UNIVERZA V LJUBLJANI
FAKULTETA ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

Matematika – 2. stopnja

Tjaša Vrhovnik

MINIMALNE PLOSKVE

Magistrsko delo

Mentor: prof. dr. Franc Forstnerič

Ljubljana, 2021

Zahvala

Kazalo

Program dela

Osnovna literatura

Literatura mora biti tukaj posebej samostojno navedena (po pomembnosti) in ne le citirana. V tem razdelku literature ne oštevilčimo po svoje, ampak uporabljamo okolje itemize in ukaz plancite, saj je celotna literatura oštevilčena na koncu.

- [?]
- [?]
- [?]
- [?]

Podpis mentorja:

Minimalne ploskve

Povzetek

Tukaj napišemo povzetek vsebine. Sem sodi razlaga vsebine in ne opis tega, kako je delo organizirano.

English translation of the title

Abstract

An abstract of the work is written here. This includes a short description of the content and not the structure of your work.

Math. Subj. Class. (2010): oznake kot 74B05, 65N99, na voljo so na naslovu `http://www.ams.org/msc/msc2010.html`

Ključne besede:

Keywords:

1 Uvod

2 Osnovni pojmi

Naj bo M gladka mnogoterost. Za vsako točko $p \in M$ definiramo simetrično pozitivno-definitno bilinearno preslikavo $g_p\colon T_pM \times T_pM \to \mathbb{R}$, ki je gladko odvisna od p. Družino preslikav g_p imenujemo *Riemannova metrika* g na mnogoterosti M. Gladki mnogoterosti, opremljeni z Riemannovo metriko, pravimo *Riemannova mnogoterost*.

Izkaže se, da vsaka mnogoterost razreda $\mathcal{C}^{r+1}$ premore Riemannovo metriko razreda $\mathcal{C}^r$.

Naj bo M domena v $\mathbb{R}^n$ s koordinatami $x = (x_1, \ldots, x_n)$. Riemannova metrika na M je tedaj oblike

$$g_p = \sum_{i,j=1}^{n} g_{i,j}(p) dx_i dx_j, \quad p \in M, \tag{2.1}$$

kjer je $G(p) = [g_{i,j}(p)]_{i,j=1}^n$ simetrična pozitivno-definitna matrika za vse $p \in M$. Za tangentna vektorja $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$, $\eta = (\eta_1, \ldots, \eta_n) \in \mathbb{R}^n$ velja

$$g_p(\xi, \eta) = \sum_{i,j=1}^{n} g_{i,j}(p)\xi_i\eta_j = G(p)\xi \cdot \eta. \tag{2.2}$$

Vzemimo gladko imerzijo $x\colon M \to \widetilde{M}$ in Riemannovo metriko $\tilde{g}$ na $\widetilde{M}$. *Povlečena metrika* $g = x^*\tilde{g}$ na M, definirano na paru tangentnih vektorjev $\xi, \eta \in T_pM$, podaja predpis

$$g_p(\xi, \eta) = \tilde{g}_{x(p)}(dx_p(\xi), dx_p(\eta)). \tag{2.3}$$

Če je metrika $\tilde{g}$ razreda $\mathcal{C}^r$ in imerzija x razreda $\mathcal{C}^{r+1}$, potem je tudi povlečena metrika $g = x^*\tilde{g}$ razreda $\mathcal{C}^r$.

Oglejmo si primer Riemannove metrike, ki jo bomo v nadaljevanju večkrat uporabili. Na Evklidskem prostoru $\mathbb{R}^n$ s koordinatami $x = (x_1, \ldots, x_n)$ je definirana *Evklidska metrika*

$$ds^2 = (dx_1)^2 + \cdots + (dx_n)^2, \tag{2.4}$$

to je Riemannova metrika, ki ustreza identični matriki I_n. Naj bo D domena v $\mathbb{R}^2$ in $x\colon D \to \mathbb{R}^n$ imerzija, podana s predpisom $x(u_1, u_2) = (x_1(u_1, u_2), \ldots, x_n(u_1, u_2))$, $(u_1, u_2) \in D$. Pripadajoča metrika na D je enaka

$$g = x^*ds^2 = g_{1,1}du_1^2 + g_{1,2}du_1du_2 + g_{2,1}du_2du_1 + g_{2,2}du_2^2, \tag{2.5}$$

$$g_{1,1} = |x_{u_1}|^2,\ g_{1,2} = g_{2,1} = x_{u_1} \cdot x_{u_2},\ g_{2,2} = |x_{u_2}|^2 \tag{2.6}$$

in jo imenujemo *prva fundamentalna forma* ploskve $M = x(D)$.

Definicija 2.1. *Riemannova ploskev* je kompleksna mnogoterost kompleksne dimenzije 1.

2.1 Ukrivljenost

Naj bo M ploskev, $n \geq 3$ in $x\colon M \to \mathbb{R}^n$ imerzija razreda $\mathcal{C}^2$. Izberimo karto (U, ϕ) na M in koordinate $u = (u_1, u_2) \in U$, tako da je zožitev $x|_U\colon U \to \mathbb{R}^n$ vložitev na orientabilno ploskev $S = x(U) \subset \mathbb{R}^n$. Izberimo točko $q \in U$ in označimo $p = x(q) \in S$. Naj bo $t \mapsto (u_1(t), u_2(t))$ parametrizacija vložene krivulje razreda $\mathcal{C}^2$ v U ter $q = (u_1(t_0), u_2(t_0))$ za nek t_0. Vsaka krivulja, vložena v S, ki vsebuje točko p, je tedaj oblike

$$\alpha(t) = x(u_1(t), u_2(t)). \tag{2.7}$$

Označimo z $s = s(t)$ ločno dolžino krivulje α. Predpostavimo, da izbrana točka p ustreza $p = \alpha(s_0) \in S$, označimo pripadajoč tangentni vektor $\nu = \alpha'(s_0) \in T_pS$ ter enotsko normalo $N \in N_pS$ v točki p. Količino

$$\kappa^N(p, \nu) = \alpha''(s_0) \cdot N \tag{2.8}$$

imenujemo *normalna ukrivljenost* ploskve S v točki p v tangentni smeri ν in smeri enotske normale N.

Oglejmo si preslikavo $\kappa^N(p, \cdot)\colon \{\nu \in T_pS;\ |\nu| = 1\} \to \mathbb{R}$, $\nu \mapsto \kappa^N(p, \nu)$, kjer je $p \in S$ izbrana fiksna točka. Kot zvezna preslikava na kompaktni množici doseže minimalno in maksimalno vrednost,

$$\kappa_1^N(p) = \min_{|\nu|=1} \kappa^N(p, \nu), \quad \kappa_2^N(p) = \max_{|\nu|=1} \kappa^N(p, \nu), \tag{2.9}$$

katerima pravimo *glavni ukrivljenosti*.

Definicija 2.2.
1. *Povprečna ukrivljenost* ploskve S v točki p in normalni smeri N je povprečje glavnih ukrivljenosti,

$$H^N(p) = \frac{1}{2}\left(\kappa_1^N(p) + \kappa_2^N(p)\right). \tag{2.10}$$

2. Njun produkt

$$K^N(p) = \kappa_1^N(p) \cdot \kappa_2^N(p) \tag{2.11}$$

definira *Gaussovo ukrivljenost* ploskve S v točki p in normalni smeri N.

3. Projekcijo povprečne ukrivljenosti na normalno ravnino N_pS v smeri tangentne ravnine T_pS imenujemo *vektor povprečne ukrivljenosti* ploskve S v točki p in označimo s $\mathbf{H}$. Enačba 2.10 se v tej notaciji glasi $H^N(p) = \mathbf{H} \cdot N$ za vsak $N \in N_pS$.

Lema 2.3. *Naj bo $x\colon M \to \mathbb{R}^n$ imerzija razreda $\mathcal{C}^2$. Tedaj velja*

$$\Delta x = 2\mathbf{H}, \tag{2.12}$$

kjer je Δ Laplaceov operator glede na Riemannovo metriko $g = x^*ds^2$ v točki $q \in M$ in $\mathbf{H}$ vektor povprečne ukrivljenosti v točki $p = x(q) \in S$.

2.2 Aproksimacijski izreki za Riemannove ploskve

Izrek 2.4 (Rungejev aproksimacijski izrek za Riemannove ploskve)**.** *Naj bo M Riemannova ploskev in K njena kompaktna podmnožica. Potem lahko vsako funkcijo f, ki je holomorfna na okolici K, aproksimiramo enakomerno na K z meromorfnimi funkcijami F na M brez polov na K, ter s holomorfnimi funkcijami na M, če K nima lukenj. Funkcije F lahko izberemo tako, da se z dano funkcijo f na končni množici točk v K ujemajo do izbranega končnega reda in da ima F pole v podmnožici $E \subset M \backslash K$, kjer E vsebuje točko v vsaki luknji množice K.*

Definicija 2.5. Naj bo K kompaktna podmnožica Riemannove ploskve M. Njena *holomorfna ogrinjača* je množica

$$\widehat{K}_{\mathcal{O}(M)} = \{p \in M;\ |f(p)| \leq \max_K |f| \text{ za vse } f \in \mathcal{O}(M)\}. \tag{2.13}$$

Če velja $K = \widehat{K}_{\mathcal{O}(M)}$, množico K imenujemo *Rungejeva množica.*

Izrek 2.6 (Weierstrass-Florackov interpolacijski izrek)**.** *Naj bo M odprta Riemannova ploskev in K njena Rungejeva podmnožica. Naj bo $A = \{a_i\}_{i=1}^{\infty}$ zaprta diskretna podmnožica v M, U odprta podmnožica M, tako da je $A \cup K \subset U$ in f meromorfna funkcija na U z ničlami in poli le v točkah množice A. Potem za izbrane $\varepsilon > 0$ in števila $k_i \in \mathbb{N}$ obstaja meromorfna funkcija F na M, za katero velja:*

1. *$|F(z) - f(z)| < \varepsilon$ za vse $z \in K$,*
2. *v točkah a_i je razlika $F - f$ ničelna do reda k_i,*
3. *F nima ničel in polov na $M \backslash A$.*

2.3 Variacija ploščine

Definicija 2.7.

1. Naj bo M gladka kompaktna ploskev z robom, $n \geq 3$ in naj bo preslikava $x\colon M \to \mathbb{R}^n$ imerzija razreda $\mathcal{C}^2$. *Variacija preslikave x s fiksnim robom* je 1-parametrična družina $\mathcal{C}^2$ preslikav
$$x^t\colon M \to \mathbb{R}^n,\ t \in (-\varepsilon, \varepsilon) \subset \mathbb{R}, \tag{2.14}$$
če je $x^0 = x$ in za vse t z intervala velja $x^t = x$ na bM.
2. Naj bo $p \in M$. *Variacijsko vektorsko polje* preslikave x^t je vektorsko polje, definirano kot
$$E(p,t) = \frac{\partial x^t(p)}{\partial t} \in \mathbb{R}^n. \tag{2.15}$$

Opazimo, da je za dovolj majhne vrednosti t preslikava x^t imerzija. Po definiciji je na $bM \times (-\varepsilon, \varepsilon)$ variacijsko vektorsko polje E konstantno ničelno.

Definicija 2.8. Naj bo $x\colon M \to \mathbb{R}^n$ imerzija razreda $\mathcal{C}^2$. Ploskev M imenujemo *minimalna ploskev*, če za vsako kompaktno domeno $D \subset M$ z gladkim robom bD in vsako gladko variacijo x^t preslikave x s fiksnim robom velja

$$\frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \mathrm{Area}(x^t(D)) = 0. \tag{2.16}$$

Ekvivalentno pravimo, da je minimalna ploskev stacionarna točka ploskovnega funkcionala Area: $D \to \mathbb{R}$.

Levo stran enakosti 2.16 imenujemo *prva variacija ploščine* pri $t = 0$. Slednjo z geometrijskimi lastnostmi preslikave x, natančneje ukrivljenostjo, povezuje *prva variacijska formula* v naslednjem izreku.

Izrek 2.9. *Naj bo M gladka kompaktna ploskev z robom, $n \geq 3$ in $x\colon M \to \mathbb{R}^n$ imerzija razreda $\mathcal{C}^2$. Naj bo $E = \partial x^t/\partial t|_{t=0}$ variacijsko vektorsko polje preslikave x^t pri $t = 0$, $\mathbf{H}$ vektorsko polje povprečne ukrivljenosti preslikave x in dA ploščinski element glede na Riemannovo metriko x^*ds^2, definirano na M. Potem za vsako gladko variacijo $x^t\colon M \to \mathbb{R}^n$ imerzije x s fiksnim robom velja*

$$\frac{d}{dt}\Big|_{t=0} Area(x^t(M)) = -2\int_M E \cdot \mathbf{H} dA. \tag{2.17}$$

Izrek 2.10. *Naj bo $x\colon M \to \mathbb{R}^n$ imerzija razreda $\mathcal{C}^2$. Ploskev M je minimalna natanko tedaj, ko je na M vektor povprečne ukrivljenosti $\mathbf{H}$ preslikave x identično enak* 0.

S podobnimi tehnikami kot v dokazu Izreka 2.9 izpeljemo *drugo variacijsko formulo*

$$\frac{d^2}{dt^2}\Big|_{t=0} \mathrm{Area}(x^t(M)) = \int_M (4|E|^2 K^E + |\nabla E|^2) dA, \tag{2.18}$$

kjer $K^E = K^N$ označuje Gaussovo ukrivljenost ploskve M.

2.4 Weierstrassova formula

Naj bosta (M, g) in $(\widetilde{M}, \tilde{g})$ Riemannovi mnogoterosti z $\dim(M) \leq \dim(\widetilde{M})$. Imerzija $x\colon (M, g) \to (\widetilde{M}, \tilde{g})$ se imenuje *konformna*, če ohranja kote. Z drugimi besedami je "pullback metric"$x^*\tilde{g}$ konformno ekvivalentna metriki g, kar pomeni, da za pozitivno funkcijo $\mu > 0$ na M velja $x^*\tilde{g} = \mu g$.

Naj bo ploskev M orientabilna in $x\colon M \to \mathbb{R}^n$ imerzija razreda $\mathcal{C}^2$. Potem preslikava x določa enolično strukturo Riemannove ploskve na M, kjer je x konformna imerzija. Zato bomo v nadaljevanju obravnavali Riemannove ploskve in pripadajoče konformne imerzije v Evklidski prostor. Prvi rezultat, ki ga navajamo, opisuje ekvivalentne pogoje minimalnosti ploskve M.

Izrek 2.11. *Naj bo M odprta Riemannova ploskev, $n \geq 3$ in $x = (x_1, \ldots, x_n)\colon M \to \mathbb{R}^n$ konformna imerzija razreda $\mathcal{C}^2$. Naslednje trditve so ekvivalentne:*

1. *x je minimalna ploskev.*
2. *Vektorsko polje povprečne ukrivljenosti preslikave x je ničelno, tj.* $\mathbf{H} = 0$.
3. *x je harmonična, tj.* $\Delta x = 0$.
4. *1-forma $\partial x = (\partial x_1, \ldots, \partial x_n)$ z vrednostmi v $\mathbb{C}^n$ je holomorfna in velja*

$$(\partial x_1)^2 + \cdots + (\partial x_n)^2 = 0. \tag{2.19}$$

5. *Naj bo θ holomorfna 1-forma na M, ki ni nikjer enaka* 0. *Potem je preslikava* $f = 2\partial x/\theta \colon M \to \mathbb{C}^n$ *holomorfna z vrednostmi na* ničelni kvadriki

$$\mathbf{A} = \{(z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n;\ z_1^2 + \cdots + z_n^2 = 0\}. \tag{2.20}$$

Nadalje je Riemannova metrika na M, inducirana s konformno imerzijo x, enaka

$$g = x^* ds^2 = |dx_1|^2 + \cdots + |dx_n|^2 = 2(|\partial x_1|^2 + \cdots |\partial x_n|^2). \tag{2.21}$$

Definicija 2.12. Naj bo $x \colon M \to \mathbb{R}^n$ harmonična preslikava. Njen *pretok* je homomorfizem grup $\mathrm{Flux}_x \colon H_1(M, \mathbb{Z}) \to \mathbb{R}^n$, definiran s predpisom

$$\mathrm{Flux}_x([C]) = \int_C d^c x. \tag{2.22}$$

V definiciji pretoka je $[C] \in H_1(M, \mathbb{Z})$, integral pa je odvisen le od homološkega razreda poti C, zato bomo v nadaljevanju pisali kar $\mathrm{Flux}_x(C)$.

Definicija 2.13. 1. Naj bo M odprta Riemannova ploskev in $n \geq 3$. Holomorfno imerzijo $z = (z_1, \dots, z_n) \colon M \to \mathbb{C}^n$, za katero velja $(\partial z_1)^2 + \cdots + (\partial z_n)^2 = 0$, imenujemo *holomorfna ničelna krivulja* v $\mathbb{C}^n$.

2. Naj bo $z = x + \imath y \colon M \to \mathbb{C}^n$ holomorfna ničelna krivulja. Njena realni del in imaginarni del, $x, y \colon M \to \mathbb{R}^n$ imenujemo *konjugirani minimalni ploskvi.*

3. Naj bo $t \in \mathbb{R}$. Predstavnike 1-parametrične družine $x^t = \Re(e^{\imath t} z) \colon M \to \mathbb{R}^n$ imenujemo *pridružene minimalne ploskve* holomorfne ničelne krivulje z.

Izrek 2.14 (Weierstrassova predstavitev konformnih minimalnih ploskev in holomorfnih ničelnih krivulj)**.** *Naj bo $n \geq 3$ in M odprta Riemannova ploskev, na kateri definiramo holomorfno 1-formo $\Phi = (\phi_1, \dots, \phi_n)$ z vrednsotmi v $\mathbb{C}^n$, ki je povsod neničelna, in zadošča*

1. $\sum_{j=1}^n \phi_j^2 = 0$,

2. $\Re \int_C \Phi = 0$ *za vse* $[C] \in H_1(M, \mathbb{Z})$.

Potem za poljuben izbor točk $p_0 \in M$ in $x_0 \in \mathbb{R}^n$ predpis $x \colon M \to \mathbb{R}^n$,

$$x(p) = x_0 + \Re \int_{p_0}^{p} \Phi,\ p \in M, \tag{2.23}$$

podaja dobro definirano konformno minimalno imerzijo. Zanjo velja

$$2\partial x = \Phi \quad in \quad g = x^* ds^2 = |dx|^2 = \frac{1}{2}|\Phi|^2. \tag{2.24}$$

Če velja še $\int_C \Phi = 0$ za vse $[C] \in H_1(M, \mathbb{Z})$, potem za poljuben izbor točk $p_0 \in M$ in $z_0 \in \mathbb{C}^n$ predpis $z \colon M \to \mathbb{C}^n$,

$$z(p) = z_0 + \int_{p_0}^{p} \Phi,\ p \in M, \tag{2.25}$$

podaja dobro definirano holomorfno ničelno krivuljo. Zanjo velja

$$\partial z = \Phi \quad in \quad z^* ds^2 = |dz|^2 = |\partial z|^2 = |\Phi|^2. \tag{2.26}$$

Opomba 2.15. Vsaka konformna minimalna imerzija $x\colon M \to \mathbb{R}^n$ je oblike 2.23 in vsaka holomorfna ničelna krivulja $z\colon M \to \mathbb{C}^n$ je oblike 2.25. Prav zato je Weierstrassova predstavitev elegantna metoda za konstrukcijo opisanih preslikav.

Če konformno minimalno imerzijo $x\colon M \to \mathbb{R}^n$ poznamo, potem pripadajočo povsod neničelno holomorfno 1-formo $\Phi = 2\partial x$ z vrednostmi v $\mathbb{C}^n$ imenujemo *Weierstrassovi podatki* preslikave x. Analogno, za holomorfno ničelno krivuljo $z\colon M \to \mathbb{C}^n$ pripadajočo 1-formo $\Phi = \partial z = dz$ imenujemo *Weierstrassovi podatki* preslikave z.

Definicija 2.16. *Jordanov lok* je pot v ravnini, ki je topološko izomorfna intervalu $[0,1]$. *Jordanova krivulja* je ravninska krivulja, ki je topološko ekvivalentna enotski krožnici.

Definicija 2.17. Naj bo M gladka ploskev, K končna unija paroma disjunktnih kompaktnih domen s kosoma zvezno odvedljivimi robovi v M ter $E = S \setminus K^\circ$ unija končno mnogo paroma disjunktnih gladkih Jordanovih lokov in zaprtih Jordanovih krivulj, ki se dotikajo K kvečjemu v svojih krajiščih in sekajo rob K transverzalno. Kompaktno podmnožico v M oblike $S = K \cup E$ imenujemo *dopustna množica.*

Definicija 2.18. Naj bo M povezana odprta Riemannova ploskev ali kompaktna Riemannova ploskev z robom, na kateri je definirana povsod neničelna holomorfna 1-forma Θ. Konformno minimalno imerzijo $x\colon M \to \mathbb{R}^n$ imenujemo:

1. *ravna*, če je slika $x(M)$ vsebovana v afini ravnini v $\mathbb{R}^n$; sicer pravimo, da je x *neravna*;

2. *polna*, če je preslikava $f = 2\partial x/\Theta\colon M \to \mathbf{A}_*^{n-1}$ polna, tj. $\mathbb{C}$-linearna ogrinjača slike $f(M)$ je enaka $\mathbb{C}^n$;

3. *neizrojena*, če slika $x(M)$ ni vsebovana v nobeni hiperravnini v $\mathbb{R}^n$.

V dimenziji $n = 3$ za konformno minimalno imerzijo vsi zgornji pojmi sovpadajo. V višjih dimenzijah ($n \geq 4$) veljata implikaciji

$$\text{polna} \Rightarrow \text{neizrojena} \Rightarrow \text{neravna.}$$

3 Izreki o aproksimaciji in interpolaciji minimalnih ploskev

Naj bosta M in X kompleksni mnogoterosti. Prostor holomorfnih presikav $M \to X$ označimo z $\mathcal{O}(M, X)$. Če je K kompaktna podmnožica v M, množico preslikav $K \to X$ razreda $\mathcal{C}^r$, ki so holomorfne v notranjosti $K^\circ \subset K$, označimo z $\mathcal{A}^r(K, X)$. V primeru, ko je $X = \mathbb{C}$, ustrezna prostora označimo z $\mathcal{O}(M)$ oziroma $\mathcal{A}^r(K)$.

Lema 3.1. *Naj bo M povezana Riemannova ploskev in $\mathbf{A}_*$ punktirana ničelna kvadrika. Holomorfna preslikava $f\colon M \to \mathbf{A}_*$ je neravna natanko tedaj, ko je linearna ogrinjača tangentnih prostorov $T_{f(p)}A \subset T_{f(p)}\mathbb{C}^n$ po vseh $p \in M$ enaka $\mathbb{C}^n$.*

Dokaz 1. Oglejmo si preslikavo $\Phi\colon \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$, definirano s predpisom $\Phi(z) = \sum_{j=1}^{n} z_j^2$. Ničelno kvadriko 2.20 tedaj lahko zapišemo v obliki $\mathbf{A} = \Phi^{-1}(\{0\})$. Njen tangentni prostor v točki $z = (z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{C}^n$ je enak jedru diferenciala, ki kvadriko določa, zato je

$$T_z\mathbf{A} = \ker(d\Phi_z) = \ker(z \mapsto \sum_{j=1}^{n} z_j dz_j).$$

Naj bosta $z,\ w \in \mathbb{C}^n_*$. Potem sta njuna tangentna prostora enaka, $T_z\mathbf{A} = T_w\mathbf{A}$, natanko tedaj, ko je $z_j = \lambda w_j$ za vse $j = 1, \ldots, n$ in nek $\lambda \in \mathbb{C}$, kar je ekvivalentno pogoju, da sta vektorja z in w kolinearna.

Po definiciji je preslikava f neravna, če njena slika $f(M)$ ni vsebovana v nobeni afini kompleksni premici v $\mathbb{C}^n$. Skupaj z zgornjim je slednje ekvivalnetno $Lin\{T_p\mathbf{A};\ p \in M\} = \mathbb{C}^n$, kar smo želeli dokazati.

Literatura