Projekt pri predmetu Matematično modeliranje

Tjaša Vrhovnik
Fakulteta za matematiko in fiziko
Oddelek za matematiko

17. avgust 2019

1 Naloga

Rešujemo naslednji problem: V ravnini sta dani dve točki, $T_1(x_1, y_1)$ in $T_2(x_2, y_2)$, kjer je $y_1 > y_2$ in $x_1 < x_2$. Med vsemi kubičnimi polinomi, ki potekajo skozi točke T_1, T_2 in $T_3 = T_1 + \frac{1}{2}(T_2 - T_1)$, iščemo tistega, ki minimizira čas potovanja kroglice po njegovem grafu od T_1 do T_2.

2 Rešitev

Naloga se zdi podobna znamenitemu problemu o brahistohroni, ki ga je zastavil Jacob Bernoulli. Označimo iskan polinom s $p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$. Polinom p bo določen, ko bomo poznali njegove koeficiente a, b, c in d. Za lažje računanje za začetek prestavimo točke tako, da bo T_1 v koordinatnem izhodišču. Označimo nove točke:

$$\begin{aligned} T_1' &= (0, 0), \\ T_2' &= T_2 - T_1 = (x_2 - x_1, y_2 - y_1), \\ T_3' &= T_3 - T_1 = \frac{1}{2}(T_2 - T_1) = \frac{1}{2}T_2'. \end{aligned}$$

S tem bo graf polinoma med T_1' in T_2' ves čas pod abscisno osjo. Če bi graf dosegel nenegativno vrednost med točkama T_1' in T_3', bi bil vodilni koeficient polinoma p pozitiven. To bi pomenilo, da bi se kroglica iz začetne točke dvigala, kar fizikalno ni mogoče. Predvidevamo tudi, da so vrednosti polinoma med točkama T_3' in T_2' povsod negativne; to bomo kasneje potrdili z numeričnimi primeri.

Izračunajmo koeficiente polinoma p. Vemo, da je kubični polinom enolično določen s štirimi točkami v ravnini. V našem primeru so znane tri točke na polinomu, kar pomeni, da bomo imeli en prost parameter. Vstavimo koordinate točk T_1', T_2' in T_3' v izraz za polinom p in računajmo:

$$p(0) = d = 0, \tag{1}$$

$$p(x_2 - x_1) = a(x_2 - x_1)^3 + b(x_2 - x_1)^2 + c(x_2 - x_1) = y_2 - y_1, \tag{2}$$

$$p\left(\frac{x_2 - x_1}{2}\right) = a\left(\frac{x_2 - x_1}{2}\right)^3 + b\left(\frac{x_2 - x_1}{2}\right)^2 + c\frac{x_2 - x_1}{2} = \frac{y_2 - y_1}{2}. \tag{3}$$

Pomnožimo enačbo (3) z 2 in jo odštejmo od enačbe (2). Dobimo

$$\begin{aligned} \frac{3}{4}a(x_2 - x_1)^3 + \frac{1}{2}b(x_2 - x_1)^2 &= 0, \\ \frac{3}{2}a(x_2 - x_1) + b &= 0, \\ b &= -\frac{3}{2}a(x_2 - x_1). \end{aligned} \tag{4}$$

Koeficient c izračunamo iz enačbe (2), pri čemer upoštevamo zgornji izraz za b.

Računamo

$$
\begin{aligned}
c(x_2 - x_1) &= y_2 - y_1 - a(x_2 - x_1)^3 - b(x_2 - x_1)^2 \\
&= y_2 - y_1 - a(x_2 - x_1)^3 + \frac{3}{2}a(x_2 - x_1)^3 \\
&= y_2 - y_1 + \frac{1}{2}a(x_2 - x_1)^3, \\
c &= \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} + \frac{1}{2}a(x_2 - x_1)^2. \qquad (5)
\end{aligned}
$$

Koeficienti polinoma p se izražajo s parametrom a, katerega ne poznamo. Polinom p je torej funkcija dveh spremenljivk, $p = p(x, a)$. Spremenljvko a bomo določili z minimizacijo časa potovanja po grafu polinoma.

Čas, ki ga kroglica potrebuje za pot med točkama T_1' in T_2' se izraža z integralom

$$
t = \int_{T_1'}^{T_2'} \frac{ds}{v}. \qquad (6)
$$

Upoštevajmo zakon o ohranitvi energije. V našem primeru pravi, da se vsota kinetične in potencialne energije kroglice med potovanjem ohranja. Uporabimo razmislek, da je graf polinoma ves čas pod abscisno osjo – enačba se tako glasi

$$
\frac{1}{2}mv^2 = mg(-p),
$$

od koder izrazimo hitrost potovanja kroglice

$$
v = \sqrt{2g(-p)}.
$$

Vemo še, da je ločna dolžina enaka $ds^2 = dx^2 + dp^2$. Označimo parcialni odvod polinoma p po spremenljivki x z $\frac{dp}{dx} = p'$. Enačba (6) tako dobi obliko

$$
T(a) = \int_0^{x_2 - x_1} \sqrt{\frac{1 + p'^2}{-2gp}} dx, \qquad (7)
$$

kjer smo s T označili funkcijo časa, odvisno od spremenljivke a. Naša naloga je poiskati njen minimum. Analitično iskanje minimuma funkcije T je zahtevno; pomagali si bomo z numeriko in s pomočjo programa Matlab poiskali vrednost a, ki ustreza minimalni vrednosti funkcije T.

Našli smo polinom, ki minimizira čas potovanja kroglice skozi točke T_1', T_2' in T_3'. Vendar je naša naloga poiskati polinom, ki vsebuje točke T_1, T_2 in T_3. Časa potovanj po grafih obeh polinomov sta enaka, saj se obliki (ukrivljenosti) polinomov ujemata. Iskani polinom namreč dobimo tako, da polinom skozi premaknjene točke transliramo za krajevni vektor točke T_1. Označimo polinom skozi premaknjene točke s $p_1(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ (njegove koeficiente smo že izračunali). Polinom skozi prvotne točke, ki nas zanima, ustreza zvezi

$$
p(x) = a(x - x_1)^3 + b(x - x_1)^2 + c(x - x_1) + d + y_1. \qquad (8)
$$

Ker poznamo koeficiente a, b, c in d, vrednosti x_1 in y_1 pa sta koordinati točke T_1, poznamo tudi iskani polinom p.

Literatura

[1] Zapiski s predavanj prof. E. Žagarja pri predmetu Matematično modeliranje, Univerza v Ljubljani, Fakulteta za matematiko in fiziko (študijsko leto 2018/2019).