Projekt pri predmetu Matematično modeliranje

Tjaša Vrhovnik
Fakulteta za matematiko in fiziko
Oddelek za matematiko

19. avgust 2019

Kazalo

1 Naloga

Rešujemo naslednji problem: V ravnini sta dani dve točki, $T_1(x_1, y_1)$ in $T_2(x_2, y_2)$, kjer je $y_1 > y_2$ in $x_1 < x_2$. Med vsemi kubičnimi polinomi, ki potekajo skozi točke T_1, T_2 in $T_3 = T_1 + \frac{1}{2}(T_2 - T_1)$, iščemo tistega, ki minimizira čas potovanja kroglice po njegovem grafu od T_1 do T_2.

2 Izpeljava

Naloga se zdi podobna znamenitemu problemu o brahistohroni, ki ga je zastavil Jacob Bernoulli. Označimo iskan polinom z $r(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$. Polinom r bo določen, ko bomo poznali njegove koeficiente a_3, a_2, a_1 in a_0. Za lažje računanje za začetek prestavimo točke tako, da bo T_1 v koordinatnem izhodišču. Označimo nove točke:

$$
\begin{aligned}
T_1' &= (0, 0),\\
T_2' &= T_2 - T_1 = (x_2 - x_1, y_2 - y_1),\\
T_3' &= T_3 - T_1 = \frac{1}{2}(T_2 - T_1) = \frac{1}{2}T_2'.
\end{aligned}
$$

S tem bo graf transliranega polinoma $p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ med T_1' in T_2' ves čas pod abscisno osjo. Če bi graf dosegel nenegativno vrednost med točkama T_1' in T_3', bi bil vodilni koeficient polinoma p pozitiven. To bi pomenilo, da bi se kroglica iz začetne točke dvigala, kar fizikalno ni mogoče. Predvidevamo tudi, da so vrednosti polinoma med točkama T_3' in T_2' povsod negativne; to bomo kasneje potrdili z numeričnimi primeri.

Izračunajmo koeficiente polinoma p. Vemo, da je kubični polinom enolično določen s štirimi točkami v ravnini. V našem primeru so znane tri točke na polinomu, kar pomeni, da bomo imeli en prost parameter. Vstavimo koordinate točk T_1', T_2' in T_3' v izraz za polinom p in računajmo:

$$p(0) = d = 0, \tag{1}$$

$$p(x_2 - x_1) = a(x_2 - x_1)^3 + b(x_2 - x_1)^2 + c(x_2 - x_1) = y_2 - y_1, \tag{2}$$

$$p\left(\frac{x_2 - x_1}{2}\right) = a\left(\frac{x_2 - x_1}{2}\right)^3 + b\left(\frac{x_2 - x_1}{2}\right)^2 + c\frac{x_2 - x_1}{2} = \frac{y_2 - y_1}{2}. \tag{3}$$

Pomnožimo enačbo (3) z 2 in jo odštejmo od enačbe (2). Dobimo

$$
\begin{aligned}
\frac{3}{4}a(x_2 - x_1)^3 + \frac{1}{2}b(x_2 - x_1)^2 = 0,\\
\frac{3}{2}a(x_2 - x_1) + b = 0,
\end{aligned}
$$

$$b = -\frac{3}{2}a(x_2 - x_1). \tag{4}$$

Koeficient c izračunamo iz enačbe (2), pri čemer upoštevamo zgornji izraz za b.

Računamo

$$\begin{aligned} c(x_2 - x_1) &= y_2 - y_1 - a(x_2 - x_1)^3 - b(x_2 - x_1)^2 \\ &= y_2 - y_1 - a(x_2 - x_1)^3 + \frac{3}{2}a(x_2 - x_1)^3 \\ &= y_2 - y_1 + \frac{1}{2}a(x_2 - x_1)^3, \\ c &= \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} + \frac{1}{2}a(x_2 - x_1)^2. \end{aligned} \tag{5}$$

Koeficienti polinoma p se izražajo s parametrom a, katerega ne poznamo. Polinom p je torej funkcija dveh spremenljivk, $p = p(x, a)$. Spremenljvko a bomo določili z minimizacijo časa potovanja po grafu polinoma.

Čas, ki ga kroglica potrebuje za pot med točkama T_1' in T_2' se izraža z integralom

$$t = \int_{T_1'}^{T_2'} \frac{ds}{v}. \tag{6}$$

Upoštevajmo zakon o ohranitvi energije, ki v našem primeru pravi, da se vsota kinetične in potencialne energije kroglice med potovanjem ohranja. Uporabimo razmislek, da je graf polinoma ves čas pod abscisno osjo – enačba se tako glasi

$$\frac{1}{2}mv^2 = mg(-p),$$

od koder izrazimo hitrost potovanja kroglice

$$v = \sqrt{2g(-p)}.$$

Vemo še, da je ločna dolžina enaka $ds^2 = dx^2 + dp^2$. Označimo parcialni odvod polinoma p po spremenljivki x s $p' = \frac{dp}{dx}$. Enačba (6) tako dobi obliko

$$T(a) = \int_0^{x_2 - x_1} \sqrt{\frac{1 + p'^2}{-2gp}} dx, \tag{7}$$

kjer smo s T označili funkcijo časa, odvisno od spremenljivke a. Naša naloga je poiskati njen minimum. Analitično iskanje minimuma funkcije T je zahtevno; pomagali si bomo z numeriko in s pomočjo programa Matlab poiskali vrednost a, ki ustreza minimalni vrednosti funkcije T.

3 Numerična rešitev

Vrednost spremenljivke a, ki minimizira funkcijo časa T poiščemo numerično.

3.1 Program `doloci_polinom.m`

Oglejmo si program `doloci_polinom.m` v Matlabu. Program kot argumente sprejme koordinate točk T_1 in T_2 pri čemer velja $x_1, y_1, x_2, y_2 \in \mathbb{R}$, $y_1 > y_2$ in $x_1 < x_2$. Kot smo razmislili v prejšnjem poglavju, je smiselno točke transli-rati tako, da točka T_1 leži v koordinatnem izhodišču. Koeficiente transliranega polinoma p definiramo kot funkcije spremenljivke a, ter definiramo polinom in njegov odvod, ki sta funkciji spremenljivk a in x. Funkcijo T definiramo kot v enačbi (7). Za minimizacijo te funkcije uporabimo vgrajeno funkcijo `fminsearch`, ki vrne iskano vrednost spremenljivke a, pri kateri je čas potovanja kroglice po grafu polinoma najmanjši. Vrednost v programu označimo z A. Kako smo določili začetni približek za vrednost A, ki je obvezen argument funkcije `fminsearch`? Že v začetku smo premislili, da bo vodilni koeficient polinoma negativen. Če izberemo $a = 0$, se translirani polinom glasi $p(x) = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}x$, kar je premica skozi točke T_1', T_2' in T_3'. Z naraščanjem absolutne vrednosti a postaja graf polinoma čedalje bolj ukrivljen. Tako za $a < 0$ kmalu doseže nenegativne vrednosti med točkama T_3' in T_2'; izračunan čas je v tem primeru kompleksno število, zato smo v težavah. Vendar na konkretnih primerih ugotovimo, da je za negativne vrednosti a, ki so blizu 0 potreben čas manjši od časa potovanja po premici, z manjšanjem a od neke vrednosti a dalje pa se čas povečuje. Nadalje obstaja še manjša vrednost a, pri kateri graf polinoma preide abscisno os. Od tod sklepamo, da je ustrezen začetni približek $A = 0$.

Program `doloci_polinom.m` vrne vodilni koeficient polinoma p skozi translirane točke, od koder lahko izračunamo ostale koeficiente polinoma. Našli smo torej polinom, ki minimizira čas potovanja kroglice skozi točke T_1', T_2' in T_3'. Vendar je naša naloga poiskati polinom r, ki vsebuje točke T_1, T_2 in T_3. Časa potovanj po grafih obeh polinomov sta enaka, saj se obliki (ukrivljenosti) polinomov ujemata. Iskani polinom namreč dobimo tako, da polinom skozi premaknjene točke transliramo za krajevni vektor točke T_1. Polinom skozi prvotne točke, ki nas zanima, ustreza zvezi

$$r(x) = a(x - x_1)^3 + b(x - x_1)^2 + c(x - x_1) + d + y_1. \tag{8}$$

Ker poznamo koeficiente a, b, c in d, vrednosti x_1 in y_1 pa sta koordinati točke T_1, poznamo tudi iskani polinom p.

3.2 Program `risi_polinom.m`

Za vizualizacijo uporabimo program `risi_polinom.m`. Ta najprej odpre koordinatno mrežo velikosti $[0, 1] \times [0, 1]$, na kateri uporabnik s klikom izbere dve točki. Zaradi lažje predstave program koordinate izbranih točk pomnoži s faktorjem 10, tako dobljeni točki pa ustrezata točkama T_1 in T_2, ki določata polinom. Ko sta točki izbrani, program s pomočjo klica programa `doloci_polinom.m` izračuna koeficient a, od tod pa še koeficiente b, c in d transliranega polinoma skozi koordinatno izhodišče. Kot v enakosti (8) definira še iskani polinom r skozi točke T_1, T_2 in T_3.

Izrišeta se dve sliki. Na prvi je s črtkano črto predstavljen transliran polinom p, ki poteka skozi koordinatno izhodišče, in na njem označene točke T_1', T_2' in T_3'. Polna črta predstavlja iskani polinom r, oznake $\times$ pa so izbrane točke T_1, T_2 in T_3, ki ga določajo. Vemo, da je najhitrejša pot kroglice po grafu med dvema točkama v ravnini, ki ustrezata $y_1 > y_2$ in $x_1 < x_2$, brahistohrona. Zato bomo naredili primerjavo brahistohrone s kubičnim polinomom, ki imata skupni začetno in končno točko T_1 in T_2, polinom pa vsebuje še točko $T_3 = T_1 + \frac{1}{2}(T_2 - T_1)$. Druga slika predstavlja brahistohrono in kubični polinom, ki minimizira čas potovanja skozi dane točke. S simbolom $\times$ so označene točke T_1, T_2 in T_3.

Program izračuna in izpiše še čas potovanja po kubičnem polinomu, brahistohroni in premici skozi dane točke. Programi, ki določijo, narišejo brahistohrono in izračunajo čas potovanja po brahistohroni ter premici (`isci_theta.m`, `risi_brahi.m` in `cas_brahi.m`) so bili napisani na vajah predmeta Matematično modeliranje.

4 Primeri

4.1 Vzorčni primer

Najprej si oglejmo vzorčni primer, kjer so koordinate točk T_1 in T_2 naravna števila. Izberimo

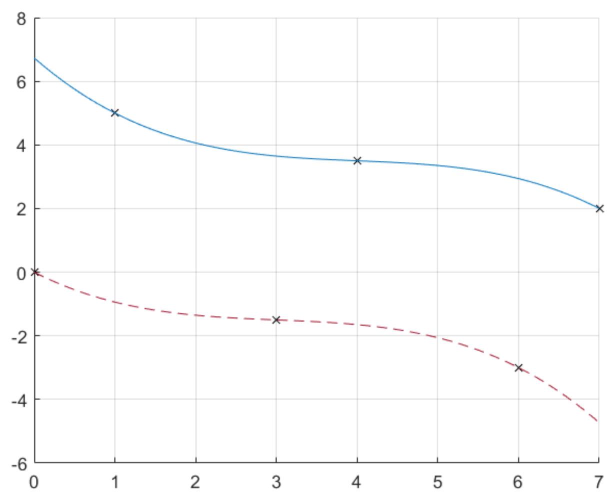
$$T_1(1,5),$$
$$T_2(7,2).$$

Točke vstavimo v program `doloci_polinom.m` in izračunajmo koeficiente polinoma p, katerega graf poteka skozi koordinatno izhodišče. Dobimo vrednosti

$$a = -0.0440,$$
$$b = 0.3960,$$
$$c = -1.2920,$$
$$d = 0.$$

Če jih vstavimo v enakost (8) in upoštevamo koordinate izbranih točk, dobimo eksplicitno formulo za polinom r, ki minimizira čas potovanja skozi izbrane točke $T_1(1,5)$, $T_2(7,2)$ in $T_3(4,3.5)$.

Koordinate točk vstavimo še v program `risi_polinom.m` in si oglejmo sliko, ki prikazuje grafa transliranega polinoma skozi koordinatno izhodišče s črtkano črto ter iskanega polinoma z modro barvo. S slike vidimo, da graf transliranega

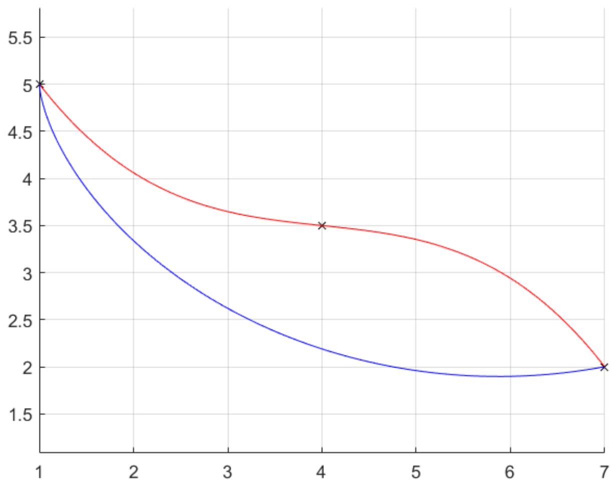


Slika 1: Grafa polinomov, določenih s točkama $T_1(1,5)$ in $T_2(7,2)$.

polinoma med točkama T_1' in T_2' v celoti leži pod abscisno osjo, kar je bil eden izmed naših kriterijev.

Opazujmo še vodilni koeficient a. Vrednost, ki jo vrne program, znaša $a = -0.0440$. Preden sem definirala funkcije, ki določijo optimalno pot kroglice, sem za občutek narisala nekaj grafov kubičnih polinomov skozi zgoraj izbrane točke in izračunala čas potovanja po njih. S poskušanjem in ugotovitvah, ki so opisana v razdelku o numerični rešitvi, sem prišla do približka $a = -0.05$, kar se zdi dober približek za iskano vrednost v konkretnem primeru.

Druga slika, ki jo vrne program `risi_polinom.m` predstavlja graf iskanega kubičnega polinoma ter brahistohrono. Krivulji imata skupni začetno in končno točko.



Slika 2: Kubični polinom in brahstohrona, določeni s točkama $T_1(1,5)$ in $T_2(7,2)$.

Spodnje vrednosti so izračunani časi potovanja kroglice po treh krivuljah. Čas potovanja po brahistohroni je res najmanjši, najdlje pa kroglica potrebuje za pot po premici.

$$t_{polinom} = 1.590217900171090,$$
$$t_{brahistohrona} = 1.395989176219715,$$
$$t_{premica} = 1.749635530559413.$$

4.2 Primer z uporabo grafičnega vmesnika

Oglejmo si primer, kjer smo v programu `risi_polinom.m` točki $T_1(x_1, y_1)$ in $T_2(x_2, y_2)$ izbrali z grafičnim vmesnikom. Koordinate točk ustrezajo vrednostim

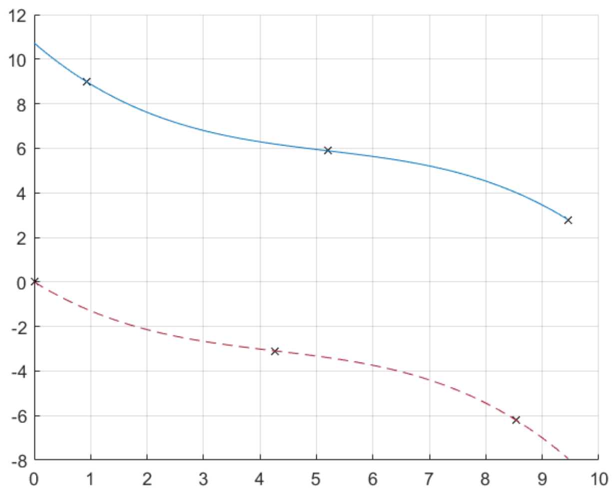
$$\begin{aligned} x_1 &= 0.930018416206262, \\ y_1 &= 8.983644859813083, \\ x_2 &= 9.456721915285449, \\ y_2 &= 2.792056074766355. \end{aligned}$$

Izračunane vrednosti koeficientov polinoma p so enake:

$$\begin{aligned} a &= -0.023312500000000, \\ b &= 0.298168162983425, \\ c &= -1.573604813684224, \\ d &= 0. \end{aligned}$$

Če koeficiente vstavimo v zvezo (8) in upoštevamo koordinate izbranih točk T_1 in T_2, dobimo eksplicitno formulo iskanega polinoma r.

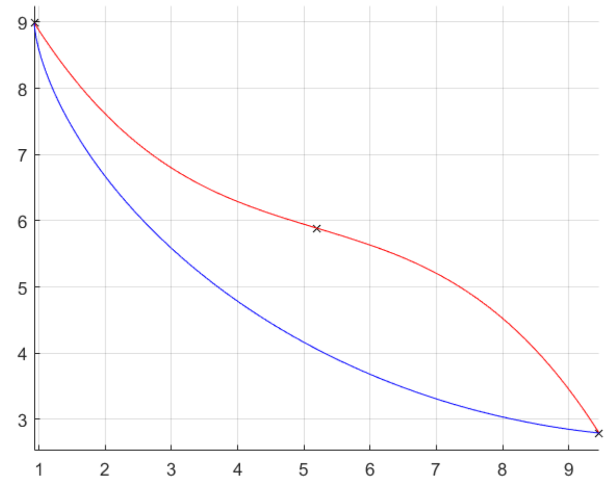
Program izriše naslednji sliki. Na prvi spet opazimo, da je graf transliranega polinoma med točkama $T_1(x_1, y_1)$ in $T_2(x_2, y_2)$ pod abscisno osjo.



Slika 3: Kubična polinoma, določena s točkama, izbranima z grafičnim vmesnikom.

Zapišimo še izračunane čase potovanja po kubičnem polinomu, brahistohroni in premici:

$$\begin{aligned} t_{polinom} &= 1.800452978985828, \\ t_{brahistohrona} &= 1.657073117759419, \\ t_{premica} &= 1.913116876467396. \end{aligned}$$



Slika 4: Kubični polinom in brahistohrona, določeni s točkama, izbranima z grafičnim vmesnikom.

Opazimo, da se numerični rezultati ujemajo s pričakovanji: čas potovanja po brahistohroni je najmanjši, sledi mu kubični polinom, premica pa da najdaljšo pot.

Literatura

[1] Zapiski s predavanj prof. E. Žagarja pri predmetu Matematično modeliranje, Univerza v Ljubljani, Fakulteta za matematiko in fiziko (študijsko leto 2018/2019).