# Hiperbolični prostori

Tjaša Vrhovnik
Fakulteta za matematiko in fiziko
Oddelek za matematiko

12. junij 2021

# Kazalo

# 1 Modeli hiperboličnih prostorov

## 1.1 Osnovne definicije

Naslednje definicije opisujejo mnogoterosti z visoko simetrijo. Natančneje to pomeni, da so njihove grupe izometrij velike. Najpreprostejši primer so Evklidski prostori - zanje že intuitivno vemo, da obstajajo preslikave, izometrije, ki poljubni točki preslikajo eno v drugo, celo več, ortonormirano bazo v prvi točki lahko preslikajo v ortonormirano bazo v drugi. Izkazalo se bo, da to niso edini taki prostori. Drug primer so $n$-dimenzionalne sfere $\mathbb{S}^n$, mi pa se bomo posvetili študiju hiperboličnih prostorov.

**Definicija 1** *Naj bosta $(M, g)$ in $(\tilde{M}, \tilde{g})$ Riemannovi mnogoterosti. Gladka preslikava $\phi\colon M \to \tilde{M}$* ohranja metriko*, če velja $g = \phi^* \tilde{g}$.*

*Difeomorfizem, ki ohranja metriko, imenujemo* izometrija. Lokalna izometrija *pa je lokalni difeomorfizem, ki ohranja metriko.*

**Definicija 2** *Naj bo $(M, g)$ Riemannova mnogoterost. Množico izometrij mnogoterosti $M$, ki je grupa za komponiranje, označimo z $\mathrm{Iso}(M, g)$. Pravimo, da je $(M, g)$* homogena Riemannova mnogoterost*, če grupa $\mathrm{Iso}(M, g)$ deluje tranzitivno na $M$. To pomeni, da za poljuben par točk $p, q \in M$ obstaja izometrija $\phi\colon M \to M$ z lastnostjo $\phi(p) = q$.*

Če je $\phi$ izometrija Riemannove mnogoterosti $(M, g)$, je njen diferencial $d\phi$ preslikava na tangentnem prostoru $TM$. V vsaki točki $p \in M$ diferencial definira linearno izometrijo $d\phi_p\colon T_pM \to T_{\phi(p)}M$.

**Definicija 3** *Naj bo $p \in M$. Podgrupo grupe $\mathrm{Iso}(M, g)$ izometrij, ki fiksirajo $p$, imenujemo* izotropična podgrupa *v $p$ in označimo z $\mathrm{Iso}_p(M, g)$.*

*Preslikavi $I_p\colon \mathrm{Iso}_p(M, g) \to \mathrm{GL}(T_pM)$, definirani s predpisom $I_p(\phi) = d\phi_p$, pravimo* izotropična reprezentacija.

*Mnogoterost $M$ je* izotropična v točki $p$*, kadar izotropična reprezentacija deluje tranzitivno na množico enotskih vektorjev v $T_pM$. Nadalje pravimo, da je $M$* izotropična*, če je izotropična v vsaki točki $p \in M$.*

Označimo z $\mathrm{O}(M) = \sqcup_{p \in M}\{\text{ortonormirane baze } T_pM\}$ množico vseh ortonormiranih baz na tangentnih prostorih mnogoterosti $M$. Delovanje grupe izometrij $\mathrm{Iso}(M, g)$ na množico $\mathrm{O}(M)$ povezuje ortonormirani bazi v točkah $p$ in $\phi(p)$ na naslednji način. Naj bo $\phi \in \mathrm{Iso}(M, g)$ in $\{e_1, \ldots, e_n\} \in \mathrm{O}(M)$. Delovanje definiramo s predpisom

$$\phi \cdot (e_1, \ldots, e_n) = (d\phi_p(e_1), \ldots, d\phi_p(e_n)). \tag{1}$$

**Definicija 4** *Riemannova mnogoterost $(M, g)$ je* frame homogeneous *oziroma* maksimalno simetrična*, če je delovanje 1 tranzitivno na množici $\mathrm{O}(M)$; natančneje, če za poljuben par $p, q \in M$ in poljuben izbor ortonormiranih baz na tangentnih prostorih $T_pM$ in $T_qM$ obstaja izometrija, ki preslika $p$ v $q$ ter ortonormirano bazo v točki $p$ v izbrano ortonormirano bazo v točki $q$.*

Geometrično si homogeno Riemannovo mnogoterost predstavljamo kot tako, ki v vsaki točki na njej izgleda enako. Izotropična Riemannova mnogoterost pa izgleda enako tudi v vseh smereh.

**Definicija 5** *Naj bosta $(M, g)$ in $(\tilde{M}, \tilde{g})$ Riemannovi mnogoterosti. Difeomorfizem $\phi\colon M \to \tilde{M}$ je* konformna preslikava, *če obstaja taka pozitivna funkcija $\mu \in \mathcal{C}^\infty(M)$, da velja*

$$\phi^*\tilde{g} = \mu g.$$

*V tem primeru pravimo, da sta mnogoterosti $(M, g)$ in $(\tilde{M}, \tilde{g})$* konformno ekvivalentni.

Konformni difeomorfizmi med Riemannovimi mnogoterostmi so ravno difeomorfizmi, ki ohranjajo velikosti kotov. Tako se pomen zgornje definicije sklada s konformnostjo, ki jo poznamo iz kompleksne analize.

Posebej zanimive Riemannove mnogoterosti so tiste, ki jih (vsaj) lokalno lahko primerjamo z Evklidskim prostorom. Pravimo, da je Riemannova mnogoterost $(M, g)$ *lokalno konformno ploska*, če ima vsaka točka $p \in M$ okolico, ki je konformno ekvivalentna odprti množici v $(\mathbb{R}^n, \bar{g})$, kjer $\bar{g}$ označuje običajno Evklidsko metriko. Videli bomo, da imajo hiperbolični prostori to lastnost.

## 1.2 Modeli

V tem razdelku bomo navedli modele hiperboličnih prostorov, ki so "frame homogeneous"Riemannove mnogoterosti dimenzije $n \geq 1$. Sprva jih bomo le navedli, kasneje pa pokazali njihovo frame homogeneity. Izkaže se, da so vsi ti modeli med seboj izometrični, zato lahko v praksi izberemo kateregakoli izmed njih, na njem obravnavamo želeno in to prenesemo na splošen hiperbolični prostor te dimenzije.

Naj bo $n \geq 1$ in izberimo $R > 0$. $(n+1)$*-dimenzionalni prostor Minkowskega* je prostor $\mathbb{R}^{n,1}$, ki ga v standardnih koordinatah $(x^1, \ldots, x^n, \tau)$ opremimo z *metriko Minkowskega*

$$\bar{q}^{n,1} = (dx^1)^2 + \cdots + (dx^n)^2 - (d\tau)^2. \tag{2}$$

Metriko $\bar{q}^{n,1}$ bomo v nadaljevanju označevali preprosto s $\bar{q}$.

**Primer 1** *4-dimenzionalni prostor Minkowskega $\mathbb{R}^{3,1}$ s koordinatami $(x, y, z, t)$ opisuje prostor-čas v Einsteinovi teoriji relativnosti. Grupo izometrij,* $\mathrm{O}(3, 1)$, *imenovano* Poncaréjeva grupa *sestavlja* 10 *generatorjev: tri prostorske in ena časovna translacija, tri rotacije (v ravninah $(x, y)$, $(x, z)$, $(y, z)$) in tri "time boosts"(rotacije v ravninah $(t, x)$, $(t, y)$, $(t, z)$).*

Sedaj definirajmo štiri Riemannove mnogoterosti, ki so osnovni modeli hiperboličnega prostora dimenzije $n$ in polmera $R$.

1. Hiperboloid $\mathbb{H}^n(R)$.

   Vzemimo $(n+1)$-dimenzionalni prostor Minkowskega $\mathbb{R}^{n,1}$ s standardnimi koordinatami $(x^1, \ldots, x^n, \tau)$ in metriko $\bar{q}$. Pozitivni del $(\tau > 0)$ dvodelnega hiperboloida $(x^1)^2 + \cdots + (x^n)^2 - \tau^2 = -R^2$ opremimo z metriko

   $$\breve{g}^1_R = \iota^*\bar{q}, \tag{3}$$

   kjer $\iota$ označuje inkluzijo $\iota\colon \mathbb{H}^n(R) \to \mathbb{R}^{n,1}$. Dobljeno podmnogoterost $(\mathbb{H}^n(R), \breve{g}^1_R)$ imenujemo *hiperboloid* dimenzije $n$ s polmerom $R$.

2. Beltrami-Kleinov model $\mathbb{K}^n(R)$

   Na $n$-dimenzionalni krogli $\mathbb{K}^n(R)$ s središčem v izhodišču prostora $\mathbb{R}^n$ in polmerom $R$ uvedimo koordinate $(w^1, \ldots, w^n)$. Kroglo opremimo z metriko

$$\breve{g}_R^2 = R^2 \frac{(dw^1)^2 + \cdots + (dw^n)^2}{R^2 - |w|^2} + R^2 \frac{(w^1 dw^1 + \cdots + w^n dw^n)^2}{(R^2 - |w|^2)^2}. \tag{4}$$

   Mnogoterost $(\mathbb{K}^n(R), \breve{g}_R^2)$ se imenuje *Beltrami-Kleinov model*.

3. Poincaréjeva krogla $\mathbb{B}^n(R)$

   Na $n$-dimenzionalni krogli $\mathbb{B}^n(R)$ s središčem v izhodišču prostora $\mathbb{R}^n$ in polmerom $R$ uvedimo koordinate $(u^1, \ldots, u^n)$. Kroglo opremimo z metriko

$$\breve{g}_R^3 = 4R^4 \frac{(du^1)^2 + \cdots + (du^n)^2}{(R^2 - |u|^2)^2}. \tag{5}$$

   Mnogoterost $(\mathbb{B}^n(R), \breve{g}_R^3)$ definira *Poincaréjevo kroglo*.

4. Poincaréjev polprostor $\mathbb{U}^n(R)$

   Na Evklidskem prostoru $\mathbb{R}^n$ uvedimo koordinate $(x^1, \ldots, x^{n-1}, y)$ in njegov podprostor $\mathbb{U}^n(R) = \{(x, y);\ y > 0\}$ opremimo z metriko

$$\breve{g}_R^4 = R^2 \frac{(dx^1)^2 + \cdots + (dx^{n-1})^2 + dy^2}{y^2}. \tag{6}$$

   Mnogoterosti $(\mathbb{U}^n(R), \breve{g}_R^4)$ pravimo *Poincaréjev polprostor*.

Zaradi izometričnosti zgornjih modelov pogosto hiperbolični prostor dimenzije $n$ s polmerom $R$ označimo z $\mathbb{H}^n(R)$, metriko pa z $\breve{g}_R$, pri čemer imamo v mislih poljubnega izmed modelov. Če za polmer izberemo $R = 1$, Riemannovo mnogoterost označimo s $(\mathbb{H}^n, \breve{g})$ in imenujemo *hiperbolični prostor* dimenzije $n$. V dveh dimenzijah dobimo *hiperbolično ravnino*, h kateri se bomo vrnili kasneje.

## 1.3 Izometričnost modelov

**Izrek 1** *Modeli $n$-dimenzionalnih hiperboličnih prostorov s polmerom $R$ so paroma izometrični.*

Dokaz bo potekal v več korakih. Najprej bomo preverili, da je hiperbolični prostor Riemannova mnogoterost. Nato bomo konstruirali izometrije med naslednjimi pari modelov: hiperboloidom in Beltrami-Kleinovim modelom, hiperboloidom in Poincaréjevo kroglo ter Poincaréjevim polprostorom in Poincaréjevo kroglo.

Dokažimo najprej, da je hiperboloid $\mathbb{H}^n(R)$ Riemannova podmnogoterost prostora $\mathbb{R}^{n,1}$. To zadostuje, saj bo iz izometričnosti sledilo, da so vsi modeli Riemannove mnogoterosti. Prostor $\mathbb{H}^n(R)$ lahko opišemo kot

$$\mathbb{H}^n(R) = F^{-1}(-R^2) \cap \{\tau > 0\}, \tag{7}$$

kjer je preslikava $F\colon \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$ definirana s predpisom $F(x^1, \ldots, x^n, \tau) = \sum_{i=1}^n (x^i)^2 - \tau^2$. Tangentni prostor v točki $p \in \mathbb{H}^n(R)$, ki je enak $T_p\mathbb{H}^n(R) = \ker dF_p$, razpenjajo vektorji $X^i = \tau \frac{\partial}{\partial x^i} + x^i \frac{\partial}{\partial \tau}$ za $i = 1, \ldots, n$. Ker je njihov produkt (glede na metriko $\bar{q}$) pozitiven, je metrika $\breve{g}_R^1$ pozitivno definitna in določa Riemannovo podmnogoterost $(\mathbb{H}^n(R), \breve{g}_R^1)$.

### 1.3.1 Centralna projekcija

Izometrija med hiperboloidom in Beltrami-Kleinovim modelom se imenuje *centralna projekcija*, $c\colon \mathbb{H}^n(R) \to \mathbb{K}^n(R)$.

Naj bo $T = (x^1, \ldots, x^n, \tau) \in \mathbb{H}^n(R)$ poljubna točka. Presečišče premice $OT$ skozi izhodišče v $\mathbb{R}^{n,1}$ in točko $T$ s hiperravnino $\{(x, \tau);\ \tau = R\}$ označimo z $Y \in \mathbb{R}^{n,1}$. Pišimo $Y = (y, R)$, kjer je $y = c(T) \in \mathbb{K}^n(R)$ slika $T$ s centralno projekcijo. Tedaj se koordinate točke $Y$ izražajo s koordinatami $T$, natančneje, $Y = \frac{R}{\tau}T$. Preslikavo $c$ zato podaja zveza

$$c(x, \tau) = \frac{R}{\tau}x. \tag{8}$$

Ker slika točke s preslikavo $c$ leži na hiperboloidu, velja

$$|c(x,\tau)|^2 = \frac{R^2}{\tau^2}|x|^2 = \frac{R^2}{\tau^2}(\tau^2 - R^2) = R^2\left(1 - \frac{R^2}{\tau^2}\right) < R^2,$$

torej je $c(x, \tau) \in \mathbb{K}^n(R)$ in je centralna projekcija dobro definirana.

Da je preslikava $c$ difeomorfizem, bomo pokazali s konstrukcijo njenega inverza. Vzemimo poljubno točko $y \in \mathbb{K}^n(R)$. Potem obstaja enoličen $\lambda > 0$, da velja $(x, \tau) = \lambda(y, R) \in \mathbb{H}^n(R)$. Slednja točka je določena z zvezo $\lambda^2(|y|^2 - R^2) = -R^2$, od koder sledi $\lambda = \frac{R}{(R^2-|y|^2)^{1/2}}$. Potem predpis

$$c^{-1}(y) = \left(\frac{Ry}{(R^2 - |y|^2)^{1/2}}, \frac{R^2}{(R^2 - |y|^2)^{1/2}}\right) \tag{9}$$

definira gladko preslikavo, ki je inverz centralne projekcije.

Nazadnje dokažimo, da je $c$ izometrija. Želimo videti, da velja enakost $(c^{-1})^*\breve{g}^1_R = \breve{g}^2_R$. Diferenciali točke $(x, \tau) = c^{-1}(y)$ iz enačbe 9 za nek $y \in \mathbb{K}^n(R)$ so enaki

$$dx^i = \frac{Rdy^i}{(R^2 - |y|^2)^{1/2}} + \frac{Ry^i \sum_{k=1}^n y^k dy^k}{(R^2 - |y|^2)^{3/2}},$$
$$d\tau = \frac{R^2 \sum_{k=1}^n y^k dy^k}{(R^2 - |y|^2)^{3/2}}.$$

Od tod izračunamo

$$(c^{-1})^*\breve{g}^1_R = \sum_{i=1}^n (dx^i)^2 - (d\tau)^2 = R^2\frac{\sum_{i=1}^n (dy^i)^2}{R^2 - |y|^2} + R^2\frac{(\sum_{i=1}^n y^i dy^i)^2}{(R^2 - |y|^2)^2} = \breve{g}^2_R.$$

Torej je centralna projekcija res izometrija med $(\mathbb{H}^n(R), \breve{g}^1_R)$ in $(\mathbb{K}^n(R), \breve{g}^2_R)$.

### 1.3.2 Hiperbolična stereografska projekcija

Izometriji med hiperboloidom in Poincaréjevo kroglo pravimo *hiperbolična stereografska projekcija*, $h\colon \mathbb{H}^n(R) \to \mathbb{B}^n(R)$. Spominja na običajno stereografsko projekcijo za sfere, zato je tudi njena konstrukcija podobna le-tej.

Naj bo $S = (0, \ldots, -R) \in \mathbb{R}^{n,1}$ in izberimo poljubno točko $T = (x^1, \ldots, x^n, \tau)$ na hiperboloidu. Označimo presečišče premice $ST$ s hiperravnino $\{(x, \tau);\ \tau = 0\}$ z $V = (v, 0) \in \mathbb{R}^{n,1}$ in postavimo $h(T) = v \in \mathbb{B}^n(R)$. Sedaj bomo izračunali predpis, ki definira preslikavo $h$. Po konstrukciji točke $V$ obstaja enoličen $\lambda > 0$, ki zadošča enakosti $V - S = \lambda(T - S)$. Ekvivalentno lahko po komponentah zapišemo

$$v^i = \lambda x^i, \quad i = 1, \ldots n, \qquad\qquad R = \lambda(\tau + R),$$

od koder izračunamo koeficient $\lambda = \frac{R}{\tau+R}$. Formula, ki določa $h$, je enaka

$$h(x, \tau) = \frac{R}{\tau + R} x. \tag{10}$$

Ker točka $(x, \tau)$ leži na hiperboloidu, ocenimo

$$|h(x, \tau)|^2 = \frac{R^2}{(\tau + R)^2} |x|^2 = R^2 \frac{\tau^2 - R^2}{\tau^2 + R^2} < R^2,$$

zato preslikava $h$ res slika v Poincaréjevo kroglo $\mathbb{B}^n(R)$.

Konstruirajmo inverz preslikave. Komponente točke $T \in \mathbb{H}^n(R)$ se v odvisnosti od koeficienta $\lambda$ izražajo kot

$$x^i = \frac{v^i}{\lambda}, \quad i = 1, \ldots n, \qquad\qquad \tau = R\frac{1 - \lambda}{\lambda}.$$

To vstavimo v pogoj za točko na hiperboloidu, $|x|^2 - \tau^2 = -R^2$, kar nam da $\lambda = \frac{R^2 - |v|^2}{2R^2}$. Inverzna preslikava ima potem predpis

$$h^{-1}(v) = \left( \frac{2R^2 v}{R^2 - |v|^2}, R\frac{R^2 + |v|^2}{R^2 - |v|^2} \right). \tag{11}$$

Gladek inverz nam zagotavlja, da je hiperbolična stereografska projekcija difeomorfizem.

Podobno kot v prejšnjem primeru preverimo še enakost $(h^{-1})^* \breve{g}^1_R = \breve{g}^3_R$. Diferenciali komponent točke $(x, \tau) = h^{-1}(v)$ iz predpisa 11 so

$$\begin{aligned} dx^i &= \frac{2R^2 dv^i}{R^2 - |v|^2} + \frac{4R^2 v^i \sum_{k=1}^n v^k dv^k}{(R^2 - |v|^2)^2}, \\ d\tau &= \frac{2R \sum_{k=1}^n v^k dv^k}{R^2 - |v|^2} + \frac{2R(R^2 + |v|^2) \sum_{k=1}^n v^k dv^k}{(R^2 - |v|^2)^2}. \end{aligned}$$

Z nekaj računanja dobimo

$$(h^{-1})^* \breve{g}^1_R = \sum_{i=1}^n (dx^i)^2 - (d\tau)^2 = \breve{g}^3_R.$$

Pokazali smo, da je hiperbolična stereografska projekcija izometrija prostorov $(\mathbb{H}^n(R), \breve{g}^1_R)$ in $(\mathbb{B}^n(R), \breve{g}^3_R)$.

### 1.3.3 Posplošena Cayleyjeva transformacija

Omenimo še konstrukcijo izometrije med Poincaréjevo polravnino in Poincaréjevo kroglo. V dvodimenzionalnem primeru smo v domači nalogi videli, da izometrijo med Poincaréjevo polravnino $\mathbb{U}$ in Poincaréjevim diskom $\mathbb{D}$ (za $R = 1$) podaja Möbiusova transformacija $\tau\colon \mathbb{U} \to \mathbb{D}$, definirana s predpisom

$$\tau(z) = \frac{1 + iz}{z + i}, \tag{12}$$

kjer je $z = (x, y)$ kompleksen zapis točke v ravnini. S skaliranjem dobimo predpis za preslikavo $k\colon \mathbb{U}^2(R) \to \mathbb{B}^2(R)$,

$$k(z) = iR\frac{z - iR}{z + iR}. \tag{13}$$

Če preidemo v realne koordinate z identifikacijo $\Re z = x$, $\Im z = y$, kratek račun pokaže ekvivalenten predpis

$$k(x, y) = \left( \frac{2xR^2}{x^2 + (y + R)^2}, R\frac{x^2 + y^2 - R^2}{x^2 + (y + R)^2} \right). \tag{14}$$

Preslikavi $k$ pravimo *Cayleyjeva transformacija.*

V splošnem primeru koordinate na Poincaréjevem polprostoru $\mathbb{U}^n(R)$ zapišimo kot $(x^1, \ldots, x^n, y) = (x, y)$ in uporabimo zgornji predpis. Novo preslikavo, ki je prav tako izometrija, imenujemo *posplošena Cayleyjeva transformacija.*

## 1.4 Lastnosti hiperboličnih prostorov

**Trditev 1** *Hiperbolični prostor* $(\mathbb{H}^n(R), \breve{g})$ *je lokalno konformno ploščat.*

*Dokaz:* Za model hiperboličnega prostora vzemimo Poincaréjevo kroglo $\mathbb{B}^n(R)$. Identična preslikava $id\colon (\mathbb{B}^n(R), \breve{g}^3_R) \to (\mathbb{R}^n, \bar{g})$ je konformna in porodi konformno ekvivalenco Poincaréjeve krogle z odprto podmnožico Evklidskega prostora. Zaradi izometričnosti modelov sledi, da je hiperbolični prostor lokalno konformno ploščat. □

**Definicija 6** *Naj bo* $\mathbb{R}^{n,1}$ *prostor Minkowskega* ($n \geq 1$) *opremljen z metriko Minkowskega* $\bar{q}$. *Grupo linearnih preslikav, ki slikajo* $\mathbb{R}^{n,1}$ *vase in ohranjajo metriko Minkowskega, imenujemo* $(n+1)$-dimenzionalna Lorentzova grupa *in označimo z* $\mathrm{O}(n, 1)$.

*Njeno podgrupo, ki ohranja hiperboloid* $\mathbb{H}^n(R)$ *označimo z* $\mathrm{O}^+(n, 1)$. *Pravimo ji* ortokrona Lorentzova grupa.

**Trditev 2** *Lorentzova grupa* $\mathrm{O}^+(n, 1)$ *deluje tranzitivno na množico* $\mathrm{O}(\mathbb{H}^n(R))$. *Hiperbolični prostor* $\mathbb{H}^n(R)$ *je "frame homogeneous".*

*Dokaz:* Dovolj je pokazati, da za poljubno točko $p \in \mathbb{H}^n(R)$ in ortonormirano bazo $\{e_1, \ldots, e_n\}$ prostora $T_p\mathbb{H}^n(R)$ obstaja ortogonalna preslikava, ki preslika točko $N = (0, \ldots, 0, R)$ v $p$ ter ortonormirano bazo $\{\partial_1, \ldots, \partial_n\}$ za $T_N\mathbb{H}^n(R)$ v bazo $\{e_i\}_i$.

Naj bo $p \in \mathbb{H}^n(R)$ poljubna točka. Identificirajmo $p$ z vektorjem dolžine $R$ v $T_p\mathbb{R}^{n,1}$ in postavimo $\bar{p} = \frac{p}{R}$. $\bar{p}$ je enotski vektor glede na metriko Minkowskega $\bar{q}$, kaže v smeri $p$, in $\bar{p} \in T_p\mathbb{R}^{n,1}$. Prostor $\mathbb{H}^n(R)$ predstavimo kot v 7. Tedaj je gradient preslikave $F$ glede na metriko $\bar{q}$ enak

$$\mathrm{grad} F = 2\sum_{i=1}^{n} x^i \frac{\partial}{\partial x^i} + 2\tau\frac{\partial}{\partial \tau}.$$

Opazimo, da je $\bar{p} = 2 \cdot \mathrm{grad} F$ in zato $\bar{p} \perp T_p\mathbb{H}^n(R)$. Potem je množica $\{e_1, \dots, e_n, \bar{p}\}$ ortonormirana baza prostora $\mathbb{R}^{n,1}$ glede na metriko $\bar{q}$.

Naj bo $M$ matrika, katere stolpci so vektorji iz zgornje ortonormirane baze. Po konstrukciji velja $M \in \mathrm{O}^+(n,1)$ in $M$ slika $\{\partial_1, \dots, \partial_{n+1}\}$ v $\{e_1, \dots, e_n, \bar{p}\}$ ter $N$ v $p$. Ker je $M$ kot preslikava linearna na $\mathbb{R}^{n,1}$, je njen diferencial v točki $N$, $dM_N \colon T_N\mathbb{R}^{n,1} \to T_p\mathbb{R}^{n,1}$, prav tako predstavljen z matriko $M$. To pa pomeni, da je $dM_n(\partial_i) = e_i$, $i = 1, \dots, n$. $M$ je iskana preslikava in delovanje grupe je tranzitivno. Po definiciji je zato $\mathbb{H}^n(R)$ frame homogeneous. $\square$

## 1.5 Ukrivljenost

**Primer 2 (Traktoid)** *Oglejmo si primer ploskve, vložene v $\mathbb{R}^3$, in izračunajmo njeno Gaussovo ukrivljenost. Defnirajmo preslikavi*

$$f\colon (0,1) \to \mathbb{R}, \qquad f(r) = \sqrt{1-r^2} - \cosh^{-1}\left(\frac{1}{r}\right);$$
$$\sigma\colon (0,1)\times(0,2\pi) \to \mathbb{R}^3, \qquad \sigma(r,v) = (r\cos v, r\sin v, f(r)).$$

*Preslikava $\sigma$ je parametrizacija rotacijske ploskve, ki jo imenujemo* traktoid.

*Izračunajmo prvo in drugo fundamentalno formo ploskve.*

$$\sigma_r = \left(\cos v, \sin v, \frac{\sqrt{1-r^2}}{r}\right), \ \sigma_v = (-r\sin v, r\cos v, 0),$$
$$\sigma_{rr} = \left(0, 0, -\frac{1}{r^2\sqrt{1-r^2}}\right), \ \sigma_{rv} = \sigma_{vr} = (-\sin v, \cos v, 0), \ \sigma_{vv} = (-r\cos v, -r\sin v, 0),$$
$$\sigma_r \times \sigma_v = \left(-\sqrt{1-r^2}\cos v, -\sqrt{1-r^2}\sin v, r\right), \ ||\sigma_r \times \sigma_v|| = 1,$$
$$n = -\frac{\sigma_r \times \sigma_v}{||\sigma_r \times \sigma_v||} = \left(\sqrt{1-r^2}\cos v, \sqrt{1-r^2}\sin v, -r\right),$$

*kjer je $n$ zunanja normala ploskve. Iz parcialnih odvodov izračunamo koeficiente*

$$E = \sigma_r \cdot \sigma_r = \frac{1}{r^2}, \ F = \sigma_r \cdot \sigma_v = 0, \ G = \sigma_v \cdot \sigma_v = r^2,$$
$$L = \sigma_{rr} \cdot n = \frac{1}{r\sqrt{1-r^2}}, \ M = \sigma_{rv} \cdot n = 0, \ N = \sigma_{vv} \cdot n = -r\sqrt{1-r^2}.$$

*Po formuli za Gaussovo ukrivljenost končno dobimo*

$$\kappa = \frac{LN - M^2}{EG - F^2} = -1.$$

*Traktoid je ploskev s konstantno negativno Gaussovo ukrivljenostjo in je primer hiperbolične ploskve.*

## 1.6 Geodetke na hiperbolčnih prostorih

**Izrek 2** *Maksimalne geodetke na hiperboličnem prostoru so natanko*

1. *glavne hiperbole, natančneje, preseki $\mathbb{H}^n(R)$ z ravnino v $\mathbb{R}^{n,1}$, če je prostor* hiperboloid *$\mathbb{H}^n(R)$;*

2. *premice v notranjosti* $\mathbb{K}^n(R)$ *v* Beltrami-Kleinovem modelu $\mathbb{K}^n(R)$*;*
3. *premeri krogle* $\mathbb{B}^n(R)$ *ali krožni loki v notranjosti krogle, ki rob* $\partial\mathbb{B}^n(R)$ *sekajo pod pravim kotom, v primeru* Poincaréjeve krogle $\mathbb{B}^n(R)$*;*
4. *premice, vzporedne* $\tau$*-osi, ali polkrožnice s središči na robu* $\partial\mathbb{U}^n(R)$*, kadar je model* Poincaréjev polprostor $\mathbb{U}^n(R)$*.*

*Dokaz:* Najprej bomo obravnavali model hiperboloida $\mathbb{H}^n(R)$. Opazimo, da je na hiperboloidu tangentna komponenta "povezave"$\nabla^\perp$ enaka Levi-Civita, saj je $\mathbb{H}^n(R)$ vložena podmnogoterost v $\mathbb{R}^{n,1}$. Geodetke na hiperboloidu zato lahko karakteriziramo z naslednjim pogojem: krivulja $\gamma\colon I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{H}^n(R)$ je geodetka natanko tedaj, ko je za vse $t$ vektor $\gamma''(t)$ pravokoten na tangentni prostor $T_{\gamma(t)}\mathbb{H}^n(R)$ glede na metriko Minkowskega $\bar{q}$.

Vzemimo poljubno točko $p \in \mathbb{H}^n(R)$ in jo kot v dokazu trditve 2 identificirajmo z vektorjem dolžine $R$ v $T_p\mathbb{R}^{n,1}$. Naj bo $F$ funkcija, ki definira hiperboloid (enakost 7). Opisati želimo elemente tangentnega prostora $T_p\mathbb{H}^n(R)$. Ker velja $\mathrm{grad}F|_p = 2 \cdot p$, neničelni vektor $v$ zadošča $v \in T_p\mathbb{H}^n(R)$ natanko takrat, ko je $\bar{q}(p, v) = 0$ (vektorja $p$ in $v$ sta pravokotna glede na metriko $\bar{q}$).

Izberimo $v \in T_p\mathbb{H}^n(R)$ ter postavimo $a = \frac{|v|_{\bar{q}}}{R}$ in $\bar{v} = \frac{v}{a}$ (tj. $|\bar{v}| = R$). Definirajmo gladko krivuljo $\gamma\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{n,1}$ s predpisom

$$\gamma(t) = \cosh(at) \cdot p + \sinh(at) \cdot \bar{v}.$$

Krivulja leži na hiperboloidu, saj velja $|\sinh(at) \cdot \bar{v}|^2 - |\cosh(at) \cdot p|^2 = -R^2$. Nadalje je

$$\gamma'(t) = a \sinh(at) \cdot p + a \cosh(at) \cdot \bar{v},$$
$$\gamma''(t) = a^2 \cosh(at) \cdot p + a^2 \sinh(at) \cdot \bar{v} = a^2\gamma(t),$$
$$\bar{q}(\gamma'(t), \gamma''(t)) = 0,$$

od koder sledi, da je krivulja $\gamma$ geodetka v $\mathbb{H}^n(R)$. Veljata še začetna pogoja $\gamma(0) = p$ in $\gamma'(0) = a\bar{v} = v$, zato je $\gamma = \gamma_v$ konstantne hitrosti $a$. Krivulja $\gamma_v$ je gladka vložitev $\mathbb{R} \to \mathbb{H}^n(R)$, katere slika je glavna hiperbola (ravnino, ki seka hiperboloid, razpenjata vektorja $p$, $\bar{v}$).

Naj bo $\Sigma \subset \mathbb{R}^{n,1}$ taka ravnina z ortonormirano bazo $\{v, p\}$, da je njen presek s hiperboloidom $\mathbb{H}^n(R)$ glavna hiperbola $H$. Potem je $H$ slika geodetke z začetno točko $p$ (točka $p$ in pripadajoč vektor sta identificirana) in začetno hitrostjo $v$.

Dokazali smo, da so maksimalne geodetke na hiperboloidu natanko glavne hiperbole. Modeli hiperboličnih prostorov so med seboj izometrični, zato zaradi naravnosti Levi-Civita sledi, da so geodetke v vseh modelih vložitve $\mathbb{R}$ v $\mathbb{R}^{n,1}$. Geodetke so torej definirane za vse čase $t$, kar je posebej lepa lastnost hiperboličnih prostorov.

Oglejmo si Beltrami-Kleinov model. Vemo, da izometrijo med hiperboloidom in Beltrami-Kleinovim modelom definira predpis $c\colon \mathbb{H}^n(R) \to \mathbb{K}^n(R)$, $c(x, \tau) = \frac{R}{\tau}x$. Iz zgornjega vemo še, da je slika maksimalne geodetke na hiperboloidu glavna hiperbola. Glavno hiperbolo opisuje sistem enačb

$$\lambda_i x^i + \mu\tau = 0,\ i = 1, \ldots, n \tag{15}$$

za $\lambda_i, \mu \in \mathbb{R}$. Točka $(x, \tau)$ zadošča zgornji enačbi natanko takrat, [1] ko za njeno sliko $c(x, \tau) = y$ velja

$$\lambda_i y^i + \mu R = 0, \ i = 1, \ldots, n. \tag{16}$$

Sledi, da izometrija $c$ glavno hiperbolo preslika v presek $\mathbb{K}^n(R)$ in afinega podprostora v $\mathbb{R}^n$ (tega določa 16). Slika gladke krivulje s preslikavo $c$ je gladka krivulja, zato je slika glavne hiperbole, geodetka, evklidska premica v Klein-Beltramijevem modelu $\mathbb{K}^n(R)$.

Sedaj bomo poiskali geodetke na Poincaréjevi krogli. Ko je $n = 2$, z domače naloge vemo, da so geodetke na Poincaréjevem disku premeri diska ter krožni loki, ki rob diska $\partial\mathbb{B}^2(R)$ sekajo pravokotno.

Za splošen $n$ je situacija podobna. Spomnimo se hiperbolične stereografske projekcije $h$ med hiperboloidom in Poincaréjevo kroglo. Ker je geodetka na hiperboloidu določena z ravnino, ki hiperboloid seka netrivialno, je dovolj obravnavati dvodimenzionalni primer. Oglejmo si dve situaciji. Če glavna hiperbola $H$ vsebuje točko $(0, \ldots, 0, R) \in \mathbb{H}^n(R)$, nam predpis za preslikavo $h$ pove, da slika hiperbole, $h(H)$, vsebuje izhodišče in je enaka notranjosti premera krogle $\mathbb{B}^n(R)$. V nasprotnem primeru z rotacijo koordinat $(x^1, \ldots, x^n, \tau) \to (\tilde{x}^1, \ldots, \tilde{x}^n, \tau)$ lahko dosežemo, da ravnina, ki vsebuje glavno hiperbolo $H$, leži na podprostoru $Lin\{\tilde{x}^1, \tilde{x}^2, \tau\}$. Nato uporabimo znanje iz dvodimenzionalnega primera ter zaključimo, da so geodetke na $\mathbb{B}^n(R)$ premeri krogle in krožni loki, ki rob $\partial\mathbb{B}^n(R)$ sekajo pod pravim kotom.

Na podoben način opišimo še geodetke na Poincaréjevem polprostoru. V dveh dimenzijah z vaj vemo, da so geodetke na Poincaréjevi polravnini natanko navpične premice (vzporednice $\tau$-osi) in polkrožnice s središči na robu polravnine $\partial\mathbb{U}^2(R)$.

V splošnem primeru ($n \in \mathbb{N}$) si bomo pomagali z geodetkami v Poincaréjevi krogli in Cayleyjevo transformacijo $k$ med Poincaréjevim polprostorom ter kroglo. Naj bo $\gamma\colon \mathbb{R} \to \mathbb{U}^n(R)$ maksimalna geodetka, za katero točka $\gamma(0)$ leži na $\tau$-osi in je vektor $\gamma'(0) \in Lin\{\frac{\partial}{\partial x^1}, \frac{\partial}{\partial \tau}\}$. Označimo z $(x, \tau)$ koordinate na $\mathbb{U}^n(R)$ ter z $(u, v)$ koordinate na $\mathbb{B}^n(R)$. Predpis za izometrijo $k$ pove, da točka $k \circ \gamma(0)$ leži na $v$-osi in $(k \circ \gamma)'(0) \in Lin\{\frac{\partial}{\partial u^1}, \frac{\partial}{\partial v}\}$. Ker je $k$ izometrija, je $k \circ \gamma$ geodetka v $\mathbb{B}^n(R)$, vsebovana v $\{u^1, v\}$-ravnini, katere slika je notranjost premera ali krožni lok, pravokoten na rob krogle. Po primeru iz dveh dimenzij sledi, da je geodetka $\gamma$ vsebovana v $\{x^1, \tau\}$-ravnini, njena slika pa je navpičnica ali polkrožnica s središčem na $\{\tau = 0\}$.

Splošneje, vzemimo poljubno geodetko $\gamma\colon \mathbb{R} \to \mathbb{U}^n(R)$. S translacijo $x$-koordinat najprej začetno točko $\gamma(0)$ prestavimo na $\tau$-os in nato s primerno rotacijo $x$-koordinat dobimo $\gamma'(0) \in Lin\{\frac{\partial}{\partial x^1}, \frac{\partial}{\partial \tau}\}$. Uporabimo posebni primer od prej. [2] Geodetke na Poincaréjevem polprosotoru so torej natanko premice, vzporedne $\tau$-osi, ali polkrožnice s središči na $\partial\mathbb{U}^n(R)$. $\square$

---

[1] Res, če je $\lambda_i x^i + \mu\tau = 0$, je $\tau = -\frac{\lambda_i x^i}{\mu}$ in $y^i = \frac{R x^i}{\tau} = -\frac{R\mu}{\lambda_i}$. Obratno, naj velja $\lambda_i y^i + \mu R = 0$. Računamo $\lambda_i x^i + \mu\tau = \lambda_i x^i - \frac{\lambda_i y^i \tau}{R} = \lambda_i(x^i - \frac{y^i \tau}{R}) = \lambda_i \cdot 0 = 0$. Ekvivalenca je dokazana.

[2] Take transformacije $x$-koordinat slikajo navpične premice v navpične premice in polkrožnice s središčem na $\{\tau = 0\}$ v polkrožnice z enako lastnostjo, zato z njimi nismo izgubili nobene informacije o geodetkah.

## 2 Hiperbolična geometrija

## Literatura