

UNIVERZA V LJUBLJANI  
FAKULTETA ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

Matematika – 2. stopnja

Tjaša Vrhovnik

## **MINIMALNE PLOSKVE**

Magistrsko delo

Mentor: prof. dr. Franc Forstnerič

Ljubljana, 2021



# Zahvala



# Kazalo

Program dela	vii
<b>1 Uvod</b>	<b>1</b>
<b>2 Osnovni pojmi</b>	<b>1</b>
2.1 Mnogoterosti . . . . .	1
2.2 Vektorska polja in diferencialne 1-forme . . . . .	3
2.3 Ukrivljenost ploskve . . . . .	5
2.4 Holomorfne in harmonične funkcije . . . . .	6
2.5 Aproksimacijski izreki za Riemannove ploskve . . . . .	6
2.6 Variacija ploščine . . . . .	7
2.7 Weierstrassova formula . . . . .	8
<b>3 Izreki o aproksimaciji in interpolaciji minimalnih ploskev</b>	<b>10</b>



# Program dela

## Osnovna literatura

Literatura mora biti tukaj posebej samostojno navedena (po pomembnosti) in ne le citirana. V tem razdelku literature ne oštevilčimo po svoje, ampak uporabljamo okolje itemize in ukaz plancite, saj je celotna literatura oštevilčena na koncu.

[?]

[?]

[?]

[?]

Podpis mentorja:





## Minimalne ploskve

### POVZETEK

Tukaj napišemo povzetek vsebine. Sem sodi razlaga vsebine in ne opis tega, kako je delo organizirano.

### English translation of the title

### ABSTRACT

An abstract of the work is written here. This includes a short description of the content and not the structure of your work.

**Math. Subj. Class. (2010):** oznake kot 74B05, 65N99, na voljo so na naslovu <http://www.ams.org/msc/msc2010.html>

**Ključne besede:**

**Keywords:**



# 1 Uvod

## 2 Osnovni pojmi

### 2.1 Mnogoterosti

**Definicija 2.1.** Naj bo  $n \in \mathbb{N}$ . Topološki prostor  $M$  z lastnostmi:

1.  $M$  je Hausdorffov,
2.  $M$  je 2-števen,
3.  $M$  je lokalno evklidski prostor dimenzije  $n$  (za vsak  $p \in M$  obstajata odprta okolica  $U \subset M$  in homeomorfizem  $\Phi: U \rightarrow V \subset \mathbb{R}^n$ , kjer je  $V$  odprta množica),

imenujemo *topološka mnogoterost* dimenzije  $n$ .

Na topološki mnogoterosti  $M$  dimenzije  $n$  definiramo *atlas*  $\mathcal{U} = \{(U_i, \Phi_i); i \in I\}$  kot družino parov  $(U_i, \Phi_i)$ , kjer je  $\{U_i\}_{i \in I}$  odprto pokritje mnogoterosti  $M$ , preslikave  $\Phi_i: U_i \rightarrow \Phi_i(U_i) \subset \mathbb{R}^n$  pa so homeomorfizmi za vse  $i$ . Par  $(U_i, \Phi_i)$  imenujemo *lokalna karta*. Vzemimo lokalni karti  $(U_i, \Phi_i)$  in  $(U_j, \Phi_j)$ ,  $i \neq j$ , za kateri velja  $U_{ij} = U_i \cap U_j \neq \emptyset$ . Difeomorfizmu  $\Phi_{ij} = \Phi_j \circ \Phi_i^{-1}: \Phi_i(U_{ij}) \rightarrow \Phi_j(U_{ij})$  med odprtima podmnožicama  $\mathbb{R}^n$  pravimo *prehodna preslikava* med lokalnima kartama. Atlas je razreda  $\mathcal{C}^r$  za  $r \geq 1$ , kadar so prehodne preslikave med vsemi lokalnimi kartami difeomorfizmi razreda  $\mathcal{C}^r$ . V tem primeru rečemo, da je  $M$  *mnogoterost razreda  $\mathcal{C}^r$* . V posebnem gladek atlas določa gladko mnogoterost.

**Definicija 2.2.** Naj bo  $X$  mnogoterost razreda  $\mathcal{C}^r$  razsežnosti  $\dim X = n$  in  $M \subset X$  njena podmnožica. Če za vsako točko  $p \in M$  obstaja lokalna karta  $(U, \Phi)$  glede na atlas  $\mathcal{U}$  mnogoterosti  $X$ , tako da je preslikava  $\Phi: U \rightarrow V \subset \mathbb{R}^n$  homeomorfizem in velja  $\Phi(M \cap U) = V \cap (\mathbb{R}^m \times \{0\}^{n-m})$ , potem  $M$  imenujemo *podmnogoterost* razreda  $\mathcal{C}^r$  razsežnosti  $\dim M = m$ .

**Definicija 2.3** (Orientacija mnogoterosti). Naj bo  $M$  gladka mnogoterost in  $\mathcal{U}$  pripadajoč gladek atlas. Lokalni karti  $(U, \phi)$  in  $(V, \psi)$  določata isto orientacijo na  $M$ , če za poljubno točko  $p \in U \cap V \neq \emptyset$  velja  $\det(d(\psi \circ \phi^{-1})_{\phi(p)}) > 0$ . Kadar poljubni lokalni karti glede na izbrani atlas  $\mathcal{U}$  določata isto orientacijo, pravimo, da je atlas  $\mathcal{U}$  *orientiran*. Nadalje je mnogoterost *orientabilna*, če premore orientiran atlas. *Orientacija* mnogoterosti  $M$  je izbor maksimalnega orientiranega atlasa na  $M$ .

Definirati želimo še tangentni prostor mnogoterosti. Naj bo  $M$  gladka mnogoterost in izberimo atlas  $\mathcal{U} = \{(U_i, \Phi_i); i \in I\}$  na njej. Naj bo točka  $p \in U_i \subset M$  za nek indeks  $i$ . Gladki krivulji<sup>1</sup>  $\gamma_1, \gamma_2: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$  sta *ekvivalentni*, če izpolnjujeta pogoja  $\gamma_1(0) = \gamma_2(0) = p$  in  $\frac{d}{dt}|_{t=0} \Phi_i(\gamma_1(t)) = \frac{d}{dt}|_{t=0} \Phi_i(\gamma_2(t))$  za vse  $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ . Ekvivalenco krivulj označimo z  $\gamma_1 \sim \gamma_2$ <sup>2</sup>.

<sup>1</sup>Krivulja  $\gamma_j$  je gladka, če je preslikava  $\Phi_i \circ \gamma_j: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $j = 1, 2$ , gladka v običajnem smislu.

<sup>2</sup>Relacija  $\sim$  je ekvivalenčna relacija.

**Definicija 2.4.** Naj bo  $M$  mnogoterost in  $p \in M$  točka na njej. *Tangentni vektor*  $v_p$  na  $M$  v točki  $p$  ustreza ekvivalenčnemu razredu  $[\gamma]$  krivulje  $\gamma: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$ , za katero velja  $\gamma(0) = p$ .

Unija vseh tangentnih vektorjev na  $M$  v točki  $p$  določa *tangentni prostor*  $T_p M$  mnogoterosti  $M$  v točki  $p$ .

Naj bosta  $M$  in  $N$  mnogoterosti dimenzij  $\dim M = m$ ,  $\dim N = n$  ( $m, n \in \mathbb{N}$ ). Naj bo  $r \geq 0$ . Pravimo, da je zvezna preslikava  $f: M \rightarrow N$  *razreda  $\mathcal{C}^r$  v točki  $p \in M$* , če obstajata taki  $\mathcal{C}^r$  karti  $(U, \Phi)$  na  $M$  v okolici točke  $p \in M$  in  $(V, \Psi)$  na  $N$  v okolici točke  $f(p) \in N$ , da je preslikava  $F = \psi \circ f \circ \Phi^{-1}$  razreda  $\mathcal{C}^r$  v okolici točke  $\Phi(p)$ . Če to velja za poljubno točko  $p \in M$ , je  $f$  *razreda  $\mathcal{C}^r$* ; pišemo  $f \in \mathcal{C}^r(M, N)$ .

Vzemimo gladki (oz. razreda  $\mathcal{C}^r$ ,  $r \geq 1$ ) mnogoterosti  $M$  in  $N$  ter točko  $p \in M$ . *Diferencial* gladke (oz. razreda  $\mathcal{C}^r$ ) preslikave  $f: M \rightarrow N$  je linearna preslikava  $df: T_p M \rightarrow T_{f(p)} N$ , definirana s predpisom

$$(df_p)[\gamma] = [f \circ \gamma].$$

**Definicija 2.5.** Naj bo  $f: M \rightarrow N$  gladka preslikava med gladkima mnogoterostima. Preslikava  $f$  se imenuje

1. *imerzija* v točki  $p \in M$ , če je njen diferencial  $df_p: T_p M \rightarrow T_{f(p)} N$  injektiven;
2. *submerzija* v točki  $p \in M$ , če je njen diferencial  $df_p$  surjektiven;
3. *lokalni difeomorfizem* v točki  $p \in M$ , če obstajata taki okolici  $U \subset M$  za  $p$  in  $V \subset N$  za  $f(p)$ , da je zožitev  $f|_U: U \rightarrow V$  difeomorfizem;
4. *vložitev*, če je  $f$  injektivna preslikava in slika  $f(M) \subset N$  podmnogoterost.

**Opomba 2.6.** Z uporabo izreka o implicitni preslikavi dokažemo naslednje: Če je  $f: M \rightarrow N$  submerzija v okolici točke  $p \in U$  ( $U \subset M$  odprta), potem je prasluka  $f^{-1}f(p)$  podmnogoterost v  $M$  razsežnosti  $\dim M - \dim N$ .

**Definicija 2.7.** Naj bo  $M$  gladka mnogoterost. Za vsako točko  $p \in M$  definiramo simetrično pozitivno-definitno bilinearno preslikavo  $g_p: T_p M \times T_p M \rightarrow \mathbb{R}$ , ki je gladko odvisna od  $p$ . Družino preslikav  $g_p$  imenujemo *Riemannova metrika*  $g$  na mnogoterosti  $M$ . Gladki mnogoterosti, opremljeni z Riemannovo metriko, pravimo *Riemannova mnogoterost*.

Izkaže se, da vsaka mnogoterost razreda  $\mathcal{C}^{r+1}$  premore Riemannovo metriko razreda  $\mathcal{C}^r$ .

Naj bo  $M$  domena v  $\mathbb{R}^n$  s koordinatami  $x = (x_1, \dots, x_n)$ . Riemannova metrika na  $M$  je tedaj oblike

$$g_p = \sum_{i,j=1}^n g_{i,j}(p) dx_i dx_j, \quad p \in M, \quad (2.1)$$

kjer je  $G(p) = [g_{i,j}(p)]_{i,j=1}^n$  simetrična pozitivno-definitna matrika za vse  $p \in M$ . Za tangentna vektorja  $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ ,  $\eta = (\eta_1, \dots, \eta_n) \in \mathbb{R}^n$  velja

$$g_p(\xi, \eta) = \sum_{i,j=1}^n g_{i,j}(p) \xi_i \eta_j = G(p) \xi \cdot \eta. \quad (2.2)$$

Vzemimo gladko imerzijo  $x: M \rightarrow \widetilde{M}$  in Riemannovo metriko  $\tilde{g}$  na  $\widetilde{M}$ . *Povlečeno metriko*  $g = x^*\tilde{g}$  na  $M$ , definirano na paru tangentskih vektorjev  $\xi, \eta \in T_p M$ , podaja predpis

$$g_p(\xi, \eta) = \tilde{g}_{x(p)}(dx_p(\xi), dx_p(\eta)). \quad (2.3)$$

Če je metrika  $\tilde{g}$  razreda  $\mathcal{C}^r$  in imerzija  $x$  razreda  $\mathcal{C}^{r+1}$ , potem je tudi povlečena metrika  $g = x^*\tilde{g}$  razreda  $\mathcal{C}^r$ .

**Primer 2.8** (Prva fundamentalna forma). Oglejmo si primer Riemannove metrike na realnem  $n$ -razsežnem Evklidskem prostoru  $\mathbb{R}^n$ . Če izberemo standardne koordinate  $x = (x_1, \dots, x_n)$ , *Evklidsko metriko* definira predpis

$$ds^2 = (dx_1)^2 + \dots + (dx_n)^2; \quad (2.4)$$

to je Riemannova metrika, ki ustreza identični matriki  $I_n$ . Naj bo  $D$  domena v  $\mathbb{R}^2$  in  $x: D \rightarrow \mathbb{R}^n$  imerzija, podana s predpisom  $x(u_1, u_2) = (x_1(u_1, u_2), \dots, x_n(u_1, u_2))$  za  $(u_1, u_2) \in D$ . Pripadajoča metrika na  $D$  je enaka

$$g = x^*ds^2 = g_{1,1}du_1^2 + g_{1,2}du_1du_2 + g_{2,1}du_2du_1 + g_{2,2}du_2^2, \quad (2.5)$$

$$g_{1,1} = |x_{u_1}|^2, \quad g_{1,2} = g_{2,1} = x_{u_1} \cdot x_{u_2}, \quad g_{2,2} = |x_{u_2}|^2 \quad (2.6)$$

in jo imenujemo *prva fundamentalna forma* ploskve  $M = x(D)$ .

**Definicija 2.9.** *Riemannova ploskev* je kompleksna mnogoterost kompleksne dimenzije 1.

## 2.2 Vektorska polja in diferencialne 1-forme

**Definicija 2.10.** Naj bo  $r \geq 1$  ter  $E$  in  $B$  mnogoterosti razreda  $\mathcal{C}^r$ . Surjektivno preslikavo  $\pi: E \rightarrow B$  imenujemo realen *vektorski sveženj* ranga  $n$  in razreda  $\mathcal{C}^r$ , če

1. je vsako vlakno  $\pi^{-1}(b) = E_b$ ,  $b \in B$ ,  $n$ -razsežen realen vektorski prostor:  $E_b \cong \mathbb{R}^n$ ,
2. za vsak  $b \in B$  obstajata okolica  $b \in U \subset B$  in difeomorfizem  $\tau: E|_U \rightarrow U \times \mathbb{R}^n$  razreda  $\mathcal{C}^r$ , tako da je za vsak  $x \in U$  preslikava  $\tau_x: E_x \rightarrow \{x\} \times \mathbb{R}^n$  linearni izomorfizem. Preslikavi  $\tau_x$  pravimo *lokalna trivializacija*.

Če ima vlakno strukturo kompleksnega vektorskega prostora, na ustreznih mestih v definiciji zamenjamo  $\mathbb{R}^n$  s  $\mathbb{C}^n$  – v tem primeru dobimo kompleksen vektorski sveženj.

**Definicija 2.11.** *Prerez* vektorskega svežnja  $\pi: E \rightarrow B$  je preslikava  $s: B \rightarrow E$ , za katero velja  $\pi \circ s = id_B$ . Ekvivalentno, za vsak  $b \in B$  je  $s(b) \in \pi^{-1}(b) = E_b$ , torej prerez vsako točko baznega prostora slika v točko v vlaknu nad  $b$ .

Omenimo poseben primer vektorskega svežnja, ki bo pomemben v nadaljevanju. Naj bo  $X$  mnogoterost razreda  $\mathcal{C}^r$  z  $r \geq 1$ . Njen *tangentni sveženj* je disjunktna unija tangentskih prostorov na  $X$  v točkah  $x \in X$ :

$$TX = \bigsqcup_{x \in X} T_x X.$$

Tangentni sveženj je vektorski sveženj ranga  $n = \dim X$  in razreda  $\mathcal{C}^{r-1}$ .

**Definicija 2.12.** Naj bo  $X$  mnogoterost razreda  $\mathcal{C}^r$ , kjer je  $r \geq 1$ . Prerez njenega tangentnega svežnja, to je preslikava

$$V: X \rightarrow TX, \quad V(x) = V_x \in T_x X, \quad x \in X,$$

se imenuje *vektorsko polje* na  $X$ . Prostor vektorskih polj na  $X$  označimo z  $\Gamma(X)$ .

**Definicija 2.13.** Naj bo  $V$  vektorsko polje na mnogoterosti  $X$  in  $x \in X$  točka, v kateri je vektorsko polje neničelno. Pot  $\gamma_x: (-\varepsilon, \varepsilon) \subset \mathbb{R} \rightarrow X$  razreda  $\mathcal{C}^1$  je *integralna krivulja* vektorskega polja  $V$  skozi  $x$ , če je  $\gamma_x(0) = x$  in

$$\dot{\gamma}_x(t) = V(\gamma_x(t)) \in T_{\gamma_x(t)} X, \quad t \in (-\varepsilon, \varepsilon).$$

Naj bo  $U \subset X$  odprta množica, na kateri je vektorsko polje  $V$  neničelno. Tok vektorskega polja  $V$  na  $U$  je 1-parametrična družina preslikav  $\Phi_t: U \rightarrow \Phi_t(U)$ , definiranih s predpisi  $\Phi_t(x) = \gamma_x(t)$ .

Vektorsko polje  $V$  lahko v lokalnih koordinatah  $x = (x_1, \dots, x_n)$  na odprti podmnožici  $U \subset X$  zapišemo kot

$$V(m) = \sum_{i=1}^n V_i(m) \frac{\partial}{\partial x_i}, \quad (2.7)$$

kjer so  $V_i$  realne funkcije na  $U$ , diferenciali  $\frac{\partial}{\partial x_i}$  pa v vsaki točki  $m \in U$  sestavljajo bazo tangentnega prostora  $T_m X$ . Pot  $\gamma(t) = (\gamma_1(t), \dots, \gamma_n(t))$  na  $X$  je po definiciji integralna krivulja vektorskega polja  $V$  natanko takrat, ko zadošča enakosti

$$\dot{\gamma}(t) = \sum_{i=1}^n V_i(\gamma(t)) \frac{\partial}{\partial x_i}.$$

Rešujemo sistem  $n$  navadnih diferencialnih enačb ( $i \in \{1, \dots, n\}$ )

$$\dot{\gamma}_i(t) = V_i(\gamma_1(t), \dots, \gamma_n(t)),$$

katerega lokalna rešitev je tok vektorskega polja  $V$  na  $X$ ,  $\Phi_t(m)$ . Po eksistenčnem izreku za navadne diferencialne enačbe lokalna rešitev vedno obstaja.

Zanimajo nas duali tangentnih prostorov ter prerezi pripradajočih svežnjev.

**Definicija 2.14.** Naj bo  $X$  gladka mnogoterost. Dualni sveženj njenega tangentnega svežnja imenujemo *kotangentni sveženj*

$$T^*X = (TX)^* = \bigsqcup_{x \in X} T_x^* X. \quad (2.8)$$

Tu je  $T_x^* X$  *kotangentni prostor* mnogoterosti  $X$  v točki  $x \in X$ , ki je sestavljen iz linearnih funkcionalov  $T_x^* X \rightarrow \mathbb{R}$ .

(Diferencialna) 1-forma na mnogoterosti  $X$  je prerez  $\alpha: X \rightarrow T^*X$  kotangentnega svežnja. Prostor diferencialnih 1-form na  $X$  označimo z  $\Omega^1(X)$ .

Diferencialno 1-formo  $\omega \in \Omega^1(X)$  imenujemo *eksaktna*, če velja  $\omega = df$  za neko funkcijo  $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ .

Podobno kot vektorska polja lahko tudi 1-forme predstavimo lokalno. Naj bo  $U$  odprta podmnožica v  $X$  z lokalnimi koordinatami  $x = (x_1, \dots, x_n)$ . Če so  $a_i$  realne funkcije na  $U$  in  $dx_i$  diferenciali koordinatnih funkcij, ki v vsaki točki  $m \in U$  tvorijo bazo kotangentnega prostora  $T_m^*X$ , potem ima poljubna 1-forma na  $U$  obliko

$$\alpha(m) = \sum_{i=1}^n a_i(m) dx_i. \quad (2.9)$$

Baza kotangentnega prostora je dualna bazi tangentnega prostora; natančneje,

$$dx_i(m) \left( \frac{\partial}{\partial x_j}(m) \right) = \delta_{ij}.$$

### 2.3 Ukrivljenost ploskve

Naj bo  $M$  ploskev,  $n \geq 3$  in  $x: M \rightarrow \mathbb{R}^n$  imerzija razreda  $\mathcal{C}^2$ . Izberimo lokalno karto  $(U, \phi)$  na  $M$  in koordinate  $u = (u_1, u_2) \in U$ , tako da je zožitev  $x|_U: U \rightarrow \mathbb{R}^n$  vložitev na orientabilno ploskev  $S = x(U) \subset \mathbb{R}^n$ . Izberimo točko  $q \in U$  in s  $p = x(q) \in S$  označimo njeno sliko na ploskvi  $S$ . Naj bo  $t \mapsto (u_1(t), u_2(t)) \in U$  parametrizacija krivulje razreda  $\mathcal{C}^2$  ter  $q = (u_1(t_0), u_2(t_0))$  za nek  $t_0 \in \mathbb{R}$ . Vsaka krivulja, vložena v  $S$ , ki vsebuje točko  $p$ , je tedaj oblike

$$\alpha(t) = x(u_1(t), u_2(t)). \quad (2.10)$$

Označimo z  $s = s(t)$  ločno dolžino krivulje  $\alpha$ . Predpostavimo, da izbrana točka  $p$  ustreza  $p = \alpha(s_0) \in S$ , označimo pripadajoč tangentni vektor  $\nu = \alpha'(s_0) \in T_p S$  ter enotsko normalo  $N \in N_p S$  v točki  $p$ . Količino

$$\kappa^N(p, \nu) = \alpha''(s_0) \cdot N \quad (2.11)$$

imenujemo *normalna ukrivljenost* ploskve  $S$  v točki  $p$  v tangentni smeri  $\nu$  in smeri enotske normale  $N$ .

Oglejmo si preslikavo  $\kappa^N(p, \cdot): \{\nu \in T_p S; |\nu| = 1\} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\nu \mapsto \kappa^N(p, \nu)$ , kjer je  $p \in S$  izbrana fiksna točka. Kot zvezna preslikava na kompaktni množici doseže minimalno in maksimalno vrednost,

$$\kappa_1^N(p) = \min_{|\nu|=1} \kappa^N(p, \nu), \quad \kappa_2^N(p) = \max_{|\nu|=1} \kappa^N(p, \nu), \quad (2.12)$$

katerima pravimo *glavni ukrivljenosti*.

**Definicija 2.15.** 1. *Povprečna ukrivljenost* ploskve  $S$  v točki  $p$  in normalni smeri  $N$  je povprečje glavnih ukrivljenosti,

$$H^N(p) = \frac{1}{2} (\kappa_1^N(p) + \kappa_2^N(p)). \quad (2.13)$$

2. Njun produkt

$$K^N(p) = \kappa_1^N(p) \cdot \kappa_2^N(p) \quad (2.14)$$

definira *Gaussovo ukrivljenost* ploskve  $S$  v točki  $p$  in normalni smeri  $N$ .

3. Projekcijo povprečne ukrivljenosti na normalno ravnino  $N_p S$  v smeri tangentne ravnine  $T_p S$  imenujemo *vektor povprečne ukrivljenosti* ploskve  $S$  v točki  $p$  in označimo s  $\mathbf{H}$ . Enačba 2.13 se v tej notaciji glasi  $H^N(p) = \mathbf{H} \cdot N$  za vsak  $N \in N_p S$ .

**Primer 2.16** (Vektor povprečne ukrivljenosti za  $\mathbf{n} = \mathbf{3}$ ).

**Lema 2.17.** Naj bo  $x: M \rightarrow \mathbb{R}^n$  imerzija razreda  $\mathcal{C}^2$ . Tedaj velja

$$\Delta x = 2\mathbf{H}, \quad (2.15)$$

kjer je  $\Delta$  Laplaceov operator glede na Riemannovo metriko  $g = x^* ds^2$  v točki  $q \in M$  in  $\mathbf{H}$  vektor povprečne ukrivljenosti v točki  $p = x(q) \in S$ .

## 2.4 Holomorfne in harmonične funkcije

## 2.5 Aproksimacijski izreki za Riemannove ploskve

**Izrek 2.18** (Rungejev aproksimacijski izrek za Riemannove ploskve). Naj bo  $M$  Riemannova ploskev in  $K$  njena kompaktna podmnožica. Potem lahko vsako funkcijo  $f$ , ki je holomorfna na okolici  $K$ , aproksimiramo enakomerno na  $K$  z meromorfnimi funkcijami  $F$  na  $M$  brez polov na  $K$ , ter s holomorfnimi funkcijami na  $M$ , če  $K$  nima lukenj. Funkcije  $F$  lahko izberemo tako, da se z dano funkcijo  $f$  na končni množici točk v  $K$  ujemajo do izbranega končnega reda in da ima  $F$  pole v podmnožici  $E \subset M \setminus K$ , kjer  $E$  vsebuje točko v vsaki luknji množice  $K$ .

**Definicija 2.19.** Naj bo  $K$  kompaktna podmnožica Riemannove ploskve  $M$ . Njena holomorfna ogrinjača je množica

$$\widehat{K}_{\mathcal{O}(M)} = \{p \in M; |f(p)| \leq \max_K |f| \text{ za vse } f \in \mathcal{O}(M)\}. \quad (2.16)$$

Če velja  $K = \widehat{K}_{\mathcal{O}(M)}$ , množico  $K$  imenujemo *Rungejeva množica*.

**Izrek 2.20** (Bishop-Mergelyanov aproksimacijski izrek). Naj bo  $M$  odprta Riemannova ploskev in  $K$  njena kompaktna podmnožica brez lukenj ( $K$  je Rungejeva v  $M$ ). Potem lahko vsako funkcijo v  $\mathcal{A}(K)$  aproksimiramo enakomerno na  $K$  s funkcijami v  $\mathcal{O}(M)$ .

**Izrek 2.21** (Weierstrass-Florackov interpolacijski izrek). Naj bo  $M$  odprta Riemannova ploskev in  $K$  njena Rungejeva podmnožica. Naj bo  $A = \{a_i\}_{i=1}^{\infty}$  zaprta diskretna podmnožica v  $M$ ,  $U$  odprta podmnožica  $M$ , tako da je  $A \cup K \subset U$  in  $f$  meromorfna funkcija na  $U$  z ničlami in poli le v točkah množice  $A$ . Potem za izbrane  $\varepsilon > 0$  in števila  $k_i \in \mathbb{N}$  obstaja meromorfna funkcija  $F$  na  $M$ , za katero velja:

1.  $|F(z) - f(z)| < \varepsilon$  za vse  $z \in K$ ,
2. v točkah  $a_i$  je razlika  $F - f$  ničelna do reda  $k_i$ ,
3.  $F$  nima ničel in polov na  $M \setminus A$ .



## 2.6 Variacija ploščine

**Definicija 2.22.** 1. Naj bo  $M$  gladka kompaktna ploskev z robom,  $n \geq 3$  in naj bo preslikava  $x: M \rightarrow \mathbb{R}^n$  imerzija razreda  $\mathcal{C}^2$ . Variacija preslikave  $x$  s fiksnim robom je 1-parametrična družina  $\mathcal{C}^2$  preslikav

$$x^t: M \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad t \in (-\varepsilon, \varepsilon) \subset \mathbb{R}, \quad (2.17)$$

če je  $x^0 = x$  in za vse  $t$  z intervala velja  $x^t = x$  na  $bM$ .

2. Naj bo  $p \in M$ . Variacijsko vektorsko polje preslikave  $x^t$  je vektorsko polje, definirano kot

$$E(p, t) = \frac{\partial x^t(p)}{\partial t} \in \mathbb{R}^n. \quad (2.18)$$

Opazimo, da je za dovolj majhne vrednosti  $t$  preslikava  $x^t$  imerzija. Po definiciji je na  $bM \times (-\varepsilon, \varepsilon)$  variacijsko vektorsko polje  $E$  konstantno ničelno.

**Definicija 2.23.** Naj bo  $x: M \rightarrow \mathbb{R}^n$  imerzija razreda  $\mathcal{C}^2$ . Ploskev  $M$  imenujemo *minimalna ploskev*, če za vsako kompaktno domeno  $D \subset M$  z glatkim robom  $bD$  in vsako gladko variacijo  $x^t$  preslikave  $x$  s fiksnim robom velja

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \text{Area}(x^t(D)) = 0. \quad (2.19)$$

Ekvivalentno pravimo, da je minimalna ploskev stacionarna točka ploskovnega funkcionala Area.

Levo stran enakosti 2.19 imenujemo *prva variacija ploščine* pri  $t = 0$ . Slednjo z geometrijskimi lastnostmi preslikave  $x$ , natančneje ukrivljenostjo, povezuje *prva variacijska formula* v naslednjem izreku.

**Izrek 2.24.** Naj bo  $M$  gladka kompaktna ploskev z robom,  $n \geq 3$  in  $x: M \rightarrow \mathbb{R}^n$  imerzija razreda  $\mathcal{C}^2$ . Naj bo  $E = \partial x^t / \partial t|_{t=0}$  variacijsko vektorsko polje preslikave  $x^t$  pri  $t = 0$ ,  $\mathbf{H}$  vektorsko polje povprečne ukrivljenosti preslikave  $x$  in  $dA$  ploščinski element glede na Riemannovo metriko  $x^*ds^2$ , definirano na  $M$ . Potem za vsako gladko variacijo  $x^t: M \rightarrow \mathbb{R}^n$  imerzije  $x$  s fiksnim robom velja

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \text{Area}(x^t(M)) = -2 \int_M E \cdot \mathbf{H} dA. \quad (2.20)$$

**Izrek 2.25.** Naj bo  $x: M \rightarrow \mathbb{R}^n$  imerzija razreda  $\mathcal{C}^2$ . Ploskev  $M$  je minimalna natanko tedaj, ko je na  $M$  vektor povprečne ukrivljenosti  $\mathbf{H}$  preslikave  $x$  identično enak 0.

S podobnimi tehnikami kot v dokazu Izreka 2.24 izpeljemo *drugo variacijsko formulo*

$$\left. \frac{d^2}{dt^2} \right|_{t=0} \text{Area}(x^t(M)) = \int_M (4|E|^2 K^E + |\nabla E|^2) dA, \quad (2.21)$$

kjer  $K^E = K^N$  označuje Gaussovo ukrivljenost ploskve  $M$ .

## 2.7 Weierstrassova formula

Naj bosta  $(M, g)$  in  $(\widetilde{M}, \tilde{g})$  Riemannovi mnogoterosti z  $\dim(M) \leq \dim(\widetilde{M})$ . Imerzija  $x: (M, g) \rightarrow (\widetilde{M}, \tilde{g})$  se imenuje *konformna*, če ohranja kote. Z drugimi besedami je povlečena metrika  $x^*\tilde{g}$  konformno ekvivalentna metriki  $g$ , kar pomeni, da za pozitivno funkcijo  $\mu > 0$  na  $M$  velja  $x^*\tilde{g} = \mu g$ .

Naj bo ploskev  $M$  orientabilna in  $x: M \rightarrow \mathbb{R}^n$  imerzija razreda  $\mathcal{C}^2$ . Potem preslikava  $x$  določa enolično strukturo Riemannove ploskve na  $M$ , kjer je  $x$  konformna imerzija. Zato bomo v nadaljevanju obravnavali Riemannove ploskve in pripadajoče konformne imerzije v Evklidski prostor. Prvi rezultat, ki ga navajamo, opisuje ekvivalentne pogoje minimalnosti ploskve  $M$ .

**Izrek 2.26.** *Naj bo  $M$  odprta Riemannova ploskev,  $n \geq 3$  in  $x = (x_1, \dots, x_n): M \rightarrow \mathbb{R}^n$  konformna imerzija razreda  $\mathcal{C}^2$ . Naslednje trditve so ekvivalentne:*

1.  $x$  je minimalna ploskev.
2. Vektorsko polje povprečne ukrivljenosti preslikave  $x$  je ničelno, tj.  $\mathbf{H} = 0$ .
3.  $x$  je harmonična, tj.  $\Delta x = 0$ .
4. 1-forma  $\partial x = (\partial x_1, \dots, \partial x_n)$  z vrednostmi v  $\mathbb{C}^n$  je holomorfnna in velja

$$(\partial x_1)^2 + \dots + (\partial x_n)^2 = 0. \quad (2.22)$$

5. Naj bo  $\theta$  holomorfnna 1-forma na  $M$ , ki ni nikjer enaka 0. Potem je preslikava  $f = 2\partial x/\theta: M \rightarrow \mathbb{C}^n$  holomorfnna z vrednostmi v ničelni kvadriki

$$\mathbf{A} = \{(z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n; z_1^2 + \dots + z_n^2 = 0\}. \quad (2.23)$$

Nadalje je Riemannova metrika na  $M$ , inducirana s konformno imerzijo  $x$ , enaka

$$g = x^*ds^2 = |dx_1|^2 + \dots + |dx_n|^2 = 2(|\partial x_1|^2 + \dots + |\partial x_n|^2). \quad (2.24)$$

**Definicija 2.27.** Naj bo  $x: M \rightarrow \mathbb{R}^n$  harmonična preslikava. Njen pretok je homomorfizem grup  $\text{Flux}_x: H_1(M, \mathbb{Z}) \rightarrow \mathbb{R}^n$ , definiran s predpisom

$$\text{Flux}_x([C]) = \int_C d^c x. \quad (2.25)$$

V definiciji pretoka je  $[C] \in H_1(M, \mathbb{Z})$ , integral pa je odvisen le od homološkega razreda poti  $C$ , zato bomo v nadaljevanju pisali kar  $\text{Flux}_x(C)$ .

**Definicija 2.28.** 1. Naj bo  $M$  odprta Riemannova ploskev in  $n \geq 3$ . Holomorfnno imerzijo  $z = (z_1, \dots, z_n): M \rightarrow \mathbb{C}^n$ , za katero velja  $(\partial z_1)^2 + \dots + (\partial z_n)^2 = 0$ , imenujemo *holomorfnna ničelna krivulja* v  $\mathbb{C}^n$ .

2. Naj bo  $z = x + iy: M \rightarrow \mathbb{C}^n$  holomorfnna ničelna krivulja. Njena realni del in imaginarni del,  $x, y: M \rightarrow \mathbb{R}^n$  imenujemo *konjugirani minimalni ploskvi*.

3. Naj bo  $t \in \mathbb{R}$ . Predstavnik 1-parametrične družine  $x^t = \Re(e^{it}z): M \rightarrow \mathbb{R}^n$  imenujemo *pridružene minimalne ploskve* holomorfne ničelne krivulje  $z$ .

**Izrek 2.29** (Weierstrassova predstavitev konformnih minimalnih ploskev in holomorfni ničelni krivulji). *Naj bo  $n \geq 3$  in  $M$  odprta Riemannova ploskev, na kateri definiramo holomorfno 1-formo  $\Phi = (\phi_1, \dots, \phi_n)$  z vrednostmi v  $\mathbb{C}^n$ , ki je povsod neničelna, in zadošča*

1.  $\sum_{j=1}^n \phi_j^2 = 0$ ,
2.  $\Re \int_C \Phi = 0$  za vse  $[C] \in H_1(M, \mathbb{Z})$ .

Potem za poljuben izbor točk  $p_0 \in M$  in  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  predpis  $x: M \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,

$$x(p) = x_0 + \Re \int_{p_0}^p \Phi, \quad p \in M, \quad (2.26)$$

podaja dobro definirano konformno minimalno imerzijo. Zanja velja

$$2\partial x = \Phi \quad \text{in} \quad g = x^*ds^2 = |dx|^2 = \frac{1}{2}|\Phi|^2. \quad (2.27)$$

Če velja še  $\int_C \Phi = 0$  za vse  $[C] \in H_1(M, \mathbb{Z})$ , potem za poljuben izbor točk  $p_0 \in M$  in  $z_0 \in \mathbb{C}^n$  predpis  $z: M \rightarrow \mathbb{C}^n$ ,

$$z(p) = z_0 + \int_{p_0}^p \Phi, \quad p \in M, \quad (2.28)$$

podaja dobro definirano holomorfno ničelno krivuljo. Zanja velja

$$\partial z = \Phi \quad \text{in} \quad z^*ds^2 = |dz|^2 = |\partial z|^2 = |\Phi|^2. \quad (2.29)$$

**Opomba 2.30.** Vsaka konformna minimalna imerzija  $x: M \rightarrow \mathbb{R}^n$  je oblike 2.26 in vsaka holomorfna ničelna krivulja  $z: M \rightarrow \mathbb{C}^n$  je oblike 2.28. Prav zato je Weierstrassova predstavitev elegantna metoda za konstrukcijo opisanih preslikav.

Če konformno minimalno imerzijo  $x: M \rightarrow \mathbb{R}^n$  poznamo, potem pripadajočo povsod neničelno holomorfno 1-formo  $\Phi = 2\partial x$  z vrednostmi v  $\mathbb{C}^n$  imenujemo *Weierstrassovi podatki* preslikave  $x$ . Analogno, za holomorfno ničelno krivuljo  $z: M \rightarrow \mathbb{C}^n$  pripadajočo 1-formo  $\Phi = \partial z = dz$  imenujemo *Weierstrassovi podatki* preslikave  $z$ .

**Definicija 2.31.** *Jordanov lok* je pot v ravnini, ki je topološko izomorfna intervalu  $[0, 1]$ . *Jordanova krivulja* je ravninska krivulja, ki je topološko ekvivalentna enotski krožnici.

**Definicija 2.32.** Naj bo  $M$  gladka ploskev,  $K$  končna unija paroma disjunktne kompaktnih domen s kosoma zvezno odvedljivimi robovi v  $M$  ter  $E = S \setminus K^\circ$  unija končno mnogo paroma disjunktne gladkih Jordanovih lokov in zaprtih Jordanovih krivulj, ki se dotikajo  $K$  kvečjemu v svojih krajiščih in sekajo rob  $K$  transverzalno. Kompaktno podmnožico v  $M$  oblike  $S = K \cup E$  imenujemo *dopustna množica*.

**Definicija 2.33.** Naj bo  $M$  povezana odprta Riemannova ploskev ali kompaktna Riemannova ploskev z robom, na kateri je definirana povsod neničelna holomorfná 1-forma  $\Theta$ . Konformno minimalno imerzijo  $x: M \rightarrow \mathbb{R}^n$  imenujemo:

1. *ravna*, če je slika  $x(M)$  vsebovana v afini ravnini v  $\mathbb{R}^n$ ; sicer pravimo, da je  $x$  *neravna*;
2. *polna*, če je preslikava  $f = 2\partial x/\Theta: M \rightarrow \mathbf{A}_*^{n-1}$  polna, tj.  $\mathbb{C}$ -linearna ogrinjača slike  $f(M)$  je enaka  $\mathbb{C}^n$ ;
3. *neizrojena*, če slika  $x(M)$  ni vsebovana v nobeni hiperravnini v  $\mathbb{R}^n$ .

V dimenziji  $n = 3$  za konformno minimalno imerzijo vsi zgornji pojmi sovpadajo. V višjih dimenzijah ( $n \geq 4$ ) veljata implikaciji

$$\text{polna} \Rightarrow \text{neizrojena} \Rightarrow \text{neravna}.$$

### 3 Izreki o aproksimaciji in interpolaciji minimalnih ploskev

Naj bosta  $M$  in  $X$  kompleksni mnogoterosti. Prostor holomorfnih presikov  $M \rightarrow X$  označimo z  $\mathcal{O}(M, X)$ . Če je  $K$  kompaktna podmnožica v  $M$ , množico presikov  $K \rightarrow X$  razreda  $\mathcal{C}^r(M)$ , ki so holomorfne v notranjosti  $K^\circ \subset K$ , označimo z  $\mathcal{A}^r(K, X)$ . V primeru, ko je  $X = \mathbb{C}$ , ustrezna prostora označimo z  $\mathcal{O}(M)$  oziroma  $\mathcal{A}^r(K)$ .

Naj bo  $M$  odprta Riemannova ploskev in  $n \geq 3$ . Prostor konformnih minimalnih imerzij  $M \rightarrow \mathbb{R}^n$  označimo s  $\text{CMI}(M, \mathbb{R}^n)$ , prostor holomorfnih ničelnih imerzij  $M \rightarrow \mathbb{C}^n$  pa z  $\text{NC}(M, \mathbb{C}^n)$ . Nadalje  $\text{CMI}_{full}(M, \mathbb{R}^n)$  in  $\text{CMI}_{nf}(M, \mathbb{R}^n)$  označujeta prostora polnih oziroma neravnih konformnih minimalnih imerzij. Velja inkluzija  $\text{CMI}_{full}(M, \mathbb{R}^n) \subset \text{CMI}_{nf}(M, \mathbb{R}^n)$ . Podobno je  $\text{NC}_{full}(M, \mathbb{C}^n) \subset \text{NC}_{nf}(M, \mathbb{C}^n)$  v primeru polnih ter neravnih holomorfnih ničelnih krivulj.

Če je  $M$  kompaktna omejena Riemannova ploskev z nepraznim gladkim robom  $bM$  in  $r \in \mathbb{N}$ , tedaj prostor konformnih minimalnih imerzij  $M \rightarrow \mathbb{R}^n$  razreda  $\mathcal{C}^r(M)$  označimo s  $\text{CMI}^r(M, \mathbb{R}^n)$ , prostor holomorfnih ničelnih imerzij  $M \rightarrow \mathbb{C}^n$  razreda  $\mathcal{A}^r(M)$  pa z  $\text{NC}^r(M, \mathbb{C}^n)$ .

**Lema 3.1.** Naj bo  $M$  povezana Riemannova ploskev in  $\mathbf{A}_*$  punktirana ničelna kvadrík. Holomorfná preslikava  $f: M \rightarrow \mathbf{A}_*$  je neravna natanko tedaj, ko je linearna ogrinjača tangentnih prostorov  $T_{f(p)}\mathbf{A} \subset T_{f(p)}\mathbb{C}^n$  po vseh  $p \in M$  enaka  $\mathbb{C}^n$ .

**Dokaz 1.** Oglejmo si preslikavo  $\Phi: \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}$ , definirano s predpisom  $\Phi(z) = \sum_{j=1}^n z_j^2$ . Ničelno kvadrík 2.23 tedaj lahko zapišemo v obliki  $\mathbf{A} = \Phi^{-1}(\{0\})$ . Njen tangentni prostor v točki  $z = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n$  je enak jedru diferenciala, ki kvadrík določa, zato je

$$T_z\mathbf{A} = \ker(d\Phi_z) = \ker(z \mapsto \sum_{j=1}^n z_j dz_j).$$

Naj bosta  $z, w \in \mathbb{C}_*^n$ . Potem sta njuna tangentna prostora enaka,  $T_z\mathbf{A} = T_w\mathbf{A}$ , natanko tedaj, ko je  $z_j = \lambda w_j$  za vse  $j = 1, \dots, n$  in nek  $\lambda \in \mathbb{C}$ , kar je ekvivalentno pogoju, da sta vektorja  $z$  in  $w$  kolinearna.

Po definiciji je preslikava  $f$  neravna, če njena slika  $f(M)$  ni vsebovana v nobeni afini kompleksni premici v  $\mathbb{C}^n$ . Skupaj z zgornjim je slednje ekvivalnetno  $\text{Lin}\{T_{f(p)}\mathbf{A}; p \in M\} = \mathbb{C}^n$ , kar smo želeli dokazati.

**Definicija 3.2.** Naj bo  $S = K \cup E$  dopustna podmnožica Riemannove ploskve  $M$  in  $\Theta$  povsod neničelna holomorfná 1-forma, definirana v okolici  $S \subset M$ . Naj bosta  $n \geq 3$  in  $r \in \mathbb{N}$ . *Posplošena konformna minimalna imerzija*  $S \rightarrow \mathbb{R}^n$  razreda  $\mathcal{C}^r$  je par  $(x, f\Theta)$ , kjer je  $x: S \rightarrow \mathbb{R}^n$  preslikava razreda  $\mathcal{C}^r$ , njena zožitev na  $S^\circ = K^\circ$  je konformna minimalna imerzija in preslikava  $f \in \mathcal{A}^{r-1}(S, \mathbf{A}_*)$  zadošča naslednjima pogojema:

1. na množici  $K$  velja  $f\Theta = 2\partial x$ ;
2. za vsako gladko pot  $\alpha$  v  $M$ , ki parametrizira povezano komponento  $E = \overline{S \setminus K}$  velja  $\Re(\alpha^*(f\Theta)) = \alpha^*(dx) = d(x \circ \alpha)$ .

Posplošena konformna minimalna imerzija  $(x, f\Theta)$  je *neravna* oziroma *polna* natanko tedaj, ko je preslikava  $f \in \mathcal{A}^{r-1}(S, \mathbf{A}_*)$  neravna oziroma polna na vsaki relativno odprti podmnožici  $S$ .

Prostor posplošenih konformnih minimalnih imerzij  $S \rightarrow \mathbb{R}^n$  razreda  $\mathcal{C}^r$  označimo z  $\text{GCMI}^r(S, \mathbb{R}^n)$ . Analogno kot v primeru konformnih minimalnih imerzij velja

$$\text{GCMI}_{full}^r(S, \mathbb{R}^n) \subset \text{GCMI}_{nf}^r(S, \mathbb{R}^n) \subset \text{GCMI}^r(S, \mathbb{R}^n).$$

**Opomba 3.3.** Diferencial  $d$  v kompleksnem ima obliko  $d = \partial + \bar{\partial}$ . *Konjugirani diferencijal*  $d^c$  je enak  $d^c = i(\bar{\partial} - \partial) = 2\Im(\partial)$ . Zato velja  $d + id^c = 2\partial$  oziroma drugače,  $\Re(2\partial) = dx$ . Prvi pogoj iz definicije posplošene konformne minimalne imerzije pravi  $f\Theta = 2\partial$ , od koder sledi  $\Re(f\Theta) = \Re(2\partial) = dx$ . Zato je drugi pogoj iz zgornje definicije skladen s prvim.

Tudi za posplošene konformne minimalne imerzije velja Weierstrassova formula. Naj bo  $S$  povezana dopustna množica in  $(x, f\Theta) \in \text{GCMI}^r(S, \mathbb{R}^n)$ . Za poljubno točko  $p_0 \in S$  in poznano preslikavo  $f$  lahko preslikavo  $x: S \rightarrow \mathbb{R}^n$  konstruiramo s formulo

$$x(p) = x(p_0) + \Re \int_{p_0}^p f\Theta, \quad p \in S. \quad (3.1)$$

Obratno, če za preslikavo  $f \in \mathcal{A}^{r-1}(S, \mathbf{A}_*)$  velja  $\Re \int_C f\Theta = 0$  za vsako sklenjeno krivuljo  $C$  v  $S$ , potem  $f$  določa posplošeno konformno minimalno imerzijo, dano z Weierstrassovo formulo 3.1.

**Definicija 3.4.** Naj bo  $S = K \cup E$  dopustna podmnožica Riemannove ploskve  $M$  in  $\Theta$  povsod neničelna holomorfná 1-forma, definirana v okolici  $S \subset M$ . Naj bosta  $n \geq 3$  in  $r \in \mathbb{N}$ . *Posplošena ničelna krivulja*  $S \rightarrow \mathbb{C}^n$  razreda  $\mathcal{C}^r$  je par  $(z, f\Theta)$ , kjer preslikavi  $z \in \mathcal{A}^r(S, \mathbb{C}^n)$  in  $f \in \mathcal{A}^{r-1}(S, \mathbf{A}_*)$  zadoščata naslednjima pogojema:

1. na množici  $K$  velja  $f\Theta = dz = \partial z$ ;

2. za vsako gladko pot  $\alpha$  v  $M$ , ki parametrizira povezano komponento  $E = \overline{S \setminus K}$  velja  $\alpha^*(f\Theta) = \alpha^*(dz) = d(z \circ \alpha)$ .

Posplošena ničelna krivulja  $(z, f\Theta)$  je *neravna* oziroma *polna* natanko tedaj, ko je preslikava  $f \in \mathcal{A}^{r-1}(S, \mathbf{A}_*)$  neravna oziroma polna na vsaki relativno odprti podmnožici  $S$ .

Prostori neravnih, polnih in posplošenih ničelnih krivulj ustrezajo verigi inkluzij

$$\text{GNC}_{full}^r(S, \mathbb{C}^n) \subset \text{GNC}_{nf}^r(S, \mathbb{C}^n) \subset \text{GNC}^r(S, \mathbb{C}^n).$$

Za povezano dopustno množico  $S$ ,  $(z, f\Theta) \in \text{GNC}^r(S, \mathbb{C}^n)$ , znano preslikavo  $f$  in točko  $p_0 \in S$  preslikavo  $z: S \rightarrow \mathbb{C}^n$  konstruiramo s pomočjo Weierstrassove formule

$$z(p) = z(p_0) + \int_{p_0}^p f\Theta, \quad p \in S. \quad (3.2)$$

Velja tudi obrat; preslikava  $f \in \mathcal{A}^{r-1}(S, \mathbf{A}_*)$ , ki zadošča  $\int_C f\Theta = 0$  za vsako sklenjeno krivuljo  $C$  v  $S$ , določa posplošeno ničelno krivuljo, dano z Weierstrassovo formulo 3.2.

**Definicija 3.5.** Naj bo  $M$  povezana odprta Riemannova ploskev. Naj bo  $\Theta$  fiksna povsod neničelna holomorfná 1-forma na  $M$ . Naj bo  $\mathcal{C} = \{C_1, \dots, C_l\}$  družina gladkih orientiranih vloženih lokov in zaprtih Jordanovih krivulj v  $M$  ter  $C = \cup_{i=1}^l C_i$ . Družini  $\mathcal{C}$  in številu  $n \in \mathbb{N}$  priredimo *periodno preslikavo*

$$\begin{aligned} \mathcal{P} &= (\mathcal{P}_1, \dots, \mathcal{P}_l): \mathcal{C}(C, \mathbb{C}^n) \rightarrow (\mathbb{C}^n)^l, \\ \mathcal{P}_i(f) &= \int_{C_i} f\Theta, \quad i = 1, \dots, l. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Tu je  $f \in \mathcal{C}(C, \mathbb{C}^n)$  in  $\mathcal{P}_i(f) \in \mathbb{C}^n$ .

**Opomba 3.6.** Znano je, da vsaka odprta Riemannova ploskev  $M$  premore lokalno biholomorfnó preslikavo  $M \rightarrow \mathbb{C}^n$ , torej povsod neničelno eksaktnó holomorfnó 1-formo. Zato je predpostavka o izboru 1-forme v zgornji definiciji smiselna.

**Lema 3.7.** Naj bo  $M$  odprta Riemannova ploskev in  $S = K \cup E$  njena dopustna podmnožica. Naj bo  $\mathcal{C} = \{C_1, \dots, C_l\}$  taka družina gladkih orientiranih Jordanovih krivulj in lokov v  $S$ , da je unija  $C = \cup_{i=1}^l C_i$  Rungejeva v  $S$ . Naj za neko število  $r \in \mathbb{Z}_+$  preslikava  $f$  pripada razredu  $\mathcal{A}^r(S, \mathbf{A}_*)$ . Nadalje predpostavimo, da vsaka krivulja  $C_i \in \mathcal{C}$  vsebuje netrivialen lok  $I_i \in C_i$ , disjunkten z  $\cup_{i \neq j} C_j$ , preslikava  $f: I_i \rightarrow \mathbf{A}_*$  pa je neravna.

Potem obstaja odprta okolica  $U \subset \mathbb{C}^n$  točke 0 in preslikava  $\Phi_t \in \mathcal{A}^r(S \times U, \mathbf{A}_*)$ , tako da velja  $\Phi_t(\cdot, 0) = f$  in je preslikava

$$\left. \frac{\partial}{\partial t} \right|_{t=0} \mathcal{P}(\Theta_f(\cdot, t)): (\mathbb{C}^n)^l \rightarrow (\mathbb{C}^n)^l \text{ izomorfizem.} \quad (3.4)$$

Nadalje, za končno podmnožico  $P \subset S$  lahko preslikavo  $\Theta_f$  izberemo tako, da se za  $t \in U$  preslikave  $\Theta_f(\cdot, t): S \rightarrow \mathbf{A}_*$  ujemajo z  $f$  v vsaki točki  $P \setminus S^\circ$ , v točkah  $P \cap S^\circ$  pa se z  $f$  ujemajo do danega končnega reda.

Za vsako preslikavo  $f_0 \in \mathcal{A}^r(S, \mathbf{A}_*)$ , ki zadošča zgornjim predpostavkam, obstaja okolica  $\Omega \subset \mathcal{A}^r(S, \mathbf{A}_*)$  in holomorfná preslikava  $f \mapsto \Theta_f$ ,  $f \in \Omega$  z zgornjimi lastnostmi.

**Definicija 3.8.** Preslikavo  $\Theta_f$ , ki ustreza Lemi 3.7 imenujemo *periodno dominantni sprej* preslikav  $S \rightarrow \mathbf{A}_*$  za družino krivulj  $\mathcal{C}$  z jedrom  $\Theta_f(\cdot, 0) = f$ . Lastnosti 3.4 pravimo *periodno dominantna lastnost*.

**Dokaz 2.** Prvi del leme bomo dokazali tako, da bomo konstruirali periodno dominantni sprej, ki zadošča periodno dominantni lastnosti. Potrebovali bomo Lemo 3.1, Bishop-Mergelyanov izrek o aproksimaciji 2.20 in pojem toka vektorskega polja. Zaradi enostavnosti postavimo  $r = 0$  (za  $r > 0$  dokaz poteka analogno).

Po predpostavki je za vse  $i \in \{1, \dots, n\}$  lok  $I_i \subset C_i \in \mathcal{C}$  netrivialen, za katerega velja  $I_i \cap \cup_{i \neq j} C_j = \emptyset$  in je zožitev preslikave  $f|_{I_i}$  neravna. Po Lemi 3.1 obstajajo točke  $p_{i,j} \in I_i$  in holomorfnega vektorskega polja  $V_{i,j}$  na  $\mathbb{C}^n$ ,  $j \in \{1, \dots, n\}$ , ki so tangentna na  $\mathbf{A}$ , tako da je  $\text{Lin}\{V_{i,j}(f(p_{i,j})); j = 1, \dots, n\} = \mathbb{C}^n$  za vse  $i$ .

Za  $k = 1, \dots, l$  označimo  $t_k = (t_{k,1}, \dots, t_{k,n}) \in \mathbb{C}^n$  in  $t = (t_1, \dots, t_l) \in \mathbb{C}^{nl}$ . Naj  $\Phi_t^{i,j}$  označuje tok vektorskega polja  $V_{i,j}$ . Izberimo tako odprto okolico  $U_0 \subset \mathbb{C}^{nl}$  točke 0, da za vse  $t \in U_0$  in  $p \in S$  predpis

$$(p, t) \mapsto \Phi_{t_{1,1}}^{1,1} \circ \dots \circ \Phi_{t_{1,n}}^{1,n} \circ \Phi_{t_{2,1}}^{2,1} \circ \dots \circ \Phi_{t_{l,n}}^{l,n}(f(p)) \quad (3.5)$$

podaja dobro definirano preslikavo  $S \times U_0 \rightarrow \mathbf{A}_*$ . Sedaj za vse pare  $(i, j)$  izberimo gladke preslikave  $g_{i,j}: C \rightarrow \mathbb{C}$ , pri čemer je nosilec  $g_{i,j}$  vsebovan v majhnem delu loka  $I_i$  okrog točke  $p_{i,j} \in I_i$ . Modificirana preslikava 3.5,  $\Phi: C \times U_1 \rightarrow \mathbf{A}_*$ ,

$$\Phi(p, t) = \Phi_{g_{1,1}(p)t_{1,1}}^{1,1} \circ \dots \circ \Phi_{g_{l,n}(p)t_{l,n}}^{l,n}(f(p)), \quad (3.6)$$

kjer je  $U_1 \subset \mathbb{C}^{nl}$  primerno majhna odprta okolica točke 0, je tedaj dobro definirana, za vse  $p \in C$  pa je preslikava  $\Phi(p, \cdot): U_1 \rightarrow \mathbf{A}_*$  holomorfnega. Po lastnostih toka vektorskega polja sledi še  $\Phi(p, 0) = f(p)$  in

$$\left. \frac{\partial \Phi(p, t)}{\partial t_{m,j}} \right|_{t=0} = g_{m,j}(p) \cdot V_{m,j}(f(p)). \quad (3.7)$$

Naj bo  $\mathcal{P} = (\mathcal{P}_1, \dots, \mathcal{P}_n)$  periodna preslikava, prirejena družini krivulj  $\mathcal{C}$ . Z uporabo enakosti 3.7 dobimo za vse indekse  $i, m \in \{1, \dots, l\}$  in  $j \in \{1, \dots, n\}$

$$\left. \frac{\partial \mathcal{P}_i(\Phi(\cdot, t))}{\partial t_{m,j}} \right|_{t=0} = \left. \frac{\partial}{\partial t_{m,j}} \right|_{t=0} \int_{C_i} \Phi(\cdot, t) \cdot \Theta = \int_{C_i} g_{m,j} \cdot (V_{m,j} \circ f) \cdot \Theta \in \mathbb{C}^n. \quad (3.8)$$

Matrika diferencialov 3.4 iz leme je sestavljena iz blokov velikosti  $n \times n$ , ki pripadajo indeksom  $i, m \in \{1, \dots, l\}$ . Z ustrezno izbiro preslikav  $g_{i,j}$  opisanih zgoraj lahko dosežemo, da je matrika bločno diagonalna z obrnljivimi bloki na diagonalni. S tem postane celotna matrika obrnljiva.

V naslednjem koraku bomo modificirali še preslikavo  $\Phi$ , kar nam bo dalo iskani periodno dominantni sprej. Preslikave  $g_{i,j}$  so definirane na množici  $C$ , ki je po predpostavki Rungejeva v  $S$ . Bishop-Mergelyanov izrek o aproksimaciji pove, da vsako funkcijo  $g_{i,j}$  lahko enakomerno na  $C$  aproksimiramo s holomorfnimi funkcijami  $\tilde{g}_{i,j}$  v okolici  $S$ .

Definirajmo preslikavo  $\Phi_f: S \times U \rightarrow \mathbf{A}_*$  tako, da v predpisu 3.6 nadomestimo  $g_{i,j}$  z novimi funkcijami  $\tilde{g}_{i,j}$  in je  $U \subset U_1 \subset \mathbb{C}^{nl}$  odprta okolica izhodišča. Po konstrukciji takšna preslikava  $\Phi_f$  zadošča sklepu leme, zato je periodno dominantni sprej, ki smo ga iskali.

**Trditev 3.9.** Naj bo  $M$  odprta Riemannova ploskev,  $\Theta$  povsod neničelna holomorfna 1-forma na  $M$ ,  $S$  povezana dopustna množica, ki je Rungejeva v  $M$  in  $A = \{a_1, \dots, a_k\} \subset S$ . Naj bosta  $r, s \in \mathbb{N}$ . Potem lahko vsako posplošeno konformno minimalno imerzijo  $(x, f\Theta) \in GCMI^r(S, \mathbb{R}^n)$  aproksimiramo s konformnimi minimalnimi imerzijami  $X: M \rightarrow \mathbb{R}^n$  razreda  $C^r$ , za katere velja  $\text{Flux}_X = \text{Flux}_x$ .

**Izrek 3.10.** Naj bo  $M$  odprta Riemannova ploskev,  $\Theta$  povsod neničelna holomorfna 1-forma na  $M$ ,  $n \geq 3$  in  $r \geq 1$ . Naj bo  $S$  dopustna Rungejeva množica v  $M$  in  $\Lambda$  zaprta diskretna podmnožica  $M$ . Naj bo  $x: S \rightarrow \mathbb{R}^n$  posplošena konformna minimalna imerzija razreda  $C^r(S, \mathbb{R}^n)$ , ki je konformna minimalna imerzija v okolici vsake točke iz  $\Lambda$ .

Za izbrane  $\varepsilon > 0$ , preslikavo  $k: \Lambda \rightarrow \mathbb{N}$  in homomorfizem grup  $\mathfrak{p}: H_1(M, \mathbb{Z}) \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $\mathfrak{p}|_{H_1(S, \mathbb{Z})} = \text{Flux}_x$ , obstaja konformna minimalna imerzija  $\tilde{x}: M \rightarrow \mathbb{R}^n$ , za katero velja:

1.  $\|\tilde{x} - x\|_{C^r(S)} < \varepsilon$ ;
2. Razlika  $\tilde{x} - x$  je ničelna do reda  $k(p)$  v vsaki točki  $p \in \Lambda$ ;
3.  $\text{Flux}_{\tilde{x}} = \mathfrak{p}$  na  $H_1(M, \mathbb{Z})$ ;
4. Če je  $n \geq 5$  in je  $x: \Lambda \rightarrow \mathbb{R}^n$  injektivna preslikava, potem je  $\tilde{x}$  injektivna imerzija;
5. Če je  $n = 4$  in ima  $x$  enostavne dvojne točke na množici  $\Lambda$ , potem je  $\tilde{x}$  imerzija z enostavnimi dvojnimi točkami na  $\Lambda$ .