

Hiperbolični prostori

TJAŠA VRHOVNIK
Fakulteta za matematiko in fiziko
Oddelek za matematiko

9. junij 2021

Kazalo

1	Modeli hiperboličnih prostorov	3
1.1	Osnovne definicije	3
1.2	Modeli	4
1.3	Izometričnost modelov	5
2	Hiperbolična geometrija	6

1 Modeli hiperboličnih prostorov

1.1 Osnovne definicije

Naslednje definicije opisujejo mnogoterosti z visoko simetrijo. Natančneje to pomeni, da so njihove grupe izometrij velike. Najpreprostejši primer so Evklidski prostori - zanje že intuitivno vemo, da obstajajo preslikave, izometrije, ki poljubni točki preslikajo eno v drugo, celo več, ortonormirano bazo v prvi točki lahko preslikajo v ortonormirano bazo v drugi. Izkazalo se bo, da to niso edini taki prostori. Drug primer so n -dimenzionalne sfere \mathbb{S}^n , mi pa se bomo posvetili študiju hiperboličnih prostorov.

Definicija 1 Naj bosta (M, g) in (\tilde{M}, \tilde{g}) Riemannovi mnogoterosti. Gladka preslikava $\phi: M \rightarrow \tilde{M}$ ohranja metriko, če velja $g = \phi^* \tilde{g}$.

Difeomorfizem, ki ohranja metriko, imenujemo izometrija. Lokalna izometrija pa je lokalni difeomorfizem, ki ohranja metriko.

Definicija 2 Naj bo (M, g) Riemannova mnogoterost. Množico izometrij mnogoterosti M , ki je grupa za komponiranje, označimo z $\text{Iso}(M, g)$. Pravimo, da je (M, g) homogena Riemannova mnogoterost, če grupa $\text{Iso}(M, g)$ deluje tranzitivno na M . To pomeni, da za poljuben par točk $p, q \in M$ obstaja izometrija $\phi: M \rightarrow M$ z lastnostjo $\phi(p) = q$.

Če je ϕ izometrija Riemannove mnogoterosti (M, g) , je njen diferencial $d\phi$ preslikava na tangentnem prostoru TM . V vsaki točki $p \in M$ diferencial definira linearno izometrijo $d\phi_p: T_p M \rightarrow T_{\phi(p)} M$.

Definicija 3 1. Naj bo $p \in M$. Podgrupo grupe $\text{Iso}(M, g)$ izometrij, ki fiksirajo p , imenujemo izotropična podgrupa v p in označimo z $\text{Iso}_p(M, g)$.

2. Preslikavi $I_p: \text{Iso}_p(M, g) \rightarrow \text{GL}(T_p M)$, definirani s predpisom $I_p(\phi) = d\phi_p$, pravimo izotropična reprezentacija.

3. Mnogoterost M je izotropična v točki p , kadar izotropična reprezentacija deluje tranzitivno na množico enotskih vektorjev v $T_p M$. Nadalje pravimo, da je M izotropična, če je izotropična v vsaki točki $p \in M$.

Označimo z $\text{O}(M) = \sqcup_{p \in M} \{\text{ortonormirane baze } T_p M\}$ množico vseh ortonormiranih baz na tangentnih prostorih mnogoterosti M . Delovanje grupe izometrij $\text{Iso}(M, g)$ na množico $\text{O}(M)$ povezuje ortonormirani bazi v točkah p in $\phi(p)$ na naslednji način. Naj bo $\phi \in \text{Iso}(M, g)$ in $e_1, \dots, e_n \in \text{O}(M)$. Delovanje definiramo s predpisom

$$\phi \cdot (e_1, \dots, e_n) = (d\phi_p(e_1), \dots, d\phi_p(e_n)). \quad (1)$$

Definicija 4 Riemannova mnogoterost (M, g) je frame homogeneous oziroma maksimalno simetrična, če je delovanje 1 tranzitivno na množici $\text{O}(M)$; natančneje, če za poljuben par $p, q \in M$ in poljuben izbor ortonormiranih baz na tangentnih prostorih $T_p M$ in $T_q M$ obstaja izometrija, ki preslika p v q ter ortonormirano bazo v točki p v izbrano ortonormirano bazo v točki q .

Geometrično si homogeno Riemannovo mnogoterost predstavljamo kot tako, ki ne glede na izbor točke na njej, izgleda enako. Izotropična Riemannova mnogoterost pa izgleda enako tudi v vseh smereh.

Definicija 5 Naj bosta (M, g) in (\tilde{M}, \tilde{g}) Riemannovi mnogoterosti. Difeomorfizem $\phi: M \rightarrow \tilde{M}$ je konformna preslikava, če obstaja taka pozitivna funkcija $\mu \in C^\infty(M)$, da velja

$$\phi^* \tilde{g} = \mu g.$$

V tem primeru pravimo, da sta mnogoterosti (M, g) in (\tilde{M}, \tilde{g}) konformno ekvivalentni.

Konformni difeomorfizmi med Riemannovimi mnogoterostmi so ravno difeomorfizmi, ki ohranjajo velikosti kotov. Tako se pomen zgornje definicije sklada s konformnostjo, ki jo poznamo iz kompleksne analize.

Posebej zanimive Riemannove mnogoterosti so tiste, ki jih (vsaj) lokalno lahko primerjamo z Evklidskim prostorom. Pravimo, da je Riemannova mnogoterost (M, g) *lokalno konformno ploska*, če ima vsaka točka $p \in M$ okolico, ki je konformno ekvivalentna odprti množici v (\mathbb{R}^n, \bar{g}) , kjer \bar{g} označuje običajno Evklidsko metriko.

1.2 Modeli

V tem razdelku bomo navedli modele hiperboličnih prostorov, ki so "frame homogeneous" Riemannove mnogoterosti dimenzije $n \geq 1$. Sprva jih bomo le navedli, kasneje pa pokazali njihovo frame homogeneity. Izkaže se, da so vsi ti modeli med seboj izometrični, zato lahko v praksi izberemo kateregakoli izmed njih, na njem obravnavamo želeno in to prenesemo na splošen hiperbolični prostor te dimenzije.

Naj bo $n \geq 1$ in izberimo $R > 0$. $(n+1)$ -dimenzionalni prostor Minkowskega je prostor $\mathbb{R}^{n,1}$, ki ga v standardnih koordinatah (x^1, \dots, x^n, τ) opremimo z metriko Minkowskega

$$\bar{q}^{n,1} = (dx^1)^2 + \dots + (dx^n)^2 - (d\tau)^2. \quad (2)$$

Metriko $\bar{q}^{n,1}$ bomo v nadaljevanju označevali preprosto s \bar{q} .

Sedaj definirajmo štiri Riemannove mnogoterosti, ki so osnovni modeli hiperboličnega prostora dimenzije n in polmera R .

1. HIPERBOLOID $\mathbb{H}^n(R)$.

Vzemimo $(n+1)$ -dimenzionalni prostor Minkowskega $\mathbb{R}^{n,1}$ s standardnimi koordinatami (x^1, \dots, x^n, τ) in metriko \bar{q} . Pozitivni del ($\tau > 0$) dvodelnega hiperboloida $(x^1)^2 + \dots + (x^n)^2 - \tau^2 = -R^2$ opremimo z metriko

$$\check{g}_R^1 = \iota^* \bar{q}, \quad (3)$$

kjer ι označuje inkluzijo $\iota: \mathbb{H}^n(R) \rightarrow \mathbb{R}^{n,1}$. Dobljeno podmnogoterost $(\mathbb{H}^n(R), \check{g}_R^1)$ imenujemo *hiperbolooid* dimenzije n s polmerom R .

2. BELTRAMI-KLEINOV MODEL $\mathbb{K}^n(R)$

Na n -dimenzionalni krogli $\mathbb{K}^n(R)$ s središčem v izhodišču prostora \mathbb{R}^n in polmerom R uvedimo koordinate (w^1, \dots, w^n) . Kroglo opremimo z metriko

$$\check{g}_R^2 = R^2 \frac{(dw^1)^2 + \dots + (dw^n)^2}{R^2 - |w|^2} + R^2 \frac{(w^1 dw^1 + \dots + w^n dw^n)^2}{(R^2 - |w|^2)^2}. \quad (4)$$

Mnogoterost $(\mathbb{K}^n(R), \check{g}_R^2)$ se imenuje *Beltrami-Kleinov model*.

3. POINCARÉJEVA KROGLA $\mathbb{B}^n(R)$

Na n -dimenzionalni krogli $\mathbb{B}^n(R)$ s središčem v izhodišču prostora \mathbb{R}^n in polmerom R uvedimo koordinate (u^1, \dots, u^n) . Kroglo opremimo z metriko

$$\check{g}_R^3 = 4R^4 \frac{(du^1)^2 + \dots + (du^n)^2}{(R^2 - |u|^2)^2}. \quad (5)$$

Mnogoterost $(\mathbb{B}^n(R), \check{g}_R^3)$ definira *Poincaréjevo kroglo*.

4. POINCARÉJEV POLPROSTOR $\mathbb{U}^n(R)$

Na Evklidskem prostoru \mathbb{R}^n uvedimo koordinate (x^1, \dots, x^{n-1}, y) in njegov podprostor $\mathbb{U}^n(R) = \{(x, y); y > 0\}$ opremimo z metriko

$$\check{g}_R^4 = R^2 \frac{(dx^1)^2 + \dots + (dx^{n-1})^2 + dy^2}{y^2}. \quad (6)$$

Mnogoterosti $(\mathbb{U}^n(R), \check{g}_R^4)$ pravimo *Poincaréjev polprostor*.

Zaradi izometričnosti zgornjih modelov pogosto hiperbolični prostor dimenzije n s polmerom R označimo z $\mathbb{H}^n(R)$, metriko pa z \check{g}_R , pri čemer imamo v mislih poljubnega izmed modelov. Če za polmer izberemo $R = 1$, Riemannovo mnogoterost označimo z $(\mathbb{H}^n, \check{g})$ in imenujemo *hiperbolični prostor* dimenzije n . V dveh dimenzijah dobimo *hiperbolično ravnino*, h kateri se bomo vrnili kasneje.

1.3 Izometričnost modelov

Izrek 1 *Modeli n -dimenzionalnih hiperboličnih prostorov s polmerom R so paroma izometrični.*

Trditev 1 *Hiperbolični prostor $(\mathbb{H}^n(R), \check{g})$ je lokalno konformno ploščat.*

Definicija 6 *Naj bo $\mathbb{R}^{n,1}$ prostor Minkowskega ($n \geq 1$) opremljen z metriko Minkowskega \bar{q} . Grupo linearnih preslikav, ki slikajo $\mathbb{R}^{n,1}$ vase in ohranjajo metriko Minkowskega, imenujemo $(n+1)$ -dimenzionalna Lorentzova grupa in označimo z $O(n, 1)$.*

Njeno podgrupo, ki ohranja hiperboloid $\mathbb{H}^n(R)$ označimo z $O^+(n, 1)$. Pravimo ji ortokrona Lorentzova grupa.

Trditev 2 *Lorentzova grupa $O^+(n, 1)$ deluje tranzitivno na množico $O(\mathbb{H}^n(R))$. Hiperbolični prostor $\mathbb{H}^n(R)$ je "frame homogeneous".*

Dovolj je pokazati, da za poljubno točko $p \in \mathbb{H}^n(R)$ in ortonormirano bazo $\{e_1, \dots, e_n\}$ prostora $T_p \mathbb{H}^n(R)$ obstaja ortogonalna preslikava, ki preslika točko $N = (0, \dots, 0, R)$ v p ter ortonormirano bazo $\{\partial_1, \dots, \partial_n\}$ za $T_N \mathbb{H}^n(R)$ v bazo $\{e_i\}_i$.

Naj bo $p \in \mathbb{H}^n(R)$ poljubna točka. Identificirajmo p z vektorjem dolžine R v $T_p \mathbb{R}^{n,1}$ in postavimo $\bar{p} = \frac{p}{R}$. \bar{p} je enotski vektor glede na metriko Minkowskega \bar{q} , kaže v smeri p , in $\bar{p} \in T_p \mathbb{R}^{n,1}$. Prostor $\mathbb{H}^n(R)$ lahko opišemo kot

$$\mathbb{H}^n(R) = F^{-1}(-R^2) \cap \{\tau > 0\},$$

kjer je preslikava $F: \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$ definirana s predpisom $F(x^1, \dots, x^n, \tau) = \sum_{i=1}^n (x^i)^2 - \tau^2$. Tedaj je gradient preslikave F glede na metriko \bar{q} enak

$$\text{grad}F = 2 \sum_{i=1}^n x^i \frac{\partial}{\partial x^i} + 2\tau \frac{\partial}{\partial \tau}.$$

Opazimo, da je $\bar{p} = 2 \cdot \text{grad}F$ in zato $\bar{p} \perp T_p \mathbb{H}^n(R)$. Potem je množica $\{e_1, \dots, e_n, \bar{p}\}$ ortonormirana baza prostora $\mathbb{R}^{n,1}$ glede na metriko \bar{q} .

Naj bo M matrika, katere stolpci so vektorji iz zgornje ortonormirane baze. Po konstrukciji velja $M \in O^+(n, 1)$ in M slika $\{\partial_1, \dots, \partial_{n+1}\}$ v $\{e_1, \dots, e_n, \bar{p}\}$ ter N v p . Ker je M kot preslikava linearna na $\mathbb{R}^{n,1}$, je njen diferencial v točki N , $dM_N: T_N \mathbb{R}^{n,1} \rightarrow T_p \mathbb{R}^{n,1}$, prav tako predstavljen z matriko M . To pa pomeni, da je $dM_n(\partial_i) = e_i$, $i = 1, \dots, n$. M je iskana preslikava in delovanje grupe je tranzitivno. Po definiciji je zato $\mathbb{H}^n(R)$ frame homogeneous.

2 Hiperbolična geometrija

Literatura