UNIVERZA V LJUBLJANI
FAKULTETA ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

Matematika – 2. stopnja

Tjaša Vrhovnik

MINIMALNE PLOSKVE

Magistrsko delo

Mentor: prof. dr. Franc Forstnerič

Ljubljana, 2021

Zahvala

Kazalo

Program dela

Osnovna literatura

Literatura mora biti tukaj posebej samostojno navedena (po pomembnosti) in ne le citirana. V tem razdelku literature ne oštevilčimo po svoje, ampak uporabljamo okolje itemize in ukaz plancite, saj je celotna literatura oštevilčena na koncu.

- [?]
- [?]
- [?]
- [?]

Podpis mentorja:

Minimalne ploskve

Povzetek

Tukaj napišemo povzetek vsebine. Sem sodi razlaga vsebine in ne opis tega, kako je delo organizirano.

English translation of the title

Abstract

An abstract of the work is written here. This includes a short description of the content and not the structure of your work.

Math. Subj. Class. (2010): oznake kot 74B05, 65N99, na voljo so na naslovu `http://www.ams.org/msc/msc2010.html`

Ključne besede:

Keywords:

1 Uvod

2 Osnovni pojmi

Definicija 2.1. *Riemannova ploskev* je kompleksna mnogoterost kompleksne dimenzije 1.

Naj bo M ploskev, $n \geq 3$ in $x \colon M \to \mathbb{R}^n$ imerzija razreda $\mathcal{C}^2$. Izberimo karto (U, ϕ) na M in koordinate $u = (u_1, u_2) \in U$, tako da je zožitev $x|_U \colon U \to \mathbb{R}^n$ vložitev na orientabilno ploskev $S = x(U) \subset \mathbb{R}^n$. Izberimo točko $q \in U$ in označimo $p = x(q) \in S$. Naj bo $t \mapsto (u_1(t), u_2(t))$ parametrizacija vložene krivulje razreda $\mathcal{C}^2$ v U ter $q = (u_1(t_0), u_2(t_0))$ za nek t_0. Vsaka krivulja, vložena v S, ki vsebuje točko p, je tedaj oblike

$$\alpha(t) = x(u_1(t), u_2(t)). \tag{2.1}$$

Označimo z $s = s(t)$ ločno dolžino krivulje α. Predpostavimo, da izbrana točka p ustreza $p = \alpha(s_0) \in S$, označimo pripadajoč tangentni vektor $\nu = \alpha'(s_0) \in T_pS$ ter enotsko normalo $N \in N_pS$ v točki p. Količino

$$\kappa^N(p, \nu) = \alpha''(s_0) \cdot N \tag{2.2}$$

imenujemo *normalna ukrivljenost* ploskve S v točki p v tangentni smeri ν in smeri enotske normale N.

Oglejmo si preslikavo $\kappa^N(p, \cdot) \colon \{\nu \in T_pS;\ |\nu| = 1\} \to \mathbb{R}$, $\nu \mapsto \kappa^N(p, \nu)$, kjer je $p \in S$ izbrana fiksna točka. Kot zvezna preslikava na kompaktni množici doseže minimalno in maksimalno vrednost,

$$\kappa_1^N(p) = \min_{|\nu|=1} \kappa^N(p, \nu), \quad \kappa_2^N(p) = \max_{|\nu|=1} \kappa^N(p, \nu), \tag{2.3}$$

katerima pravimo *glavni ukrivljenosti.*

Definicija 2.2.

1. *Povprečna ukrivljenost* ploskve S v točki p in normalni smeri N je povprečje glavnih ukrivljenosti,

$$H^N(p) = \frac{1}{2}\left(\kappa_1^N(p) + \kappa_2^N(p)\right). \tag{2.4}$$

2. Njun produkt

$$K^N(p) = \kappa_1^N(p) \cdot \kappa_2^N(p) \tag{2.5}$$

definira *Gaussovo ukrivljenost* ploskve S v točki p in normalni smeri N.

3. Projekcijo povprečne ukrivljenosti na normalno ravnino N_pS v smeri tangentne ravnine T_pS imenujemo *vektor povprečne ukrivljenosti* ploskve S v točki p in označimo s $\mathbf{H}$. Enačba 2.4 se v tej notaciji glasi $H^N(p) = \mathbf{H} \cdot N$ za vsak $N \in N_pS$.

Lema 2.3. *Naj bo $x \colon M \to \mathbb{R}^n$ imerzija razreda $\mathcal{C}^2$. Tedaj velja*

$$\Delta x = 2\mathbf{H}, \tag{2.6}$$

kjer je Δ Laplaceov operator glede na Riemannovo metriko $g = x^* ds^2$ v točki $q \in M$ in $\mathbf{H}$ vektor povprečne ukrivljenosti v točki $p = x(q) \in S$.

2.1 Variacija ploščine

Definicija 2.4. 1. Naj bo M gladka kompaktna ploskev z robom, $n \geq 3$ in naj bo preslikava $x\colon M \to \mathbb{R}^n$ imerzija razreda $\mathcal{C}^2$. *Variacija preslikave x s fiksnim robom* je 1-parametrična družina $\mathcal{C}^2$ preslikav

$$x^t\colon M \to \mathbb{R}^n,\ t \in (-\varepsilon, \varepsilon) \subset \mathbb{R}, \tag{2.7}$$

če je $x^0 = x$ in za vse t z intervala velja $x^t = x$ na bM.

2. Naj bo $p \in M$. *Variacijsko vektorsko polje* preslikave x^t je vektorsko polje, definirano kot

$$E(p,t) = \frac{\partial x^t(p)}{\partial t} \in \mathbb{R}^n. \tag{2.8}$$

Opazimo, da je za dovolj majhne vrednosti t preslikava x^t imerzija. Po definiciji je na $bM \times (-\varepsilon, \varepsilon)$ variacijsko vektorsko polje E konstantno ničelno.

Definicija 2.5. Naj bo $x\colon M \to \mathbb{R}^n$ imerzija razreda $\mathcal{C}^2$. Ploskev M imenujemo *minimalna ploskev*, če za vsako kompaktno domeno $D \subset M$ z gladkim robom bD in vsako gladko variacijo x^t preslikave x s fiksnim robom velja

$$\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \mathrm{Area}(x^t(D)) = 0. \tag{2.9}$$

Ekvivalentno pravimo, da je minimalna ploskev stacionarna točka ploskovnega funkcionala Area: $D \to \mathbb{R}$.

Levo stran enakosti 2.9 imenujemo *prva variacija ploščine* pri $t = 0$. Slednjo z geometrijskimi lastnostmi preslikave x, natančneje ukrivljenostjo, povezuje *prva variacijska formula* v naslednjem izreku.

Izrek 2.6. *Naj bo M gladka kompaktna ploskev z robom, $n \geq 3$ in $x\colon M \to \mathbb{R}^n$ imerzija razreda $\mathcal{C}^2$. Naj bo $E = \partial x^t/\partial t|_{t=0}$ variacijsko vektorsko polje preslikave x^t pri $t = 0$, $\mathbf{H}$ vektorsko polje povprečne ukrivljenosti preslikave x in dA ploščinski element glede na Riemannovo metriko x^*ds^2, definirano na M. Potem za vsako gladko variacijo $x^t\colon M \to \mathbb{R}^n$ imerzije x s fiksnim robom velja*

$$\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} Area(x^t(M)) = -2\int_M E \cdot \mathbf{H} dA. \tag{2.10}$$

Izrek 2.7. *Naj bo $x\colon M \to \mathbb{R}^n$ imerzija razreda $\mathcal{C}^2$. Ploskev M je minimalna natanko tedaj, ko je na M vektor povprečne ukrivljenosti $\mathbf{H}$ preslikave x identično enak* 0.

S podobnimi tehnikami kot v dokazu Izreka 2.6 izpeljemo *drugo variacijsko formulo*

$$\left.\frac{d^2}{dt^2}\right|_{t=0} \mathrm{Area}(x^t(M)) = \int_M (4|E|^2 K^E + |\nabla E|^2) dA, \tag{2.11}$$

kjer $K^E = K^N$ označuje Gaussovo ukrivljenost ploskve M.

2.2 Weierstrassova formula

Naj bo ploskev M orientabilna in $x\colon M \to \mathbb{R}^n$ imerzija razreda $\mathcal{C}^2$. Potem preslikava x določa enolično strukturo Riemannove ploskve na M, kjer je x konformna imerzija. Zato bomo v nadaljevanju obravnavali Riemannove ploskve in pripadajoče konformne imerzije v Evklidski prostor. Prvi rezultat, ki ga navajamo, opisuje ekvivalentne pogoje minimalnosti ploskve M.

Izrek 2.8. *Naj bo M odprta Riemannova ploskev, $n \geq 3$ in $x = (x_1, \ldots, x_n)\colon M \to \mathbb{R}^n$ konformna imerzija razreda $\mathcal{C}^2$. Naslednje trditve so ekvivalentne:*

1. *x je minimalna ploskev.*
2. *Vektorsko polje povprečne ukrivljenosti preslikave x je ničelno, tj. $\mathbf{H} = 0$.*
3. *x je harmonična, tj. $\Delta x = 0$.*
4. *1-forma $\partial x = (\partial x_1, \ldots, \partial x_n)$ z vrednostmi v $\mathbb{C}^n$ je holomorfna in velja*
$$(\partial x_1)^2 + \cdots + (\partial x_n)^2 = 0. \tag{2.12}$$
5. *Naj bo θ holomorfna 1-forma na M, ki ni nikjer enaka* 0. *Potem je preslikava $f = 2\partial x/\theta\colon M \to \mathbb{C}^n$ holomorfna z vrednostmi na* ničelni kvadriki
$$\mathbf{A} = \{(z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{C}^n; z_1^2 + \cdots + z_n^2 = 0\}. \tag{2.13}$$
Nadalje je Riemannova metrika na M, inducirana s konformno imerzijo x, enaka
$$g = x^* ds^2 = |dx_1|^2 + \cdots + |dx_n|^2 = 2(|\partial x_1|^2 + \cdots |\partial x_n|^2). \tag{2.14}$$

Definicija 2.9. Naj bo $x\colon M \to \mathbb{R}^n$ harmonična preslikava. Njen *pretok* je homomorfizem grup $\mathrm{Flux}_x\colon H_1(M, \mathbb{Z}) \to \mathbb{R}^n$, definiran s predpisom
$$\mathrm{Flux}_x([C]) = \int_C d^c x. \tag{2.15}$$

V definiciji pretoka je $[C] \in H_1(M, \mathbb{Z})$, integral pa je odvisen le od homološkega razreda poti C, zato bomo v nadaljevanju pisali kar $\mathrm{Flux}_x(C)$.

Definicija 2.10.
1. Naj bo M odprta Riemannova ploskev in $n \geq 3$. Holomorfno imerzijo $z = (z_1, \ldots, z_n)\colon M \to \mathbb{C}^n$, za katero velja $(\partial z_1)^2 + \cdots + (\partial z_n)^2 = 0$, imenujemo *holomorfna ničelna krivulja* v $\mathbb{C}^n$.
2. Naj bo $z = x + \imath y\colon M \to \mathbb{C}^n$ holomorfna ničelna krivulja. Njena realni del in imaginarni del, $x, y\colon M \to \mathbb{R}^n$ imenujemo *konjugirani minimalni ploskvi.*
3. Naj bo $t \in \mathbb{R}$. Predstavnike 1-parametrične družine $x^t = \Re(e^{\imath t} z)\colon M \to \mathbb{R}^n$ imenujemo *asociirane minimalne ploskve* holomorfne ničelne krivulje z.

Izrek 2.11 (Weierstrassova predstavitev konformnih minimalnih ploskev in holomorfnih ničelnih krivulj)**.** *Naj bo $n \geq 3$ in M odprta Riemannova ploskev, na kateri definiramo holomorfno 1-formo $\Phi = (\phi_1, \dots, \phi_n)$ z vrednsotmi v $\mathbb{C}^n$, ki je povsod neničelna, in zadošča*

1. $\sum_{j=1}^{n} \phi_j^2 = 0$,
2. $\Re \int_C \Phi = 0$ *za vse* $[C] \in H_1(M, \mathbb{Z})$.

Potem za poljuben izbor točk $p_0 \in M$ in $x_0 \in \mathbb{R}^n$ predpis $x\colon M \to \mathbb{R}^n$,

$$x(p) = x_0 + \Re \int_{p_0}^{p} \Phi, \ p \in M, \tag{2.16}$$

podaja dobro definirano konformno minimalno imerzijo. Zanjo velja

$$2\partial x = \Phi \quad in \quad g = x^* ds^2 = |dx|^2 = \frac{1}{2}|\Phi|^2. \tag{2.17}$$

Če velja še $\int_C \Phi = 0$ za vse $[C] \in H_1(M, \mathbb{Z})$, potem za poljuben izbor točk $p_0 \in M$ in $z_0 \in \mathbb{C}^n$ predpis $z\colon M \to \mathbb{C}^n$,

$$z(p) = z_0 + \int_{p_0}^{p} \Phi, \ p \in M, \tag{2.18}$$

podaja dobro definirano holomorfno ničelno krivuljo. Zanjo velja

$$\partial z = \Phi \quad in \quad z^* ds^2 = |dz|^2 = |\partial z|^2 = |\Phi|^2. \tag{2.19}$$

Opomba 2.12. Vsaka konformna minimalna imerzija $x\colon M \to \mathbb{R}^n$ je oblike 2.16 in vsaka holomorfna ničelna krivulja $z\colon M \to \mathbb{C}^n$ je oblike 2.18. Prav zato je Weierstrassova predstavitev elegantna metoda za konstrukcijo opisanih preslikav.

Če konformno minimalno imerzijo $x\colon M \to \mathbb{R}^n$ poznamo, potem pripadajočo povsod neničelno holomorfno 1-formo $\Phi = 2\partial x$ z vrednostmi v $\mathbb{C}^n$ imenujemo *Weierstrass data* preslikave x. Analogno, za holomorfno ničelno krivuljo $z\colon M \to \mathbb{C}^n$ pripadajočo 1-formo $\Phi = \partial z = dz$ imenujemo *Weierstrass data* preslikave z.

Definicija 2.13. *Jordanov lok* je pot v ravnini, ki je topološko izomorfna intervalu $[0, 1]$. *Jordanova krivulja* je ravninska krivulja, ki je topološko ekvivalentna enotski krožnici.

Definicija 2.14. Naj bo M gladka ploskev, K končna unija paroma disjunktnih kompaktnih domen s kosoma zvezno odvedljivimi robovi v M ter $E = S \setminus K^\circ$ unija končno mnogo paroma disjunktnih gladkih Jordanovih lokov in zaprtih Jordanovih krivulj, ki se dotikajo K kvečjemu v svojih krajiščih in sekajo rob K transverzalno. Kompaktno podmnožico v M oblike $S = K \cup E$ imenujemo *Admissible set*.

Definicija 2.15. Naj bo M povezana odprta Riemannova ploskev ali kompaktna Riemannova ploskev z robom, na kateri je definirana povsod neničelna holomorfna 1-forma Θ. Konformno minimalno imerzijo $x\colon M \to \mathbb{R}^n$ imenujemo:

1. *flat*, če je slika $x(M)$ vsebovana v afini ravnini v $\mathbb{R}^n$; sicer pravimo, da je x *nonflat*;

2. *full*, če je preslikava $f = 2\partial x/\Theta \colon M \to \mathbf{A}_*^{n-1}$ full, tj. $\mathbb{C}$-linearna ogrinjača slike $f(M)$ je enaka $\mathbb{C}^n$;

3. *nedegenerirana*, če slika $x(M)$ ni vsebovana v nobeni hiperravnini v $\mathbb{R}^n$.

V dimenziji $n = 3$ za konformno minimalno imerzijo vsi zgornji pojmi sovpadajo. V višjih dimenzijah ($n \geq 4$) veljata implikaciji

$$\text{full} \;\Rightarrow\; \text{nedegenerirana} \;\Rightarrow\; \text{nonflat}.$$

3 Izerki o aproksimaciji in interpolaciji minimalnih ploskev

Literatura