Folheações com feixe tangente livre.

João Pedro dos Santos

Palestra na Unicamp, Campinas

15 Abril 2024

Definição

$X/\mathbb{C}$ lisa.

Definição

$X/\mathbb{C}$ lisa.

(1) Distribuição lisa $\mathcal{V}$

Definição

$X/\mathbb{C}$ lisa.

(1) Distribuição lisa $\mathcal{V} \Leftrightarrow T_{\mathcal{V}}$ *sub-fibrado* de T_X.

Definição

$X/\mathbb{C}$ lisa.

(1) Distribuição lisa $\mathcal{V} \Leftrightarrow T_{\mathcal{V}}$ *sub-fibrado* de T_X.

(2) Distribuição singular $\mathcal{V}$

Definição

$X/\mathbb{C}$ lisa.

(1) Distribuição lisa $\mathcal{V} \Leftrightarrow T_{\mathcal{V}}$ *sub-fibrado* de T_X.

(2) Distribuição singular $\mathcal{V} \Leftrightarrow$ sub-módulo $T_{\mathcal{V}} \subset T_X$ *saturado*.

Introdução: Distribuições e folheações

Definição

$X/\mathbb{C}$ lisa.

(1) Distribuição lisa $\mathcal{V} \Leftrightarrow T_{\mathcal{V}}$ *sub-fibrado* de T_X.

(2) Distribuição singular $\mathcal{V} \Leftrightarrow$ sub-módulo $T_{\mathcal{V}} \subset T_X$ *saturado*.

(3) Distribuição fechada por $[\cdot, \cdot]$

Definição

$X/\mathbb{C}$ lisa.

(1) Distribuição lisa $\mathcal{V} \Leftrightarrow T_{\mathcal{V}}$ *sub-fibrado* de T_X.

(2) Distribuição singular $\mathcal{V} \Leftrightarrow$ sub-módulo $T_{\mathcal{V}} \subset T_X$ *saturado*.

(3) Distribuição fechada por $[\cdot, \cdot] \rightsquigarrow$ folheação.

Definição

$X/\mathbb{C}$ lisa.

(1) Distribuição lisa $\mathcal{V} \Leftrightarrow T_{\mathcal{V}}$ *sub-fibrado* de T_X.
(2) Distribuição singular $\mathcal{V} \Leftrightarrow$ sub-módulo $T_{\mathcal{V}} \subset T_X$ *saturado*.
(3) Distribuição fechada por $[\cdot,\cdot] \rightsquigarrow$ folheação.

Exemplo

G grupo algébrico e $\mathrm{Lie}\, G = \mathfrak{g}$.

Introdução: Distribuições e folheações

Definição

$X/\mathbb{C}$ lisa.

(1) Distribuição lisa $\mathcal{V} \Leftrightarrow T_{\mathcal{V}}$ *sub-fibrado* de T_X.

(2) Distribuição singular $\mathcal{V} \Leftrightarrow$ sub-módulo $T_{\mathcal{V}} \subset T_X$ *saturado*.

(3) Distribuição fechada por $[\cdot, \cdot] \rightsquigarrow$ folheação.

Exemplo

G grupo algébrico e $\mathrm{Lie}\, G = \mathfrak{g}$. $G \circlearrowleft X$.

Introdução: Distribuições e folheações

Definição

$X/\mathbb{C}$ lisa.

(1) Distribuição lisa $\mathcal{V} \Leftrightarrow T_{\mathcal{V}}$ *sub-fibrado* de T_X.
(2) Distribuição singular $\mathcal{V} \Leftrightarrow$ sub-módulo $T_{\mathcal{V}} \subset T_X$ *saturado*.
(3) Distribuição fechada por $[\cdot, \cdot] \rightsquigarrow$ folheação.

Exemplo

G grupo algébrico e $\mathrm{Lie}\, G = \mathfrak{g}$. $G \circlearrowleft X$. Dado $v \in \mathfrak{g} \rightsquigarrow$

Introdução: Distribuições e folheações

Definição

$X/\mathbb{C}$ lisa.

(1) Distribuição lisa $\mathcal{V} \Leftrightarrow T_{\mathcal{V}}$ *sub-fibrado* de T_X.

(2) Distribuição singular $\mathcal{V} \Leftrightarrow$ sub-módulo $T_{\mathcal{V}} \subset T_X$ *saturado*.

(3) Distribuição fechada por $[\cdot,\cdot] \rightsquigarrow$ folheação.

Exemplo

G grupo algébrico e $\mathrm{Lie}\, G = \mathfrak{g}$. $G \circlearrowleft X$. Dado $v \in \mathfrak{g} \rightsquigarrow$

$$v^{\natural}(x) = \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} \exp(tv) \cdot x$$

Introdução: Distribuições e folheações

Definição

$X/\mathbb{C}$ lisa.

(1) Distribuição lisa $\mathcal{V} \Leftrightarrow T_{\mathcal{V}}$ *sub-fibrado* de T_X.

(2) Distribuição singular $\mathcal{V} \Leftrightarrow$ sub-módulo $T_{\mathcal{V}} \subset T_X$ *saturado*.

(3) Distribuição fechada por $[\cdot,\cdot] \rightsquigarrow$ folheação.

Exemplo

G grupo algébrico e $\mathrm{Lie}\, G = \mathfrak{g}$. $G \circlearrowleft X$. Dado $v \in \mathfrak{g} \rightsquigarrow$

$$v^{\natural}(x) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \exp(tv) \cdot x$$

$=$ campo "fundamental" $=$ "gerador infinitesimal".

Introdução: Distribuições e folheações

Definição

$X/\mathbb{C}$ lisa.

(1) Distribuição lisa $\mathcal{V} \Leftrightarrow T_{\mathcal{V}}$ *sub-fibrado* de T_X.

(2) Distribuição singular $\mathcal{V} \Leftrightarrow$ sub-módulo $T_{\mathcal{V}} \subset T_X$ *saturado*.

(3) Distribuição fechada por $[\cdot,\cdot] \rightsquigarrow$ folheação.

Exemplo

G grupo algébrico e $\mathrm{Lie}\, G = \mathfrak{g}$. $G \circlearrowleft X$. Dado $v \in \mathfrak{g} \rightsquigarrow$

$$v^{\natural}(x) = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \exp(tv) \cdot x$$

$=$ campo "fundamental" $=$ "gerador infinitesimal". $\rightsquigarrow$
$\mathfrak{g} \to \Gamma(X, T_X)$.

Introdução: Distribuições e folheações

Definição

$X/\mathbb{C}$ lisa.

(1) Distribuição lisa $\mathcal{V} \Leftrightarrow T_{\mathcal{V}}$ *sub-fibrado* de T_X.
(2) Distribuição singular $\mathcal{V} \Leftrightarrow$ sub-módulo $T_{\mathcal{V}} \subset T_X$ *saturado*.
(3) Distribuição fechada por $[\cdot, \cdot] \rightsquigarrow$ folheação.

Exemplo

G grupo algébrico e $\mathrm{Lie}\, G = \mathfrak{g}$. $G \circlearrowleft X$. Dado $v \in \mathfrak{g} \rightsquigarrow$

$$v^{\natural}(x) = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \exp(tv) \cdot x$$

$=$ campo "fundamental" $=$ "gerador infinitesimal". $\rightsquigarrow$
$\mathfrak{g} \to \Gamma(X, T_X)$. Dada $\mathfrak{h} < \mathfrak{g} \rightsquigarrow \mathfrak{h} \otimes \mathcal{O}_X \to T_X$.

Definição

$X/\mathbb{C}$ lisa.

(1) Distribuição lisa $\mathcal{V} \Leftrightarrow T_{\mathcal{V}}$ *sub-fibrado* de T_X.

(2) Distribuição singular $\mathcal{V} \Leftrightarrow$ sub-módulo $T_{\mathcal{V}} \subset T_X$ *saturado*.

(3) Distribuição fechada por $[\cdot, \cdot] \rightsquigarrow$ folheação.

Exemplo

G grupo algébrico e $\mathrm{Lie}\, G = \mathfrak{g}$. $G \circlearrowleft X$. Dado $v \in \mathfrak{g} \rightsquigarrow$

$$v^{\natural}(x) = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \exp(tv) \cdot x$$

$=$ campo "fundamental" $=$ "gerador infinitesimal". $\rightsquigarrow$ $\mathfrak{g} \to \Gamma(X, T_X)$. Dada $\mathfrak{h} < \mathfrak{g} \rightsquigarrow \mathfrak{h} \otimes \mathcal{O}_X \to T_X$. $\rightsquigarrow$ Folheação de "ação" $\mathcal{A}(\mathfrak{h})$: $\boxed{T_{\mathcal{A}(\mathfrak{h})} = \mathfrak{h} \otimes \mathcal{O}_X}$.

Folheações por ação

Folheações por ação

Pergunta

"Quantas" folheações são por ação?

Folheações por ação

Pergunta

"Quantas" folheações são por ação? Qual "tamanho" destas no espaço de todas as folheações?

Folheações por ação

Pergunta

“Quantas” folheações são por ação? Qual “tamanho” destas no espaço de todas as folheações?

Exemplo

$\mathrm{GL}_n \circlearrowleft \mathbb{P}^{n-1}$.

Folheações por ação

Pergunta

"Quantas" folheações são por ação? Qual "tamanho" destas no espaço de todas as folheações?

Exemplo

$\mathrm{GL}_n \circlearrowleft \mathbb{P}^{n-1}$. Seja $E_{ij} \in \mathfrak{gl}_n$

Folheações por ação

Pergunta

"Quantas" folheações são por ação? Qual "tamanho" destas no espaço de todas as folheações?

Exemplo

$\mathrm{GL}_n \circlearrowleft \mathbb{P}^{n-1}$. Seja $E_{ij} \in \mathfrak{gl}_n$ dada por

$$E_{ij}(\vec{e}_k) = \begin{cases} 0 & \text{se } j \neq k, \\ \vec{e}_i & \text{se } j = k. \end{cases}$$

Folheações por ação

Pergunta

"Quantas" folheações são por ação? Qual "tamanho" destas no espaço de todas as folheações?

Exemplo

$\mathrm{GL}_n \circlearrowleft \mathbb{P}^{n-1}$. Seja $E_{ij} \in \mathfrak{gl}_n$ dada por

$$E_{ij}(\vec{e}_k) = \begin{cases} 0 & \text{se } j \neq k, \\ \vec{e}_i & \text{se } j = k. \end{cases}$$

$$\rightsquigarrow E_{ij}^{\natural} = x_j \frac{\partial}{\partial x_i}$$

Folheações por ação

Pergunta

"Quantas" folheações são por ação? Qual "tamanho" destas no espaço de todas as folheações?

Exemplo

$\mathrm{GL}_n \circlearrowleft \mathbb{P}^{n-1}$. Seja $E_{ij} \in \mathfrak{gl}_n$ dada por

$$E_{ij}(\vec{e}_k) = \begin{cases} 0 & \text{se } j \neq k, \\ \vec{e}_i & \text{se } j = k. \end{cases}$$

$\rightsquigarrow E_{ij}^{\natural} = x_j \dfrac{\partial}{\partial x_i}$ age nos aberto principais $\{f \neq 0\}$ via

$$x_j \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{a}{f^m}\right) = \text{fórmula de sempre.}$$

Exemplo

Sejam

$$D = E_{11} - \frac{1}{n}\sum_i E_{ii} \quad \text{e} \quad N = E_{12}.$$

Exemplo

Sejam

$$D = E_{11} - \frac{1}{n}\sum_i E_{ii} \quad \text{e} \quad N = E_{12}.$$

$\Rightarrow$

$$D^\natural = x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} \quad \text{e} \quad N^\natural = x_2 \frac{\partial}{\partial x_1}.$$

Exemplo

Sejam

$$D = E_{11} - \frac{1}{n}\sum_i E_{ii} \quad \text{e} \quad N = E_{12}.$$

$\Rightarrow$

$$D^{\natural} = x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} \quad \text{e} \quad N^{\natural} = x_2 \frac{\partial}{\partial x_1}.$$

Seja $\mathfrak{h} = \mathbb{C}D \oplus \mathbb{C}N$ (subálgebra).

Exemplo

Sejam

$$D = E_{11} - \frac{1}{n}\sum_i E_{ii} \quad \text{e} \quad N = E_{12}.$$

$\Rightarrow$

$$D^\natural = x_1\frac{\partial}{\partial x_1} \quad \text{e} \quad N^\natural = x_2\frac{\partial}{\partial x_1}.$$

Seja $\mathfrak{h} = \mathbb{C}D \oplus \mathbb{C}N$ (subálgebra). Seja $\gamma : \mathfrak{h} \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}} \to T_{\mathbb{P}}$.

Exemplo

Sejam

$$D = E_{11} - \frac{1}{n}\sum_i E_{ii} \quad \text{e} \quad N = E_{12}.$$

$\Rightarrow$

$$D^\natural = x_1\frac{\partial}{\partial x_1} \quad \text{e} \quad N^\natural = x_2\frac{\partial}{\partial x_1}.$$

Seja $\mathfrak{h} = \mathbb{C}D \oplus \mathbb{C}N$ (subálgebra). Seja $\gamma : \mathfrak{h} \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}} \to T_{\mathbb{P}}$. A aplicação $\gamma(P) : \mathfrak{h} \to T_{\mathbb{P}}(P)$ *nunca* é injetiva

Exemplo

Sejam

$$D = E_{11} - \frac{1}{n}\sum_i E_{ii} \quad \text{e} \quad N = E_{12}.$$

$\Rightarrow$

$$D^\natural = x_1\frac{\partial}{\partial x_1} \quad \text{e} \quad N^\natural = x_2\frac{\partial}{\partial x_1}.$$

Seja $\mathfrak{h} = \mathbb{C}D \oplus \mathbb{C}N$ (subálgebra). Seja $\gamma : \mathfrak{h} \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}} \to T_{\mathbb{P}}$. A aplicação $\gamma(P) : \mathfrak{h} \to T_{\mathbb{P}}(P)$ *nunca* é injetiva já que

$$\bigcup_{(s:t)\in\mathbb{P}^1} \mathrm{Sing}(sD^\natural + tN^\natural) = \mathbb{P}.$$

Generalidades sobre famílias

Generalidades sobre famílias

$X \xrightarrow{f} S$ liso. S qualquer.

Generalidades sobre famílias

$X \xrightarrow{f} S$ liso. S qualquer.

Definição

(1) Distribuição $\mathcal{V}$ em X/S:

$X \xrightarrow{f} S$ liso. S qualquer.

Definição

(1) Distribuição $\mathcal{V}$ em X/S: $\mathcal{O}_X$–submódulo $T_{\mathcal{V}} \subset T_f$ t.q.

$X \xrightarrow{f} S$ liso. S qualquer.

Definição

(1) Distribuição $\mathcal{V}$ em X/S: $\mathcal{O}_X$–submódulo $T_{\mathcal{V}} \subset T_f$ t.q.

$$Q_{\mathcal{V}} = T_f / T_{\mathcal{V}}$$

é *sem torção*.

Generalidades sobre famílias

$X \xrightarrow{f} S$ liso. S qualquer.

Definição

(1) Distribuição $\mathcal{V}$ em X/S: $\mathcal{O}_X$–submódulo $T_{\mathcal{V}} \subset T_f$ t.q.

$$Q_{\mathcal{V}} = T_f / T_{\mathcal{V}}$$

é *sem torção*.

(2) $\operatorname{Sing} \mathcal{V} = \operatorname{Sing}(Q_{\mathcal{V}}) = \{x \in X \ : \ Q_{\mathcal{V},x} \text{ não é livre}\}$.

Generalidades sobre famílias

$X \xrightarrow{f} S$ liso. S qualquer.

Definição

(1) Distribuição $\mathcal{V}$ em X/S: $\mathcal{O}_X$–submódulo $T_{\mathcal{V}} \subset T_f$ t.q.

$$Q_{\mathcal{V}} = T_f / T_{\mathcal{V}}$$

é *sem torção*.

(2) $\operatorname{Sing} \mathcal{V} = \operatorname{Sing}(Q_{\mathcal{V}}) = \{x \in X \ : \ Q_{\mathcal{V},x}$ não é livre$\}$.
$= \{x \in X \ : \ T_{\mathcal{V}}(x) \to T_f(x)$ não injetivo$\}$.

$X \xrightarrow{f} S$ liso. S qualquer.

Definição

(1) Distribuição $\mathcal{V}$ em X/S: $\mathcal{O}_X$–submódulo $T_{\mathcal{V}} \subset T_f$ t.q.

$$Q_{\mathcal{V}} = T_f / T_{\mathcal{V}}$$

é *sem torção*.

(2) $\mathrm{Sing}\,\mathcal{V} = \mathrm{Sing}(Q_{\mathcal{V}}) = \{x \in X \;:\; Q_{\mathcal{V},x} \text{ não é livre}\}.$
$= \{x \in X \;:\; T_{\mathcal{V}}(x) \to T_f(x) \text{ não injetivo}\}.$

Observação

(1) X integral $\rightsquigarrow$

Generalidades sobre famílias

$X \xrightarrow{f} S$ liso. S qualquer.

Definição

(1) Distribuição $\mathcal{V}$ em X/S: $\mathcal{O}_X$–submódulo $T_{\mathcal{V}} \subset T_f$ t.q.

$$Q_{\mathcal{V}} = T_f / T_{\mathcal{V}}$$

é *sem torção*.

(2) $\mathrm{Sing}\,\mathcal{V} = \mathrm{Sing}(Q_{\mathcal{V}}) = \{x \in X \;:\; Q_{\mathcal{V},x} \text{ não é livre}\}$.
$= \{x \in X \;:\; T_{\mathcal{V}}(x) \to T_f(x) \text{ não injetivo}\}$.

Observação

(1) X integral $\rightsquigarrow$ "sem-torção" conceito básico.

Generalidades sobre famílias

$X \xrightarrow{f} S$ liso. S qualquer.

Definição

(1) Distribuição $\mathcal{V}$ em X/S: $\mathcal{O}_X$–submódulo $T_{\mathcal{V}} \subset T_f$ t.q.

$$Q_{\mathcal{V}} = T_f / T_{\mathcal{V}}$$

é *sem torção*.

(2) $\mathrm{Sing}\,\mathcal{V} = \mathrm{Sing}(Q_{\mathcal{V}}) = \{x \in X \ : \ Q_{\mathcal{V},x}$ não é livre$\}$.
$= \{x \in X \ : \ T_{\mathcal{V}}(x) \to T_f(x)$ não injetivo$\}$.

Observação

(1) X integral $\rightsquigarrow$ "sem-torção" conceito básico.

(2) Em geral: $\mathcal{M}$ *fortemente sem torção* (Torsion*less*)

$X \xrightarrow{f} S$ liso. S qualquer.

Definição

(1) Distribuição $\mathcal{V}$ em X/S: $\mathcal{O}_X$–submódulo $T_{\mathcal{V}} \subset T_f$ t.q.

$$Q_{\mathcal{V}} = T_f / T_{\mathcal{V}}$$

é *sem torção*.

(2) $\operatorname{Sing} \mathcal{V} = \operatorname{Sing}(Q_{\mathcal{V}}) = \{x \in X \ : \ Q_{\mathcal{V},x}$ não é livre$\}$.
$= \{x \in X \ : \ T_{\mathcal{V}}(x) \to T_f(x)$ não injetivo$\}$.

Observação

(1) X integral $\rightsquigarrow$ "sem-torção" conceito básico.

(2) Em geral: $\mathcal{M}$ *fortemente sem torção* (Torsion*less*) quando $\mathcal{M} \to \mathcal{M}^{\vee\vee}$ injetivo.

$X \xrightarrow{f} S$ liso. S qualquer.

Definição

(1) Distribuição $\mathcal{V}$ em X/S: $\mathcal{O}_X$–submódulo $T_\mathcal{V} \subset T_f$ t.q.

$$Q_\mathcal{V} = T_f / T_\mathcal{V}$$

é *sem torção*.

(2) $\mathrm{Sing}\,\mathcal{V} = \mathrm{Sing}(Q_\mathcal{V}) = \{x \in X \,:\, Q_{\mathcal{V},x} \text{ não é livre}\}$.
$= \{x \in X \,:\, T_\mathcal{V}(x) \to T_f(x) \text{ não injetivo}\}$.

Observação

(1) X integral $\rightsquigarrow$ "sem-torção" conceito básico.

(2) Em geral: $\mathcal{M}$ *fortemente sem torção* (Torsion*less*) quando $\mathcal{M} \to \mathcal{M}^{\vee\vee}$ injetivo.

(3) EGA $\rightsquigarrow$ "*estritamente* sem-torção" usando $\mathcal{K}_X$.

Definição

Generalidades

Definição

$\mathcal{M} \subset \mathcal{F}$ fortemente saturado

Definição

$\mathcal{M} \subset \mathcal{F}$ fortemente saturado $\Leftrightarrow \mathcal{F}/\mathcal{M}$ *fortemente sem torção.*

Definição ("Pull-back")

Definição

$\mathcal{M} \subset \mathcal{F}$ fortemente saturado $\Leftrightarrow$ $\mathcal{F}/\mathcal{M}$ *fortemente sem torção.*

Definição ("Pull-back")

$$
\begin{tikzcd}
\tilde{X} \arrow[r, "h"] \arrow[d, "\tilde{f}"'] \arrow[dr, phantom, "\square"] & X \arrow[d, "f"] \\
\tilde{S} \arrow[r, "g"'] & S
\end{tikzcd}
$$

Definição

$\mathcal{M} \subset \mathcal{F}$ fortemente saturado $\Leftrightarrow$ $\mathcal{F}/\mathcal{M}$ *fortemente sem torção.*

Definição ("Pull-back")

$$\begin{tikzcd}
\tilde{X} \arrow[r, "h"] \arrow[d, "\tilde{f}"'] \arrow[dr, phantom, "\square"] & X \arrow[d, "f"] \\
\tilde{S} \arrow[r, "g"'] & S
\end{tikzcd}$$

$\mathcal{V}$ distribuição em X/S.

Generalidades

Definição

$\mathcal{M} \subset \mathcal{F}$ fortemente saturado $\Leftrightarrow$ $\mathcal{F}/\mathcal{M}$ *fortemente sem torção.*

Definição ("Pull-back")

$$\begin{tikzcd} \tilde{X} \arrow[r, "h"] \arrow[d, "\tilde{f}"'] \arrow[dr, phantom, "\square"] & X \arrow[d, "f"] \\ \tilde{S} \arrow[r, "g"'] & S \end{tikzcd}$$

$\mathcal{V}$ distribuição em X/S. Defini-se: $\mathcal{V}_{\tilde{S}}$ por

$$\begin{tikzcd} & h^* T_{\mathcal{V}} \arrow[r] \arrow[d, dashed] & h^* T_f \arrow[d, leftrightarrow, "\sim"] \\ T_{\mathcal{V}_{\tilde{S}}} \arrow[r, equal] & (\mathrm{Im})^{\mathrm{ssat}} \arrow[r, hook] & T_{\tilde{f}} \end{tikzcd}$$

Exemplo

Exemplo

Exemplo

$R = k[\![t]\!]$, $X = \operatorname{Spec} R[x, y, z]$. Fibra central X_0.

Exemplo

$R = k[\![t]\!]$, $X = \operatorname{Spec} R[x, y, z]$. Fibra central X_0. Seja

$$T_{\mathcal{V}} = \mathcal{O}(x\partial_x - y\partial_y) + \mathcal{O}(t\partial_x - y\partial_z) + \mathcal{O}(t\partial_y - x\partial_z).$$

Exemplo

$R = k[\![t]\!]$, $X = \operatorname{Spec} R[x, y, z]$. Fibra central X_0. Seja

$$T_{\mathcal{V}} = \mathcal{O}(x\partial_x - y\partial_y) + \mathcal{O}(t\partial_x - y\partial_z) + \mathcal{O}(t\partial_y - x\partial_z).$$

$$\operatorname{Im}(T_{\mathcal{V}} \otimes k \to T_{X_0}) = \mathcal{O}(x\partial_x - y\partial_y) + \mathcal{O} \cdot y\partial_z + \mathcal{O} \cdot x\partial_z.$$

$\rightsquigarrow$

$$T_{\mathcal{V}_0} = \mathcal{O}_{X_0}(x\partial_x - y\partial_y) + \mathcal{O}_{X_0}\partial_z.$$

Reflexividade

Reflexividade

Pergunta

Que tipo de feixe é o saturado forte?

Reflexividade

Pergunta

Que tipo de feixe é o saturado forte?

Lema

Seja $\mathcal{F} \in \mathrm{coh}(X)$ *loc. livre.*

Reflexividade

Pergunta

Que tipo de feixe é o saturado forte?

Lema

Seja $\mathcal{F} \in \mathrm{coh}(X)$ *loc. livre. Seja* $\mathcal{M} \subset \mathcal{F}$ *qualquer.*

Pergunta

Que tipo de feixe é o saturado forte?

Lema

Seja $\mathcal{F} \in \mathrm{coh}(X)$ *loc. livre. Seja* $\mathcal{M} \subset \mathcal{F}$ *qualquer.* X *é* $G_1 + S_2$ *e* $\mathcal{F}/\mathcal{M}$ *é* $\ell\ell$ *aberto "grande"*

Reflexividade

Pergunta

Que tipo de feixe é o saturado forte?

Lema

Seja $\mathcal{F} \in \mathrm{coh}(X)$ *loc. livre. Seja* $\mathcal{M} \subset \mathcal{F}$ *qualquer.* X *é* $G_1 + S_2$ *e* $\mathcal{F}/\mathcal{M}$ *é* $\ell\ell$ *aberto "grande"* $\Rightarrow \mathcal{M}^{\mathrm{ssat}} \simeq \mathcal{M}^{\vee\vee}$.

Um teorema

Um teorema

Seja $f : X \to S$ liso e *próprio*.

Seja $f : X \to S$ liso e *próprio*.

Teorema

Suponha

$$\mathrm{codim}(\mathrm{Sing}(\mathcal{V}) \cap X_s, X_s) \geq 3, \qquad \forall\, s \in S.$$

Um teorema

Seja $f : X \to S$ liso e *próprio*.

Teorema

Suponha

$$\operatorname{codim}(\mathrm{Sing}(\mathcal{V}) \cap X_s, X_s) \geq 3, \qquad \forall\, s \in S.$$

$\implies \{s \in S \;:\; T_{\mathcal{V}_s}$ *é* $\ell\ell\}$ *aberto.*

Um teorema

Seja $f : X \to S$ liso e *próprio*.

Teorema

Suponha

$$\operatorname{codim}(\operatorname{Sing}(\mathcal{V}) \cap X_s, X_s) \geq 3, \qquad \forall\, s \in S.$$

$\Longrightarrow \{s \in S \ : \ T_{\mathcal{V}_s} \text{ é } \ell\ell\}$ *aberto.*

Segue de

Teorema (Álgebra comutativa)

Um teorema

Seja $f : X \to S$ liso e *próprio*.

Teorema

Suponha

$$\operatorname{codim}(\operatorname{Sing}(\mathcal{V}) \cap X_s, X_s) \geq 3, \qquad \forall\, s \in S.$$

$\Longrightarrow \{s \in S \;:\; T_{\mathcal{V}_s} \text{ é } \ell\ell\}$ *aberto.*

Segue de

Teorema (Álgebra comutativa)

$X = \operatorname{Spec} A$ *e* $S = \operatorname{Spec} R$*, com* R *um AVD.*

Um teorema

Seja $f : X \to S$ liso e *próprio*.

Teorema
Suponha

$$\operatorname{codim}(\operatorname{Sing}(\mathcal{V}) \cap X_s, X_s) \geq 3, \qquad \forall\, s \in S.$$

$\implies \{s \in S \ : \ T_{\mathcal{V}_s}$ *é* $\ell\ell\}$ *aberto.*

Segue de

Teorema (Álgebra comutativa)
$X = \operatorname{Spec} A$ *e* $S = \operatorname{Spec} R$*, com* R *um AVD. Seja* $\mathcal{F}$ *um* $\mathcal{O}_X$*-mód. Seja* $Z = \operatorname{Sing}(\mathcal{F})$*.*

Um teorema

Seja $f : X \to S$ liso e *próprio*.

Teorema

Suponha

$$\operatorname{codim}(\operatorname{Sing}(\mathcal{V}) \cap X_s, X_s) \geq 3, \qquad \forall\, s \in S.$$

$\implies \{s \in S \ : \ T_{\mathcal{V}_s}$ *é* $\ell\ell\}$ *aberto.*

Segue de

Teorema (Álgebra comutativa)

$X = \operatorname{Spec} A$ e $S = \operatorname{Spec} R$, com R um AVD. Seja $\mathcal{F}$ um $\mathcal{O}_X$-mód. Seja $Z = \operatorname{Sing}(\mathcal{F})$. Suponhamos:

a) $\mathcal{F} = \mathcal{F}^{\vee\vee}$.

Um teorema

Seja $f : X \to S$ liso e *próprio*.

Teorema

Suponha

$$\operatorname{codim}(\operatorname{Sing}(\mathcal{V}) \cap X_s, X_s) \geq 3, \qquad \forall\, s \in S.$$

$\implies \{s \in S \; : \; T_{\mathcal{V}_s}$ *é* $\ell\ell\}$ *aberto.*

Segue de

Teorema (Álgebra comutativa)

$X = \operatorname{Spec} A$ e $S = \operatorname{Spec} R$, com R um AVD. Seja $\mathcal{F}$ um $\mathcal{O}_X$-mód. Seja $Z = \operatorname{Sing}(\mathcal{F})$. Suponhamos:

a) $\mathcal{F} = \mathcal{F}^{\vee\vee}$.

b) $(\mathcal{F}|_{X_0})^{\vee\vee}$ *é* $\ell\ell$.

Seja $f : X \to S$ liso e *próprio*.

Teorema

Suponha

$$\operatorname{codim}(\operatorname{Sing}(\mathcal{V}) \cap X_s, X_s) \geq 3, \qquad \forall\, s \in S.$$

$\Longrightarrow \{s \in S \,:\, T_{\mathcal{V}_s} \text{ é } \ell\ell\}$ *aberto.*

Segue de

Teorema (Álgebra comutativa)

$X = \operatorname{Spec} A$ e $S = \operatorname{Spec} R$, com R um AVD. Seja $\mathcal{F}$ um $\mathcal{O}_X$-mód. Seja $Z = \operatorname{Sing}(\mathcal{F})$. Suponhamos:

a) $\mathcal{F} = \mathcal{F}^{\vee\vee}$.

b) $(\mathcal{F}|_{X_0})^{\vee\vee}$ *é* $\ell\ell$.

c) $\operatorname{codim}(Z_s, X_s) \geq 3$ *para cada* $s \in S$.

Um teorema

Seja $f : X \to S$ liso e *próprio*.

Teorema

Suponha

$$\mathrm{codim}(\mathrm{Sing}(\mathcal{V}) \cap X_s, X_s) \geq 3, \qquad \forall\, s \in S.$$

$\Longrightarrow \{s \in S \ : \ T_{\mathcal{V}_s} \text{ é } \ell\ell\}$ *aberto.*

Segue de

Teorema (Álgebra comutativa)

$X = \mathrm{Spec}\, A$ e $S = \mathrm{Spec}\, R$, com R um AVD. Seja $\mathcal{F}$ um $\mathcal{O}_X$-mód. Seja $Z = \mathrm{Sing}(\mathcal{F})$. Suponhamos:

a) $\mathcal{F} = \mathcal{F}^{\vee\vee}$.

b) $(\mathcal{F}|_{X_0})^{\vee\vee}$ *é* $\ell\ell$.

c) $\mathrm{codim}(Z_s, X_s) \geq 3$ *para cada* $s \in S$. $\Rightarrow \mathcal{F}$ *é* $\ell\ell$ *viz. de* X_0.

Um teorema

Ideia da prova.

Um teorema

Ideia da prova.

- Basta: $\mathcal{F}_0 := \mathcal{F}|_{X_0}$ reflexivo.

Ideia da prova.

- Basta: $\mathcal{F}_0 := \mathcal{F}|_{X_0}$ reflexivo.
- Basta: $\operatorname{prof} \mathcal{F}_{0,x_0} \geq 2$ para todo $x_0 \in X_0$ de codim 2.

(Hartshorne)

Ideia da prova.

• Basta: $\mathcal{F}_0 := \mathcal{F}|_{X_0}$ reflexivo.

• Basta: $\operatorname{prof} \mathcal{F}_{0,x_0} \geq 2$ para todo $x_0 \in X_0$ de codim 2.
(Hartshorne)

• Seja $U = X - Z$. Basta que $H^1_{Z_0}(\mathcal{F}_0) = 0$.

Um teorema

Ideia da prova.

- Basta: $\mathcal{F}_0 := \mathcal{F}|_{X_0}$ reflexivo.
- Basta: $\operatorname{prof} \mathcal{F}_{0,x_0} \geq 2$ para todo $x_0 \in X_0$ de codim 2.

(Hartshorne)

- Seja $U = X - Z$. Basta que $H^1_{Z_0}(\mathcal{F}_0) = 0$.
- De $H^1(X_0, \mathcal{F}_0) = 0$, basta

Ideia da prova.

- Basta: $\mathcal{F}_0 := \mathcal{F}|_{X_0}$ reflexivo.
- Basta: $\operatorname{prof} \mathcal{F}_{0,x_0} \geq 2$ para todo $x_0 \in X_0$ de codim 2.

(Hartshorne)

- Seja $U = X - Z$. Basta que $H^1_{Z_0}(\mathcal{F}_0) = 0$.
- De $H^1(X_0, \mathcal{F}_0) = 0$, basta $\mathcal{F}_0(X_0) \twoheadrightarrow \mathcal{F}_0(U_0)$.

Um teorema

Ideia da prova.

- Basta: $\mathcal{F}_0 := \mathcal{F}|_{X_0}$ reflexivo.
- Basta: $\operatorname{prof} \mathcal{F}_{0,x_0} \geq 2$ para todo $x_0 \in X_0$ de codim 2.

(Hartshorne)

- Seja $U = X - Z$. Basta que $H^1_{Z_0}(\mathcal{F}_0) = 0$.
- De $H^1(X_0, \mathcal{F}_0) = 0$, basta $\mathcal{F}_0(X_0) \twoheadrightarrow \mathcal{F}_0(U_0)$. Segue de:

Ideia da prova.

• Basta: $\mathcal{F}_0 := \mathcal{F}|_{X_0}$ reflexivo.

• Basta: $\operatorname{prof} \mathcal{F}_{0,x_0} \geq 2$ para todo $x_0 \in X_0$ de codim 2. (Hartshorne)

• Seja $U = X - Z$. Basta que $H^1_{Z_0}(\mathcal{F}_0) = 0$.

• De $H^1(X_0, \mathcal{F}_0) = 0$, basta $\mathcal{F}_0(X_0) \twoheadrightarrow \mathcal{F}_0(U_0)$. Segue de:

(a). $\widehat{H}^0(U, \mathcal{F}) \twoheadrightarrow H^0(U_0, \mathcal{F}_0)$

Ideia da prova.

- Basta: $\mathcal{F}_0 := \mathcal{F}|_{X_0}$ reflexivo.
- Basta: $\operatorname{prof} \mathcal{F}_{0,x_0} \geq 2$ para todo $x_0 \in X_0$ de codim 2.

(Hartshorne)

- Seja $U = X - Z$. Basta que $H^1_{Z_0}(\mathcal{F}_0) = 0$.
- De $H^1(X_0, \mathcal{F}_0) = 0$, basta $\mathcal{F}_0(X_0) \twoheadrightarrow \mathcal{F}_0(U_0)$. Segue de:

(a). $\widehat{H}^0(U, \mathcal{F}) \twoheadrightarrow H^0(U_0, \mathcal{F}_0)$

(b). $\widehat{H}^0(X, \mathcal{F}) \simeq \widehat{H}^0(U, \mathcal{F})$.

Ideia da prova.

- Basta: $\mathcal{F}_0 := \mathcal{F}|_{X_0}$ reflexivo.
- Basta: $\operatorname{prof} \mathcal{F}_{0,x_0} \geq 2$ para todo $x_0 \in X_0$ de codim 2.

(Hartshorne)

- Seja $U = X - Z$. Basta que $H^1_{Z_0}(\mathcal{F}_0) = 0$.
- De $H^1(X_0, \mathcal{F}_0) = 0$, basta $\mathcal{F}_0(X_0) \twoheadrightarrow \mathcal{F}_0(U_0)$. Segue de:

(a). $\widehat{H}^0(U, \mathcal{F}) \twoheadrightarrow H^0(U_0, \mathcal{F}_0)$
(b). $\widehat{H}^0(X, \mathcal{F}) \simeq \widehat{H}^0(U, \mathcal{F})$.
(a) usa $H^1(U_0, \mathcal{F}_0) = H^1(U_0, (\mathcal{F}_0)^{\vee\vee}) = H^2_{Z_0}(X_0, (\mathcal{F}_0)^{\vee\vee}) = 0$ por $\operatorname{codim}(Z_0, X_0) \geq 3$.

Um teorema

Ideia da prova.

- Basta: $\mathcal{F}_0 := \mathcal{F}|_{X_0}$ reflexivo.
- Basta: $\operatorname{prof} \mathcal{F}_{0,x_0} \geq 2$ para todo $x_0 \in X_0$ de codim 2.

(Hartshorne)

- Seja $U = X - Z$. Basta que $H^1_{Z_0}(\mathcal{F}_0) = 0$.
- De $H^1(X_0, \mathcal{F}_0) = 0$, basta $\mathcal{F}_0(X_0) \twoheadrightarrow \mathcal{F}_0(U_0)$. Segue de:

(a). $\widehat{H}^0(U, \mathcal{F}) \twoheadrightarrow H^0(U_0, \mathcal{F}_0)$
(b). $\widehat{H}^0(X, \mathcal{F}) \simeq \widehat{H}^0(U, \mathcal{F})$.
(a) usa $H^1(U_0, \mathcal{F}_0) = H^1(U_0, (\mathcal{F}_0)^{\vee\vee}) = H^2_{Z_0}(X_0, (\mathcal{F}_0)^{\vee\vee}) = 0$ por $\operatorname{codim}(Z_0, X_0) \geq 3$. $\Rightarrow$ levantar seções.

Um teorema

Ideia da prova.

- Basta: $\mathcal{F}_0 := \mathcal{F}|_{X_0}$ reflexivo.
- Basta: $\mathrm{prof}\,\mathcal{F}_{0,x_0} \geq 2$ para todo $x_0 \in X_0$ de codim 2.

(Hartshorne)

- Seja $U = X - Z$. Basta que $H^1_{Z_0}(\mathcal{F}_0) = 0$.
- De $H^1(X_0, \mathcal{F}_0) = 0$, basta $\mathcal{F}_0(X_0) \twoheadrightarrow \mathcal{F}_0(U_0)$. Segue de:

(a). $\widehat{H}^0(U, \mathcal{F}) \twoheadrightarrow H^0(U_0, \mathcal{F}_0)$
(b). $\widehat{H}^0(X, \mathcal{F}) \simeq \widehat{H}^0(U, \mathcal{F})$.
(a) usa $H^1(U_0, \mathcal{F}_0) = H^1(U_0, (\mathcal{F}_0)^{\vee\vee}) = H^2_{Z_0}(X_0, (\mathcal{F}_0)^{\vee\vee}) = 0$ por $\mathrm{codim}(Z_0, X_0) \geq 3$. $\Rightarrow$ levantar seções.
(b) usa SGA2. $\square$

Necessidade de codim ≥ 3

Necessidade de codim ≥ 3

Exemplo

$R = k[\![t]\!]$, $X = \operatorname{Spec} R[x, y, z]$. Fibra central X_0. Define-se

$$T_{\mathcal{V}} = \mathcal{O}(x\partial_x - y\partial_y) + \mathcal{O}(t\partial_x - y\partial_z) + \mathcal{O}(t\partial_y - x\partial_z).$$

Necessidade de codim ≥ 3

Exemplo

$R = k[\![t]\!]$, $X = \operatorname{Spec} R[x,y,z]$. Fibra central X_0. Define-se

$$T_{\mathcal{V}} = \mathcal{O}(x\partial_x - y\partial_y) + \mathcal{O}(t\partial_x - y\partial_z) + \mathcal{O}(t\partial_y - x\partial_z).$$

$\rightsquigarrow$

$$T_{\mathcal{V}_0} = \mathcal{O}_{X_0}(x\partial_x - y\partial_y) + \mathcal{O}_{X_0}\partial_z.$$

Necessidade de codim ≥ 3

Exemplo

$R = k[\![t]\!]$, $X = \operatorname{Spec} R[x, y, z]$. Fibra central X_0. Define-se

$$T_{\mathcal{V}} = \mathcal{O}(x\partial_x - y\partial_y) + \mathcal{O}(t\partial_x - y\partial_z) + \mathcal{O}(t\partial_y - x\partial_z).$$

$\rightsquigarrow$

$$T_{\mathcal{V}_0} = \mathcal{O}_{X_0}(x\partial_x - y\partial_y) + \mathcal{O}_{X_0}\partial_z.$$

Temos $\operatorname{Sing}(\mathcal{V}) \cap X_0 = \{x = y = 0\}$

Necessidade de codim ≥ 3

Exemplo

$R = k[\![t]\!]$, $X = \mathrm{Spec}\, R[x, y, z]$. Fibra central X_0. Define-se

$$T_{\mathcal{V}} = \mathcal{O}(x\partial_x - y\partial_y) + \mathcal{O}(t\partial_x - y\partial_z) + \mathcal{O}(t\partial_y - x\partial_z).$$

$\rightsquigarrow$

$$T_{\mathcal{V}_0} = \mathcal{O}_{X_0}(x\partial_x - y\partial_y) + \mathcal{O}_{X_0}\partial_z.$$

Temos $\mathrm{Sing}(\mathcal{V}) \cap X_0 = \{x = y = 0\} \Rightarrow \operatorname{codim} \mathrm{Sing}(\mathcal{V}) \cap X_0 = 2$.

Necessidade de codim ≥ 3

Exemplo

$R = k[\![t]\!]$, $X = \operatorname{Spec} R[x, y, z]$. Fibra central X_0. Define-se

$$T_{\mathcal{V}} = \mathcal{O}(x\partial_x - y\partial_y) + \mathcal{O}(t\partial_x - y\partial_z) + \mathcal{O}(t\partial_y - x\partial_z).$$

$\rightsquigarrow$

$$T_{\mathcal{V}_0} = \mathcal{O}_{X_0}(x\partial_x - y\partial_y) + \mathcal{O}_{X_0}\partial_z.$$

Temos $\operatorname{Sing}(\mathcal{V}) \cap X_0 = \{x = y = 0\} \Rightarrow \operatorname{codim} \operatorname{Sing}(\mathcal{V}) \cap X_0 = 2$.
$\rightsquigarrow$ *$T_{\mathcal{V}}$ não* é $\ell\ell$ *mas $T_{\mathcal{V}_0}$* é $\ell\ell$.

Como aplicar teorema?

Como aplicar teorema?

Definição

Fibrado é rígido $\Leftrightarrow H^1 = 0$.

Como aplicar teorema?

Definição

Fibrado é rígido $\Leftrightarrow H^1 = 0$.

Corolário

Seja $\mathbb{k} = \overline{\mathbb{k}}$ *corpo,*

Como aplicar teorema?

Definição

Fibrado é rígido $\Leftrightarrow H^1 = 0$.

Corolário

Seja $\mathbb{k} = \overline{\mathbb{k}}$ *corpo,* $X = X_0 \times_{\mathbb{k}} S$.

Como aplicar teorema?

Definição

Fibrado é rígido $\Leftrightarrow H^1 = 0$.

Corolário

Seja $\mathbb{k} = \overline{\mathbb{k}}$ *corpo,* $X = X_0 \times_{\mathbb{k}} S$. *Seja* $E \to X_0$ *fibrado rígido.*

Como aplicar teorema?

Definição

Fibrado é rígido $\Leftrightarrow H^1 = 0$.

Corolário

Seja $\mathbb{k} = \overline{\mathbb{k}}$ *corpo,* $X = X_0 \times_{\mathbb{k}} S$*. Seja* $E \to X_0$ *fibrado rígido.* $\Rightarrow$ $\{s \in S \,:\, T_{\mathcal{V}_s} \simeq E\}$ *aberto.*

Como aplicar teorema?

Definição

Fibrado é rígido $\Leftrightarrow H^1 = 0$.

Corolário

Seja $\mathbb{k} = \overline{\mathbb{k}}$ *corpo,* $X = X_0 \times_{\mathbb{k}} S$. *Seja* $E \to X_0$ *fibrado rígido.* $\Rightarrow$ $\{s \in S \ : \ T_{\mathcal{V}_s} \simeq E\}$ *aberto.*

<u>Casos interessantes</u>:

Como aplicar teorema?

Definição

Fibrado é rígido $\Leftrightarrow H^1 = 0$.

Corolário

Seja $\mathbb{k} = \overline{\mathbb{k}}$ *corpo,* $X = X_0 \times_{\mathbb{k}} S$*. Seja* $E \to X_0$ *fibrado rígido.* $\Rightarrow$
$\{s \in S \ : \ T_{\mathcal{V}_s} \simeq E\}$ *aberto.*

Casos interessantes: $\rightsquigarrow X_0$ racional $+ \ E = \mathcal{O}^r$.

Como aplicar teorema?

Definição

Fibrado é rígido $\Leftrightarrow H^1 = 0$.

Corolário

Seja $\Bbbk = \overline{\Bbbk}$ *corpo,* $X = X_0 \times_{\Bbbk} S$. *Seja* $E \to X_0$ *fibrado rígido.* $\Rightarrow$ $\{s \in S \ : \ T_{\mathcal{V}_s} \simeq E\}$ *aberto.*

<u>Casos interessantes</u>: $\rightsquigarrow X_0$ racional $+ \ E = \mathcal{O}^r$.

Por exemplo:

Como aplicar teorema?

Definição

Fibrado é rígido $\Leftrightarrow H^1 = 0$.

Corolário

Seja $\Bbbk = \overline{\Bbbk}$ *corpo,* $X = X_0 \times_{\Bbbk} S$. *Seja* $E \to X_0$ *fibrado rígido.* $\Rightarrow$ $\{s \in S \ : \ T_{\mathcal{V}_s} \simeq E\}$ *aberto.*

<u>Casos interessantes</u>: $\rightsquigarrow X_0$ racional $+$ $E = \mathcal{O}^r$.
Por exemplo: Seja $G/\mathbb{C}$ adjunto e semisimples; $\mathfrak{g} = \mathrm{Lie}\, G$.

Como aplicar teorema?

Definição

Fibrado é rígido $\Leftrightarrow H^1 = 0$.

Corolário

Seja $\mathbb{k} = \overline{\mathbb{k}}$ *corpo,* $X = X_0 \times_{\mathbb{k}} S$*. Seja* $E \to X_0$ *fibrado rígido.* $\Rightarrow$ $\{s \in S \ : \ T_{\mathcal{V}_s} \simeq E\}$ *aberto.*

<u>Casos interessantes</u>: $\rightsquigarrow X_0$ racional $+$ $E = \mathcal{O}^r$.
Por exemplo: Seja $G/\mathbb{C}$ adjunto e semisimples; $\mathfrak{g} = \mathrm{Lie}\, G$. Seja $X/\mathbb{C}$ proj. lisa, $G \circlearrowleft X$ com $\mathfrak{g} \simeq H^0(T_X)$.

Como aplicar teorema?

Definição

Fibrado é rígido $\Leftrightarrow H^1 = 0$.

Corolário

Seja $\mathbb{k} = \overline{\mathbb{k}}$ *corpo,* $X = X_0 \times_{\mathbb{k}} S$. *Seja* $E \to X_0$ *fibrado rígido.* $\Rightarrow$ $\{s \in S \ : \ T_{\mathcal{V}_s} \simeq E\}$ *aberto.*

Casos interessantes: $\rightsquigarrow X_0$ racional $+ \ E = \mathcal{O}^r$.
Por exemplo: Seja $G/\mathbb{C}$ adjunto e semisimples; $\mathfrak{g} = \mathrm{Lie}\, G$. Seja $X/\mathbb{C}$ proj. lisa, $G \circlearrowleft X$ com $\mathfrak{g} \simeq H^0(T_X)$. $\rightsquigarrow$ estudar

$$\left\{ \begin{array}{c} \text{subálgebras de} \\ \text{dim. } m \text{ de } \mathfrak{g} \end{array} \right\} \longrightarrow \left\{ \begin{array}{c} \text{Folheações em } X \\ \text{de posto } m \end{array} \right\}$$

$$\mathfrak{h} \longmapsto \mathcal{A}(\mathfrak{h})$$

Como aplicar teorema?

Definição

Fibrado é rígido $\Leftrightarrow H^1 = 0$.

Corolário

Seja $\Bbbk = \overline{\Bbbk}$ *corpo,* $X = X_0 \times_{\Bbbk} S$. *Seja* $E \to X_0$ *fibrado rígido.* $\Rightarrow$ $\{s \in S \ : \ T_{\mathcal{V}_s} \simeq E\}$ *aberto.*

<u>Casos interessantes</u>: $\rightsquigarrow$ X_0 racional $+$ $E = \mathcal{O}^r$.

Por exemplo: Seja $G/\mathbb{C}$ adjunto e semisimples; $\mathfrak{g} = \mathrm{Lie}\, G$. Seja $X/\mathbb{C}$ proj. lisa, $G \circlearrowleft X$ com $\mathfrak{g} \simeq H^0(T_X)$. $\rightsquigarrow$ estudar

$$\left\{ \begin{array}{c} \text{subálgebras de} \\ \text{dim. } m \text{ de } \mathfrak{g} \end{array} \right\} \longrightarrow \left\{ \begin{array}{c} \text{Folheações em } X \\ \text{de posto } m \end{array} \right\}$$

$$\mathfrak{h} \longmapsto \mathcal{A}(\mathfrak{h})$$

Pergunta

Quando $\mathrm{codim}(\mathrm{Sing}\, \mathcal{A}(\mathfrak{h})\, , X) \geq 3$?

Variedades de Borel

Objetivo : Construir ações tais que codim $\{v^\natural = 0\}$ "grande."

Variedades de Borel

Objetivo : Construir ações tais que codim $\{v^\natural = 0\}$ "grande."

Seja $A < G$ Borel (=Triangular superior).

Variedades de Borel

Objetivo : Construir ações tais que codim $\{v^\natural = 0\}$ "grande."

Seja $A < G$ Borel (=Triangular superior). Seja $X = G/A$ *variedade de Borel*:

$$X(\mathbb{C}) = \{\text{subgrupos Borel de } G\}.$$

Variedades de Borel

<u>Objetivo</u> : Construir ações tais que codim $\{v^\natural = 0\}$ "grande."

Seja $A < G$ Borel (=Triangular superior). Seja $X = G/A$ *variedade de Borel*:

$$X(\mathbb{C}) = \{\text{subgrupos Borel de } G\}.$$

Exemplo

Se $G = \mathrm{SL}_n$ e $A = \{\text{triangulares sup.}\}$

<u>Objetivo</u> : Construir ações tais que codim $\{v^\natural = 0\}$ "grande."

Seja $A < G$ Borel (=Triangular superior). Seja $X = G/A$ *variedade de Borel*:

$$X(\mathbb{C}) = \{\text{subgrupos Borel de } G\}.$$

Exemplo

Se $G = \mathrm{SL}_n$ e $A = \{\text{triangulares sup.}\} \Rightarrow$

$$X = \{\text{bandeiras completas}\}.$$

Variedades de Borel

Objetivo : Construir ações tais que codim $\{v^\natural = 0\}$ “grande.”

Seja $A < G$ Borel (=Triangular superior). Seja $X = G/A$ *variedade de Borel*:

$$X(\mathbb{C}) = \{\text{subgrupos Borel de } G\}.$$

Exemplo

Se $G = \mathrm{SL}_n$ e $A = \{\text{triangulares sup.}\} \Rightarrow$

$$X = \{\text{bandeiras completas}\}.$$

Observação

Decomposição Bruhat $\Rightarrow X$ racional.

Variedades de Borel

Objetivo : Construir ações tais que codim $\{v^\natural = 0\}$ "grande."

Seja $A < G$ Borel (=Triangular superior). Seja $X = G/A$ *variedade de Borel*:

$$X(\mathbb{C}) = \{\text{subgrupos Borel de } G\}.$$

Exemplo

Se $G = \mathrm{SL}_n$ e $A = \{\text{triangulares sup.}\} \Rightarrow$

$$X = \{\text{bandeiras completas}\}.$$

Observação

Decomposição Bruhat $\Rightarrow X$ racional. $\Rightarrow H^1(\mathcal{O}) = 0$.

Fibras de Springer

Dado $v \in \mathfrak{g}$,

$$X_v := \{v^\natural = 0\} = \{B \in X \,:\, v \in \mathrm{Lie}\, B\}.$$

Fibras de Springer

Dado $v \in \mathfrak{g}$,

$$X_v := \{v^\natural = 0\} = \{B \in X \;:\; v \in \mathrm{Lie}\, B\}.$$

Variedades aparecem na teoria da resolução de Springer.

Fibras de Springer

Dado $v \in \mathfrak{g}$,

$$X_v := \{v^\natural = 0\} = \{B \in X \,:\, v \in \mathrm{Lie}\, B\}.$$

Variedades aparecem na teoria da resolução de Springer.

Teorema (Steinberg, Spaltenstein)

$$\mathrm{codim}\, X_v = \frac{1}{2} \mathrm{codim}\, Z_{\mathfrak{g}}(v).$$

Dado $v \in \mathfrak{g}$,

$$X_v := \{v^\natural = 0\} = \{B \in X \,:\, v \in \mathrm{Lie}\, B\}.$$

Variedades aparecem na teoria da resolução de Springer.

Teorema (Steinberg, Spaltenstein)

$$\mathrm{codim}\, X_v = \frac{1}{2}\mathrm{codim}\, Z_{\mathfrak{g}}(v).$$

$\rightsquigarrow$ possível minorar $\mathrm{codim}\, X_v$ através de teoria dos grupos.

Teoria de grupos – centros “semisimples”

Fixamos T toro maximal de A, $\mathfrak{t} = \mathrm{Lie}\, T$, e $\Phi \subset \mathfrak{t}^*$ systema de raízes.

Teoria de grupos – centros "semisimples"

Fixamos T toro maximal de A, $\mathfrak{t} = \mathrm{Lie}\, T$, e $\Phi \subset \mathfrak{t}^*$ systema de raízes.

Proposição

- $v \in \mathfrak{t} - \{0\}$

Fixamos T toro maximal de A, $\mathfrak{t} = \mathrm{Lie}\, T$, e $\Phi \subset \mathfrak{t}^*$ systema de raízes.

Proposição

- $v \in \mathfrak{t} - \{0\}$

(1) $Z_{\mathfrak{g}}(v) = \mathfrak{t} \oplus \bigoplus_{\alpha \in \Phi \cap v^\perp} \mathfrak{g}_\alpha$.

(2) $\operatorname{codim} Z_{\mathfrak{g}}(v) = \#(\Phi \setminus \Phi \cap v^\perp)$.

Teoria de grupos – centros “semisimples”

Fixamos T toro maximal de A, $\mathfrak{t} = \mathrm{Lie}\, T$, e $\Phi \subset \mathfrak{t}^*$ systema de raízes.

Proposição

- $v \in \mathfrak{t} - \{0\}$

(1) $Z_{\mathfrak{g}}(v) = \mathfrak{t} \oplus \bigoplus_{\alpha \in \Phi \cap v^{\perp}} \mathfrak{g}_{\alpha}$.

(2) $\operatorname{codim} Z_{\mathfrak{g}}(v) = \#(\Phi \setminus \Phi \cap v^{\perp})$.

(3) $\Phi \cap v^{\perp}$ *é sub-sistema de raízes de* Φ.

Teoria de grupos – centros “semisimples”

Fixamos T toro maximal de A, $\mathfrak{t} = \mathrm{Lie}\, T$, e $\Phi \subset \mathfrak{t}^*$ systema de raízes.

Proposição

- $v \in \mathfrak{t} - \{0\}$

(1) $Z_{\mathfrak{g}}(v) = \mathfrak{t} \oplus \bigoplus_{\alpha \in \Phi \cap v^\perp} \mathfrak{g}_\alpha$.

(2) codim $Z_{\mathfrak{g}}(v) = \#(\Phi \setminus \Phi \cap v^\perp)$.

(3) $\Phi \cap v^\perp$ *é sub-sistema de raízes de* Φ.

$\rightsquigarrow$ Minorar codim $Z(v) \Leftarrow$ majorar $\Phi \cap v^\perp$.

Teoria de grupos – centros “semisimples”

Fixamos T toro maximal de A, $\mathfrak{t} = \mathrm{Lie}\, T$, e $\Phi \subset \mathfrak{t}^*$ systema de raízes.

Proposição

- $v \in \mathfrak{t} - \{0\}$

(1) $Z_{\mathfrak{g}}(v) = \mathfrak{t} \oplus \bigoplus_{\alpha \in \Phi \cap v^{\perp}} \mathfrak{g}_{\alpha}.$

(2) $\operatorname{codim} Z_{\mathfrak{g}}(v) = \#(\Phi \setminus \Phi \cap v^{\perp})$.

(3) $\Phi \cap v^{\perp}$ *é sub-sistema de raízes de* Φ.

$\rightsquigarrow$ Minorar $\operatorname{codim} Z(v) \Leftarrow$ majorar $\Phi \cap v^{\perp}$.

Proposição (Bourbaki)

diagrama Dynkin $\Phi \cap v^{\perp}$ $=$ *Remover arestas e vértices do diagrama de* Φ.

Teoria de grupos – centros "semisimples"

Fixamos T toro maximal de A, $\mathfrak{t} = \mathrm{Lie}\, T$, e $\Phi \subset \mathfrak{t}^*$ systema de raízes.

Proposição

- $v \in \mathfrak{t} - \{0\}$

(1) $Z_{\mathfrak{g}}(v) = \mathfrak{t} \oplus \bigoplus_{\alpha \in \Phi \cap v^{\perp}} \mathfrak{g}_{\alpha}$.

(2) $\operatorname{codim} Z_{\mathfrak{g}}(v) = \#(\Phi \setminus \Phi \cap v^{\perp})$.

(3) $\Phi \cap v^{\perp}$ *é sub-sistema de raízes de* Φ.

$\rightsquigarrow$ Minorar $\operatorname{codim} Z(v) \Leftarrow$ majorar $\Phi \cap v^{\perp}$.

Proposição (Bourbaki)

diagrama Dynkin $\Phi \cap v^{\perp}$ = *Remover arestas e vértices do diagrama de* Φ.

Corolário

Tabelas $\Rightarrow$ *bom controle de* $\min \operatorname{codim} Z(v)$.

Teoria de grupos – “Centros nilpotentes”

Teoria de grupos – "Centros nilpotentes"

Temos raízes positivas Φ^+ e raiz mais longa ϱ.

Temos raízes positivas Φ^+ e raiz mais longa ϱ.

Proposição (Collingwood-McGovern)

Seja $v \in \mathfrak{g}_{\mathrm{nil}} - \{0\}$ *com* Gv *minimal*

Temos raízes positivas Φ^+ e raiz mais longa ϱ.

Proposição (Collingwood-McGovern)

Seja $v \in \mathfrak{g}_{\mathrm{nil}} - \{0\}$ *com* Gv *minimal* $\Rightarrow$

$$\begin{aligned} \operatorname{codim} Z(v) &= \dim Gv \\ &= 1 + \#(\Phi^+ \setminus \varrho^\perp). \end{aligned}$$

Teoria de grupos – "Centros nilpotentes"

Temos raízes positivas Φ^+ e raiz mais longa ϱ.

Proposição (Collingwood-McGovern)

Seja $v \in \mathfrak{g}_{\mathrm{nil}} - \{0\}$ *com* Gv *minimal* $\Rightarrow$

$$\begin{aligned} \operatorname{codim} Z(v) &= \dim Gv \\ &= 1 + \#(\Phi^+ \setminus \varrho^\perp). \end{aligned}$$

Teorema (Suter, Wang)

$$\#(\Phi \setminus \widetilde{\alpha}^\perp) = 2h_\Phi^\vee - 3,$$

onde $h_\Phi^\vee$ *é o número de Coxeter dual.*

Temos raízes positivas Φ^+ e raiz mais longa ϱ.

Proposição (Collingwood-McGovern)

Seja $v \in \mathfrak{g}_{\mathrm{nil}} - \{0\}$ com Gv minimal $\Rightarrow$

$$\begin{aligned}\operatorname{codim} Z(v) &= \dim Gv \\ &= 1 + \#(\Phi^+ \setminus \varrho^\perp).\end{aligned}$$

Teorema (Suter, Wang)

$$\#(\Phi \setminus \widetilde{\alpha}^\perp) = 2h_\Phi^\vee - 3,$$

onde $h_\Phi^\vee$ é o número de Coxeter dual.

Corolário

Tabelas $\Rightarrow$ bom controle sobre $\min \operatorname{codim} Z(v)$.

Seja $\mathfrak{h} = \mathbb{C}v + \mathbb{C}w < \mathfrak{g}$.

Singularidades de $\mathcal{A}(\mathfrak{h})$

Seja $\mathfrak{h} = \mathbb{C}v + \mathbb{C}w < \mathfrak{g}$. Temos

$$\left\{ x \in X \;:\; \begin{array}{c} (\mathcal{O}_X \otimes \mathfrak{h})|_x \to T_X|_x \\ \text{não injetiva} \end{array} \right\} = \underbrace{\bigcup_{(\lambda:\mu)\in\mathbb{P}^1} \mathrm{Sing}(\lambda v^\natural + \mu w^\natural)}_{1+\dim \mathrm{Sing}} .$$

Seja $\mathfrak{h} = \mathbb{C}v + \mathbb{C}w < \mathfrak{g}$. Temos

$$\left\{ x \in X \ : \ \begin{array}{c} (\mathcal{O}_X \otimes \mathfrak{h})|_x \to T_X|_x \\ \text{não injetiva} \end{array} \right\} = \underbrace{\bigcup_{(\lambda:\mu)\in\mathbb{P}^1} \mathrm{Sing}(\lambda v^\natural + \mu w^\natural)}_{1+\dim \mathrm{Sing}}.$$

Corolário

Se $\mathfrak{g} \notin \{A_1, A_2, A_3, \ B_2, C_3, G_2\}$

Singularidades de $\mathcal{A}(\mathfrak{h})$

Seja $\mathfrak{h} = \mathbb{C}v + \mathbb{C}w < \mathfrak{g}$. Temos

$$\left\{ x \in X \ : \ \begin{array}{c} (\mathcal{O}_X \otimes \mathfrak{h})|_x \to T_X|_x \\ \text{não injetiva} \end{array} \right\} = \underbrace{\bigcup_{(\lambda:\mu)\in\mathbb{P}^1} \operatorname{Sing}(\lambda v^\natural + \mu w^\natural)}_{1+\dim \operatorname{Sing}} .$$

Corolário

Se $\mathfrak{g} \notin \{A_1, A_2, A_3, \ B_2, C_3, G_2\} \Rightarrow$

$$\operatorname{codim} \operatorname{Sing}(\mathcal{A}(\mathfrak{h})) \geq 3$$

e $\mathcal{O}_X \otimes \mathfrak{h} = T_{\mathcal{A}(\mathfrak{h})}$

Observação

Seja $n \geq 4$. Fácil construir $\mathfrak{h} < \mathfrak{sl}_{n+1} = H^0(T_{\mathbb{P}^n})$ de dimensão 2 tais que

$$\operatorname{codim} \operatorname{Sing} \mathcal{A}(\mathfrak{h}) \geq 3$$

em $\mathbb{P}^n$.

Espaços de distribuições/folheações

Espaços de distribuições/folheações

Duas alternativas:

(1) Trabalhar com formas diferenciais "LDS".

Espaços de distribuições/folheações

Duas alternativas:

(1) Trabalhar com formas diferenciais “LDS”.

(2) Trabalhar com $\mathrm{Quot}(T_X)$. (F. Qualbrunn, M. Corrêa, M. Jardim, A. Muniz, ...)

Espaços de distribuições/folheações

Duas alternativas:

(1) Trabalhar com formas diferenciais "LDS".
(2) Trabalhar com $\mathrm{Quot}(T_X)$. (F. Qualbrunn, M. Corrêa, M. Jardim, A. Muniz, . . .)

Definição (A. Medeiros)

$X \xrightarrow{f} S$ liso.

Duas alternativas:

(1) Trabalhar com formas diferenciais “LDS”.
(2) Trabalhar com $\mathrm{Quot}(T_X)$. (F. Qualbrunn, M. Corrêa, M. Jardim, A. Muniz, ...)

Definição (A. Medeiros)

$X \xrightarrow{f} S$ liso. $L \in \mathrm{Pic}(X)$, $q \in \mathbb{N}_{>0}$.

Espaços de distribuições/folheações

Duas alternativas:

(1) Trabalhar com formas diferenciais "LDS".
(2) Trabalhar com $\mathrm{Quot}(T_X)$. (F. Qualbrunn, M. Corrêa, M. Jardim, A. Muniz, . . .)

Definição (A. Medeiros)

$X \xrightarrow{f} S$ liso. $L \in \mathrm{Pic}(X)$, $q \in \mathbb{N}_{>0}$. Uma q-forma LDS $\omega \in \Gamma(X, \Omega^q_f \otimes L)$ com coef. em L é

Duas alternativas:

(1) Trabalhar com formas diferenciais "LDS".
(2) Trabalhar com $\mathrm{Quot}(T_X)$. (F. Qualbrunn, M. Corrêa, M. Jardim, A. Muniz, . . .)

Definição (A. Medeiros)

$X \xrightarrow{f} S$ liso. $L \in \mathrm{Pic}(X)$, $q \in \mathbb{N}_{>0}$. Uma q-forma LDS $\omega \in \Gamma(X, \Omega^q_f \otimes L)$ com coef. em L é

(Sin.) $\operatorname{codim}\{\omega = 0\} \geq 2$.

Espaços de distribuições/folheações

Duas alternativas:

1. (1) Trabalhar com formas diferenciais “LDS”.
2. (2) Trabalhar com $\mathrm{Quot}(T_X)$. (F. Qualbrunn, M. Corrêa, M. Jardim, A. Muniz, ...)

Definição (A. Medeiros)

$X \xrightarrow{f} S$ liso. $L \in \mathrm{Pic}(X)$, $q \in \mathbb{N}_{>0}$. Uma q-forma LDS $\omega \in \Gamma(X, \Omega_f^q \otimes L)$ com coef. em L é

(Sin.) $\operatorname{codim}\{\omega = 0\} \geq 2$.

(Dec.) Para $x \in \mathrm{Ass}(X)$, $\mathcal{O}_x\omega_x = \alpha_1 \wedge \ldots \wedge \alpha_q$, com $\alpha_1, \ldots, \alpha_q$ parte de base em $\Omega^1_{f,x}$

Duas alternativas:

(1) Trabalhar com formas diferenciais “LDS”.

(2) Trabalhar com $\mathrm{Quot}(T_X)$. (F. Qualbrunn, M. Corrêa, M. Jardim, A. Muniz, ...)

Definição (A. Medeiros)

$X \xrightarrow{f} S$ liso. $L \in \mathrm{Pic}(X)$, $q \in \mathbb{N}_{>0}$. Uma q-forma LDS $\omega \in \Gamma(X, \Omega^q_f \otimes L)$ com coef. em L é

(Sin.) $\mathrm{codim}\{\omega = 0\} \geq 2$.

(Dec.) Para $x \in \mathrm{Ass}(X)$, $\mathcal{O}_x\omega_x = \alpha_1 \wedge \ldots \wedge \alpha_q$, com $\alpha_1, \ldots, \alpha_q$ parte de base em $\Omega^1_{f,x}$

Definição

Define-se $\mathcal{K}(\omega)$

Duas alternativas:

(1) Trabalhar com formas diferenciais "LDS".

(2) Trabalhar com $\mathrm{Quot}(T_X)$. (F. Qualbrunn, M. Corrêa, M. Jardim, A. Muniz, ...)

Definição (A. Medeiros)

$X \xrightarrow{f} S$ liso. $L \in \mathrm{Pic}(X)$, $q \in \mathbb{N}_{>0}$. Uma q-forma LDS $\omega \in \Gamma(X, \Omega^q_f \otimes L)$ com coef. em L é

(Sin.) $\mathrm{codim}\{\omega = 0\} \geq 2$.

(Dec.) Para $x \in \mathrm{Ass}(X)$, $\mathcal{O}_x \omega_x = \alpha_1 \wedge \ldots \wedge \alpha_q$, com $\alpha_1, \ldots, \alpha_q$ parte de base em $\Omega^1_{f,x}$

Definição

Define-se $\mathcal{K}(\omega)$ por

$$T_{\mathcal{K}(\omega)} = \{v \in T_f \ : \ \omega(v, -) = 0\} \subset T_f.$$

Espaços de distribuições/folheações

Lema

(1) $\{\omega = 0\} = \operatorname{Sing} \mathcal{K}(\omega)$.

Espaços de distribuições/folheações

Lema

(1) $\{\omega = 0\} = \operatorname{Sing} \mathcal{K}(\omega)$.

(2) *X loc. fatorial*

Lema

(1) $\{\omega = 0\} = \operatorname{Sing} \mathcal{K}(\omega)$.

(2) *X loc. fatorial* $\Rightarrow$ *toda* $\mathcal{V}$ *associada q-forma torcida LDS com coefs. em* $\det Q_{\mathcal{V}} = \left(\wedge^{\mathrm{top}} Q_{\mathcal{V}}\right)^{\vee\vee}$.

Lema

(1) $\{\omega = 0\} = \operatorname{Sing}\mathcal{K}(\omega)$.

(2) *X loc. fatorial $\Rightarrow$ toda $\mathcal{V}$ associada q-forma torcida LDS com coefs. em* $\det Q_{\mathcal{V}} = \left(\wedge^{\mathrm{top}} Q_{\mathcal{V}}\right)^{\vee\vee}$.

Exemplo

X liso, $G \circlearrowleft X$ e $\mathfrak{g} = H^0(T_X)$.

Lema

(1) $\{\omega = 0\} = \mathrm{Sing}\, \mathcal{K}(\omega)$.

(2) *X loc. fatorial $\Rightarrow$ toda $\mathcal{V}$ associada q-forma torcida LDS com coefs. em* $\det Q_{\mathcal{V}} = \left(\wedge^{\mathrm{top}} Q_{\mathcal{V}}\right)^{\vee\vee}$.

Exemplo

X liso, $G \circlearrowleft X$ e $\mathfrak{g} = H^0(T_X)$. Seja $\mathfrak{h} < \mathfrak{g}$ com codim $\mathrm{Sing}(T_X/\mathcal{O}_X \otimes \mathfrak{h}) \geq 2$.

Lema

(1) $\{\omega = 0\} = \operatorname{Sing} \mathcal{K}(\omega)$.

(2) *X loc. fatorial $\Rightarrow$ toda $\mathcal{V}$ associada q-forma torcida LDS com coefs. em* $\det Q_{\mathcal{V}} = \left(\wedge^{\mathrm{top}} Q_{\mathcal{V}}\right)^{\vee\vee}$.

Exemplo

X liso, $G \circlearrowleft X$ e $\mathfrak{g} = H^0(T_X)$. Seja $\mathfrak{h} < \mathfrak{g}$ com $\operatorname{codim} \operatorname{Sing}(T_X/\mathcal{O}_X \otimes \mathfrak{h}) \geq 2$. Se $v_1^\natural \wedge \cdots \wedge v_m^\natural \in H^0(\wedge^m T_X)$

Lema

(1) $\{\omega = 0\} = \operatorname{Sing} \mathcal{K}(\omega)$.

(2) X *loc. fatorial* $\Rightarrow$ *toda* $\mathcal{V}$ *associada q-forma torcida LDS com coefs. em* $\det Q_{\mathcal{V}} = \left(\wedge^{\text{top}} Q_{\mathcal{V}}\right)^{\vee\vee}$.

Exemplo

X liso, $G \circlearrowleft X$ e $\mathfrak{g} = H^0(T_X)$. Seja $\mathfrak{h} < \mathfrak{g}$ com codim $\operatorname{Sing}(T_X/\mathcal{O}_X \otimes \mathfrak{h}) \geq 2$. Se $v_1^\natural \wedge \cdots \wedge v_m^\natural \in H^0(\wedge^m T_X) \rightsquigarrow$ forma torcida em $H^0(\wedge^m T_X) = H^0(\Omega^q \otimes \det T_X)$.

Lema

(1) $\{\omega = 0\} = \operatorname{Sing} \mathcal{K}(\omega)$.

(2) *X loc. fatorial $\Rightarrow$ toda $\mathcal{V}$ associada q-forma torcida LDS com coefs. em* $\det Q_{\mathcal{V}} = \left(\wedge^{\mathrm{top}} Q_{\mathcal{V}}\right)^{\vee\vee}$.

Exemplo

X liso, $G \circlearrowleft X$ e $\mathfrak{g} = H^0(T_X)$. Seja $\mathfrak{h} < \mathfrak{g}$ com $\operatorname{codim} \operatorname{Sing}(T_X/\mathcal{O}_X \otimes \mathfrak{h}) \geq 2$. Se $v_1^\natural \wedge \cdots \wedge v_m^\natural \in H^0(\wedge^m T_X) \rightsquigarrow$ forma torcida em $H^0(\wedge^m T_X) = H^0(\Omega^q \otimes \det T_X)$.

Definição

$$D(q, L) = \{\omega \in \mathbb{P}\Gamma(X, \Omega_X^q \otimes L) \ : \ \omega \text{ é LDS}\}.$$

Espaços de distribuições/folheações

Lema

(1) $\{\omega = 0\} = \operatorname{Sing} \mathcal{K}(\omega)$.

(2) *X loc. fatorial $\Rightarrow$ toda $\mathcal{V}$ associada q-forma torcida LDS com coefs. em* $\det Q_{\mathcal{V}} = \left(\wedge^{\mathrm{top}} Q_{\mathcal{V}}\right)^{\vee\vee}$.

Exemplo

X liso, $G \circlearrowleft X$ e $\mathfrak{g} = H^0(T_X)$. Seja $\mathfrak{h} < \mathfrak{g}$ com codim $\operatorname{Sing}(T_X/\mathcal{O}_X \otimes \mathfrak{h}) \geq 2$. Se $v_1^\natural \wedge \cdots \wedge v_m^\natural \in H^0(\wedge^m T_X) \rightsquigarrow$ forma torcida em $H^0(\wedge^m T_X) = H^0(\Omega^q \otimes \det T_X)$.

Definição

$$D(q, L) = \{\omega \in \mathbb{P}\Gamma(X, \Omega^q_X \otimes L) \,:\, \omega \text{ é LDS}\}.$$

$$B(q, L) = \{\omega \in D(q, L) \,:\, \text{integrabilidade}\}.$$

Espaços de distribuições/folheações

Lema

(1) $\{\omega = 0\} = \operatorname{Sing} \mathcal{K}(\omega)$.

(2) *X loc. fatorial $\Rightarrow$ toda $\mathcal{V}$ associada q-forma torcida LDS com coefs. em* $\det Q_{\mathcal{V}} = \left(\wedge^{\mathrm{top}} Q_{\mathcal{V}}\right)^{\vee\vee}$.

Exemplo

X liso, $G \circlearrowleft X$ e $\mathfrak{g} = H^0(T_X)$. Seja $\mathfrak{h} < \mathfrak{g}$ com $\operatorname{codim} \operatorname{Sing}(T_X/\mathcal{O}_X \otimes \mathfrak{h}) \geq 2$. Se $v_1^\natural \wedge \cdots \wedge v_m^\natural \in H^0(\wedge^m T_X) \rightsquigarrow$ forma torcida em $H^0(\wedge^m T_X) = H^0(\Omega^q \otimes \det T_X)$.

Definição

$$D(q, L) = \{\omega \in \mathbb{P}\Gamma(X, \Omega_X^q \otimes L) \ : \ \omega \text{ é LDS}\}.$$

$$B(q, L) = \{\omega \in D(q, L) \ : \ \text{integrabilidade}\}.$$

Espaços de subálgebras

Espaços de subálgebras

Seja $\mathfrak{g}/\mathbb{C}$ semi-simples. Seja $m < \dim \mathfrak{g}$.

Espaços de subálgebras

Seja $\mathfrak{g}/\mathbb{C}$ semi-simples. Seja $m < \dim \mathfrak{g}$.

Definição (Richardson)

Existe esquema

$$\mathrm{SLie}_m(\mathfrak{g}) \subset \mathrm{Grass}_m(\mathfrak{g})$$

Espaços de subálgebras

Seja $\mathfrak{g}/\mathbb{C}$ semi-simples. Seja $m < \dim \mathfrak{g}$.

Definição (Richardson)

Existe esquema

$$\mathrm{SLie}_m(\mathfrak{g}) \subset \mathrm{Grass}_m(\mathfrak{g})$$

cujos $\mathbb{C}$-pontos são as $\mathbb{C}$-subálgebras de $\mathfrak{g}$.

Espaços de subálgebras

Seja $\mathfrak{g}/\mathbb{C}$ semi-simples. Seja $m < \dim \mathfrak{g}$.

Definição (Richardson)

Existe esquema

$$\mathrm{SLie}_m(\mathfrak{g}) \subset \mathrm{Grass}_m(\mathfrak{g})$$

cujos $\mathbb{C}$-pontos são as $\mathbb{C}$-subálgebras de $\mathfrak{g}$.

Teorema

Existe bijeção

$$\boldsymbol{PN} : \left\{ \begin{array}{c} \textit{comps irredutível} \\ \textit{de } \mathrm{SLie}_2 \end{array} \right\} \xrightarrow{\sim} \{\textit{órbs. nilpotentes em } \mathfrak{g}\}.$$

Espaços de subálgebras

Seja $\mathfrak{g}/\mathbb{C}$ semi-simples. Seja $m < \dim \mathfrak{g}$.

Definição (Richardson)

Existe esquema

$$\mathrm{SLie}_m(\mathfrak{g}) \subset \mathrm{Grass}_m(\mathfrak{g})$$

cujos $\mathbb{C}$-pontos são as $\mathbb{C}$-subálgebras de $\mathfrak{g}$.

Teorema

Existe bijeção

$$\textbf{\textit{PN}} : \left\{ \begin{array}{c} \textit{comps irredutível} \\ \textit{de } \mathrm{SLie}_2 \end{array} \right\} \xrightarrow{\sim} \{\textit{órbs. nilpotentes em } \mathfrak{g}\}.$$

Precisamente: Seja $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ de dim. 2.

Espaços de subálgebras

Seja $\mathfrak{g}/\mathbb{C}$ semi-simples. Seja $m < \dim \mathfrak{g}$.

Definição (Richardson)

Existe esquema

$$\mathrm{SLie}_m(\mathfrak{g}) \subset \mathrm{Grass}_m(\mathfrak{g})$$

cujos $\mathbb{C}$-pontos são as $\mathbb{C}$-subálgebras de $\mathfrak{g}$.

Teorema

Existe bijeção

$$\boldsymbol{PN} : \left\{ \begin{array}{c} \textit{comps irredutível} \\ \textit{de } \mathrm{SLie}_2 \end{array} \right\} \xrightarrow{\sim} \{\textit{órbs. nilpotentes em } \mathfrak{g}\}.$$

Precisamente: Seja $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ de dim. 2.

(Ab) Ou bem $[\mathfrak{h}\mathfrak{h}] = 0$,

Espaços de subálgebras

Seja $\mathfrak{g}/\mathbb{C}$ semi-simples. Seja $m < \dim \mathfrak{g}$.

Definição (Richardson)

Existe esquema

$$\mathrm{SLie}_m(\mathfrak{g}) \subset \mathrm{Grass}_m(\mathfrak{g})$$

cujos $\mathbb{C}$-pontos são as $\mathbb{C}$-subálgebras de $\mathfrak{g}$.

Teorema

Existe bijeção

$$\boldsymbol{PN} : \left\{ \begin{array}{c} \textit{comps irredutível} \\ \textit{de } \mathrm{SLie}_2 \end{array} \right\} \xrightarrow{\sim} \{\textit{órbs. nilpotentes em } \mathfrak{g}\}.$$

Precisamente: Seja $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ de dim. 2.

(Ab) Ou bem $[\mathfrak{h}\mathfrak{h}] = 0$,

(NAb) ou bem $[\mathfrak{h}\mathfrak{h}] = \mathbb{C}X$ com $X \in \mathfrak{g}_{\mathrm{nil}}$.

Espaço de subálgebras

Se (Ab)

$$\boldsymbol{PN}(\mathfrak{h}) = G \cdot 0 = 0.$$

Espaço de subálgebras

Se (Ab)

$$\boldsymbol{PN}(\mathfrak{h}) = G \cdot 0 = 0.$$

Se (NAb)

$$\boldsymbol{PN}(\mathfrak{h}) = G \cdot X.$$

Espaço de subálgebras

Se (Ab)

$$\boldsymbol{PN}(\mathfrak{h}) = G \cdot 0 = 0.$$

Se (NAb)

$$\boldsymbol{PN}(\mathfrak{h}) = G \cdot X.$$

(*Importante:* As órbitas são cones!)

Espaço de subálgebras

Se (Ab)

$$\boldsymbol{PN}(\mathfrak{h}) = G \cdot 0 = 0.$$

Se (NAb)

$$\boldsymbol{PN}(\mathfrak{h}) = G \cdot X.$$

(*Importante:* As órbitas são cones!)
Parte da prova usa:

Teorema (Richardson)

Espaço de subálgebras

Se (Ab)

$$\boldsymbol{PN}(\mathfrak{h}) = G \cdot 0 = 0.$$

Se (NAb)

$$\boldsymbol{PN}(\mathfrak{h}) = G \cdot X.$$

(*Importante:* As órbitas são cones!)
Parte da prova usa:

Teorema (Richardson)

O conjunto algébrico

$$\{(x, y) \in \mathfrak{g}^2 \ : \ [xy] = 0\}$$

é irredutível.

Se (Ab)

$$\boldsymbol{PN}(\mathfrak{h}) = G \cdot 0 = 0.$$

Se (NAb)

$$\boldsymbol{PN}(\mathfrak{h}) = G \cdot X.$$

(*Importante:* As órbitas são cones!)
Parte da prova usa:

Teorema (Richardson)

O conjunto algébrico

$$\{(x, y) \in \mathfrak{g}^2 \,:\, [xy] = 0\}$$

é irredutível.

Corolário

O subconjunto "abeliano" $\mathrm{SLie}_2^{\mathrm{abel}}(\mathfrak{g}) = \{\boldsymbol{PN} = 0\}$.

Se (Ab)

$$\boldsymbol{PN}(\mathfrak{h}) = G \cdot 0 = 0.$$

Se (NAb)

$$\boldsymbol{PN}(\mathfrak{h}) = G \cdot X.$$

(*Importante:* As órbitas são cones!)
Parte da prova usa:

Teorema (Richardson)

O conjunto algébrico

$$\{(x, y) \in \mathfrak{g}^2 \, : \, [xy] = 0\}$$

é irredutível.

Corolário

O subconjunto "abeliano" $\mathrm{SLie}_2^{\mathrm{abel}}(\mathfrak{g}) = \{\boldsymbol{PN} = 0\}$*. é componente irredutível.*

Espaço de subálgebras

Ideia para resto da prova:

Espaço de subálgebras

Ideia para resto da prova:

- $N =$ órbitas nilpotentes não nulas.

Espaço de subálgebras

Ideia para resto da prova:

- $N =$ órbitas nilpotentes não nulas.
- Dada $n \in N \rightsquigarrow e_n \in n$.

Espaço de subálgebras

Ideia para resto da prova:

- $N =$ órbitas nilpotentes não nulas.
- Dada $n \in N \rightsquigarrow e_n \in n$.
- Seja $A_n = \{x \in \mathfrak{g} : [xe_n] = e_n\}$.

Espaço de subálgebras

Ideia para resto da prova:

- $N =$ órbitas nilpotentes não nulas.
- Dada $n \in N \rightsquigarrow e_n \in n$.
- Seja $A_n = \{x \in \mathfrak{g} : [xe_n] = e_n\}$. $\rightsquigarrow$ subespaço linear $\neq 0$ (Jacobson-Morozov).

Espaço de subálgebras

Ideia para resto da prova:

• $N =$ órbitas nilpotentes não nulas.

• Dada $n \in N \rightsquigarrow e_n \in n$.

• Seja $A_n = \{x \in \mathfrak{g} : [xe_n] = e_n\}$. $\rightsquigarrow$ subespaço linear $\neq 0$ (Jacobson-Morozov).

• Seja

$$\varphi_n : G \times A_n \longrightarrow \mathrm{SLie}^{\mathrm{n.abel}}, \qquad (g, x) \longmapsto \mathbb{C}g(e_n) + \mathbb{C}g(x).$$

Ideia para resto da prova:

- $N =$ órbitas nilpotentes não nulas.
- Dada $n \in N \rightsquigarrow e_n \in n$.
- Seja $A_n = \{x \in \mathfrak{g} \ : \ [xe_n] = e_n\}$. $\rightsquigarrow$ subespaço linear $\neq 0$ (Jacobson-Morozov).
- Seja

$$\varphi_n : G \times A_n \longrightarrow \mathrm{SLie}^{\mathrm{n.abel}}, \qquad (g, x) \longmapsto \mathbb{C}g(e_n) + \mathbb{C}g(x).$$

- $\{\boldsymbol{PN} = n\} = \mathrm{Im}(\varphi_n)$.

Espaço de subálgebras

Ideia para resto da prova:

- N = órbitas nilpotentes não nulas.
- Dada $n \in N \rightsquigarrow e_n \in n$.
- Seja $A_n = \{x \in \mathfrak{g} : [xe_n] = e_n\}$. $\rightsquigarrow$ subespaço linear $\neq 0$ (Jacobson-Morozov).
- Seja

$$\varphi_n : G \times A_n \longrightarrow \mathrm{SLie}^{\mathrm{n.abel}}, \qquad (g, x) \longmapsto \mathbb{C}g(e_n) + \mathbb{C}g(x).$$

- $\{\boldsymbol{PN} = n\} = \mathrm{Im}(\varphi_n)$.
- $\bigsqcup_n \mathrm{Im}(\varphi_n) = \mathrm{SLie}_2^{\mathrm{n.abel.}}$

Espaço de subálgebras

Ideia para resto da prova:

- $N =$ órbitas nilpotentes não nulas.
- Dada $n \in N \rightsquigarrow e_n \in n$.
- Seja $A_n = \{x \in \mathfrak{g} \,:\, [xe_n] = e_n\}$. $\rightsquigarrow$ subespaço linear $\neq 0$

(Jacobson-Morozov).

- Seja

$$\varphi_n : G \times A_n \longrightarrow \mathrm{SLie}^{\mathrm{n.abel}}, \qquad (g, x) \longmapsto \mathbb{C}g(e_n) + \mathbb{C}g(x).$$

- $\{\boldsymbol{PN} = n\} = \mathrm{Im}(\varphi_n)$.
- $\bigsqcup_n \mathrm{Im}(\varphi_n) = \mathrm{SLie}_2^{\mathrm{n.abel.}}$
- Σ componente irredutível $\mathrm{SLie}_2^{\mathrm{n.abel}}$

Espaço de subálgebras

Ideia para resto da prova:

- $N =$ órbitas nilpotentes não nulas.
- Dada $n \in N \rightsquigarrow e_n \in n$.
- Seja $A_n = \{x \in \mathfrak{g} : [xe_n] = e_n\}$. $\rightsquigarrow$ subespaço linear $\neq 0$

(Jacobson-Morozov).

- Seja

$$\varphi_n : G \times A_n \longrightarrow \mathrm{SLie}^{\mathrm{n.abel}}, \qquad (g, x) \longmapsto \mathbb{C}g(e_n) + \mathbb{C}g(x).$$

- $\{\boldsymbol{PN} = n\} = \mathrm{Im}(\varphi_n)$.
- $\bigsqcup_n \mathrm{Im}(\varphi_n) = \mathrm{SLie}_2^{\mathrm{n.abel.}}$
- Σ componente irredutível $\mathrm{SLie}_2^{\mathrm{n.abel}} \rightsquigarrow \Sigma = \overline{\mathrm{Im}(\varphi_n)}$ único n.

Espaço de subálgebras

Ideia para resto da prova:

- $N =$ órbitas nilpotentes não nulas.
- Dada $n \in N \rightsquigarrow e_n \in n$.
- Seja $A_n = \{x \in \mathfrak{g} : [xe_n] = e_n\}$. $\rightsquigarrow$ subespaço linear $\neq 0$ (Jacobson-Morozov).
- Seja

$$\varphi_n : G \times A_n \longrightarrow \mathrm{SLie}^{\text{n.abel}}, \qquad (g, x) \longmapsto \mathbb{C}g(e_n) + \mathbb{C}g(x).$$

- $\{\boldsymbol{PN} = n\} = \mathrm{Im}(\varphi_n)$.
- $\bigsqcup_n \mathrm{Im}(\varphi_n) = \mathrm{SLie}_2^{\text{n.abel.}}$
- Σ componente irredutível $\mathrm{SLie}_2^{\text{n.abel}} \rightsquigarrow \Sigma = \overline{\mathrm{Im}(\varphi_n)}$ único n.
- Temos

$$\{\text{Comps. Irredutíveis}\} \hookrightarrow N.$$

Espaço de subálgebras

Ideia para resto da prova:

- N = órbitas nilpotentes não nulas.
- Dada $n \in N \rightsquigarrow e_n \in n$.
- Seja $A_n = \{x \in \mathfrak{g} \,:\, [xe_n] = e_n\}$. $\rightsquigarrow$ subespaço linear $\neq 0$ (Jacobson-Morozov).
- Seja

$$\varphi_n : G \times A_n \longrightarrow \mathrm{SLie}^{\mathrm{n.abel}}, \qquad (g, x) \longmapsto \mathbb{C}g(e_n) + \mathbb{C}g(x).$$

- $\{\boldsymbol{PN} = n\} = \mathrm{Im}(\varphi_n)$.
- $\bigsqcup_n \mathrm{Im}(\varphi_n) = \mathrm{SLie}_2^{\mathrm{n.abel.}}$
- Σ componente irredutível $\mathrm{SLie}_2^{\mathrm{n.abel}} \rightsquigarrow \Sigma = \overline{\mathrm{Im}(\varphi_n)}$ único n.
- Temos

$$\{\text{Comps. Irredutíveis}\} \hookrightarrow N.$$

- Sobrejetividade: $\mathrm{SLie}_2(\mathfrak{g})$ é lisa se $\mathfrak{h}$ "algébrica".

Componentes irredutíveis de $B(n-2, \det T_X)$

Componentes irredutíveis de $B(n-2, \det T_X)$

- $\mathfrak{g}$ simples; $\dim \mathfrak{g} = n$.
- $\mathfrak{g} \notin \{A_1, A_2, A_3, B_2, C_3, G_2\}$.

Componentes irredutíveis de $B(n-2, \det T_X)$

- $\mathfrak{g}$ simples; $\dim \mathfrak{g} = n$.
- $\mathfrak{g} \notin \{A_1, A_2, A_3, B_2, C_3, G_2\}$.
- G adjunto com $\mathrm{Lie}\, G = \mathfrak{g}$.

Componentes irredutíveis de $B(n-2, \det T_X)$

- $\mathfrak{g}$ simples; $\dim \mathfrak{g} = n$.
- $\mathfrak{g} \notin \{A_1, A_2, A_3, B_2, C_3, G_2\}$.
- G adjunto com $\mathrm{Lie}\, G = \mathfrak{g}$.
- X variedade de Borel de G.

Teorema

Componentes irredutíveis de $B(n-2, \det T_X)$

- $\mathfrak{g}$ simples; $\dim \mathfrak{g} = n$.
- $\mathfrak{g} \notin \{A_1, A_2, A_3, B_2, C_3, G_2\}$.
- G adjunto com $\mathrm{Lie}\, G = \mathfrak{g}$.
- X variedade de Borel de G.

Teorema

(1) *Existe morfismo* $\psi : \mathrm{SLie}_2(\mathfrak{g}) \to B(n-2, \det T_X)$

Componentes irredutíveis de $B(n-2, \det T_X)$

- $\mathfrak{g}$ simples; $\dim \mathfrak{g} = n$.
- $\mathfrak{g} \notin \{A_1, A_2, A_3, B_2, C_3, G_2\}$.
- G adjunto com $\mathrm{Lie}\, G = \mathfrak{g}$.
- X variedade de Borel de G.

Teorema

(1) *Existe morfismo* $\psi : \mathrm{SLie}_2(\mathfrak{g}) \to B(n-2, \det T_X)$ *tal que para cada* $\mathfrak{h}$*,*

Componentes irredutíveis de $B(n-2, \det T_X)$

- $\mathfrak{g}$ simples; $\dim \mathfrak{g} = n$.
- $\mathfrak{g} \notin \{A_1, A_2, A_3, B_2, C_3, G_2\}$.
- G adjunto com $\mathrm{Lie}\, G = \mathfrak{g}$.
- X variedade de Borel de G.

Teorema

(1) *Existe morfismo* $\psi : \mathrm{SLie}_2(\mathfrak{g}) \to B(n-2, \det T_X)$ *tal que para cada* $\mathfrak{h}$, $\psi(\mathfrak{h})$ *é a forma torcida associada à* $\mathcal{A}(\mathfrak{h})$.

Componentes irredutíveis de $B(n-2, \det T_X)$

- $\mathfrak{g}$ simples; $\dim \mathfrak{g} = n$.
- $\mathfrak{g} \notin \{A_1, A_2, A_3, B_2, C_3, G_2\}$.
- G adjunto com $\mathrm{Lie}\, G = \mathfrak{g}$.
- X variedade de Borel de G.

Teorema

(1) *Existe morfismo* $\psi : \mathrm{SLie}_2(\mathfrak{g}) \to B(n-2, \det T_X)$ *tal que para cada* $\mathfrak{h}$, $\psi(\mathfrak{h})$ *é a forma torcida associada à* $\mathcal{A}(\mathfrak{h})$.

(2) $\mathrm{Im}(\psi)$ *é aberta.*

Componentes irredutíveis de $B(n-2, \det T_X)$

- $\mathfrak{g}$ simples; $\dim \mathfrak{g} = n$.
- $\mathfrak{g} \notin \{A_1, A_2, A_3, B_2, C_3, G_2\}$.
- G adjunto com $\mathrm{Lie}\, G = \mathfrak{g}$.
- X variedade de Borel de G.

Teorema

(1) *Existe morfismo* $\psi : \mathrm{SLie}_2(\mathfrak{g}) \to B(n-2, \det T_X)$ *tal que para cada* $\mathfrak{h}$, $\psi(\mathfrak{h})$ *é a forma torcida associada à* $\mathcal{A}(\mathfrak{h})$.

(2) $\mathrm{Im}(\psi)$ *é aberta.*

(3)

$$\# \begin{array}{c} \textit{componentes irredutíveis} \\ \textit{de } B(n-2, \det T_X) \end{array} \geq \# \textit{ órbitas nilp.}$$

Fim.

Obrigado pela atenção!