

UNIVERZA V LJUBLJANI  
FAKULTETA ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

Matematika – 2. stopnja

Tjaša Vrhovnik

## **MINIMALNE PLOSKVE**

Magistrsko delo

Mentor: prof. dr. Franc Forstnerič

Ljubljana, 2021



# Zahvala



# Kazalo

Program dela	vii
<b>1 Uvod</b>	<b>1</b>
<b>2 Osnovni pojmi</b>	<b>1</b>
2.1 Mnogoterosti . . . . .	1
2.2 Vektorska polja in diferencialne 1-forme . . . . .	4
2.3 Ukrivljenost ploskve . . . . .	5
2.4 Holomorfne in harmonične funkcije . . . . .	7
2.5 Aproksimacijski izreki za Riemannove ploskve . . . . .	8
<b>3 Minimalne ploskve</b>	<b>9</b>
3.1 Variacija ploščine . . . . .	9
3.2 Weierstrassova formula . . . . .	11
3.2.1 Plateaujev problem in Dirichletov energijski integral . . . . .	12
3.2.2 Rezultati . . . . .	13
3.3 Gaussova preslikava . . . . .	15
3.4 Primeri minimalnih ploskev . . . . .	16
3.4.1 Katenoida . . . . .	17
3.4.2 Helikoid . . . . .	19
3.4.3 Enneperjeva ploskev . . . . .	20
<b>4 Izreki o aproksimaciji in interpolaciji minimalnih ploskev</b>	<b>21</b>



# Program dela

## Osnovna literatura

Literatura mora biti tukaj posebej samostojno navedena (po pomembnosti) in ne le citirana. V tem razdelku literature ne oštevilčimo po svoje, ampak uporabljamo okolje itemize in ukaz plancite, saj je celotna literatura oštevilčena na koncu.

[?]

[?]

[?]

[?]

Podpis mentorja:





## Minimalne ploskve

### POVZETEK

Tukaj napišemo povzetek vsebine. Sem sodi razlaga vsebine in ne opis tega, kako je delo organizirano.

### English translation of the title

### ABSTRACT

An abstract of the work is written here. This includes a short description of the content and not the structure of your work.

**Math. Subj. Class. (2010):** oznake kot 74B05, 65N99, na voljo so na naslovu <http://www.ams.org/msc/msc2010.html>

**Ključne besede:**

**Keywords:**



# 1 Uvod

## 2 Osnovni pojmi

### 2.1 Mnogoterosti

**Definicija 2.1.** Naj bo  $n \in \mathbb{N}$ . Topološki prostor  $M$  z lastnostmi:

1.  $M$  je Hausdorffov,
2.  $M$  je 2-števen,
3.  $M$  je lokalno evklidski prostor dimenzije  $n$  (za vsak  $p \in M$  obstajata odprta okolica  $U \subset M$  in homeomorfizem  $\Phi: U \rightarrow V \subset \mathbb{R}^n$ , kjer je  $V$  odprta množica),

imenujemo *topološka mnogoterost* dimenzije  $n$ .

Na topološki mnogoterosti  $M$  dimenzije  $n$  definiramo *atlas*  $\mathcal{U} = \{(U_i, \Phi_i); i \in I\}$  kot družino parov  $(U_i, \Phi_i)$ , kjer je  $\{U_i\}_{i \in I}$  odprto pokritje mnogoterosti  $M$ , preslikave  $\Phi_i: U_i \rightarrow \Phi_i(U_i) \subset \mathbb{R}^n$  pa so homeomorfizmi za vse  $i$ . Par  $(U_i, \Phi_i)$  imenujemo *lokalna karta*. Vzemimo lokalni karti  $(U_i, \Phi_i)$  in  $(U_j, \Phi_j)$ ,  $i \neq j$ , za kateri velja  $U_{ij} = U_i \cap U_j \neq \emptyset$ . Difeomorfizmu  $\Phi_{ij} = \Phi_j \circ \Phi_i^{-1}: \Phi_i(U_{ij}) \rightarrow \Phi_j(U_{ij})$  med odprtima podmnožicama  $\mathbb{R}^n$  pravimo *prehodna preslikava* med lokalnima kartama. Atlas je razreda  $\mathcal{C}^r$  za  $r \geq 1$ , kadar so prehodne preslikave med vsemi lokalnimi kartami difeomorfizmi razreda  $\mathcal{C}^r$ . V tem primeru rečemo, da je  $M$  *mnogoterost razreda  $\mathcal{C}^r$* . V posebnem gladek atlas določa gladko mnogoterost.

**Definicija 2.2.** Naj bo  $X$  mnogoterost razreda  $\mathcal{C}^r$  razsežnosti  $\dim X = n$  in  $M \subset X$  njena podmnožica. Če za vsako točko  $p \in M$  obstaja lokalna karta  $(U, \Phi)$  glede na atlas  $\mathcal{U}$  mnogoterosti  $X$ , tako da je preslikava  $\Phi: U \rightarrow V \subset \mathbb{R}^n$  homeomorfizem in velja  $\Phi(M \cap U) = V \cap (\mathbb{R}^m \times \{0\}^{n-m})$ , potem  $M$  imenujemo *podmnogoterost* razreda  $\mathcal{C}^r$  razsežnosti  $\dim M = m$ .

**Definicija 2.3** (Orientacija mnogoterosti). Naj bo  $M$  gladka mnogoterost in  $\mathcal{U}$  pripadajoč gladek atlas. Lokalni karti  $(U, \phi)$  in  $(V, \psi)$  določata isto orientacijo na  $M$ , če za poljubno točko  $p \in U \cap V \neq \emptyset$  velja  $\det(d(\psi \circ \phi^{-1})_{\phi(p)}) > 0$ . Kadar poljubni lokalni karti glede na izbrani atlas  $\mathcal{U}$  določata isto orientacijo, pravimo, da je atlas  $\mathcal{U}$  *orientiran*. Nadalje je mnogoterost *orientabilna*, če premore orientiran atlas. *Orientacija* mnogoterosti  $M$  je izbor maksimalnega orientiranega atlasa na  $M$ .

Definirati želimo še tangentni prostor mnogoterosti. Naj bo  $M$  gladka mnogoterost in izberimo atlas  $\mathcal{U} = \{(U_i, \Phi_i); i \in I\}$  na njej. Naj bo točka  $p \in U_i \subset M$  za nek indeks  $i$ . Gladki krivulji<sup>1</sup>  $\gamma_1, \gamma_2: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$  sta *ekvivalentni*, če izpolnjujeta pogoja  $\gamma_1(0) = \gamma_2(0) = p$  in  $\frac{d}{dt}|_{t=0}\Phi_i(\gamma_1(t)) = \frac{d}{dt}|_{t=0}\Phi_i(\gamma_2(t))$  za vse  $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ . Ekvivalenco krivulj označimo z  $\gamma_1 \sim \gamma_2$ <sup>2</sup>.

<sup>1</sup>Krivulja  $\gamma_j$  je gladka, če je preslikava  $\Phi_i \circ \gamma_j: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $j = 1, 2$ , gladka v običajnem smislu.

<sup>2</sup>Relacija  $\sim$  je ekvivalenčna relacija.

**Definicija 2.4.** Naj bo  $M$  mnogoterost in  $p \in M$  točka na njej. *Tangentni vektor*  $v_p$  na  $M$  v točki  $p$  ustreza ekvivalenčnemu razredu  $[\gamma]$  krivulje  $\gamma: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$ , za katero velja  $\gamma(0) = p$ .

Unija vseh tangentnih vektorjev na  $M$  v točki  $p$  določa *tangentni prostor*  $T_p M$  mnogoterosti  $M$  v točki  $p$ .

Naj bosta  $M$  in  $N$  mnogoterosti dimenzij  $\dim M = m$ ,  $\dim N = n$  ( $m, n \in \mathbb{N}$ ). Naj bo  $r \geq 0$ . Pravimo, da je zvezna preslikava  $f: M \rightarrow N$  *razreda  $\mathcal{C}^r$  v točki  $p \in M$* , če obstajata taki  $\mathcal{C}^r$  karti  $(U, \Phi)$  na  $M$  v okolici točke  $p \in M$  in  $(V, \Psi)$  na  $N$  v okolici točke  $f(p) \in N$ , da je preslikava  $F = \psi \circ f \circ \Phi^{-1}$  razreda  $\mathcal{C}^r$  v okolici točke  $\Phi(p)$ . Če to velja za poljubno točko  $p \in M$ , je  $f$  *razreda  $\mathcal{C}^r$* ; pišemo  $f \in \mathcal{C}^r(M, N)$ .

Vzemimo gladki (oz. razreda  $\mathcal{C}^r$ ,  $r \geq 1$ ) mnogoterosti  $M$  in  $N$  ter točko  $p \in M$ . *Diferencial* gladke (oz. razreda  $\mathcal{C}^r$ ) preslikave  $f: M \rightarrow N$  je linearna preslikava  $df: T_p M \rightarrow T_{f(p)} N$ , definirana s predpisom

$$(df_p)[\gamma] = [f \circ \gamma].$$

**Definicija 2.5.** Naj bo  $f: M \rightarrow N$  gladka preslikava med gladkima mnogoterostima. Preslikava  $f$  se imenuje

1. *imerzija* v točki  $p \in M$ , če je njen diferencial  $df_p: T_p M \rightarrow T_{f(p)} N$  injektiven;
2. *submerzija* v točki  $p \in M$ , če je njen diferencial  $df_p$  surjektiven;
3. *lokalni difeomorfizem* v točki  $p \in M$ , če obstajata taki okolici  $U \subset M$  za  $p$  in  $V \subset N$  za  $f(p)$ , da je zožitev  $f|_U: U \rightarrow V$  difeomorfizem;
4. *vložitev*, če je  $f$  injektivna preslikava in slika  $f(M) \subset N$  podmnogoterost.

**Opomba 2.6.** Z uporabo izreka o implicitni preslikavi dokažemo naslednje: Če je  $f: M \rightarrow N$  submerzija v okolici točke  $p \in U$  ( $U \subset M$  odprta), potem je prasluka  $f^{-1}f(p)$  podmnogoterost v  $M$  razsežnosti  $\dim M - \dim N$ .

**Definicija 2.7.** Naj bo  $M$  gladka mnogoterost. Za vsako točko  $p \in M$  definiramo simetrično pozitivno-definitno bilinearno preslikavo  $g_p: T_p M \times T_p M \rightarrow \mathbb{R}$ , ki je gladko odvisna od  $p$ . Družino preslikav  $g_p$  imenujemo *Riemannova metrika*  $g$  na mnogoterosti  $M$ . Gladki mnogoterosti, opremljeni z Riemannovo metriko, pravimo *Riemannova mnogoterost*.

Izkaže se, da vsaka mnogoterost razreda  $\mathcal{C}^{r+1}$  premore Riemannovo metriko razreda  $\mathcal{C}^r$ .

Naj bo  $M$  domena v  $\mathbb{R}^n$  s koordinatami  $x = (x_1, \dots, x_n)$ . Riemannova metrika na  $M$  je tedaj oblike

$$g_p = \sum_{i,j=1}^n g_{i,j}(p) dx_i dx_j, \quad p \in M, \quad (2.1)$$

kjer je  $G(p) = [g_{i,j}(p)]_{i,j=1}^n$  simetrična pozitivno-definitna matrika za vse  $p \in M$ . Za tangentna vektorja  $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ ,  $\eta = (\eta_1, \dots, \eta_n) \in \mathbb{R}^n$  velja

$$g_p(\xi, \eta) = \sum_{i,j=1}^n g_{i,j}(p) \xi_i \eta_j = G(p) \xi \cdot \eta. \quad (2.2)$$

Vzemimo gladko imerzijo  $x: M \rightarrow \widetilde{M}$  in Riemannovo metriko  $\tilde{g}$  na  $\widetilde{M}$ . *Povlečeno metriko*  $g = x^*\tilde{g}$  na  $M$ , definirano na paru tangentnih vektorjev  $\xi, \eta \in T_p M$ , podaja predpis

$$g_p(\xi, \eta) = \tilde{g}_{x(p)}(dx_p(\xi), dx_p(\eta)). \quad (2.3)$$

Če je metrika  $\tilde{g}$  razreda  $\mathcal{C}^r$  in imerzija  $x$  razreda  $\mathcal{C}^{r+1}$ , potem je tudi povlečena metrika  $g = x^*\tilde{g}$  razreda  $\mathcal{C}^r$ .

**Primer 2.8** (Prva fundamentalna forma). Oglejmo si primer Riemannove metrike na realnem  $n$ -razsežnem Evklidskem prostoru  $\mathbb{R}^n$ . Če izberemo standardne koordinate  $x = (x_1, \dots, x_n)$ , *Evklidsko metriko* definira predpis

$$ds^2 = (dx_1)^2 + \dots + (dx_n)^2; \quad (2.4)$$

to je Riemannova metrika, ki ustreza identični matriki  $I_n$ . Naj bo  $D$  domena v  $\mathbb{R}^2$  in  $x: D \rightarrow \mathbb{R}^n$  imerzija, podana s predpisom  $x(u_1, u_2) = (x_1(u_1, u_2), \dots, x_n(u_1, u_2))$  za  $(u_1, u_2) \in D$ . Pripadajoča metrika na  $D$  je enaka

$$g = x^*ds^2 = g_{1,1}du_1^2 + g_{1,2}du_1du_2 + g_{2,1}du_2du_1 + g_{2,2}du_2^2, \quad (2.5)$$

$$g_{1,1} = |x_{u_1}|^2, \quad g_{1,2} = g_{2,1} = x_{u_1} \cdot x_{u_2}, \quad g_{2,2} = |x_{u_2}|^2 \quad (2.6)$$

in jo imenujemo *prva fundamentalna forma* ploskve  $M = x(D)$ .

**Definicija 2.9.** *Riemannova ploskev* je kompleksna mnogoterost kompleksne dimenzije 1.

**Definicija 2.10.** Naj bo  $M$  mnogoterost brez roba in  $K$  njena zaprta podmnožica. Povezano komponento v  $M \setminus K$ , katere zaprtje je kompaktno v  $M$ , imenujemo *luknja* množice  $K$  v  $M$ .

**Definicija 2.11.** *Jordanov lok* je pot v ravnini, ki je topološko izomorfna intervalu  $[0, 1]$ . *Jordanova krivulja* je ravninska krivulja, ki je topološko ekvivalentna enotski krožnici.

Spomnimo se še enega topološkega pojma. Naj bo  $M$  povezana mnogoterost in  $x_0 \in M$  izbrana točka. Zanimajo nas zanke v  $M$ , ki gredo skozi izbrano točko, natančneje, zvezne preslikave  $\gamma: [0, 1] \rightarrow M$ ,  $\gamma(0) = \gamma(1) = x_0$ . Označimo množico vseh takih zank z  $\Gamma(x_0)$  in na njej vpeljimo ekvivalenčno relacijo  $\sim$  na naslednji način:

$\gamma_1 \sim \gamma_2 \iff$  obstaja zvezna preslikava  $H: [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow M$ , ki zadošča

- $H(0, s) = H(1, s) = x_0$  za vse  $s \in [0, 1]$ ,
- $H(t, 0) = \gamma_1(t)$  in  $H(t, 1) = \gamma_2(t)$  za vse  $t \in [0, 1]$ .

Preslikavo  $H$  imenujemo *homotopija*, zanki, ki premoreta homotopijo pa *homotopsko ekvivalentni*. Kvocijent  $\pi_1(M, x_0) = \Gamma(x_0)/\sim$  imenujemo *prva fundamentalna grupa* mnogoterosti  $M$  glede na točko  $x_0$ , njeno abelizacijo  $H_1(M, \mathbb{Z})$  pa *prva homološka grupa* mnogoterosti  $M$  s celimi koeficienti.

## 2.2 Vektorska polja in diferencialne 1-forme

**Definicija 2.12.** Naj bo  $r \geq 1$  ter  $E$  in  $B$  mnogoterosti razreda  $\mathcal{C}^r$ . Surjektivno preslikavo  $\pi: E \rightarrow B$  imenujemo realen *vektorski sveženj* ranga  $n$  in razreda  $\mathcal{C}^r$ , če

1. je vsako vlakno  $\pi^{-1}(b) = E_b$ ,  $b \in B$ ,  $n$ -razsežen realen vektorski prostor:  $E_b \cong \mathbb{R}^n$ ,
2. za vsak  $b \in B$  obstajata okolica  $b \in U \subset B$  in difeomorfizem  $\tau: E|_U \rightarrow U \times \mathbb{R}^n$  razreda  $\mathcal{C}^r$ , tako da je za vsak  $x \in U$  preslikava  $\tau_x: E_x \rightarrow \{x\} \times \mathbb{R}^n$  linearni izomorfizem. Preslikavi  $\tau_x$  pravimo *lokalna trivializacija*.

Če ima vlakno strukturo kompleksnega vektorskega prostora, na ustreznih mestih v definiciji zamenjamo  $\mathbb{R}^n$  s  $\mathbb{C}^n$  – v tem primeru dobimo kompleksen vektorski sveženj.

**Definicija 2.13.** *Prerez* vektorskega svežnja  $\pi: E \rightarrow B$  je preslikava  $s: B \rightarrow E$ , za katero velja  $\pi \circ s = id_B$ . Ekvivalentno, za vsak  $b \in B$  je  $s(b) \in \pi^{-1}(b) = E_b$ , torej prerez vsako točko baznega prostora slika v točko v vlaknu nad  $b$ .

Omenimo poseben primer vektorskega svežnja, ki bo pomemben v nadaljevanju. Naj bo  $X$  mnogoterost razreda  $\mathcal{C}^r$  z  $r \geq 1$ . Njen *tangentni sveženj* je disjunktna unija tangentnih prostorov na  $X$  v točkah  $x \in X$ :

$$TX = \bigsqcup_{x \in X} T_x X.$$

Tangentni sveženj je vektorski sveženj ranga  $n = \dim X$  in razreda  $\mathcal{C}^{r-1}$ .

**Definicija 2.14.** Naj bo  $X$  mnogoterost razreda  $\mathcal{C}^r$ , kjer je  $r \geq 1$ . Prerez njenega tangentnega svežnja, to je preslikava

$$V: X \rightarrow TX, \quad V(x) = V_x \in T_x X, \quad x \in X,$$

se imenuje *vektorsko polje* na  $X$ . Prostor vektorskih polj na  $X$  označimo z  $\Gamma(X)$ .

**Definicija 2.15.** Naj bo  $V$  vektorsko polje na mnogoterosti  $X$  in  $x \in X$  točka, v kateri je vektorsko polje neničelno. Pot  $\gamma_x: (-\varepsilon, \varepsilon) \subset \mathbb{R} \rightarrow X$  razreda  $\mathcal{C}^1$  je *integralna krivulja* vektorskega polja  $V$  skozi  $x$ , če je  $\gamma_x(0) = x$  in

$$\dot{\gamma}_x(t) = V(\gamma_x(t)) \in T_{\gamma_x(t)} X, \quad t \in (-\varepsilon, \varepsilon).$$

Naj bo  $U \subset X$  odprta množica, na kateri je vektorsko polje  $V$  neničelno. *Tok vektorskega polja*  $V$  na  $U$  je 1-parametrična družina preslikav  $\Phi_t: U \rightarrow \Phi_t(U)$ , definiranih s predpisi  $\Phi_t(x) = \gamma_x(t)$ .

Vektorsko polje  $V$  lahko v lokalnih koordinatah  $x = (x_1, \dots, x_n)$  na odprti podmnožici  $U \subset X$  zapišemo kot

$$V(m) = \sum_{i=1}^n V_i(m) \frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_m, \tag{2.7}$$

kjer so  $V_i$  realne funkcije na  $U$ , diferenciali  $\frac{\partial}{\partial x_i}$  pa v vsaki točki  $m \in U$  sestavljajo bazo tangentnega prostora  $T_m X$ . Pot  $\gamma(t) = (\gamma_1(t), \dots, \gamma_n(t))$  na  $X$  je po definiciji integralna krivulja vektorskega polja  $V$  natanko takrat, ko zadošča enakosti

$$\dot{\gamma}(t) = \sum_{i=1}^n V_i(\gamma(t)) \frac{\partial}{\partial x_i}.$$

Rešujemo sistem  $n$  navadnih diferencialnih enačb ( $i \in \{1, \dots, n\}$ )

$$\dot{\gamma}_i(t) = V_i(\gamma_1(t), \dots, \gamma_n(t)),$$

katerega lokalna rešitev je tok vektorskega polja  $V$  na  $X$ ,  $\Phi_t(m)$ . Po eksistenčnem izreku za navadne diferencialne enačbe lokalna rešitev vedno obstaja.

Zanimajo nas duali tangentnih prostorov ter prerezi pripadajočih sveženjev.

**Definicija 2.16.** Naj bo  $X$  gladka mnogoterost. Dualni sveženj njenega tangentnega svežnja imenujemo *kotangentni sveženj*

$$T^*X = (TX)^* = \bigsqcup_{x \in X} T_x^*X. \quad (2.8)$$

Tu je  $T_x^*X$  *kotangentni prostor* mnogoterosti  $X$  v točki  $x \in X$ , ki je sestavljen iz linearnih funkcionalov  $T_x^*X \rightarrow \mathbb{R}$ .

(Diferencialna) 1-forma na mnogoterosti  $X$  je prerez  $\alpha: X \rightarrow T^*X$  kotangentnega svežnja. Prostor diferencialnih 1-form na  $X$  označimo z  $\Omega^1(X)$ .

Diferencialno 1-formo  $\omega \in \Omega^1(X)$  imenujemo *eksaktna*, če velja  $\omega = df$  za neko funkcijo  $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ .

Podobno kot vektorska polja lahko tudi 1-forme predstavimo lokalno. Naj bo  $U$  odprta podmnožica v  $X$  z lokalnimi koordinatami  $x = (x_1, \dots, x_n)$ . Če so  $a_i$  realne funkcije na  $U$  in  $dx_i$  diferenciali koordinatnih funkcij, ki v vsaki točki  $m \in U$  tvorijo bazo kotangentnega prostora  $T_m^*X$ , potem ima poljubna 1-forma na  $U$  obliko

$$\alpha(m) = \sum_{i=1}^n a_i(m) dx_i|_m. \quad (2.9)$$

Baza kotangentnega prostora je dualna bazi tangentnega prostora; natančneje,

$$dx_i(m) \left( \frac{\partial}{\partial x_j}(m) \right) = \delta_{ij}.$$

## 2.3 Ukrivljenost ploskve

Naj bo  $M$  ploskev,  $n \geq 3$  in  $x: M \rightarrow \mathbb{R}^n$  imerzija razreda  $\mathcal{C}^2$ . Izberimo lokalno karto  $(U, \phi)$  na  $M$  in koordinate  $u = (u_1, u_2) \in U$ , tako da je zožitev  $x|_U: U \rightarrow \mathbb{R}^n$  vložitev na orientabilno ploskev  $S = x(U) \subset \mathbb{R}^n$ . Izberimo točko  $q \in U$  in s  $p = x(q) \in S$  označimo njeno sliko na ploskvi  $S$ . Naj bo  $t \mapsto (u_1(t), u_2(t)) \in U$  parametrizacija krivulje razreda  $\mathcal{C}^2$  ter  $q = (u_1(t_0), u_2(t_0))$  za nek  $t_0 \in \mathbb{R}$ . Vsaka krivulja, vložena v  $S$ , ki vsebuje točko  $p$ , je tedaj oblike

$$\alpha(t) = x(u_1(t), u_2(t)). \quad (2.10)$$

Označimo z  $s = s(t)$  ločno dolžino krivulje  $\alpha$ . Predpostavimo, da izbrana točka  $p$  ustreza  $p = \alpha(s_0) \in S$ , označimo pripadajoč tangentni vektor  $\nu = \alpha'(s_0) \in T_p S$  ter enotsko normalo  $N \in N_p S$  v točki  $p$ . Količino

$$\kappa^N(p, \nu) = \alpha''(s_0) \cdot N \quad (2.11)$$

imenujemo *normalna ukrivljenost* ploskve  $S$  v točki  $p$  v tangentni smeri  $\nu$  in smeri enotske normale  $N$ .

Oglejmo si preslikavo  $\kappa^N(p, \cdot): \{\nu \in T_p S; |\nu| = 1\} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\nu \mapsto \kappa^N(p, \nu)$ , kjer je  $p \in S$  izbrana fiksna točka. Kot zvezna preslikava na kompaktni množici doseže minimalno in maksimalno vrednost,

$$\kappa_1^N(p) = \min_{|\nu|=1} \kappa^N(p, \nu), \quad \kappa_2^N(p) = \max_{|\nu|=1} \kappa^N(p, \nu), \quad (2.12)$$

katerima pravimo *glavni ukrivljenosti* ploskve  $S$  (v točki  $p$  in normalni smeri  $N$ ).

**Definicija 2.17.** 1. *Povprečna ukrivljenost* ploskve  $S$  v točki  $p$  in normalni smeri  $N$  je povprečje glavnih ukrivljenosti,

$$H^N(p) = \frac{1}{2} (\kappa_1^N(p) + \kappa_2^N(p)). \quad (2.13)$$

2. Njun produkt

$$K^N(p) = \kappa_1^N(p) \cdot \kappa_2^N(p) \quad (2.14)$$

definira *Gaussovo ukrivljenost* ploskve  $S$  v točki  $p$  in normalni smeri  $N$ .

3. Projekcijo povprečne ukrivljenosti na normalni prostor  $N_p S$  v smeri tangenčnega prostora  $T_p S$  imenujemo *vektor povprečne ukrivljenosti* ploskve  $S$  v točki  $p$  in označimo s  $\mathbf{H}$ . Enačba 2.13 se v tej notaciji glasi  $H^N(p) = \mathbf{H} \cdot N$  za vsak  $N \in N_p S$ .

**Primer 2.18** (Vektor povprečne ukrivljenosti za  $\mathbf{n} = \mathbf{3}$ ). Naj bo  $U \subset M$  odprta podmnožica,  $x: U \rightarrow \mathbb{R}^3$  imerzija in označimo z  $S = x(U)$  sliko, ki je ploskev, vložena v  $\mathbb{R}^3$ . V poljubni točki  $p \in S$  je zato normalni prostor  $N_p S$  enorazsežen, torej premore natanko dve enotski normalni vektorski polji, ki se razlikujeta za predznak ( $\pm N$ ). Izbor orientacije na  $U$  enotsko normalno vektorsko polje enolično določa, zato ga lahko predstavimo kot preslikavo

$$N: S \rightarrow \mathbb{S}^2,$$

imenovano *Gaussova preslikava* vložene ploskve  $S$ . Če je  $x = x(u_1, u_2)$ ,  $(u_1, u_2) \in U$ , lokalna parametrizacija ploskve, dobimo eksplicitno formulo  $N = \frac{x_{u_1} \times x_{u_2}}{|x_{u_1} \times x_{u_2}|}$ .

Vektor povprečne ukrivljenosti je po definiciji pravokoten na  $S$ , zato obstaja funkcija  $\lambda$ , da velja  $\mathbf{H} = \lambda N$ . Vemo še, da je normalni vektor enotski, kar nam da zvezo

$$\begin{aligned} H = H^N &= \mathbf{H} \cdot N = \lambda N \cdot N = \lambda, \\ \mathbf{H} &= H \cdot N. \end{aligned} \quad (2.15)$$



Z besedami je vektor povprečne ukrivljenosti enak produktu povprečne ukrivljenosti in Gaussove preslikave.

Glavni ukrivljenosti sta odvisni od enotske normale; če namesto pozitivno predznačene izberemo negativno enotsko normalo, se glavnima ukrivljenostma in posledično povprečni ukrivljenosti spremeni predznak. Po zgornji formuli pa vidimo, da je vektor povprečne ukrivljenosti neodvisen od izbora enotskega normalnega vektorskega polja.

**Lema 2.19.** *Naj bo  $x: M \rightarrow \mathbb{R}^n$  imerzija razreda  $\mathcal{C}^2$ . Tedaj velja*

$$\Delta x = 2\mathbf{H}, \quad (2.16)$$

kjer je  $\Delta$  Laplaceov operator glede na Riemannovo metriko  $g = x^*ds^2$  v točki  $q \in M$  in  $\mathbf{H}$  vektor povprečne ukrivljenosti v točki  $p = x(q) \in S$ .

## 2.4 Holomorfne in harmonične funkcije

Naj bo  $M$  Riemannova ploskev in  $\zeta = u + iv$  lokalna holomorfna koordinata na njej. Definiramo *diferencial*

$$d = \frac{\partial}{\partial u}du + \frac{\partial}{\partial v}dv = \partial + \bar{\partial} = \frac{\partial}{\partial \zeta}d\zeta + \frac{\partial}{\partial \bar{\zeta}}d\bar{\zeta} \quad (2.17)$$

in *konjugirani diferencial*

$$d^c = 2\Im(\partial) = i(\bar{\partial} - \partial). \quad (2.18)$$

Velja

$$\begin{aligned} d + id^c &= 2\partial, & d - id^c &= 2\bar{\partial}, \\ dd^c &= 2i\partial\bar{\partial} = \left( \frac{\partial^2}{\partial u^2} + \frac{\partial^2}{\partial v^2} \right) du \wedge dv = \Delta du \wedge dv, \end{aligned}$$

kjer je  $\Delta$  Laplaceov operator glede na Evklidsko metriko.

Po definiciji je diferenciable funkcija  $f = x + iy: M \rightarrow \mathbb{C}^n$  *holomorfna* ( $\bar{\partial}f = 0$ ) natanko tedaj, ko v poljubnih lokalnih holomorfnih koordinatah reši Cauchy-Riemannov sistem enačb  $x_u = y_v$ ,  $x_v = -y_u$ .

Funkcija  $x: M \rightarrow \mathbb{C}^n$  razreda  $\mathcal{C}^2(M)$  je *harmonična*, če velja  $dd^cx = 0$ . Harmonične funkcije karakteriziramo z naslednjimi ekvivalenčnimi pogoji:

$$x \in \mathcal{C}^2(M) \text{ je harmonična} \iff dd^cx = 0 \iff \partial\bar{\partial}x = 0 \iff \Delta x = 0.$$

Vsaka holomorfna funkcija je torej harmonična. Vzemimo realno harmonično funkcijo  $x: M \rightarrow \mathbb{R}^n$  razreda  $\mathcal{C}^2(M)$  in naj bo  $D \subset M$  enostavno povezana<sup>3</sup> domena. Zaradi pogoja o harmoničnosti vemo, da je 1-forma  $d^cx$  eksaktna. Za izbrano fiksno točko  $p_0 \in D$  definirajmo funkcijo  $y: D \rightarrow \mathbb{C}^n$  razreda  $\mathcal{C}^2(D)$  s predpisom

$$y(p) = \int_{p_0}^p d^cx + C, \quad (2.19)$$

---

<sup>3</sup>Topološki prostor  $X$  je *enostavno povezan* natanko tedaj, ko je s potmi povezan in ima v vsaki točki trivialno prvo fundamentalno grupo,  $\pi_1(X) = 0$ .

kjer je  $C$  konstanta. Imenujemo jo *harmonična konjugiranka* funkcije  $x$ . Velja enakost  $dy = d^c x$ , nova funkcija  $z: D \rightarrow \mathbb{C}^n$ ,  $z = x + iy$ , imenovana *kompleksna krivulja* v  $\mathbb{C}^n$ , pa je holomorfna. Zaključimo, da je zožitev realne harmonične funkcije na enostavno povezano domeno v  $M$  enaka realnemu delu holomorfne funkcije  $x + iy$ , pri čemer je  $y$  harmonična konjugiranka od  $x$ , definirana s predpisom 2.19.

**Definicija 2.20.** Naj bo  $x: M \rightarrow \mathbb{R}^n$  harmonična preslikava. Njen *pretok* je homomorfizem grup  $\text{Flux}_x: H_1(M, \mathbb{Z}) \rightarrow \mathbb{R}^n$ , definiran s predpisom

$$\text{Flux}_x([C]) = \int_C d^c x. \quad (2.20)$$

V definiciji pretoka je  $[C] \in H_1(M, \mathbb{Z})$ , integral pa je po Greenovi formuli odvisen le od homološkega razreda poti  $C$ , zato bomo v nadaljevanju pisali kar  $\text{Flux}_x(C)$ . V zgornjem smislu lahko rečemo, da pretok meri, koliko 1-formi  $d^c x$  manjka do eksaktnosti. Realna harmonična preslikava  $x$  premore harmonično konjugiranko na  $M$  natanko tedaj, ko je  $d^c x$  eksaktna 1-forma na  $M$ , to pa je ekvivalentno pogoju  $\text{Flux}_x(C) = 0$  za vsako sklenjeno krivuljo  $C \subset M$ .

## 2.5 Aproksimacijski izreki za Riemannove ploskve

**Izrek 2.21** (Rungejev aproksimacijski izrek za Riemannove ploskve). *Naj bo  $M$  Riemannova ploskev in  $K$  njena kompaktna podmnožica. Potem lahko vsako funkcijo  $f$ , ki je holomorfna na okolici  $K$ , aproksimiramo enakomerno na  $K$  z meromorfnimi funkcijami  $F$  na  $M$  brez polov na  $K$ , ter s holomorfnimi funkcijami na  $M$ , če  $K$  nima lukenj. Funkcije  $F$  lahko izberemo tako, da se z dano funkcijo  $f$  na končni množici točk v  $K$  ujemajo do izbranega končnega reda in da ima  $F$  pole v podmnožici  $E \subset M \setminus K$ , kjer  $E$  vsebuje točko v vsaki luknji množice  $K$ .*

**Definicija 2.22.** Naj bo  $K$  kompaktna podmnožica Riemannove ploskve  $M$ . Njena *holomorfna ogrinjača* je množica

$$\widehat{K}_{\mathcal{O}(M)} = \{p \in M; |f(p)| \leq \max_K |f| \text{ za vse } f \in \mathcal{O}(M)\}. \quad (2.21)$$

Če velja  $K = \widehat{K}_{\mathcal{O}(M)}$ , množico  $K$  imenujemo *Rungejeva množica*.

**Izrek 2.23** (Bishop-Mergelyanov aproksimacijski izrek). *Naj bo  $M$  odprta Riemannova ploskev in  $K$  njena kompaktna podmnožica brez lukenj ( $K$  je Rungejeva v  $M$ ). Potem lahko vsako funkcijo v  $\mathcal{A}(K)$  aproksimiramo enakomerno na  $K$  s funkcijami v  $\mathcal{O}(M)$ .*

**Izrek 2.24** (Weierstrass-Florackov interpolacijski izrek). *Naj bo  $M$  odprta Riemannova ploskev in  $K$  njena Rungejeva podmnožica. Naj bo  $A = \{a_i\}_{i=1}^\infty$  zaprta diskretna podmnožica v  $M$ ,  $U$  odprta podmnožica  $M$ , tako da je  $A \cup K \subset U$  in  $f$  meromorfna funkcija na  $U$  z ničlami in poli le v točkah množice  $A$ . Potem za izbrane  $\varepsilon > 0$  in števila  $k_i \in \mathbb{N}$  obstaja meromorfna funkcija  $F$  na  $M$ , za katero velja:*

1.  $|F(z) - f(z)| < \varepsilon$  za vse  $z \in K$ ,
2. v točkah  $a_i$  je razlika  $F - f$  ničelna do reda  $k_i$ ,
3.  $F$  nima ničel in polov na  $M \setminus A$ .

## 3 Minimalne ploskve

### 3.1 Variacija ploščine

V tem razdelku bomo navedli klasično definicijo minimalne ploskve ter variacijski formuli, s katerima minimalne ploskve opišemo kot ploskve z ničelnim vektorjem povprečne ukrivljenosti.

**Definicija 3.1.** 1. Naj bo  $M$  gladka kompaktna ploskev z robom,  $n \geq 3$  in naj bo preslikava  $x: M \rightarrow \mathbb{R}^n$  imerzija razreda  $\mathcal{C}^2$ . *Variacija preslikave  $x$  s fiksnim robom* je 1-parametrična družina  $\mathcal{C}^2$  preslikav

$$x^t: M \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad t \in (-\varepsilon, \varepsilon) \subset \mathbb{R}, \quad (3.1)$$

če je  $x^0 = x$  in za vse  $t$  z intervala velja  $x^t = x$  na  $bM$ .

2. Naj bo  $p \in M$ . *Variacijsko vektorsko polje* preslikave  $x^t$  je vektorsko polje, definirano s predpisom

$$E(p, t) = \frac{\partial x^t(p)}{\partial t} \in \mathbb{R}^n. \quad (3.2)$$

Opazimo, da je za dovolj majhne vrednosti  $t$  preslikava  $x^t$  imerzija. Po definiciji je na  $bM \times (-\varepsilon, \varepsilon)$  variacijsko vektorsko polje  $E$  konstantno ničelno.

**Definicija 3.2.** Naj bo  $x: M \rightarrow \mathbb{R}^n$  imerzija razreda  $\mathcal{C}^2$ . Sliko  $x(M)$  imenujemo *minimalna ploskev*, če za vsako kompaktno domeno  $D \subset M$  z gladkim robom  $bD$  in vsako gladko variacijo  $x^t$  preslikave  $x$  s fiksnim robom velja

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \text{Area}(x^t(D)) = 0. \quad (3.3)$$

Ekvivalentno pravimo, da je minimalna ploskev stacionarna točka ploskovnega funkcionala Area.

Levo stran enakosti 3.3 imenujemo *prva variacija ploščine* pri  $t = 0$ . Slednjo z geometrijskimi lastnostmi preslikave  $x$ , natančneje ukrivljenostjo, povezuje *prva variacijska formula* v naslednjem izreku.

**Izrek 3.3** (Prva variacijska formula). *Naj bo  $M$  gladka kompaktna ploskev z robom,  $n \geq 3$  in  $x: M \rightarrow \mathbb{R}^n$  imerzija razreda  $\mathcal{C}^2$ . Naj bo  $E = \partial x^t / \partial t|_{t=0}$  variacijsko vektorsko polje preslikave  $x^t$  pri  $t = 0$ ,  $\mathbf{H}$  vektorsko polje povprečne ukrivljenosti preslikave  $x$  in  $dA$  ploščinski element glede na Riemannovo metriko  $x^*ds^2$ , definirano na  $M$ . Potem za vsako gladko variacijo  $x^t: M \rightarrow \mathbb{R}^n$  imerzije  $x$  s fiksnim robom velja*

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \text{Area}(x^t(M)) = -2 \int_M E \cdot \mathbf{H} dA. \quad (3.4)$$

Kaj nam prva variacijska formula pove, če se osredotočimo na poseben razred variacij imerzije? Predpostavimo, da je imerzija  $x: M \rightarrow \mathbb{R}^n$  razreda  $\mathcal{C}^4$ , tj. je preslikava  $\mathbf{H}$  vsaj razreda  $\mathcal{C}^2$ . Variacijo definirajmo s predpisom

$$x^t = x + t f \mathbf{H}, \quad (3.5)$$

kjer za  $f$  izberimo gladko nenegativno funkcijo na  $M$ , ki je ničelna na robu  $\partial M$ . Po definiciji je  $x^t \in \mathcal{C}^2(M)$  variacija imerzije  $x$  s fiksnim robom. Računajmo

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \text{Area}(x^t(M)) &= -2 \cdot \int_M E \cdot \mathbf{H} dA = -2 \cdot \int_M f \mathbf{H} \cdot \mathbf{H} dA \\ &= -2 \cdot \int_M f |\mathbf{H}|^2 dA \leq 0. \end{aligned}$$

Če je  $\mathbf{H} = 0$  na  $M$ , je ploščina konstantna ( $x^t = x$ ). Sicer obstaja točka, v kateri je  $\mathbf{H} \neq 0$ , in dodatno zahtevamo, da je  $f > 0$  v okolici neke take točke. Potem je  $\frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \text{Area}(x^t(M)) < 0$ . To pomeni, da z deformacijo ploskve  $x(M) \subset \mathbb{R}^n$  v smeri vektorja povprečne ukrivljenosti  $\mathbf{H}$  ploščina za majhne  $t > 0$  strogo pada.

Po prvi variacijski formuli 3.4 v primeru  $\mathbf{H} = 0$  na  $M$  imerzija  $x$  očitno da minimalno ploskev. V nasprotnem z ustrezno izbiro vektorskega polja  $E$  na  $M$  ploščina variiranih ploskev  $x^t(M)$  za majhne  $t > 0$  in  $x^t = x + tE$  strogo pada. Ta razmislek združuje naslednji rezultat.

**Izrek 3.4.** *Naj bo  $x: M \rightarrow \mathbb{R}^n$  imerzija razreda  $\mathcal{C}^2$ . Ploskev  $x(M)$  je minimalna natanko tedaj, ko je na  $M$  vektor povprečne ukrivljenosti  $\mathbf{H}$  preslikave  $x$  identično enak 0.*

Po zadnjem izreku je vsaka točka minimalne ploskve sedlo. Ker je  $\mathbf{H} = 0$ , je  $\kappa_2 = -\kappa_1$ , torej sta glavni ukrivljenosti v vsaki točki enako veliki, a nasprotnega predznaka. Geometrijsko to pomeni, da je minimalna ploskev v vsaki točki enako ukrivljena v obeh glavnih smereh, ti pa kažeta v nasprotni normalni smeri.

Gaussova ukrivljenost minimalne ploskve  $x(M) = S$  je povsod nepozitivna, saj je  $K = -\kappa_1^2 \leq 0$ . Njen integral,

$$TC(x) = \int_M K dA \in [-\infty, 0], \quad (3.6)$$

imenujemo *totalna Gaussova ukrivljenost*. Pri tem  $dA$  označuje ploščinski element glede na Riemannovo metriko  $g = x^* ds^2$  na  $M$ . Vrednost je enaka 0 natanko takrat, ko je ploskev del ravnine. Res,  $TC(x) = 0$  natanko tedaj, ko je Gaussova ukrivljenost  $K = 0$ , kar je ekvivalentno  $\kappa_1 = \kappa_2 = 0$ . Vemo pa, da imajo le kosi ravnine obe glavni ukrivljenosti ničelni v vsaki točki. Minimalne ploskve s končno totalno Gaussovo ukrivljenostjo so najpreprostejše in jih običajno preučujemo ločeno, saj zanje velja več lastnosti, ki jih splošne minimalne ploskve ne premorejo.

S podobnimi tehnikami kot v dokazu Izreka 3.3 izpeljemo *drugo variacijsko formulo*: naj bo  $M$  kompaktna ploskev z robom, preslikava  $x: M \rightarrow \mathbb{R}^n$  pa gladka minimalna imerzija. Potem velja

$$\frac{d^2}{dt^2} \Big|_{t=0} \text{Area}(x^t(M)) = \int_M (4|E|^2 K^E + |\nabla E|^2) dA, \quad (3.7)$$

kjer  $K^E = K^N$  označuje Gaussovo ukrivljenost ploskve  $x(M)$ .

**Opomba 3.5.** Za  $M$  in  $x$  kot zgoraj definirajmo funkcijo  $f = |E|$  ter enotsko normalno vektorsko polje  $N = \frac{E}{|E|}$  na množici  $M^* = \{x \in M; f(x) \neq 0\}$ . Sledi  $E = f \cdot N$ ,  $\nabla E = (\nabla f \cdot N, f \cdot \nabla N)$  in  $|\nabla E|^2 = |\nabla f|^2 + f^2 \cdot |\nabla N|^2$ . Formula 3.7 se zato glasi

$$\left. \frac{d^2}{dt^2} \right|_{t=0} \text{Area}(x^t(M)) = \int_M (|\nabla f|^2 + f^2(4K^N + |\nabla N|^2)) dA. \quad (3.8)$$

## 3.2 Weierstrassova formula

Naj bosta  $(M, g)$  in  $(\widetilde{M}, \tilde{g})$  Riemannovi mnogoterosti z  $\dim(M) \leq \dim(\widetilde{M})$ . Imerzija  $x: (M, g) \rightarrow (\widetilde{M}, \tilde{g})$  se imenuje *konformna*, če ohranja kote. Z drugimi besedami je povlečena metrika  $x^*\tilde{g}$  konformno ekvivalentna metriki  $g$ , kar pomeni, da za pozitivno funkcijo  $\mu > 0$  na  $M$  velja  $x^*\tilde{g} = \mu g$ .

Podobno pravimo, da je lokalna karta  $(U, \phi)$  Riemannove ploskve  $(M, g)$  *izotermna* glede na Riemannovo metriko  $g$ , če za neko pozitivno funkcijo  $\mu: \phi(U) \rightarrow \mathbb{R}_+$ ,  $\phi(U) \subset \mathbb{R}_{(x,y)}^2$ , velja

$$(\phi^{-1})^*g = \mu \cdot (dx^2 + dy^2) = \mu \cdot ds_{\mathbb{R}^2}^2. \quad (3.9)$$

Lokalne koordinate na  $U$  tedaj imenujemo *izotermne koordinate*.

Naj bo ploskev  $M$  orientabilna in  $x: M \rightarrow \mathbb{R}^n$  imerzija razreda  $\mathcal{C}^2$ . Potem preslikava  $x$  določa enolično strukturo Riemannove ploskve na  $M$ , kjer je  $x$  konformna imerzija. Zato bomo v nadaljevanju obravnavali Riemannove ploskve in pripadajoče konformne imerzije v Evklidski prostor.

Brez dokaza navedimo še ekvivalentne pogoje, ki karakterizirajo konformne imerzije na domeni v Evklidski ravnini. Nanje se bomo v nadaljevanju večkrat sklicali.

**Lema 3.6.** Naj bodo  $D \subset \mathbb{R}^n$  domena z lokalnima koordinatama  $(u, v)$ ,  $n \geq 2$  in preslikava  $x = (x_1, \dots, x_n): D \rightarrow \mathbb{R}^n$  imerzija. Naslednje trditve so ekvivalentne:

1. Imerzija  $x$  je konformna v Evklidskih metrikah na  $\mathbb{R}^2$  in  $\mathbb{R}^n$ .

2. Za parcialna odvoda  $\frac{\partial x}{\partial u} = x_u$  in  $\frac{\partial x}{\partial v} = x_v$  velja

$$|x_u| = |x_v| > 0, \quad x_u \cdot x_v = 0.$$

3. Vektorji  $x_u \pm ix_v \in \mathbb{C}_*^n$  pripadajo ničelni kvadriki<sup>4</sup> (so ničelni vektorji)

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}^{n-1} = \{z = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n; z_1^2 + \dots + z_n^2 = 0\}.$$

4. Matrika, ki pripada Riemannovi metriki  $g = x^*ds^2$  na  $D$ , je enaka  $G = \mu I$ , kjer je  $\mu = |x_u|^2 = |x_v|^2$  ter  $I$  identiteta.

---

<sup>4</sup>Ničelna kvadrika  $\mathbf{A}$  v  $(n-1)$ -spremenljivkah je kompleksni stožec s singularno točko 0.

### 3.2.1 Plateaujev problem in Dirichletov energijski integral

Drugi razlog za študij konformnih imerzij je fizikalen. Na minimalne ploskve lahko gledamo kot na rešitve Plateaujevega problema, katerega moramo najprej natančno formulirati.

Označimo z  $\bar{\mathbb{D}}$  zaprt enotski disk z lokalnimi koordinatami  $(u_1, u_2)$  in izberimo gladko orientirano Jordanovo krivuljo  $\Gamma \subset \mathbb{R}^n$ . Naj bo  $x: \bar{\mathbb{D}} \rightarrow \mathbb{R}^n$  kosoma zvezno odvedljiva imerzija, katere zožitev na rob diska  $\mathbb{T}$  je monotona<sup>5</sup> parametrizacija  $x|_{\mathbb{T}}: \mathbb{T} \rightarrow \Gamma$  Jordanove krivulje  $\Gamma$ . Spomnimo se, da je površina ploskve, določene z imerzijo  $x$  enaka

$$\text{Area}(x) = \int_{\bar{\mathbb{D}}} \sqrt{|x_{u_1}|^2 |x_{u_2}|^2 - |x_{u_1} \cdot x_{u_2}|^2} du_1 du_2. \quad (3.10)$$

Naloga je poiskati preslikavo, ki zadošča zgornjim zahtevam, površina pripadajoče ploskve pa je minimalna. Dodatno je smiselno obravnavati preslikave, ki dajo končno površino.

Ključ je *Dirichletov energijski integral*

$$\mathcal{D}(x) = \int_{\bar{\mathbb{D}}} |\nabla x|^2 du_1 du_2 = \int_{\bar{\mathbb{D}}} (|x_{u_1}|^2 + |x_{u_2}|^2) du_1 du_2, \quad (3.11)$$

ki ga s površino ploskve povezuje naslednji rezultat.

**Lema 3.7.** *Za preslikavo  $x$  kot zgoraj je  $\text{Area}(x) \leq \frac{1}{2} \mathcal{D}(x)$ . Enačaj velja natanko tedaj, ko je  $x$  konformna.*

**Dokaz 1.** Poljubna vektorja  $x, y \in \mathbb{R}^n$  zadoščata

$$|x|^2 |y|^2 - |x \cdot y|^2 \leq |x|^2 |y|^2 \leq \frac{1}{4} (|x|^2 + |y|^2)^2.$$

Res, prva neenakost je očitna, druga pa je ekvivalentna neenakosti  $(|x| - |y|)^2 \geq 0$ , ki drži. Sledi  $\sqrt{|x|^2 |y|^2 - |x \cdot y|^2} \leq \frac{1}{2} (|x|^2 + |y|^2)$ . Če namesto vektorjev  $x, y$  izberemo vektorja  $x_{u_1}, x_{u_2} \in \mathbb{R}^n$ , dobimo neenakost iz leme.

Preslikava  $x$  je konformna natanko tedaj, ko velja  $|x_{u_1}| = |x_{u_2}| > 0$  in  $x_{u_1} \cdot x_{u_2} = 0$ . Enakost Dirichletovega energijskega integrala in površine je torej ekvivalentna konformnosti.

Preslikava, ki minimizira Dirichletov energijski integral, minimizira tudi površino, je konformna, in parametrizira minimalno ploskev z robom  $\Gamma$ . J. Douglas in T. Radó sta l. 1932 dokazala, da vsaka Jordanova krivulja v  $\mathbb{R}^3$  določa minimalno ploskev.

**Opomba 3.8.** Analog minimalnih ploskev v enorazsežnem primeru so geodetke. Z minimizacijo enorazsežnega energijskega integrala dobimo krivulje z minimalno dolžino, ki so poleg tega parametrizirane z večkratnikom ločne dolžine.

---

<sup>5</sup>Pravimo, da je zvezna preslikava  $f: \mathbb{T} \rightarrow \Gamma$  *monotona*, če je prasluka  $f^{-1}(x)$  povezana za vsak  $x \in \Gamma$ .

### 3.2.2 Rezultati

Prvi rezultat, ki ga navajamo, opisuje ekvivalentne pogoje minimalnosti ploskve  $M$ .

**Izrek 3.9.** *Naj bo  $M$  odprta Riemannova ploskev,  $n \geq 3$  in  $x = (x_1, \dots, x_n): M \rightarrow \mathbb{R}^n$  konformna imerzija razreda  $\mathcal{C}^2$ . Naslednje trditve so ekvivalentne:*

1.  $x$  je minimalna ploskev.
2. Vektorsko polje povprečne ukrivljenosti preslikave  $x$  je ničelno, tj.  $\mathbf{H} = 0$ .
3.  $x$  je harmonična, tj.  $\Delta x = 0$  oziroma  $dd^c x = 0$ .
4. 1-forma  $\partial x = (\partial x_1, \dots, \partial x_n)$  z vrednostmi v  $\mathbb{C}^n$  je holomorfna in velja

$$(\partial x_1)^2 + \dots + (\partial x_n)^2 = 0. \quad (3.12)$$

5. Naj bo  $\theta$  holomorfna 1-forma na  $M$ , ki ni nikjer enaka 0. Potem je preslikava  $f = 2\partial x/\theta: M \rightarrow \mathbb{C}^n$  holomorfna z vrednostmi v ničelni kvadriki

$$\mathbf{A} = \{(z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n; z_1^2 + \dots + z_n^2 = 0\}. \quad (3.13)$$

Nadalje je Riemannova metrika na  $M$ , inducirana s konformno imerzijo  $x$ , enaka

$$g = x^* ds^2 = |dx_1|^2 + \dots + |dx_n|^2 = 2(|\partial x_1|^2 + \dots + |\partial x_n|^2). \quad (3.14)$$

**Dokaz 2** (Skica). Predstavimo le osnovne ideje dokaza zgornjega izreka.

Ekvivalentnost prvih dveh trditvev smo zapisali v Izreku 3.4.

Ekvivalentnost druge in tretje trditve sledi iz Leme 2.19, saj je  $\Delta x = 2\mathbf{H}$ .

Naj bo  $\zeta = u + iv$  lokalna holomorfna koordinata na  $M$ . Tedaj je

$$\begin{aligned} 2\partial x &= dx + id^c x = (x_u du + x_v dv) + i(-x_v du + x_u dv) = \\ &= (x_u - ix_v)(du + idv) = (x_u - ix_v)d\zeta, \\ \partial x &= (\partial x_1, \dots, \partial x_n) = \frac{1}{2}(x_u - ix_v)d\zeta. \end{aligned}$$

Preslikava  $x$  je konformna natanko takrat, ko je  $\sum_{i=1}^n ((x_i)_u \pm i(x_i)_v)^2 = |x_u|^2 - |x_v|^2 \pm 2ix_u \cdot x_v = 0$ , kar je ekvivalentno

$$(\partial x_1)^2 + \dots + (\partial x_n)^2 = \frac{1}{4}(|x_u|^2 - |x_v|^2 - 2ix_u \cdot x_v) d\zeta^2 = 0,$$

ki je enakost 3.12. Ker velja  $dd^c x = -2i\bar{\partial}(\partial x)$ , je  $x$  harmonična natanko tedaj, ko je  $\partial x$  holomorfna; to je ekvivalenca tretje in četrte trditve.

Funkcija  $f = 2\partial x/\theta$  je kvocient 1-form, ki je zaradi pogoja na  $\theta$  dobro definirana. Ker je  $x$  imerzija,  $f$  ne zavzame vrednosti 0. Četrta in peta trditve sta očitno ekvivalentni.

Zvezo 3.14 dobimo s krajšim računom v lokalnih holomorfnih koordinatah  $\zeta = u + iv$  na  $M$  in upoštevanjem, da za konformno preslikavo  $x$  velja  $|x_u| = |x_v| > 0$ ,  $x_u \cdot x_v = 0$ .

V razdelku o holomorfnih in harmoničnih funkcijah na Riemannovih ploskvah smo govorili o harmoničnih konjugirankah in kompleksnih krivuljah izbrane holomorfne funkcije. Sedaj opazujemo konformno minimalno imerzijo  $x: M \rightarrow \mathbb{R}^n$  ter njeno harmonično konjugiranko  $y$  na odprti podmnožici  $D \subset M$ . Tedaj o preslikavi  $z = x + iy: M \rightarrow \mathbb{C}^n$ , ki je imerzija in holomorfna krivulja, vemo več, saj njeni parcialni odvodi zadoščajo ničelnemu pogoju.

**Definicija 3.10.** 1. Naj bo  $M$  odprta Riemannova ploskev in  $n \geq 3$ . Holomorfno imerzijo  $z = (z_1, \dots, z_n): M \rightarrow \mathbb{C}^n$ , za katero velja  $(\partial z_1)^2 + \dots + (\partial z_n)^2 = 0$ , imenujemo *holomorfna ničelna krivulja* v  $\mathbb{C}^n$ .

2. Naj bo  $z = x + iy: M \rightarrow \mathbb{C}^n$  holomorfna ničelna krivulja. Njena realni del in imaginarni del,  $x, y: M \rightarrow \mathbb{R}^n$  imenujemo *konjugirani minimalni ploskvi*.
3. Naj bo  $t \in \mathbb{R}$ . Predstavnik 1-parametrične družine  $x^t = \Re(e^{it}z): M \rightarrow \mathbb{R}^n$  imenujemo *pridružene minimalne ploskve* holomorfne ničelne krivulje  $z$ .

Izrek pravi, da vsaka odprta Riemannova ploskev premore povsod neničelno eksaktno 1-formo. Naj bosta  $z: M \rightarrow \mathbb{C}^n$  holomorfna ničelna krivulja in  $\theta$  povsod neničelna holomorfna 1-forma na  $M$ . Diferencial  $dz$  je 1-forma in obstaja holomorfna preslikava  $f: M \rightarrow \mathbf{A}_*$ , ki 1-formi povezuje z enakostjo  $dz = f\theta$ . Tu je množica  $\mathbf{A}_* = \mathbf{A} \setminus \{0\}$  punktirana ničelna kvadrika v  $\mathbb{C}^n$ .

*Enneper-Weierstrassova formula* je posledica Izreka 3.9, zato jo bomo navedli brez dokaza. Rezultat je pomemben, saj predstavlja konformne minimalne ploskve in holomorne ničelne krivulje, konstruirane na univerzalen način. Metodo konstrukcije bomo v naslednjih poglavjih pogosto uporabljali.

**Izrek 3.11** (Enneper-Weierstrassova formula). *Naj bo  $n \geq 3$  in  $M$  odprta Riemannova ploskev, na kateri definiramo holomorfno 1-formo  $\Phi = (\phi_1, \dots, \phi_n)$  z vrednostmi v  $\mathbb{C}^n$ , ki je povsod neničelna, in zadošča*

1.  $\sum_{j=1}^n \phi_j^2 = 0$ ,
2.  $\Re \int_C \Phi = 0$  za vse  $[C] \in H_1(M, \mathbb{Z})$ .

Potem za poljuben izbor točk  $p_0 \in M$  in  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  predpis  $x: M \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,

$$x(p) = x_0 + \Re \int_{p_0}^p \Phi, \quad p \in M, \quad (3.15)$$

podaja dobro definirano konformno minimalno imerzijo. Zanja velja

$$2\partial x = \Phi \quad \text{in} \quad g = x^*ds^2 = |dx|^2 = \frac{1}{2}|\Phi|^2. \quad (3.16)$$

Če velja še  $\int_C \Phi = 0$  za vse  $[C] \in H_1(M, \mathbb{Z})$ , potem za poljuben izbor točk  $p_0 \in M$  in  $z_0 \in \mathbb{C}^n$  predpis  $z: M \rightarrow \mathbb{C}^n$ ,

$$z(p) = z_0 + \int_{p_0}^p \Phi, \quad p \in M, \quad (3.17)$$

podaja dobro definirano holomorfno ničelno krivuljo. Zanja velja

$$\partial z = \Phi \quad \text{in} \quad z^*ds^2 = |dz|^2 = |\partial z|^2 = |\Phi|^2. \quad (3.18)$$



**Opomba 3.12.** Pogoji  $\Re \int_C \Phi = 0$ , da so vse realne periode po sklenjenih krivuljah v  $M$  ničelne, zagotavlja, da je integral 3.15 dobro definiran. Natančneje, neodvisen je od izbire poti med točkama  $p_0 \in M$  in  $p \in M$  po kateri integriramo. Podobno, pogoj  $\int_C \Phi = 0$  za vse  $[C] \in H_1(M, \mathbb{Z})$  zagotavlja dobro definiranost integrala 3.17.

V primeru, ko je  $M$  enostavno povezana ploskev, pogoja o ničelnosti period nista potrebna, saj sledita iz definicije enostavne povezanosti.

**Opomba 3.13.** Dodatek k izreku pravi, da je vsaka konformna minimalna imerzija  $x: M \rightarrow \mathbb{R}^n$  oblike 3.15, vsaka holomorfná ničelna krivulja  $z: M \rightarrow \mathbb{C}^n$  pa oblike 3.17. Prav zato je Enneper-Weierstrassova formula elegantna metoda za konstrukcijo opisanih preslikav.

Kot smo omenili zgoraj, včasih pišemo  $\Phi = f\theta$ , pri čemer je  $\theta$  povsod neničelna holomorfná 1-forma na  $M$  in  $f = \Phi/\theta: M \rightarrow \mathbf{A}_*$  holomorfná preslikava.

Če konformno minimalno imerzijo  $x: M \rightarrow \mathbb{R}^n$  poznamo, potem pripadajočo povsod neničelno holomorfnó 1-formo  $\Phi = 2\partial x$  z vrednostmi v  $\mathbb{C}^n$  imenujemo *Weierstrassovi podatki* preslikave  $x$ . Analogno, za holomorfnó ničelno krivuljo  $z: M \rightarrow \mathbb{C}^n$  pripadajočo 1-formo  $\Phi = \partial z = dz$  imenujemo *Weierstrassovi podatki* preslikave  $z$ .

### 3.3 Gaussova preslikava

V razdelku o ukrivljenosti ploskve smo pri računanju vektorja povprečne ukrivljenosti v trirazsežnem prostoru omenili Gaussovo preslikavo. Sedaj bomo formalno definirali Gaussovo preslikavo minimalne ploskve ter se ponovno osredotočili na trirazsežni primer – izpeljali bomo klasično Weierstrassovo formulo za minimalne ploskve v prostoru  $\mathbb{R}^3$ .

**Definicija 3.14.** Naj bo  $M$  odprta Riemannova ploskev in  $n \geq 3$ . *Gaussova preslikava* konformne minimalne imerzije  $x = (x_1, \dots, x_n): M \rightarrow \mathbb{R}^n$  je holomorfná preslikava

$$\mathcal{G} = [\partial x_1 : \dots : \partial x_n]: M \rightarrow \mathbf{Q}^{n-2} \subset \mathbb{CP}^{n-1}. \quad (3.19)$$

Gaussova preslikava holomorfné ničelne krivulje  $z = (z_1, \dots, z_n): M \rightarrow \mathbb{C}^n$  je holomorfná preslikava

$$\mathcal{G} = [dz_1 : \dots : dz_n]: M \rightarrow \mathbf{Q}^{n-2} \subset \mathbb{CP}^{n-1}.$$

Pri tem je množica  $\mathbf{Q}^{n-2} = \{[z_1 : \dots : z_n] \in \mathbb{CP}^{n-1}; \sum_{i=1}^n z_i^2 = 0\}$  *hiperkvadrika* v  $\mathbb{CP}^{n-1}$ , ki jo dobimo s projektivizacijo punktirane ničelne kvadrike  $\mathbf{A}_*^{n-1} \subset \mathbb{C}^n$ .

Oglejmo si Gaussovo preslikavo v primeru trirazsežnega prostora. Hiperkvadriko  $\mathbf{Q}^1 \subset \mathbb{CP}^2$ , ki je racionalna krivulja, parametrizirajmo z biholomorfnó preslikavo

$$\begin{aligned} \tau: \mathbb{CP}^1 &\rightarrow \mathbf{Q}^1, \\ \tau(t) &= [1 - t^2 : i(1 + t^2) : 2t]. \end{aligned} \quad (3.20)$$

Koordinate slike označimo z  $u = 1 - t^2$ ,  $v = i(1 + t^2)$  in  $w = 2t$ , ter od tod izrazimo

$$t = \frac{w}{u - iv} \in \mathbb{CP}^1.$$

Naj bo  $M$  odprta Riemannova ploskev in  $x = (x_1, x_2, x_3): M \rightarrow \mathbb{R}^3$  konformna minimalna imerzija. Ker želimo povezavo med imerzijo in hiperkvadriko, parcialne odvode označimo z  $2\partial x = 2(\partial x_1, \partial x_2, \partial x_3) = (\phi_1, \phi_2, \phi_3) = \Phi$ , nato pa definirajmo holomorfnost preslikavo (ki izhaja iz izražave spremenljivke  $t$  zgoraj)

$$\mathbf{g}: M \rightarrow \mathbb{CP}^1, \quad \mathbf{g} = \frac{\phi_3}{\phi_1 - i\phi_2} = \frac{\partial x_3}{\partial x_1 - i\partial x_2}. \quad (3.21)$$

Imenujemo jo *kompleksna Gaussova preslikava* konformne minimalne imerzije  $x$ . (Kompleksna Gaussova preslikava  $\mathbf{g}: M \rightarrow \mathbb{CP}^1$  je z običajno Gaussovo preslikavo  $N: M \rightarrow \mathbb{S}^2$  minimalne ploskve  $x(M)$  povezana preko stereografske projekcije glede na severni pol  $(0, 0, 1)$ , ki identificira 2-sfero  $\mathbb{S}^2$  z Riemannovo sfero  $\mathbb{CP}^1$ .) Kompozitum

$$\mathcal{G}: M \rightarrow \mathbb{Q}^1 \subset \mathbb{CP}^2, \quad \mathcal{G} = \tau \circ \mathbf{g} \quad (3.22)$$

je iskana Gaussova preslikava.

Od tod lahko izpeljemo Enneper-Weierstrassovo formulo za minimalne ploskve v  $\mathbb{R}^3$ , o kateri smo govorili v prejšnjem razdelku. Recimo, da je konformna minimalna imerzija  $x$  podana. Računajmo njene Weierstrassove podatke. Velja<sup>6</sup>

$$2\partial x = \Phi = \left( \frac{1}{2} \left( \frac{1}{\mathbf{g}} - \mathbf{g} \right), \frac{i}{2} \left( \frac{1}{\mathbf{g}} + \mathbf{g} \right), 1 \right) \phi_3. \quad (3.23)$$

Obratno, če poznamo holomorfnost preslikavo  $\mathbf{g}: M \rightarrow \mathbb{CP}^1$  in holomorfnost 1-formo  $\phi_3$  na  $M$ , potem je 1-forma  $\Phi$ , določena z enakostjo 3.23 meromorfna na  $M$  in zadošča pogoju  $\phi_1^2 + \phi_2^2 + \phi_3^2 = 0$  po definiciji preslikave  $\mathbf{g}$ . Kadar je dodatno  $\Phi$  brez ničel in polov na  $M$  in je  $\Re \int_C \Phi = 0$  za vse sklenjene krivulje  $C \subset M$ , potem po Izreku 3.11 konformno minimalno imerzijo  $x: M \rightarrow \mathbb{R}^3$  definira predpis

$$x(p) = p_0 + \Re \int_{p_0}^p \Phi = p_0 + \Re \int_{p_0}^p \left( \frac{1}{2} \left( \frac{1}{\mathbf{g}} - \mathbf{g} \right), \frac{i}{2} \left( \frac{1}{\mathbf{g}} + \mathbf{g} \right), 1 \right) \phi_3, \quad (3.24)$$

kjer sta  $p_0 \in M$ ,  $x_0 \in \mathbb{R}^3$  poljubni izbrani točki ter je  $p \in M$  spremenljivka.

### 3.4 Primeri minimalnih ploskev

Oglejmo si nekaj najpreprostejših in tudi zgodovinsko zanimivih primerov minimalnih ploskev. Trivialni primer je ravnina oziroma del ravnine.

Vzemimo holomorfnost ničelno krivuljo  $z = x + iy: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^3$ , definirano s predpisom

$$z(\zeta) = (\cos \zeta, \sin \zeta, -i\zeta), \quad \zeta = u + iv \in \mathbb{C}. \quad (3.25)$$

---

<sup>6</sup>Res, če upoštevamo zvezo  $\phi_1^2 + \phi_2^2 + \phi_3^2 = 0$ , dobimo

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \left( \frac{1}{\mathbf{g}} - \mathbf{g} \right) \phi_3 &= \frac{1}{2} \left( \frac{\phi_1 - i\phi_2}{\phi_3} - \frac{\phi_3}{\phi_1 - i\phi_2} \right) \phi_3 = \frac{\phi_1^2 - 2i\phi_1\phi_2 - \phi_2^2 - \phi_3^2}{2(\phi_1 - i\phi_2)} = \frac{\phi_1^2 - i\phi_1\phi_2}{\phi_1 - i\phi_2} = \phi_1, \\ \frac{i}{2} \left( \frac{1}{\mathbf{g}} + \mathbf{g} \right) \phi_3 &= \frac{i}{2} \frac{\phi_1^2 - 2i\phi_1\phi_2 - \phi_2^2 + \phi_3^2}{\phi_1 - i\phi_2} = \frac{i}{2} \frac{-2i\phi_1\phi_2 - 2\phi_2^2}{\phi_1 - i\phi_2} = \frac{-i\phi_2(i\phi_1 + \phi_2)}{\phi_1 - i\phi_2} = \phi_2. \end{aligned}$$

Imenujemo jo *helikatenoida*. Ker je  $z(0) = (1, 0, 0)$  in  $z'(\zeta) = (-\sin \zeta, \cos \zeta, -i)d\zeta$ , je Enneper-Weierstrassova formula helikatenoida enaka

$$\begin{aligned} z(\zeta) &= (1, 0, 0) + \int_0^\zeta (-\sin \xi, \cos \xi, -i)d\xi \\ &= (1, 0, 0) + \int_0^\zeta \left( \frac{1}{2} \left( \frac{1}{e^{i\xi}} - e^{i\xi} \right), \frac{i}{2} \left( \frac{1}{e^{i\xi}} + e^{i\xi} \right), 1 \right) (-i)d\xi. \end{aligned} \quad (3.26)$$

Iz zadnje preberemo njeno kompleksno Gaussovo preslikavo  $\mathbf{g}(\zeta) = e^{i\zeta}$ .

Pridružene minimalne ploskve k helikatenoidi predstavlja družina preslikav (za  $t \in \mathbb{R}$ ),  $x^t = \Re(e^{it}z): \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}^3$ , definiranih s predpisom

$$\begin{aligned} x^t(\zeta) &= \Re(e^{it} \cos \zeta, e^{it} \sin \zeta, -ie^{it}\zeta) \\ &= \cos t \begin{pmatrix} \cos u \cdot \cosh v \\ \sin u \cdot \cosh v \\ v \end{pmatrix} + \sin t \begin{pmatrix} \sin u \cdot \sinh v \\ -\cos u \cdot \sinh v \\ u \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (3.27)$$

Res, izračunajmo komponente:

$$\begin{aligned} \Re(e^{it} \cos \zeta) &= \Re((\cos t + i \sin t) \cdot \cos(u + iv)) \\ &= \Re((\cos t + i \sin t) \cdot (\cos u \cosh v - i \sin u \sinh v)) \\ &= \cos t \cdot \cos u \cosh v + \sin t \cdot \sin u \sinh v, \\ \Re(e^{it} \sin \zeta) &= \Re((\cos t + i \sin t) \cdot \sin(u + iv)) \\ &= \Re((\cos t + i \sin t) \cdot (\sin u \cosh v + i \cos u \sinh v)) \\ &= \cos t \cdot \sin u \cosh v - \sin t \cdot \cos u \sinh v, \\ \Re(-ie^{it}\zeta) &= \Re(-i(\cos t + i \sin t) \cdot (u + iv)) \\ &= \cos t \cdot v + \sin t \cdot u. \end{aligned}$$

Podrobneje bomo opisali dve pridruženi minimalni ploskvi k helikatenoidi, katenoido in helikoid.

### 3.4.1 Katenoida

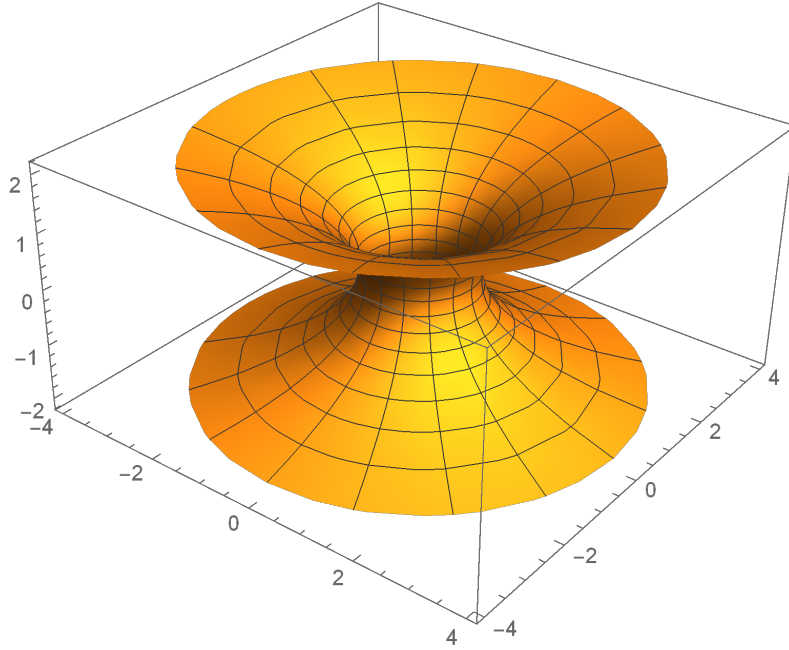
Začnimo s holomorfno ničelno krivuljo  $z: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^3$ , podano s predpisom 3.25. Njemu realnemu delu, ki je preslikava  $x: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  s parametrizacijo

$$x(u, v) = (\cos u \cdot \cosh v, \sin u \cdot \cosh v, v), \quad (3.28)$$

pravimo *katenooida*. Po drugi strani do njene konformne parametrizacije pridemo preko pridruženih minimalnih ploskev k izbrani holomorfni ničelni krivulji – katenoida ustreza parametrom  $t = k\pi$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ .

Geometrijsko je obravnavana minimalna ploskev rotacijska ploskev, ki nastane z rotacijo grafa hiperboličnega kosinusa (t. i. *verižnice*) okoli izbrane osi v prostoru  $\mathbb{R}^3$ . Katenoida z osjo rotacije  $x = y = 0$  na primer nastane, če graf krivulje  $z \mapsto (\cosh z, 0, z)$ ,  $z \in \mathbb{R}$ , zavrtimo okrog  $z$ -osi. Implicitna enačba nastale minimalne ploskve se glasi

$$x^2 + y^2 = \cosh^2 z. \quad (3.29)$$



Slika 1: Katenoida z implicitno enačbo 3.29.

Opazimo, da je parametrizacija katenoide 3.28  $2\pi$ -periodična glede na spremenljivko  $u$ . V Enneper-Weierstrassovo formulo helikatenoide 3.26 uvedimo novo spremenljivko  $w = e^{i\zeta} \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$  in vzemimo njen realni del. Računajmo

$$\begin{aligned} z(\zeta) &= (1, 0, 0) + \int_0^\zeta \left( \frac{1}{2} \left( \frac{1}{e^{i\xi}} - e^{i\xi} \right), \frac{i}{2} \left( \frac{1}{e^{i\xi}} + e^{i\xi} \right), 1 \right) (-i) d\xi \\ &= (1, 0, 0) + \int_1^w \left( \frac{1}{2} \left( \frac{1}{\eta} - \eta \right), \frac{i}{2} \left( \frac{1}{\eta} + \eta \right), 1 \right) (-i) \frac{-i}{\eta} d\eta \\ &= (1, 0, 0) - \int_1^w \left( \frac{1}{2} \left( \frac{1}{\eta} - \eta \right), \frac{i}{2} \left( \frac{1}{\eta} + \eta \right), 1 \right) \frac{d\eta}{\eta}, \end{aligned}$$

kar nam da parametrizacijo katenoide  $x: \mathbb{C} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^3$  z Enneper-Weierstrassovo formulo

$$x(w) = (1, 0, 0) - \Re \int_1^w \left( \frac{1}{2} \left( \frac{1}{\eta} - \eta \right), \frac{i}{2} \left( \frac{1}{\eta} + \eta \right), 1 \right) \frac{d\eta}{\eta}. \quad (3.30)$$

Sledi, da je kompleksna Gaussova preslikava katenoide enaka  $\mathbf{g}(w) = w$  za  $w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ , ki jo holomorfno razširimo do identične presikave na  $\mathbb{CP}^1$ . Identiteta je preslikava stopnje  $d = 1$ , zato iz teorije o Gaussovih preslikavah dobimo vrednost totalne Gaussove ukrivljenosti katenoide, ki znaša  $-4\pi$ . Izkaže se, da je to edini primer iz družine pridruženih minimalnih ploskev k helikatenoidi s končno totalno Gaussovo ukrivljenostjo.

Katenoido je kot rotacijsko ploskev prvi opisal Leonhard Euler l. 1744. Dobro stoletje kasneje je P. O. Bonnet pokazal, da je to (razen ravnine) edina rotacijska minimalna ploskev v trirazsežnem prostoru. Ker je razmeroma enostavna in ima še

več posebnih topoloških lastnosti, jo običajno spoznamo kot prvi primer pri študiju minimalnih ploskev.

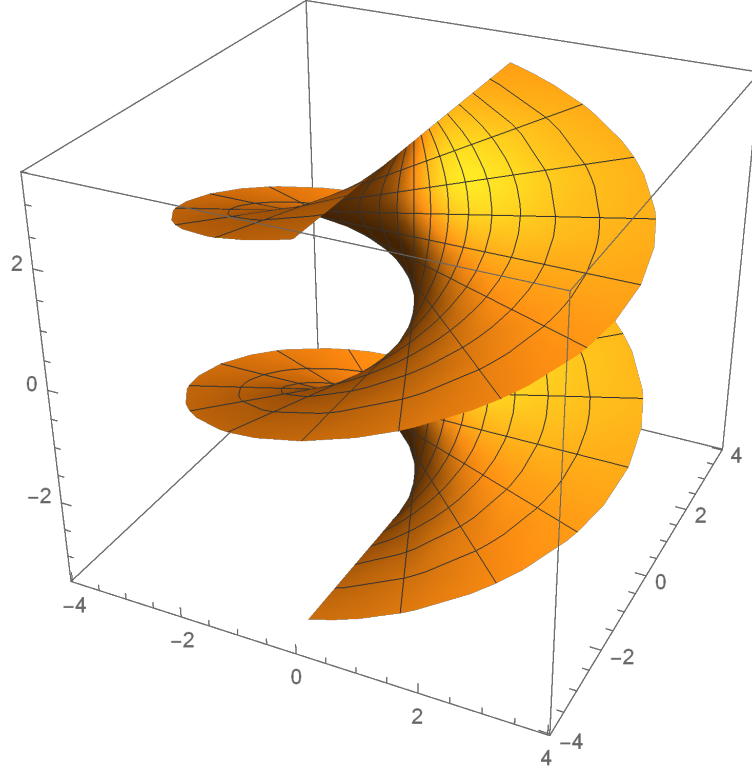
### 3.4.2 Helikoid

Negativno predznačeni imaginarni del helikatenoide imenujemo *helikoid*. Natančneje, to je preslikava  $y = -\Im z = \Re(iz): \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  s konformno parametrizacijo

$$y(u, v) = (\sin u \cdot \sinh v, -\cos u \cdot \sinh v, u). \quad (3.31)$$

Helikoid je pridružena minimalna ploskev k helikatenoidu, ki ustreza parametrom  $t = \frac{\pi}{2} + k\pi$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ . (Res,  $e^{it}z = iz$  natanko tedaj, ko je  $t = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ . Z izbiro  $t = \frac{\pi}{2} + k\pi$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ , pa dobimo levi in desni helikoid.) Po definiciji sta katenoida in helikoid konjugirani minimalni ploskvi.

Geometrijsko helikoid dobimo na naslednji način: premico rotiramo okrog izbrane osi v  $\mathbb{R}^3$  (tj. v ravnini v  $\mathbb{R}^3$ ) in jo hkrati premikamo vzdolž te osi (v pravokotni smeri glede na ravnino, v kateri premico rotiramo).



Slika 2: Helikoid v  $\mathbb{R}^3$  z  $z$ -osjo kot osjo rotacije.

Enneper-Weierstrassovo formulo helikoida dobimo iz izraza 3.26:

$$\begin{aligned} y(\zeta) &= \Re(iz(\zeta)) = \Re \left( (i, 0, 0) + \int_0^\zeta \left( \frac{1}{2} \left( \frac{1}{e^{i\xi}} - e^{i\xi} \right), \frac{i}{2} \left( \frac{1}{e^{i\xi}} + e^{i\xi} \right), 1 \right) (-i) i d\xi \right) \\ &= \Re \int_0^\zeta \left( \frac{1}{2} \left( \frac{1}{e^{i\xi}} - e^{i\xi} \right), \frac{i}{2} \left( \frac{1}{e^{i\xi}} + e^{i\xi} \right), 1 \right) d\xi, \quad \zeta \in \mathbb{C}. \end{aligned} \quad (3.32)$$

Njegova kompleksna Gaussova preslikava je  $\mathbf{g}(\zeta) = e^{i\zeta}$ , kar nam pove, da ima helikoid negativno neskončno totalno Gaussovo ukrivljenost;  $TC(y) = -\infty$ .

O helikoidu sta prva pisala L. Euler in J. B. Meusnier v 80.-ih letih 18. stoletja, brez znanja o konjugiranih minimalnih ploskvah in povezavi s kompleksno analizo. Omenimo še dve zanimivi lastnosti obravnavane minimalne ploskve:

- Za vsako točko na helikoidu obstaja premica, ki leži na njem in gre skozi to točko.
- Za vsako točko na helikoidu obstaja vijačnica, ki leži na njem in gre skozi to točko.

Prvo lastnost kot minimalni ploskvi v  $\mathbb{R}^3$  premoreta le helikoid in ravnina, kar je l. 1842 dokazal E. C. Catalan. Druga lastnost namiguje na izvor imena – helikoid spominja na latinsko besedo “helix”, kar v slovenščini imenujemo vijačnica.

### 3.4.3 Enneperjeva ploskev

Recimo, da poznamo par  $(\mathbf{g}, \phi_3)$ , kjer sta  $\mathbf{g}(z) = z$  holomorfna preslikava in  $\phi_3(z) = 2z$  holomorfna 1-forma ( $z \in \mathbb{C}$ ). Potem po zvezi 3.23 vemo, da je meromorfna 1-forma  $\Phi$  enaka

$$\Phi = \left( \frac{1}{2} \left( \frac{1}{z} - z \right), \frac{i}{2} \left( \frac{1}{z} + z \right), 1 \right) \cdot 2z = (1 - z^2, i(1 + z^2), 2z).$$

Enneper-Weierstrassova formula preslikave  $x: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}^3$  se glasi

$$x(\zeta) = \Re \int_0^\zeta (1 - z^2, i(1 + z^2), 2z) dz \quad (3.33)$$

in določa minimalno ploskev, imenovano *Enneperjeva ploskev*, ki jo je l. 1868 odkril A. Enneper.

Če za  $u, v \in \mathbb{R}$  pišemo  $\zeta = u + iv$  in po komponentah izračunamo realne dele zgornjega integrala, dobimo konformno parametrizacijo  $x: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$x(u, v) = \left( \frac{u}{3} (3(1 + v^2) - u^2), \frac{v}{3} (v^2 - 3(1 + u^2)), u^2 - v^2 \right). \quad (3.34)$$

Iz izbire podatkov vemo, da je kompleksna Gaussova preslikava Enneperjeve ploskve enaka  $\mathbf{g}(z) = z$ , zato ima le-ta podobno kot katenoida totalno Gaussovo ukrivljenost enako  $-4\pi$ . Izkaže se, da sta to edini polni<sup>7</sup> neravni orientabilni minimalni ploskvi vloženi v  $\mathbb{R}^3$ , katerih totalna Gaussova ukrivljenost znaša  $-4\pi$ . Poleg tega je Enneperjeva ploskev konjugirana sama sebi.

<sup>7</sup>Pot  $\gamma: [0, a) \rightarrow M$ ,  $a \in (0, +\infty]$ , je *divergentna*, če za vsako kompaktno podmnožico  $K \subset M$  velja:  $\gamma(t) \notin K$ , ko  $t \rightarrow a$ . Če je vsaka divergentna pot v  $M$  razreda  $\mathcal{C}^1$  neskončne dolžine, Riemannovi mnogoterosti  $M$  pravimo *polni*.

## 4 Izreki o aproksimaciji in interpolaciji minimalnih ploskev

**Definicija 4.1.** Naj bo  $M$  gladka ploskev,  $K$  končna unija paroma disjunktih kompaktnih domen s kosoma zvezno odvedljivimi robovi v  $M$  ter  $E = S \setminus K^\circ$  unija končno mnogo paroma disjunktih gladkih Jordanovih lokov in zaprtih Jordanovih krivulj, ki se dotikajo  $K$  kvečjemu v svojih krajiščih in sekajo rob  $K$  transverzalno. Kompaktno podmnožico v  $M$  oblike  $S = K \cup E$  imenujemo *dopustna množica*.

**Definicija 4.2.** Naj bo  $M$  povezana odprta Riemannova ploskev ali kompaktna Riemannova ploskev z robom, na kateri je definirana povsod neničelna holomorfna 1-forma  $\theta$ . Konformno minimalno imerzijo  $x: M \rightarrow \mathbb{R}^n$  imenujemo:

1. *ravna*, če je slika  $x(M)$  vsebovana v afini ravnini v  $\mathbb{R}^n$ ; sicer pravimo, da je  $x$  *neravna*;
2. *polna*, če je preslikava  $f = 2\partial x/\theta: M \rightarrow \mathbf{A}_*^{n-1}$  polna, tj.  $\mathbb{C}$ -linearna ogrinjača slike  $f(M)$  je enaka  $\mathbb{C}^n$ ;
3. *neizrojena*, če slika  $x(M)$  ni vsebovana v nobeni afini hiperravnini v  $\mathbb{R}^n$ .

V dimenziji  $n = 3$  za konformno minimalno imerzijo vsi zgornji pojmi sovpadajo. V višjih dimenzijah ( $n \geq 4$ ) veljata implikaciji

$$\text{polna} \Rightarrow \text{neizrojena} \Rightarrow \text{neravna}.$$

Obratne implikacije ne vejajo.

Naj bosta  $M$  in  $X$  kompleksni mnogoterosti. Prostor holomorfnih presikov  $M \rightarrow X$  označimo z  $\mathcal{O}(M, X)$ . Če je  $K$  kompaktna podmnožica v  $M$ , množico presikov  $K \rightarrow X$  razreda  $\mathcal{C}^r(M)$ , ki so holomorfne v notranjosti  $K^\circ \subset K$ , označimo z  $\mathcal{A}^r(K, X)$ . V primeru, ko je  $X = \mathbb{C}$ , ustrezna prostora označimo z  $\mathcal{O}(M)$  oziroma  $\mathcal{A}^r(K)$ .

Naj bo  $M$  odprta Riemannova ploskev in  $n \geq 3$ . Prostor konformnih minimalnih imerzij  $M \rightarrow \mathbb{R}^n$  označimo s  $\text{CMI}(M, \mathbb{R}^n)$ , prostor holomorfnih ničelnih imerzij  $M \rightarrow \mathbb{C}^n$  pa z  $\text{NC}(M, \mathbb{C}^n)$ . Nadalje  $\text{CMI}_{full}(M, \mathbb{R}^n)$  in  $\text{CMI}_{nf}(M, \mathbb{R}^n)$  označujeta prostora polnih oziroma neravnih konformnih minimalnih imerzij. Velja inkluzija  $\text{CMI}_{full}(M, \mathbb{R}^n) \subset \text{CMI}_{nf}(M, \mathbb{R}^n)$ . Podobno je  $\text{NC}_{full}(M, \mathbb{C}^n) \subset \text{NC}_{nf}(M, \mathbb{C}^n)$  v primeru polnih ter neravnih holomorfnih ničelnih krivulj.

Če je  $M$  kompaktna omejena Riemannova ploskev z nepraznim gladkim robom  $bM$  in  $r \in \mathbb{N}$ , tedaj prostor konformnih minimalnih imerzij  $M \rightarrow \mathbb{R}^n$  razreda  $\mathcal{C}^r(M)$  označimo s  $\text{CMI}^r(M, \mathbb{R}^n)$ , prostor holomorfnih ničelnih imerzij  $M \rightarrow \mathbb{C}^n$  razreda  $\mathcal{A}^r(M)$  pa z  $\text{NC}^r(M, \mathbb{C}^n)$ .

**Lema 4.3.** *Naj bo  $M$  povezana Riemannova ploskev in  $\mathbf{A}_*$  punktirana ničelna kvadratika. Holomorfna preslikava  $f: M \rightarrow \mathbf{A}_*$  je neravna natanko tedaj, ko je linearna ogrinjača tangentskih prostorov  $T_{f(p)}A \subset T_{f(p)}\mathbb{C}^n$  po vseh  $p \in M$  enaka  $\mathbb{C}^n$ .*

**Dokaz 3.** Oglejmo si preslikavo  $\Phi: \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}$ , definirano s predpisom  $\Phi(z) = \sum_{j=1}^n z_j^2$ . Ničelno kvadrato 3.13 tedaj lahko zapišemo v obliki  $\mathbf{A} = \Phi^{-1}(\{0\})$ . Njen tangentski

prostor v točki  $z = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n$  je enak jedru diferenciala, ki kvadriko določa, zato je

$$T_z \mathbf{A} = \ker(d\Phi_z) = \ker(z \mapsto \sum_{j=1}^n z_j dz_j).$$

Naj bosta  $z, w \in \mathbb{C}^n$ . Potem sta njuna tangentna prostora enaka,  $T_z \mathbf{A} = T_w \mathbf{A}$ , natanko tedaj, ko je  $z_j = \lambda w_j$  za vse  $j = 1, \dots, n$  in nek  $\lambda \in \mathbb{C}$ , kar je ekvivalentno pogoju, da sta vektorja  $z$  in  $w$  kolinearna.

Po definiciji je preslikava  $f$  neravna, če njena slika  $f(M)$  ni vsebovana v nobeni afini kompleksni premici v  $\mathbb{C}^n$ . Skupaj z zgornjim je slednje ekvivalentno  $\text{Lin}\{T_{f(p)} \mathbf{A}; p \in M\} = \mathbb{C}^n$ , kar smo želeli dokazati.

**Definicija 4.4.** Naj bo  $S = K \cup E$  dopustna podmnožica Riemannove ploskve  $M$  in  $\Theta$  povsod neničelna holomorfná 1-forma, definirana v okolici  $S \subset M$ . Naj bosta  $n \geq 3$  in  $r \in \mathbb{N}$ . *Posplošena konformna minimalna imerzija*  $S \rightarrow \mathbb{R}^n$  razreda  $\mathcal{C}^r$  je par  $(x, f\Theta)$ , kjer je  $x: S \rightarrow \mathbb{R}^n$  preslikava razreda  $\mathcal{C}^r$ , njena zožitev na  $S^\circ = K^\circ$  je konformna minimalna imerzija in preslikava  $f \in \mathcal{A}^{r-1}(S, \mathbf{A}_*)$  zadošča naslednjima pogojema:

1. na množici  $K$  velja  $f\Theta = 2\partial x$ ;
2. za vsako gladko pot  $\alpha$  v  $M$ , ki parametrizira povezano komponento  $E = \overline{S \setminus K}$  velja  $\Re(\alpha^*(f\Theta)) = \alpha^*(dx) = d(x \circ \alpha)$ .

Posplošena konformna minimalna imerzija  $(x, f\Theta)$  je *neravna* oziroma *polna* natanko tedaj, ko je preslikava  $f \in \mathcal{A}^{r-1}(S, \mathbf{A}_*)$  neravna oziroma polna na vsaki relativno odprti podmnožici  $S$ .

Prostor posplošenih konformnih minimalnih imerzij  $S \rightarrow \mathbb{R}^n$  razreda  $\mathcal{C}^r$  označimo z  $\text{GCMI}^r(S, \mathbb{R}^n)$ . Analogno kot v primeru konformnih minimalnih imerzij velja

$$\text{GCMI}_{full}^r(S, \mathbb{R}^n) \subset \text{GCMI}_{nf}^r(S, \mathbb{R}^n) \subset \text{GCMI}^r(S, \mathbb{R}^n).$$

**Opomba 4.5.** Diferencial  $d$  v kompleksnem ima obliko  $d = \partial + \bar{\partial}$ . *Konjugirani diferencial*  $d^c$  je enak  $d^c = i(\bar{\partial} - \partial) = 2\Im(\partial)$ . Zato velja  $d + id^c = 2\partial$  oziroma drugače,  $\Re(2\partial) = dx$ . Prvi pogoj iz definicije posplošene konformne minimalne imerzije pravi  $f\Theta = 2\partial$ , od koder sledi  $\Re(f\Theta) = \Re(2\partial) = dx$ . Zato je drugi pogoj iz zgornje definicije skladen s prvim.

Tudi za posplošene konformne minimalne imerzije velja Weierstrassova formula. Naj bo  $S$  povezana dopustna množica in  $(x, f\Theta) \in \text{GCMI}^r(S, \mathbb{R}^n)$ . Za poljubno točko  $p_0 \in S$  in poznano preslikavo  $f$  lahko preslikavo  $x: S \rightarrow \mathbb{R}^n$  konstruiramo s formulo

$$x(p) = x(p_0) + \Re \int_{p_0}^p f\Theta, \quad p \in S. \quad (4.1)$$

Obratno, če za preslikavo  $f \in \mathcal{A}^{r-1}(S, \mathbf{A}_*)$  velja  $\Re \int_C f\Theta = 0$  za vsako sklenjeno krivuljo  $C$  v  $S$ , potem  $f$  določa posplošeno konformno minimalno imerzijo, dano z Weierstrassovo formulo 4.1.



**Definicija 4.6.** Naj bo  $S = K \cup E$  dopustna podmnožica Riemannove ploskve  $M$  in  $\Theta$  povsod neničelna holomorfná 1-forma, definirana v okolici  $S \subset M$ . Naj bosta  $n \geq 3$  in  $r \in \mathbb{N}$ . Posplošena ničelna krivulja  $S \rightarrow \mathbb{C}^n$  razreda  $\mathcal{C}^r$  je par  $(z, f\Theta)$ , kjer preslikavi  $z \in \mathcal{A}^r(S, \mathbb{C}^n)$  in  $f \in \mathcal{A}^{r-1}(S, \mathbf{A}_*)$  zadoščata naslednjima pogojema:

1. na množici  $K$  velja  $f\Theta = dz = \partial z$ ;
2. za vsako gladko pot  $\alpha$  v  $M$ , ki parametrizira povezano komponento  $E = \overline{S \setminus K}$  velja  $\alpha^*(f\Theta) = \alpha^*(dz) = d(z \circ \alpha)$ .

Posplošena ničelna krivulja  $(z, f\Theta)$  je *neravna* oziroma *polna* natanko tedaj, ko je preslikava  $f \in \mathcal{A}^{r-1}(S, \mathbf{A}_*)$  neravna oziroma polna na vsaki relativno odprti podmnožici  $S$ .

Prostori neravnih, polnih in posplošenih ničelnih krivulj ustrezajo verigi inkluzij

$$\text{GNC}_{full}^r(S, \mathbb{C}^n) \subset \text{GNC}_{nf}^r(S, \mathbb{C}^n) \subset \text{GNC}^r(S, \mathbb{C}^n).$$

Za povezano dopustno množico  $S$ ,  $(z, f\Theta) \in \text{GNC}^r(S, \mathbb{C}^n)$ , znano preslikavo  $f$  in točko  $p_0 \in S$  preslikavo  $z: S \rightarrow \mathbb{C}^n$  konstruiramo s pomočjo Weierstrassove formule

$$z(p) = z(p_0) + \int_{p_0}^p f\Theta, \quad p \in S. \quad (4.2)$$

Velja tudi obrat; preslikava  $f \in \mathcal{A}^{r-1}(S, \mathbf{A}_*)$ , ki zadošča  $\int_C f\Theta = 0$  za vsako sklenjeno krivuljo  $C$  v  $S$ , določa posplošeno ničelno krivuljo, dano z Weierstrassovo formulo 4.2.

**Definicija 4.7.** Naj bo  $M$  povezana odprta Riemannova ploskev. Naj bo  $\Theta$  fiksna povsod neničelna holomorfná 1-forma na  $M$ . Naj bo  $\mathcal{C} = \{C_1, \dots, C_l\}$  družina gladkih orientiranih vloženih lokov in zaprtih Jordanovih krivulj v  $M$  ter  $C = \cup_{i=1}^l C_i$ . Družini  $\mathcal{C}$  in številu  $n \in \mathbb{N}$  priredimo *periodno preslikavo*

$$\begin{aligned} \mathcal{P} &= (\mathcal{P}_1, \dots, \mathcal{P}_l): \mathcal{C}(C, \mathbb{C}^n) \rightarrow (\mathbb{C}^n)^l, \\ \mathcal{P}_i(f) &= \int_{C_i} f\Theta, \quad i = 1, \dots, l. \end{aligned} \quad (4.3)$$

Tu je  $f \in \mathcal{C}(C, \mathbb{C}^n)$  in  $\mathcal{P}_i(f) \in \mathbb{C}^n$ .

**Opomba 4.8.** Znano je, da vsaka odprta Riemannova ploskev  $M$  premore lokalno biholomorfnó preslikavo  $M \rightarrow \mathbb{C}^n$ , torej povsod neničelno eksaktnó holomorfnó 1-formo. Zato je predpostavka o izboru 1-forme v zgornji definiciji smiselna.

**Lema 4.9.** Naj bo  $M$  odprta Riemannova ploskev in  $S = K \cup E$  njena dopustna podmnožica. Naj bo  $\mathcal{C} = \{C_1, \dots, C_l\}$  taka družina gladkih orientiranih Jordanovih krivulj in lokov v  $S$ , da je unija  $C = \cup_{i=1}^l C_i$  Rungejeva v  $S$ . Naj za neko število  $r \in \mathbb{Z}_+$  preslikava  $f$  pripada razredu  $\mathcal{A}^r(S, \mathbf{A}_*)$ . Nadalje predpostavimo, da vsaka krivulja  $C_i \in \mathcal{C}$  vsebuje netrivialen lok  $I_i \in C_i$ , disjunkten z  $\cup_{i \neq j} C_j$ , preslikava  $f: I_i \rightarrow \mathbf{A}_*$  pa je neravna.

Potem obstaja odprta okolica  $U \subset \mathbb{C}^{ln}$  točke 0 in preslikava  $\Phi_t \in \mathcal{A}^r(S \times U, \mathbf{A}_*)$ , tako da velja  $\Phi_t(\cdot, 0) = f$  in je preslikava

$$\left. \frac{\partial}{\partial t} \right|_{t=0} \mathcal{P}(\Theta_f(\cdot, t)): (\mathbb{C}^n)^l \rightarrow (\mathbb{C}^n)^l \text{ izomorfizem.} \quad (4.4)$$

Nadalje, za končno podmnožico  $P \subset S$  lahko preslikavo  $\Theta_f$  izberemo tako, da se za  $t \in U$  preslikave  $\Theta_f(\cdot, t): S \rightarrow \mathbf{A}_*$  ujemajo z  $f$  v vsaki točki  $P \setminus S^\circ$ , v točkah  $P \cap S^\circ$  pa se z  $f$  ujemajo do danega končnega reda.

Za vsako preslikavo  $f_0 \in \mathcal{A}^r(S, \mathbf{A}_*)$ , ki zadošča zgornjim predpostavkam, obstaja okolica  $\Omega \subset \mathcal{A}^r(S, \mathbf{A}_*)$  in holomorfná preslikava  $f \mapsto \Theta_f$ ,  $f \in \Omega$  z zgornjimi lastnostmi.

**Definicija 4.10.** Preslikavo  $\Theta_f$ , ki ustreza Lemi 4.9 imenujemo *periodno dominantni sprej* preslikav  $S \rightarrow \mathbf{A}_*$  za družino krivulj  $\mathcal{C}$  z jedrom  $\Theta_f(\cdot, 0) = f$ . Lastnosti 4.4 pravimo *periodno dominantna lastnost*.

**Dokaz 4.** Prvi del leme bomo dokazali tako, da bomo konstruirali periodno dominantni sprej, ki zadošča periodno dominantni lastnosti. Potrebovali bomo Lemo 4.3, Bishop-Mergelyanov izrek o aproksimaciji 2.23 in pojem toka vektorskega polja. Zaradi enostavnosti postavimo  $r = 0$  (za  $r > 0$  dokaz poteka analogno).

Po predpostavki je za vse  $i \in \{1, \dots, n\}$  lok  $I_i \subset C_i \in \mathcal{C}$  netrivialen, za katerega velja  $I_i \cap \bigcup_{i \neq j} C_j = \emptyset$  in je zožitev preslikave  $f|_{I_i}$  neravna. Po Lemi 4.3 obstajajo točke  $p_{i,j} \in I_i$  in holomorfná vektorska polja  $V_{i,j}$  na  $\mathbb{C}^n$ ,  $j \in \{1, \dots, n\}$ , ki so tangentna na  $\mathbf{A}$ , tako da je  $\text{Lin}\{V_{i,j}(f(p_{i,j})); j = 1, \dots, n\} = \mathbb{C}^n$  za vse  $i$ .

Za  $k = 1, \dots, l$  označimo  $t_k = (t_{k,1}, \dots, t_{k,n}) \in \mathbb{C}^n$  in  $t = (t_1, \dots, t_l) \in \mathbb{C}^{nl}$ . Naj  $\Phi_t^{i,j}$  označuje tok vektorskega polja  $V_{i,j}$ . Izberimo tako odprto okolico  $U_0 \subset \mathbb{C}^{nl}$  točke 0, da za vse  $t \in U_0$  in  $p \in S$  predpis

$$(p, t) \mapsto \Phi_{t_{1,1}}^{1,1} \circ \dots \circ \Phi_{t_{1,n}}^{1,n} \circ \Phi_{t_{2,1}}^{2,1} \circ \dots \circ \Phi_{t_{l,n}}^{l,n}(f(p)) \quad (4.5)$$

podaja dobro definirano preslikavo  $S \times U_0 \rightarrow \mathbf{A}_*$ . Sedaj za vse pare  $(i, j)$  izberimo gladke preslikave  $g_{i,j}: C \rightarrow \mathbb{C}$ , pri čemer je nosilec  $g_{i,j}$  vsebovan v majhnem delu loka  $I_i$  okrog točke  $p_{i,j} \in I_i$ . Modificirana preslikava 4.5,  $\Phi: C \times U_1 \rightarrow \mathbf{A}_*$ ,

$$\Phi(p, t) = \Phi_{g_{1,1}(p)t_{1,1}}^{1,1} \circ \dots \circ \Phi_{g_{l,n}(p)t_{l,n}}^{l,n}(f(p)), \quad (4.6)$$

kjer je  $U_1 \subset \mathbb{C}^{nl}$  primerno majhna odprta okolica točke 0, je tedaj dobro definirana, za vse  $p \in C$  pa je preslikava  $\Phi(p, \cdot): U_1 \rightarrow \mathbf{A}_*$  holomorfná. Po lastnostih toka vektorskega polja sledi še  $\Phi(p, 0) = f(p)$  in

$$\left. \frac{\partial \Phi(p, t)}{\partial t_{m,j}} \right|_{t=0} = g_{m,j}(p) \cdot V_{m,j}(f(p)). \quad (4.7)$$

Naj bo  $\mathcal{P} = (\mathcal{P}_1, \dots, \mathcal{P}_n)$  periodna preslikava, prirejena družini krivulj  $\mathcal{C}$ . Z uporabo enakosti 4.7 dobimo za vse indekse  $i, m \in \{1, \dots, l\}$  in  $j \in \{1, \dots, n\}$

$$\left. \frac{\partial \mathcal{P}_i(\Phi(\cdot, t))}{\partial t_{m,j}} \right|_{t=0} = \left. \frac{\partial}{\partial t_{m,j}} \right|_{t=0} \int_{C_i} \Phi(\cdot, t) \cdot \Theta = \int_{C_i} g_{m,j} \cdot (V_{m,j} \circ f) \cdot \Theta \in \mathbb{C}^n. \quad (4.8)$$

Matrika diferencialov 4.4 iz leme je sestavljena iz blokov velikosti  $n \times n$ , ki pripadajo indeksom  $i, m \in \{1, \dots, l\}$ . Z ustrezno izbiro preslikav  $g_{i,j}$  opisanih zgoraj lahko dosežemo, da je matrika bločno diagonalna z obrnljivimi bloki na diagonali. S tem postane celotna matrika obrnljiva.

V naslednjem koraku bomo modificirali še preslikavo  $\Phi$ , kar nam bo dalo iskani periodno dominantni prej. Preslikave  $g_{i,j}$  so definirane na množici  $C$ , ki je po predpostavki Rungejeva v  $S$ . Bishop-Mergelyanov izrek o aproksimaciji pove, da vsako funkcijo  $g_{i,j}$  lahko enakomerno na  $C$  aproksimiramo s holomorfnimi funkcijami  $\tilde{g}_{i,j}$  v okolici  $S$ .

Definirajmo preslikavo  $\Phi_f: S \times U \rightarrow \mathbf{A}_*$  tako, da v predpisu 4.6 nadomestimo  $g_{i,j}$  z novimi funkcijami  $\tilde{g}_{i,j}$  in je  $U \subset U_1 \subset \mathbb{C}^{nl}$  odprta okolica izhodišča. Po konstrukciji takšna preslikava  $\Phi_f$  zadošča sklepom leme, zato je periodno dominantni sprej, ki smo ga iskali.

**Trditev 4.11.** *Naj bo  $M$  odprta Riemannova ploskev,  $\Theta$  povsod neničelna holomorfna 1-forma na  $M$ ,  $S$  povezana dopustna množica, ki je Rungejeva v  $M$  in  $A = \{a_1, \dots, a_k\} \subset S$ . Naj bosta  $r, s \in \mathbb{N}$ . Potem lahko vsako posplošeno konformno minimalno imerzijo  $(x, f\Theta) \in GCMI^r(S, \mathbb{R}^n)$  aproksimiramo s konformnimi minimalnimi imerzijami  $X: M \rightarrow \mathbb{R}^n$  razreda  $C^r$ , za katere velja  $\text{Flux}_X = \text{Flux}_x$ .*

**Izrek 4.12.** *Naj bo  $M$  odprta Riemannova ploskev,  $\Theta$  povsod neničelna holomorfna 1-forma na  $M$ ,  $n \geq 3$  in  $r \geq 1$ . Naj bo  $S$  dopustna Rungejeva množica v  $M$  in  $\Lambda$  zaprta diskretna podmnožica  $M$ . Naj bo  $x: S \rightarrow \mathbb{R}^n$  posplošena konformna minimalna imerzija razreda  $C^r(S, \mathbb{R}^n)$ , ki je konformna minimalna imerzija v okolici vsake točke iz  $\Lambda$ .*

Za izbrane  $\varepsilon > 0$ , preslikavo  $k: \Lambda \rightarrow \mathbb{N}$  in homomorfizem grup  $\mathfrak{p}: H_1(M, \mathbb{Z}) \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $\mathfrak{p}|_{H_1(S, \mathbb{Z})} = \text{Flux}_x$ , obstaja konformna minimalna imerzija  $\tilde{x}: M \rightarrow \mathbb{R}^n$ , za katero velja:

1.  $\|\tilde{x} - x\|_{C^r(S)} < \varepsilon$ ;
2. Razlika  $\tilde{x} - x$  je ničelna do reda  $k(p)$  v vsaki točki  $p \in \Lambda$ ;
3.  $\text{Flux}_{\tilde{x}} = \mathfrak{p}$  na  $H_1(M, \mathbb{Z})$ ;
4. Če je  $n \geq 5$  in je  $x: \Lambda \rightarrow \mathbb{R}^n$  injektivna preslikava, potem je  $\tilde{x}$  injektivna imerzija;
5. Če je  $n = 4$  in ima  $x$  enostavne dvojne točke na množici  $\Lambda$ , potem je  $\tilde{x}$  imerzija z enostavnimi dvojnimi točkami na  $\Lambda$ .

