Hiperbolični prostori

Tjaša Vrhovnik
Fakulteta za matematiko in fiziko
Oddelek za matematiko

9. junij 2021

Kazalo

1 Modeli hiperboličnih prostorov

1.1 Osnovne definicije

Naslednje definicije opisujejo mnogoterosti z visoko simetrijo. Natančneje to pomeni, da so njihove grupe izometrij velike. Najpreprostejši primer so Evklidski prostori - zanje že intuitivno vemo, da obstajajo preslikave, izometrije, ki poljubni točki preslikajo eno v drugo, celo več, ortonormirano bazo v prvi točki lahko preslikajo v ortonormirano bazo v drugi. Izkazalo se bo, da to niso edini taki prostori. Drug primer so n-dimenzionalne sfere $\mathbb{S}^n$, mi pa se bomo posvetili študiju hiperboličnih prostorov.

Definicija 1 *Naj bosta (M, g) in $(\tilde{M}, \tilde{g})$ Riemannovi mnogoterosti. Gladka preslikava $\phi\colon M \to \tilde{M}$* ohranja metriko*, če velja $g = \phi^*\tilde{g}$.*

Difeomorfizem, ki ohranja metriko, imenujemo izometrija. Lokalna izometrija *pa je lokalni difeomorfizem, ki ohranja metriko.*

Definicija 2 *Naj bo (M, g) Riemannova mnogoterost. Množico izometrij mnogoterosti M, ki je grupa za komponiranje, označimo z $\mathrm{Iso}(M, g)$. Pravimo, da je (M, g)* homogena Riemannova mnogoterost*, če grupa $\mathrm{Iso}(M, g)$ deluje tranzitivno na M. To pomeni, da za poljuben par točk $p, q \in M$ obstaja izometrija $\phi\colon M \to M$ z lastnostjo $\phi(p) = q$.*

Če je ϕ izometrija Riemannove mnogoterosti (M, g), je njen diferencial $d\phi$ preslikava na tangentnem prostoru TM. V vsaki točki $p \in M$ diferencial definira linearno izometrijo $d\phi_p\colon T_pM \to T_{\phi(p)}M$.

Definicija 3

1. *Naj bo $p \in M$. Podgrupo grupe $\mathrm{Iso}(M, g)$ izometrij, ki fiksirajo p, imenujemo* izotropična podgrupa *v p in označimo z $\mathrm{Iso}_p(M, g)$.*
2. *Preslikavi $I_p\colon \mathrm{Iso}_p(M, g) \to \mathrm{GL}(T_pM)$, definirani s predpisom $I_p(\phi) = d\phi_p$, pravimo* izotropična reprezentacija.
3. *Mnogoterost M je* izotropična v točki p*, kadar izotropična reprezentacija deluje tranzitivno na množico enotskih vektorjev v T_pM. Nadalje pravimo, da je M* izotropična*, če je izotropična v vsaki točki $p \in M$.*

Označimo z $\mathrm{O}(M) = \sqcup_{p\in M}\{\text{ortonormirane baze } T_pM\}$ množico vseh ortonormiranih baz na tangentnih prostorih mnogoterosti M. Delovanje grupe izometrij $\mathrm{Iso}(M, g)$ na množico $\mathrm{O}(M)$ povezuje ortonormirani bazi v točkah p in $\phi(p)$ na naslednji način. Naj bo $\phi \in \mathrm{Iso}(M, g)$ in $e_1, \ldots, e_n \in \mathrm{O}(M)$. Delovanje definiramo s predpisom

$$\phi \cdot (e_1, \ldots, e_n) = (d\phi_p(e_1), \ldots, d\phi_p(e_n)). \tag{1}$$

Definicija 4 *Riemannova mnogoterost (M, g) je* frame homogeneous *oziroma* maksimalno simetrična*, če je delovanje 1 tranzitivno na množici $\mathrm{O}(M)$; natančneje, če za poljuben par $p, q \in M$ in poljuben izbor ortonormiranih baz na tangentnih prostorih T_pM in T_qM obstaja izometrija, ki preslika p v q ter ortonormirano bazo v točki p v izbrano ortonormirano bazo v točki q.*

Geometrično si homogeno Riemannovo mnogoterost predstavljamo kot tako, ki ne glede na izbor točke na njej, izgleda enako. Izotropična Riemannova mnogoterost pa izgleda enako tudi v vseh smereh.

Definicija 5 *Naj bosta (M, g) in $(\tilde{M}, \tilde{g})$ Riemannovi mnogoterosti. Difeomorfizem $\phi\colon M \to \tilde{M}$ je* konformna preslikava*, če obstaja taka pozitivna funkcija $\mu \in \mathcal{C}^\infty(M)$, da velja*

$$\phi^*\tilde{g} = \mu g.$$

V tem primeru pravimo, da sta mnogoterosti (M, g) in $(\tilde{M}, \tilde{g})$ konformno ekvivalentni*.*

Konformni difeomorfizmi med Riemannovimi mnogoterostmi so ravno difeomorfizmi, ki ohranjajo velikosti kotov. Tako se pomen zgornje definicije sklada s konformnostjo, ki jo poznamo iz kompleksne analize.

Posebej zanimive Riemannove mnogoterosti so tiste, ki jih (vsaj) lokalno lahko primerjamo z Evklidskim prostorom. Pravimo, da je Riemannova mnogoterost (M, g) *lokalno konformno ploska*, če ima vsaka točka $p \in M$ okolico, ki je konformno ekvivalentna odprti množici v $(\mathbb{R}^n, \bar{g})$, kjer $\bar{g}$ označuje običajno Evklidsko metriko.

1.2 Modeli

V tem razdelku bomo navedli modele hiperboličnih prostorov, ki so "frame homogeneous"Riemannove mnogoterosti dimenzije $n \geq 1$. Sprva jih bomo le navedli, kasneje pa pokazali njihovo frame homogeneity. Izkaže se, da so vsi ti modeli med seboj izometrični, zato lahko v praksi izberemo kateregakoli izmed njih, na njem obravnavamo želeno in to prenesemo na splošen hiperbolični prostor te dimenzije.

Naj bo $n \geq 1$ in izberimo $R > 0$. $(n+1)$*-dimenzionalni prostor Minkowskega* je prostor $\mathbb{R}^{n,1}$, ki ga v standardnih koordinatah $(x^1, \ldots, x^n, \tau)$ opremimo z *metriko Minkowskega*

$$\bar{q}^{n,1} = (dx^1)^2 + \cdots + (dx^n)^2 - (d\tau)^2. \tag{2}$$

Metriko $\bar{q}^{n,1}$ bomo v nadaljevanju označevali preprosto s $\bar{q}$.

1. Hiperboloid $\mathbb{H}^n(R)$ definramo na naslednji način.

   Vzemimo $(n+1)$-dimenzionalni prostor Minkowskega $\mathbb{R}^{n,1}$ s standardnimi koordinatami $(x^1, \ldots, x^n, \tau)$ in metriko $\bar{q}$. Pozitivni del $(\tau > 0)$ dvodelnega hiperboloida $(x^1)^2 + \cdots + (x^n)^2 - \tau^2 = -R^2$ opremimo z metriko

   $$\breve{g}^1_R = \iota^*\bar{q}, \tag{3}$$

   kjer ι označuje inkluzijo $\iota\colon \mathbb{H}^n(R) \to \mathbb{R}^{n,1}$. Dobljeno podmnogoterost $(\mathbb{H}^n(R), \breve{g}^1_R)$ imenujemo *hiperboloid* dimenzije n s polmerom R.

2. Beltrami-Kleinov model $\mathbb{K}^n(R)$

   Na n-dimenzionalni krogli $\mathbb{K}^n(R)$ s središčem v izhodišču prostora $\mathbb{R}^n$ in polmerom R uvedimo koordinate $(w^1, \ldots, w^n)$. Kroglo opremimo z metriko

   $$\breve{g}^2_R = R^2 \frac{(dw^1)^2 + \cdots + (dw^n)^2}{R^2 - |w|^2} + R^2 \frac{(w^1 dw^1 + \cdots + w^n dw^n)^2}{(R^2 - |w|^2)^2}. \tag{4}$$

   Mnogoterost $(\mathbb{K}^n(R), \breve{g}^2_R)$ se imenuje *Beltrami-Kleinov model.*

3. Poincaréjeva krogla $\mathbb{B}^n(R)$

   Na n-dimenzionalni krogli $\mathbb{B}^n(R)$ s središčem v izhodišču prostora $\mathbb{R}^n$ in polmerom R uvedimo koordinate $(u^1, \ldots, u^n)$. Kroglo opremimo z metriko

$$\breve{g}^3_R = 4R^4 \frac{(du^1)^2 + \cdots + (du^n)^2}{(R^2 - |u|^2)^2}. \tag{5}$$

   Mnogoterost $(\mathbb{B}^n(R), \breve{g}^3_R)$ se imenuje *Poincaréjeva krogla*.

4. Poincaréjev polprostor $\mathbb{U}^n(R)$

   Na Evklidskem prostoru $\mathbb{R}^n$ uvedimo koordinate $(x^1, \ldots, x^{n-1}, y)$ in njegov podprostor $\mathbb{U}^n(R) = \{(x, y);\ y > 0\}$ opremimo z metriko

$$\breve{g}^4_R = R^2 \frac{(dx^1)^2 + \cdots + (dx^{n-1})^2 + dy^2}{y^2}. \tag{6}$$

   Mnogoterosti $(\mathbb{U}^n(R), \breve{g}^4_R)$ pravimo *Poincaréjev polprostor*.

2 Hiperbolična geometrija

Literatura