# Projekt pri predmetu Matematično modeliranje

Tjaša Vrhovnik
Fakulteta za matematiko in fiziko
Oddelek za matematiko

19. avgust 2019

# 1 Naloga

Rešujemo naslednji problem: V ravnini sta dani dve točki, $T_1(x_1, y_1)$ in $T_2(x_2, y_2)$, kjer je $y_1 > y_2$ in $x_1 < x_2$. Med vsemi kubičnimi polinomi, ki potekajo skozi točke $T_1$, $T_2$ in $T_3 = T_1 + \frac{1}{2}(T_2 - T_1)$, iščemo tistega, ki minimizira čas potovanja kroglice po njegovem grafu od $T_1$ do $T_2$.

# 2 Izpeljava

Naloga se zdi podobna znamenitemu problemu o brahistohroni, ki ga je zastavil Jacob Bernoulli. Označimo iskan polinom s $p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$. Polinom $p$ bo določen, ko bomo poznali njegove koeficiente $a$, $b$, $c$ in $d$. Za lažje računanje za začetek prestavimo točke tako, da bo $T_1$ v koordinatnem izhodišču. Označimo nove točke:

$$\begin{aligned}
T_1' &= (0,0),\\
T_2' &= T_2 - T_1 = (x_2 - x_1, y_2 - y_1),\\
T_3' &= T_3 - T_1 = \frac{1}{2}(T_2 - T_1) = \frac{1}{2}T_2'.
\end{aligned}$$

S tem bo graf polinoma med $T_1'$ in $T_2'$ ves čas pod abscisno osjo. Če bi graf dosegel nenegativno vrednost med točkama $T_1'$ in $T_3'$, bi bil vodilni koeficient polinoma $p$ pozitiven. To bi pomenilo, da bi se kroglica iz začetne točke dvigala, kar fizikalno ni mogoče. Predvidevamo tudi, da so vrednosti polinoma med točkama $T_3'$ in $T_2'$ povsod negativne; to bomo kasneje potrdili z numeričnimi primeri.

Izračunajmo koeficiente polinoma $p$. Vemo, da je kubični polinom enolično določen s štirimi točkami v ravnini. V našem primeru so znane tri točke na polinomu, kar pomeni, da bomo imeli en prost parameter. Vstavimo koordinate točk $T_1'$, $T_2'$ in $T_3'$ v izraz za polinom $p$ in računajmo:

$$p(0) = d = 0, \tag{1}$$

$$p(x_2 - x_1) = a(x_2 - x_1)^3 + b(x_2 - x_1)^2 + c(x_2 - x_1) = y_2 - y_1, \tag{2}$$

$$p\left(\frac{x_2 - x_1}{2}\right) = a\left(\frac{x_2 - x_1}{2}\right)^3 + b\left(\frac{x_2 - x_1}{2}\right)^2 + c\frac{x_2 - x_1}{2} = \frac{y_2 - y_1}{2}. \tag{3}$$

Pomnožimo enačbo (3) z 2 in jo odštejmo od enačbe (2). Dobimo

$$\begin{aligned}
\frac{3}{4}a(x_2 - x_1)^3 + \frac{1}{2}b(x_2 - x_1)^2 &= 0,\\
\frac{3}{2}a(x_2 - x_1) + b &= 0,\\
b &= -\frac{3}{2}a(x_2 - x_1). \qquad (4)
\end{aligned}$$

Koeficient $c$ izračunamo iz enačbe (2), pri čemer upoštevamo zgornji izraz za $b$.

Računamo

$$
\begin{aligned}
c(x_2 - x_1) &= y_2 - y_1 - a(x_2 - x_1)^3 - b(x_2 - x_1)^2 \\
&= y_2 - y_1 - a(x_2 - x_1)^3 + \frac{3}{2}a(x_2 - x_1)^3 \\
&= y_2 - y_1 + \frac{1}{2}a(x_2 - x_1)^3, \\
c &= \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} + \frac{1}{2}a(x_2 - x_1)^2. \qquad (5)
\end{aligned}
$$

Koeficienti polinoma $p$ se izražajo s parametrom $a$, katerega ne poznamo. Polinom $p$ je torej funkcija dveh spremenljivk, $p = p(x, a)$. Spremenljvko $a$ bomo določili z minimizacijo časa potovanja po grafu polinoma.

Čas, ki ga kroglica potrebuje za pot med točkama $T_1'$ in $T_2'$ se izraža z integralom

$$t = \int_{T_1'}^{T_2'} \frac{ds}{v}. \qquad (6)$$

Upoštevajmo zakon o ohranitvi energije. V našem primeru pravi, da se vsota kinetične in potencialne energije kroglice med potovanjem ohranja. Uporabimo razmislek, da je graf polinoma ves čas pod abscisno osjo – enačba se tako glasi

$$\frac{1}{2}mv^2 = mg(-p),$$

od koder izrazimo hitrost potovanja kroglice

$$v = \sqrt{2g(-p)}.$$

Vemo še, da je ločna dolžina enaka $ds^2 = dx^2 + dp^2$. Označimo parcialni odvod polinoma $p$ po spremenljivki $x$ z $\frac{dp}{dx} = p'$. Enačba (6) tako dobi obliko

$$T(a) = \int_0^{x_2 - x_1} \sqrt{\frac{1 + p'^2}{-2gp}} dx, \qquad (7)$$

kjer smo s $T$ označili funkcijo časa, odvisno od spremenljivke $a$. Naša naloga je poiskati njen minimum. Analitično iskanje minimuma funkcije $T$ je zahtevno; pomagali si bomo z numeriko in s pomočjo programa Matlab poiskali vrednost $a$, ki ustreza minimalni vrednosti funkcije $T$.

Našli smo polinom, ki minimizira čas potovanja kroglice skozi točke $T_1'$, $T_2'$ in $T_3'$. Vendar je naša naloga poiskati polinom, ki vsebuje točke $T_1$, $T_2$ in $T_3$. Časa potovanj po grafih obeh polinomov sta enaka, saj se obliki (ukrivljenosti) polinomov ujemata. Iskani polinom namreč dobimo tako, da polinom skozi premaknjene točke transliramo za krajevni vektor točke $T_1$. Označimo polinom skozi premaknjene točke s $p_1(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ (njegove koeficiente smo že izračunali). Polinom skozi prvotne točke, ki nas zanima, ustreza zvezi

$$p(x) = a(x - x_1)^3 + b(x - x_1)^2 + c(x - x_1) + d + y_1. \qquad (8)$$

Ker poznamo koeficiente $a$, $b$, $c$ in $d$, vrednosti $x_1$ in $y_1$ pa sta koordinati točke $T_1$, poznamo tudi iskani polinom $p$.

## 3 Numerična rešitev

Vrednost spremenljivke $a$, ki minimizira funkcijo časa $T$ poiščemo numerično. Oglejmo si program `doloci_polinom.m` v Matlabu.

Program kot argumente sprejme koordinate tock $T_1$ in $T_2$ pri čemer velja $x_1, y_1, x_2, y_2 \in \mathbb{R}$, $y_1 > y_2$ in $x_1 < x_2$. Kot smo razmislili v prejšnjem poglavju, je smiselno točke translirati tako, da točka $T_1$ leži v koordinatnem izhodišču. Koeficiente transliranega polinoma $p$ definiramo kot funkcije spremenljivke $a$, ter definiramo polinom in njegov odvod, ki sta funkciji spremenljivk $a$ in $x$. Funkcijo $T$ definiramo kot v enačbi (7). Za minimizacijo te funkcije uporabimo vgrajeno funkcijo `fminsearch`, ki vrne iskano vrednost spremenljivke $a$, pri kateri je čas potovanja kroglice po grafu polinoma najmanjši. Vrednost označimo z $A$. Kako smo določili začetni približek za vrednost $A$, ki je obvezen argument funkcije `fminsearch`? Že v začetku smo premislili, da bo vodilni koeficient polinoma negativen. Če izberemo $a = 0$, se translirani polinom glasi $p(x) = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} x$, kar je premica skozi točke $T_1'$, $T_2'$ in $T_3'$. Z naraščanjem absolutne vrednosti $a$ postaja graf polinoma čedalje bolj ukrivljen. Tako za $a < 0$ kmalu doseže nenegativne vrednosti med točkama $T_3'$ in $T_2'$; izračunan čas je v tem primeru kompleksno število, zato smo v težavah. Vendar na konkretnih primerih ugotovimo, da je za negativne vrednosti $a$, ki so blizu 0 potreben čas manjši od časa potovanja po premici, z manjšanjem $a$ od neke vrednosti $a$ dalje pa se čas povečuje. Nadalje obstaja še manjša vrednost $a$, pri kateri graf polinoma preide abscisno os. Od tod sklepamo, da je ustrezen začetni približek $A = 0$.

## Literatura


[1] Zapiski s predavanj prof. E. Žagarja pri predmetu Matematično modeliranje, Univerza v Ljubljani, Fakulteta za matematiko in fiziko (študijsko leto 2018/2019).