

Projekt pri predmetu Matematično modeliranje

TJAŠA VRHOVNIK
Fakulteta za matematiko in fiziko
Oddelek za matematiko

21. avgust 2019

Kazalo

1	Naloga	3
2	Izpeljava	3
3	Numerična rešitev	4
3.1	Program doloci_polinom.m	4
3.2	Program risi_polinom.m	5
4	Primeri	6
4.1	Vzorčni primer	6
4.2	Primer z uporabo grafičnega vmesnika	8

1 Naloga

Rešujemo naslednji problem: V ravnini sta dani dve točki, $T_1(x_1, y_1)$ in $T_2(x_2, y_2)$, kjer je $y_1 > y_2$ in $x_1 < x_2$. Med vsemi kubičnimi polinomi, ki potekajo skozi točke T_1 , T_2 in $T_3 = T_1 + \frac{1}{2}(T_2 - T_1)$, iščemo tistega, ki minimizira čas potovanja kroglice po njegovem grafu od T_1 do T_2 .

2 Izpeljava

Naloga se zdi podobna znamenitemu problemu o brahistohroni, ki ga je zastavil Jacob Bernoulli. Označimo iskan kubični polinom z $r(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$. Polinom r bo določen, ko bomo poznali njegove koeficiente a_3 , a_2 , a_1 in a_0 . Za lažje računanje za začetek prestavimo točke tako, da bo T_1 v koordinatnem izhodišču. Označimo nove točke:

$$\begin{aligned}T'_1 &= (0, 0), \\T'_2 &= T_2 - T_1 = (x_2 - x_1, y_2 - y_1), \\T'_3 &= T_3 - T_1 = \frac{1}{2}(T_2 - T_1) = \frac{1}{2}T'_2.\end{aligned}$$

S tem bo graf transliranega polinoma $p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ med T'_1 in T'_2 ves čas pod abscisno osjo. Če bi graf dosegel nenegativno vrednost med točkama T'_1 in T'_3 , bi bil vodilni koeficient polinoma p pozitiven. To bi pomenilo, da bi se kroglica iz začetne točke dvigala, kar fizikalno ni mogoče. Predvidevamo tudi, da so vrednosti polinoma med točkama T'_3 in T'_2 povsod negativne; to bomo kasneje potrdili z numeričnimi primeri.

Izračunajmo koeficiente polinoma p . Vemo, da je kubični polinom enolično določen s štirimi točkami v ravnini. V našem primeru so znane tri točke na polinomu, kar pomeni, da bomo imeli en prost parameter. Vstavimo koordinate točk T'_1 , T'_2 in T'_3 v izraz za polinom p in računajmo:

$$p(0) = d = 0, \quad (1)$$

$$p(x_2 - x_1) = a(x_2 - x_1)^3 + b(x_2 - x_1)^2 + c(x_2 - x_1) = y_2 - y_1, \quad (2)$$

$$p\left(\frac{x_2 - x_1}{2}\right) = a\left(\frac{x_2 - x_1}{2}\right)^3 + b\left(\frac{x_2 - x_1}{2}\right)^2 + c\frac{x_2 - x_1}{2} = \frac{y_2 - y_1}{2}. \quad (3)$$

Pomnožimo enačbo (3) s faktorjem 2 in jo odštejmo od enačbe (2). Dobimo

$$\begin{aligned}\frac{3}{4}a(x_2 - x_1)^3 + \frac{1}{2}b(x_2 - x_1)^2 &= 0, \\ \frac{3}{2}a(x_2 - x_1) + b &= 0, \\ b &= -\frac{3}{2}a(x_2 - x_1).\end{aligned} \quad (4)$$

Koeficient c izračunamo iz enačbe (2), pri čemer upoštevamo zgornji izraz za b .

Računamo

$$\begin{aligned}
c(x_2 - x_1) &= y_2 - y_1 - a(x_2 - x_1)^3 - b(x_2 - x_1)^2 \\
&= y_2 - y_1 - a(x_2 - x_1)^3 + \frac{3}{2}a(x_2 - x_1)^3 \\
&= y_2 - y_1 + \frac{1}{2}a(x_2 - x_1)^3, \\
c &= \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} + \frac{1}{2}a(x_2 - x_1)^2.
\end{aligned} \tag{5}$$

Koeficienti polinoma p se izražajo s parametrom a , katerega ne poznamo. Polinom p je torej funkcija dveh spremenljivk, $p = p(x, a)$. Spremenljivko a bomo določili z minimizacijo časa potovanja po grafu polinoma.

Čas, ki ga kroglica potrebuje za pot med točkama T'_1 in T'_2 se izraža z integralom

$$t = \int_{T'_1}^{T'_2} \frac{ds}{v}. \tag{6}$$

Upoštevajmo zakon o ohranitvi energije, ki v našem primeru pravi, da se vsota kinetične in potencialne energije kroglice med potovanjem ohranja. Uporabimo razmislek, da je graf polinoma ves čas pod abscisno osjo – enačba se tako glasi

$$\frac{1}{2}mv^2 = mg(-p),$$

od koder izrazimo hitrost potovanja kroglice

$$v = \sqrt{2g(-p)}.$$

Vemo še, da je ločna dolžina enaka $ds^2 = dx^2 + dp^2$. Označimo parcialni odvod polinoma p po spremenljivki x s $p' = \frac{dp}{dx}$. Enačba (6) tako dobi obliko

$$T(a) = \int_0^{x_2 - x_1} \sqrt{\frac{1 + p'^2}{-2gp}} dx, \tag{7}$$

kjer smo s T označili funkcijo časa, odvisno od spremenljivke a . Naša naloga je poiskati njen minimum. Analitično iskanje minimuma funkcije T je zahtevno; pomagali si bomo z numeriko in s pomočjo programa Matlab poiskali vrednost a , ki ustreza minimalni vrednosti funkcije T .

3 Numerična rešitev

3.1 Program doloci_polinom.m

Oglejmo si program `doloci_polinom.m` v Matlabu. Program kot argumente sprejme koordinate točk T_1 in T_2 pri čemer velja $x_1, y_1, x_2, y_2 \in \mathbb{R}$, $y_1 > y_2$ in $x_1 < x_2$. Kot smo razmislili v prejšnjem poglavju, je smiselno točke translirati tako, da točka T_1 leži v koordinatnem izhodišču. Koeficiente transliranega polinoma p definiramo kot funkcije spremenljivke a , ter definiramo polinom in njegov odvod, ki sta funkciji spremenljivk a in x . Funkcijo T definiramo kot v enačbi (7). Za minimizacijo te funkcije uporabimo vgrajeno funkcijo

`fminsearch`, ki vrne iskano vrednost spremenljivke a , pri kateri je čas potovanja kroglice po grafu polinoma najmanjši. Vrednost v programu označimo z A . Kako smo določili začetni približek za vrednost A , ki je obvezen argument funkcije `fminsearch`? Že v začetku smo premislili, da bo vodilni koeficient polinoma negativen. Če izberemo $a = 0$, se translirani polinom glasi $p(x) = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}x$, kar je premica skozi točke T'_1, T'_2 in T'_3 . Z naraščanjem absolutne vrednosti a postaja graf polinoma čedalje bolj ukrivljen. Tako za $a < 0$ kmalu doseže ne-negativne vrednosti med točkama T'_3 in T'_2 ; izračunan čas je v tem primeru kompleksno število, zato smo v težavah. Vendar na konkretnih primerih ugotovimo, da je za negativne vrednosti a , ki so blizu 0, potreben čas manjši od časa potovanja po premici, z manjšanjem a od neke vrednosti a dalje, pa se čas povečuje. Nadalje obstaja še manjša vrednost a , pri kateri graf polinoma preide abscisno os. Od tod sklepamo, da je ustrezen začetni približek $A = 0$.

Program `doloci_polinom.m` vrne vodilni koeficient polinoma p skozi translirane točke, od koder lahko izračunamo ostale koeficiente polinoma. Našli smo torej polinom, ki minimizira čas potovanja kroglice skozi točke T'_1, T'_2 in T'_3 . Vendar je naša naloga poiskati polinom r , ki vsebuje točke T_1, T_2 in T_3 . Časa potovanja po grafih obeh polinomov sta enaka, saj se obliki (ukrivljenosti) polinomov ujemata. Iskani polinom namreč dobimo tako, da polinom skozi premaknjene točke transliramo za krajevni vektor točke T_1 . Polinom skozi prvotne točke, ki nas zanima, ustreza zvezi

$$r(x) = a(x - x_1)^3 + b(x - x_1)^2 + c(x - x_1) + d + y_1. \quad (8)$$

Ker poznamo koeficiente a, b, c in d , vrednosti x_1 in y_1 pa sta koordinati točke T_1 , poznamo tudi iskani polinom r .

3.2 Program `risi_polinom.m`

Za vizualizacijo uporabimo program `risi_polinom.m`. Ta najprej odpre koordinatno mrežo velikosti $[0, 1] \times [0, 1]$, na kateri uporabnik s klikom izbere dve točki. Zaradi lažje predstave program koordinate izbranih točk pomnoži s faktorjem 10, tako dobljeni točki pa ustrezata točkama T_1 in T_2 , ki določata polinom. Ko sta točki izbrani, program s pomočjo klica programa `doloci_polinom.m` izračuna koeficient a , od tod pa še koeficiente b, c in d transliranega polinoma skozi koordinatno izhodišče. Kot v enakosti (8) definira še iskani polinom r skozi točke T_1, T_2 in T_3 .

Izrišeta se dve sliki. Na prvi je s črtkano črto predstavljen transliran polinom p , ki poteka skozi koordinatno izhodišče, in na njem označene točke T'_1, T'_2 in T'_3 . Polna črta predstavlja iskani polinom r , oznake \times pa so izbrane točke T_1, T_2 in T_3 , ki ga določajo. Vemo, da je najhitrejša pot kroglice po grafu med dvema točkama v ravnini, ki ustrezata $y_1 > y_2$ in $x_1 < x_2$, brahistohrona. Zato bomo naredili primerjavo brahistohrone s kubičnim polinomom, ki imata skupni začetno in končno točko T_1 in T_2 , polinom pa vsebuje še točko $T_3 = T_1 + \frac{1}{2}(T_2 - T_1)$. Druga slika predstavlja brahistohrono in kubični polinom, ki minimizira čas potovanja skozi dane točke. S simbolom \times so označene točke T_1, T_2 in T_3 .

Program izračuna in izpiše še čas potovanja po kubičnem polinomu, brahistohroni in premici skozi dane točke. Programi, ki določijo, narišejo brahistohrono in izračunajo čas potovanja po brahistohroni ter premici (`isci_theta.m`,

`risi_brahi.m` in `cas_brahi.m`) so bili napisani na vajah predmeta Matematično modeliranje.

4 Primeri

4.1 Vzorčni primer

Najprej si oglejmo vzorčni primer, kjer so koordinate točk T_1 in T_2 naravna števila. Izberimo

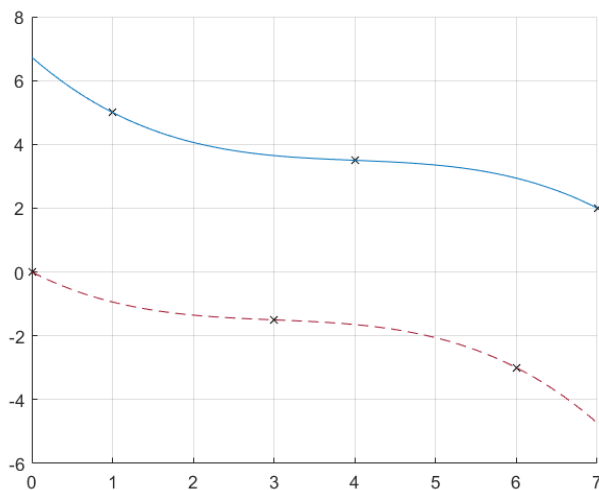
$$\begin{aligned} T_1(1, 5), \\ T_2(7, 2). \end{aligned}$$

Točke vstavimo v program `doloci_polinom.m` in izračunajmo koeficiente polinoma p , katerega graf poteka skozi koordinatno izhodišče. Dobimo vrednosti

$$\begin{aligned} a &= -0.0440, \\ b &= 0.3960, \\ c &= -1.2920, \\ d &= 0. \end{aligned}$$

Če jih vstavimo v enakost (8) in upoštevamo koordinate izbranih točk, dobimo eksplicitno formulo za polinom r , ki minimizira čas potovanja skozi izbrane točke $T_1(1, 5)$, $T_2(7, 2)$ in $T_3(4, 3.5)$.

Koordinate točk vstavimo še v program `risi_polinom.m` in si oglejmo sliko, ki prikazuje grafa transliranega polinoma skozi koordinatno izhodišče s črtkano črto ter iskanega polinoma z modro barvo. S slike vidimo, da graf transliranega

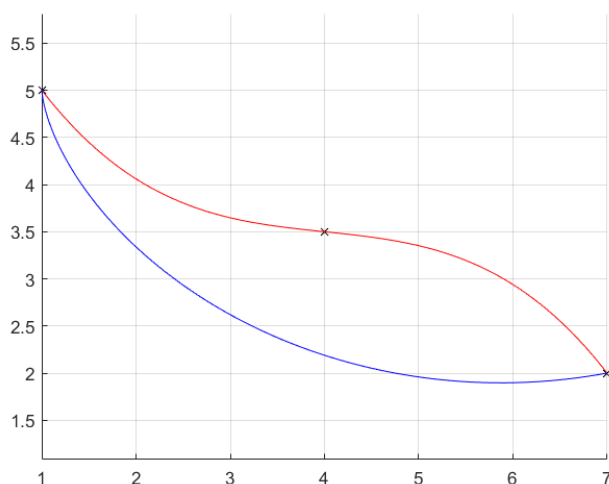


Slika 1: Grafa kubičnih polinomov, določenih s točkama $T_1(1, 5)$ in $T_2(7, 2)$.

polinoma med točkama T'_1 in T'_2 v celoti leži pod abscisno osjo, kar je bil eden izmed naših kriterijev.

Opazujmo še vodilni koeficient a . Vrednost, ki jo vrne program, znaša $a = -0.0440$. Preden sem definirala funkcije, ki določijo optimalno pot kroglice, sem za občutek narisala nekaj grafov kubičnih polinomov skozi zgoraj izbrane točke in izračunala čas potovanja po njih. S poskušanjem in ugotovitvah, ki so opisane v razdelku o numerični rešitvi, sem prišla do približka $a = -0.05$, kar se zdi dober približek za iskano vrednost v konkretnem primeru.

Druga slika, ki jo vrne program `risi_polinom.m` predstavlja graf iskanega kubičnega polinoma ter brahistohrono. Krivulji imata skupni začetno in končno točko.



Slika 2: Kubični polinom in brahistohrona, določeni s točkama $T_1(1, 5)$ in $T_2(7, 2)$.

Spodnje vrednosti so izračunani časi potovanja kroglice po treh krivuljah. Čas potovanja po brahistohroni je res najmanjši, najdlje pa kroglica potrebuje za pot po premici.

$$\begin{aligned} t_{polinom} &= 1.590217900171090, \\ t_{brahistohrona} &= 1.395989176219715, \\ t_{premica} &= 1.749635530559413. \end{aligned}$$

4.2 Primer z uporabo grafičnega vmesnika

Oglejmo si primer, kjer smo v programu `risi_polinom.m` točki $T_1(x_1, y_1)$ in $T_2(x_2, y_2)$ izbrali z grafičnim vmesnikom. Koordinate točk ustrezajo vrednostim

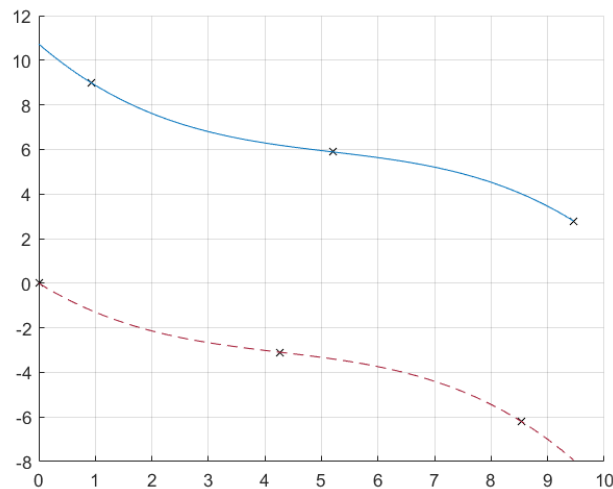
$$\begin{aligned}x_1 &= 0.930018416206262, \\y_1 &= 8.983644859813083, \\x_2 &= 9.456721915285449, \\y_2 &= 2.792056074766355.\end{aligned}$$

Izračunane vrednosti koeficientov polinoma p so enake:

$$\begin{aligned}a &= -0.023312500000000, \\b &= 0.298168162983425, \\c &= -1.573604813684224, \\d &= 0.\end{aligned}$$

Če koeficiente vstavimo v zvezo (8) in upoštevamo koordinate izbranih točk T_1 in T_2 , dobimo eksplisitno formulo iskanega polinoma r .

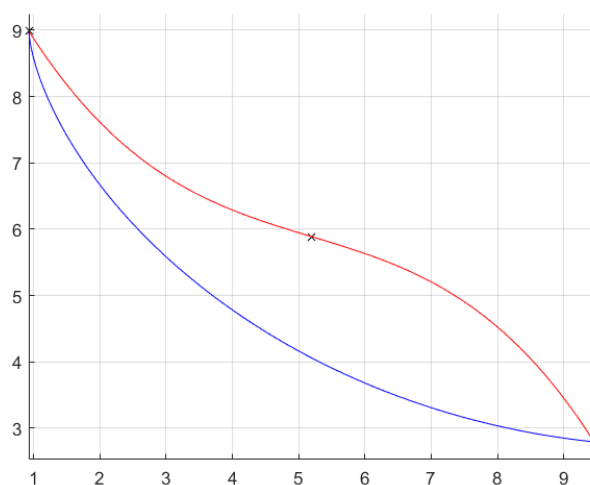
Program izriše naslednji sliki. Na prvi spet opazimo, da je graf transliranega polinoma med točkama $T_1(x_1, y_1)$ in $T_2(x_2, y_2)$ pod abscisno osjo.



Slika 3: Kubična polinoma, določena s točkama, izbranimi z grafičnim vmesnikom.

Zapišimo še izračunane čase potovanja po kubičnem polinomu, brahistohroni in premici:

$$\begin{aligned}t_{polinom} &= 1.800452978985828, \\t_{brahistohrona} &= 1.657073117759419, \\t_{premica} &= 1.913116876467396.\end{aligned}$$



Slika 4: Kubični polinom in brahistohrona, določeni s točkama, izbranimi z grafičnim vmesnikom.

Opazimo, da se numerični rezultati ujemajo s pričakovanji: čas potovanja po brahistohroni je najmanjši, sledi mu kubični polinom, premica pa da najdaljšo pot.

Literatura

- [1] Zapiski s predavanj prof. E. Žagarja pri predmetu Matematično modeliranje, Univerza v Ljubljani, Fakulteta za matematiko in fiziko (študijsko leto 2018/2019).