1 Osnovne definicije

Definicija 1. *Naj bo $n \in \mathbb{N}_0$. Topološki prostor M z lastnostmi:*

1. *M je Hausdorffov,*
2. *M je 2-števen,*
3. *M je lokalno evklidski prostor dimenzije n (za vsak $x \in M$ obstajata odprta okolica $U \subset M$ in homeomorfizem $\Phi\colon U \to \Phi(U) \subset \mathbb{R}^n$, kjer je $\Phi(U)$ odprta množica),*

imenujemo topološka mnogoterost *dimenzije n.*

Naj bo M gladka mnogoterost. Za vsako točko $p \in M$ definiramo simetrično pozitivno-definitno bilinearno preslikavo $g_p\colon T_pM \times T_pM \to \mathbb{R}$, ki je gladko odvisna od p. Družino preslikav g_p imenujemo *Riemannova metrika* g na mnogoterosti M. Gladki mnogoterosti, opremljeni z Riemannovo metriko, pravimo *Riemannova mnogoterost.*

Definicija 2. Riemannova ploskev *je kompleksna mnogoterost kompleksne dimenzije* 1*.*

Oglejmo si primer Riemannove metrike, ki jo bomo v nadaljevanju večkrat uporabili. Na Evklidskem prostoru $\mathbb{R}^n$ s koordinatami $x = (x_1, \dots, x_n)$ je definirana *Evklidska metrika*

$$ds^2 = (dx_1)^2 + \cdots + (dx_n)^2, \tag{1}$$

to je Riemannova metrika, ki ustreza identični matriki I_n. Naj bo D domena v $\mathbb{R}^2$ in $x\colon D \to \mathbb{R}^n$ imerzija, podana s predpisom $x(u_1, u_2) = (x_1(u_1, u_2), \dots, x_n(u_1, u_2))$, $(u_1, u_2) \in D$. Pripadajoča metrika na D je enaka

$$g = x^* ds^2 = g_{1,1} du_1^2 + g_{1,2} du_1 du_2 + g_{2,1} du_2 du_1 + g_{2,2} du_2^2, \tag{2}$$

$$g_{1,1} = |x_{u_1}|^2,\ g_{1,2} = g_{2,1} = x_{u_1} \cdot x_{u_2},\ g_{2,2} = |x_{u_2}|^2 \tag{3}$$

in jo imenujemo *prva fundamentalna forma* ploskve $M = x(D)$.

Definicija 3. *Naj bo $f\colon M \to N$ gladka preslikava med gladkima mnogoterostima. Preslikava f se imenuje* imerzija*, če je njen diferencial df_x injektiven v vsaki točki $x \in M$.*

Definicija 4.

1. *Naj bo M gladka kompaktna ploskev z robom, $n \geq 3$ in naj bo preslikava $x\colon M \to \mathbb{R}^n$ imerzija razreda $\mathcal{C}^2$.* Variacija preslikave x s fiksnim robom *je 1-parametrična družina $\mathcal{C}^2$ preslikav*

$$x^t\colon M \to \mathbb{R}^n,\ t \in (-\varepsilon, \varepsilon) \subset \mathbb{R}, \tag{4}$$

če je $x^0 = x$ in za vse t z intervala velja $x^t = x$ na bM.

2. *Naj bo $p \in M$.* Variacijsko vektorsko polje *preslikave x^t je vektorsko polje, definirano kot*

$$E(p,t) = \frac{\partial x^t(p)}{\partial t} \in \mathbb{R}^n. \tag{5}$$

2 Minimalne ploskve

Definicija 5. *Naj bo $x\colon M \to \mathbb{R}^n$ imerzija razreda $\mathcal{C}^2$. Ploskev M imenujemo* minimalna ploskev*, če za vsako kompaktno domeno $D \subset M$ z gladkim robom bD in vsako gladko variacijo x^t preslikave x s fiksnim robom velja*

$$\frac{d}{dt}\Big|_{t=0} Area(x^t(D)) = 0. \tag{6}$$

Ekvivalentno pravimo, da je minimalna ploskev stacionarna točka ploskovnega funkcionala $Area\colon D \to \mathbb{R}$.

Levo stran enakosti 6 imenujemo *prva variacija ploščine* pri $t = 0$. Slednjo z geometrijskimi lastnostmi preslikave x, natančneje ukrivljenostjo, povezuje *prva variacijska formula* v naslednjem izreku.

Izrek 1. *Naj bo M gladka kompaktna ploskev z robom, $n \geq 3$ in $x\colon M \to \mathbb{R}^n$ imerzija razreda $\mathcal{C}^2$. Naj bo $E = \partial x^t/\partial t|_{t=0}$ variacijsko vektorsko polje preslikave x^t pri $t = 0$, $\mathbf{H}$ vektorsko polje povprečne ukrivljenosti preslikave x in dA ploščinski element glede na Riemannovo metriko $x^* ds^2$, definirano na M. Potem za vsako gladko variacijo $x^t\colon M \to \mathbb{R}^n$ imerzije x s fiksnim robom velja*

$$\frac{d}{dt}\Big|_{t=0} Area(x^t(M)) = -2\int_M E \cdot \mathbf{H} dA. \tag{7}$$

Izrek 2. *Naj bo M odprta Riemannova ploskev, $n \geq 3$ in $x = (x_1, \ldots, x_n)\colon M \to \mathbb{R}^n$ konformna imerzija razreda $\mathcal{C}^2$. Naslednje trditve so ekvivalentne:*

1. *x je minimalna ploskev.*
2. *Vektorsko polje povprečne ukrivljenosti preslikave x je ničelno, tj. $\mathbf{H} = 0$.*
3. *x je harmonična, tj. $\Delta x = 0$.*
4. *1-forma $\partial x = (\partial x_1, \ldots, \partial x_n)$ z vrednostmi v $\mathbb{C}^n$ je holomorfna in velja*
$$(\partial x_1)^2 + \cdots + (\partial x_n)^2 = 0. \tag{8}$$
5. *Naj bo θ holomorfna 1-forma na M, ki ni nikjer enaka 0. Potem je preslikava $f = 2\partial x/\theta\colon M \to \mathbb{C}^n$ holomorfna z vrednostmi na* ničelni kvadriki
$$\mathbf{A} = \{(z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{C}^n;\ z_1^2 + \cdots + z_n^2 = 0\}. \tag{9}$$
Nadalje je Riemannova metrika na M, inducirana s konformno imerzijo x, enaka
$$g = x^* ds^2 = |dx_1|^2 + \cdots + |dx_n|^2 = 2(|\partial x_1|^2 + \cdots |\partial x_n|^2). \tag{10}$$

Izrek 3 (Weierstrassova predstavitev konformnih minimalnih ploskev)**.** *Naj bo $n \geq 3$ in M odprta Riemannova ploskev, na kateri definiramo holomorfno 1-formo $\Phi = (\phi_1, \ldots, \phi_n)$ z vrednostmi v $\mathbb{C}^n$, ki je povsod neničelna, in zadošča*

1. *$\sum_{j=1}^n \phi_j^2 = 0$,*
2. *$\Re \int_C \Phi = 0$ za vse $[C] \in H_1(M, \mathbb{Z})$.*

Potem za poljuben izbor točk $p_0 \in M$ in $x_0 \in \mathbb{R}^n$ predpis $x\colon M \to \mathbb{R}^n$,

$$x(p) = x_0 + \Re \int_{p_0}^{p} \Phi, \ p \in M, \tag{11}$$

podaja dobro definirano konformno minimalno imerzijo. Zanjo velja

$$2\partial x = \Phi \quad \text{in} \quad g = x^* ds^2 = |dx|^2 = \frac{1}{2}|\Phi|^2. \tag{12}$$

Vsaka konformna minimalna imerzija $x\colon M \to \mathbb{R}^n$ je oblike 11. Prav zato je Weierstrassova predstavitev elegantna metoda za konstrukcijo opisanih preslikav.

3 Aproksimacija minimalnih ploskev

Definicija 6. *Naj bo K kompaktna podmnožica Riemannove ploskve M. Njena* holomorfna ogrinjača *je množica*

$$\widehat{K}_{\mathcal{O}(M)} = \{p \in M; \ |f(p)| \leq \max_K |f| \ \text{za vse} \ f \in \mathcal{O}(M)\}. \tag{13}$$

Če velja $K = \widehat{K}_{\mathcal{O}(M)}$, množico K imenujemo Rungejeva množica.

Definicija 7. *Naj bo M gladka ploskev, K končna unija paroma disjunktnih kompaktnih domen s kosoma zvezno odvedljivimi robovi v M ter $E = S \setminus K^\circ$ unija končno mnogo paroma disjunktnih gladkih Jordanovih lokov in zaprtih Jordanovih krivulj, ki se dotikajo K kvečjemu v svojih krajiščih in sekajo rob K transverzalno. Kompaktno podmnožico v M oblike $S = K \cup E$ imenujemo* dopustna množica.

Izrek 4 (Rungejev aproksimacijski izrek za Riemannove ploskve)**.** *Naj bo M Riemannova ploskev in K njena kompaktna podmnožica. Potem lahko vsako funkcijo f, ki je holomorfna na okolici K, aproksimiramo enakomerno na K z meromorfnimi funkcijami F na M brez polov na K, ter s holomorfnimi funkcijami na M, če K nima lukenj. Funkcije F lahko izberemo tako, da se z dano funkcijo f na končni množici točk v K ujemajo do izbranega končnega reda in da ima F pole v podmnožici $E \subset M \backslash K$, kjer E vsebuje točko v vsaki luknji množice K.*

Izrek 5 (Bishop-Mergelyanov aproksimacijski izrek)**.** *Naj bo M odprta Riemannova ploskev in K njena kompaktna podmnožica brez lukenj (K je Rungejeva v M). Potem lahko vsako funkcijo v $\mathcal{A}(K)$ aproksimiramo enakomerno na K s funkcijami v $\mathcal{O}(M)$.*

Izrek 6 (Weierstrass-Florackov interpolacijski izrek)**.** *Naj bo M odprta Riemannova ploskev in K njena Rungejeva podmnožica. Naj bo $A = \{a_i\}_{i=1}^{\infty}$ zaprta diskretna podmnožica v M, U odprta podmnožica M, tako da je $A \cup K \subset U$ in f meromorfna funkcija na U z ničlami in poli le v točkah množice A. Potem za izbrane $\varepsilon > 0$ in števila $k_i \in \mathbb{N}$ obstaja meromorfna funkcija F na M, za katero velja:*

1. *$|F(z) - f(z)| < \varepsilon$ za vse $z \in K$,*

2. v točkah a_i je razlika $F - f$ ničelna do reda k_i,

3. F nima ničel in polov na $M \backslash A$.

Trditev 1. *Naj bo M odprta Riemannova ploskev, Θ povsod neničelna holomorfna 1-forma na M, S povezana dopustna množica, ki je Rungejeva v M in $A = \{a_1, \ldots, a_k\} \subset S$. Naj bosta $r, s \in \mathbb{N}$. Potem lahko vsako posplošeno konformno minimalno imerzijo $(x, f\Theta) \in GCMI^r(S, \mathbb{R}^n)$ aproksimiramo s konformnimi minimalnimi imerzijami $X\colon M \to \mathbb{R}^n$ razreda $\mathcal{C}^r$, za katere velja $\mathrm{Flux}_X = \mathrm{Flux}_x$.*

Izrek 7. *Naj bo M odprta Riemannova ploskev, Θ povsod neničelna holomorfna 1-forma na M, $n \geq 3$ in $r \geq 1$. Naj bo S dopustna Rungejeva množicca v M in Λ zaprta diskretna podmnožica M. Naj bo $x\colon S \to \mathbb{R}^n$ posplošena konformna minimalna imerzija razreda $\mathcal{C}^r(S, \mathbb{R}^n)$, ki je konformna minimalna imerzija v okolici vsake točke iz Λ.*

Za izbrane $\varepsilon > 0$, preslikavo $k\colon \Lambda \to \mathbb{N}$ in homomorfizem grup $\mathfrak{p}\colon H_1(M, \mathbb{Z}) \to \mathbb{R}^n$, $\mathfrak{p}|_{H_1(S,\mathbb{Z})} = \mathrm{Flux}_x$, obstaja konformna minimalna imerzija $\tilde{x}\colon M \to \mathbb{R}^n$, za katero velja:

1. $||\tilde{x} - x||_{\mathcal{C}^r(S)} < \varepsilon$;

2. Razlika $\tilde{x} - x$ je ničelna do reda $k(p)$ v vsaki točki $p \in \Lambda$;

3. $Flux_{\tilde{x}} = \mathfrak{p}$ na $H_1(M, \mathbb{Z})$;

4. Če je $n \geq 5$ in je $x\colon \Lambda \to \mathbb{R}^n$ injektivna preslikava, potem je $\tilde{x}$ injektivna imerzija;

5. Če je $n = 4$ in ima x enostavne dvojne točke na množici Λ, potem je $\tilde{x}$ imerzija z enostavnimi dvojnimi točkami na Λ.

4 Primeri

4.1 Katenoid

Katenoid (Euler, 1744; Bonnet, 1860) je edina rotacijska minimalna ploskev v $\mathbb{R}^3$ poleg ravnine. Dobimo jo z rotacijo katenoidne krivulje v $\mathbb{R}^2$ (grafa *cosh*) okoli osi v $\mathbb{R}^3$. Parametrizacija $x = (x_1, x_2, x_3)\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $x(u, v) = (\cos u \cdot \cosh v, \sin u \cdot \cosh v, v)$.

4.2 Helikoid

Parametrizacija $x\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $x(u, v) = (\sin u \cdot \sinh v, -\cos u \cdot \sinh v, u)$.