki je grupa za komponiranje, označimo z* $\mathrm{Iso}(M, g)$*. Pravimo, da je* (M, g) homogena Riemannova mnogoterost*, če grupa* $\mathrm{Iso}(M, g)$ *deluje tranzitivno na* M*. To pomeni, da za poljuben par točk* $p, q \in M$ *obstaja izometrija* $\phi\colon M \to M$ *z lastnostjo* $\phi(p) = q$*.*

Če je ϕ izometrija Riemannove mnogoterosti (M, g), je njen diferencial $d\phi$ preslikava na tangentnem prostoru TM. V vsaki točki $p \in M$ diferencial definira linearno izometrijo $d\phi_p\colon T_pM \to T_{\phi(p)}M$.

Definicija 3 *Naj bo* $p \in M$*. Podgrupo grupe* $\mathrm{Iso}(M, g)$ *izometrij, ki fiksirajo* p*, imenujemo* izotropična podgrupa *v* p *in označimo z* $\mathrm{Iso}_p(M, g)$*.*

Preslikavi $I_p\colon \mathrm{Iso}_p(M, g) \to \mathrm{GL}(T_pM)$*, definirani s predpisom* $I_p(\phi) = d\phi_p$*, pravimo* izotropična reprezentacija.

Mnogoterost M *je* izotropična v točki p*, kadar izotropična reprezentacija deluje tranzitivno na množico enotskih vektorjev v* T_pM*. Nadalje pravimo, da je* M izotropična*, če je izotropična v vsaki točki* $p \in M$*.*

Označimo z $\mathrm{O}(M) = \sqcup_{p \in M}\{\text{ortonormirane baze } T_pM\}$ množico vseh ortonormiranih baz na tangentnih prostorih mnogoterosti M. Delovanje grupe izometrij $\mathrm{Iso}(M, g)$ na množico $\mathrm{O}(M)$ povezuje ortonormirani bazi v točkah p in $\phi(p)$ na naslednji način. Naj bo $\phi \in \mathrm{Iso}(M, g)$ in $\{e_1, \ldots, e_n\} \in \mathrm{O}(M)$. Delovanje definiramo s predpisom

$$\phi \cdot (e_1, \ldots, e_n) = (d\phi_p(e_1), \ldots, d\phi_p(e_n)). \tag{1}$$

Definicija 4 *Riemannova mnogoterost* (M, g) *je* frame homogeneous *oziroma* maksimalno simetrična*, če je delovanje 1 tranzitivno na množici* $\mathrm{O}(M)$*; natančneje, če za poljuben par* $p, q \in M$ *in poljuben izbor ortonormiranih baz na tangentnih prostorih* T_pM *in* T_qM *obstaja izometrija, ki preslika* p *v* q *ter ortonormirano bazo v točki* p *v izbrano ortonormirano bazo v točki* q*.*

Geometrično si homogeno Riemannovo mnogoterost predstavljamo kot tako, ki v vsaki točki na njej izgleda enako. Izotropična Riemannova mnogoterost pa izgleda enako tudi v vseh smereh.

Definicija 5 *Naj bosta (M, g) in $(\tilde{M}, \tilde{g})$ Riemannovi mnogoterosti. Difeomorfizem $\phi\colon M \to \tilde{M}$ je* konformna preslikava*, če obstaja taka pozitivna funkcija $\mu \in \mathcal{C}^\infty(M)$, da velja*

$$\phi^* \tilde{g} = \mu g.$$

V tem primeru pravimo, da sta mnogoterosti (M, g) in $(\tilde{M}, \tilde{g})$ konformno ekvivalentni.

Konformni difeomorfizmi med Riemannovimi mnogoterostmi so ravno difeomorfizmi, ki ohranjajo velikosti kotov. Tako se pomen zgornje definicije sklada s konformnostjo, ki jo poznamo iz kompleksne analize.

Posebej zanimive Riemannove mnogoterosti so tiste, ki jih (vsaj) lokalno lahko primerjamo z Evklidskim prostorom. Pravimo, da je Riemannova mnogoterost (M, g) *lokalno konformno ploska*, če ima vsaka točka $p \in M$ okolico, ki je konformno ekvivalentna odprti množici v $(\mathbb{R}^n, \bar{g})$, kjer $\bar{g}$ označuje običajno Evklidsko metriko. Videli bomo, da imajo hiperbolični prostori to lastnost.

1.2 Modeli

V tem razdelku bomo navedli modele hiperboličnih prostorov, ki so "frame homogeneous"Riemannove mnogoterosti dimenzije $n \geq 1$. Sprva jih bomo le navedli, kasneje pa pokazali njihovo frame homogeneity. Izkaže se, da so vsi ti modeli med seboj izometrični, zato lahko v praksi izberemo kateregakoli izmed njih, na njem obravnavamo željeno in to prenesemo na splošen hiperbolični prostor te dimenzije.

Naj bo $n \geq 1$ in izberimo $R > 0$. $(n+1)$*-dimenzionalni prostor Minkowskega* je prostor $\mathbb{R}^{n,1}$, ki ga v standardnih koordinatah $(x^1, \ldots, x^n, \tau)$ opremimo z *metriko Minkowskega*

$$\bar{q}^{n,1} = (dx^1)^2 + \cdots + (dx^n)^2 - (d\tau)^2. \tag{2}$$

Metriko $\bar{q}^{n,1}$ bomo v nadaljevanju označevali preprosto s $\bar{q}$.

Primer 1 *4-dimenzionalni prostor Minkowskega $\mathbb{R}^{3,1}$ s koordinatami (x, y, z, t) opisuje prostor-čas v Einsteinovi teoriji relativnosti. Grupo izometrij,* $\mathrm{O}(3,1)$*, imenovano* Poncaréjeva grupa *sestavljajo* 10 *generatorjev: tri prostorske in ena časovna translacija, tri rotacije (v ravninah (x, y), (x, z), (y, z)) in tri "time boosts"(rotacije v ravninah (t, x), (t, y), (t, z)).*

Sedaj definirajmo štiri Riemannove mnogoterosti, ki so osnovni modeli hiperboličnega prostora dimenzije n in polmera R.

1. Hiperboloid $\mathbb{H}^n(R)$.

   Vzemimo $(n+1)$-dimenzionalni prostor Minkowskega $\mathbb{R}^{n,1}$ s standardnimi koordinatami $(x^1, \ldots, x^n, \tau)$ in metriko $\bar{q}$. Pozitivni del $(\tau > 0)$ dvodelnega hiperboloida $(x^1)^2 + \cdots + (x^n)^2 - \tau^2 = -R^2$ opremimo z metriko

   $$\breve{g}^1_R = \iota^* \bar{q}, \tag{3}$$

   kjer ι označuje inkluzijo $\iota\colon \mathbb{H}^n(R) \to \mathbb{R}^{n,1}$. Dobljeno podmnogoterost $(\mathbb{H}^n(R), \breve{g}^1_R)$ imenujemo *hiperboloid* dimenzije n s polmerom R.

2. Beltrami-Kleinov model $\mathbb{K}^n(R)$

   Na n-dimenzionalni krogli $\mathbb{K}^n(R)$ s središčem v izhodišču prostora $\mathbb{R}^n$ in polmerom R uvedimo koordinate $(w^1, \dots, w^n)$. Kroglo opremimo z metriko

$$\breve{g}_R^2 = R^2 \frac{(dw^1)^2 + \cdots + (dw^n)^2}{R^2 - |w|^2} + R^2 \frac{(w^1 dw^1 + \cdots + w^n dw^n)^2}{(R^2 - |w|^2)^2}. \tag{4}$$

   Mnogoterost $(\mathbb{K}^n(R), \breve{g}_R^2)$ se imenuje *Beltrami-Kleinov model.*

3. Poincaréjeva krogla $\mathbb{B}^n(R)$

   Na n-dimenzionalni krogli $\mathbb{B}^n(R)$ s središčem v izhodišču prostora $\mathbb{R}^n$ in polmerom R uvedimo koordinate $(u^1, \dots, u^n)$. Kroglo opremimo z metriko

$$\breve{g}_R^3 = 4R^4 \frac{(du^1)^2 + \cdots + (du^n)^2}{(R^2 - |u|^2)^2}. \tag{5}$$

   Mnogoterost $(\mathbb{B}^n(R), \breve{g}_R^3)$ definira *Poincaréjevo kroglo.*

4. Poincaréjev polprostor $\mathbb{U}^n(R)$

   Na Evklidskem prostoru $\mathbb{R}^n$ uvedimo koordinate $(x^1, \dots, x^{n-1}, y)$ in njegov podprostor $\mathbb{U}^n(R) = \{(x, y);\ y > 0\}$ opremimo z metriko

$$\breve{g}_R^4 = R^2 \frac{(dx^1)^2 + \cdots + (dx^{n-1})^2 + dy^2}{y^2}. \tag{6}$$

   Mnogoterosti $(\mathbb{U}^n(R), \breve{g}_R^4)$ pravimo *Poincaréjev polprostor.*

Zaradi izometričnosti zgornjih modelov pogosto hiperbolični prostor dimenzije n s polmerom R označimo z $\mathbb{H}^n(R)$, metriko pa z $\breve{g}_R$, pri čemer imamo v mislih poljubnega izmed modelov. Če za polmer izberemo $R = 1$, Riemannovo mnogoterost označimo z $(\mathbb{H}^n, \breve{g})$ in imenujemo *hiperbolični prostor* dimenzije n. V dveh dimenzijah dobimo *hiperbolično ravnino*, h kateri se bomo vrnili kasneje.

1.3 Izometričnost modelov

Izrek 1 *Modeli n-dimenzionalnih hiperboličnih prostorov s polmerom R so paroma izometrični.*

Dokaz bo potekal v več korakih. Najprej moramo preveriti, da je hiperbolični prostor Riemannova mnogoterost. Nato bomo konstruirali izometrije med naslednjimi pari modelov: hiperboloidom in Beltrami-Kleinovim modelom, hiperboloidom in Poincaréjevo kroglo ter Poincaréjevim polprostorom in Poincaréjevo kroglo.

Dokažimo najprej, da je hiperboloid $\mathbb{H}^n(R)$ Riemannova podmnogoterost prostora $\mathbb{R}^{n,1}$. To zadostuje, saj bo iz izometričnosti sledilo, da so vsi modeli Riemannove mnogoterosti. Prostor $\mathbb{H}^n(R)$ lahko opišemo kot

$$\mathbb{H}^n(R) = F^{-1}(-R^2) \cap \{\tau > 0\}, \tag{7}$$

kjer je preslikava $F\colon \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$ definirana s predpisom $F(x^1, \dots, x^n, \tau) = \sum_{i=1}^n (x^i)^2 - \tau^2$. Tangentni prostor v točki $p \in \mathbb{H}^n(R)$, ki je enak $T_p\mathbb{H}^n(R) = \ker dF_p$, razpenjajo vektorji $X^i = \tau \frac{\partial}{\partial x^i} + x^i \frac{\partial}{\partial \tau}$ za $i = 1, \dots, n$. Ker je njihov produkt (glede na metriko $\bar{q}$) pozitiven, je metrika $\breve{g}_R^1$ pozitivno definitna in določa Riemannovo podmnogoterost $(\mathbb{H}^n(R), \breve{g}_R^1)$.

1.3.1 Centralna projekcija

Izometrija med hiperboloidom in Beltrami-Kleinovim modelom se imenuje *centralna projekcija*, $c\colon \mathbb{H}^n(R) \to \mathbb{K}^n(R)$.

Naj bo $T = (x^1, \ldots, x^n, \tau) \in \mathbb{H}^n(R)$ poljubna točka. Presečišče premice OT skozi izhodišče v $\mathbb{R}^{n,1}$ in točko T s hiperravnino $\{(x, \tau);\ \tau = R\}$ označimo z $Y \in \mathbb{R}^{n,1}$. Pišimo $Y = (y, R)$, kjer je $y = c(T) \in \mathbb{K}^n(R)$ slika T s centralno projekcijo. Tedaj se koordinate točke Y izražajo s koordinatami T, natančneje, $Y = \frac{R}{\tau} T$. Preslikavo c zato podaja zveza

$$c(x, \tau) = \frac{R}{\tau} x. \tag{8}$$

Ker je slika s preslikavo c točka na hiperboloidu, velja

$$|c(x,\tau)|^2 = \frac{R^2}{\tau^2}|x|^2 = \frac{R^2}{\tau^2}(\tau^2 - R^2) = R^2\left(1 - \frac{R^2}{\tau^2}\right) < R^2,$$

torej je $c(x, \tau) \in \mathbb{K}^n(R)$ in centralna projekcija je dobro definirana.

Da je preslikava c difeomorfizem, bomo pokazali s konstrukcijo njenega inverza. Vzemimo poljubno točko $y \in \mathbb{K}^n(R)$. Potem obstaja enoličen $\lambda > 0$, da velja $(x, \tau) = \lambda(y, R) \in \mathbb{H}^n(R)$. Slednja točka je določena z zvezo $\lambda^2(|y|^2 - R^2) = -R^2$, od koder sledi $\lambda = \frac{R}{(R^2-|y|^2)^{1/2}}$. Potem predpis

$$c^{-1}(y) = \left(\frac{Ry}{(R^2 - |y|^2)^{1/2}}, \frac{R^2}{(R^2 - |y|^2)^{1/2}}\right) \tag{9}$$

definira gladko preslikavo, ki je inverz centralne projekcije.

Nazadnje dokažimo, da je c izometrija. Želimo videti, da velja enakost $(c^{-1})^*\breve{g}^1_R = \breve{g}^2_R$. Diferenciala točke $(x, \tau) = c^{-1}(y)$ iz enačbe 9 za nek $y \in \mathbb{K}^n(R)$ sta enaka

$$dx^i = \frac{R dy^k}{(R^2 - |y|^2)^{1/2}} + \frac{Ry^i \sum_{k=1}^n y^k dy^k}{(R^2 - |y|^2)^{3/2}},$$

$$d\tau = \frac{R^2 \sum_{k=1}^n y^k dy^k}{(R^2 - |y|^2)^{3/2}}.$$

Od tod izračunamo

$$(c^{-1})^*\breve{g}^1_R = \sum_{i=1}^n (dx^i)^2 - (d\tau)^2 = R^2 \frac{\sum_{i=1}^n (dy^i)^2}{R^2 - |y|^2} + R^2 \frac{(\sum_{i=1}^n y^i dy^i)^2}{(R^2 - |y|^2)^2} = \breve{g}^2_R.$$

Torej je centralna projekcija res izometrija med $(\mathbb{H}^n(R), \breve{g}^1_R)$ in $(\mathbb{K}^n(R), \breve{g}^2_R)$.

1.3.2 Hiperbolična stereografska projekcija

1.3.3 Posplošena Cayleyjeva transformacija

1.4 Lastnosti hiperboličnih prostorov

Trditev 1 *Hiperbolični prostor* $(\mathbb{H}^n(R), \breve{g})$ *je lokalno konformno ploščat.*

Dokaz: Za model hiperboličnega prostora vzemimo Poincaréjevo kroglo $\mathbb{B}^n(R)$. Identična preslikava $id\colon (\mathbb{B}^n(R), \breve{g}^3_R) \to (\mathbb{R}^n, \bar{g})$ je konformna in porodi konformno ekvivalenco Poincaréjeve krogle z odprto podmnožico Evklidskega prostora. Zaradi izometričnosti modelov sledi, da je hiperbolični prostor lokalno konformno ploščat.

Definicija 6 *Naj bo* $\mathbb{R}^{n,1}$ *prostor Minkowskega* ($n \geq 1$) *opremljen z metriko Minkowskega* $\bar{q}$. *Grupo linearnih preslikav, ki slikajo* $\mathbb{R}^{n,1}$ *vase in ohranjajo metriko Minkowskega, imenujemo* $(n+1)$-dimenzionalna Lorentzova grupa *in označimo z* $\mathrm{O}(n, 1)$.

Njeno podgrupo, ki ohranja hiperboloid $\mathbb{H}^n(R)$ *označimo z* $\mathrm{O}^+(n, 1)$. *Pravimo ji* ortokrona Lorentzova grupa.

Trditev 2 *Lorentzova grupa* $\mathrm{O}^+(n, 1)$ *deluje tranzitivno na množico* $\mathrm{O}(\mathbb{H}^n(R))$. *Hiperbolični prostor* $\mathbb{H}^n(R)$ *je "frame homogeneous".*

Dokaz: Dovolj je pokazati, da za poljubno točko $p \in \mathbb{H}^n(R)$ in ortonormirano bazo $\{e_1, \ldots, e_n\}$ prostora $T_p\mathbb{H}^n(R)$ obstaja ortogonalna preslikava, ki preslika točko $N = (0, \ldots, 0, R)$ v p ter ortonormirano bazo $\{\partial_1, \ldots, \partial_n\}$ za $T_N\mathbb{H}^n(R)$ v bazo $\{e_i\}_i$.

Naj bo $p \in \mathbb{H}^n(R)$ poljubna točka. Identificirajmo p z vektorjem dolžine R v $T_p\mathbb{R}^{n,1}$ in postavimo $\bar{p} = \frac{p}{R}$. $\bar{p}$ je enotski vektor glede na metriko Minkowskega $\bar{q}$, kaže v smeri p, in $\bar{p} \in T_p\mathbb{R}^{n,1}$. Prostor $\mathbb{H}^n(R)$ predstavimo kot v 7. Tedaj je gradient preslikave F glede na metriko $\bar{q}$ enak

$$\mathrm{grad}F = 2\sum_{i=1}^{n} x^i \frac{\partial}{\partial x^i} + 2\tau\frac{\partial}{\partial \tau}.$$

Opazimo, da je $\bar{p} = 2 \cdot \mathrm{grad}F$ in zato $\bar{p} \perp T_p\mathbb{H}^n(R)$. Potem je množica $\{e_1, \ldots, e_n, \bar{p}\}$ ortonormirana baza prostora $\mathbb{R}^{n,1}$ glede na metriko $\bar{q}$.

Naj bo M matrika, katere stolpci so vektorji iz zgornje ortonormirane baze. Po konstrukciji velja $M \in \mathrm{O}^+(n, 1)$ in M slika $\{\partial_1, \ldots, \partial_{n+1}\}$ v $\{e_1, \ldots, e_n, \bar{p}\}$ ter N v p. Ker je M kot preslikava linearna na $\mathbb{R}^{n,1}$, je njen diferencial v točki N, $dM_N\colon T_N\mathbb{R}^{n,1} \to T_p\mathbb{R}^{n,1}$, prav tako predstavljen z matriko M. To pa pomeni, da je $dM_n(\partial_i) = e_i$, $i = 1, \ldots, n$. M je iskana preslikava in delovanje grupe je tranzitivno. Po definiciji je zato $\mathbb{H}^n(R)$ frame homogeneous.

2 Hiperbolična geometrija

Literatura