

2020학년도 대학수학능력시험
수학영역 가형 정답 및 풀이

01. ⑤ 02. ③ 03. ② 04. ⑤ 05. ④
06. ③ 07. ② 08. ⑤ 09. ③ 10. ④
11. ④ 12. ② 13. ① 14. ④ 15. ②
16. ③ 17. ⑤ 18. ① 19. ⑤ 20. ①
21. ⑤ 22. 4 23. 15 24. 2 25. 137
26. 5 27. 8 28. 450 29. 29
30. 64

정답풀이 :

$$\begin{aligned} & \sqrt{(2-0)^2 + (0-a)^2 + (1-0)^2} \\ &= \sqrt{(3-0)^2 + (2-a)^2 + (0-0)^2} \\ & \sqrt{a^2+5} = \sqrt{a^2-4a+13} \end{aligned}$$

양변을 제곱하면

$$a^2+5 = a^2-4a+13$$

따라서

$$a = 2$$

정답 ②

1. 출제의도 : 성분으로 주어진 벡터의 연산을 할 수 있는가?

정답풀이 :

$$\begin{aligned} \vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} &= (3, 1) + \frac{1}{2}(-2, 4) \\ &= (3, 1) + (-1, 2) \\ &= (2, 3) \end{aligned}$$

따라서, 모든 성분의 합은 5이다.

정답 ⑤

2. 출제의도 : 지수함수의 극한을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{6x}{e^{4x} - e^{2x}} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{e^{4x} - 1}{6x} - \frac{e^{2x} - 1}{6x}} \\ &= \frac{1}{\frac{2}{3} - \frac{1}{3}} = 3 \end{aligned}$$

정답 ③

3. 출제의도 : 좌표공간에서 두 점 사이의 거리를 구할 수 있는가?

4. 출제의도 : 이항정리를 이용하여 항의 계수를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$\left(2x + \frac{1}{x^2}\right)^4$ 의 일반항은

$${}_4C_r (2x)^{4-r} \left(\frac{1}{x^2}\right)^r$$

$$= {}_4C_r 2^{4-r} x^{4-3r}$$

이때, $x^{4-3r} = x$ 에서

$$4-3r=1$$

$$r=1$$

따라서, x 의 계수는

$${}_4C_1 \times 2^3 = 32$$

정답 ⑤

5. 출제의도 : 음함수의 미분법을 이용하여 접선의 기울기를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$x^2 - 3xy + y^2 = x$ 의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$2x - 3y - 3x \times \frac{dy}{dx} + 2y \times \frac{dy}{dx} = 1$$

$$(3x - 2y) \times \frac{dy}{dx} = 2x - 3y - 1$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x - 3y - 1}{3x - 2y} \quad (\text{단, } 3x \neq 2y)$$

위 식에 $x=1, y=0$ 을 대입하면

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2-1}{3} = \frac{1}{3}$$

정답 ④

6. 출제의도 : 조합의 수를 이용하여 확률을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

구하고자 하는 확률은

$$\begin{aligned} \frac{{}_3C_2 \times {}_4C_2}{{}_7C_4} &= \frac{{}_3C_1 \times {}_4C_2}{{}_7C_3} \\ &= \frac{3 \times \frac{4 \times 3}{2 \times 1}}{\frac{7 \times 6 \times 5}{3 \times 2 \times 1}} \\ &= \frac{18}{35} \end{aligned}$$

정답 ③

7. 출제의도 : 삼각함수가 포함된 방정식과 부등식을 풀 수 있는가?

정답풀이 :

$$4\cos^2 x - 1 = 0 \text{에서}$$

$$(2\cos x + 1)(2\cos x - 1) = 0$$

$$\cos x = -\frac{1}{2} \quad \text{또는} \quad \cos x = \frac{1}{2}$$

$$x = \frac{\pi}{3} \quad \text{또는} \quad x = \frac{2}{3}\pi \quad \text{또는}$$

$$x = \frac{4}{3}\pi \quad \text{또는} \quad x = \frac{5}{3}\pi$$

한편, $\sin x \cos x < 0$ 이므로 x 는 제 2사분면의 각 또는 제 4사분면의 각이다.

따라서, 구하는 x 의 값은 $x = \frac{2}{3}\pi$ 또는

$$x = \frac{5}{3}\pi \text{이므로 모든 합은 } \frac{7}{3}\pi \text{이다.}$$

정답 ②

8. 출제의도 : 부분적분법을 이용하여 정적분의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$\int_e^{e^2} \frac{\ln x - 1}{x^2} dx \text{에서}$$

$$u(x) = \ln x - 1, \quad v'(x) = \frac{1}{x^2} \text{으로 놓으면}$$

$$u'(x) = \frac{1}{x}, \quad v(x) = -\frac{1}{x} \text{이므로}$$

$$\int_e^{e^2} \frac{\ln x - 1}{x^2} dx$$

$$= \left[-\frac{\ln x - 1}{x} \right]_e^{e^2} + \int_e^{e^2} \frac{1}{x^2} dx$$

$$= \left[-\frac{\ln x - 1}{x} \right]_e^{e^2} + \left[-\frac{1}{x} \right]_e^{e^2}$$

$$= -\frac{1}{e^2} + \left(-\frac{1}{e^2} + \frac{1}{e} \right)$$

$$= \frac{e-2}{e^2}$$

정답 ⑤

9. 출제의도 : 좌표평면에서 속력의 최댓값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

점 P의 시각 t ($0 < t < \frac{\pi}{2}$)에서의 위치

(x, y) 가

$$x = t + \sin t \cos t, \quad y = \tan t$$

이므로 P의 시각 t 에서의 속도

$$\left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt} \right) \text{는}$$

$$\frac{dx}{dt} = 1 + \cos^2 t - \sin^2 t$$

$$= 2\cos^2 t$$

$$\frac{dy}{dt} = \sec^2 t$$

P의 시각 t 에서의 속력은

$$\sqrt{\left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dy}{dt} \right)^2}$$

$$= \sqrt{(2\cos^2 t)^2 + (\sec^2 t)^2}$$

$$= \sqrt{4\cos^4 t + \sec^4 t}$$

이때, $4\cos^4 t > 0$, $\sec^4 t > 0$ 이므로

$$\begin{aligned} 4\cos^4 t + \sec^4 t &\geq 2\sqrt{4\cos^4 t \times \sec^4 t} \\ &= 2\sqrt{4\cos^4 t \times \frac{1}{\cos^4 t}} \\ &= 4 \end{aligned}$$

(단, 등호는 $4\cos^4 t = \sec^4 t$ 일 때 성립한다.)

따라서 P의 시각 t 에서의 속력의 최댓값은 $\sqrt{4} = 2$ 이다.

정답 ③

10. 출제의도 : 삼각함수의 덧셈정리를 이용하여 삼각함수의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$\angle C = \gamma$ 라 하면

$$\tan \gamma = \tan (\pi - (\alpha + \beta))$$

$$= -\tan (\alpha + \beta)$$

$$= \frac{3}{2}$$

한편, 삼각형 ABC는 $\overline{AB} = \overline{AC}$ 이므로 $\beta = \gamma$ 이다.

그러므로

$$\tan \beta = \tan \gamma = \frac{3}{2}$$

따라서,

$$\tan \alpha = \tan (\pi - (\beta + \gamma))$$

$$= -\tan (\beta + \gamma)$$

$$= -\tan (2\beta)$$

$$= -\frac{2\tan \beta}{1 - \tan^2 \beta}$$

$$= -\frac{2 \times \frac{3}{2}}{1 - \left(\frac{3}{2} \right)^2}$$

$$= \frac{12}{5}$$

정답 ④

11. 출제의도 : 미분법을 이용하여 곡선이 변곡점을 갖도록 하는 조건을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$y' = 2ax - 4\cos 2x$$

$$y'' = 2a + 8\sin 2x$$

$$y'' = 0 \text{에서}$$

$$\sin 2x = -\frac{a}{4}$$

곡선 $y = ax^2 - 2\sin 2x$ 가 변곡점을 가져야
하므로

$$-1 < -\frac{a}{4} < 1$$

에서 $-4 < a < 4$

따라서 정수 a 의 값은

$-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3$ 이고, 그 개수는
7이다.

정답 ④

12. 출제의도 : 정적분을 이용하여 입체
도형의 부피를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

주어진 입체도형의 부피는

$$\int_0^k \left(\sqrt{\frac{e^x}{e^x + 1}} \right)^2 dx = \int_0^k \frac{e^x}{e^x + 1} dx$$

$e^x + 1 = t$ 로 놓으면

$$\frac{dt}{dx} = e^x$$

이때 $x = 0$ 일 때, $t = 2$ 이고

$x = k$ 일 때, $t = e^k + 1$ 이므로

$$\int_0^k \frac{e^x}{e^x + 1} dx$$

$$= \int_2^{e^k + 1} \frac{1}{t} dt$$

$$= \left[\ln t \right]_2^{e^k + 1}$$

$$= \ln(e^k + 1) - \ln 2$$

$$= \ln \frac{e^k + 1}{2}$$

주어진 입체도형의 부피가 $\ln 7$ 이므로

$$\ln \frac{e^k + 1}{2} = \ln 7$$

$$\frac{e^k + 1}{2} = 7, e^k = 13$$

따라서

$$k = \ln 13$$

정답 ②

13. 출제의도 : 타원의 정의와 삼각형의
닮음비를 이용하여 넓이를 구할 수 있는
가?

정답풀이 :

삼각형 BFA에서

$$\overline{AF} = 5$$

이때, 삼각형 F'AO와 삼각형 F'BF는 길
이의 비가 1:2인 닮은 삼각형이다.

$$\overline{AB} = 5$$

$$\overline{BF} = 2\overline{AO} = 2a$$

그러므로 삼각형 BFA의 둘레의 길이는

$$5 + 5 + 2a = 10 + 2a \quad \text{----} \textcircled{7}$$

한편, 직각삼각형 F'PF에서 $\overline{PF} = p$ 라 하
면 $\overline{F'P} = 10 - p$ 이므로

$$(10 - p)^2 = p^2 + (2c)^2$$

$$p^2 - 20p + 100 = p^2 + 4c^2$$

$$20p = 100 - 4c^2$$

$$p = 5 - \frac{1}{5}c^2$$

한편, 삼각형 F'BP의 길이는

$$\overline{F'B} + \overline{BP} + \overline{PF'}$$

$$= 10 + (2a - p) + (10 - p)$$

$$= 20 + 2a - 2p \quad \text{-----} \textcircled{8}$$

삼각형 BPF'와 삼각형 BFA의 둘레의

길이의 차가 4이므로 ㉠과 ㉡에서

$$(20+2a-2p)-(2a+10)=4$$

$$10-2p=4$$

$$p=3$$

이때, $p=5-\frac{1}{5}c^2$ 이므로 대입하면

$$3=5-\frac{1}{5}c^2$$

$$c^2=10$$

$$c=\sqrt{10}$$

또,

$$a=\sqrt{5^2-c^2}$$

$$=\sqrt{15}$$

따라서, 삼각형 AFF'의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times 2c \times a = ac = \sqrt{15} \times \sqrt{10} = 5\sqrt{6}$$

정답 ①

14. 출제의도 : 확률변수의 평균과 분산을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

주어진 모집단의 확률분포에서

$$\sigma^2 = V(X) = 1 \times \frac{1}{6} + 4 \times \frac{1}{3} + 9 \times \frac{1}{2} - \frac{49}{9}$$

$$= 6 - \frac{49}{9} = \frac{5}{9}$$

$$\text{이므로 } p = \frac{5}{9}$$

\bar{X} 는 이 모집단에서 크기가 10인 표본을 임의추출하여 구한 표본평균이므로

$$V(\bar{X}) = \frac{V(X)}{10} = \frac{5}{9} \times \frac{1}{10} = \frac{1}{18}$$

$$\text{즉, } q = \frac{1}{18}$$

또,

$$V(Y) = V(10\bar{X}) = 100V(\bar{X}) = 100 \times \frac{1}{18} = \frac{50}{9}$$

$$\text{이므로 } r = \frac{50}{9}$$

따라서

$$p+q+r = \frac{5}{9} + \frac{1}{18} + \frac{50}{9} = \frac{37}{6}$$

정답 ④

15. 출제의도 : 로그방정식의 해를 구한 후 지수법칙을 이용하여 식을 간단히 할 수 있는가?

정답풀이 :

$$a^x = \sqrt{3} \text{에서}$$

$$x = \log_a \sqrt{3} \text{이므로}$$

점 A의 좌표는 $(\log_a \sqrt{3}, \sqrt{3})$ 이다.

직선 OA의 기울기는

$$\frac{\sqrt{3}}{\log_a \sqrt{3}}$$

직선 AB의 기울기는

$$\frac{\sqrt{3}}{\log_a \sqrt{3} - 4}$$

직선 OA와 직선 AB가 서로 수직이므로

$$\frac{\sqrt{3}}{\log_a \sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3}}{\log_a \sqrt{3} - 4} = -1$$

이어야 한다. 즉,

$$(\log_a \sqrt{3})^2 - 4\log_a \sqrt{3} + 3 = 0 \text{에서}$$

$$(\log_a \sqrt{3} - 1)(\log_a \sqrt{3} - 3) = 0$$

$$\log_a \sqrt{3} = 1 \text{ 또는 } \log_a \sqrt{3} = 3$$

$$a = \sqrt{3} \text{ 또는 } a^3 = \sqrt{3}$$

따라서 $a=3^{\frac{1}{2}}$ 또는 $a=3^{\frac{1}{6}}$ 이므로
 모든 a 의 값의 곱은
 $3^{\frac{1}{2}} \times 3^{\frac{1}{6}} = 3^{\frac{1}{2} + \frac{1}{6}} = 3^{\frac{2}{3}}$

정답 ②

16. 출제의도 : 중복조합을 이용하여 조건을 만족시키는 순서쌍의 개수를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$a+b+c-d=9 \text{에서}$$

$$a+b+c=9+d$$

이때, $d \leq 4$ 이므로 다음 각 경우로 나눌 수 있다.

(i) $d=0$ 일 때,

$$a+b+c=9$$

이때, $c \geq d$ 에서 $c \geq 0$ 이므로 주어진 순서쌍의 개수는

$$\begin{aligned} {}_3H_9 &= {}_{11}C_9 \\ &= {}_{11}C_2 = 55 \end{aligned}$$

(ii) $d=1$ 일 때,

$$a+b+c=10$$

이때, $c \geq d$ 에서 $c \geq 1$ 이므로 $c=c'+1$

($c' \geq 0$)로 놓으면

$$a+b+c'=9$$

그러므로 구하는 순서쌍의 개수는

$$\begin{aligned} {}_3H_9 &= {}_{11}C_9 \\ &= {}_{11}C_2 = 55 \end{aligned}$$

(iii) $d=2$ 일 때,

$$a+b+c=11$$

이때, $c \geq d$ 에서 $c \geq 2$ 이므로 $c=c'+2$

($c' \geq 0$)로 놓으면

$$a+b+c'=9$$

그러므로 구하는 순서쌍의 개수는

$$\begin{aligned} {}_3H_9 &= {}_{11}C_9 \\ &= {}_{11}C_2 = 55 \end{aligned}$$

(iv) $d=3$ 일 때,

$$a+b+c=12$$

이때, $c \geq d$ 에서 $c \geq 3$ 이므로 $c=c'+3$

($c' \geq 0$)로 놓으면

$$a+b+c'=9$$

그러므로 구하는 순서쌍의 개수는

$$\begin{aligned} {}_3H_9 &= {}_{11}C_9 \\ &= {}_{11}C_2 = 55 \end{aligned}$$

(v) $d=4$ 일 때,

$$a+b+c=13$$

이때, $c \geq d$ 에서 $c \geq 4$ 이므로 $c=c'+4$

($c' \geq 0$)로 놓으면

$$a+b+c'=9$$

그러므로 구하는 순서쌍의 개수는

$$\begin{aligned} {}_3H_9 &= {}_{11}C_9 \\ &= {}_{11}C_2 = 55 \end{aligned}$$

따라서, (i)~(v)에서 구하는 순서쌍의 개수는

$$55 \times 5 = 275$$

정답 ③

17. 출제의도 : 쌍곡선의 성질을 이용하여 조건을 만족시키는 삼각형의 넓이를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

선분 BC의 중점을 O라 하고,
직선 BC를 x 축으로, 직선 OA를 y 축으로 하는 좌표평면을 생각하자.

$B(-5, 0)$, $C(5, 0)$ 이고,

점 P는 두 점 B, C를 초점으로 하고, 주축의 길이가 2인 쌍곡선 위의 점이다.

이 쌍곡선의 방정식을 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ 이라

하면

$$2a = 2 \text{에서 } a = 1$$

$$25 = a^2 + b^2 \text{에서 } b^2 = 24$$

즉 쌍곡선의 방정식은 $x^2 - \frac{y^2}{24} = 1$

$P(p, q)$ 라 하면 $p^2 - \frac{q^2}{24} = 1$ 이고,

$A(0, 5\sqrt{3})$ 이므로

$$\overline{PA}^2 = p^2 + (q - 5\sqrt{3})^2$$

$$= 1 + \frac{q^2}{24} + (q - 5\sqrt{3})^2$$

$\frac{d}{dq}(\overline{PA}^2) = 0$ 에서 $q = \frac{24\sqrt{3}}{5}$ 이므로

$q = \frac{24\sqrt{3}}{5}$ 일 때 선분 PA의 길이가 최

소이다.

따라서 삼각형 PBC의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times 10 \times \frac{24\sqrt{3}}{5} = 24\sqrt{3}$$

정답 ⑤

18. 출제의도 : 정규분포의 성질을 이용하여 확률의 최댓값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$f(12) \leq g(20)$ 이므로

$$m-2 \leq 20 \leq m+2$$

이어야 한다. 즉,

$18 \leq m \leq 22$ 이므로 $m=22$ 일 때 확률 $P(21 \leq Y \leq 24)$ 은 최댓값을 갖는다.

이때 $Z = \frac{X-22}{2}$ 로 놓으면 확률변수 Z

는 정규분포 $N(1, 0)$ 을 따른다.

따라서 구하는 확률의 최댓값은

$$P(21 \leq Y \leq 24)$$

$$= P\left(\frac{21-22}{2} \leq \frac{Y-22}{2} \leq \frac{24-22}{2}\right)$$

$$= P(-0.5 \leq Z \leq 1)$$

$$= P(-0.5 \leq Z \leq 0) + P(0 \leq Z \leq 1)$$

$$= P(0 \leq Z \leq 0.5) + P(0 \leq Z \leq 1)$$

$$= 0.1915 + 0.3413$$

$$= 0.5328$$

정답 ①

19. 출제의도 : 내적을 이용하여 두 벡터의 수직, 벡터의 크기 등을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

조건 (가)에서 $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$ 이므로 두 벡터 \overrightarrow{AC} , \overrightarrow{BC} 는 수직이다. 그러므로 선분 AB는 원의 지름이다.

이때, $|\overrightarrow{AB}| = 8$ 이므로 이 원은 지름의 길이가 8인 원이다.

원의 중심을 O라 하면 조건 (나)에서

$$\overrightarrow{AD} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{BC}$$

$$= \overrightarrow{AO} + 2\overrightarrow{CB}$$

이때, $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OD}$ 이므로

$$\overrightarrow{OD} = 2\overrightarrow{CB}$$

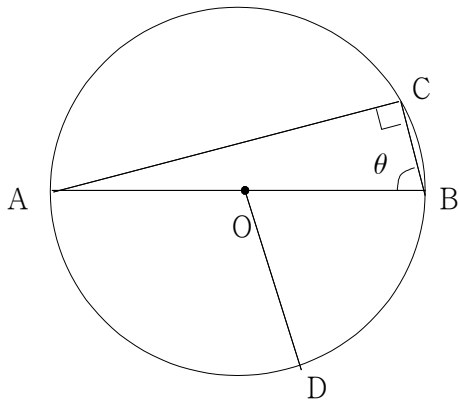
이때, 점 D는 원 위의 점이므로

$$|\overrightarrow{OD}| = 4 \text{에서}$$

$$2|\overrightarrow{CB}| = 4$$

$$|\overrightarrow{CB}| = 2$$

또, 두 벡터 \overrightarrow{CB} , \overrightarrow{OD} 는 평행하다.



이때, $\angle ABC = \theta$ 라 하면

$$\cos \theta = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$$

한편, 두 벡터 \overrightarrow{OD} , \overrightarrow{CB} 는 평행하므로

$$\angle AOD = \pi - \theta$$

따라서,

$$|\overrightarrow{AD}|^2 = |\overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OA}|^2$$

$$= (\overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OA}) \cdot (\overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OA})$$

$$= |\overrightarrow{OD}|^2 + |\overrightarrow{OA}|^2 - 2\overrightarrow{OD} \cdot \overrightarrow{OA}$$

$$= |\overrightarrow{OD}|^2 + |\overrightarrow{OA}|^2 - 2|\overrightarrow{OD}||\overrightarrow{OA}|\cos(\pi - \theta)$$

$$= |\overrightarrow{OD}|^2 + |\overrightarrow{OA}|^2 + 2|\overrightarrow{OD}||\overrightarrow{OA}|\cos \theta$$

$$= 4^2 + 4^2 + 2 \times 4 \times 4 \times \frac{1}{4}$$

$$= 40$$

정답 ⑤

20. 출제의도 : 독립시행의 확률을 이용하여 조건을 만족시키는 확률을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

앞면은 H, 뒷면은 T로 나타내기로 하자.

(i) 앞면이 3번 나오는 경우

H 3개와 T 4개를 일렬로 나열하는 경우의 수는 ${}^7C_3 = 35$

H가 이웃하지 않는 경우의 수는 ${}_5C_3 = 10$

즉 조건 (나)를 만족시킬 확률은

$$(35 - 10) \times \left(\frac{1}{2}\right)^7$$

(ii) 앞면이 4번 나오는 경우

H 4개와 T 3개를 일렬로 나열하는 경우의 수는 ${}^7C_4 = 35$

H가 이웃하지 않는 경우의 수는 1

즉 조건 (나)를 만족시킬 확률은

$$(35 - 1) \times \left(\frac{1}{2}\right)^7$$

(iii) 앞면이 5번 이상 나오는 경우

조건 (나)를 항상 만족시키므로 이 경우의 확률은

$$({}^7C_5 + {}^7C_6 + {}^7C_7) \times \left(\frac{1}{2}\right)^7$$

(i), (ii), (iii)에서 구하는 확률은

$$(25 + 34 + 29) \times \left(\frac{1}{2}\right)^7$$

$$= \frac{88}{128} = \frac{11}{16}$$

정답 ①

21. 출제의도 : 미분법과 적분법을 이용하여 주어진 명제의 참, 거짓을 판별할 수 있는가?

정답풀이 :

곡선 $y=e^x$ 에서 $y'=e^x$

곡선 $y=e^x$ 위의 점 (t, e^t) 에서의 접선의 방정식이 $y=f(x)$ 이므로

$$f(x)=e^t(x-t)+e^t$$

함수 $y=|f(x)+k-\ln x|$ 에서

$$h(x)=f(x)+k$$

$$=e^t x+(1-t)e^t+k$$

라 하자.

함수 $y=|f(x)+k-\ln x|$ 가 미분가능하고, 실수 k 가 최소일 때는

곡선 $y=h(x)$ 와 곡선 $y=\ln x$ 가 한 점에서 만날 때이다.

곡선 $y=h(x)$ 와 곡선 $y=\ln x$ 가 만나는 점의 x 좌표를 p 라 하면

$$e^t p+(1-t)e^t+k=\ln p \quad \cdots \cdots \textcircled{㉠}$$

또 $h'(x)=e^t$ 이고, $y=\ln x$ 에서 $y'=\frac{1}{x}$

이므로

$$e^t=\frac{1}{p} \quad \cdots \cdots \textcircled{㉡}$$

$$\ln p=\ln \frac{1}{e^t}=-t \quad \cdots \cdots \textcircled{㉢}$$

㉡, ㉢을 ㉠에 대입하면

$$\frac{1}{p} \times p+(1-t)e^t+k=-t$$

$$k=(t-1)e^t-t-1$$

따라서

$$g(t)=(t-1)e^t-t-1$$

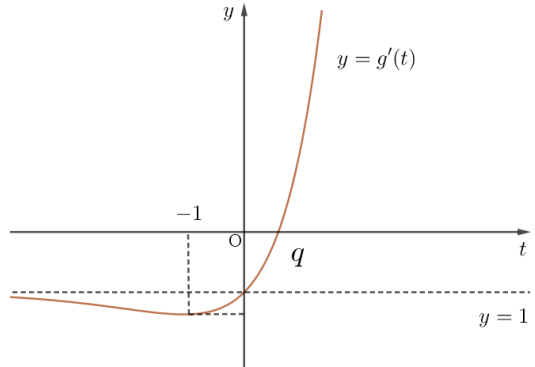
㉣.

$$g'(t)=e^t+(t-1)e^t-1$$

$$=te^t-1$$

한편, $g''(t)=e^t+te^t=(t+1)e^t$

이므로 함수 $y=g'(t)$ 의 그래프는 다음 그림과 같다.



이때 함수 $y=g'(t)$ 의 그래프와 t 축이 만나는 점의 t 의 좌표를 q 라 하면

$p > 0$ 이므로 함수 $y=g(t)$ 는 $t=q$ 에서 극솟값을 갖는다.

$$g(q)=qe^q-e^q-q-1$$

$$=-e^q-q < 0$$

이므로 $m < 0$ 이 되도록 하는 두 실수 a, b 가 존재한다. (참)

㉤. $g(c)=(c-1)e^c-c-1=0$ 에서

$$e^c=\frac{c+1}{c-1}$$

따라서

$$g(-c)=(-c-1)e^{-c}+c-1$$

$$=-(c+1) \times \frac{c-1}{c+1}+c-1$$

$$=0 \quad (\text{참})$$

㉤. $g'(t)=te^t-1$ 이고 ㉤에서

$\beta=c, \alpha=-c$ 이므로

$$\frac{1+g'(\beta)}{1+g'(\alpha)}=\frac{1+g'(c)}{1+g'(-c)}=\frac{ce^c}{-ce^{-c}}=-e^{2c}$$

한편, $g(1)=-2$ 이므로

$c > 1$ 이다.

이때, $-e^{2c} < -e^2$ 이므로

$$\frac{1+g'(\beta)}{1+g'(\alpha)} < -e^2 \text{ (참)}$$

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ 이다.

정답 ⑤

22. 출제의도 : 도함수를 이용하여 미분 계수를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$f(x) = x^3 \ln x \text{이므로}$$

$$f'(x) = 3x^2 \ln x + x^3 \times \frac{1}{x}$$

$$= 3x^2 \ln x + x^2$$

따라서,

$$f'(e) = 3e^2 \ln e + e^2$$

$$= 4e^2$$

이므로

$$\frac{f'(e)}{e^2} = 4$$

정답 4

23. 출제의도 : 이항분포를 따르는 확률 변수의 분산을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$E(X) = 80p \text{이므로}$$

$$80p = 20 \text{에서 } p = \frac{1}{4}$$

따라서

$$V(X) = 20 \times \left(1 - \frac{1}{4}\right) = 15$$

정답 15

24. 출제의도 : 원의 성질을 활용하여 삼각함수의 극한값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

점 P의 좌표가 $(t, \sin t) (0 < t < \pi)$ 이므로 점 Q의 좌표는 $(t, 0)$ 이다.

$$\overline{PR} = \overline{PQ} = \sin t$$

$$\overline{OR} = \overline{OP} - \overline{PR}$$

$$= \sqrt{t^2 + \sin^2 t} - \sin t$$

이므로

$$\lim_{t \rightarrow 0+} \frac{\overline{OQ}}{\overline{OR}}$$

$$= \lim_{t \rightarrow 0+} \frac{t}{\sqrt{t^2 + \sin^2 t} - \sin t}$$

$$= \lim_{t \rightarrow 0+} \frac{t(\sqrt{t^2 + \sin^2 t} + \sin t)}{(t^2 + \sin^2 t) - \sin^2 t}$$

$$= \lim_{t \rightarrow 0+} \frac{\sqrt{t^2 + \sin^2 t} + \sin t}{t}$$

$$= \lim_{t \rightarrow 0+} \left\{ \sqrt{1 + \left(\frac{\sin t}{t}\right)^2} + \frac{\sin t}{t} \right\}$$

$$= \sqrt{1 + 1^2} + 1$$

$$= 1 + \sqrt{2}$$

이때, $1 + \sqrt{2} = a + b\sqrt{2}$ 에서

a, b 가 정수이므로

$$a = 1, b = 1$$

따라서

$$a + b = 1 + 1 = 2$$

정답 2

25. 출제의도 : 독립시행의 확률을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$a-b=3$ 이므로 다음 각 경우로 나눌 수 있다.

(i) $a=5$ 이고 $b=2$ 일 때,

주사위를 5번 던질 때, 홀수의 눈이 5번 나오고 동전을 4번 던질 때, 앞면이 2번 나와야 하므로 확률은

$${}_5C_5\left(\frac{1}{2}\right)^5\left(\frac{1}{2}\right)^0 \times {}_4C_2\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^2$$

$$= \frac{1}{2^5} \times \frac{3}{2^3}$$

$$= \frac{3}{2^8}$$

(ii) $a=4$ 이고 $b=1$ 일 때,

주사위를 5번 던질 때, 홀수의 눈이 4번 나오고 동전을 4번 던질 때, 앞면이 1번 나와야 하므로 확률은

$${}_5C_4\left(\frac{1}{2}\right)^4\left(\frac{1}{2}\right)^1 \times {}_4C_1\left(\frac{1}{2}\right)^1\left(\frac{1}{2}\right)^3$$

$$= \frac{5}{2^5} \times \frac{1}{2^2}$$

$$= \frac{5}{2^7}$$

(iii) $a=3$ 이고 $b=0$ 일 때,

주사위를 5번 던질 때, 홀수의 눈이 3번 나오고 동전을 4번 던질 때, 앞면이 0번 나와야 하므로 확률은

$${}_5C_3\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^2 \times {}_4C_0\left(\frac{1}{2}\right)^0\left(\frac{1}{2}\right)^4$$

$$= \frac{5}{2^4} \times \frac{1}{2^4}$$

$$= \frac{5}{2^8}$$

따라서, 구하는 확률은

$$\frac{3}{2^8} + \frac{5}{2^7} + \frac{5}{2^8}$$

$$= \frac{18}{2^8} = \frac{9}{2^7} = \frac{9}{128}$$

이므로

$$p+q=128+9=137$$

정답 137

26. 출제의도 : 합성함수의 미분법을 이용하여 미분계수를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$g\left(\frac{x+8}{10}\right)=f^{-1}(x) \text{에서}$$

$$f\left(g\left(\frac{x+8}{10}\right)\right)=x$$

양변을 x 에 대하여 미분하면

$$f'\left(g\left(\frac{x+8}{10}\right)\right) \times g'\left(\frac{x+8}{10}\right) \times \frac{1}{10} = 1$$

이 식에 $x=2$ 를 대입하면

$$f'(g(1)) \times g'(1) = 10$$

$$f'(0) \times g'(1) = 10$$

$$\text{한편, } f'(x) = 2xe^{-x} - (x^2+2)e^{-x}$$

$$= (2x - x^2 - 2)e^{-x}$$

$$\text{이므로 } f'(0) = -2$$

$$\text{따라서 } (-2) \times g'(1) = 10 \text{에서}$$

$$g'(1) = -5$$

$$\text{즉 } |g'(1)| = |-5| = 5$$

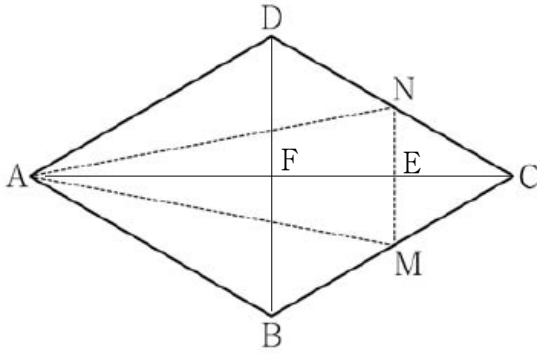
정답 5

27. 출제의도 : 삼수선의 정리를 활용하여 정사영시킨 도형의 넓이를 구할 수

있는가?

정답풀이 :

$$\overline{MN} = \frac{1}{2} \overline{BD} = \frac{1}{2} \times 4 = 2$$



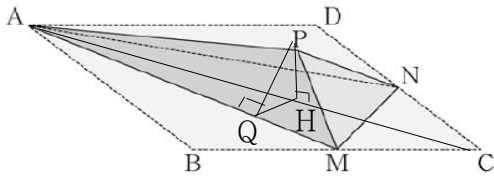
선분 MN의 중점을 E, 선분 AC의 중점 F라 하면

$$\overline{AE} = \frac{3}{2} \overline{AF} = \frac{3}{2} \times 2\sqrt{3} = 3\sqrt{3}$$

이때 삼각형 AMN의 넓이는

$$\begin{aligned} \triangle AMN &= \frac{1}{2} \times \overline{MN} \times \overline{AE} \\ &= \frac{1}{2} \times 2 \times 3\sqrt{3} \\ &= 3\sqrt{3} \end{aligned}$$

점 P에서 평면 AMN에 내린 수선의 발을 H, 점 P에서 선분 AM에 내린 수선이 발을 Q라 하자.



삼각형 AME에서

$\overline{AE} \perp \overline{ME}$ 이므로

$$\begin{aligned} \overline{AM} &= \sqrt{\overline{AE}^2 + \overline{ME}^2} \\ &= \sqrt{(3\sqrt{3})^2 + 1^2} \\ &= 2\sqrt{7} \end{aligned}$$

삼각형 PAM의 넓이에서

$$\frac{1}{2} \times \overline{AP} \times \overline{MP} \times \sin \frac{2}{3} \pi = \frac{1}{2} \times \overline{AM} \times \overline{PQ}$$

이므로

$$\frac{1}{2} \times 4 \times 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2} \times 2\sqrt{7} \times \overline{PQ}$$

$$\overline{PQ} = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{7}} = \frac{2\sqrt{21}}{7}$$

한편, $\overline{HE} = k$ (k 는 양수)라 하면

$$\overline{AP}^2 - \overline{AH}^2 = \overline{PE}^2 - \overline{HE}^2$$

이므로

$$4^2 - (3\sqrt{3} - k)^2 = (\sqrt{3})^2 - k^2$$

$$k = \frac{7\sqrt{3}}{9}$$

삼각형 PHE에서

$$\begin{aligned} \overline{PH} &= \sqrt{\overline{PE}^2 - \overline{HE}^2} \\ &= \sqrt{(\sqrt{3})^2 - \left(\frac{7\sqrt{3}}{9}\right)^2} \\ &= \frac{4\sqrt{6}}{9} \end{aligned}$$

삼각형 PHQ에서

$$\begin{aligned} \overline{QH} &= \sqrt{\overline{PQ}^2 - \overline{PH}^2} \\ &= \sqrt{\left(\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{7}}\right)^2 - \left(\frac{4\sqrt{6}}{9}\right)^2} \\ &= \frac{10\sqrt{21}}{63} \end{aligned}$$

$\overline{PH} \perp$ (평면 AMN),

$\overline{PQ} \perp \overline{AM}$

이므로 삼수선의 정리에 의해

$\overline{HQ} \perp \overline{AM}$

평면 AMN과 평면 PAM의 이면각의 크

기를 θ ($0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$)라 하면

$$\cos \theta = \frac{\overline{QH}}{\overline{PQ}}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{\frac{10\sqrt{21}}{63}}{\frac{2\sqrt{21}}{7}} \\ &= \frac{5}{9} \end{aligned}$$

삼각형 AMN의 평면 PAM 위로의 정사영의 넓이는

$$3\sqrt{3} \times \frac{5}{9} = \frac{5}{3}\sqrt{3}$$

따라서 $p=3$, $q=5$ 이므로

$$p+q=3+5=8$$

정답 8

28. 출제의도 : 같은 것이 있는 순열의 수를 이용하여 조건을 만족시키는 자연수의 개수를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

조건 (가)에서 각각의 홀수가 선택하지 않거나 한 번만 선택되어야 하고 조건 (나)에서 각각의 짝수는 선택되지 않거나 두 번만 선택되어야 하므로 홀수는 1개, 3개 선택되어야 한다.

(i) 홀수 3개 중 1개가 선택되는 경우
홀수 3개 중 1개를 선택하고 짝수 3개 중 2개가 각각 2번씩 선택되어야 하므로 경우의 수는

$${}_3C_1 \times {}_3C_2 = 3 \times 3 = 9(\text{가지})$$

이 각각에 대하여 이 수를 나열하는 경우의 수는

$$\frac{5!}{2!2!1!} = 30$$

그러므로 경우의 수는

$$9 \times 30 = 270(\text{가지})$$

(ii) 홀수 3개 중 3개가 선택되는 경우
짝수 3개 중 1개가 2번 선택되어야 하므로 경우의 수는

$${}_3C_3 \times {}_3C_1 = 3(\text{가지})$$

이 각각에 대하여 이 수를 나열하는 경우의 수는

$$\frac{5!}{2!1!1!1!} = 60(\text{가지})$$

그러므로 경우의 수는

$$3 \times 60 = 180(\text{가지})$$

따라서, (i), (ii)에서 구하는 경우의 수는

$$270 + 180 = 450(\text{가지})$$

정답 450

29. 출제의도 : 좌표공간에서 직선의 방정식을 이용하여 사면체의 부피를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

직선 AB의 방정식은

$$\frac{x-3}{5} = \frac{y+3}{-10} = \frac{z-3}{5}$$

정리하면 $x-3 = \frac{y+3}{-2} = z-3$ 이므로

직선 AB의 방향벡터를 \vec{u} 라 하면

$$\vec{u} = (1, -2, 1)$$

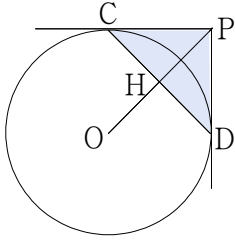
원점 O에서 직선 AB에 내린 수선의 발을 P라 하고, 실수 t 에 대하여

$$P(t+3, -2t-3, t+3)$$

으로 놓으면

$$\vec{u} \cdot \overrightarrow{OP} = 0 \text{에서 } t = -2 \text{이므로}$$

$P(1, 1, 1)$ 이다.



네 점 O, C, D, P를 지나는 평면으로 자른 단면에서 $\overline{OP} = \sqrt{3}$, $\overline{OC} = 1$ 이므로 $\overline{PC} = \sqrt{2}$

$$\overline{CH} = \overline{DH} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}, \quad \overline{PH} = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

즉 삼각형 CDP의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \times \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

따라서 사면체 ABCD의 부피는 두 사면체 A-PCD, B-PCD의 부피의 합과 같으므로 $\overline{AB} = 5\sqrt{6}$ 에서

$$\frac{1}{3} \times \frac{2\sqrt{2}}{3} \times 5\sqrt{6} = \frac{20}{9} \sqrt{3}$$

$$\text{즉 } p+q = 9+20 = 29$$

정답 29

30. 출제의도 : 두 곡선이 한 점에서 만나도록 하는 관계식을 구한 후, 음함수의 미분법을 활용하여 미분계수를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

곡선 $y = t^3 \ln(x-t)$ 와 곡선 $y = 2e^{x-a}$ 이 만나는 점의 x 좌표를 $\alpha (\alpha > t)$ 라 하면

$$t^3 \ln(\alpha - t) = 2e^{\alpha - a} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

곡선 $y = t^3 \ln(x-t)$ 와 곡선 $y = 2e^{x-a}$ 이 한 점에서 만나려면 두 곡선이 만나는 점에서의 미분계수가 같아야 한다.

곡선 $y = t^3 \ln(x-t)$ 에서

$$y' = t^3 \times \frac{1}{x-t}$$

곡선 $y = 2e^{x-a}$ 에서

$$y' = 2e^{x-a}$$

이때,

$$t^3 \times \frac{1}{\alpha - t} = 2e^{\alpha - a} \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

①의 양변을 t 에 대하여 미분하면

$$3t^2 \ln(\alpha - t) + t^3 \times \left(-\frac{1}{\alpha - t}\right) = 2e^{\alpha - a} \times (-1) \times \frac{da}{dt}$$

$$t^3 \ln(\alpha - t) \times \frac{3}{t} - \frac{t^3}{\alpha - t} = 2e^{\alpha - a} \times (-1) \times \frac{da}{dt}$$

①, ②에 의해

$$2e^{\alpha - a} \times \frac{3}{t} - 2e^{\alpha - a} = 2e^{\alpha - a} \times (-1) \times \frac{da}{dt}$$

$$\frac{3}{t} - 1 = (-1) \times \frac{da}{dt}$$

$$\frac{da}{dt} = -\frac{3}{t} + 1$$

$$t = \frac{1}{3} \text{ 일 때 } \frac{da}{dt} = -8 \text{ 이므로}$$

$$f'\left(\frac{1}{3}\right) = -8$$

따라서

$$\left\{f'\left(\frac{1}{3}\right)\right\}^2 = (-8)^2 = 64$$

정답 64