

# Projekt pri predmetu Matematično modeliranje

TJAŠA VRHOVNIK  
Fakulteta za matematiko in fiziko  
Oddelek za matematiko

19. avgust 2019

## Kazalo

<b>1</b>	<b>Naloga</b>	<b>3</b>
<b>2</b>	<b>Izpeljava</b>	<b>3</b>
<b>3</b>	<b>Numerična rešitev</b>	<b>4</b>
3.1	Program doloci_polinom.m . . . . .	4
3.2	Program risi_polinom.m . . . . .	5
<b>4</b>	<b>Primeri</b>	<b>6</b>
4.1	1. primer . . . . .	6

## 1 Naloga

Rešujemo naslednji problem: V ravnini sta dani dve točki,  $T_1(x_1, y_1)$  in  $T_2(x_2, y_2)$ , kjer je  $y_1 > y_2$  in  $x_1 < x_2$ . Med vsemi kubičnimi polinomi, ki potekajo skozi točke  $T_1$ ,  $T_2$  in  $T_3 = T_1 + \frac{1}{2}(T_2 - T_1)$ , iščemo tistega, ki minimizira čas potovanja kroglice po njegovem grafu od  $T_1$  do  $T_2$ .

## 2 Izpeljava

Naloga se zdi podobna znamenitemu problemu o brahistohroni, ki ga je zastavil Jacob Bernoulli. Označimo iskan polinom z  $r(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$ . Polinom  $r$  bo določen, ko bomo poznali njegove koeficiente  $a_3$ ,  $a_2$ ,  $a_1$  in  $a_0$ . Za lažje računanje za začetek prestavimo točke tako, da bo  $T_1$  v koordinatnem izhodišču. Označimo nove točke:

$$\begin{aligned}T'_1 &= (0, 0), \\T'_2 &= T_2 - T_1 = (x_2 - x_1, y_2 - y_1), \\T'_3 &= T_3 - T_1 = \frac{1}{2}(T_2 - T_1) = \frac{1}{2}T'_2.\end{aligned}$$

S tem bo graf transliranega polinoma  $p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$  med  $T'_1$  in  $T'_2$  ves čas pod abscisno osjo. Če bi graf dosegel nenegativno vrednost med točkama  $T'_1$  in  $T'_3$ , bi bil vodilni koeficient polinoma  $p$  pozitiven. To bi pomenilo, da bi se kroglica iz začetne točke dvigala, kar fizikalno ni mogoče. Predvidevamo tudi, da so vrednosti polinoma med točkama  $T'_3$  in  $T'_2$  povsod negativne; to bomo kasneje potrdili z numeričnimi primeri.

Izračunajmo koeficiente polinoma  $p$ . Vemo, da je kubični polinom enolično določen s štirimi točkami v ravnini. V našem primeru so znane tri točke na polinomu, kar pomeni, da bomo imeli en prost parameter. Vstavimo koordinate točk  $T'_1$ ,  $T'_2$  in  $T'_3$  v izraz za polinom  $p$  in računajmo:

$$p(0) = d = 0, \quad (1)$$

$$p(x_2 - x_1) = a(x_2 - x_1)^3 + b(x_2 - x_1)^2 + c(x_2 - x_1) = y_2 - y_1, \quad (2)$$

$$p\left(\frac{x_2 - x_1}{2}\right) = a\left(\frac{x_2 - x_1}{2}\right)^3 + b\left(\frac{x_2 - x_1}{2}\right)^2 + c\frac{x_2 - x_1}{2} = \frac{y_2 - y_1}{2}. \quad (3)$$

Pomnožimo enačbo (3) z 2 in jo odštejmo od enačbe (2). Dobimo

$$\begin{aligned}\frac{3}{4}a(x_2 - x_1)^3 + \frac{1}{2}b(x_2 - x_1)^2 &= 0, \\ \frac{3}{2}a(x_2 - x_1) + b &= 0, \\ b &= -\frac{3}{2}a(x_2 - x_1).\end{aligned} \quad (4)$$

Koeficient  $c$  izračunamo iz enačbe (2), pri čemer upoštevamo zgornji izraz za  $b$ .

Računamo

$$\begin{aligned}
c(x_2 - x_1) &= y_2 - y_1 - a(x_2 - x_1)^3 - b(x_2 - x_1)^2 \\
&= y_2 - y_1 - a(x_2 - x_1)^3 + \frac{3}{2}a(x_2 - x_1)^3 \\
&= y_2 - y_1 + \frac{1}{2}a(x_2 - x_1)^3, \\
c &= \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} + \frac{1}{2}a(x_2 - x_1)^2.
\end{aligned} \tag{5}$$

Koeficienti polinoma  $p$  se izražajo s parametrom  $a$ , katerega ne poznamo. Polinom  $p$  je torej funkcija dveh spremenljivk,  $p = p(x, a)$ . Spremenljivko  $a$  bomo določili z minimizacijo časa potovanja po grafu polinoma.

Čas, ki ga kroglica potrebuje za pot med točkama  $T'_1$  in  $T'_2$  se izraža z integralom

$$t = \int_{T'_1}^{T'_2} \frac{ds}{v}. \tag{6}$$

Upoštevajmo zakon o ohranitvi energije, ki v našem primeru pravi, da se vsota kinetične in potencialne energije kroglice med potovanjem ohranja. Uporabimo razmislek, da je graf polinoma ves čas pod abscisno osjo – enačba se tako glasi

$$\frac{1}{2}mv^2 = mg(-p),$$

od koder izrazimo hitrost potovanja kroglice

$$v = \sqrt{2g(-p)}.$$

Vemo še, da je ločna dolžina enaka  $ds^2 = dx^2 + dp^2$ . Označimo parcialni odvod polinoma  $p$  po spremenljivki  $x$  s  $p' = \frac{dp}{dx}$ . Enačba (6) tako dobi obliko

$$T(a) = \int_0^{x_2-x_1} \sqrt{\frac{1+p'^2}{-2gp}} dx, \tag{7}$$

kjer smo s  $T$  označili funkcijo časa, odvisno od spremenljivke  $a$ . Naša naloga je poiskati njen minimum. Analitično iskanje minimuma funkcije  $T$  je zahtevno; pomagali si bomo z numeriko in s pomočjo programa Matlab poiskali vrednost  $a$ , ki ustreza minimalni vrednosti funkcije  $T$ .

### 3 Numerična rešitev

Vrednost spremenljivke  $a$ , ki minimizira funkcijo časa  $T$  poiščemo numerično.

#### 3.1 Program doloci\_polinom.m

Oglejmo si program `doloci_polinom.m` v Matlabu. Program kot argumente sprejme koordinate točk  $T_1$  in  $T_2$  pri čemer velja  $x_1, y_1, x_2, y_2 \in \mathbb{R}$ ,  $y_1 > y_2$  in  $x_1 < x_2$ . Kot smo razmislili v prejšnjem poglavju, je smiselno točke translirati tako, da točka  $T_1$  leži v koordinatnem izhodišču. Koeficiente transliranega polinoma  $p$  definiramo kot funkcije spremenljivke  $a$ , ter definiramo polinom

in njegov odvod, ki sta funkciji spremenljivk  $a$  in  $x$ . Funkcijo  $T$  definiramo kot v enačbi (7). Za minimizacijo te funkcije uporabimo vgrajeno funkcijo `fminsearch`, ki vrne iskano vrednost spremenljivke  $a$ , pri kateri je čas potovanja kroglice po grafu polinoma najmanjši. Vrednost označimo z  $A$ . Kako smo določili začetni približek za vrednost  $A$ , ki je obvezen argument funkcije `fminsearch`? Že v začetku smo premislili, da bo vodilni koeficient polinoma negativen. Če izberemo  $a = 0$ , se translirani polinom glasi  $p(x) = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}x$ , kar je premica skozi točke  $T'_1$ ,  $T'_2$  in  $T'_3$ . Z naraščanjem absolutne vrednosti  $a$  postaja graf polinoma čedalje bolj ukrivljen. Tako za  $a < 0$  kmalu doseže nenegativne vrednosti med točkama  $T'_3$  in  $T'_2$ ; izračunan čas je v tem primeru kompleksno število, zato smo v težavah. Vendar na konkretnih primerih ugotovimo, da je za negativne vrednosti  $a$ , ki so blizu 0 potreben čas manjši od časa potovanja po premici, z manjšanjem  $a$  od neke vrednosti  $a$  dalje pa se čas povečuje. Nadalje obstaja še manjša vrednost  $a$ , pri kateri graf polinoma preide abscisno os. Od tod sklepamo, da je ustrezen začetni približek  $A = 0$ .

Program `doloci_polinom.m` vrne vodilni koeficient polinoma  $p$  skozi translirane točke, od koder lahko izračunamo ostale koeficiente polinoma. Našli smo torej polinom, ki minimizira čas potovanja kroglice skozi točke  $T'_1$ ,  $T'_2$  in  $T'_3$ . Vendar je naša naloga poiskati polinom  $r$ , ki vsebuje točke  $T_1$ ,  $T_2$  in  $T_3$ . Časa potovanja po grafih obeh polinomov sta enaka, saj se obliki (ukrivljenosti) polinomov ujemata. Iskani polinom namreč dobimo tako, da polinom skozi premaknjene točke transliramo za krajevni vektor točke  $T_1$ . Polinom skozi prvotne točke, ki nas zanima, ustreza zvezi

$$r(x) = a(x - x_1)^3 + b(x - x_1)^2 + c(x - x_1) + d + y_1. \quad (8)$$

Ker poznamo koeficiente  $a$ ,  $b$ ,  $c$  in  $d$ , vrednosti  $x_1$  in  $y_1$  pa sta koordinati točke  $T_1$ , poznamo tudi iskani polinom  $p$ .

### 3.2 Program `risi_polinom.m`

Za vizualizacijo uporabimo program `risi_polinom.m`. Ta najprej odpre koordinatno mrežo velikosti  $[0, 1] \times [0, 1]$ , na kateri uporabnik s klikom izbere dve točki. Zaradi lažje predstave program koordinate izbranih točk pomnoži s faktorjem 10, tako dobljeni točki pa ustrezata točkama  $T_1$  in  $T_2$ , ki določata polinom. Ko sta točki izbrani, program s pomočjo klica programa `doloci_polinom.m` izračuna koeficient  $a$ , od tod pa še koeficiente  $b$ ,  $c$  in  $d$  transliranega polinoma skozi koordinatno izhodišče. Kot v enakosti (8) definira še iskani polinom  $r$  skozi točke  $T_1$ ,  $T_2$  in  $T_3$ .

Izrišeta se dve sliki. Na prvi je s črtkano črto predstavljen transliran polinom  $p$ , ki poteka skozi koordinatno izhodišče, in na njem označene točke  $T'_1$ ,  $T'_2$  in  $T'_3$ . Polna črta predstavlja iskani polinom  $r$ , oznake  $\times$  pa so izbrane točke  $T_1$ ,  $T_2$  in  $T_3$ , ki ga določajo. Vemo, da je najhitrejša pot kroglice po grafu med dvema točkama v ravnini, ki ustrezata  $y_1 > y_2$  in  $x_1 < x_2$ , brahistohrona. Zato bomo naredili primerjavo brahistohrone s kubičnim polinomom, ki imata skupni začetno in končno točko  $T_1$  in  $T_2$ , polinom pa vsebuje še točko  $T_3 = T_1 + \frac{1}{2}(T_2 - T_1)$ . Druga slika predstavlja brahistohrono in kubični polinom, ki minimizira čas potovanja skozi dane točke. S simbolom  $\times$  so označene točke  $T_1$ ,  $T_2$  in  $T_3$ .

Program izračuna in izpiše še čas potovanja po kubičnem polinomu, brahistohroni in premici skozi dane točke. Programi, ki določijo, narišejo brahisto-

hrono in izračunajo čas potovanja po brahistohroni ter premici (`isci_theta.m`, `risi_brahi.m` in `cas_brahi.m`) so bili napisani na vajah predmeta Matematično modeliranje.

## 4 Primeri

### 4.1 1. primer

Oglejmo si primer, kjer smo v programu `risi_polinom.m` točki  $T_1(x_1, y_1)$  in  $T_2(x_2, y_2)$  izbrali z grafičnim vmesnikom. Koordinate točk ustrezajo vrednostim

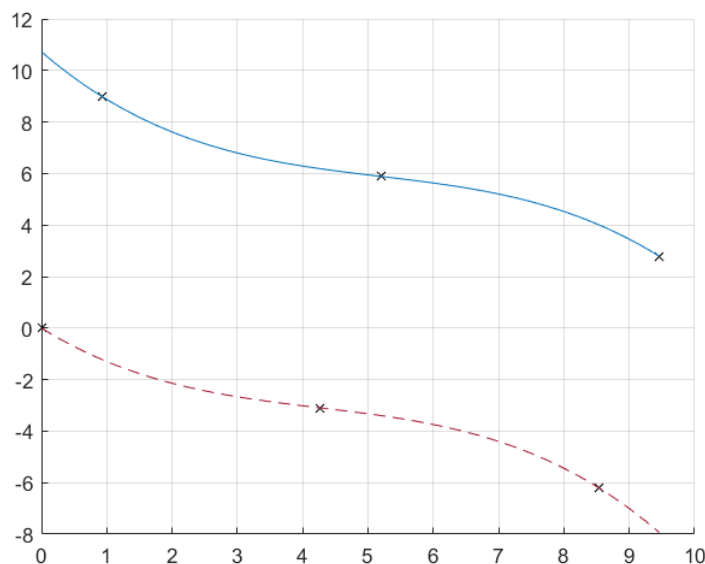
$$x_1 = 0.930018416206262,$$

$$y_1 = 8.983644859813083,$$

$$x_2 = 9.456721915285449,$$

$$y_2 = 2.792056074766355.$$

Program izriše naslednji sliki.



Slika 1: Kubični polinom, ki minimizira čas potovanja kroglice skozi točke  $T_1$ ,  $T_2$  in  $T_3$ , je predstavljen s polno črto. S črtkano črto je predstavljen transliran polinom skozi koordinatno izhodišče.

Izračunani časi potovanja po kubičnem polinomu, brahistohorni in premici:

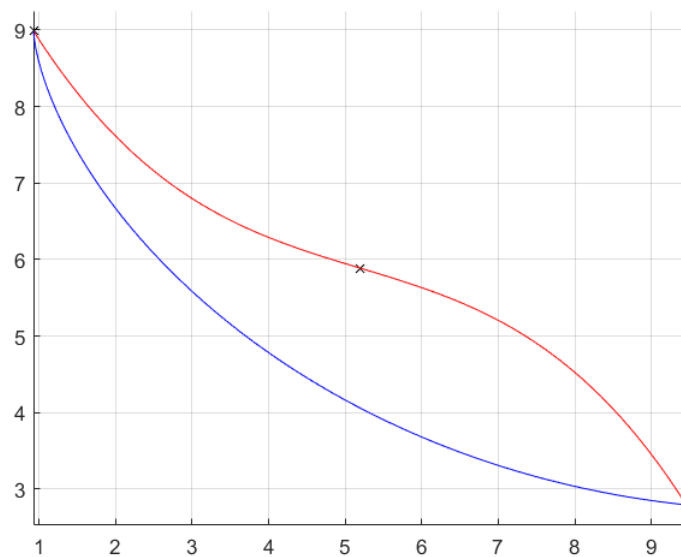
$$t_{\text{polinom}} = 1.800452978985828,$$

$$t_{\text{brahistohrona}} = 1.657073117759419,$$

$$t_{\text{premica}} = 1.913116876467396.$$

Opazimo, da se numerični rezultati ujemajo s pričakovanji: čas potovanja po brahistohroni je najmanjši, sledi mu kubični polinom, premica pa da najpočasnejšo pot.

Lahko si ogledamo še vrednost koeficienta  $a$ . Ta je enaka  $a = -0.023312500000000$ .



Slika 2: Z rdečo barvo je predstavljen kubični polinom, ki minimizira čas potovanja kroglice skozi točke  $T_1$ ,  $T_2$  in  $T_3$ , z modro pa brahistohorna skozi točki  $T_1$  in  $T_2$ .

## Literatura

- [1] Zapiski s predavanj prof. E. Žagarja pri predmetu Matematično modeliranje, Univerza v Ljubljani, Fakulteta za matematiko in fiziko (študijsko leto 2018/2019).