

线性代数课程教学中怎样体现数学建模思想¹

张小向

东南大学数学系, 南京 (211189)

E-mail: z990303@seu.edu.cn

摘要: 通过两个具体的例子, 讨论在学时紧张的情况下, 教师怎样根据学生的接受能力, 有针对性地选取一些实际应用的案例, 把线性代数中抽象的数学理论和数学建模的思想结合起来, 增强教学效果, 实现科学性、实用性、趣味性的有机统一。

关键词: 线性代数课程; 案例; 数学建模思想

中图分类号: G42

1. 引言

近几年来, 从多次教学研讨会议上交流的情况来看, 很多高等院校的线性代数课程学时偏紧, 而且学生对于线性代数中的抽象的概念和理论学起来觉得难度很大。显然我们不能回避这些抽象的概念和理论。另一方面, 对于非数学专业的学生来说, 学习数学的主要目的在于实际应用, 而不是研究数学本身。离开实际应用, 单纯地向学生传授抽象的概念、培养其严谨的逻辑思维、训练其高超的运算技巧是不合适的。事实上, 很多院校已经专门开设了数学建模和数学实验课。国内、国际数学建模竞赛也日益升温。把数学建模的思想融入公共数学课程已经是大势所趋。

于是, 教师就面临这样一个矛盾的局面: 学时偏紧, 抽象的概念和理论不能回避, 实际应用的案例必须介绍。如何恰到好处地结合一些案例让学生明白抽象概念的实际意义, 掌握有关数学理论和方法, 培养其分析问题, 建立数学模型, 进而解决问题的能力是教师必须思考的问题。

2. 几点考虑

2.1 应该采用简单的例子。 我们曾经设想结合学生所在专业, 引入一些与后继课程内容有关的案例, 这样可能更容易引起学生的兴趣, 而且实用性更强。为此我们向一些高年级的同学以及研究生发放了一些调查问卷, 了解线性代数课程中的基础知识在各专业后继课程中应用的实例。但在和高年级学生的座谈会上, 我们得到他们的意见和建议是: 后继课程中的实例涉及到一些专业知识, 一年级的学生暂时还没有学, 因而这些例子虽然很有针对性和实用性, 但由于时间限制, 不适合线性代数课程的课堂教学中采用, 只能留给学生课后进一步研究。教师在线性代数的课堂教学中还是应该采用简单的例子。

2.2 体现数学建模的思想。 我们知道, 完整的数学建模的过程包括模型准备, 模型假设, 模型建立, 模型求解, 模型分析, 模型检验, 以及模型应用。但线性代数课程毕竟不是专门的数学建模课, 因此我们在介绍一些应用案例的时候不求面面俱到, 重点放在模型假设, 模型建立和模型求解上, 侧重点在于体现数学建模的思想, 加深学生对抽象概念及相关理论的理解, 从而增强教学效果, 实现科学性、实用性、趣味性的有机统一。

2.3 充分利用课外的数学实验。 我们在线性代数课程中加入 Matlab 数学实验的做法已经有 4 年了。刚开始的时候主要是利用 4 个学时的时间在课堂上结合矩阵, 线性方程组, 平面, 直线等内容介绍 Matlab 软件的基础知识。另外, 安排 4 个学时的课外上机练习(如利用 Matlab 求解线性方程组以及绘制三维图形), 要求学生提交一份实验报告。现在, 我们在原有做法的基础上, 把一些经典的利用线性代数建模的案例汇编起来, 放在课程网站上供学生课外自学, 并要求学生根据个人兴趣选择其中两个案例作为课外数学实验的题目, 利用 Matlab 完成实验报告。

¹本课题得到 2006-2010 届教育部高等学校数学与统计学教学指导委员会数学基础课程教学改革项目(项目名称: 数学建模思想融入线性代数课程教学的研究与实践)的资助。

3. 两个例子

限于篇幅, 我们不打算介绍太多的例子.

例 1. 矩阵的乘积.

模型准备: 某产家发出一批产品. 涉及甲, 乙, 丙三个代理商和 I, II, III, IV 四款产品. 四款产品的单价分别为:

产品 I: 20 元/箱; 产品 II: 50 元/箱;
产品 III: 30 元/箱; 产品 IV: 25 元/箱

四款产品的单箱重量分别为:

产品 I: 16 千克/箱; 产品 II: 20 千克/箱;
产品 III: 16 千克/箱; 产品 IV: 12 千克/箱

发往甲代理商的产品及数量为:

产品 I: 20 箱, 产品 II: 5 箱, 产品 IV: 8 箱

发往乙代理商的产品及数量为:

产品 II: 12 箱, 产品 III: 16 箱, 产品 IV: 10 箱

发往丙代理商的产品及数量为:

产品 I: 10 箱, 产品 II: 30 箱

要计算发往各代理商的产品总价和总重量.

模型假设: 假设严格按照单价和数量计算总价, 没有任何促销优惠措施, 而且即使三家代理商的级别不同, 同款产品也执行同样的单价.

模型建立: 根据已知数据, 可以将每箱产品的价格和重量列为表 1:

表 1 每箱产品的价格和重量

产品 I		II	III	IV
单价(元/箱) 20		50	30	25
重量(千克/箱) 16		20	16	12

尽管发往各代理商的产品类别不尽相同, 但补上一些“0”之后, 仍然可以将发往各代理商的各款产品的数量列为表 2:

表 2 发往各代理商的各款产品的数量

产品	数量(箱)		
	甲	乙	丙
I 20		0	10
II 5		12	30
III 0		16	0
IV 8		10	0

要计算的发往各代理商的产品总价和总重量列为表 3:

表 3 发往各代理商的产品总价和总重量

产品	甲	乙	丙
总价(元)	c_{11}	c_{12}	c_{13}
总重(千克)	c_{21}	c_{22}	c_{23}

模型求解: 根据上述三个表, 可以得到三个矩阵

$$A = \begin{pmatrix} 20 & 50 & 30 & 25 \\ 16 & 20 & 16 & 12 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 20 & 0 & 10 \\ 5 & 12 & 30 \\ 0 & 16 & 0 \\ 8 & 10 & 0 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \end{pmatrix},$$

其中 c_{11} 可以用 A 的第一行的 4 个元素与 B 的第一列的 4 个元素对应相乘并把所得的积相加得到, 即

$$c_{11} = 20 \times 20 + 50 \times 5 + 30 \times 0 + 25 \times 8 = 850,$$

类似地,

$$\begin{aligned}c_{12} &= 20 \times 0 + 50 \times 12 + 30 \times 16 + 25 \times 10 = 1330, \\c_{13} &= 20 \times 10 + 50 \times 30 + 30 \times 0 + 25 \times 0 = 1700, \\c_{21} &= 16 \times 20 + 20 \times 5 + 16 \times 0 + 12 \times 8 = 516, \\c_{22} &= 16 \times 0 + 20 \times 12 + 16 \times 16 + 12 \times 10 = 616, \\c_{23} &= 16 \times 10 + 20 \times 30 + 16 \times 0 + 12 \times 0 = 760.\end{aligned}$$

于是得到 $C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \end{pmatrix}$.

模型分析: 上述算法可以推广到更一般的情形, 而且可以从中抽象出两个矩阵的乘积的概念, 即一个 $m \times s$ 矩阵 $A = (a_{ij})_{m \times s}$ 与一个 $s \times n$ 矩阵 $B = (b_{ij})_{s \times n}$ 的乘积是一个 $m \times n$ 矩阵, 记为 AB , 它的第 i 行, 第 j 列处的元素是用 A 的第 i 行的元素与 B 的第 j 列的元素对应相乘并把所得的积相加得到的, 即

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1s} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2s} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{ms} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{s1} & b_{s2} & \cdots & b_{sn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^s a_{1k} b_{k1} & \sum_{k=1}^s a_{1k} b_{k2} & \cdots & \sum_{k=1}^s a_{1k} b_{kn} \\ \sum_{k=1}^s a_{2k} b_{k1} & \sum_{k=1}^s a_{2k} b_{k2} & \cdots & \sum_{k=1}^s a_{2k} b_{kn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \sum_{k=1}^s a_{mk} b_{k1} & \sum_{k=1}^s a_{mk} b_{k2} & \cdots & \sum_{k=1}^s a_{mk} b_{kn} \end{pmatrix}.$$

例 2. 线性方程组.

模型准备: 一种佐料由四种原料 A、B、C、D 混合而成. 这种佐料现有两种规格, 这两种规格的佐料中, 四种原料的比例分别为 2:3:1:1 和 1:2:1:2. 现在需要四种原料的比例为 4:7:3:5 的第三种规格的佐料. 问: 第三种规格的佐料能否由前两种规格的佐料按一定比例配制而成?

模型假设: 假设四种原料的比例是按重量计算的, 前两种规格的佐料分装成袋, 比如说第一种规格的佐料每袋净重 7 克(其中 A、B、C、D 四种原料分别为 2 克, 3 克, 1 克, 1 克), 第二种规格的佐料每袋净重 6 克(其中 A、B、C、D 四种原料分别为 1 克, 2 克, 1 克, 2 克).

模型建立: 根据已知数据和上述假设, 可以进一步假设将 x 袋第一种规格的佐料与 y 袋第二种规格的佐料混合在一起, 得到的混合物中 A、B、C、D 四种原料分别为 4 克, 7 克, 3 克, 5 克, 则有以下线性方程组

$$\begin{cases} 2x + y = 4, \\ 3x + 2y = 7, \\ x + y = 3, \\ x + 2y = 5. \end{cases}$$

模型求解: 上述线性方程组的增广矩阵

$$(A, b) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 7 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{初等行变换}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

可见 $\begin{cases} x=1, \\ y=2. \end{cases}$ 又因为第一种规格的佐料每袋净重 7 克, 第二种规格的佐料每袋净重 6 克, 所以第三种规格的佐料能由前两种规格的佐料按 7:12 的比例配制而成.

模型分析: 若四种原料的比例是按体积计算的, 则还要考虑混合前后体积的关系(未必是简单的叠加), 因而最好还是先根据具体情况将体积比转换为重量比, 然后再按上述方法处理.

类似的例子还有很多. 国内外的不少教材上都有丰富的应用题(见参考文献). 应该指出的是, 有些例子在用于课堂教学之前还需要教师在备课时进行一些预处理. 也就是说, 教师

因该先做好模型准备,使其中的参数的值以及数量都适合课堂教学.

参考文献

- [1] Peter D. Lax, 线性代数及其应用 [M], 沈复兴等译, 北京: 人民邮电出版社, 2007.
- [2] David C. Lay, 线性代数及其应用 [M], 傅莺莺等译, 北京: 人民邮电出版社, 2009.
- [3] 陈怀琛, 高淑萍, 杨威, 工程线性代数 [M], 北京: 电子工业出版社, 2007.
- [4] 陈建龙, 周建华, 韩瑞珠, 周后型, 线性代数 [M], 北京: 科学出版社, 2007.
- [5] 俞南雁, 韩瑞珠, 周建华, 线性代数与空间解析几何 [M], 北京: 科学出版社, 1999.
- [6] 周建华, 陈建龙, 张小向, 几何与代数 [M], 北京: 科学出版社, 2009.

How to Incarnate the Idea of Mathematical Modeling in Teaching of Linear Algebra Courses

Zhang Xiaoxiang

Department of Mathematics, Southeast University, Nanjing (211189)

Abstract

This paper discusses how to incarnate the idea of mathematical modeling in teaching of linear algebra courses in the situation that class periods are limited. Two examples are given to show which cases should be chosen according to the students' receptivity and how to combine the abstract theory in linear algebra and the idea of mathematical modeling so that the teaching effect will be strengthened with respect to the scientificity, practicability and interest.

Keywords: *Linear Algebra Course ; Case; Idea of Mathematical Modeling*

作者简介: 张小向, 男, 1977 年生, 理学博士, 副教授, 主要从事大学数学教育和代数学方向的学术研究。