O mapa de Mercator

MA752 - História da matemática

Tiago J. Fonseca

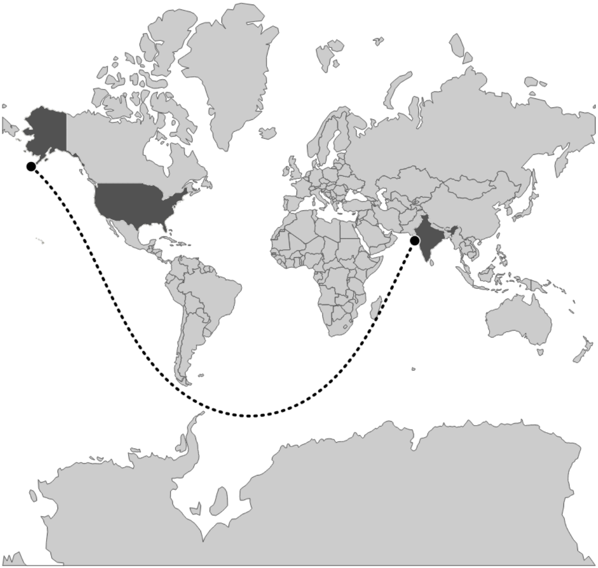
IMECC - Unicamp

19/11/2025

Navegar dos EUA à Índia em linha reta?

Navegar dos EUA à Índia em linha reta?

Navegar dos EUA à Índia em linha reta?

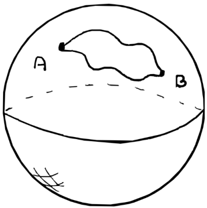


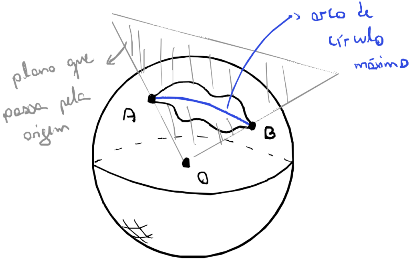
Navegar dos EUA à Índia em linha reta?

Visualização no globo: https://imgur.com/a/GpySS5O

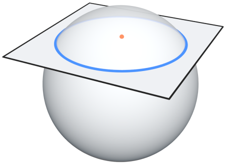
O que é uma “linha reta” sobre uma esfera?

Caminho que minimiza a distância (geodésica).





Círculo máximo: círculo na esfera com maior raio possível.



O que é uma “linha reta” sobre uma esfera?

Exemplos de círculos máximos na superfície terrestre:

1. **meridianos** (linhas de longitude fixa)
2. linha do equador (latitude zero)

Os outros **paralelos** (linhas de latitude fixa) *não* são círculos máximos.

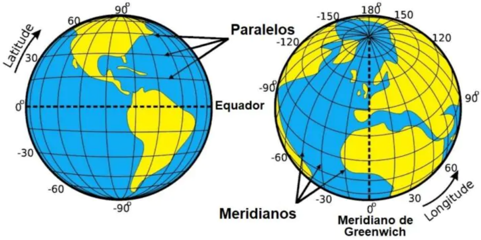
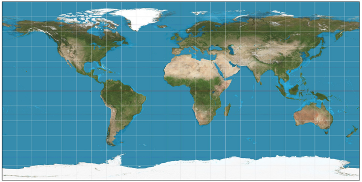


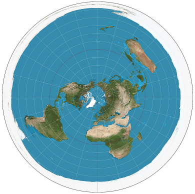
Figura: Coordenadas geográficas

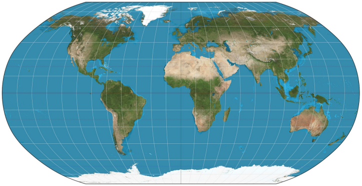
Uma constatação

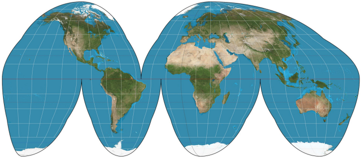
- O mapa-múndi acima, dito **projeção de Mercator**, não faz corresponder linhas retas na esfera em linhas retas no plano (exceto os meridianos e paralelos).
- Os tamanhos relativos entre os países estão completamente deformados. Ver: https://thetruesize.com/
- Então, por que utilizamos este mapa?

Outras projeções





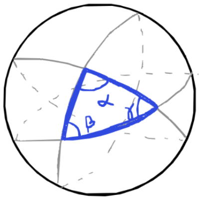




Mais em https://map-projections.net/singleview.php

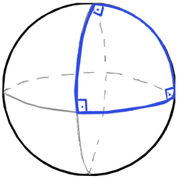
Não existe um mapa que preserva distâncias

- *É impossível fazer um mapa da Terra que preserva distâncias (a menos de uma escala fixa).*
- Pior: isso não é possível nem para um pedacinho da Terra, por menor que seja.
- A **geometria da esfera** é diferente da **geometria do plano**.
- Como tornar isso preciso? **Triângulos!**



Não existe um mapa que preserva distâncias

Exemplo de um triângulo com três ângulos retos:



- A soma dos ângulos internos $\alpha + \beta + \gamma$ de um triângulo esférico é sempre *maior* que 180°!
- Se houvesse um mapa-múndi que preserva distâncias a menos de escala fixa, triângulos esféricos na Terra deveriam corresponder a triângulos planos no mapa com os *mesmos ângulos internos*.
- Absurdo, pois a soma dos ângulos internos de um triângulo plano é *igual* a 180°.

Não existe um mapa que preserva distâncias

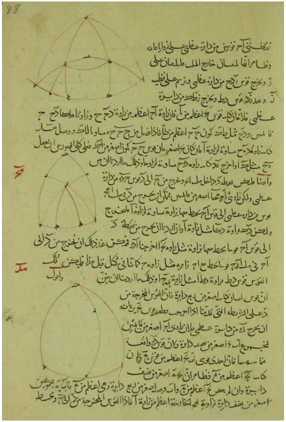
As propriedades de triângulos esféricos já eram conhecidas pelos gregos antigos (Theodosius, **Menelaus**).

MENELAUS' *SPHERICS* IN GREEK AND ARABIC MATHEMATICS AND BEYOND

ATHANASE PAPADOPOULOS

Abstract. We present the history of Menelaus' *Spherics* (2nd c. AD), explaining its importance and quoting in detail some of the significant propositions. We include this work in the general context of Greek and Arabic mathematics, highlighting the far-reaching connections with modern mathematical ideas.

This paper will appear as a chapter in the Handbook of the History and Philosophy of Mathematical Practice (ed. Bharath Sriraman), , Springer, to appear in 2024.



Voltando ao mapa de Mercator...

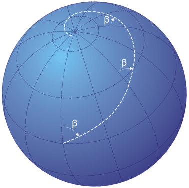
O mapa de Mercator

Gerardus Mercator (1512–1594), geógrafo e cartógrafo flamengo.

Problema: como produzir um mapa-múndi útil para navegação?

O mapa de Mercator

Loxodromia: caminho no globo terrestre que faz um ângulo constante com todos os meridianos, isto é, a bússola aponta para a mesma direção durante todo o caminho.



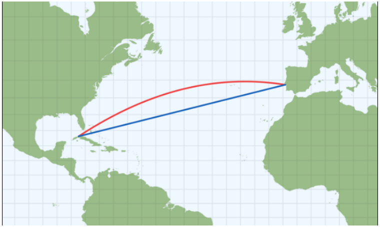
Geodésica versus loxodromia:

O mapa de Mercator

Mercator construiu um mapa com as seguintes propriedades:

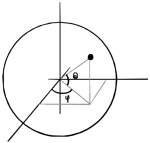
- Os meridianos correspondem a linhas retas verticais.
- Os paralelos correspondem a linhas retas horizontais.
- Todas as **linhas de loxodromia correspondem a linhas retas**.

Mais precisamente, Mercator criou um mapa **conforme**: todos os *ângulos* são preservados.



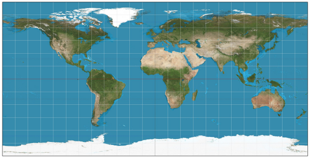
O mapa de Mercator

Partindo do mapa dado pelas coordenadas geográficas (φ, θ):

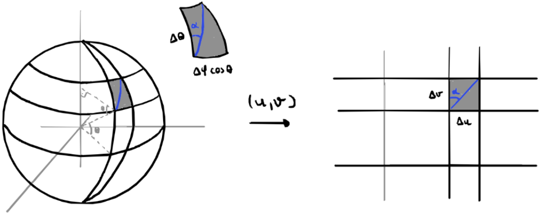


θ = latitude

φ = longitude



Mercator obteve um novo mapa $(u, v) = (\varphi, \int \sec(\theta) d\theta)$:



$$\frac{\Delta v}{\Delta u} \approx \frac{\Delta \theta}{\Delta \varphi \cos \theta}$$

$$\overset{\Delta u = \Delta \varphi}{\iff} \quad \frac{\Delta v}{\Delta \theta} \approx \sec(\theta)$$

A integral da secante

- Pode-se mostrar usando Cálculo 1 (exercício do Spivak):

$$\int \sec(\theta) d\theta = \ln \left| \tan\left(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4}\right) \right| + C.$$

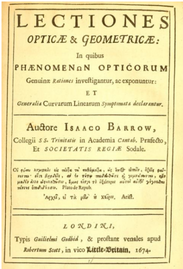
- Mas o cálculo só foi inventado/descoberto quase um século depois! Mapa de Mercator: 1569. Cálculo de Newton: 1666.
- Acredita-se que Mercator tenha utilizado um método de aproximação, semelhante ao que hoje chamamos de integração numérica.

> In making this representation of the world we had…to spread on a plane the surface of the sphere in such a way that the positions of places shall correspond on all sides with each other both in so far as true direction and distance are concerned and as concerns correct longitudes and latitudes… . With this intention we have had to employ a new proportion and a new arrangement of the meridians with reference to the parallels. … It is for these reasons that we have progressively increased the degrees of latitude towards each pole in proportion to the lengthening of the parallels with reference to the equator.

- Primeira descrição matemática da projeção de Mercator: Edward Wright, *Certaine Errors in Navigation*, 1599.

A integral da secante

- O problema de encontrar uma fórmula exata para a projeção de Mercator está interligada com a história do desenvolvimento do cálculo.
- A fórmula anterior foi demonstrada (?) por James Gregory em *Exercitationes Geometricae* em 1668.
- Uma demonstração usando as ferramentas do cálculo foi dada por Isaac Barrow em *Lectiones Geometricae* em 1670.



LECTIONES
OPTICÆ & GEOMETRICÆ:
In quibus
PHÆNOMENΩN OPTICORUM
Genuinæ *Rationes* inveſtigantur, ac exponuntur:
ET
Generalia Curvarum Linearum *Symptomata declarantur.*

Auctore Isaaco Barrow,
Collegii *S S. Trinitatis* in Academia *Cantab.* Præfecto,
Et *SOCIETATIS REGIÆ* Sodale.

Plato de Repub.

Ariſt.

LONDINI,
Typis *Guilielmi Godbid*, & proſtant venales apud *Robertum Scott*, in vico Little-Britain. 1674.

E depois?

- Problemas de cartografia foram um dos grandes motivadores do desenvolvimento da **geometria diferencial**.
- Gauss mostrou em *Disquisitiones generales circa superficies curvas*, 1827, que qualquer superfície admite localmente mapas conformes ("coordenadas isotérmicas").
- O estudo de mapas conformes de superfícies contribuiu para o desenvolvimento da teoria de **funções holomorfas** e **superfícies de Riemann** (*Grundlagen für eine allgemeine Theorie der Funktionen einer veränderlichen complexen Größe*, 1851).
- O mapa de Mercator não é nada mais que o logaritmo complexo $\log(z)$. Exercício ;-).

Agumas referências

- A. Papadopoulos, **Menelaus' Spherics in Greek and Arabic mathematics and beyond**. In: *Handbook of the History and Philosophy of Mathematical Practice*, Springer Nature witzerland AG, 2024.
- V. F. Rickey, P. M. Tuchinsky, **An Application of Geography to Mathematics: History of the Integral of the Secant**. Mathematics Magazine, Vol. 53, No. 3 (May, 1980), pp. 162-166.
- É. Ghys, **Six leçoons autour des surfaces de Riemann**. Disponível em: https://perso.ens-lyon.fr/ghys/articles/Sixlecons.pdf.