Minimalne ploskve

Tjaša Vrhovnik

Mentor: akad. prof. dr. Franc Forstnerič
Univerza v Ljubljani
Fakulteta za matematiko in fiziko
Matematika – 2. stopnja

januar 2022

Struktura magistrskega dela

- L. Euler opiše katenoido (l. 1744)
- J. L. Lagrange enačba za minimalne grafe (l. 1762)
- J. B. Meusnier ploskve z ničelno povprečno ukrivljenostjo lokalno minimizirajo površino
- J. Plateau poskusi z milnico
- Razvoj kompleksne analize in diferencialne geometrije – reprezentacijska formula (l. 1866)
- T. Radó (l. 1930) in J. Douglas (l. 1931) rešita Plateaujev problem

Definicija

Riemannova ploskev je kompleksna mnogoterost kompleksne dimenzije 1.

Definicija

Gladka preslikava $f\colon M \to N$ med gladkima mnogoterostma se imenuje imerzija v točki $p \in M$, če je njen diferencial $df_p\colon T_pM \to T_{f(p)}N$ injektiven.

Konformne imerzije razreda $\mathscr{C}^2$ iz odprte Riemannove ploskve v Evklidski prostor

$$x\colon M \to \mathbb{R}^n,\ n \geq 3.$$

Definicija

Povprečna ukrivljenost ploskve S v točki p in normalni smeri N je povprečje glavnih ukrivljenosti,

$$H^N(p) = \frac{1}{2}\left(\kappa_1^N(p) + \kappa_2^N(p)\right). \tag{1}$$

Vektor povprečne ukrivljenosti v točki p je vektor $\mathbf{H}$, ki zadošča $H^N(p) = \mathbf{H} \cdot N$ za vsak $N \in N_pS$.

Definicija

Naj bo $x: M \to \mathbb{R}^n$ *harmonična preslikava. Njen* *pretok* *je homomorfizem grup* $\mathrm{Flux}_x : H_1(M, \mathbb{Z}) \to \mathbb{R}^n$*, definiran s predpisom*

$$\mathrm{Flux}_x([C]) = \int_C d^c x. \tag{2}$$

Definicija

Naj bo K *kompaktna podmnožica Riemannove ploskve* M*. Njena* *holomorfna ogrinjača* *je množica*

$$\widehat{K}_{\mathscr{O}(M)} = \{p \in M;\ |f(p)| \le \max_K |f| \text{ za vse } f \in \mathscr{O}(M)\}. \tag{3}$$

Če velja $K = \widehat{K}_{\mathscr{O}(M)}$*, potem* K *imenujemo* *Rungejeva množica*.

Definicija

Naj bo $x\colon M \to \mathbb{R}^n$ *harmonična preslikava. Njen pretok je homomorfizem grup* $\mathrm{Flux}_x\colon H_1(M,\mathbb{Z}) \to \mathbb{R}^n$*, definiran s predpisom*

$$\mathrm{Flux}_x([C]) = \int_C d^c x. \tag{2}$$

Definicija

Naj bo K *kompaktna podmnožica Riemannove ploskve* M*. Njena holomorfna ogrinjača je množica*

$$\widehat{K}_{\mathscr{O}(M)} = \{p \in M;\ |f(p)| \leq \max_K |f| \text{ za vse } f \in \mathscr{O}(M)\}. \tag{3}$$

Če velja $K = \widehat{K}_{\mathscr{O}(M)}$*, potem* K *imenujemo Rungejeva množica.*

Definicija

Naj bo M gladka kompaktna ploskev z robom, $n \geq 3$ in naj bo preslikava $x\colon M \to \mathbb{R}^n$ imerzija razreda $\mathscr{C}^2$. Variacija preslikave x s fiksnim robom je 1-parametrična družina $\mathscr{C}^2$ preslikav

$$x^t\colon M \to \mathbb{R}^n, \quad t \in (-\varepsilon, \varepsilon) \subset \mathbb{R}, \tag{4}$$

če je $x^0 = x$ in za vse t z intervala velja $x^t = x$ na bM.

Definicija (Minimalna ploskev)

Naj bo $x\colon M \to \mathbb{R}^n$ imerzija razreda $\mathscr{C}^2$. Sliko $x(M)$ imenujemo minimalna ploskev, če za vsako kompaktno domeno $D \subset M$ z gladkim robom bD in vsako gladko variacijo x^t preslikave x s fiksnim robom velja

$$\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \mathrm{Area}\left(x^t(D)\right) = 0. \tag{5}$$

Ekvivalentno pravimo, da je minimalna ploskev stacionarna točka ploskovnega funkcionala Area.

Definicija

Naj bo M gladka kompaktna ploskev z robom, $n \geq 3$ in naj bo preslikava $x\colon M \to \mathbb{R}^n$ imerzija razreda $\mathscr{C}^2$. Variacija preslikave x s fiksnim robom je 1-parametrična družina $\mathscr{C}^2$ preslikav

$$x^t\colon M \to \mathbb{R}^n, \quad t \in (-\varepsilon, \varepsilon) \subset \mathbb{R}, \tag{4}$$

če je $x^0 = x$ in za vse t z intervala velja $x^t = x$ na bM.

Definicija (Minimalna ploskev)

Naj bo $x\colon M \to \mathbb{R}^n$ imerzija razreda $\mathscr{C}^2$. Sliko $x(M)$ imenujemo minimalna ploskev, če za vsako kompaktno domeno $D \subset M$ z gladkim robom bD in vsako gladko variacijo x^t preslikave x s fiksnim robom velja

$$\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \mathrm{Area}\left(x^t(D)\right) = 0. \tag{5}$$

Ekvivalentno pravimo, da je minimalna ploskev stacionarna točka ploskovnega funkcionala Area.

Izrek

Naj bo M odprta Riemannova ploskev, $n \geq 3$ in $x = (x_1, \dots, x_n) \colon M \to \mathbb{R}^n$ konformna imerzija razreda $\mathscr{C}^2$. Naslednje trditve so ekvivalentne.

1. *x je minimalna ploskev.*
2. *Vektorsko polje povprečne ukrivljenosti preslikave x je ničelno, tj. $\mathbf{H} = 0$.*
3. *x je harmonična.*
4. *1-forma $\partial x = (\partial x_1, \dots, \partial x_n)$ z vrednostmi v $\mathbb{C}^n$ je holomorfna in velja*
$$(\partial x_1)^2 + \cdots + (\partial x_n)^2 = 0. \tag{6}$$
5. *Naj bo θ holomorfna 1-forma na M, ki ni nikjer enaka 0. Potem je preslikava $f = 2\partial x/\theta \colon M \to \mathbb{C}^n$ holomorfna z vrednostmi v punktirani ničelni kvadriki*
$$\mathbf{A}_* = \{(z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n_*;\ z_1^2 + \cdots + z_n^2 = 0\}. \tag{7}$$

Nadalje je Riemannova metrika na M, inducirana s konformno imerzijo x, enaka
$$g = x^* ds^2 = |dx_1|^2 + \cdots + |dx_n|^2 = 2(|\partial x_1|^2 + \cdots |\partial x_n|^2). \tag{8}$$

Izrek (Enneper-Weierstrassova formula)

Naj bo $n \geq 3$ in M odprta Riemannova ploskev. Na njej izberimo holomorfno 1-formo $\phi = (\phi_1, \dots, \phi_n)$ z vrednostmi v $\mathbb{C}^n$, ki je povsod neničelna in zadošča

1. $\sum_{j=1}^n \phi_j^2 = 0$,
2. $\Re \int_C \phi = 0$ *za vse* $[C] \in H_1(M, \mathbb{Z})$.

Potem za poljuben izbor točk $p_0 \in M$ in $x_0 \in \mathbb{R}^n$ predpis $x \colon M \to \mathbb{R}^n$,

$$x(p) = x_0 + \Re \int_{p_0}^{p} \phi, \quad p \in M, \tag{9}$$

podaja dobro definirano konformno minimalno imerzijo. Zanjo velja

$$2\partial x = \phi \quad \text{in} \quad g = x^* ds^2 = |dx|^2 = \frac{1}{2}|\phi|^2. \tag{10}$$

Definicija

Naj bo M odprta Riemannova ploskev in $n \geq 3$. Holomorfno imerzijo $z = (z_1, \ldots, z_n)\colon M \to \mathbb{C}^n$, za katero velja $(\partial z_1)^2 + \cdots + (\partial z_n)^2 = 0$, imenujemo holomorfna ničelna krivulja v $\mathbb{C}^n$.

Če v Enneper-Weierstrassovi formuli velja še $\int_C \phi = 0$ za vse $[C] \in H_1(M, \mathbb{Z})$, potem za poljuben izbor točk $p_0 \in M$ in $z_0 \in \mathbb{C}^n$ predpis $z\colon M \to \mathbb{C}^n$,

$$z(p) = z_0 + \int_{p_0}^{p} \phi, \quad p \in M, \tag{11}$$

podaja dobro definirano holomorfno ničelno krivuljo. Zanjo velja

$$\partial z = \phi \quad \text{in} \quad z^* ds^2 = |dz|^2 = |\partial z|^2 = |\phi|^2. \tag{12}$$

Definicija

Naj bo M odprta Riemannova ploskev in $n \geq 3$. Holomorfno imerzijo $z = (z_1, \ldots, z_n) \colon M \to \mathbb{C}^n$, za katero velja $(\partial z_1)^2 + \cdots + (\partial z_n)^2 = 0$, imenujemo ***holomorfna ničelna krivulja*** *v $\mathbb{C}^n$.*

Če v Enneper-Weierstrassovi formuli velja še $\int_C \phi = 0$ za vse $[C] \in H_1(M, \mathbb{Z})$, potem za poljuben izbor točk $p_0 \in M$ in $z_0 \in \mathbb{C}^n$ predpis $z \colon M \to \mathbb{C}^n$,

$$z(p) = z_0 + \int_{p_0}^{p} \phi, \quad p \in M, \tag{11}$$

podaja dobro definirano holomorfno ničelno krivuljo. Zanjo velja

$$\partial z = \phi \quad \text{in} \quad z^* ds^2 = |dz|^2 = |\partial z|^2 = |\phi|^2. \tag{12}$$

Cilj: dokazati aproksimacijski in interpolacijski izrek tipa Mergelyana in Weierstrassa za konformne minimalne ploskve in holomorfne ničelne krivulje

- klasični izreki za holomorfne funkcije
- Morsejeva teorija
- konstrukcija poti s predpisanimi integrali (Gromov)

Načrt:

- aproksimacija in interpolacija preslikav v punktirano ničelno kvadriko
- nekritičen primer
- splošen primer

Cilj: dokazati aproksimacijski in interpolacijski izrek tipa Mergelyana in Weierstrassa za konformne minimalne ploskve in holomorfne ničelne krivulje

- klasični izreki za holomorfne funkcije
- Morsejeva teorija
- konstrukcija poti s predpisanimi integrali (Gromov)

Načrt:

- aproksimacija in interpolacija preslikav v punktirano ničelno kvadriko
- nekritičen primer
- splošen primer

Definicija

Naj bo M gladka ploskev. Kompaktno podmnožico v M oblike $S = K \cup E$ imenujemo dopustna množica, kjer je K končna unija paroma disjunktnih kompaktnih domen s kosoma zvezno odvedljivimi robovi v M ter $E = S \setminus K^\circ$ unija končno mnogo paroma disjunktnih gladkih Jordanovih lokov in zaprtih Jordanovih krivulj, ki se dotikajo K kvečjemu v svojih krajiščih in sekajo rob K transverzalno.

Definicija

Naj bo $S = K \cup E$ dopustna podmnožica Riemannove ploskve M in θ povsod neničelna holomorfna 1-forma, definirana v okolici $S \subset M$. Naj bosta $n \geq 3$ in $r \in \mathbb{N}$. Posplošena konformna minimalna imerzija $S \to \mathbb{R}^n$ razreda $\mathscr{C}^r$ je par $(x, f\theta)$, kjer je $x \colon S \to \mathbb{R}^n$ preslikava razreda $\mathscr{C}^r$, njena zožitev na $S^\circ = K^\circ$ je konformna minimalna imerzija in preslikava $f \in \mathscr{A}^{r-1}(S, \mathbf{A}_*)$ zadošča naslednjima pogojema:

1. *na množici K velja $f\theta = 2\partial x$;*
2. *za vsako gladko pot α v M, ki parametrizira povezano komponento množice $E = \overline{S \setminus K}$, velja $\Re(\alpha^*(f\theta)) = \alpha^*(dx) = d(x \circ \alpha)$.*

Definicija

Naj bo M gladka ploskev. Kompaktno podmnožico v M oblike $S = K \cup E$ imenujemo **dopustna množica**, *kjer je K končna unija paroma disjunktnih kompaktnih domen s kosoma zvezno odvedljivimi robovi v M ter $E = S \setminus K^\circ$ unija končno mnogo paroma disjunktnih gladkih Jordanovih lokov in zaprtih Jordanovih krivulj, ki se dotikajo K kvečjemu v svojih krajiščih in sekajo rob K transverzalno.*

Definicija

Naj bo $S = K \cup E$ dopustna podmnožica Riemannove ploskve M in θ povsod neničelna holomorfna 1-forma, definirana v okolici $S \subset M$. Naj bosta $n \geq 3$ in $r \in \mathbb{N}$. **Posplošena konformna minimalna imerzija** *$S \to \mathbb{R}^n$ razreda $\mathscr{C}^r$ je par $(x, f\theta)$, kjer je $x\colon S \to \mathbb{R}^n$ preslikava razreda $\mathscr{C}^r$, njena zožitev na $S^\circ = K^\circ$ je konformna minimalna imerzija in preslikava $f \in \mathscr{A}^{r-1}(S, \mathbf{A}_*)$ zadošča naslednjima pogojema:*

1. *na množici K velja $f\theta = 2\partial x$;*
2. *za vsako gladko pot α v M, ki parametrizira povezano komponento množice $E = \overline{S \setminus K}$, velja $\Re(\alpha^*(f\theta)) = \alpha^*(dx) = d(x \circ \alpha)$.*

Trditev (Nekritičen primer glavnega izreka)

Naj bo M odprta Riemannova ploskev in θ povsod neničelna holomorfna 1-forma na M. Predpostavimo, da je S taka povezana dopustna množica v M, da inkluzija $S \hookrightarrow M$ porodi izomorfizem $H_1(S,\mathbb{Z}) \xrightarrow{\cong} H_1(M,\mathbb{Z})$ prvih homoloških grup. Naj bo $A = \{a_1, \ldots, a_k\} \subset S$ končna množica točk in $r, s \in \mathbb{N}$. Tedaj velja naslednje:

1. *Vsako posplošeno konformno minimalno imerzijo $(x, f\theta) \in \mathrm{GCMI}^r(S,\mathbb{R}^n)$ lahko v $\mathscr{C}^r(S)$ aproksimiramo s polnimi konformnimi minimalnimi imerzijami $X\colon M \to \mathbb{R}^n$, za katere je $\mathrm{Flux}_X = \mathrm{Flux}_x$.*
2. *Vsako posplošeno ničelno krivuljo $(z, f\theta) \in \mathrm{GNC}^r(S,\mathbb{C}^n)$ lahko v $\mathscr{C}^r(S)$ aproksimiramo s polnimi holomorfnimi ničelnimi krivuljami $Z\colon M \to \mathbb{C}^n$.*

Dodatno, preslikave X oz. Z lahko izberemo tako, da se s preslikavama x oz. z ujemajo v točkah množice A ter do danega končnega reda v točkah množice $A \cap S^{\circ}$.

Izrek

Naj bo M odprta Riemannova ploskev, θ povsod neničelna holomorfna 1-forma na M, $n \geq 3$ in $r \geq 1$. Naj bo S dopustna Rungejeva množica v M in $\Lambda \subset M$ zaprta diskretna podmnožica. Naj bo $x\colon S \to \mathbb{R}^n$ posplošena konformna minimalna imerzija razreda $\mathscr{C}^r(S,\mathbb{R}^n)$, ki je konformna minimalna imerzija v okolici vsake točke iz Λ.
Za izbrane $\varepsilon > 0$, preslikavo $k\colon \Lambda \to \mathbb{N}$ in homomorfizem grup $\mathfrak{p}\colon H_1(M,\mathbb{Z}) \to \mathbb{R}^n$, $\mathfrak{p}|_{H_1(S,\mathbb{Z})} = \mathrm{Flux}_x$ obstaja konformna minimalna imerzija $\tilde{x}\colon M \to \mathbb{R}^n$, za katero velja:

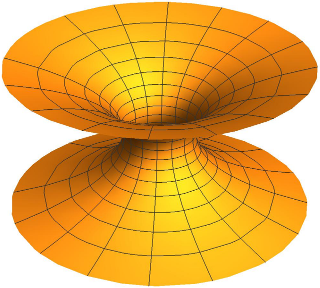
1. $||\tilde{x} - x||_{\mathscr{C}^r(S)} < \varepsilon$;
2. *razlika $\tilde{x} - x$ je ničelna do reda $k(p)$ v vsaki točki $p \in \Lambda$;*
3. $\mathrm{Flux}_{\tilde{x}} = \mathfrak{p}$ *na* $H_1(M,\mathbb{Z})$;
4. *če je $n \geq 5$ in je $x\colon \Lambda \to \mathbb{R}^n$ injektivna preslikava, potem je $\tilde{x}$ injektivna imerzija;*
5. *če je $n = 4$ in ima x enostavne dvojne točke na množici Λ, potem je $\tilde{x}$ imerzija z enostavnimi dvojnimi točkami na Λ.*

Izrek (Mittag-Lefflerjev izrek za konformne minimalne imerzije)

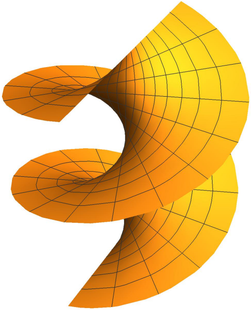
Naj bo M odprta Riemannova ploskev, $A \subset M$ njena zaprta diskretna podmnožica, $U \subset M$ okolica množice A, ki je Rungejeva v M, in $n \geq 3$. Predpostavimo, da je $x\colon U \setminus A \to \mathbb{R}^n$ konformna minimalna imerzija, pripadajočo 1-formo ∂x pa lahko meromorfno razširimo na U s poli v točkah množice A. Tedaj obstaja taka polna konformna minimalna imerzija $\tilde{x}\colon M \setminus A \to \mathbb{R}^n$, da je razlika $\tilde{x} - x$ harmonična na množici A. Natančneje, 1-formo $\partial \tilde{x}$ lahko meromorfno razširimo na M s poli v točkah množice A.

Primeri minimalnih ploskev – katenoida

$$x : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$$
$$x(u, v) = (\cos u \cdot \cosh v, \sin u \cdot \cosh v, v)$$

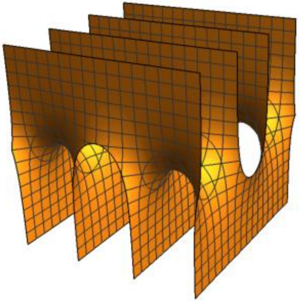


$$x : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$$
$$x(u, v) = (\sin u \cdot \sinh v, -\cos u \cdot \sinh v, u)$$

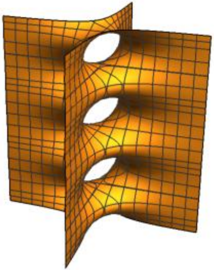


Primeri minimalnih ploskev – Scherkovi ploskvi

$$e^z \cos y = \cos x$$



$$\sin z = \sinh x \sinh y$$



Definicija (Periodna preslikava)

Naj bo M povezana odprta Riemannova ploskev in θ povsod neničelna holomorfna 1-forma na M. Naj bo $\mathscr{C} = \{C_1, \dots, C_l\}$ družina gladkih orientiranih vloženih lokov in zaprtih Jordanovih krivulj v M ter $C = \cup_{i=1}^{l} C_i$. Družini $\mathscr{C}$ in številu $n \in \mathbb{N}$ priredimo periodno preslikavo

$$\mathscr{P} = (\mathscr{P}_1, \dots, \mathscr{P}_l) \colon \mathscr{C}(C, \mathbb{C}^n) \to (\mathbb{C}^n)^l,$$

$$\mathscr{P}_i(f) = \int_{C_i} f\theta, \quad i = 1, \dots, l. \tag{13}$$

Tu je $f \in \mathscr{C}(C, \mathbb{C}^n)$ in $\mathscr{P}_i(f) \in \mathbb{C}^n$.

Lema

Naj bo M odprta Riemannova ploskev in $S = K \cup E$ dopustna množica v M. Naj bo $\mathscr{C} = \{C_1, \ldots, C_l\}$ taka družina gladkih orientiranih Jordanovih krivulj in lokov v S, da je unija $C = \cup_{i=1}^{l} C_i$ Rungejeva v S. Naj za neko število $r \in \mathbb{Z}_+$ preslikava $f\colon S \to \mathbf{A}_*$ pripada razredu $\mathscr{A}^r$. Nadalje predpostavimo, da vsaka krivulja $C_i \in \mathscr{C}$ vsebuje netrivialen lok $I_i \subset C_i$, disjunkten z $\cup_{i \neq j} C_j$, preslikava $f\colon I_i \to \mathbf{A}_*$ pa je neravna.
Potem obstaja odprta okolica $U \subset \mathbb{C}^{ln}$ točke 0 in preslikava $\Phi_f \in \mathscr{A}^r(S \times U, \mathbf{A}_*)$, tako da velja $\Phi_f(\cdot, 0) = f$ in je preslikava

$$\frac{\partial}{\partial t}\bigg|_{t=0} \mathscr{P}(\Phi_f(\cdot, t))\colon (\mathbb{C}^n)^l \to (\mathbb{C}^n)^l \text{ izomorfizem.} \tag{14}$$

Nadalje, za končno podmnožico $P \subset S$ lahko preslikavo Φ_f izberemo tako, da se za $t \in U$ preslikave $\Phi_f(\cdot, t)\colon S \to \mathbf{A}_*$ ujemajo z f v vsaki točki $P \setminus S^\circ$, v točkah $P \cap S^\circ$ pa se z f ujemajo do danega končnega reda.
Za vsako preslikavo $f_0 \in \mathscr{A}^r(S, \mathbf{A}_*)$, ki zadošča zgornjim predpostavkam, obstaja okolica $\Omega \subset \mathscr{A}^r(S, \mathbf{A}_*)$ in holomorfna preslikava $f \mapsto \Phi_f$, $f \in \Omega$, z zgornjimi lastnostmi.

Lema

Naj bo M povezana odprta Riemannova ploskev in $S = K \cup E$ Rungejeva dopustna podmnožica v M. Izberimo tako družino gladkih orientiranih Jordanovih krivulj in lokov v S, $\mathscr{C} = \{C_1, \dots, C_l\}$, da je unija $C = \cup_{i=1}^{l} C_i$ Rungejeva v M, vsaka krivulja C_i pa vsebuje netrivialen lok I_i, za katerega je $I_i \cap (\cup_{i \neq j} C_j) = \emptyset$. Naj bo $\mathscr{P}$ periodno dominantni sprej, ki pripada družini krivulj $\mathscr{C}$, $A = \{a_1, \dots, a_m\} \subset S$ končna množica točk in $r \geq 1$. Tedaj lahko vsako preslikavo $f \in \mathscr{A}^r(S, \mathbf{A}_*)$ aproksimiramo v $\mathscr{C}^r(S)$ s polnimi holomorfnimi preslikavami $F \in \mathscr{O}(M, \mathbf{A}_*)$, pri čemer velja naslednje:

1. $\mathscr{P}(F) = \mathscr{P}(f)$;
2. *preslikavi F in f se ujemata v točkah množice A, v točkah množice $A \cap S^\circ$ pa se ujemata do danega končnega reda.*