Minimalne ploskve

Tjaša Vrhovnik

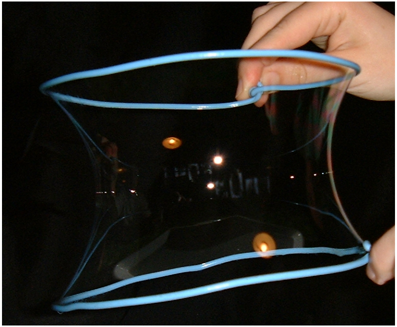
Mentor: prof. dr. Franc Forstnerič
Univerza v Ljubljani
Fakulteta za matematiko in fiziko
Oddelek za matematiko

10. maj 2020

Načrt

Motivacija

- ploskve z lokalno minimalno ploščino
- Euler, Lagrange, Meusnier (18. st.)
- Plateaujev problem
- Riemannove ploskve



Osnovne definicije

Definicija

Naj bo $n \in \mathbb{N}_0$. Topološki prostor M z lastnostmi:

1. *M je Hausdorffov,*
2. *M je 2-števen,*
3. *M je lokalno evklidski prostor dimenzije n (za vsak $x \in M$ obstajata odprta okolica $U \subset M$ in homeomorfizem $\phi : U \to \phi(U) \subset \mathbb{R}^n$, kjer je $\phi(U)$ odprta množica),*

imenujemo topološka mnogoterost *dimenzije n.*

Definicija

Riemannova ploskev *je kompleksna mnogoterost kompleksne dimenzije* 1.

Osnovne definicije

Definicija

Naj bo $n \in \mathbb{N}_0$. Topološki prostor M z lastnostmi:

1. *M je Hausdorffov,*
2. *M je 2-števen,*
3. *M je lokalno evklidski prostor dimenzije n (za vsak $x \in M$ obstajata odprta okolica $U \subset M$ in homeomorfizem $\phi : U \to \phi(U) \subset \mathbb{R}^n$, kjer je $\phi(U)$ odprta množica),*

imenujemo topološka mnogoterost *dimenzije n.*

Definicija

Riemannova ploskev *je kompleksna mnogoterost kompleksne dimenzije* 1*.*

Definicija

Naj bo $f : M \to N$ gladka preslikava med gladkima mnogoterostima. Preslikava f se imenuje imerzija, *če je njen diferencial df_x injektiven v vsaki točki $x \in M$.*

Na prostoru $\mathbb{R}^n$ s koordinatami $x = (x_1, \dots, x_n)$ je definirana *Evklidska metrika*

$$ds^2 = (dx_1)^2 + \cdots + (dx_n)^2. \tag{1}$$

Naj bo D domena v $\mathbb{R}^2$ in $x : D \to \mathbb{R}^n$ imerzija, podana s predpisom $x(u_1, u_2) = (x_1(u_1, u_2), \dots, x_n(u_1, u_2))$, $(u_1, u_2) \in D$. Pripadajoča metrika na D je enaka

$$g = x^* ds^2 = g_{1,1} du_1^2 + g_{1,2} du_1 du_2 + g_{2,1} du_2 du_1 + g_{2,2} du_2^2, \tag{2}$$

$$g_{1,1} = |x_{u_1}|^2, \; g_{1,2} = g_{2,1} = x_{u_1} \cdot x_{u_2}, \; g_{2,2} = |x_{u_2}|^2. \tag{3}$$

Definicija

Naj bo $f : M \to N$ gladka preslikava med gladkima mnogoterostima. Preslikava f se imenuje imerzija*, če je njen diferencial df_x injektiven v vsaki točki $x \in M$.*

Na prostoru $\mathbb{R}^n$ s koordinatami $x = (x_1, \ldots, x_n)$ je definirana *Evklidska metrika*

$$ds^2 = (dx_1)^2 + \cdots + (dx_n)^2. \tag{1}$$

Naj bo D domena v $\mathbb{R}^2$ in $x : D \to \mathbb{R}^n$ imerzija, podana s predpisom $x(u_1, u_2) = (x_1(u_1, u_2), \ldots, x_n(u_1, u_2))$, $(u_1, u_2) \in D$. Pripadajoča metrika na D je enaka

$$g = x^* ds^2 = g_{1,1} du_1^2 + g_{1,2} du_1 du_2 + g_{2,1} du_2 du_1 + g_{2,2} du_2^2, \tag{2}$$

$$g_{1,1} = |x_{u_1}|^2, \; g_{1,2} = g_{2,1} = x_{u_1} \cdot x_{u_2}, \; g_{2,2} = |x_{u_2}|^2. \tag{3}$$

Definicija

1. *Naj bo M gladka kompaktna ploskev z robom, $n \geq 3$ in naj bo preslikava $x: M \to \mathbb{R}^n$ imerzija razreda $\mathscr{C}^2$.* Variacija preslikave x s fiksnim robom *je 1-parametrična družina $\mathscr{C}^2$ preslikav*

$$x^t: M \to \mathbb{R}^n,\ t \in (-\varepsilon, \varepsilon) \subset \mathbb{R}, \tag{4}$$

če je $x^0 = x$ in za vse t z intervala velja $x^t = x$ na bM.

2. *Naj bo $p \in M$.* Variacijsko vektorsko polje *preslikave x^t je vektorsko polje, definirano kot*

$$E(p,t) = \frac{\partial x^t(p)}{\partial t} \in \mathbb{R}^n. \tag{5}$$

Definicija

Naj bo $x: M \to \mathbb{R}^n$ imerzija razreda $\mathscr{C}^2$. Sliko $x(M)$ imenujemo minimalna ploskev, *če za vsako kompaktno domeno $D \subset M$ z gladkim robom bD in vsako gladko variacijo x^t preslikave x s fiksnim robom velja*

$$\frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} Area(x^t(D)) = 0. \tag{6}$$

Ekvivalentno pravimo, da je minimalna ploskev stacionarna točka ploskovnega funkcionala Area.

Izrek (Prva variacijska formula)

Naj bo M gladka kompaktna ploskev z robom, $n \geq 3$ in $x : M \to \mathbb{R}^n$ imerzija razreda $\mathscr{C}^2$. Naj bo $E = \partial x^t / \partial t|_{t=0}$ variacijsko vektorsko polje preslikave x^t pri $t = 0$, $\mathbf{H}$ vektorsko polje povprečne ukrivljenosti preslikave x in dA ploščinski element glede na Riemannovo metriko $x^* ds^2$, definirano na M. Potem za vsako gladko variacijo $x^t : M \to \mathbb{R}^n$ imerzije x s fiksnim robom velja

$$\frac{d}{dt}\Big|_{t=0} Area(x^t(M)) = -2 \int_M E \cdot \mathbf{H} dA. \tag{7}$$

Izrek

Naj bo M odprta Riemannova ploskev, $n \geq 3$ in $x = (x_1, \ldots, x_n) : M \to \mathbb{R}^n$ konformna imerzija razreda $\mathscr{C}^2$. Ekvivalentno je:

1. *x je minimalna ploskev.*
2. *Vektorsko polje povprečne ukrivljenosti preslikave x je ničelno.*
3. *x je harmonična.*
4. *1-forma $\partial x = (\partial x_1, \ldots, \partial x_n)$ z vrednostmi v $\mathbb{C}^n$ je holomorfna in velja*
$$(\partial x_1)^2 + \cdots + (\partial x_n)^2 = 0. \tag{8}$$
5. *Naj bo θ holomorfna 1-forma na M, ki ni nikjer enaka 0. Potem je preslikava $f = 2\partial x/\theta : M \to \mathbb{C}^n$ holomorfna z vrednostmi v ničelni kvadriki*
$$\mathbf{A} = \{(z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{C}^n;\ z_1^2 + \cdots + z_n^2 = 0\}. \tag{9}$$
Nadalje je Riemannova metrika na M, inducirana s konformno imerzijo x, enaka
$$g = x^* ds^2 = |dx_1|^2 + \cdots + |dx_n|^2 = 2(|\partial x_1|^2 + \cdots |\partial x_n|^2). \tag{10}$$

Izrek (Weierstrassova predstavitev konformnih minimalnih ploskev)

Naj bo $n \geq 3$ in M odprta Riemannova ploskev, na kateri definiramo holomorfno 1-formo $\phi = (\phi_1, \dots, \phi_n)$ z vrednostmi v $\mathbb{C}^n$, ki je povsod neničelna, in zadošča

1. $\sum_{j=1}^n \phi_j^2 = 0$,
2. $\Re \int_C \phi = 0$ *za vse* $[C] \in H_1(M, \mathbb{Z})$.

Potem za poljuben izbor točk $p_0 \in M$ in $x_0 \in \mathbb{R}^n$ predpis $x\colon M \to \mathbb{R}^n$,

$$x(p) = x_0 + \Re \int_{p_0}^{p} \phi, \; p \in M, \tag{11}$$

podaja dobro definirano konformno minimalno imerzijo. Zanjo velja

$$2\partial x = \phi \quad \text{in} \quad g = x^* ds^2 = |dx|^2 = \frac{1}{2}|\phi|^2. \tag{12}$$

Definicija

Naj bo M gladka ploskev, K končna unija paroma disjunktnih kompaktnih domen s kosoma zvezno odvedljivimi robovi v M ter $E = S \setminus K^\circ$ unija končno mnogo paroma disjunktnih gladkih Jordanovih lokov in zaprtih Jordanovih krivulj, ki se dotikajo K kvečjemu v svojih krajiščih in sekajo rob K transverzalno. Kompaktno podmnožico v M oblike $S = K \cup E$ imenujemo dopustna množica*.*

Definicija

Naj bo $x : M \to \mathbb{R}^n$ harmonična preslikava. Njen pretok *je homomorfizem grup* $\mathrm{Flux}_x : H_1(M, \mathbb{Z}) \to \mathbb{R}^n$*, definiran s predpisom*

$$\mathrm{Flux}_x([C]) = \int_C d^c x. \tag{13}$$

Definicija

Naj bo M gladka ploskev, K končna unija paroma disjunktnih kompaktnih domen s kosoma zvezno odvedljivimi robovi v M ter $E = S \setminus K^\circ$ unija končno mnogo paroma disjunktnih gladkih Jordanovih lokov in zaprtih Jordanovih krivulj, ki se dotikajo K kvečjemu v svojih krajiščih in sekajo rob K transverzalno. Kompaktno podmnožico v M oblike $S = K \cup E$ imenujemo dopustna množica.

Definicija

Naj bo $x : M \to \mathbb{R}^n$ harmonična preslikava. Njen pretok *je homomorfizem grup* $\mathrm{Flux}_x : H_1(M, \mathbb{Z}) \to \mathbb{R}^n$, *definiran s predpisom*

$$\mathrm{Flux}_x([C]) = \int_C d^c x. \tag{13}$$

Definicija

Naj bo $S = K \cup E$ dopustna podmnožica Riemannove ploskve M in θ povsod neničelna holomorfna 1-forma, definirana v okolici $S \subset M$. Naj bosta $n \geq 3$ in $r \in \mathbb{N}$. Posplošena konformna minimalna imerzija *$S \to \mathbb{R}^n$ razreda $\mathscr{C}^r$ je par $(x, f\theta)$, kjer je $x \colon S \to \mathbb{R}^n$ preslikava razreda $\mathscr{C}^r$, njena zožitev na $S^\circ = K^\circ$ je konformna minimalna imerzija in preslikava $f \in \mathscr{A}^{r-1}(S, \mathbf{A}_*)$ zadošča naslednjima pogojema:*

1. *na množici K velja $f\theta = 2\partial x$;*
2. *za vsako gladko pot α v M, ki parametrizira povezano komponento $E = \overline{S \setminus K}$ velja $\Re(\alpha^*(f\theta)) = \alpha^*(dx) = d(x \circ \alpha)$.*

Izreki o aproksimaciji in interpolaciji

Izrek (Bishop-Mergelyanov aproksimacijski izrek)

Naj bo M odprta Riemannova ploskev in K njena kompaktna podmnožica brez lukenj (K je Rungejeva v M). Potem lahko vsako funkcijo v $\mathscr{A}(K)$ aproksimiramo enakomerno na K s funkcijami v $\mathscr{O}(M)$.

Izrek (Weierstrass-Florackov interpolacijski izrek)

Naj bo M odprta Riemannova ploskev in K njena Rungejeva podmnožica. Naj bo $A = \{a_i\}_{i=1}^{\infty}$ zaprta diskretna podmnožica v M, U odprta podmnožica M, tako da je $A \cup K \subset U$ in f meromorfna funkcija na U z ničlami in poli le v točkah množice A. Potem za izbrane $\varepsilon > 0$ in števila $k_i \in \mathbb{N}$ obstaja meromorfna funkcija F na M, za katero velja:

1. $|F(z) - f(z)| < \varepsilon$ *za vse* $z \in K$,
2. *v točkah* a_i *je razlika* $F - f$ *ničelna do reda* k_i,
3. F *nima ničel in polov na* $M \backslash A$.

Trditev

Naj bo M odprta Riemannova ploskev in θ povsod neničelna holomorfna 1-forma na M. Naj bo S povezana dopustna množica, ki je Rungejeva v M, in $A = \{a_1, \dots, a_k\} \subset S$. Naj bosta $r, s \in \mathbb{N}$.
Potem lahko vsako posplošeno konformno minimalno imerzijo $(x, f\theta) \in GCMI^r(S, \mathbb{R}^n)$ aproksimiramo s konformnimi minimalnimi imerzijami $X : M \to \mathbb{R}^n$ razreda $\mathscr{C}^r$, za katere velja $\mathrm{Flux}_X = \mathrm{Flux}_x$.

Izrek (Mergelyanov izrek za konformne minimalne ploskve)

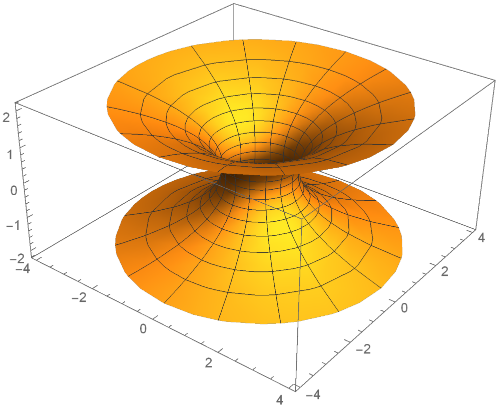
Naj bo M odprta Riemannova ploskev, θ povsod neničelna holomorfna 1-forma na M, $n \geq 3$ in $r \geq 1$. Naj bo S dopustna Rungejeva množica v M in A zaprta diskretna podmnožica M. Naj bo $x : S \to \mathbb{R}^n$ posplošena konformna minimalna imerzija razreda $\mathscr{C}^r(S, \mathbb{R}^n)$, ki je konformna minimalna imerzija v okolici vsake točke iz A.

Za izbrane $\varepsilon > 0$, preslikavo $k : A \to \mathbb{N}$ in homomorfizem grup $\mathfrak{p} : H_1(M, \mathbb{Z}) \to \mathbb{R}^n$, $\mathfrak{p}|_{H_1(S,\mathbb{Z})} = \mathrm{Flux}_x$, obstaja konformna minimalna imerzija $\tilde{x} : M \to \mathbb{R}^n$, za katero velja:

1. $||\tilde{x} - x||_{\mathscr{C}^r(S)} < \varepsilon$.
2. *Razlika $\tilde{x} - x$ je ničelna do reda $k(p)$ v vsaki točki $p \in A$.*
3. *$\mathrm{Flux}_{\tilde{x}} = \mathfrak{p}$ na $H_1(M, \mathbb{Z})$.*
4. *Če je $n \geq 5$ in je $x : A \to \mathbb{R}^n$ injektivna preslikava, potem je $\tilde{x}$ injektivna imerzija.*
5. *Če je $n = 4$ in ima x enostavne dvojne točke na množici A, potem je $\tilde{x}$ imerzija z enostavnimi dvojnimi točkami na A.*

KATENOIDA

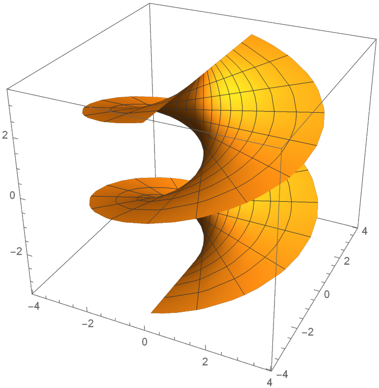
$$x : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$$
$$x(u, v) = (\cos u \cdot \cosh v, \sin u \cdot \cosh v, v)$$



HELIKOID

$$x : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$$

$$x(u, v) = (\sin u \cdot \sinh v, -\cos u \cdot \sinh v, u)$$



Primeri