UNIVERZA V LJUBLJANI
FAKULTETA ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

Matematika – 2. stopnja

Tjaša Vrhovnik

MINIMALNE PLOSKVE

Magistrsko delo

Mentor: prof. dr. Franc Forstnerič

Ljubljana, 2021

Zahvala

Kazalo

Program dela

Osnovna literatura

Literatura mora biti tukaj posebej samostojno navedena (po pomembnosti) in ne le citirana. V tem razdelku literature ne oštevilčimo po svoje, ampak uporabljamo okolje itemize in ukaz plancite, saj je celotna literatura oštevilčena na koncu.

[?]

[?]

[?]

[?]

Podpis mentorja:

Minimalne ploskve

POVZETEK

Tukaj napišemo povzetek vsebine. Sem sodi razlaga vsebine in ne opis tega, kako je delo organizirano.

English translation of the title

ABSTRACT

An abstract of the work is written here. This includes a short description of the content and not the structure of your work.

Math. Subj. Class. (2010): oznake kot 74B05, 65N99, na voljo so na naslovu `http://www.ams.org/msc/msc2010.html`

Ključne besede:

Keywords:

1 Uvod

2 Osnovni pojmi

2.1 Mnogoterosti

Definicija 2.1. Naj bo $n \in \mathbb{N}$. Topološki prostor M z lastnostmi:

1. M je Hausdorffov,
2. M je 2-števen,
3. M je lokalno evklidski prostor dimenzije n (za vsak $p \in M$ obstajata odprta okolica $U \subset M$ in homeomorfizem $\Phi\colon U \to V \subset \mathbb{R}^n$, kjer je V odprta množica),

imenujemo *topološka mnogoterost* dimenzije n.

Na topološki mnogoterosti M dimenzije n definiramo *atlas* $\mathcal{U} = \{(U_i, \Phi_i);\ i \in I\}$ kot družino parov (U_i, Φ_i), kjer je $\{U_i\}_{i\in I}$ odprto pokritje mnogoterosti M, preslikave $\Phi_i\colon U_i \to \Phi_i(U_i) \subset \mathbb{R}^n$ pa so homeormorfizmi za vse i. Par (U_i, Φ_i) imenujemo *lokalna karta*. Vzemimo lokalni karti (U_i, Φ_i) in (U_j, Φ_j), $i \neq j$, za kateri velja $U_{ij} = U_i \cap U_j \neq \emptyset$. Difeomorfizmu $\Phi_{ij} = \Phi_j \circ \Phi_i^{-1}\colon \Phi_i(U_{ij}) \to \Phi_j(U_{ij})$ med odprtima podmnožicama $\mathbb{R}^n$ pravimo *prehodna preslikava* med lokalnima kartama. Atlas je razreda $\mathcal{C}^r$ za $r \geq 1$, kadar so prehodne preslikave med vsemi lokalnimi kartami difeomorfizmi razreda $\mathcal{C}^r$. V tem primeru rečemo, da je M *mnogoterost razreda* $\mathcal{C}^r$. V posebnem gladek atlas določa gladko mnogoterost.

Definicija 2.2. Naj bo X mnogoterost razreda $\mathcal{C}^r$ razsežnosti $\dim X = n$ in $M \subset X$ njena podmnožica. Če za vsako točko $p \in M$ obstaja lokalna karta (U, Φ) glede na atlas $\mathcal{U}$ mnogoterosti X, tako da je preslikava $\Phi\colon U \to V \subset \mathbb{R}^n$ homeomorfizem in velja $\Phi(M \cap U) = V \cap (\mathbb{R}^m \times \{0\}^{n-m})$, potem M imenujemo *podmnogoterost* razreda $\mathcal{C}^r$ razsežnosti $\dim M = m$.

Definicija 2.3 (Orientacija mnogoterosti)**.** Naj bo M gladka mnogoterost in $\mathcal{U}$ pripadajoč gladek atlas. Lokalni karti (U, ϕ) in (V, ψ) določata isto orientacijo na M, če za poljubno točko $p \in U \cap V \neq \emptyset$ velja $\det(d(\psi \circ \phi^{-1})_{\phi(p)}) > 0$. Kadar poljubni lokalni karti glede na izbrani atlas $\mathcal{U}$ določata isto orientacijo, pravimo, da je atlas $\mathcal{U}$ *orientiran*. Nadalje je mnogoterost *orientabilna*, če premore orientiran atlas. *Orientacija* mnogoterosti M je izbor maksimalnega orientiranega atlasa na M.

Definirati želimo še tangentni prostor mnogoterosti. Naj bo M gladka mnogoterost in izberimo atlas $\mathcal{U} = \{(U_i, \Phi_i);\ i \in I\}$ na njej. Naj bo točka $p \in U_i \subset M$ za nek indeks i. Gladki krivulji[1] $\gamma_1, \gamma_2\colon (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$ sta *ekvivalentni*, če izpolnjujeta pogoja $\gamma_1(0) = \gamma_2(0) = p$ in $\frac{d}{dt}|_{t=0}\Phi_i(\gamma_1(t)) = \frac{d}{dt}|_{t=0}\Phi_i(\gamma_2(t))$ za vse $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$. Ekvivalenco krivulj označimo z $\gamma_1 \sim \gamma_2$[2].

[1] Krivulja γ_j je gladka, če je preslikava $\Phi_i \circ \gamma_j\colon (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathbb{R}^n$, $j = 1, 2$, gladka v običajnem smislu.

[2] Relacija $\sim$ je ekvivalenčna relacija.

Definicija 2.4. Naj bo M mnogoterost in $p \in M$ točka na njej. *Tangentni vektor* v_p na M v točki p ustreza ekvivalenčnemu razredu $[\gamma]$ krivulje $\gamma\colon (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$, za katero velja $\gamma(0) = p$.

Unija vseh tangentnih vektorjev na M v točki p določa *tangentni prostor* T_pM mnogoterosti M v točki p.

Naj bosta M in N mnogoterosti dimenzij $\dim M = m$, $\dim N = n$ $(m, n \in \mathbb{N})$. Naj bo $r \geq 0$. Pravimo, da je zvezna preslikava $f\colon M \to N$ *razreda* $\mathcal{C}^r$ *v točki* $p \in M$, če obstajata taki $\mathcal{C}^r$ karti (U, Φ) na M v okolici točke $p \in M$ in (V, Ψ) na N v okolici točke $f(p) \in N$, da je preslikava $F = \psi \circ f \circ \Phi^{-1}$ razreda $\mathcal{C}^r$ v okolici točke $\Phi(p)$. Če to velja za poljubno točko $p \in M$, je f *razreda* $\mathcal{C}^r$; pišemo $f \in \mathcal{C}^r(M, N)$.

Vzemimo gladki (oz. razreda $\mathcal{C}^r$, $r \geq 1$) mnogoterosti M in N ter točko $p \in M$. *Diferencial* gladke (oz. razreda $\mathcal{C}^r$) preslikave $f\colon M \to N$ je linearna preslikava $df\colon T_pM \to T_{f(p)}N$, definirana s predpisom

$$(df_p)[\gamma] = [f \circ \gamma].$$

Definicija 2.5. Naj bo $f\colon M \to N$ gladka preslikava med gladkima mnogoterostima. Preslikava f se imenuje

1. *imerzija* v točki $p \in M$, če je njen diferencial $df_p\colon T_pM \to T_{f(p)}N$ injektiven;
2. *submerzija* v točki $p \in M$, če je njen diferencial df_p surjektiven;
3. *lokalni difeomorfizem* v točki $p \in M$, če obtstajata taki okolici $U \subset M$ za p in $V \subset N$ za $f(p)$, da je zožitev $f|_U\colon U \to V$ difeomorfizem;
4. *vložitev*, če je f injektivna preslikava in slika $f(M) \subset N$ podmnogoterost.

Opomba 2.6. Z uporabo izreka o implicitni preslikavi dokažemo naslednje: Če je $f\colon M \to N$ submerzija v okolici točke $p \in U$ ($U \subset M$ odprta), potem je praslika $f^{-1}f(p))$ podmnogoterost v M razsežnosti $\dim M - \dim N$.

Definicija 2.7. Naj bo M gladka mnogoterost. Za vsako točko $p \in M$ definiramo simetrično pozitivno-definitno bilinearno preslikavo $g_p\colon T_pM \times T_pM \to \mathbb{R}$, ki je gladko odvisna od p. Družino preslikav g_p imenujemo *Riemannova metrika* g na mnogoterosti M. Gladki mnogoterosti, opremljeni z Riemannovo metriko, pravimo *Riemannova mnogoterost.*

Izkaže se, da vsaka mnogoterost razreda $\mathcal{C}^{r+1}$ premore Riemannovo metriko razreda $\mathcal{C}^r$.

Naj bo M domena v $\mathbb{R}^n$ s koordinatami $x = (x_1, \ldots, x_n)$. Riemannova metrika na M je tedaj oblike

$$g_p = \sum_{i,j=1}^{n} g_{i,j}(p) dx_i dx_j, \quad p \in M, \tag{2.1}$$

kjer je $G(p) = [g_{i,j}(p)]_{i,j=1}^n$ simetrična pozitivno-definitna matrika za vse $p \in M$. Za tangentna vektorja $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$, $\eta = (\eta_1, \ldots, \eta_n) \in \mathbb{R}^n$ velja

$$g_p(\xi, \eta) = \sum_{i,j=1}^{n} g_{i,j}(p) \xi_i \eta_j = G(p)\xi \cdot \eta. \tag{2.2}$$

Vzemimo gladko imerzijo $x\colon M \to \widetilde{M}$ in Riemannovo metriko $\tilde{g}$ na $\widetilde{M}$. *Povlečeno metriko* $g = x^*\tilde{g}$ na M, definirano na paru tangentnih vektorjev $\xi, \eta \in T_pM$, podaja predpis

$$g_p(\xi,\eta) = \tilde{g}_{x(p)}(dx_p(\xi), dx_p(\eta)). \tag{2.3}$$

Če je metrika $\tilde{g}$ razreda $\mathcal{C}^r$ in imerzija x razreda $\mathcal{C}^{r+1}$, potem je tudi povlečena metrika $g = x^*\tilde{g}$ razreda $\mathcal{C}^r$.

Primer 2.8 (Prva fundamentalna forma)**.** Oglejmo si primer Riemannove metrike na realnem n-razsežnem Evklidskem prostoru $\mathbb{R}^n$. Če izberemo standardne koordinate $x = (x_1, \ldots, x_n)$, *Evklidsko metriko* definira predpis

$$ds^2 = (dx_1)^2 + \cdots + (dx_n)^2; \tag{2.4}$$

to je Riemannova metrika, ki ustreza identični matriki I_n. Naj bo D domena v $\mathbb{R}^2$ in $x\colon D \to \mathbb{R}^n$ imerzija, podana s predpisom $x(u_1,u_2) = (x_1(u_1,u_2), \ldots, x_n(u_1,u_2))$ za $(u_1,u_2) \in D$. Pripadajoča metrika na D je enaka

$$g = x^*ds^2 = g_{1,1}du_1^2 + g_{1,2}du_1du_2 + g_{2,1}du_2du_1 + g_{2,2}du_2^2, \tag{2.5}$$

$$g_{1,1} = |x_{u_1}|^2,\ g_{1,2} = g_{2,1} = x_{u_1}\cdot x_{u_2},\ g_{2,2} = |x_{u_2}|^2 \tag{2.6}$$

in jo imenujemo *prva fundamentalna forma* ploskve $M = x(D)$.

Definicija 2.9. *Riemannova ploskev* je kompleksna mnogoterost kompleksne dimenzije 1.

Definicija 2.10. Naj bo M mnogoterost brez roba in K njena zaprta podmnožica. Povezano komponento v $M \setminus K$, katere zaprtje je kompaktno v M, imenujemo *luknja* množice K v M.

Definicija 2.11. *Jordanov lok* je pot v ravnini, ki je topološko izomorfna intervalu $[0,1]$. *Jordanova krivulja* je ravninska krivulja, ki je topološko ekvivalentna enotski krožnici.

Spomnimo se še enega topološkega pojma. Naj bo M povezana mnogoterost in $x_0 \in M$ izbrana točka. Zanimajo nas zanke v M, ki gredo skozi izbrano točko, natančneje, zvezne preslikave $\gamma\colon [0,1] \to M$, $\gamma(0) = \gamma(1) = x_0$. Označimo množico vseh takih zank z $\Gamma(x_0)$ in na njej vpeljimo ekvivalenčno relacijo $\sim$ na naslednji način:

$\gamma_1 \sim \gamma_2 \iff$ obstaja zvezna preslikava $H\colon [0,1]\times[0,1] \to M$, ki zadošča

- $H(0,s) = H(1,s) = x_0$ za vse $s \in [0,1]$,
- $H(t,0) = \gamma_1(t)$ in $H(t,1) = \gamma_2(t)$ za vse $t \in [0,1]$.

Preslikavo H imenujemo *homotopija*, zanki, ki premoreta homotopijo pa *homotopsko ekvivalentni*. Kvocient $\pi_1(M,x_0) = \Gamma(x_0)/_\sim$ imenujemo *prva fundamentalna grupa* mnogoterosti M glede na točko x_0, njeno abelizacijo $H_1(M,\mathbb{Z})$ pa *prva homološka grupa* mnogoterosti M s celimi koeficienti.

2.2 Vektorska polja in diferencialne 1-forme

Definicija 2.12. Naj bo $r \geq 1$ ter E in B mnogoterosti razreda $\mathcal{C}^r$. Surjektivno preslikavo $\pi\colon E \to B$ imenujemo realen *vektorski sveženj* ranga n in razreda $\mathcal{C}^r$, če

1. je vsako vlakno $\pi^{-1}(b) = E_b$, $b \in B$, n-razsežen realen vektorski prostor: $E_b \cong \mathbb{R}^n$,

2. za vsak $b \in B$ obstajata okolica $b \in U \subset B$ in difeomorfizem $\tau\colon E|_U \to U \times \mathbb{R}^n$ razreda $\mathcal{C}^r$, tako da je za vsak $x \in U$ preslikava $\tau_x\colon E_x \to \{x\} \times \mathbb{R}^n$ linearni izomorfizem. Preslikavi τ_x pravimo *lokalna trivializacija*.

Če ima vlakno strukturo kompleksnega vektorskega prostora, na ustreznih mestih v definiciji zamenjamo $\mathbb{R}^n$ s $\mathbb{C}^n$ – v tem primeru dobimo kompleksen vektorski sveženj.

Definicija 2.13. *Prerez* vektorskega svežnja $\pi\colon E \to B$ je preslikava $s\colon B \to E$, za katero velja $\pi \circ s = id_B$. Ekvivalentno, za vsak $b \in B$ je $s(b) \in \pi^{-1}(b) = E_b$, torej prerez vsako točko baznega prostora slika v točko v vlaknu nad b.

Omenimo poseben primer vektorskega svežnja, ki bo pomemben v nadaljevanju. Naj bo X mnogoterost razreda $\mathcal{C}^r$ z $r \geq 1$. Njen *tangentni sveženj* je disjunktna unija tangentnih prostorov na X v točkah $x \in X$:

$$TX = \bigsqcup_{x \in X} T_x X.$$

Tangentni sveženj je vektorski sveženj ranga $n = \dim X$ in razreda $\mathcal{C}^{r-1}$.

Definicija 2.14. Naj bo X mnogoterost razreda $\mathcal{C}^r$, kjer je $r \geq 1$. Prerez njenega tangentnega svežnja, to je preslikava

$$V\colon X \to TX,\ V(x) = V_x \in T_x X,\ x \in X,$$

se imenuje *vektorsko polje* na X. Prostor vektorskih polj na X označimo z $\Gamma(X)$.

Definicija 2.15. Naj bo V vektorsko polje na mnogoterosti X in $x \in X$ točka, v kateri je vektorsko polje neničelno. Pot $\gamma_x\colon (-\varepsilon, \varepsilon) \subset \mathbb{R} \to X$ razreda $\mathcal{C}^1$ je *integralna krivulja* vektorskega polja V skozi x, če je $\gamma_x(0) = x$ in

$$\dot{\gamma}_x(t) = V(\gamma_x(t)) \in T_{\gamma_x(t)} X,\ t \in (-\varepsilon, \varepsilon).$$

Naj bo $U \subset X$ odprta množica, na kateri je vektorsko polje V neničelno. *Tok vektorskega polja* V na U je 1-parametrična družina preslikav $\Phi_t\colon U \to \Phi_t(U)$, definiranih s predpisi $\Phi_t(x) = \gamma_x(t)$.

Vektorsko polje V lahko v lokalnih koordinatah $x = (x_1, \dots, x_n)$ na odprti podmnožici $U \subset X$ zapišemo kot

$$V(m) = \sum_{i=1}^{n} V_i(m) \frac{\partial}{\partial x_i}|_m, \tag{2.7}$$

kjer so V_i realne funkcije na U, diferenciali $\frac{\partial}{\partial x_i}$ pa v vsaki točki $m \in U$ sestavljajo bazo tangentnega prostora T_mX. Pot $\gamma(t) = (\gamma_1(t), \dots, \gamma_n(t))$ na X je po definiciji integralna krivulja vektorskega polja V natanko takrat, ko zadošča enakosti

$$\dot{\gamma}(t) = \sum_{i=1}^{n} V_i(\gamma(t)) \frac{\partial}{\partial x_i}.$$

Rešujemo sistem n navadnih diferencialnih enačb ($i \in \{1, \dots, n\}$)

$$\dot{\gamma}_i(t) = V_i(\gamma_1(t), \dots, \gamma_n(t)),$$

katerega lokalna rešitev je tok vektorskega polja V na X, $\Phi_t(m)$. Po eksistenčnem izreku za navadne diferencialne enačbe lokalna rešitev vedno obstaja.

Zanimajo nas duali tangentnih prostorov ter prerezi pripradajočih svežnjev.

Definicija 2.16. Naj bo X gladka mnogoterost. Dualni sveženj njenega tangentnega svežnja imenujemo *kotangentni sveženj*

$$T^*X = (TX)^* = \bigsqcup_{x \in X} T_x^*X. \tag{2.8}$$

Tu je T_x^*X *kotangentni prostor* mnogoterosti X v točki $x \in X$, ki je sestavljen iz linearnih funkcionalov $T_x^*X \to \mathbb{R}$.

(Diferencialna) 1-forma na mnogoterosti X je prerez $\alpha \colon X \to T^*X$ kotangentnega svežnja. Prostor diferencialnih 1-form na X označimo z $\Omega^1(X)$.

Diferencialno 1-formo $\omega \in \Omega^1(X)$ imenujemo *eksaktna*, če velja $\omega = df$ za neko funkcijo $f \colon X \to \mathbb{R}$.

Podobno kot vektorska polja lahko tudi 1-forme predstavimo lokalno. Naj bo U odprta podmnožica v X z lokalnimi koordinatami $x = (x_1, \dots, x_n)$. Če so a_i realne funkcije na U in dx_i diferenciali koordinatnih funkcij, ki v vsaki točki $m \in U$ tvorijo bazo kotangentnega prostora T_m^*X, potem ima poljubna 1-forma na U obliko

$$\alpha(m) = \sum_{i=1}^{n} a_i(m) dx_i|_m. \tag{2.9}$$

Baza kotangentnega prostora je dualna bazi tangentnega prostora; natančneje,

$$dx_i(m) \left(\frac{\partial}{\partial x_j}(m) \right) = \delta_{ij}.$$

2.3 Ukrivljenost ploskve

Naj bo M ploskev, $n \geq 3$ in $x \colon M \to \mathbb{R}^n$ imerzija razreda $\mathcal{C}^2$. Izberimo lokalno karto (U, ϕ) na M in koordinate $u = (u_1, u_2) \in U$, tako da je zožitev $x|_U \colon U \to \mathbb{R}^n$ vložitev na orientabilno ploskev $S = x(U) \subset \mathbb{R}^n$. Izberimo točko $q \in U$ in s $p = x(q) \in S$ označimo njeno sliko na ploskvi S. Naj bo $t \mapsto (u_1(t), u_2(t)) \in U$ parametrizacija krivulje razreda $\mathcal{C}^2$ ter $q = (u_1(t_0), u_2(t_0))$ za nek $t_0 \in \mathbb{R}$. Vsaka krivulja, vložena v S, ki vsebuje točko p, je tedaj oblike

$$\alpha(t) = x(u_1(t), u_2(t)). \tag{2.10}$$

Označimo z $s = s(t)$ ločno dolžino krivulje α. Predpostavimo, da izbrana točka p ustreza $p = \alpha(s_0) \in S$, označimo pripadajoč tangentni vektor $\nu = \alpha'(s_0) \in T_pS$ ter enotsko normalo $N \in N_pS$ v točki p. Količino

$$\kappa^N(p, \nu) = \alpha''(s_0) \cdot N \tag{2.11}$$

imenujemo *normalna ukrivljenost* ploskve S v točki p v tangentni smeri ν in smeri enotske normale N.

Oglejmo si preslikavo $\kappa^N(p, \cdot)\colon \{\nu \in T_pS;\ |\nu| = 1\} \to \mathbb{R}$, $\nu \mapsto \kappa^N(p, \nu)$, kjer je $p \in S$ izbrana fiksna točka. Kot zvezna preslikava na kompaktni množici doseže minimalno in maksimalno vrednost,

$$\kappa_1^N(p) = \min_{|\nu|=1} \kappa^N(p, \nu), \quad \kappa_2^N(p) = \max_{|\nu|=1} \kappa^N(p, \nu), \tag{2.12}$$

katerima pravimo *glavni ukrivljenosti* ploskve S (v točki p in normalni smeri N).

Definicija 2.17.

1. *Povprečna ukrivljenost* ploskve S v točki p in normalni smeri N je povprečje glavnih ukrivljenosti,

$$H^N(p) = \frac{1}{2}\left(\kappa_1^N(p) + \kappa_2^N(p)\right). \tag{2.13}$$

2. Njun produkt

$$K^N(p) = \kappa_1^N(p) \cdot \kappa_2^N(p) \tag{2.14}$$

definira *Gaussovo ukrivljenost* ploskve S v točki p in normalni smeri N.

3. Projekcijo povprečne ukrivljenosti na normalni prostor N_pS v smeri tangentnega prostora T_pS imenujemo *vektor povprečne ukrivljenosti* ploskve S v točki p in označimo s $\mathbf{H}$. Enačba 2.13 se v tej notaciji glasi $H^N(p) = \mathbf{H} \cdot N$ za vsak $N \in N_pS$.

Primer 2.18 (Vektor povprečne ukrivljenosti za $\boldsymbol{n = 3}$.). Naj bo $U \subset M$ odprta podmnožica, $x\colon U \to \mathbb{R}^3$ imerzija in označimo z $S = x(U)$ sliko, ki je ploskev, vložena v $\mathbb{R}^3$. V poljubni točki $p \in S$ je zato normalni prostor N_pS enorazsežen, torej premore natanko dve enotski normalni vektorski polji, ki se razlikujeta za predznak ($\pm N$). Izbor orientacije na U enotsko normalno vektorsko polje enolično določa, zato ga lahko predstavimo kot preslikavo

$$N\colon S \to \mathbb{S}^2,$$

imenovano *Gaussova preslikava* vložene ploskve S. Če je $x = x(u_1, u_2)$, $(u_1, u_2) \in U$, lokalna parametrizacija ploskve, dobimo eksplicitno formulo $N = \frac{x_{u_1} \times x_{u_2}}{|x_{u_1} \times x_{u_2}|}$.

Vektor povprečne ukrivljenosti je po definiciji pravokoten na S, zato obstaja funkcija λ, da velja $\mathbf{H} = \lambda N$. Vemo še, da je normalni vektor enotski, kar nam da zvezo

$$\begin{aligned} H = H^N = \mathbf{H} \cdot N = \lambda N \cdot N = \lambda, \\ \mathbf{H} = H \cdot N. \end{aligned} \tag{2.15}$$

Z besedami je vektor povprečne ukrivljenosti enak produktu povprečne ukrivljenosti in Gaussove preslikave.

Glavni ukrivljenosti sta odvisni od enotske normale; če namesto pozitivno predznačene izberemo negativno enotsko normalo, se glavnima ukrivljenostma in posledično povprečni ukrivljenosti spremeni predznak. Po zgornji formuli pa vidimo, da je vektor povprečne ukrivljenosti neodvisen od izbora enotskega normalnega vektorskega polja.

Lema 2.19. *Naj bo $x\colon M \to \mathbb{R}^n$ imerzija razreda $\mathcal{C}^2$. Tedaj velja*

$$\Delta x = 2\mathbf{H}, \tag{2.16}$$

kjer je Δ Laplaceov operator glede na Riemannovo metriko $g = x^* ds^2$ v točki $q \in M$ in $\mathbf{H}$ vektor povprečne ukrivljenosti v točki $p = x(q) \in S$.

2.4 Holomorfne in harmonične funkcije

Naj bo M Riemannova ploskev in $\zeta = u + iv$ lokalna holomorfna koordinata na njej. Definiramo *diferencial*

$$d = \frac{\partial}{\partial u} du + \frac{\partial}{\partial v} dv = \partial + \bar{\partial} = \frac{\partial}{\partial \zeta} d\zeta + \frac{\partial}{\partial \bar{\zeta}} d\bar{\zeta} \tag{2.17}$$

in *konjugirani diferencial*

$$d^c = 2\Im(\partial) = i(\bar{\partial} - \partial). \tag{2.18}$$

Velja

$$d + id^c = 2\partial, \quad d - id^c = 2\bar{\partial},$$
$$dd^c = 2i\partial\bar{\partial} = \left(\frac{\partial^2}{\partial u^2} + \frac{\partial^2}{\partial v^2}\right) du \wedge dv = \Delta du \wedge dv,$$

kjer je Δ Laplaceov operator glede na Evklidsko metriko.
Po definiciji je diferenciabilna funkcija $f = x + iy\colon M \to \mathbb{C}^n$ *holomorfna* ($\bar{\partial} f = 0$) natanko tedaj, ko v poljubnih lokalnih holomorfnih koordinatah reši Cauchy-Riemannov sistem enačb $x_u = y_v,\ x_v = -y_u$.
Funkcija $x\colon M \to \mathbb{C}^n$ razreda $\mathcal{C}^2(M)$ je *harmonična*, če velja $dd^c x = 0$. Harmonične funkcije karakteriziramo z naslednjimi ekvivalenčnimi pogoji:

$$x \in \mathcal{C}^2(M) \text{ je harmonična} \iff dd^c x = 0 \iff \partial\bar{\partial} x = 0 \iff \Delta x = 0.$$

Vsaka holomorfna funkcija je torej harmonična. Vzemimo realno harmonično funkcijo $x\colon M \to \mathbb{R}^n$ razreda $\mathcal{C}^2(M)$ in naj bo $D \subset M$ enostavno povezana[3] domena. Zaradi pogoja o harmoničnosti vemo, da je 1-forma $d^c x$ eksaktna. Za izbrano fiksno točko $p_0 \in D$ definirajmo funkcijo $y\colon D \to \mathbb{C}^n$ razreda $\mathcal{C}^2(D)$ s predpisom

$$y(p) = \int_{p_0}^{p} d^c x + C, \tag{2.19}$$

[3] Topološki prostor X je *enostavno povezan* natanko tedaj, ko je s potmi povezan in ima v vsaki točki trivialno prvo fundamentalno grupo, $\pi_1(X) = 0$.

kjer je C konstanta. Imenujemo jo *harmonična konjugiranka* funkcije x. Velja enakost $dy = d^c x$, nova funkcija $z\colon D \to \mathbb{C}^n$, $z = x + iy$, imenovana *kompleksna krivulja* v $\mathbb{C}^n$, pa je holomorfna. Zaključimo, da je zožitev realne harmonične funkcije na enostavno povezano domeno v M enaka realnemu delu holomorfne funkcije $x+iy$, pri čemer je y harmonična konjugiranka od x, definirana s predpisom 2.19.

Definicija 2.20. Naj bo $x\colon M \to \mathbb{R}^n$ harmonična preslikava. Njen *pretok* je homomorfizem grup $\mathrm{Flux}_x\colon H_1(M, \mathbb{Z}) \to \mathbb{R}^n$, definiran s predpisom

$$\mathrm{Flux}_x([C]) = \int_C d^c x. \tag{2.20}$$

V definiciji pretoka je $[C] \in H_1(M, \mathbb{Z})$, integral pa je odvisen le od homološkega razreda poti C, zato bomo v nadaljevanju pisali kar $\mathrm{Flux}_x(C)$. V zgornjem smislu lahko rečemo, da pretok meri, koliko 1-formi $d^c x$ manjka do eksaktnosti. Realna harmonična preslikava x premore harmonično konjugiranko na M natanko tedaj, ko je $d^c x$ eksaktna 1-forma na M, to pa je ekvivalentno pogoju $\mathrm{Flux}_x(C) = 0$ za vsako sklenjeno krivuljo $C \subset M$.

2.5 Aproksimacijski izreki za Riemannove ploskve

Izrek 2.21 (Rungejev aproksimacijski izrek za Riemannove ploskve)**.** *Naj bo M Riemannova ploskev in K njena kompaktna podmnožica. Potem lahko vsako funkcijo f, ki je holomorfna na okolici K, aproksimiramo enakomerno na K z meromorfnimi funkcijami F na M brez polov na K, ter s holomorfnimi funkcijami na M, če K nima lukenj. Funkcije F lahko izberemo tako, da se z dano funkcijo f na končni množici točk v K ujemajo do izbranega končnega reda in da ima F pole v podmnožici $E \subset M \backslash K$, kjer E vsebuje točko v vsaki luknji množice K.*

Definicija 2.22. Naj bo K kompaktna podmnožica Riemannove ploskve M. Njena *holomorfna ogrinjača* je množica

$$\widehat{K}_{\mathcal{O}(M)} = \{p \in M;\ |f(p)| \leq \max_K |f| \text{ za vse } f \in \mathcal{O}(M)\}. \tag{2.21}$$

Če velja $K = \widehat{K}_{\mathcal{O}(M)}$, množico K imenujemo *Rungejeva množica*.

Izrek 2.23 (Bishop-Mergelyanov aproksimacijski izrek)**.** *Naj bo M odprta Riemannova ploskev in K njena kompaktna podmnožica brez lukenj (K je Rungejeva v M). Potem lahko vsako funkcijo v $\mathcal{A}(K)$ aproksimiramo enakomerno na K s funkcijami v $\mathcal{O}(M)$.*

Izrek 2.24 (Weierstrass-Florackov interpolacijski izrek)**.** *Naj bo M odprta Riemannova ploskev in K njena Rungejeva podmnožica. Naj bo $A = \{a_i\}_{i=1}^{\infty}$ zaprta diskretna podmnožica v M, U odprta podmnožica M, tako da je $A \cup K \subset U$ in f meromorfna funkcija na U z ničlami in poli le v točkah množice A. Potem za izbrane $\varepsilon > 0$ in števila $k_i \in \mathbb{N}$ obstaja meromorfna funkcija F na M, za katero velja:*

1. *$|F(z) - f(z)| < \varepsilon$ za vse $z \in K$,*
2. *v točkah a_i je razlika $F - f$ ničelna do reda k_i,*
3. *F nima ničel in polov na $M \backslash A$.*

3 Minimalne ploskve

3.1 Variacija ploščine

V tem razdelku bomo navedli klasično defincijo minimalne ploskve ter variacijski formuli, s katerima minimalne ploskve opišemo kot ploskve z ničelnim vektorjem povprečne ukrivljenosti.

Definicija 3.1. 1. Naj bo M gladka kompaktna ploskev z robom, $n \geq 3$ in naj bo preslikava $x\colon M \to \mathbb{R}^n$ imerzija razreda $\mathcal{C}^2$. *Variacija preslikave x s fiksnim robom* je 1-parametrična družina $\mathcal{C}^2$ preslikav

$$x^t\colon M \to \mathbb{R}^n,\ t \in (-\varepsilon, \varepsilon) \subset \mathbb{R}, \tag{3.1}$$

če je $x^0 = x$ in za vse t z intervala velja $x^t = x$ na bM.

2. Naj bo $p \in M$. *Variacijsko vektorsko polje* preslikave x^t je vektorsko polje, definirano s predpisom

$$E(p,t) = \frac{\partial x^t(p)}{\partial t} \in \mathbb{R}^n. \tag{3.2}$$

Opazimo, da je za dovolj majhne vrednosti t preslikava x^t imerzija. Po definiciji je na $bM \times (-\varepsilon, \varepsilon)$ variacijsko vektorsko polje E konstantno ničelno.

Definicija 3.2. Naj bo $x\colon M \to \mathbb{R}^n$ imerzija razreda $\mathcal{C}^2$. Sliko $x(M)$ imenujemo *minimalna ploskev*, če za vsako kompaktno domeno $D \subset M$ z gladkim robom bD in vsako gladko variacijo x^t preslikave x s fiksnim robom velja

$$\frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \mathrm{Area}(x^t(D)) = 0. \tag{3.3}$$

Ekvivalentno pravimo, da je minimalna ploskev stacionarna točka ploskovnega funkcionala Area.

Levo stran enakosti 3.3 imenujemo *prva variacija ploščine* pri $t = 0$. Slednjo z geometrijskimi lastnostmi preslikave x, natančneje ukrivljenostjo, povezuje *prva variacijska formula* v naslednjem izreku.

Izrek 3.3 (Prva variacijska formula)**.** *Naj bo M gladka kompaktna ploskev z robom, $n \geq 3$ in $x\colon M \to \mathbb{R}^n$ imerzija razreda $\mathcal{C}^2$. Naj bo $E = \partial x^t/\partial t|_{t=0}$ variacijsko vektorsko polje preslikave x^t pri $t = 0$, $\mathbf{H}$ vektorsko polje povprečne ukrivljenosti preslikave x in dA ploščinski element glede na Riemannovo metriko x^*ds^2, definirano na M. Potem za vsako gladko variacijo $x^t\colon M \to \mathbb{R}^n$ imerzije x s fiksnim robom velja*

$$\frac{d}{dt}\Big|_{t=0} Area(x^t(M)) = -2\int_M E \cdot \mathbf{H} dA. \tag{3.4}$$

Kaj nam prva variacijska formula pove, če se osredotočimo na poseben razred variacij imerzije? Predpostavimo, da je imerzija $x\colon M \to \mathbb{R}^n$ razreda $\mathcal{C}^4$, tj. je preslikava $\mathbf{H}$ vsaj razreda $\mathcal{C}^2$. Variacijo definirajmo s predpisom

$$x^t = x + tf\mathbf{H}, \tag{3.5}$$

kjer za f izberimo gladko nenegativno funkcijo na M, ki je ničelna na robu bM. Po definiciji je $x^t \in \mathcal{C}^2(M)$ variacija imerzije x s fiksnim robom. Računajmo

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\Big|_{t=0}\mathrm{Area}(x^t(M)) &= -2\cdot\int_M E\cdot\mathbf{H}dA = -2\cdot\int_M f\mathbf{H}\cdot\mathbf{H}dA\\ &= -2\cdot\int_M f|\mathbf{H}|^2dA \leq 0.\end{aligned}$$

Če je $\mathbf{H} = 0$ na M, je ploščina konstantna ($x^t = x$). Sicer obstaja točka, v kateri je $\mathbf{H} \neq 0$, in dodatno zahtevajmo, da je $f > 0$ v okolici neke take točke. Potem je $\frac{d}{dt}\Big|_{t=0}\mathrm{Area}(x^t(M)) < 0$. To pomeni, da z deformacijo poskve $x(M) \subset \mathbb{R}^n$ v smeri vektorja povprečne ukrivljenosti $\mathbf{H}$ ploščina za majhne $t > 0$ strogo pada.

Po prvi variacijski formuli 3.4 v primeru $\mathbf{H} = 0$ na M imerzija x očitno da minimalno ploskev. V nasprotnem z ustrezno izbiro vektorskega polja E na M ploščina variiranih ploskev $x^t(M)$ za majhne $t > 0$ in $x^t = x + tE$ strogo pada. Ta razmislek združuje naslednji rezultat.

Izrek 3.4. *Naj bo $x\colon M \to \mathbb{R}^n$ imerzija razreda $\mathcal{C}^2$. Ploskev $x(M)$ je minimalna natanko tedaj, ko je na M vektor povprečne ukrivljenosti $\mathbf{H}$ preslikave x identično enak* 0.

S podobnimi tehnikami kot v dokazu Izreka 3.3 izpeljemo *drugo variacijsko formulo*

$$\frac{d^2}{dt^2}\Big|_{t=0}\mathrm{Area}(x^t(M)) = \int_M (4|E|^2K^E + |\nabla E|^2)dA, \tag{3.6}$$

kjer $K^E = K^N$ označuje Gaussovo ukrivljenost ploskve M.

3.2 Weierstrassova formula

Naj bosta (M, g) in $(\widetilde{M}, \tilde{g})$ Riemannovi mnogoterosti z $\dim(M) \leq \dim(\widetilde{M})$. Imerzija $x\colon (M, g) \to (\widetilde{M}, \tilde{g})$ se imenuje *konformna*, če ohranja kote. Z drugimi besedami je povlečena metrika $x^*\tilde{g}$ konformno ekvivalentna metriki g, kar pomeni, da za pozitivno funkcijo $\mu > 0$ na M velja $x^*\tilde{g} = \mu g$.

Podobno pravimo, da je lokalna karta (U, ϕ) Riemannove ploskve (M, g) *izotermna* glede na Riemannovo metriko g, če za neko pozitivno funkcijo $\mu\colon \phi(U) \subset \mathbb{R}^2_{(x,y)} \to \mathbb{R}_+$ velja

$$(\phi^{-1})^*g = \mu\cdot(dx^2 + dy^2) = \mu\cdot ds^2_{\mathbb{R}^2}. \tag{3.7}$$

Naj bo ploskev M orientabilna in $x\colon M \to \mathbb{R}^n$ imerzija razreda $\mathcal{C}^2$. Potem preslikava x določa enolično strukturo Riemannove ploskve na M, kjer je x konformna imerzija. Zato bomo v nadaljevanju obravnavali Riemannove ploskve in pripadajoče konformne imerzije v Evklidski prostor.

3.2.1 Plateaujev problem in Dirichletov energijski integral

Drugi razlog za študij konformnih imerzij je fizikalen. Na minimalne ploskve lahko gledamo kot na rešitve Plateaujevega problema, katerega moramo najprej natančno formulirati.

Označimo z $\bar{\mathbb{D}}$ zaprt enotski disk z lokalnimi koordinatami (u_1, u_2) in izberimo gladko orientirano Jordanovo krivuljo $\Gamma \subset \mathbb{R}^n$. Naj bo $x\colon \bar{\mathbb{D}} \to \mathbb{R}^n$ kosoma zvezno odvedljiva imerzija, katere zožitev na rob diska $\mathbb{T}$ je monotona[4] parametrizacija $x|_{\mathbb{T}}\colon \mathbb{T} \to \Gamma$ Jordanove krivulje Γ. Spomnimo se, da je površina ploskve, določene z imerzijo x enaka

$$\mathrm{Area}(x) = \int_{\mathbb{D}} \sqrt{|x_{u_1}|^2 |x_{u_2}|^2 - |x_{u_1} \cdot x_{u_2}|^2} du_1 du_2. \tag{3.8}$$

Naloga je poiskati preslikavo, ki zadošča zgornjim zahtevam, površina pripadajoče ploskve pa je minimalna. Dodatno je smiselno obravnavati preslikave, ki dajo končno površino.

Ključ je *Dirichletov energijski integral*

$$\mathcal{D}(x) = \int_{\mathbb{D}} |\nabla x|^2 du_1 du_2 = \int_{\mathbb{D}} (|x_{u_1}|^2 + |x_{u_2}|^2) du_1 du_2, \tag{3.9}$$

ki ga s površino ploskve povezuje naslednji rezultat.

Lema 3.5. *Za preslikavo x kot zgoraj je Area$(x) \leq \frac{1}{2}\mathcal{D}(x)$. Enačaj velja natanko tedaj, ko je x konformna.*

Dokaz 1. Poljubna vektorja $x, y \in \mathbb{R}^n$ zadoščata

$$|x|^2|y|^2 - |x \cdot y|^2 \leq |x|^2|y|^2 \leq \frac{1}{4}(|x|^2 + |y|^2)^2.$$

Res, prva neenakost je očitna, druga pa je ekvivalentna neenakosti $(|x| - |y|)^2 \geq 0$, ki drži. Sledi $\sqrt{|x|^2|y|^2 - |x \cdot y|^2} \leq \frac{1}{2}(|x|^2 + |y|^2)$. Če namesto vektorjev x, y izberemo vektorja $x_{u_1}, x_{u_2} \in \mathbb{R}^n$, dobimo neenakost iz leme.

Preslikava x je konformna natanko tedaj, ko velja $|x_{u_1}| = |x_{u_2}| > 0$ in $x_{u_1} \cdot x_{u_2} = 0$. Enakost Dirichletovega energijskega integrala in površine je torej ekvivalentna konformnosti.

Preslikava, ki minimizira Dirichletov energijski integral, minimizira tudi površino, je konformna, in parametrizira minimalno ploskev z robom Γ.

Opomba 3.6. Analog minimalnih ploskev v enorazsežnem primeru so geodetke. Z minimizacijo enorazsežnega energijskega integrala dobimo krivulje z minimalno dolžino, ki so poleg tega parametrizirane z večkratnikom ločne dolžine.

3.2.2 Rezultati

Prvi rezultat, ki ga navajamo, opisuje ekvivalentne pogoje minimalnosti ploskve M.

Izrek 3.7. *Naj bo M odprta Riemannova ploskev, $n \geq 3$ in $x = (x_1, \ldots, x_n)\colon M \to \mathbb{R}^n$ konformna imerzija razreda $\mathcal{C}^2$. Naslednje trditve so ekvivalentne:*

1. *x je minimalna ploskev.*

[4]Pravimo, da je zvezna preslikava $f\colon \mathbb{T} \to \Gamma$ *monotona*, če je praslika $f^{-1}(x)$ povezana za vsak $x \in \Gamma$.

2. *Vektorsko polje povprečne ukrivljenosti preslikave x je ničelno, tj.* $\mathbf{H} = 0$.

3. *x je harmonična, tj.* $\Delta x = 0$.

4. *1-forma $\partial x = (\partial x_1, \ldots, \partial x_n)$ z vrednostmi v $\mathbb{C}^n$ je holomorfna in velja*

$$(\partial x_1)^2 + \cdots + (\partial x_n)^2 = 0. \tag{3.10}$$

5. *Naj bo θ holomorfna 1-forma na M, ki ni nikjer enaka* 0. *Potem je preslikava $f = 2\partial x/\theta \colon M \to \mathbb{C}^n$ holomorfna z vrednostmi v* ničelni kvadriki

$$\mathbf{A} = \{(z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{C}^n;\ z_1^2 + \cdots + z_n^2 = 0\}. \tag{3.11}$$

Nadalje je Riemannova metrika na M, inducirana s konformno imerzijo x, enaka

$$g = x^* ds^2 = |dx_1|^2 + \cdots + |dx_n|^2 = 2(|\partial x_1|^2 + \cdots |\partial x_n|^2). \tag{3.12}$$

Definicija 3.8. 1. Naj bo M odprta Riemannova ploskev in $n \geq 3$. Holomorfno imerzijo $z = (z_1, \ldots, z_n) \colon M \to \mathbb{C}^n$, za katero velja $(\partial z_1)^2 + \cdots + (\partial z_n)^2 = 0$, imenujemo *holomorfna ničelna krivulja* v $\mathbb{C}^n$.

2. Naj bo $z = x + \imath y \colon M \to \mathbb{C}^n$ holomorfna ničelna krivulja. Njena realni del in imaginarni del, $x, y \colon M \to \mathbb{R}^n$ imenujemo *konjugirani minimalni ploskvi.*

3. Naj bo $t \in \mathbb{R}$. Predstavnike 1-parametrične družine $x^t = \Re(e^{\imath t} z) \colon M \to \mathbb{R}^n$ imenujemo *pridružene minimalne ploskve* holomorfne ničelne krivulje z.

Izrek 3.9 (Weierstrassova predstavitev konformnih minimalnih ploskev in holomorfnih ničelnih krivulj)**.** *Naj bo $n \geq 3$ in M odprta Riemannova ploskev, na kateri definiramo holomorfno 1-formo $\Phi = (\phi_1, \ldots, \phi_n)$ z vrednostmi v $\mathbb{C}^n$, ki je povsod neničelna, in zadošča*

1. $\sum_{j=1}^n \phi_j^2 = 0$,

2. $\Re \int_C \Phi = 0$ *za vse* $[C] \in H_1(M, \mathbb{Z})$.

Potem za poljuben izbor točk $p_0 \in M$ in $x_0 \in \mathbb{R}^n$ predpis $x \colon M \to \mathbb{R}^n$,

$$x(p) = x_0 + \Re \int_{p_0}^{p} \Phi,\ p \in M, \tag{3.13}$$

podaja dobro definirano konformno minimalno imerzijo. Zanjo velja

$$2\partial x = \Phi \quad in \quad g = x^* ds^2 = |dx|^2 = \frac{1}{2}|\Phi|^2. \tag{3.14}$$

Če velja še $\int_C \Phi = 0$ za vse $[C] \in H_1(M, \mathbb{Z})$, potem za poljuben izbor točk $p_0 \in M$ in $z_0 \in \mathbb{C}^n$ predpis $z \colon M \to \mathbb{C}^n$,

$$z(p) = z_0 + \int_{p_0}^{p} \Phi,\ p \in M, \tag{3.15}$$

podaja dobro definirano holomorfno ničelno krivuljo. Zanjo velja

$$\partial z = \Phi \quad in \quad z^* ds^2 = |dz|^2 = |\partial z|^2 = |\Phi|^2. \tag{3.16}$$

Opomba 3.10. Vsaka konformna minimalna imerzija $x\colon M \to \mathbb{R}^n$ je oblike 3.13 in vsaka holomorfna ničelna krivulja $z\colon M \to \mathbb{C}^n$ je oblike 3.15. Prav zato je Weierstrassova predstavitev elegantna metoda za konstrukcijo opisanih preslikav.

Če konformno minimalno imerzijo $x\colon M \to \mathbb{R}^n$ poznamo, potem pripadajočo povsod neničelno holomorfno 1-formo $\Phi = 2\partial x$ z vrednostmi v $\mathbb{C}^n$ imenujemo *Weierstrassovi podatki* preslikave x. Analogno, za holomorfno ničelno krivuljo $z\colon M \to \mathbb{C}^n$ pripadajočo 1-formo $\Phi = \partial z = dz$ imenujemo *Weierstrassovi podatki* preslikave z.

Definicija 3.11. Naj bo M gladka ploskev, K končna unija paroma disjunktnih kompaktnih domen s kosoma zvezno odvedljivimi robovi v M ter $E = S \setminus K^\circ$ unija končno mnogo paroma disjunktnih gladkih Jordanovih lokov in zaprtih Jordanovih krivulj, ki se dotikajo K kvečjemu v svojih krajiščih in sekajo rob K transverzalno. Kompaktno podmnožico v M oblike $S = K \cup E$ imenujemo *dopustna množica*.

Definicija 3.12. Naj bo M povezana odprta Riemannova ploskev ali kompaktna Riemannova ploskev z robom, na kateri je definirana povsod neničelna holomorfna 1-forma Θ. Konformno minimalno imerzijo $x\colon M \to \mathbb{R}^n$ imenujemo:

1. *ravna*, če je slika $x(M)$ vsebovana v afini ravnini v $\mathbb{R}^n$; sicer pravimo, da je x *neravna*;

2. *polna*, če je preslikava $f = 2\partial x/\Theta\colon M \to \mathbf{A}_*^{n-1}$ polna, tj. $\mathbb{C}$-linearna ogrinjača slike $f(M)$ je enaka $\mathbb{C}^n$;

3. *neizrojena*, če slika $x(M)$ ni vsebovana v nobeni hiperravnini v $\mathbb{R}^n$.

V dimenziji $n = 3$ za konformno minimalno imerzijo vsi zgornji pojmi sovpadajo. V višjih dimenzijah ($n \geq 4$) veljata implikaciji

$$\text{polna} \;\Rightarrow\; \text{neizrojena} \;\Rightarrow\; \text{neravna}.$$

4 Izreki o aproksimaciji in interpolaciji minimalnih ploskev

Naj bosta M in X kompleksni mnogoterosti. Prostor holomorfnih presikav $M \to X$ označimo z $\mathcal{O}(M, X)$. Če je K kompaktna podmnožica v M, množico preslikav $K \to X$ razreda $\mathcal{C}^r(M)$, ki so holomorfne v notranjosti $K^\circ \subset K$, označimo z $\mathcal{A}^r(K, X)$. V primeru, ko je $X = \mathbb{C}$, ustrezna prostora označimo z $\mathcal{O}(M)$ oziroma $\mathcal{A}^r(K)$.

Naj bo M odprta Riemannova ploskev in $n \geq 3$. Prostor konformnih minimalnih imerzij $M \to \mathbb{R}^n$ označimo s $\mathrm{CMI}(M, \mathbb{R}^n)$, prostor holomorfnih ničelnih imerzij $M \to \mathbb{C}^n$ pa z $\mathrm{NC}(M, \mathbb{C}^n)$. Nadalje $\mathrm{CMI}_{full}(M, \mathbb{R}^n)$ in $\mathrm{CMI}_{nf}(M, \mathbb{R}^n)$ označujeta prostora polnih oziroma neravnih konformnih minimalnih imerzij. Velja inkluzija $\mathrm{CMI}_{full}(M, \mathbb{R}^n) \subset \mathrm{CMI}_{nf}(M, \mathbb{R}^n)$. Podobno je $\mathrm{NC}_{full}(M, \mathbb{C}^n) \subset \mathrm{NC}_{nf}(M, \mathbb{C}^n)$ v primeru polnih ter neravnih holomorfnih ničelnih krivulj.

Če je M kompaktna omejena Riemannova ploskev z nepraznim gladkim robom bM in $r \in \mathbb{N}$, tedaj prostor konformnih minimalnih imerzij $M \to \mathbb{R}^n$ razreda $\mathcal{C}^r(M)$ označimo s $\mathrm{CMI}^r(M, \mathbb{R}^n)$, prostor holomorfnih ničenih imerzij $M \to \mathbb{C}^n$ razreda $\mathcal{A}^r(M)$ pa z $\mathrm{NC}^r(M, \mathbb{C}^n)$.

Lema 4.1. *Naj bo M povezana Riemannova ploskev in $\mathbf{A}_*$ punktirana ničelna kvadrika. Holomorfna preslikava $f\colon M \to \mathbf{A}_*$ je neravna natanko tedaj, ko je linearna ogrinjača tangentnih prostorov $T_{f(p)}A \subset T_{f(p)}\mathbb{C}^n$ po vseh $p \in M$ enaka $\mathbb{C}^n$.*

Dokaz 2. Oglejmo si preslikavo $\Phi\colon \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$, definirano s predpisom $\Phi(z) = \sum_{j=1}^n z_j^2$. Ničelno kvadriko 3.11 tedaj lahko zapišemo v obliki $\mathbf{A} = \Phi^{-1}(\{0\})$. Njen tangentni prostor v točki $z = (z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{C}^n$ je enak jedru diferenciala, ki kvadriko določa, zato je

$$T_z\mathbf{A} = \ker(d\Phi_z) = \ker(z \mapsto \sum_{j=1}^n z_j dz_j).$$

Naj bosta $z,\ w \in \mathbb{C}^n_*$. Potem sta njuna tangentna prostora enaka, $T_z\mathbf{A} = T_w\mathbf{A}$, natanko tedaj, ko je $z_j = \lambda w_j$ za vse $j = 1, \ldots, n$ in nek $\lambda \in \mathbb{C}$, kar je ekvivalentno pogoju, da sta vektorja z in w kolinearna.

Po definiciji je preslikava f neravna, če njena slika $f(M)$ ni vsebovana v nobeni afini kompleksni premici v $\mathbb{C}^n$. Skupaj z zgornjim je slednje ekvivalnetno $Lin\{T_{f(p)}\mathbf{A};\ p \in M\} = \mathbb{C}^n$, kar smo želeli dokazati.

Definicija 4.2. Naj bo $S = K \cup E$ dopustna podmnožica Riemannove ploskve M in Θ povsod neničelna holomorfna 1-forma, definirana v okolici $S \subset M$. Naj bosta $n \geq 3$ in $r \in \mathbb{N}$. *Posplošena konformna minimalna imerzija* $S \to \mathbb{R}^n$ razreda $\mathcal{C}^r$ je par $(x, f\Theta)$, kjer je $x\colon S \to \mathbb{R}^n$ preslikava razreda $\mathcal{C}^r$, njena zožitev na $S^\circ = K^\circ$ je konformna minimalna imerzija in preslikava $f \in \mathcal{A}^{r-1}(S, \mathbf{A}_*)$ zadošča naslednjima pogojema:

1. na množici K velja $f\Theta = 2\partial x$;
2. za vsako gladko pot α v M, ki parametrizira povezano komponento $E = \overline{S \setminus K}$ velja $\Re(\alpha^*(f\Theta)) = \alpha^*(dx) = d(x \circ \alpha)$.

Posplošena konformna minimalna imerzija $(x, f\Theta)$ je *neravna* oziroma *polna* natanko tedaj, ko je preslikava $f \in \mathcal{A}^{r-1}(S, \mathbf{A}_*)$ neravna oziroma polna na vsaki relativno odprti podmnožici S.

Prostor posplošenih konformnih minimalnih imerzij $S \to \mathbb{R}^n$ razreda $\mathcal{C}^r$ označimo z $\mathrm{GCMI}^r(S, \mathbb{R}^n)$. Analogno kot v primeru konformnih minimalnih imerzij velja

$$\mathrm{GCMI}^r_{full}(S, \mathbb{R}^n) \subset \mathrm{GCMI}^r_{nf}(S, \mathbb{R}^n) \subset \mathrm{GCMI}^r(S, \mathbb{R}^n).$$

Opomba 4.3. Diferencial d v kompleksnem ima obliko $d = \partial + \bar{\partial}$. *Konjugirani difernecial* d^c je enak $d^c = i(\bar{\partial} - \partial) = 2\Im(\partial)$. Zato velja $d + id^c = 2\partial$ oziroma drugače, $\Re(2\partial) = dx$. Prvi pogoj iz definicije posplošene konformne minimalne imerzije pravi $f\Theta = 2\partial$, od koder sledi $\Re(f\Theta) = \Re(2\partial) = dx$. Zato je drugi pogoj iz zgornje definicije skladen s prvim.

Tudi za posplošene konformne minimalne imerzije velja Weierstrassova formula. Naj bo S povezana dopustna množica in $(x, f\Theta) \in \mathrm{GCMI}^r(S, \mathbb{R}^n)$. Za poljubno točko $p_0 \in S$ in poznano preslikavo f lahko preslikavo $x\colon S \to \mathbb{R}^n$ konstruiramo s formulo

$$x(p) = x(p_0) + \Re \int_{p_0}^{p} f\Theta,\ p \in S. \tag{4.1}$$

Obratno, če za preslikavo $f \in \mathcal{A}^{r-1}(S, \mathbf{A}_*)$ velja $\Re \int_C f\Theta = 0$ za vsako sklenjeno krivuljo C v S, potem f določa posplošeno konformno minimalno imerzijo, dano z Weierstrassovo formulo 4.1.

Definicija 4.4. Naj bo $S = K \cup E$ dopustna podmnožica Riemannove ploskve M in Θ povsod neničelna holomorfna 1-forma, definirana v okolici $S \subset M$. Naj bosta $n \geq 3$ in $r \in \mathbb{N}$. *Posplošena ničelna krivulja* $S \to \mathbb{C}^n$ razreda $\mathcal{C}^r$ je par $(z, f\Theta)$, kjer preslikavi $z \in \mathcal{A}^r(S, \mathbb{C}^n)$ in $f \in \mathcal{A}^{r-1}(S, \mathbf{A}_*)$ zadoščata naslednjima pogojema:

1. na množici K velja $f\Theta = dz = \partial z$;

2. za vsako gladko pot α v M, ki parametrizira povezano komponento $E = \overline{S \setminus K}$ velja $\alpha^*(f\Theta)) = \alpha^*(dz) = d(z \circ \alpha)$.

Posplošena ničelna krivulja $(z, f\Theta)$ je *neravna* oziroma *polna* natanko tedaj, ko je preslikava $f \in \mathcal{A}^{r-1}(S, \mathbf{A}_*)$ neravna oziroma polna na vsaki relativno odprti podmnožici S.

Prostori neravnih, polnih in posplošenih ničelnih krivulj ustrezajo verigi inkluzij

$$\mathrm{GNC}^r_{full}(S, \mathbb{C}^n) \subset \mathrm{GNC}^r_{nf}(S, \mathbb{C}^n) \subset \mathrm{GNC}^r(S, \mathbb{C}^n).$$

Za povezano dopustno množico S, $(z, f\Theta) \in \mathrm{GNC}^r(S, \mathbb{C}^n)$, znano preslikavo f in točko $p_0 \in S$ preslikavo $z\colon S \to \mathbb{C}^n$ konstruiramo s pomočjo Weierstrassove formule

$$z(p) = z(p_0) + \int_{p_0}^{p} f\Theta, \ p \in S. \tag{4.2}$$

Velja tudi obrat; preslikava $f \in \mathcal{A}^{r-1}(S, \mathbf{A}_*)$, ki zadošča $\int_C f\Theta = 0$ za vsako sklenjeno krivuljo C v S, določa posplošeno ničelno krivuljo, dano z Weierstrassovo formulo 4.2.

Definicija 4.5. Naj bo M povezana odprta Riemannova ploskev. Naj bo Θ fiksna povsod neničelna holomorfna 1-forma na M. Naj bo $\mathcal{C} = \{C_1, \ldots, C_l\}$ družina gladkih orientiranih vloženih lokov in zaprtih Jordanovih krivulj v M ter $C = \cup_{i=1}^{l} C_i$. Družini $\mathcal{C}$ in številu $n \in \mathbb{N}$ priredimo *periodno preslikavo*

$$\begin{aligned} \mathcal{P} = (\mathcal{P}_1, \ldots, \mathcal{P}_l)\colon \mathcal{C}(C, \mathbb{C}^n) &\to (\mathbb{C}^n)^l, \\ \mathcal{P}_i(f) &= \int_{C_i} f\Theta, \ i = 1, \ldots, l. \end{aligned} \tag{4.3}$$

Tu je $f \in \mathcal{C}(C, \mathbb{C}^n)$ in $\mathcal{P}_i(f) \in \mathbb{C}^n$.

Opomba 4.6. Znano je, da vsaka odprta Riemannova ploskev M premore lokalno biholomorfno preslikavo $M \to \mathbb{C}^n$, torej povsod neničelno eksaktno holomorfno 1-formo. Zato je predpostavka o izboru 1-forme v zgornji definiciji smiselna.

Lema 4.7. *Naj bo M odprta Riemannova ploskev in $S = K \cup E$ njena dopustna podmnožica. Naj bo $\mathcal{C} = \{C_1, \ldots, C_l\}$ taka družina gladkih orientiranih Jordanovih krivulj in lokov v S, da je unija $C = \cup_{i=1}^{l} C_i$ Rungejeva v S. Naj za neko število $r \in \mathbb{Z}_+$ preslikava f pripada razredu $\mathcal{A}^r(S, \mathbf{A}_*)$. Nadalje predpostavimo, da vsaka* *krivulja $C_i \in \mathcal{C}$ vsebuje netrivialen lok $I_i \in C_i$, disjunkten z $\cup_{i \neq j} C_j$, preslikava $f\colon I_i \to \mathbf{A}_*$ pa je neravna.*

Potem obstaja odprta okolica $U \subset \mathbb{C}^{ln}$ točke 0 in preslikava $\Phi_t \in \mathcal{A}^r(S \times U, \mathbf{A}_*)$, tako da velja $\Phi_t(\cdot, 0) = f$ in je preslikava

$$\frac{\partial}{\partial t}\Big|_{t=0} \mathcal{P}(\Theta_f(\cdot, t))\colon (\mathbb{C}^n)^l \to (\mathbb{C}^n)^l \text{ izomorfizem.} \tag{4.4}$$

Nadalje, za končno podmnožico $P \subset S$ lahko preslikavo Θ_f izberemo tako, da se za $t \in U$ preslikave $\Theta_f(\cdot, t)\colon S \to \mathbf{A}_*$ ujemajo z f v vsaki točki $P \setminus S^\circ$, v točkah $P \cap S^\circ$ pa se z f ujemajo do danega končnega reda.

Za vsako preslikavo $f_0 \in \mathcal{A}^r(S, \mathbf{A}_*)$, ki zadošča zgornjim predpostavkam, obstaja okolica $\Omega \subset \mathcal{A}^r(S, \mathbf{A}_*)$ in holomorfna preslikava $f \mapsto \Theta_f$, $f \in \Omega$ z zgornjimi lastnostmi.

Definicija 4.8. Preslikavo Θ_f, ki ustreza Lemi 4.7 imenujemo *periodno dominantni sprej* preslikav $S \to \mathbf{A}_*$ za družino krivulj $\mathcal{C}$ z *jedrom* $\Theta_f(\cdot, 0) = f$. Lastnosti 4.4 pravimo *periodno dominantna lastnost.*

Dokaz 3. Prvi del leme bomo dokazali tako, da bomo konstruirali periodno dominantni sprej, ki zadošča periodno dominantni lastnosti. Potrebovali bomo Lemo 4.1, Bishop-Mergelyanov izrek o aproksimaciji 2.23 in pojem toka vektorskega polja. Zaradi enostavnosti postavimo $r = 0$ (za $r > 0$ dokaz poteka analogno).

Po predpostavki je za vse $i \in \{1, \dots, n\}$ lok $I_i \subset C_i \in \mathcal{C}$ netrivialen, za katerega velja $I_i \cap \cup_{i \neq j} C_j = \emptyset$ in je zožitev preslikave $f|_{I_i}$ neravna. Po Lemi 4.1 obstajajo točke $p_{i,j} \in I_i$ in holomorfna vektorska polja $V_{i,j}$ na $\mathbb{C}^n$, $j \in \{1, \dots, n\}$, ki so tangentna na $\mathbf{A}$, tako da je $Lin\{V_{i,j}(f(p_{i,j}));\ j = 1, \dots, n\} = \mathbb{C}^n$ za vse i.

Za $k = 1, \dots l$ označimo $t_k = (t_{k,1}, \dots, t_{k,n}) \in \mathbb{C}^n$ in $t = (t_1, \dots, t_n) \in \mathbb{C}^{nl}$. Naj $\Phi_t^{i,j}$ označuje tok vektorskega polja $V_{i,j}$. Izberimo tako odprto okolico $U_0 \subset \mathbb{C}^{nl}$ točke 0, da za vse $t \in U_0$ in $p \in S$ predpis

$$(p, t) \mapsto \Phi^{1,1}_{t_{1,1}} \circ \dots \circ \Phi^{1,n}_{t_{1,n}} \circ \Phi^{2,1}_{t_{2,1}} \circ \dots \circ \Phi^{l,n}_{t_{l,n}}(f(p)) \tag{4.5}$$

podaja dobro definirano preslikavo $S \times U_0 \to \mathbf{A}_*$. Sedaj za vse pare (i, j) izberimo gladke preslikave $g_{i,j}\colon C \to \mathbb{C}$, pri čemer je nosilec $g_{i,j}$ vsebovan v majhnem delu loka I_i okrog točke $p_{i,j} \in I_i$. Modificirana preslikava 4.5, $\Phi\colon C \times U_1 \to \mathbf{A}_*$,

$$\Phi(p, t) = \Phi^{1,1}_{g_{1,1}(p)t_{1,1}} \circ \dots \circ \Phi^{l,n}_{g_{l,n}(p)t_{l,n}}(f(p)), \tag{4.6}$$

kjer je $U_1 \subset \mathbb{C}^{nl}$ primerno majhna odprta okolica točke 0, je tedaj dobro definirana, za vse $p \in C$ pa je preslikava $\Phi(p, \cdot)\colon U_1 \to \mathbf{A}_*$ holomorfna. Po lastnostih toka vektorskega polja sledi še $\Phi(p, 0) = f(p)$ in

$$\frac{\partial \Phi(p, t)}{\partial t_{m,j}}\Big|_{t=0} = g_{m,j}(p) \cdot V_{m,j}(f(p)). \tag{4.7}$$

Naj bo $\mathcal{P} = (\mathcal{P}_1, \dots, \mathcal{P}_n)$ periodna preslikava, prirejena družini krivulj $\mathcal{C}$. Z uporabo enakosti 4.7 dobimo za vse indekse $i, m \in \{1, \dots, l\}$ in $j \in \{1, \dots, n\}$

$$\frac{\partial \mathcal{P}_i(\Phi(\cdot, t))}{\partial t_{m,j}}\Big|_{t=0} = \frac{\partial}{\partial t_{m,j}}\Big|_{t=0} \int_{C_i} \Phi(\cdot, t) \cdot \Theta = \int_{C_i} g_{m,j} \cdot (V_{m,j} \circ f) \cdot \Theta \in \mathbb{C}^n. \tag{4.8}$$

Matrika diferencialov 4.4 iz leme je sestavljena iz blokov velikosti $n \times n$, ki pripadajo indeksom $i, m \in \{1, \ldots, l\}$. Z ustrezno izbiro preslikav $g_{i,j}$ opisanih zgoraj lahko dosežemo, da je matrika bločno diagonalna z obrnljivimi bloki na diagonali. S tem postane celotna matrika obrnljiva.

V naslednjem koraku bomo modificirali še preslikavo Φ, kar nam bo dalo iskani periodno dominantni prej. Preslikave $g_{i,j}$ so definirane na množici C, ki je po predpostavki Rungejeva v S. Bishop-Mergelyanov izrek o aproksimaciji pove, da vsako funkcijo $g_{i,j}$ lahko enakomerno na C aproksimiramo s holomorfnimi funkcijami $\tilde{g}_{i,j}$ v okolici S.

Definirajmo preslikavo $\Phi_f : S \times U \to \mathbf{A}_*$ tako, da v predpisu 4.6 nadomestimo $g_{i,j}$ z novimi funkcijami $\tilde{g}_{i,j}$ in je $U \subset U_1 \subset \mathbb{C}^{nl}$ odprta okolica izhodišča. Po konstrukciji takšna preslikava Φ_f zadošča sklepom leme, zato je periodno dominantni sprej, ki smo ga iskali.

Trditev 4.9. *Naj bo M odprta Riemannova ploskev, Θ povsod neničelna holomorfna 1-forma na M, S povezana dopustna množica, ki je Rungejeva v M in $A = \{a_1, \ldots, a_k\} \subset S$. Naj bosta $r, s \in \mathbb{N}$. Potem lahko vsako posplošeno konformno minimalno imerzijo $(x, f\Theta) \in GCMI^r(S, \mathbb{R}^n)$ aproksimiramo s konformnimi minimalnimi imerzijami $X : M \to \mathbb{R}^n$ razreda $\mathcal{C}^r$, za katere velja $\mathrm{Flux}_X = \mathrm{Flux}_x$.*

Izrek 4.10. *Naj bo M odprta Riemannova ploskev, Θ povsod neničelna holomorfna 1-forma na M, $n \geq 3$ in $r \geq 1$. Naj bo S dopustna Rungejeva množicca v M in Λ zaprta diskretna podmnožica M. Naj bo $x : S \to \mathbb{R}^n$ posplošena konformna minimalna imerzija razreda $\mathcal{C}^r(S, \mathbb{R}^n)$, ki je konformna minimalna imerzija v okolici vsake točke iz Λ.*

Za izbrane $\varepsilon > 0$, preslikavo $k : \Lambda \to \mathbb{N}$ in homomorfizem grup $\mathfrak{p} : H_1(M, \mathbb{Z}) \to \mathbb{R}^n$, $\mathfrak{p}|_{H_1(S,\mathbb{Z})} = \mathrm{Flux}_x$, obstaja konformna minimalna imerzija $\tilde{x} : M \to \mathbb{R}^n$, za katero velja:

1. $||\tilde{x} - x||_{\mathcal{C}^r(S)} < \varepsilon$;
2. *Razlika $\tilde{x} - x$ je ničelna do reda $k(p)$ v vsaki točki $p \in \Lambda$;*
3. *$Flux_{\tilde{x}} = \mathfrak{p}$ na $H_1(M, \mathbb{Z})$;*
4. *Če je $n \geq 5$ in je $x : \Lambda \to \mathbb{R}^n$ injektivna preslikava, potem je $\tilde{x}$ injektivna imerzija;*
5. *Če je $n = 4$ in ima x enostavne dvojne točke na množici Λ, potem je $\tilde{x}$ imerzija z enostavnimi dvojnimi točkami na Λ.*