

Hiperbolični prostori

TJAŠA VRHOVNIK
Fakulteta za matematiko in fiziko
Oddelek za matematiko

10. junij 2021

Kazalo

1	Modeli hiperboličnih prostorov	3
1.1	Osnovne definicije	3
1.2	Modeli	4
1.3	Izometričnost modelov	5
1.3.1	Centralna projekcija	6
1.3.2	Hiperbolična stereografska projekcija	6
1.3.3	Posplošena Cayleyjeva transformacija	7
1.4	Lastnosti hiperboličnih prostorov	7
2	Hiperbolična geometrija	8

1 Modeli hiperboličnih prostorov

1.1 Osnovne definicije

Naslednje definicije opisujejo mnogoterosti z visoko simetrijo. Natančneje to pomeni, da so njihove grupe izometrij velike. Najpreprostejši primer so Evklidski prostori - zanje že intuitivno vemo, da obstajajo preslikave, izometrije, ki poljubni točki preslikajo eno v drugo, celo več, ortonormirano bazo v prvi točki lahko preslikajo v ortonormirano bazo v drugi. Izkazalo se bo, da to niso edini taki prostori. Drug primer so n -dimenzionalne sfere \mathbb{S}^n , mi pa se bomo posvetili študiju hiperboličnih prostorov.

Definicija 1 Naj bosta (M, g) in (\tilde{M}, \tilde{g}) Riemannovi mnogoterosti. Gladka preslikava $\phi: M \rightarrow \tilde{M}$ ohranja metriko, če velja $g = \phi^* \tilde{g}$.

Difeomorfizem, ki ohranja metriko, imenujemo izometrija. Lokalna izometrija pa je lokalni difeomorfizem, ki ohranja metriko.

Definicija 2 Naj bo (M, g) Riemannova mnogoterost. Množico izometrij mnogoterosti M , ki je grupa za komponiranje, označimo z $\text{Iso}(M, g)$. Pravimo, da je (M, g) homogena Riemannova mnogoterost, če grupa $\text{Iso}(M, g)$ deluje tranzitivno na M . To pomeni, da za poljuben par točk $p, q \in M$ obstaja izometrija $\phi: M \rightarrow M$ z lastnostjo $\phi(p) = q$.

Če je ϕ izometrija Riemannove mnogoterosti (M, g) , je njen diferencial $d\phi$ preslikava na tangentnem prostoru TM . V vsaki točki $p \in M$ diferencial definira linearno izometrijo $d\phi_p: T_p M \rightarrow T_{\phi(p)} M$.

Definicija 3 Naj bo $p \in M$. Podgrupo grupe $\text{Iso}(M, g)$ izometrij, ki fiksirajo p , imenujemo izotropična podgrupa v p in označimo z $\text{Iso}_p(M, g)$.

Preslikavi $I_p: \text{Iso}_p(M, g) \rightarrow \text{GL}(T_p M)$, definirani s predpisom $I_p(\phi) = d\phi_p$, pravimo izotropična reprezentacija.

Mnogoterost M je izotropična v točki p , kadar izotropična reprezentacija deluje tranzitivno na množico enotskih vektorjev v $T_p M$. Nadalje pravimo, da je M izotropična, če je izotropična v vsaki točki $p \in M$.

Označimo z $\mathcal{O}(M) = \sqcup_{p \in M} \{\text{ortonormirane baze } T_p M\}$ množico vseh ortonormiranih baz na tangentnih prostorih mnogoterosti M . Delovanje grupe izometrij $\text{Iso}(M, g)$ na množico $\mathcal{O}(M)$ povezuje ortonormirani bazi v točkah p in $\phi(p)$ na naslednji način. Naj bo $\phi \in \text{Iso}(M, g)$ in $\{e_1, \dots, e_n\} \in \mathcal{O}(M)$. Delovanje definiramo s predpisom

$$\phi \cdot (e_1, \dots, e_n) = (d\phi_p(e_1), \dots, d\phi_p(e_n)). \quad (1)$$

Definicija 4 Riemannova mnogoterost (M, g) je frame homogeneous oziroma maksimalno simetrična, če je delovanje 1 tranzitivno na množici $\mathcal{O}(M)$; natančneje, če za poljuben par $p, q \in M$ in poljuben izbor ortonormiranih baz na tangentnih prostorih $T_p M$ in $T_q M$ obstaja izometrija, ki preslika p v q ter ortonormirano bazo v točki p v izbrano ortonormirano bazo v točki q .

Geometrično si homogeno Riemannovo mnogoterost predstavljamo kot tako, ki v vsaki točki na njej izgleda enako. Izotropična Riemannova mnogoterost pa izgleda enako tudi v vseh smereh.

Definicija 5 Naj bosta (M, g) in (\tilde{M}, \tilde{g}) Riemannovi mnogoterosti. Difeomorfizem $\phi: M \rightarrow \tilde{M}$ je konformna preslikava, če obstaja taka pozitivna funkcija $\mu \in C^\infty(M)$, da velja

$$\phi^* \tilde{g} = \mu g.$$

V tem primeru pravimo, da sta mnogoterosti (M, g) in (\tilde{M}, \tilde{g}) konformno ekvivalentni.

Konformni difeomorfizmi med Riemannovimi mnogoterostmi so ravno difeomorfizmi, ki ohranjajo velikosti kotov. Tako se pomen zgornje definicije sklada s konformnostjo, ki jo poznamo iz kompleksne analize.

Posebej zanimive Riemannove mnogoterosti so tiste, ki jih (vsaj) lokalno lahko primerjamo z Evklidskim prostorom. Pravimo, da je Riemannova mnogoterost (M, g) *lokalno konformno ploska*, če ima vsaka točka $p \in M$ okolico, ki je konformno ekvivalentna odprti množici v (\mathbb{R}^n, \bar{g}) , kjer \bar{g} označuje običajno Evklidsko metriko. Videli bomo, da imajo hiperbolični prostori to lastnost.

1.2 Modeli

V tem razdelku bomo navedli modele hiperboličnih prostorov, ki so "frame homogeneous" Riemannove mnogoterosti dimenzije $n \geq 1$. Sprva jih bomo le navedli, kasneje pa pokazali njihovo frame homogeneity. Izkaže se, da so vsi ti modeli med seboj izometrični, zato lahko v praksi izberemo kateregakoli izmed njih, na njem obravnavamo želeno in to prenesemo na splošen hiperbolični prostor te dimenzije.

Naj bo $n \geq 1$ in izberimo $R > 0$. $(n+1)$ -dimenzionalni prostor Minkowskega je prostor $\mathbb{R}^{n,1}$, ki ga v standardnih koordinatah (x^1, \dots, x^n, τ) opremimo z metriko Minkowskega

$$\bar{q}^{n,1} = (dx^1)^2 + \dots + (dx^n)^2 - (d\tau)^2. \quad (2)$$

Metriko $\bar{q}^{n,1}$ bomo v nadaljevanju označevali preprosto s \bar{q} .

Primer 1 4-dimenzionalni prostor Minkowskega $\mathbb{R}^{3,1}$ s koordinatami (x, y, z, t) opisuje prostor-čas v Einsteinovi teoriji relativnosti. Grupo izometrij, $O(3,1)$, imenovano Poncaréjeva grupa sestavlja 10 generatorjev: tri prostorske in ena časovna translacija, tri rotacije (v ravninah (x, y) , (x, z) , (y, z)) in tri "time boosts" (rotacije v ravninah (t, x) , (t, y) , (t, z)).

Sedaj definirajmo štiri Riemannove mnogoterosti, ki so osnovni modeli hiperboličnega prostora dimenzije n in polmera R .

1. HIPERBOLOID $\mathbb{H}^n(R)$.

Vzemimo $(n+1)$ -dimenzionalni prostor Minkowskega $\mathbb{R}^{n,1}$ s standardnimi koordinatami (x^1, \dots, x^n, τ) in metriko \bar{q} . Pozitivni del ($\tau > 0$) dvodelnega hiperboloida $(x^1)^2 + \dots + (x^n)^2 - \tau^2 = -R^2$ opremimo z metriko

$$\check{g}_R^1 = \iota^* \bar{q}, \quad (3)$$

kjer ι označuje inkluzijo $\iota: \mathbb{H}^n(R) \rightarrow \mathbb{R}^{n,1}$. Dobljeno podmnogoterost $(\mathbb{H}^n(R), \check{g}_R^1)$ imenujemo *hiperboloid* dimenzije n s polmerom R .

2. BELTRAMI-KLEINOV MODEL $\mathbb{K}^n(R)$

Na n -dimenzionalni krogli $\mathbb{K}^n(R)$ s središčem v izhodišču prostora \mathbb{R}^n in polmerom R uvedimo koordinate (w^1, \dots, w^n) . Kroglo opremimo z metriko

$$\check{g}_R^2 = R^2 \frac{(dw^1)^2 + \dots + (dw^n)^2}{R^2 - |w|^2} + R^2 \frac{(w^1 dw^1 + \dots + w^n dw^n)^2}{(R^2 - |w|^2)^2}. \quad (4)$$

Mnogoterost $(\mathbb{K}^n(R), \check{g}_R^2)$ se imenuje *Beltrami-Kleinov model*.

3. POINCARÉJEVA KROGLA $\mathbb{B}^n(R)$

Na n -dimenzionalni krogli $\mathbb{B}^n(R)$ s središčem v izhodišču prostora \mathbb{R}^n in polmerom R uvedimo koordinate (u^1, \dots, u^n) . Kroglo opremimo z metriko

$$\check{g}_R^3 = 4R^4 \frac{(du^1)^2 + \dots + (du^n)^2}{(R^2 - |u|^2)^2}. \quad (5)$$

Mnogoterost $(\mathbb{B}^n(R), \check{g}_R^3)$ definira *Poincaréjevo kroglo*.

4. POINCARÉJEV POLPROSTOR $\mathbb{U}^n(R)$

Na Evklidskem prostoru \mathbb{R}^n uvedimo koordinate (x^1, \dots, x^{n-1}, y) in njegov podprostor $\mathbb{U}^n(R) = \{(x, y); y > 0\}$ opremimo z metriko

$$\check{g}_R^4 = R^2 \frac{(dx^1)^2 + \dots + (dx^{n-1})^2 + dy^2}{y^2}. \quad (6)$$

Mnogoterosti $(\mathbb{U}^n(R), \check{g}_R^4)$ pravimo *Poincaréjev polprostor*.

Zaradi izometričnosti zgornjih modelov pogosto hiperbolični prostor dimenzije n s polmerom R označimo z $\mathbb{H}^n(R)$, metriko pa z \check{g}_R , pri čemer imamo v mislih poljubnega izmed modelov. Če za polmer izberemo $R = 1$, Riemannovo mnogoterost označimo s $(\mathbb{H}^n, \check{g})$ in imenujemo *hiperbolični prostor* dimenzije n . V dveh dimenzijah dobimo *hiperbolično ravnino*, h kateri se bomo vrnili kasneje.

1.3 Izometričnost modelov

Izrek 1 *Modeli n -dimenzionalnih hiperboličnih prostorov s polmerom R so paroma izometrični.*

Dokaz bo potekal v več korakih. Najprej bomo preverili, da je hiperbolični prostor Riemannova mnogoterost. Nato bomo konstruirali izometrije med naslednjimi pari modelov: hiperboloidom in Beltrami-Kleinovim modelom, hiperboloidom in Poincaréjevo kroglo ter Poincaréjevim polprostorom in Poincaréjevo kroglo.

Dokažimo najprej, da je hiperboloid $\mathbb{H}^n(R)$ Riemannova podmnogoterost prostora $\mathbb{R}^{n,1}$. To zadostuje, saj bo iz izometričnosti sledilo, da so vsi modeli Riemannove mnogoterosti. Prostor $\mathbb{H}^n(R)$ lahko opišemo kot

$$\mathbb{H}^n(R) = F^{-1}(-R^2) \cap \{\tau > 0\}, \quad (7)$$

kjer je preslikava $F: \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$ definirana s predpisom $F(x^1, \dots, x^n, \tau) = \sum_{i=1}^n (x^i)^2 - \tau^2$. Tangentni prostor v točki $p \in \mathbb{H}^n(R)$, ki je enak $T_p \mathbb{H}^n(R) = \ker dF_p$, razpenjajo vektorji $X^i = \tau \frac{\partial}{\partial x^i} + x^i \frac{\partial}{\partial \tau}$ za $i = 1, \dots, n$. Ker je njihov produkt (glede na metriko \bar{q}) pozitiven, je metrika \check{g}_R^1 pozitivno definitna in določa Riemannovo podmnogoterost $(\mathbb{H}^n(R), \check{g}_R^1)$.

1.3.1 Centralna projekcija

Izometrija med hiperboloidom in Beltrami-Kleinovim modelom se imenuje *centralna projekcija*, $c: \mathbb{H}^n(R) \rightarrow \mathbb{K}^n(R)$.

Naj bo $T = (x^1, \dots, x^n, \tau) \in \mathbb{H}^n(R)$ poljubna točka. Presečišče premice OT skozi izhodišče v $\mathbb{R}^{n,1}$ in točko T s hiperravnino $\{(x, \tau); \tau = R\}$ označimo z $Y \in \mathbb{R}^{n,1}$. Pišimo $Y = (y, R)$, kjer je $y = c(T) \in \mathbb{K}^n(R)$ slika T s centralno projekcijo. Tedaj se koordinate točke Y izražajo s koordinatami T , natančneje, $Y = \frac{R}{\tau}T$. Preslikavo c zato podaja zveza

$$c(x, \tau) = \frac{R}{\tau}x. \quad (8)$$

Ker slika točke s preslikavo c leži na hiperboloidu, velja

$$|c(x, \tau)|^2 = \frac{R^2}{\tau^2}|x|^2 = \frac{R^2}{\tau^2}(\tau^2 - R^2) = R^2 \left(1 - \frac{R^2}{\tau^2}\right) < R^2,$$

torej je $c(x, \tau) \in \mathbb{K}^n(R)$ in je centralna projekcija dobro definirana.

Da je preslikava c difeomorfizem, bomo pokazali s konstrukcijo njenega inverza. Vzemimo poljubno točko $y \in \mathbb{K}^n(R)$. Potem obstaja enoličen $\lambda > 0$, da velja $(x, \tau) = \lambda(y, R) \in \mathbb{H}^n(R)$. Slednja točka je določena z zvezo $\lambda^2(|y|^2 - R^2) = -R^2$, od koder sledi $\lambda = \frac{R}{(R^2 - |y|^2)^{1/2}}$. Potem predpis

$$c^{-1}(y) = \left(\frac{Ry}{(R^2 - |y|^2)^{1/2}}, \frac{R^2}{(R^2 - |y|^2)^{1/2}} \right) \quad (9)$$

definira gladko preslikavo, ki je inverz centralne projekcije.

Nazadnje dokažimo, da je c izometrija. Želimo videti, da velja enakost $(c^{-1})^*\check{g}_R^1 = \check{g}_R^2$. Diferenciala točke $(x, \tau) = c^{-1}(y)$ iz enačbe 9 za nek $y \in \mathbb{K}^n(R)$ sta enaka

$$\begin{aligned} dx^i &= \frac{Rdy^i}{(R^2 - |y|^2)^{1/2}} + \frac{Ry^i \sum_{k=1}^n y^k dy^k}{(R^2 - |y|^2)^{3/2}}, \\ d\tau &= \frac{R^2 \sum_{k=1}^n y^k dy^k}{(R^2 - |y|^2)^{3/2}}. \end{aligned}$$

Od tod izračunamo

$$(c^{-1})^*\check{g}_R^1 = \sum_{i=1}^n (dx^i)^2 - (d\tau)^2 = R^2 \frac{\sum_{i=1}^n (dy^i)^2}{R^2 - |y|^2} + R^2 \frac{(\sum_{i=1}^n y^i dy^i)^2}{(R^2 - |y|^2)^2} = \check{g}_R^2.$$

Torej je centralna projekcija res izometrija med $(\mathbb{H}^n(R), \check{g}_R^1)$ in $(\mathbb{K}^n(R), \check{g}_R^2)$.

1.3.2 Hiperbolična stereografska projekcija

Izometriji med hiperboloidom in Poincaréjevo kroglo pravimo *hiperbolična stereografska projekcija*, $h: \mathbb{H}^n(R) \rightarrow \mathbb{B}^n(R)$. Spominja na običajno stereografsko projekcijo za sfere, zato je tudi njena konstrukcija podobna le-tej.

Naj bo $S = (0, \dots, -R) \in \mathbb{R}^{n,1}$ in izberimo poljubno točko $T = (x^1, \dots, x^n, \tau)$ na hiperboloidu. Označimo presečišče premice ST s hiperravnino $\{(x, \tau); \tau = 0\}$ z $V = (v, 0) \in \mathbb{R}^{n,1}$ in postavimo $h(T) = v \in \mathbb{B}^n(R)$. Sedaj bomo izračunali

predpis, ki definira preslikavo h . Po konstrukciji točke V obstaja enoličen $\lambda > 0$, ki zadošča enakosti $V - S = \lambda(T - S)$. Ekvivalentno lahko po komponentah zapišemo

$$v^i = \lambda x^i, \quad i = 1, \dots, n \quad R = \lambda(\tau + R),$$

od koder izračunamo koeficient $\lambda = \frac{R}{\tau + R}$. Formula, ki določa h , je enaka

$$h(x, \tau) = \frac{R}{\tau + R}x. \quad (10)$$

Ker točka (x, τ) leži na hiperboloidu, ocenimo

$$|h(x, \tau)|^2 = \frac{R^2}{(\tau + R)^2}|x|^2 = R^2 \frac{\tau^2 - R^2}{\tau^2 + R^2} < R^2,$$

zato preslikava h res slika v Poincaréjevo kroglo $\mathbb{B}^n(R)$.

Konstruirajmo inverz preslikave. Komponente točke $T \in \mathbb{H}^n(R)$ se v odvisnosti od koeficienta λ izražajo kot

$$x^i = \frac{v^i}{\lambda}, \quad i = 1, \dots, n \quad \tau = R \frac{1 - \lambda}{\lambda}.$$

To vstavimo v pogoj za točko na hiperboloidu $|x|^2 - \tau^2 = -R^2$, kar nam da $\lambda = \frac{R^2 - |v|^2}{2R^2}$. Inverzna preslikava ima potem predpis

$$h^{-1}(v) = \left(\frac{2R^2 v}{R^2 - |v|^2}, R \frac{R^2 + |v|^2}{R^2 - |v|^2} \right). \quad (11)$$

Gladek inverz nam zagotavlja, da je hiperbolična stereografska projekcija difeomorfizem.

Podobno kot v prejšnjem primeru preverimo še enakost $(h^{-1})^* \mathring{g}_R^1 = \mathring{g}_R^3$. Diferenciali komponent točke $(x, \tau) = h^{-1}(v)$ so

$$\begin{aligned} dx^i &= \frac{2R^2 dv^i}{R^2 - |v|^2} + \frac{4R^2 v^i \sum_{k=1}^n v^k dv^k}{(R^2 - |v|^2)^2}, \\ d\tau &= \frac{2R \sum_{k=1}^n v^k dv^k}{R^2 - |v|^2} + \frac{2R(R^2 + |v|^2) \sum_{k=1}^n v^k dv^k}{(R^2 - |v|^2)^2}. \end{aligned}$$

Z nekaj računanja dobimo

$$(h^{-1})^* \mathring{g}_R^1 = \sum_{i=1}^n (dx^i)^2 - (d\tau)^2 = \mathring{g}_R^3.$$

Pokazali smo, da je hiperbolična stereografska projekcija izometrija prostorov $(\mathbb{H}^n(R), \mathring{g}_R^1)$ in $(\mathbb{B}^n(R), \mathring{g}_R^3)$.

1.3.3 Posplošena Cayleyjeva transformacija

1.4 Lastnosti hiperboličnih prostorov

Trditev 1 *Hiperbolični prostor $(\mathbb{H}^n(R), \mathring{g})$ je lokalno konformno ploščat.*

Dokaz: Za model hiperboličnega prostora vzemimo Poincaréjevo kroglo $\mathbb{B}^n(R)$. Identična preslikava $id: (\mathbb{B}^n(R), \check{g}_R^3) \rightarrow (\mathbb{R}^n, \bar{g})$ je konformna in porodi konformno ekvivalenco Poincaréjeve krogle z odprto podmnožico Evklidskega prostora. Zaradi izometričnosti modelov sledi, da je hiperbolični prostor lokalno konformno ploščat.

Definicija 6 Naj bo $\mathbb{R}^{n,1}$ prostor Minkowskega ($n \geq 1$) opremljen z metriko Minkowskega \bar{q} . Grupo linearnih preslikav, ki slikajo $\mathbb{R}^{n,1}$ vase in ohranjajo metriko Minkowskega, imenujemo $(n+1)$ -dimenzionalna Lorentzova grupa in označimo z $O(n,1)$.

Njeno podgrupo, ki ohranja hiperboloid $\mathbb{H}^n(R)$ označimo z $O^+(n,1)$. Pravimo ji ortokrona Lorentzova grupa.

Trditev 2 Lorentzova grupa $O^+(n,1)$ deluje tranzitivno na množico $O(\mathbb{H}^n(R))$. Hiperbolični prostor $\mathbb{H}^n(R)$ je "frame homogeneous".

Dokaz: Dovolj je pokazati, da za poljubno točko $p \in \mathbb{H}^n(R)$ in ortonormirano bazo $\{e_1, \dots, e_n\}$ prostora $T_p\mathbb{H}^n(R)$ obstaja ortogonalna preslikava, ki preslika točko $N = (0, \dots, 0, R)$ v p ter ortonormirano bazo $\{\partial_1, \dots, \partial_n\}$ za $T_N\mathbb{H}^n(R)$ v bazo $\{e_i\}_i$.

Naj bo $p \in \mathbb{H}^n(R)$ poljubna točka. Identificirajmo p z vektorjem dolžine R v $T_p\mathbb{R}^{n,1}$ in postavimo $\bar{p} = \frac{p}{R}$. \bar{p} je enotski vektor glede na metriko Minkowskega \bar{q} , kaže v smeri p , in $\bar{p} \in T_p\mathbb{R}^{n,1}$. Prostor $\mathbb{H}^n(R)$ predstavimo kot v 7. Tedaj je gradient preslikave F glede na metriko \bar{q} enak

$$\text{grad}F = 2 \sum_{i=1}^n x^i \frac{\partial}{\partial x^i} + 2\tau \frac{\partial}{\partial \tau}.$$

Opazimo, da je $\bar{p} = 2 \cdot \text{grad}F$ in zato $\bar{p} \perp T_p\mathbb{H}^n(R)$. Potem je množica $\{e_1, \dots, e_n, \bar{p}\}$ ortonormirana baza prostora $\mathbb{R}^{n,1}$ glede na metriko \bar{q} .

Naj bo M matrika, katere stolpci so vektorji iz zgornje ortonormirane baze. Po konstrukciji velja $M \in O^+(n,1)$ in M slika $\{\partial_1, \dots, \partial_{n+1}\}$ v $\{e_1, \dots, e_n, \bar{p}\}$ ter N v p . Ker je M kot preslikava linearna na $\mathbb{R}^{n,1}$, je njen diferencial v točki N , $dM_N: T_N\mathbb{R}^{n,1} \rightarrow T_p\mathbb{R}^{n,1}$, prav tako predstavljen z matriko M . To pa pomeni, da je $dM_N(\partial_i) = e_i$, $i = 1, \dots, n$. M je iskana preslikava in delovanje grupe je tranzitivno. Po definiciji je zato $\mathbb{H}^n(R)$ frame homogeneous.

2 Hiperbolična geometrija

Literatura