

<Midterm Project: M.A.F.I.A in the morning 구현 및 실험 보고서>

승실대학교 AI융합학부 20201786 김성연

1. 가장 단순한 마피아 게임 (마피아와 시민의 수에 따른 마피아의 승률 관찰)

1) 마피아 수 고정, 시민 수 변화하며 마피아의 평균 승률 관찰

	시민의 수	마피아의 평균 승률
0	1명	1.000
1	2명	1.000
2	3명	1.000
3	4명	0.942
4	5명	0.969
...
95	96명	0.363
96	97명	0.388
97	98명	0.340
98	99명	0.414
99	100명	0.317

100 rows × 2 columns

그림 1 마피아 수가 동일할 때, 시민 수에 따른 마피아의 승률 DataFrame

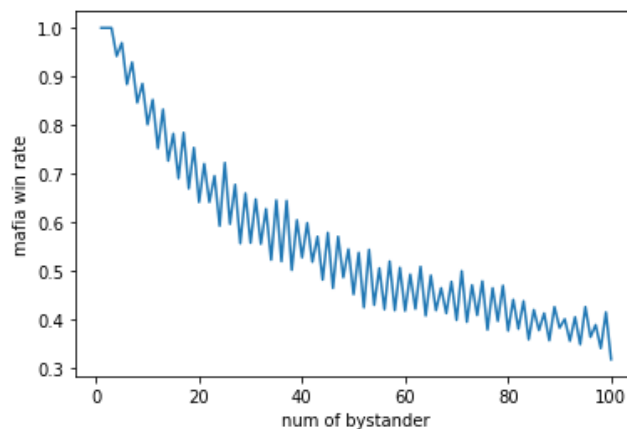


그림 2 마피아 수가 동일할 때, 시민 수에 따른 마피아의 승률 분포 그래프

마피아 수를 3명, 시민 수를 1명~100명으로 설정하였고, 각 경우마다 1000번씩 게임을 진행하여 마피아의 승률을 구했다. 그 결과 시민의 수가 증가함에 따라 마피아의 승률이 지수함수 형태의 그래프를 그리며 낮아지는 것을 볼 수 있었고, 마피아 수가 시민의 수에 비해 상대적으로 매우 적음에도 불구하고 마피아의 승률은 매우 높게 나타났다. 어떻게 이러한 결과가 나올 수 있을까?

① 마피아의 승률이 압도적으로 높다.

<마피아 수와 시민의 수가 같은 경우>

: 낮에 마피아와 시민이 죽을 확률은 같다. 마피아의 입장에서 최악의 경우 낮에 계속 마피아가 죽는다고 하더라도, 밤에 계속 시민이 죽기 때문에 두 팀의 수는 계속 일정하다가 낮에 1:1 상황이 오는 경우가 생긴다. 이 경우, 시민과 마피아는 서로를 지목하게 되며 같은 득표수이기 때문에 낮에 죽는 사람은 생기지 않는다. 그렇게 다시 밤이 되면 마피아가 시민을 죽이기 때문에 결국 마피아의 승리가 된다. 따라서 마피아의 수와 시민의 수가 같으면 무조건 마피아가 승리한다.

<마피아 수가 시민의 수보다 많은 경우>

: 낮에 마피아가 죽을 확률이 더 높다. 마피아의 입장에서 최악의 경우 낮에 계속 마피아가 죽는다고 하더라도, 밤에 계속 시민이 죽는다. 이 패턴이 지속되면 시민의 수가 더 적기 때문에 시민 팀이 먼저 패배하게 된다. 따라서 마피아의 수가 시민의 수보다 많으면 무조건 마피아가 승리한다.

<마피아 수보다 시민의 수가 많은 경우>

: 낮에 시민이 죽을 확률이 더 높다. 낮에 시민이 죽을 확률이 높아서 계속 낮에 시민이 죽으면, 시민의 수와 마피아의 수가 같아지는 시점이 온다. 그러면 위에서 살펴본 마피아의 수와 시민의 수가 같은 경우에 의해서 마피아가 승리한다. 시민이 승리하는 경우는 낮에 계속 마피아가 죽는 경우이다. 그러면 시민의 수가 더 많기 때문에 시민이 승리하게 된다. 하지만 시민의 수가 마피아의 수보다 많으므로 낮에 시민이 죽을 확률이 더 높기 때문에 전자의 확률(마피아 승리)이 더 높다.

이렇게 마피아 수와 시민의 수에 따라 마피아의 승률을 고려해보았을 때, 마피아가 승리할 확률이 훨씬 높기 때문에 위 실험의 결과에서도 마피아의 수가 시민의 수에 비해 매우 적음에도 불구하고 마피아의 승률이 압도적으로 높게 나온 것이라고 분석했다.

② 마피아가 승리할 이론적 확률

낮에 시민이 죽을 확률 = 남은 시민의 수 / 남은 플레이어 수

낮에 마피아가 죽을 확률 = 1 - 낮에 시민이 죽을 확률

마피아가 a명이 있다고 가정하자.

마피아가 0명 죽고 마피아가 승리하는 경우부터 마피아가 a-1명 죽고 마피아가 승리하는 경우까지 모든 마피아가 승리하는 경우의 확률을 더하면, 해당 확률이 마피아가 승리할 이론적 확률이다.

이 때, 마피아가 n명 죽고 마피아가 승리하는 경우의 확률은 다음과 같다.

먼저 마피아 n명과 시민이 죽을 순서의 경우의 수를 모두 구한다. (단, 마지막에 죽는 플레이어는 시민이다.)

그리고 시민의 수가 살아있는 마피아의 수(a-n명)와 같아질 때까지 각 경우의 수에 대해 낮에 시민이 죽을 확률과 낮에 마피아가 죽을 확률을 해당 경우의 순서에 맞게 계속 곱해간다.

마지막으로 모든 순서의 경우의 수에 대해 구한 확률을 더하면, 이것이 마피아가 n명 죽고 마피아가 승리하는 경우의 확률이 될 것이다.

추론한 이론적 확률과 실험한 결과가 맞는지 확인하기 위해서 실험 결과 중 한 case인 마피아 3명, 시민 4명으로 이 방식에 따라 계산을 해보면,

```
die0=4/7 #마피아가 0명 죽고 마피아가 승리할 확률 (낮에 죽는 순서(1경우): 시민)
die1=(3/7)*(3/5) #마피아가 1명 죽고 마피아가 승리할 확률 (낮에 죽는 순서(1경우): 마피아, 시민)
die2=(3/7)*(2/5)*(2/3) #마피아가 2명 죽고 마피아가 승리할 확률 (낮에 죽는 순서(1경우): 마피아, 마피아, 시민)

logi=die0+die1+die2 #마피아가 승리할 확률
print(logi)

0.9428571428571428
```

마피아가 승리할 이론적 확률이 약 0.943으로 나오는데, 이는 그림1에서 실험 결과의 확률인 0.942와 매우 유사하므로 실험 결과가 추론한 이론적 확률에 가깝게 나왔음을 알 수 있다.

③ 마피아가 3명인 경우, 시민의 수가 짝수일 때보다 홀수일 때 승률이 더 높다.

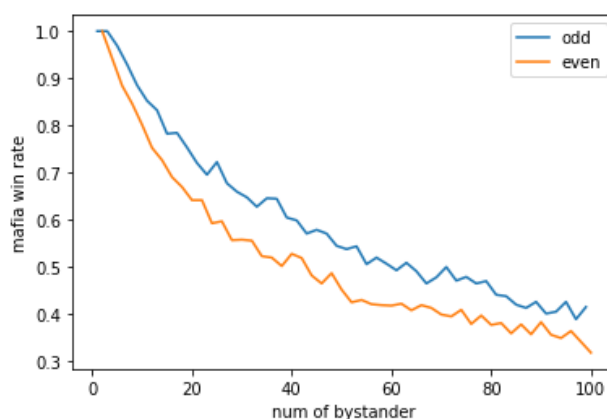


그림 3 마피아가 3명일 때, 시민 수에 따른 마피아의 승률을 나타낸 그래프

그림2에서 승률 분포 그래프가 주기적으로 위아래로 흔들리는 모습을 볼 수 있다. 그래서 시민의 수가 짝수일 때와 홀수일 때를 나누어 그림3과 같은 그래프를 그려보았고, 그 결과 마피아가 3명 (홀수)일 때, 시민의 수가 짝수일 때보다 홀수일 때 승률이 더 높다는 것을 볼 수 있었다.

이 이유는 2)실험까지 마친 후, 분석하고자 한다.

2) 시민 수 고정, 마피아 수 변화하며 마피아의 평균 승률 관찰

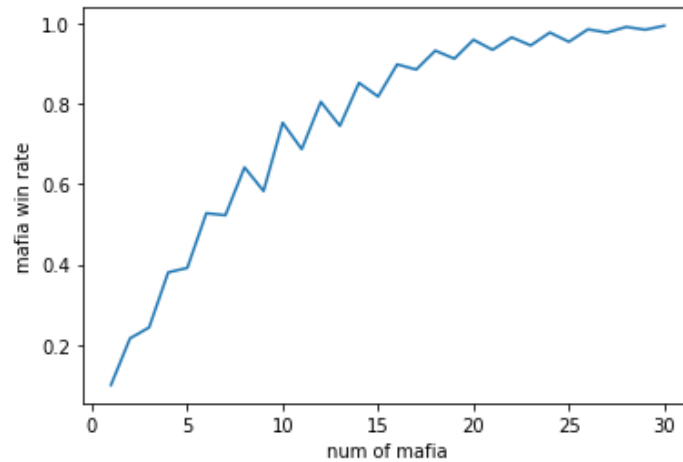


그림 4 시민 수가 동일할 때, 마피아 수에 따른 마피아의 승률 분포 그래프

시민 수를 200명, 마피아 수를 1명~30명으로 설정하였고, 각 경우마다 1000번씩 게임을 진행하여 마피아의 승률을 구했다. 그 결과 마피아의 수가 증가함에 따라 마피아의 승률이 로그함수 형태의 그래프를 그리며 높아지는 것을 볼 수 있었고, 1)실험에서와 마찬가지로 마피아 수가 시민의 수에 비해 상대적으로 매우 적음에도 불구하고 마피아의 승률은 매우 높게 나타났다.

① 시민이 200명인 경우, 마피아의 수가 홀수일 때보다 짝수일 때 승률이 더 높다.

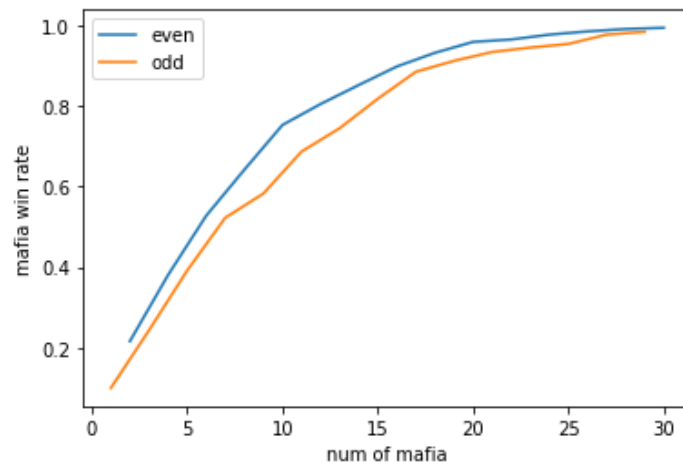


그림 5 시민이 200명일 때, 마피아 수에 따른 마피아의 승률을 나타낸 그래프

1)실험과 마찬가지로 그림4에서 승률 분포 그래프가 주기적으로 위아래로 흔들리는 모습을 볼 수 있다. 그래서 마피아의 수가 짝수일 때와 홀수일 때를 나누어 그림5와 같은 그래프를 그려보았고, 그 결과 시민이 200명(짝수)일 때, 마피아의 수가 홀수일 때보다 짝수일 때 승률이 더 높다는 것을 볼 수 있었다.

1)실험의 ③에서는 마피아 수가 홀수인 경우, 시민의 수가 홀수일 때 마피아의 승률이 높았고, 2)

실험의 ①에서는 시민의 수가 짝수인 경우, 마피아의 수가 짝수일 때 마피아의 승률이 높았다.

이를 통해 '시민의 수 - 마피아 수'가 짝수일 때가 홀수일 때보다 마피아의 승률이 높다는 것을 관찰할 수 있다. 이런 현상이 나타나는 것은 밤에 무조건 시민이 죽기 때문이다. 시민의 수와 마피아의 수가 같아지면 마피아의 승리인데, 시민의 수가 '마피아의 수-1'인 경우에 밤이 되면 무조건 시민이 죽어서 마피아의 승리가 된다. 하지만 시민의 수가 '마피아의 수-1'인 경우에 낮이 되면 랜덤으로 마피아가 죽을 수도 있기 때문에 시민은 패배를 피해갈 수 있다. 따라서 '시민의 수-(마피아의 수-1)'가 홀수가 되어야 밤에 시민이 죽어 마피아의 승리가 될 수 있으므로, '시민의 수-마피아의 수'가 짝수일 때가 홀수일 때보다 마피아의 승률이 높아진다고 분석하였다.

2. 가장 단순한 게임에 경찰 추가

시민의 수		마피아의 평균 승률
0	3명	1.000
1	4명	0.919
2	5명	0.949
3	6명	0.830
4	7명	0.907
...
93	96명	0.313
94	97명	0.439
95	98명	0.330
96	99명	0.423
97	100명	0.324

98 rows × 2 columns

그림 6 기억력이 나쁜 경찰이 추가되었을 때, 1-1실험의 마피아의 승률 DataFrame

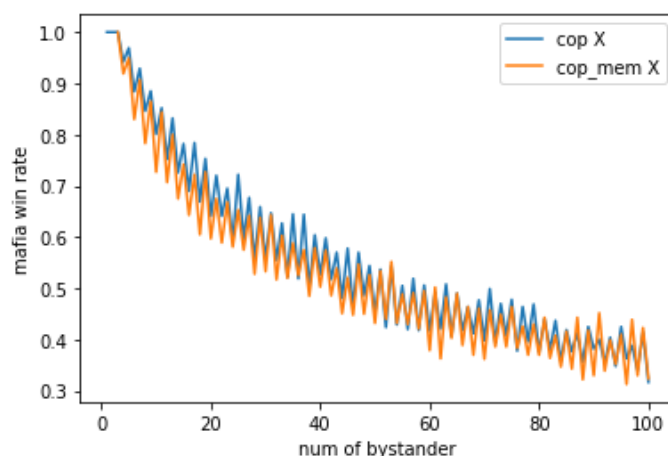


그림 7 기억력이 나쁜 경찰이 추가되었을 때, 1-1실험의 마피아의 승률 분포 그래프

그림7에서 볼 수 있듯이 기억력이 나쁜 경찰이 추가되는 경우, 경찰이 없는 경우에 비해 약간의 마피아 승률 하락이 있다. 이는 경찰이 마피아를 발견한 경우, 낮에 random.choices가 값을 고를

때 고려하는 가중치 리스트 중 해당 플레이어의 가중치가 올라가 마피아를 발견할 확률이 높아지기 때문이다. 하지만 하룻밤이 지나면 조사결과는 사라지기 때문에 발견하고 바로 검거를 하지 않으면 그 효과를 볼 수 없는데 마피아 검거는 경찰이 마피아를 발견했을 때 높여주는 가중치의 크기가 크지 않으면 어려워서 마피아의 승률이 낮아지는 정도가 미미하다고 분석했다.

시민의 수 마피아의 평균 승률		
0	3명	1.000
1	4명	0.899
2	5명	0.962
3	6명	0.792
4	7명	0.907
...
93	96명	0.260
94	97명	0.298
95	98명	0.234
96	99명	0.299
97	100명	0.238

98 rows × 2 columns

그림 8 기억력이 좋은 경찰이 추가되었을 때, 1-1실험의 마피아의 승률 DataFrame

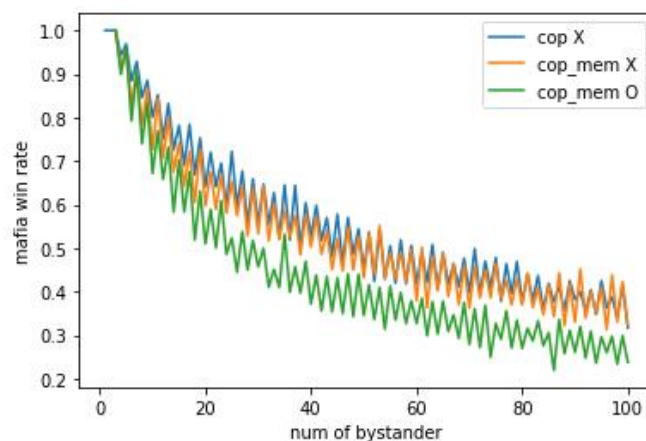


그림 9 기억력이 좋은 경찰이 추가되었을 때, 1-1실험의 마피아의 승률 분포 그래프

그림9에서 볼 수 있듯이 기억력이 좋은 경찰이 추가되는 경우, 기억력이 나쁜 경찰이 추가되는 경우보다 마피아의 승률이 더 낮아진다. 기억력이 나쁜 경찰이 추가되는 경우와 달리 하룻밤이 지나도 조사결과가 사라지지 않기 때문에 다음날 낮에 바로 마피아 검거에 성공하지 않더라도 다음날 그 가중치를 이용해 검거할 수 있다. 시민의 수가 상대적으로 가장 적은 경우인 3명에서 10명 사이에서는 그 이후의 경우에 비해 마피아 승률이 낮아지는 정도가 미미한데, 이는 애초에 시민의 수와 마피아의 수가 크게 차이가 없어 몇 밤 지나지 못하는 경우로 많은 시민을 잡기 위해 많은 밤을 지내야 하는 경우보다 가중치가 사용될 수 있는 횟수가 크지 않기 때문에 그 효과도 미미한 것이라고 분석했다.

3. 가장 단순한 게임에 메딕 추가

시민의 수		마피아의 평균 승률
0	3명	1.000
1	4명	0.946
2	5명	0.952
3	6명	0.887
4	7명	0.886
...
93	96명	0.372
94	97명	0.390
95	98명	0.372
96	99명	0.378
97	100명	0.366

98 rows × 2 columns

그림 10 메딕이 추가되었을 때, 1-1실험의 마피아의 승률 DataFrame

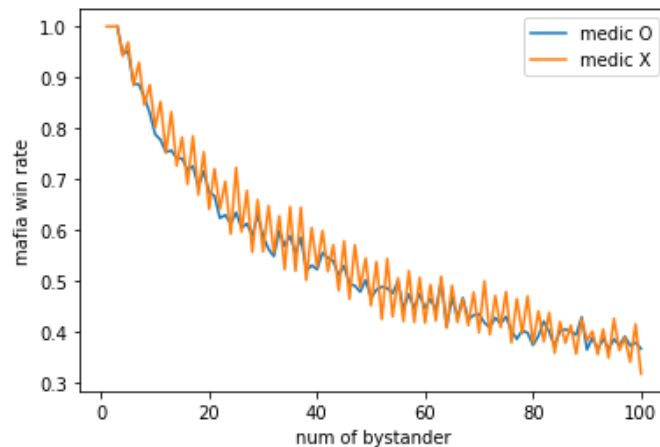


그림 11 메딕이 추가되었을 때, 1-1실험의 마피아의 승률 분포 그래프

그림11을 통해 메딕이 추가되는 경우, 1의 분석에 따라 '시민의 수-마피아의 수'가 짝수이나 홀수 이냐를 기준으로 위아래로 흔들리던 마피아의 승률 분포 그래프가 보다 안정화된 것을 볼 수 있다.

이는 메딕이 밤에 플레이어를 살리는 역할을 하는데, 시민의 수가 마피아의 수보다 많으니 시민을 살릴 확률이 높아 1에서 분석했던 것처럼 '시민의 수-(마피아의 수-1)'가 홀수일 경우 밤에 시민이 죽는 것을 막아서 마피아의 승률이 더 높아지지 않게 하기 때문이라고 분석했다. 이러한 이유로 그림11에서도 시민의 수가 짝수인 경우, 메딕이 없는 경우의 그래프에 비해 낮은 마피아 승률을 나타내고 있음을 볼 수 있다.

4. 경찰과 메딕이 모두 존재하는 마피아 게임

시민의 수		마피아의 평균 승률
0	6명	0.820
1	7명	0.830
2	8명	0.792
3	9명	0.774
4	10명	0.742
...
90	96명	0.345
91	97명	0.371
92	98명	0.349
93	99명	0.369
94	100명	0.351

95 rows × 2 columns

그림 12 기억력 나쁜 경찰과 메딕이 추가되었을 때, 1-1실험의 마피아의 승률 DataFrame

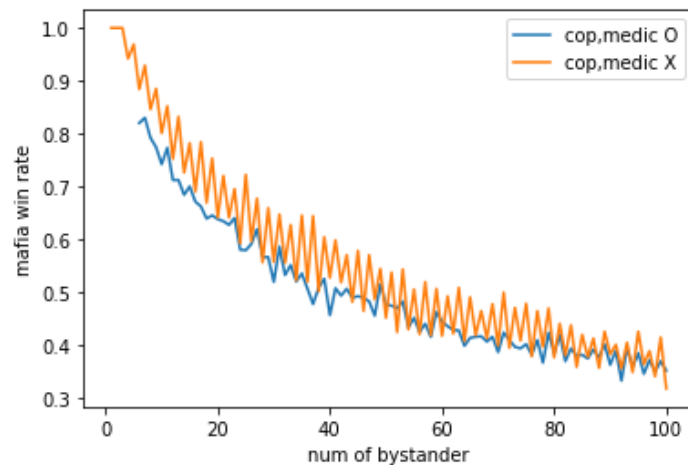


그림 13 기억력 나쁜 경찰과 메딕이 추가되었을 때, 1-1실험의 마피아의 승률 분포 그래프

2의 기억력 나쁜 경찰이 추가되었을 때의 특징과 3의 메딕이 추가되었을 때의 특징이 합쳐져 기존의 마피아 승률 분포 그래프보다 수치 변동이 안정적이면서도 마피아의 승률은 약간 낮아졌음을 볼 수 있다. 이 특징들이 나타나는 이유에 대해서는 2. 가장 단순한 게임에 경찰 추가와 3. 가장 단순한 게임에 메딕 추가에서 분석하였다.

시민의 수	마피아의 평균 승률
0	6명 0.816
1	7명 0.820
2	8명 0.733
3	9명 0.737
4	10명 0.687
...	...
90	96명 0.255
91	97명 0.279
92	98명 0.251
93	99명 0.283
94	100명 0.264

95 rows × 2 columns

그림 14 기억력 좋은 경찰과 메딕이 추가되었을 때, 1-1실험의 마피아의 승률 DataFrame

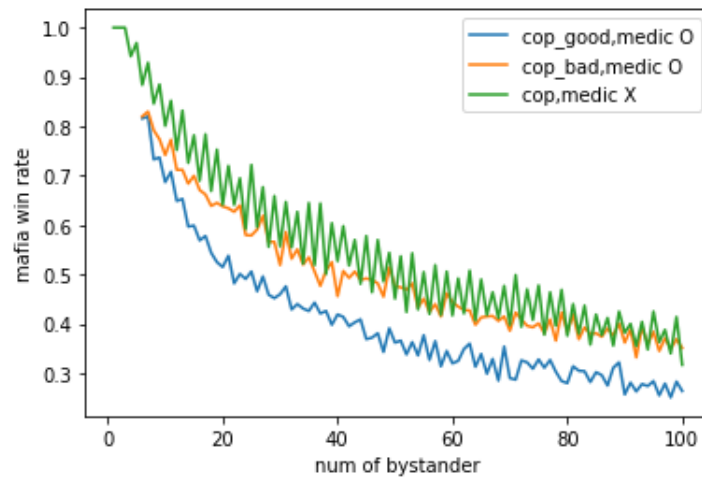


그림 15 기억력 좋은 경찰과 메딕이 추가되었을 때, 1-1실험의 마피아의 승률 분포 그래프

2의 기억력 좋은 경찰이 추가되었을 때의 특징과 3의 메딕이 추가되었을 때의 특징이 합쳐져 기존의 마피아 승률 분포 그래프보다 수치 변동이 안정적이면서도 마피아의 승률은 기억력이 나쁜 경찰이 추가되었을 때에 비해 훨씬 낮아졌음을 볼 수 있다. 마찬가지로 이 특징들이 나타나는 이유에 대해서는 2. 가장 단순한 게임에 경찰 추가와 3. 가장 단순한 게임에 메딕 추가에서 분석하였다.

5. 이 외의 실험

위 실험들은 모두 이론상의 흐름대로 진행이 된다. 즉, 현실에서 진행할 때 생길 수 있는 많은 상황들을 거의 배제한 것이다. 따라서 현실과 비슷한 게임을 진행하기 위해 몇 가지 추가 조건들을 더한 실험을 해보았다. 추가 조건들은 다음과 같다.

1. 경찰은 기억력이 좋다.

- 실제 게임에서 하룻밤 사이에 기억을 전부 잃어버리는 플레이어는 거의 없다.
2. 플레이어들은 기억력이 좋다.
 - 실제 게임에서는 경찰이 죽더라도 나머지 플레이어들은 경찰의 조사결과를 기억한다.
 3. 경찰이 조사한 플레이어가 시민이면 해당 시민은 가중치가 낮아진다.
 - 실제 게임에서는 경찰 조사결과가 시민이면, 해당 시민은 지목을 피할 수 있다.
 4. 게임 시작 후 하룻밤이 지나고, 경찰이 정체를 밝히면 마피아가 밤에 경찰을 고를 가중치가 높아진다.
 - 경찰은 조사결과를 알리기 위해서 정체를 밝힐 것이다.
 5. 게임 시작 후 하룻밤이 지나고, 경찰이 정체를 밝히면 메딕이 밤에 경찰을 살릴 가중치가 높아진다.
 - 메딕은 경찰의 조사를 돕기 위해 경찰을 보호할 것이다.
 6. 경찰이 마피아를 조사하면, 메딕이 밤에 마피아를 살릴 가중치가 줄어든다.
 7. 메딕은 밤에 경찰, 메딕, 일반시민, 마피아 순서로 가중치를 두어 살릴 플레이어를 정한다.
(경찰=4, 메딕=3, 일반시민=2, 마피아=1)

이 조건들을 추가하여 실제 게임과 더 가까운 게임을 진행해보면,

(STAT2021_PR1_20201786.ipynb는 위 1~4 실험을 위한 코드이며, 5. 이 외의 실험을 위한 코드는 other.ipynb로 함께 첨부되어 있다.)

	시민의 수	마피아의 평균 승률(org)	마피아의 평균 승률(others)
0	6명	0.878	0.779
1	7명	0.924	0.772
2	8명	0.821	0.719
3	9명	0.895	0.705
4	10명	0.754	0.641
...
90	96명	0.305	0.145
91	97명	0.415	0.145
92	98명	0.346	0.120
93	99명	0.373	0.129
94	100명	0.321	0.110

95 rows × 4 columns

그림 16 1~7의 조건을 추가했을 때, 1-1실험의 마피아의 승률 DataFrame

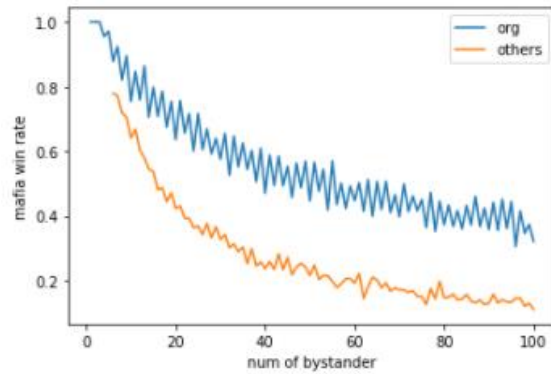


그림 17 1~7의 조건을 추가했을 때, 1-1실험의 마피아의 승률 분포 그래프

그림16, 그림17과 같이 기본 이론으로만 구현했던 마피아 게임보다 마피아의 승률이 훨씬 낮아진 것을 볼 수 있다. 위 1~7 조건들 중 4번을 제외하고 사실 모두 시민의 승률을 높여주는 가중치 조절이기 때문이다. 이렇게 우리가 현실에서 게임을 할 때에는 마피아의 압도적이 승리를 막을 수 있는 많은 조건들이 존재한다. 이 뿐만 아니라 서로 속고 속이는 행동들을 적용하면 게임의 승패 여부는 점점 판단하기 어려워질 것이다. 이런 조건들을 계속 더해서 더욱 보완해 나간다면, 현실에서의 마피아 승률을 구할 수 있을 것이라고 기대한다.

6. 느낀 점

이론적 확률과 현실의 차이는 크다는 것을 느낄 수 있었다. 처음 가장 단순한 마피아 게임을 구현하고 실험을 하였을 때는 내가 무언가 실수를 한 것이 아닌가 싶을 정도로 마피아의 승률이 너무 높게 나와서 당황했었다. 하지만 왜 이런 결과가 나오게 된 것인지 마피아가 이길 수 있는 경우를 모두 따져보고 이론적으로 마피아의 승률을 도출해보니 '원래 마피아 게임은 이론적으로 마피아가 이길 수밖에 없는 게임이었구나' 라고 인정하게 되었다. 그리고 나서 현실 게임에서 우리가 사용하는 조건들을 추가적으로 계속 넣으면서 실험을 하였더니 마피아의 승률이 줄어드는 것을 보면서 현실은 역시 이론과는 다른 변수들이 많이 존재해서 더욱 재미있는 공간이라는 것을 느꼈다. 더불어 즐겨하는 게임인 배틀그라운드에는 어떤 이론적 확률이 숨어있으며, 사람들은 그 이론적 확률을 깨기 위해 어떤 플레이를 하고 있는지 궁금했다. 나의 실력이 따라준다면 배틀그라운드에 대해서도 이러한 실험들과 분석을 해보고 싶다. 이번 프로젝트는 나에게 있어 확률이 내가 살고 있는 현실과 아주 밀접한 관계를 맺고 있다는 것을 깨닫게 해준 것 같아서 재미있었다.