

# Hiperbolični prostori

TJAŠA VRHOVNIK  
Fakulteta za matematiko in fiziko  
Oddelek za matematiko

12. junij 2021

## Kazalo

<b>1</b>	<b>Modeli hiperboličnih prostorov</b>	<b>3</b>
1.1	Osnovne definicije . . . . .	3
1.2	Modeli . . . . .	4
1.3	Izometričnost modelov . . . . .	5
1.3.1	Centralna projekcija . . . . .	6
1.3.2	Hiperbolična stereografska projekcija . . . . .	6
1.3.3	Posplošena Cayleyjeva transformacija . . . . .	7
1.4	Lastnosti hiperboličnih prostorov . . . . .	8
1.5	Ukrivljenost . . . . .	9
1.6	Geodetke na hiperbolčnih prostorih . . . . .	10
<b>2</b>	<b>Hiperbolična geometrija</b>	<b>12</b>

# 1 Modeli hiperboličnih prostorov

## 1.1 Osnovne definicije

Naslednje definicije opisujejo mnogoterosti z visoko simetrijo. Natančneje to pomeni, da so njihove grupe izometrij velike. Najpreprostejši primer so Evklidski prostori - zanje že intuitivno vemo, da obstajajo preslikave, izometrije, ki poljubni točki preslikajo eno v drugo, celo več, ortonormirano bazo v prvi točki lahko preslikajo v ortonormirano bazo v drugi. Izkazalo se bo, da to niso edini taki prostori. Drug primer so  $n$ -dimenzionalne sfere  $\mathbb{S}^n$ , mi pa se bomo posvetili študiju hiperboličnih prostorov.

**Definicija 1** Naj bosta  $(M, g)$  in  $(\tilde{M}, \tilde{g})$  Riemannovi mnogoterosti. Gladka preslikava  $\phi: M \rightarrow \tilde{M}$  ohranja metriko, če velja  $g = \phi^* \tilde{g}$ .

Difeomorfizem, ki ohranja metriko, imenujemo izometrija. Lokalna izometrija pa je lokalni difeomorfizem, ki ohranja metriko.

**Definicija 2** Naj bo  $(M, g)$  Riemannova mnogoterost. Množico izometrij mnogoterosti  $M$ , ki je grupa za komponiranje, označimo z  $\text{Iso}(M, g)$ . Pravimo, da je  $(M, g)$  homogena Riemannova mnogoterost, če grupa  $\text{Iso}(M, g)$  deluje tranzitivno na  $M$ . To pomeni, da za poljuben par točk  $p, q \in M$  obstaja izometrija  $\phi: M \rightarrow M$  z lastnostjo  $\phi(p) = q$ .

Če je  $\phi$  izometrija Riemannove mnogoterosti  $(M, g)$ , je njen diferencial  $d\phi$  preslikava na tangentnem prostoru  $TM$ . V vsaki točki  $p \in M$  diferencial definira linearno izometrijo  $d\phi_p: T_p M \rightarrow T_{\phi(p)} M$ .

**Definicija 3** Naj bo  $p \in M$ . Podgrupo grupe  $\text{Iso}(M, g)$  izometrij, ki fiksirajo  $p$ , imenujemo izotropična podgrupa v  $p$  in označimo z  $\text{Iso}_p(M, g)$ .

Preslikavi  $I_p: \text{Iso}_p(M, g) \rightarrow \text{GL}(T_p M)$ , definirani s predpisom  $I_p(\phi) = d\phi_p$ , pravimo izotropična reprezentacija.

Mnogoterost  $M$  je izotropična v točki  $p$ , kadar izotropična reprezentacija deluje tranzitivno na množico enotskih vektorjev v  $T_p M$ . Nadalje pravimo, da je  $M$  izotropična, če je izotropična v vsaki točki  $p \in M$ .

Označimo z  $\mathcal{O}(M) = \sqcup_{p \in M} \{\text{ortonormirane baze } T_p M\}$  množico vseh ortonormiranih baz na tangentnih prostorih mnogoterosti  $M$ . Delovanje grupe izometrij  $\text{Iso}(M, g)$  na množico  $\mathcal{O}(M)$  povezuje ortonormirani bazi v točkah  $p$  in  $\phi(p)$  na naslednji način. Naj bo  $\phi \in \text{Iso}(M, g)$  in  $\{e_1, \dots, e_n\} \in \mathcal{O}(M)$ . Delovanje definiramo s predpisom

$$\phi \cdot (e_1, \dots, e_n) = (d\phi_p(e_1), \dots, d\phi_p(e_n)). \quad (1)$$

**Definicija 4** Riemannova mnogoterost  $(M, g)$  je frame homogeneous oziroma maksimalno simetrična, če je delovanje 1 tranzitivno na množici  $\mathcal{O}(M)$ ; natančneje, če za poljuben par  $p, q \in M$  in poljuben izbor ortonormiranih baz na tangentnih prostorih  $T_p M$  in  $T_q M$  obstaja izometrija, ki preslika  $p$  v  $q$  ter ortonormirano bazo v točki  $p$  v izbrano ortonormirano bazo v točki  $q$ .

Geometrično si homogeno Riemannovo mnogoterost predstavljamo kot tako, ki v vsaki točki na njej izgleda enako. Izotropična Riemannova mnogoterost pa izgleda enako tudi v vseh smereh.

**Definicija 5** Naj bosta  $(M, g)$  in  $(\tilde{M}, \tilde{g})$  Riemannovi mnogoterosti. Difeomorfizem  $\phi: M \rightarrow \tilde{M}$  je konformna preslikava, če obstaja taka pozitivna funkcija  $\mu \in C^\infty(M)$ , da velja

$$\phi^* \tilde{g} = \mu g.$$

V tem primeru pravimo, da sta mnogoterosti  $(M, g)$  in  $(\tilde{M}, \tilde{g})$  konformno ekvivalentni.

Konformni difeomorfizmi med Riemannovimi mnogoterostmi so ravno difeomorfizmi, ki ohranjajo velikosti kotov. Tako se pomen zgornje definicije sklada s konformnostjo, ki jo poznamo iz kompleksne analize.

Posebej zanimive Riemannove mnogoterosti so tiste, ki jih (vsaj) lokalno lahko primerjamo z Evklidskim prostorom. Pravimo, da je Riemannova mnogoterost  $(M, g)$  *lokalno konformno ploska*, če ima vsaka točka  $p \in M$  okolico, ki je konformno ekvivalentna odprti množici v  $(\mathbb{R}^n, \bar{g})$ , kjer  $\bar{g}$  označuje običajno Evklidsko metriko. Videli bomo, da imajo hiperbolični prostori to lastnost.

## 1.2 Modeli

V tem razdelku bomo navedli modele hiperboličnih prostorov, ki so "frame homogeneous" Riemannove mnogoterosti dimenzije  $n \geq 1$ . Sprva jih bomo le navedli, kasneje pa pokazali njihovo frame homogeneity. Izkaže se, da so vsi ti modeli med seboj izometrični, zato lahko v praksi izberemo kateregakoli izmed njih, na njem obravnavamo želeno in to prenesemo na splošen hiperbolični prostor te dimenzije.

Naj bo  $n \geq 1$  in izberimo  $R > 0$ .  $(n+1)$ -dimenzionalni prostor Minkowskega je prostor  $\mathbb{R}^{n,1}$ , ki ga v standardnih koordinatah  $(x^1, \dots, x^n, \tau)$  opremimo z metriko Minkowskega

$$\bar{q}^{n,1} = (dx^1)^2 + \dots + (dx^n)^2 - (d\tau)^2. \quad (2)$$

Metriko  $\bar{q}^{n,1}$  bomo v nadaljevanju označevali preprosto s  $\bar{q}$ .

**Primer 1** 4-dimenzionalni prostor Minkowskega  $\mathbb{R}^{3,1}$  s koordinatami  $(x, y, z, t)$  opisuje prostor-čas v Einsteinovi teoriji relativnosti. Grupo izometrij,  $O(3,1)$ , imenovano Poncaréjeva grupa sestavlja 10 generatorjev: tri prostorske in ena časovna translacija, tri rotacije (v ravninah  $(x, y)$ ,  $(x, z)$ ,  $(y, z)$ ) in tri "time boosts" (rotacije v ravninah  $(t, x)$ ,  $(t, y)$ ,  $(t, z)$ ).

Sedaj definirajmo štiri Riemannove mnogoterosti, ki so osnovni modeli hiperboličnega prostora dimenzije  $n$  in polmera  $R$ .

### 1. HIPERBOLOID $\mathbb{H}^n(R)$ .

Vzemimo  $(n+1)$ -dimenzionalni prostor Minkowskega  $\mathbb{R}^{n,1}$  s standardnimi koordinatami  $(x^1, \dots, x^n, \tau)$  in metriko  $\bar{q}$ . Pozitivni del ( $\tau > 0$ ) dvodelnega hiperboloida  $(x^1)^2 + \dots + (x^n)^2 - \tau^2 = -R^2$  opremimo z metriko

$$\check{g}_R^1 = \iota^* \bar{q}, \quad (3)$$

kjer  $\iota$  označuje inkluzijo  $\iota: \mathbb{H}^n(R) \rightarrow \mathbb{R}^{n,1}$ . Dobljeno podmnogoterost  $(\mathbb{H}^n(R), \check{g}_R^1)$  imenujemo *hiperboloid* dimenzije  $n$  s polmerom  $R$ .

## 2. BELTRAMI-KLEINOV MODEL $\mathbb{K}^n(R)$

Na  $n$ -dimenzionalni krogli  $\mathbb{K}^n(R)$  s središčem v izhodišču prostora  $\mathbb{R}^n$  in polmerom  $R$  uvedimo koordinate  $(w^1, \dots, w^n)$ . Kroglo opremimo z metriko

$$\check{g}_R^2 = R^2 \frac{(dw^1)^2 + \dots + (dw^n)^2}{R^2 - |w|^2} + R^2 \frac{(w^1 dw^1 + \dots + w^n dw^n)^2}{(R^2 - |w|^2)^2}. \quad (4)$$

Mnogoterost  $(\mathbb{K}^n(R), \check{g}_R^2)$  se imenuje *Beltrami-Kleinov model*.

## 3. POINCARÉJEVA KROGLA $\mathbb{B}^n(R)$

Na  $n$ -dimenzionalni krogli  $\mathbb{B}^n(R)$  s središčem v izhodišču prostora  $\mathbb{R}^n$  in polmerom  $R$  uvedimo koordinate  $(u^1, \dots, u^n)$ . Kroglo opremimo z metriko

$$\check{g}_R^3 = 4R^4 \frac{(du^1)^2 + \dots + (du^n)^2}{(R^2 - |u|^2)^2}. \quad (5)$$

Mnogoterost  $(\mathbb{B}^n(R), \check{g}_R^3)$  definira *Poincaréjevo kroglo*.

## 4. POINCARÉJEV POLPROSTOR $\mathbb{U}^n(R)$

Na Evklidskem prostoru  $\mathbb{R}^n$  uvedimo koordinate  $(x^1, \dots, x^{n-1}, y)$  in njegov podprostor  $\mathbb{U}^n(R) = \{(x, y); y > 0\}$  opremimo z metriko

$$\check{g}_R^4 = R^2 \frac{(dx^1)^2 + \dots + (dx^{n-1})^2 + dy^2}{y^2}. \quad (6)$$

Mnogoterosti  $(\mathbb{U}^n(R), \check{g}_R^4)$  pravimo *Poincaréjev polprostor*.

Zaradi izometričnosti zgornjih modelov pogosto hiperbolični prostor dimenzije  $n$  s polmerom  $R$  označimo z  $\mathbb{H}^n(R)$ , metriko pa z  $\check{g}_R$ , pri čemer imamo v mislih poljubnega izmed modelov. Če za polmer izberemo  $R = 1$ , Riemannovo mnogoterost označimo s  $(\mathbb{H}^n, \check{g})$  in imenujemo *hiperbolični prostor* dimenzije  $n$ . V dveh dimenzijah dobimo *hiperbolično ravnino*, h kateri se bomo vrnili kasneje.

## 1.3 Izometričnost modelov

**Izrek 1** *Modeli  $n$ -dimenzionalnih hiperboličnih prostorov s polmerom  $R$  so paroma izometrični.*

Dokaz bo potekal v več korakih. Najprej bomo preverili, da je hiperbolični prostor Riemannova mnogoterost. Nato bomo konstruirali izometrije med naslednjimi pari modelov: hiperboloidom in Beltrami-Kleinovim modelom, hiperboloidom in Poincaréjevo kroglo ter Poincaréjevim polprostorom in Poincaréjevo kroglo.

Dokažimo najprej, da je hiperboloid  $\mathbb{H}^n(R)$  Riemannova podmnogoterost prostora  $\mathbb{R}^{n,1}$ . To zadostuje, saj bo iz izometričnosti sledilo, da so vsi modeli Riemannove mnogoterosti. Prostor  $\mathbb{H}^n(R)$  lahko opišemo kot

$$\mathbb{H}^n(R) = F^{-1}(-R^2) \cap \{\tau > 0\}, \quad (7)$$

kjer je preslikava  $F: \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$  definirana s predpisom  $F(x^1, \dots, x^n, \tau) = \sum_{i=1}^n (x^i)^2 - \tau^2$ . Tangentni prostor v točki  $p \in \mathbb{H}^n(R)$ , ki je enak  $T_p \mathbb{H}^n(R) = \ker dF_p$ , razpenjajo vektorji  $X^i = \tau \frac{\partial}{\partial x^i} + x^i \frac{\partial}{\partial \tau}$  za  $i = 1, \dots, n$ . Ker je njihov produkt (glede na metriko  $\bar{q}$ ) pozitiven, je metrika  $\check{g}_R^1$  pozitivno definitna in določa Riemannovo podmnogoterost  $(\mathbb{H}^n(R), \check{g}_R^1)$ .

### 1.3.1 Centralna projekcija

Izometrija med hiperboloidom in Beltrami-Kleinovim modelom se imenuje *centralna projekcija*,  $c: \mathbb{H}^n(R) \rightarrow \mathbb{K}^n(R)$ .

Naj bo  $T = (x^1, \dots, x^n, \tau) \in \mathbb{H}^n(R)$  poljubna točka. Presečišče premice  $OT$  skozi izhodišče v  $\mathbb{R}^{n,1}$  in točko  $T$  s hiperravnino  $\{(x, \tau); \tau = R\}$  označimo z  $Y \in \mathbb{R}^{n,1}$ . Pišimo  $Y = (y, R)$ , kjer je  $y = c(T) \in \mathbb{K}^n(R)$  slika  $T$  s centralno projekcijo. Tedaj se koordinate točke  $Y$  izražajo s koordinatami  $T$ , natančneje,  $Y = \frac{R}{\tau}T$ . Preslikavo  $c$  zato podaja zveza

$$c(x, \tau) = \frac{R}{\tau}x. \quad (8)$$

Ker slika točke s preslikavo  $c$  leži na hiperboloidu, velja

$$|c(x, \tau)|^2 = \frac{R^2}{\tau^2}|x|^2 = \frac{R^2}{\tau^2}(\tau^2 - R^2) = R^2 \left(1 - \frac{R^2}{\tau^2}\right) < R^2,$$

torej je  $c(x, \tau) \in \mathbb{K}^n(R)$  in je centralna projekcija dobro definirana.

Da je preslikava  $c$  difeomorfizem, bomo pokazali s konstrukcijo njenega inverza. Vzemimo poljubno točko  $y \in \mathbb{K}^n(R)$ . Potem obstaja enoličen  $\lambda > 0$ , da velja  $(x, \tau) = \lambda(y, R) \in \mathbb{H}^n(R)$ . Slednja točka je določena z zvezo  $\lambda^2(|y|^2 - R^2) = -R^2$ , od koder sledi  $\lambda = \frac{R}{(R^2 - |y|^2)^{1/2}}$ . Potem predpis

$$c^{-1}(y) = \left( \frac{Ry}{(R^2 - |y|^2)^{1/2}}, \frac{R^2}{(R^2 - |y|^2)^{1/2}} \right) \quad (9)$$

definira gladko preslikavo, ki je inverz centralne projekcije.

Nazadnje dokažimo, da je  $c$  izometrija. Želimo videti, da velja enakost  $(c^{-1})^*\check{g}_R^1 = \check{g}_R^2$ . Diferenciali točke  $(x, \tau) = c^{-1}(y)$  iz enačbe 9 za nek  $y \in \mathbb{K}^n(R)$  so enaki

$$\begin{aligned} dx^i &= \frac{Rdy^i}{(R^2 - |y|^2)^{1/2}} + \frac{Ry^i \sum_{k=1}^n y^k dy^k}{(R^2 - |y|^2)^{3/2}}, \\ d\tau &= \frac{R^2 \sum_{k=1}^n y^k dy^k}{(R^2 - |y|^2)^{3/2}}. \end{aligned}$$

Od tod izračunamo

$$(c^{-1})^*\check{g}_R^1 = \sum_{i=1}^n (dx^i)^2 - (d\tau)^2 = R^2 \frac{\sum_{i=1}^n (dy^i)^2}{R^2 - |y|^2} + R^2 \frac{(\sum_{i=1}^n y^i dy^i)^2}{(R^2 - |y|^2)^2} = \check{g}_R^2.$$

Torej je centralna projekcija res izometrija med  $(\mathbb{H}^n(R), \check{g}_R^1)$  in  $(\mathbb{K}^n(R), \check{g}_R^2)$ .

### 1.3.2 Hiperbolična stereografska projekcija

Izometriji med hiperboloidom in Poincaréjevo kroglo pravimo *hiperbolična stereografska projekcija*,  $h: \mathbb{H}^n(R) \rightarrow \mathbb{B}^n(R)$ . Spominja na običajno stereografsko projekcijo za sfere, zato je tudi njena konstrukcija podobna le-tej.

Naj bo  $S = (0, \dots, -R) \in \mathbb{R}^{n,1}$  in izberimo poljubno točko  $T = (x^1, \dots, x^n, \tau)$  na hiperboloidu. Označimo presečišče premice  $ST$  s hiperravnino  $\{(x, \tau); \tau = 0\}$  z  $V = (v, 0) \in \mathbb{R}^{n,1}$  in postavimo  $h(T) = v \in \mathbb{B}^n(R)$ . Sedaj bomo izračunali

predpis, ki definira preslikavo  $h$ . Po konstrukciji točke  $V$  obstaja enoličen  $\lambda > 0$ , ki zadošča enakosti  $V - S = \lambda(T - S)$ . Ekvivalentno lahko po komponentah zapišemo

$$v^i = \lambda x^i, \quad i = 1, \dots, n, \quad R = \lambda(\tau + R),$$

od koder izračunamo koeficient  $\lambda = \frac{R}{\tau + R}$ . Formula, ki določa  $h$ , je enaka

$$h(x, \tau) = \frac{R}{\tau + R}x. \quad (10)$$

Ker točka  $(x, \tau)$  leži na hiperboloidu, ocenimo

$$|h(x, \tau)|^2 = \frac{R^2}{(\tau + R)^2}|x|^2 = R^2 \frac{\tau^2 - R^2}{\tau^2 + R^2} < R^2,$$

zato preslikava  $h$  res slika v Poincaréjevo kroglo  $\mathbb{B}^n(R)$ .

Konstruirajmo inverz preslikave. Komponente točke  $T \in \mathbb{H}^n(R)$  se v odvisnosti od koeficienta  $\lambda$  izražajo kot

$$x^i = \frac{v^i}{\lambda}, \quad i = 1, \dots, n, \quad \tau = R \frac{1 - \lambda}{\lambda}.$$

To vstavimo v pogoj za točko na hiperboloidu,  $|x|^2 - \tau^2 = -R^2$ , kar nam da  $\lambda = \frac{R^2 - |v|^2}{2R^2}$ . Inverzna preslikava ima potem predpis

$$h^{-1}(v) = \left( \frac{2R^2 v}{R^2 - |v|^2}, R \frac{R^2 + |v|^2}{R^2 - |v|^2} \right). \quad (11)$$

Gladek inverz nam zagotavlja, da je hiperbolična stereografska projekcija difeomorfizem.

Podobno kot v prejšnjem primeru preverimo še enakost  $(h^{-1})^* \mathring{g}_R^1 = \mathring{g}_R^3$ . Diferenciali komponent točke  $(x, \tau) = h^{-1}(v)$  iz predpisa 11 so

$$\begin{aligned} dx^i &= \frac{2R^2 dv^i}{R^2 - |v|^2} + \frac{4R^2 v^i \sum_{k=1}^n v^k dv^k}{(R^2 - |v|^2)^2}, \\ d\tau &= \frac{2R \sum_{k=1}^n v^k dv^k}{R^2 - |v|^2} + \frac{2R(R^2 + |v|^2) \sum_{k=1}^n v^k dv^k}{(R^2 - |v|^2)^2}. \end{aligned}$$

Z nekaj računanja dobimo

$$(h^{-1})^* \mathring{g}_R^1 = \sum_{i=1}^n (dx^i)^2 - (d\tau)^2 = \mathring{g}_R^3.$$

Pokazali smo, da je hiperbolična stereografska projekcija izometrija prostorov  $(\mathbb{H}^n(R), \mathring{g}_R^1)$  in  $(\mathbb{B}^n(R), \mathring{g}_R^3)$ .

### 1.3.3 Posplošena Cayleyjeva transformacija

Omenimo še konstrukcijo izometrije med Poincaréjevo polravnino in Poincaréjevo kroglo. V dvodimenzionalnem primeru smo v domači nalogi videli, da izometrijo

med Poincaréjevo polravnino  $\mathbb{U}$  in Poincaréjevim diskom  $\mathbb{D}$  (za  $R = 1$ ) podaja Möbiusova transformacija  $\tau: \mathbb{U} \rightarrow \mathbb{D}$ , definirana s predpisom

$$\tau(z) = \frac{1 + iz}{z + i}, \quad (12)$$

kjer je  $z = (x, y)$  kompleksen zapis točke v ravnini. S skaliranjem dobimo predpis za preslikavo  $k: \mathbb{U}^2(R) \rightarrow \mathbb{B}^2(R)$ ,

$$k(z) = iR \frac{z - iR}{z + iR}. \quad (13)$$

Če preidemo v realne koordinate z identifikacijo  $\Re z = x$ ,  $\Im z = y$ , kratek račun pokaže ekvivalenten predpis

$$k(x, y) = \left( \frac{2xR^2}{x^2 + (y + R)^2}, R \frac{x^2 + y^2 - R^2}{x^2 + (y + R)^2} \right). \quad (14)$$

Preslikavi  $k$  pravimo *Cayleyjeva transformacija*.

V splošnem primeru koordinate na Poincaréjevem polprostoru  $\mathbb{U}^n(R)$  zapišimo kot  $(x^1, \dots, x^n, y) = (x, y)$  in uporabimo zgornji predpis. Novo preslikavo, ki je prav tako izometrija, imenujemo *posplošena Cayleyjeva transformacija*.

## 1.4 Lastnosti hiperboličnih prostorov

**Trditev 1** *Hiperbolični prostor  $(\mathbb{H}^n(R), \bar{g})$  je lokalno konformno ploščat.*

*Dokaz:* Za model hiperboličnega prostora vzemimo Poincaréjevo kroglo  $\mathbb{B}^n(R)$ . Identična preslikava  $id: (\mathbb{B}^n(R), \bar{g}_R^3) \rightarrow (\mathbb{R}^n, \bar{g})$  je konformna in porodi konformno ekvivalenco Poincaréjeve krogle z odprto podmnožico Evklidskega prostora. Zaradi izometričnosti modelov sledi, da je hiperbolični prostor lokalno konformno ploščat.  $\square$

**Definicija 6** *Naj bo  $\mathbb{R}^{n,1}$  prostor Minkowskega ( $n \geq 1$ ) opremljen z metriko Minkowskega  $\bar{q}$ . Grupo linearnih preslikav, ki slikajo  $\mathbb{R}^{n,1}$  vase in ohranjajo metriko Minkowskega, imenujemo  $(n + 1)$ -dimenzionalna Lorentzova grupa in označimo z  $O(n, 1)$ .*

*Njeno podgrupo, ki ohranja hiperboloid  $\mathbb{H}^n(R)$  označimo z  $O^+(n, 1)$ . Pravimo ji ortokrona Lorentzova grupa.*

**Trditev 2** *Lorentzova grupa  $O^+(n, 1)$  deluje tranzitivno na množico  $O(\mathbb{H}^n(R))$ . Hiperbolični prostor  $\mathbb{H}^n(R)$  je "frame homogeneous".*

*Dokaz:* Dovolj je pokazati, da za poljubno točko  $p \in \mathbb{H}^n(R)$  in ortonormirano bazo  $\{e_1, \dots, e_n\}$  prostora  $T_p \mathbb{H}^n(R)$  obstaja ortogonalna preslikava, ki preslika točko  $N = (0, \dots, 0, R)$  v  $p$  ter ortonormirano bazo  $\{\partial_1, \dots, \partial_n\}$  za  $T_N \mathbb{H}^n(R)$  v bazo  $\{e_i\}_i$ .

Naj bo  $p \in \mathbb{H}^n(R)$  poljubna točka. Identificirajmo  $p$  z vektorjem dolžine  $R$  v  $T_p \mathbb{R}^{n,1}$  in postavimo  $\bar{p} = \frac{p}{R}$ .  $\bar{p}$  je enotski vektor glede na metriko Minkowskega  $\bar{q}$ , kaže v smeri  $p$ , in  $\bar{p} \in T_p \mathbb{R}^{n,1}$ . Prostor  $\mathbb{H}^n(R)$  predstavimo kot v 7. Tedaj je gradient preslikave  $F$  glede na metriko  $\bar{q}$  enak

$$\text{grad} F = 2 \sum_{i=1}^n x^i \frac{\partial}{\partial x^i} + 2\tau \frac{\partial}{\partial \tau}.$$



Opazimo, da je  $\bar{p} = 2 \cdot \text{grad} F$  in zato  $\bar{p} \perp T_p \mathbb{H}^n(R)$ . Potem je množica  $\{e_1, \dots, e_n, \bar{p}\}$  ortonormirana baza prostora  $\mathbb{R}^{n,1}$  glede na metriko  $\bar{g}$ .

Naj bo  $M$  matrika, katere stolpci so vektorji iz zgornje ortonormirane baze. Po konstrukciji velja  $M \in O^+(n, 1)$  in  $M$  slika  $\{\partial_1, \dots, \partial_{n+1}\}$  v  $\{e_1, \dots, e_n, \bar{p}\}$  ter  $N$  v  $p$ . Ker je  $M$  kot preslikava linearna na  $\mathbb{R}^{n,1}$ , je njen diferencial v točki  $N$ ,  $dM_N: T_N \mathbb{R}^{n,1} \rightarrow T_p \mathbb{R}^{n,1}$ , prav tako predstavljen z matriko  $M$ . To pa pomeni, da je  $dM_n(\partial_i) = e_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ .  $M$  je iskana preslikava in delovanje grupe je tranzitivno. Po definiciji je zato  $\mathbb{H}^n(R)$  frame homogeneous.  $\square$

## 1.5 Ukrivljenost

Gaussova ukrivljenost  $\kappa$  ploskve v točki je po definiciji enaka produktu glavnih ukrivljenosti v tej točki. Ničelna Gaussova ukrivljenost karakterizira ploskve, ki so lokalno izomorfne ravnini. Ploskve s pozitivno Gaussovo ukrivljenostjo v točki imajo lastnost, da sta glavni ukrivljenosti v točki istega predznaka (odvisni od izbora normale). Primer take ploskve je 2-sfera  $\mathbb{S}^2(R)$  polmera  $R$ , za katero velja  $\kappa = 1/R^2$ . Negativna Gaussova ukrivljenost pa pomeni, da vektorja glavnih ukrivljenosti kažeta v nasprotno smer. Geometrijsko ima ploskev v taki točki obliko sedla.

Za študij so posebej zanimive ploskve s konstantno Gaussovo ukrivljenostjo. Najprej si oglejmo primer.

**Primer 2 (Traktoid)** *Opazujmo ploskev, vloženo v  $\mathbb{R}^3$ , in izračunajmo njeno Gaussovo ukrivljenost. Defnirajmo preslikavi*

$$\begin{aligned} f: (0, 1) &\rightarrow \mathbb{R}, & f(r) &= \sqrt{1-r^2} - \cosh^{-1}\left(\frac{1}{r}\right); \\ \sigma: (0, 1) \times (0, 2\pi) &\rightarrow \mathbb{R}^3, & \sigma(r, v) &= (r \cos v, r \sin v, f(r)). \end{aligned}$$

Preslikava  $\sigma$  je parametrizacija rotacijske ploskve, ki jo imenujemo traktoid.

Izračunajmo prvo in drugo fundamentalno formo ploskve.

$$\begin{aligned} \sigma_r &= \left( \cos v, \sin v, \frac{\sqrt{1-r^2}}{r} \right), \quad \sigma_v = (-r \sin v, r \cos v, 0), \\ \sigma_{rr} &= \left( 0, 0, -\frac{1}{r^2 \sqrt{1-r^2}} \right), \quad \sigma_{rv} = \sigma_{vr} = (-\sin v, \cos v, 0), \quad \sigma_{vv} = (-r \cos v, -r \sin v, 0), \\ \sigma_r \times \sigma_v &= \left( -\sqrt{1-r^2} \cos v, -\sqrt{1-r^2} \sin v, r \right), \quad \|\sigma_r \times \sigma_v\| = 1, \\ n &= -\frac{\sigma_r \times \sigma_v}{\|\sigma_r \times \sigma_v\|} = \left( \sqrt{1-r^2} \cos v, \sqrt{1-r^2} \sin v, -r \right), \end{aligned}$$

kjer je  $n$  zunanja normala ploskve. Iz parcialnih odvodov izračunamo koeficiente

$$\begin{aligned} E &= \sigma_r \cdot \sigma_r = \frac{1}{r^2}, \quad F = \sigma_r \cdot \sigma_v = 0, \quad G = \sigma_v \cdot \sigma_v = r^2, \\ L &= \sigma_{rr} \cdot n = \frac{1}{r \sqrt{1-r^2}}, \quad M = \sigma_{rv} \cdot n = 0, \quad N = \sigma_{vv} \cdot n = -r \sqrt{1-r^2}. \end{aligned}$$

Po formuli za Gaussovo ukrivljenost končno dobimo

$$\kappa = \frac{LN - M^2}{EG - F^2} = -1.$$

Traktoid ima konstantno negativno Gaussovo ukrivljenost in spada med hiperbolične ploskve. S ploskev, tj. dvodimenzionalnih prostorov, lahko preidemo na prostore poljubnih dimenzij. V razredu smo izračunali Gaussovo ukrivljenost hiperboloida  $\mathbb{H}^n(R)$ , ki je enaka

$$\kappa(\mathbb{H}^n(R)) = \left(-\frac{1}{iR}\right)^n. \quad (15)$$

Za fiksni izbor števil  $n \in \mathbb{N}$ ,  $R > 0$  je  $\kappa = \text{konst.} < 0$ . Ker je  $\mathbb{H}^n(R)$  model hiperboličnega prostora dimenzije  $n$  in polmera  $R$ , ter so vsi modeli med seboj izometrični, ima vsak hiperbolični prostor konstantno negativno Gaussovo ukrivljenost. Velja tudi  $\text{sec}(\mathbb{H}^n(R)) = -1/R^2$ , kjer  $\text{sec}$  označuje "prerezno" ukrivljenost. Za poljubne  $R > 0$  dobimo vse možne vrednosti konstantno negativne prerezne ukrivljenosti, ki ustrezajo hiperboličnim prostorom polmera  $R$ .

Naslednji rezultat bomo le navedli brez dokaza. Pomemben in zanimiv je zato, ker klasificira Riemannove mnogoterosti glede na njihovo prerezno ukrivljenost.

**Izrek 2 (Killing-Hopf)** *Naj bo  $n \geq 2$  in  $(M, g)$  kompletna <sup>1</sup> enostavno povezana <sup>2</sup> Riemannova mnogoterost dimenzije  $n$  s konstantno prerezno ukrivljenostjo. Potem je  $M$  izometrična natanko enemu izmed prostorov: Evklidskemu prostoru  $\mathbb{R}^n$ ,  $n$ -sferi  $\mathbb{S}^n(R)$  ali hiperboličnemu prostoru  $\mathbb{H}^n(R)$ .*

Ker po zgornjih ugotovitvah vemo, da imajo hiperbolični prostori konstantno negativno prerezno ukrivljenost, bi model hiperboličnega prostora lahko definirali kot kompletno enostavno povezano Riemannovo mnogoterost s konstantno negativno prerezno ukrivljenostjo.

## 1.6 Geodetke na hiperbolčnih prostorih

**Izrek 3** *Maksimalne geodetke na hiperboličnem prostoru so natanko*

1. *glavne hiperbole, natančneje, preseki  $\mathbb{H}^n(R)$  z ravnino v  $\mathbb{R}^{n,1}$ , če je prostor hiperboloid  $\mathbb{H}^n(R)$ ;*
2. *premice v notranjosti  $\mathbb{K}^n(R)$  v Beltrami-Kleinovem modelu  $\mathbb{K}^n(R)$ ;*
3. *premeri krogle  $\mathbb{B}^n(R)$  ali krožni loki v notranjosti krogle, ki rob  $\partial\mathbb{B}^n(R)$  sekajo pod pravim kotom, v primeru Poincaréjeve krogle  $\mathbb{B}^n(R)$ ;*
4. *premice, vzporedne  $\tau$ -osi, ali polkrožnice s središči na robu  $\partial\mathbb{U}^n(R)$ , kadar je model Poincaréjev polprostor  $\mathbb{U}^n(R)$ .*

*Dokaz:* Najprej bomo obravnavali model hiperboloida  $\mathbb{H}^n(R)$ . Opazimo, da je na hiperboloidu tangentna komponenta "povezave"  $\nabla^\perp$  enaka Levi-Civita, saj je  $\mathbb{H}^n(R)$  vložena podmnogoterost v  $\mathbb{R}^{n,1}$ . Geodetke na hiperboloidu zato lahko karakteriziramo z naslednjim pogojem: krivulja  $\gamma: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{H}^n(R)$  je geodetka natanko tedaj, ko je za vse  $t$  vektor  $\gamma''(t)$  pravokoten na tangentni prostor  $T_{\gamma(t)}\mathbb{H}^n(R)$  glede na metriko Minkowskega  $\bar{q}$ .

<sup>1</sup>Riemannova mnogoterost je *kompletna*, če so maksimalne geodetke definirane za vse  $t \in \mathbb{R}$ .

<sup>2</sup>Spomnimo se, da je s potmi povezana topološka mnogoterost *enostavno povezana* natanko tedaj, ko ima trivialno prvo fundamentalno grupo.

Vzemimo poljubno točko  $p \in \mathbb{H}^n(R)$  in jo kot v dokazu trditve 2 identificirajmo z vektorjem dolžine  $R$  v  $T_p\mathbb{R}^{n,1}$ . Naj bo  $F$  funkcija, ki definira hiperboloid (enakost 7). Opisati želimo elemente tangentnega prostora  $T_p\mathbb{H}^n(R)$ . Ker velja  $\text{grad}F|_p = 2 \cdot p$ , neničelni vektor  $v$  zadošča  $v \in T_p\mathbb{H}^n(R)$  natanko takrat, ko je  $\bar{q}(p, v) = 0$  (vektorja  $p$  in  $v$  sta pravokotna glede na metriko  $\bar{q}$ ).

Izberimo  $v \in T_p\mathbb{H}^n(R)$  ter postavimo  $a = \frac{|v|_{\bar{q}}}{R}$  in  $\bar{v} = \frac{v}{a}$  (tj.  $|\bar{v}| = R$ ). Definirajmo gladko krivuljo  $\gamma: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{n,1}$  s predpisom

$$\gamma(t) = \cosh(at) \cdot p + \sinh(at) \cdot \bar{v}.$$

Krivulja leži na hiperboloidu, saj velja  $|\sinh(at) \cdot \bar{v}|^2 - |\cosh(at) \cdot p|^2 = -R^2$ . Nadalje je

$$\begin{aligned}\gamma'(t) &= a \sinh(at) \cdot p + a \cosh(at) \cdot \bar{v}, \\ \gamma''(t) &= a^2 \cosh(at) \cdot p + a^2 \sinh(at) \cdot \bar{v} = a^2 \gamma(t), \\ \bar{q}(\gamma'(t), \gamma''(t)) &= 0,\end{aligned}$$

od koder sledi, da je krivulja  $\gamma$  geodetka v  $\mathbb{H}^n(R)$ . Veljata še začetna pogoja  $\gamma(0) = p$  in  $\gamma'(0) = a\bar{v} = v$ , zato je  $\gamma = \gamma_v$  konstantne hitrosti  $a$ . Krivulja  $\gamma_v$  je gladka vložitev  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{H}^n(R)$ , katere slika je glavna hiperbola (ravnino, ki seka hiperboloid, razpenjata vektorja  $p, \bar{v}$ ).

Naj bo  $\Sigma \subset \mathbb{R}^{n,1}$  taka ravnina z ortonormirano bazo  $\{v, p\}$ , da je njen presek s hiperboloidom  $\mathbb{H}^n(R)$  glavna hiperbola  $H$ . Potem je  $H$  slika geodetke z začetno točko  $p$  (točka  $p$  in pripadajoč vektor sta identificirana) in začetno hitrostjo  $v$ .

Dokazali smo, da so maksimalne geodetke na hiperboloidu natanko glavne hiperbole. Modeli hiperboličnih prostorov so med seboj izometrični, zato zaradi naravnosti Levi-Civita sledi, da so geodetke v vseh modelih vložitve  $\mathbb{R}$  v  $\mathbb{R}^{n,1}$ . Geodetke so torej definirane za vse čase  $t$ , kar je posebej lepa lastnost hiperboličnih prostorov.

Oglejmo si Beltrami-Kleinov model. Vemo, da izometrijo med hiperboloidom in Beltrami-Kleinovim modelom definira predpis  $c: \mathbb{H}^n(R) \rightarrow \mathbb{K}^n(R)$ ,  $c(x, \tau) = \frac{R}{\tau}x$ . Iz zgornjega vemo še, da je slika maksimalne geodetke na hiperboloidu glavna hiperbola. Glavno hiperbolo opisuje sistem enačb

$$\lambda_i x^i + \mu \tau = 0, \quad i = 1, \dots, n \quad (16)$$

za  $\lambda_i, \mu \in \mathbb{R}$ . Točka  $(x, \tau)$  zadošča zgornji enačbi natanko takrat, <sup>3</sup> ko za njeno sliko  $c(x, \tau) = y$  velja

$$\lambda_i y^i + \mu R = 0, \quad i = 1, \dots, n. \quad (17)$$

Sledi, da izometrija  $c$  glavno hiperbolo preslika v presek  $\mathbb{K}^n(R)$  in afinega podprostora v  $\mathbb{R}^n$  (tega določa 17). Slika gladke krivulje s preslikavo  $c$  je gladka

---

<sup>3</sup>Res, če je  $\lambda_i x^i + \mu \tau = 0$ , je  $\tau = -\frac{\lambda_i x^i}{\mu}$  in  $y^i = \frac{R x^i}{\tau} = -\frac{R \mu}{\lambda_i}$ . Obratno, naj velja  $\lambda_i y^i + \mu R = 0$ . Računamo  $\lambda_i x^i + \mu \tau = \lambda_i x^i - \frac{\lambda_i y^i \tau}{R} = \lambda_i (x^i - \frac{y^i \tau}{R}) = \lambda_i \cdot 0 = 0$ . Ekvivalenca je dokazana.

krivulja, zato je slika glavne hiperbole, geodetka, evklidska premica v Klein-Beltramijevem modelu  $\mathbb{K}^n(R)$ .

Sedaj bomo poiskali geodetke na Poincaréjevi krogli. Ko je  $n = 2$ , z domače naloge vemo, da so geodetke na Poincaréjevem disku premeri diska ter krožni loki, ki rob diska  $\partial\mathbb{B}^2(R)$  sekajo pravokotno.

Za splošen  $n$  je situacija podobna. Spomnimo se hiperbolične stereografske projekcije  $h$  med hiperboloidom in Poincaréjevo kroglo. Ker je geodetka na hiperboloidu določena z ravnino, ki hiperboloid seka netrivialno, je dovolj obravnavati dvodimenzionalni primer. Oglejmo si dve situaciji. Če glavna hiperbola  $H$  vsebuje točko  $(0, \dots, 0, R) \in \mathbb{H}^n(R)$ , nam predpis za preslikavo  $h$  pove, da slika hiperbole,  $h(H)$ , vsebuje izhodišče in je enaka notranjosti premera krogle  $\mathbb{B}^n(R)$ . V nasprotnem primeru z rotacijo koordinat  $(x^1, \dots, x^n, \tau) \rightarrow (\tilde{x}^1, \dots, \tilde{x}^n, \tau)$  lahko dosežemo, da ravnina, ki vsebuje glavno hiperbolo  $H$ , leži na podprostoru  $\text{Lin}\{\tilde{x}^1, \tilde{x}^2, \tau\}$ . Nato uporabimo znanje iz dvodimenzionalnega primera ter zaključimo, da so geodetke na  $\mathbb{B}^n(R)$  premeri krogle in krožni loki, ki rob  $\partial\mathbb{B}^n(R)$  sekajo pod pravim kotom.

Na podoben način opišimo še geodetke na Poincaréjevem polprostoru. V dveh dimenzijah z vaj vemo, da so geodetke na Poincaréjevi polravnini natanko navpične premice (vzporednice  $\tau$ -osi) in polkrožnice s središči na robu polravnine  $\partial\mathbb{U}^2(R)$ .

V splošnem primeru ( $n \in \mathbb{N}$ ) si bomo pomagali z geodetskami v Poincaréjevi krogli in Cayleyjevo transformacijo  $k$  med Poincaréjevim polprostorom ter kroglo. Naj bo  $\gamma: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{U}^n(R)$  maksimalna geodetka, za katero točka  $\gamma(0)$  leži na  $\tau$ -osi in je vektor  $\gamma'(0) \in \text{Lin}\{\frac{\partial}{\partial x^1}, \frac{\partial}{\partial \tau}\}$ . Označimo z  $(x, \tau)$  koordinate na  $\mathbb{U}^n(R)$  ter z  $(u, v)$  koordinate na  $\mathbb{B}^n(R)$ . Predpis za izometrijo  $k$  pove, da točka  $k \circ \gamma(0)$  leži na  $v$ -osi in  $(k \circ \gamma)'(0) \in \text{Lin}\{\frac{\partial}{\partial u^1}, \frac{\partial}{\partial v}\}$ . Ker je  $k$  izometrija, je  $k \circ \gamma$  geodetka v  $\mathbb{B}^n(R)$ , vsebovana v  $\{u^1, v\}$ -ravnini, katere slika je notranjost premera ali krožni lok, pravokoten na rob krogle. Po primeru iz dveh dimenzij sledi, da je geodetka  $\gamma$  vsebovana v  $\{x^1, \tau\}$ -ravnini, njena slika pa je navpičnica ali polkrožnica s središčem na  $\{\tau = 0\}$ .

Splošneje, vzemimo poljubno geodetko  $\gamma: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{U}^n(R)$ . S translacijo  $x$ -koordinat najprej začetno točko  $\gamma(0)$  prestavimo na  $\tau$ -os in nato s primerno rotacijo  $x$ -koordinat dobimo  $\gamma'(0) \in \text{Lin}\{\frac{\partial}{\partial x^1}, \frac{\partial}{\partial \tau}\}$ . Uporabimo posebni primer od prej.<sup>4</sup> Geodetke na Poincaréjevem polprosotoru so torej natanko premice, vzporedne  $\tau$ -osi, ali polkrožnice s središči na  $\partial\mathbb{U}^n(R)$ .  $\square$

## 2 Hiperbolična geometrija

### Literatura

<sup>4</sup>Take transformacije  $x$ -koordinat slikajo navpične premice v navpične premice in polkrožnice s središčem na  $\{\tau = 0\}$  v polkrožnice z enako lastnostjo, zato z njimi nismo izgubili nobene informacije o geodetkah.