

Minimalne ploskve

Tjaša Vrhovnik

Mentor: akad. prof. dr. Franc Forstnerič
Univerza v Ljubljani
Fakulteta za matematiko in fiziko
Matematika – 2. stopnja

14. januar 2022

- 1 Uvod
- 2 Osnovni pojmi
- 3 Minimalne ploskve
- 4 Izreki o aproksimaciji in interpolaciji minimalnih ploskev

- [L. Euler](#) opiše katenoido (l. 1744)
- [J. L. Lagrange](#) enačba za minimalne grafe (l. 1762)
- [J. B. Meusnier](#) ploskve z ničelno povprečno ukrivljenostjo lokalno minimizirajo površino
- [J. Plateau](#) poskusi z milnico
- Razvoj kompleksne analize in diferencialne geometrije – reprezentacijska formula (l. 1866)
- [T. Radó](#) (l. 1930) in [J. Douglas](#) (l. 1931) rešita Plateaujev problem

Definicija

Riemannova ploskev je kompleksna mnogoterost kompleksne dimenzije 1.

Definicija

Gladka preslikava $f: M \rightarrow N$ med gladkima mnogoterostma se imenuje *imerzija* v točki $p \in M$, če je njen diferencial $df_p: T_p M \rightarrow T_{f(p)} N$ injektiven.

Konformne imerzije razreda \mathcal{C}^2 iz odprte Riemannove ploskve v Evklidski prostor

$$x: M \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad n \geq 3.$$

Definicija

Povprečna ukrivljenost ploskve S v točki p in normalni smeri N je povprečje glavnih ukrivljenosti,

$$H^N(p) = \frac{1}{2} \left(\kappa_1^N(p) + \kappa_2^N(p) \right). \quad (1)$$

Vektor povprečne ukrivljenosti v točki p je vektor \mathbf{H} , ki zadošča $H^N(p) = \mathbf{H} \cdot N$ za vsak $N \in N_p S$.

Definicija

Naj bo $x: M \rightarrow \mathbb{R}^n$ harmonična preslikava. Njen **pretok** je homomorfizem grup $\text{Flux}_x: H_1(M, \mathbb{Z}) \rightarrow \mathbb{R}^n$, definiran s predpisom

$$\text{Flux}_x([C]) = \int_C d^c x. \quad (2)$$

Definicija

Naj bo K kompaktna podmnožica Riemannove ploskve M . Njena **holomorfna ogrinjača** je množica

$$\hat{K}_{\mathcal{O}(M)} = \{p \in M; |f(p)| \leq \max_K |f| \text{ za vse } f \in \mathcal{O}(M)\}. \quad (3)$$

Če velja $K = \hat{K}_{\mathcal{O}(M)}$, potem K imenujemo **Rungejeva množica**.

Definicija

Naj bo $x: M \rightarrow \mathbb{R}^n$ harmonična preslikava. Njen **pretok** je homomorfizem grup $\text{Flux}_x: H_1(M, \mathbb{Z}) \rightarrow \mathbb{R}^n$, definiran s predpisom

$$\text{Flux}_x([C]) = \int_C d^c x. \quad (2)$$

Definicija

Naj bo K kompaktna podmnožica Riemannove ploskve M . Njena **holomorfna ogrinjača** je množica

$$\hat{K}_{\mathcal{O}(M)} = \{p \in M; |f(p)| \leq \max_K |f| \text{ za vse } f \in \mathcal{O}(M)\}. \quad (3)$$

Če velja $K = \hat{K}_{\mathcal{O}(M)}$, potem K imenujemo **Rungejeva množica**.

Definicija

Naj bo M gladka kompaktna ploskev z robom, $n \geq 3$ in naj bo preslikava $x: M \rightarrow \mathbb{R}^n$ imerzija razreda \mathcal{C}^2 . *Variacija preslikave x s fiksnim robom* je 1-parametrična družina \mathcal{C}^2 preslikav

$$x^t: M \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad t \in (-\varepsilon, \varepsilon) \subset \mathbb{R}, \quad (4)$$

če je $x^0 = x$ in za vse t z intervala velja $x^t = x$ na ∂M .

Definicija (Minimalna ploskev)

Naj bo $x: M \rightarrow \mathbb{R}^n$ imerzija razreda \mathcal{C}^2 . Sliko $x(M)$ imenujemo *minimalna ploskev*, če za vsako kompaktno domeno $D \subset M$ z gladkim robom ∂D in vsako gladko variacijo x^t preslikave x s fiksnim robom velja

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \text{Area} \left(x^t(D) \right) = 0. \quad (5)$$

Ekvivalentno pravimo, da je minimalna ploskev stacionarna točka ploskovnega funkcionala Area.

Definicija

Naj bo M gladka kompaktna ploskev z robom, $n \geq 3$ in naj bo preslikava $x: M \rightarrow \mathbb{R}^n$ imerzija razreda \mathcal{C}^2 . **Variacija preslikave x s fiksnim robom** je 1-parametrična družina \mathcal{C}^2 preslikav

$$x^t: M \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad t \in (-\varepsilon, \varepsilon) \subset \mathbb{R}, \quad (4)$$

če je $x^0 = x$ in za vse t z intervala velja $x^t = x$ na ∂M .

Definicija (Minimalna ploskev)

Naj bo $x: M \rightarrow \mathbb{R}^n$ imerzija razreda \mathcal{C}^2 . Sliko $x(M)$ imenujemo **minimalna ploskev**, če za vsako kompaktno domeno $D \subset M$ z gladkim robom ∂D in vsako gladko variacijo x^t preslikave x s fiksnim robom velja

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \text{Area} \left(x^t(D) \right) = 0. \quad (5)$$

Ekvivalentno pravimo, da je minimalna ploskev stacionarna točka ploskovnega funkcionala Area.

Izrek

Naj bo M odprta Riemannova ploskev, $n \geq 3$ in $x = (x_1, \dots, x_n): M \rightarrow \mathbb{R}^n$ konformna imerzija razreda \mathcal{C}^2 . Naslednje trditve so ekvivalentne.

- 1 x je minimalna ploskev.
- 2 Vektorsko polje povprečne ukrivljenosti preslikave x je ničelno, tj. $\mathbf{H} = 0$.
- 3 x je harmonična.
- 4 1-forma $\partial x = (\partial x_1, \dots, \partial x_n)$ z vrednostmi v \mathbb{C}^n je holomorfná in velja

$$(\partial x_1)^2 + \dots + (\partial x_n)^2 = 0. \quad (6)$$

- 5 Naj bo θ holomorfná 1-forma na M , ki ni nikjer enaka 0. Potem je preslikava $f = 2\partial x/\theta: M \rightarrow \mathbb{C}^n$ holomorfná z vrednostmi v punktirani ničelni kvadríki

$$\mathbf{A}_* = \{(z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}_*^n; z_1^2 + \dots + z_n^2 = 0\}. \quad (7)$$

Nadalje je Riemannova metrika na M , inducirana s konformno imerzijo x , enaka

$$g = x^* ds^2 = |dx_1|^2 + \dots + |dx_n|^2 = 2(|\partial x_1|^2 + \dots + |\partial x_n|^2). \quad (8)$$

Izrek (Enneper-Weierstrassova formula)

Naj bo $n \geq 3$ in M odprta Riemannova ploskev. Na njej izberimo holomorfno 1-formo $\phi = (\phi_1, \dots, \phi_n)$ z vrednostmi v \mathbb{C}^n , ki je povsod neničelna in zadošča

$$\textcircled{1} \quad \sum_{j=1}^n \phi_j^2 = 0,$$

$$\textcircled{2} \quad \Re \int_C \phi = 0 \text{ za vse } [C] \in H_1(M, \mathbb{Z}).$$

Potem za poljuben izbor točk $p_0 \in M$ in $x_0 \in \mathbb{R}^n$ predpis $x: M \rightarrow \mathbb{R}^n$,

$$x(p) = x_0 + \Re \int_{p_0}^p \phi, \quad p \in M, \tag{9}$$

podaja dobro definirano konformno minimalno imerzijo. Zanje velja

$$2\partial x = \phi \quad \text{in} \quad g = x^* ds^2 = |dx|^2 = \frac{1}{2} |\phi|^2. \tag{10}$$

Definicija

Naj bo M odprta Riemannova ploskev in $n \geq 3$. Holomorfno imerzijo $z = (z_1, \dots, z_n): M \rightarrow \mathbb{C}^n$, za katero velja $(\partial z_1)^2 + \dots + (\partial z_n)^2 = 0$, imenujemo *holomorfna ničelna krivulja* v \mathbb{C}^n .

Če v Enneper-Weierstrassovi formuli velja še $\int_C \phi = 0$ za vse $[C] \in H_1(M, \mathbb{Z})$, potem za poljuben izbor točk $p_0 \in M$ in $z_0 \in \mathbb{C}^n$ predpis $z: M \rightarrow \mathbb{C}^n$,

$$z(p) = z_0 + \int_{p_0}^p \phi, \quad p \in M, \quad (11)$$

podaja dobro definirano holomorfno ničelno krivuljo. Zanj velja

$$\partial z = \phi \quad \text{in} \quad z^* ds^2 = |dz|^2 = |\partial z|^2 = |\phi|^2. \quad (12)$$

Definicija

Naj bo M odprta Riemannova ploskev in $n \geq 3$. Holomorfno imerzijo $z = (z_1, \dots, z_n): M \rightarrow \mathbb{C}^n$, za katero velja $(\partial z_1)^2 + \dots + (\partial z_n)^2 = 0$, imenujemo *holomorfna ničelna krivulja* v \mathbb{C}^n .

Če v Enneper-Weierstrassovi formuli velja še $\int_C \phi = 0$ za vse $[C] \in H_1(M, \mathbb{Z})$, potem za poljuben izbor točk $p_0 \in M$ in $z_0 \in \mathbb{C}^n$ predpis $z: M \rightarrow \mathbb{C}^n$,

$$z(p) = z_0 + \int_{p_0}^p \phi, \quad p \in M, \quad (11)$$

podaja dobro definirano holomorfno ničelno krivuljo. Zanj velja

$$\partial z = \phi \quad \text{in} \quad z^* ds^2 = |dz|^2 = |\partial z|^2 = |\phi|^2. \quad (12)$$

Cilj: dokazati aproksimacijski in interpolacijski izrek tipa Mergelyana in Weierstrassa za konformne minimalne ploskve in holomorfne ničelne krivulje

- klasični izreki za holomorfne funkcije
- Morsejeva teorija
- konstrukcija poti s predpisanimi integrali (Gromov)

Načrt:

- aproksimacija in interpolacija preslikav v punktirano ničelno kvadriko
- nekritičen primer
- splošen primer

Cilj: dokazati aproksimacijski in interpolacijski izrek tipa Mergelyana in Weierstrassa za konformne minimalne ploskve in holomorfne ničelne krivulje

- klasični izreki za holomorfne funkcije
- Morsejeva teorija
- konstrukcija poti s predpisanimi integrali (Gromov)

Načrt:

- aproksimacija in interpolacija preslikav v punktirano ničelno kvadriko
- nekritičen primer
- splošen primer

Definicija

Naj bo M gladka ploskev. Kompaktno podmnožico v M oblike $S = K \cup E$ imenujemo **dopustna množica**, kjer je K končna unija paroma disjunktne kompaktnih domen s kosoma zvezno odvedljivimi robovi v M ter $E = S \setminus K^\circ$ unija končno mnogo paroma disjunktne gladkih Jordanovih lokov in zaprtih Jordanovih krivulj, ki se dotikajo K kvečjemu v svojih krajiščih in sekajo rob K transversalno.

Definicija

Naj bo $S = K \cup E$ dopustna podmnožica Riemannove ploskve M in θ povsod neničelna holomorfna 1-forma, definirana v okolici $S \subset M$. Naj bosta $n \geq 3$ in $r \in \mathbb{N}$. **Posplošena konformna minimalna imerzija** $S \rightarrow \mathbb{R}^n$ razreda \mathcal{C}^r je par $(x, f\theta)$, kjer je $x: S \rightarrow \mathbb{R}^n$ preslikava razreda \mathcal{C}^r , njena zožitev na $S^\circ = K^\circ$ je konformna minimalna imerzija in preslikava $f \in \mathcal{A}^{r-1}(S, \mathbf{A}_*)$ zadošča naslednjima pogojema:

- 1 na množici K velja $f\theta = 2\partial x$;
- 2 za vsako gladko pot α v M , ki parametrizira povezano komponento množice $E = \overline{S \setminus K}$, velja $\Re(\alpha^*(f\theta)) = \alpha^*(dx) = d(x \circ \alpha)$.

Definicija

Naj bo M gladka ploskev. Kompaktno podmnožico v M oblike $S = K \cup E$ imenujemo **dopustna množica**, kjer je K končna unija paroma disjunktne kompaktnih domen s kosoma zvezno odvedljivimi robovi v M ter $E = S \setminus K^\circ$ unija končno mnogo paroma disjunktne gladkih Jordanovih lokov in zaprtih Jordanovih krivulj, ki se dotikajo K kvečjemu v svojih krajiščih in sekajo rob K transversalno.

Definicija

Naj bo $S = K \cup E$ dopustna podmnožica Riemannove ploskve M in θ povsod neničelna holomorfna 1-forma, definirana v okolici $S \subset M$. Naj bosta $n \geq 3$ in $r \in \mathbb{N}$. **Posplošena konformna minimalna imerzija** $S \rightarrow \mathbb{R}^n$ razreda \mathcal{C}^r je par $(x, f\theta)$, kjer je $x: S \rightarrow \mathbb{R}^n$ preslikava razreda \mathcal{C}^r , njena zožitev na $S^\circ = K^\circ$ je konformna minimalna imerzija in preslikava $f \in \mathcal{A}^{r-1}(S, \mathbf{A}_*)$ zadošča naslednjima pogoja:

- 1 na množici K velja $f\theta = 2\partial x$;
- 2 za vsako gladko pot α v M , ki parametrizira povezano komponento množice $E = \overline{S \setminus K}$, velja $\Re(\alpha^*(f\theta)) = \alpha^*(dx) = d(x \circ \alpha)$.

Trditev (Nekritičen primer glavnega izreka)

Naj bo M odprta Riemannova ploskev in θ povsod neničelna holomorfná 1-forma na M . Predpostavimo, da je S taka povezana dopustna množica v M , da inkluzija $S \hookrightarrow M$ porodi izomorfizem $H_1(S, \mathbb{Z}) \xrightarrow{\cong} H_1(M, \mathbb{Z})$ prvih homoloških grup. Naj bo $A = \{a_1, \dots, a_k\} \subset S$ končna množica točk in $r, s \in \mathbb{N}$. Tedaj velja naslednje:

- 1 Vsako posplošeno konformno minimalno imerzijo $(x, f\theta) \in \text{GCMI}^r(S, \mathbb{R}^n)$ lahko v $\mathcal{C}^r(S)$ aproksimiramo s polnimi konformnimi minimalnimi imerzijami $X: M \rightarrow \mathbb{R}^n$, za katere je $\text{Flux}_X = \text{Flux}_\theta$.
- 2 Vsako posplošeno ničelno krivuljo $(z, f\theta) \in \text{GNC}^r(S, \mathbb{C}^n)$ lahko v $\mathcal{C}^r(S)$ aproksimiramo s polnimi holomorfnimi ničelnimi krivuljami $Z: M \rightarrow \mathbb{C}^n$.

Dodatno, preslikave X oz. Z lahko izberemo tako, da se s preslikavama x oz. z ujemajo v točkah množice A ter do danega končnega reda v točkah množice $A \cap S^\circ$.

Izrek

Naj bo M odprta Riemannova ploskev, θ povsod neničelna holomorfna 1-forma na M , $n \geq 3$ in $r \geq 1$. Naj bo S dopustna Rungejeva množica v M in $\Lambda \subset M$ zaprta diskretna podmnožica. Naj bo $x: S \rightarrow \mathbb{R}^n$ posplošena konformna minimalna imerzija razreda $\mathcal{C}^r(S, \mathbb{R}^n)$, ki je konformna minimalna imerzija v okolici vsake točke iz Λ .

Za izbrane $\varepsilon > 0$, preslikavo $k: \Lambda \rightarrow \mathbb{N}$ in homomorfizem grup

$p: H_1(M, \mathbb{Z}) \rightarrow \mathbb{R}^n$, $p|_{H_1(S, \mathbb{Z})} = \text{Flux}_x$ obstaja konformna minimalna imerzija $\tilde{x}: M \rightarrow \mathbb{R}^n$, za katero velja:

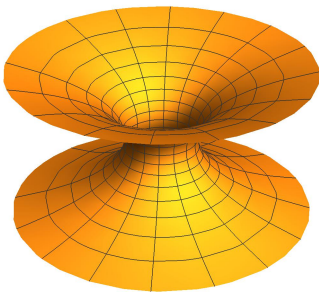
- 1 $\|\tilde{x} - x\|_{\mathcal{C}^r(S)} < \varepsilon$;
- 2 razlika $\tilde{x} - x$ je ničelna do reda $k(p)$ v vsaki točki $p \in \Lambda$;
- 3 $\text{Flux}_{\tilde{x}} = p$ na $H_1(M, \mathbb{Z})$;
- 4 če je $n \geq 5$ in je $x: \Lambda \rightarrow \mathbb{R}^n$ injektivna preslikava, potem je \tilde{x} injektivna imerzija;
- 5 če je $n = 4$ in ima x enostavne dvojne točke na množici Λ , potem je \tilde{x} imerzija z enostavnimi dvojnimi točkami na Λ .

Izrek (Mittag-Lefflerjev izrek za konformne minimalne imerzije)

Naj bo M odprta Riemannova ploskev, $A \subset M$ njena zaprta diskretna podmnožica, $U \subset M$ okolica množice A , ki je Rungejeva v M , in $n \geq 3$. Predpostavimo, da je $x: U \setminus A \rightarrow \mathbb{R}^n$ konformna minimalna imerzija, pripadajočo 1-formo ∂x pa lahko meromorfno razširimo na U s poli v točkah množice A . Tedaj obstaja taka polna konformna minimalna imerzija $\tilde{x}: M \setminus A \rightarrow \mathbb{R}^n$, da je razlika $\tilde{x} - x$ harmonična na množici A . Natančneje, 1-formo $\partial \tilde{x}$ lahko meromorfno razširimo na M s poli v točkah množice A .

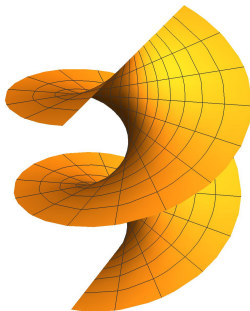
$$x: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$x(u, v) = (\cos u \cdot \cosh v, \sin u \cdot \cosh v, v)$$

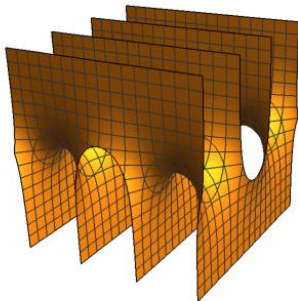


$$x: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

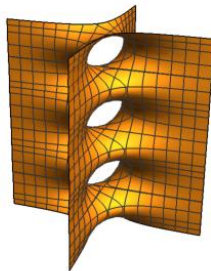
$$x(u, v) = (\sin u \cdot \sinh v, -\cos u \cdot \sinh v, u)$$



$$e^z \cos y = \cos x$$



$$\sin z = \sinh x \sinh y$$



Definicija (Periodna preslikava)

Naj bo M povezana odprta Riemannova ploskev in θ povsod neničelna holomorfná 1-forma na M . Naj bo $\mathcal{C} = \{C_1, \dots, C_l\}$ družina gladkih orientiranih vloženi lokov in zaprtih Jordanovih krivulj v M ter $C = \bigcup_{i=1}^l C_i$. Družini \mathcal{C} in številu $n \in \mathbb{N}$ priredimo **periodno preslikavo**

$$\begin{aligned}\mathcal{P} &= (\mathcal{P}_1, \dots, \mathcal{P}_l): \mathcal{C}(C, \mathbb{C}^n) \rightarrow (\mathbb{C}^n)^l, \\ \mathcal{P}_i(f) &= \int_{C_i} f \theta, \quad i = 1, \dots, l.\end{aligned}\tag{13}$$

Tu je $f \in \mathcal{C}(C, \mathbb{C}^n)$ in $\mathcal{P}_i(f) \in \mathbb{C}^n$.

Lema

Naj bo M odprta Riemannova ploskev in $S = K \cup E$ dopustna množica v M . Naj bo $\mathcal{C} = \{C_1, \dots, C_l\}$ taka družina gladkih orientiranih Jordanovih krivulj in lokov v S , da je unija $C = \bigcup_{i=1}^l C_i$ Rungejeva v S . Naj za neko število $r \in \mathbb{Z}_+$ preslikava $f: S \rightarrow \mathbf{A}_*$ pripada razredu \mathcal{A}^r . Nadalje predpostavimo, da vsaka krivulja $C_i \in \mathcal{C}$ vsebuje netrivialen lok $I_i \subset C_i$, disjunkten z $\bigcup_{i \neq j} C_j$, preslikava $f: I_i \rightarrow \mathbf{A}_*$ pa je neravna.

Potem obstaja odprta okolica $U \subset \mathbb{C}^{ln}$ točke 0 in preslikava $\Phi_f \in \mathcal{A}^r(S \times U, \mathbf{A}_*)$, tako da velja $\Phi_f(\cdot, 0) = f$ in je preslikava

$$\left. \frac{\partial}{\partial t} \right|_{t=0} \mathcal{P}(\Phi_f(\cdot, t)): (\mathbb{C}^n)^l \rightarrow (\mathbb{C}^n)^l \text{ izomorfizem.} \quad (14)$$

Nadalje, za končno podmnožico $P \subset S$ lahko preslikavo Φ_f izberemo tako, da se za $t \in U$ preslikave $\Phi_f(\cdot, t): S \rightarrow \mathbf{A}_*$ ujemajo z f v vsaki točki $P \setminus S^\circ$, v točkah $P \cap S^\circ$ pa se z f ujemajo do danega končnega reda.

Za vsako preslikavo $f_0 \in \mathcal{A}^r(S, \mathbf{A}_*)$, ki zadošča zgornjim predpostavkam, obstaja okolica $\Omega \subset \mathcal{A}^r(S, \mathbf{A}_*)$ in holomorfna preslikava $f \mapsto \Phi_f$, $f \in \Omega$, z zgornjimi lastnostmi.

Lema

Naj bo M povezana odprta Riemannova ploskev in $S = K \cup E$ Rungejeva dopustna podmnožica v M . Izberimo tako družino gladkih orientiranih Jordanovih krivulj in lokov v S , $\mathcal{C} = \{C_1, \dots, C_l\}$, da je unija $C = \bigcup_{i=1}^l C_i$ Rungejeva v M , vsaka krivulja C_i pa vsebuje netrivialen lok I_i , za katerega je $I_i \cap (\bigcup_{i \neq j} C_j) = \emptyset$. Naj bo \mathcal{P} periodno dominantni sprej, ki pripada družini krivulj \mathcal{C} , $A = \{a_1, \dots, a_m\} \subset S$ končna množica točk in $r \geq 1$. Tedaj lahko vsako preslikavo $f \in \mathcal{A}^r(S, A_*)$ aproksimiramo v $\mathcal{C}^r(S)$ s polnimi holomorfnimi preslikavami $F \in \mathcal{O}(M, A_*)$, pri čemer velja naslednje:

- 1 $\mathcal{P}(F) = \mathcal{P}(f)$;
- 2 preslikavi F in f se ujemata v točkah množice A , v točkah množice $A \cap S^\circ$ pa se ujemata do danega končnega reda.