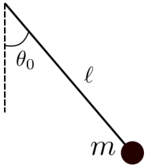
Períodos

Tiago J. Fonseca

IMECC-Unicamp

28 de março de 2023

Como encontrar o período T de um pêndulo?



Equação do pêndulo:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{\ell}\sin\theta = 0, \qquad \theta(0) = \theta_0$$

- Solução aproximada ($\sin\theta \approx \theta$): $T \approx 2\pi\sqrt{\ell/g}$
- Solução exata:

$$T = 4\sqrt{\frac{\ell}{g}}\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}, \qquad k = \sin(\theta_0/2)$$

- Fórmula de adição:

$$\int_0^{z_1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}} + \int_0^{z_2} \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}} \equiv \int_0^{z_3} \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}} \quad \text{mod } \omega\mathbb{Z}+i\omega\mathbb{Z}$$

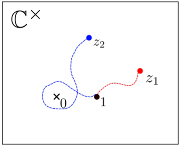
onde

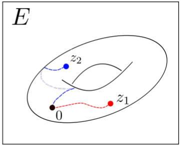
$$z_3 = \frac{z_1\sqrt{1-z_2^4}+z_2\sqrt{1-z_1^4}}{1+z_1^2 z_2^2}$$

- Análoga à fórmula do logarítmo:

$$\int_1^{z_1} \frac{dx}{x} + \int_1^{z_2} \frac{dx}{x} \equiv \int_1^{z_1 z_2} \frac{dx}{x} \quad \text{mod } 2\pi i\mathbb{Z}$$

- Correspondem a grupos algébricos:





Definição (Kontsevich–Zagier '01)

Um período é um número complexo cujas partes real e imaginária são integrais convergentes

$$\int_D f(x_1, \ldots, x_n) dx_1 \cdots dx_n,$$

onde f é uma função racional (ou algébrica) com coeficientes racionais e o domínio $D \subset \mathbb{R}^n$ é dado por desigualdades polinomiais com coeficientes racionais.

Alguns exemplos:

- Números algébricos: $\sqrt{5} = \int_{2x^2 \leq 5} dx$
- Áreas, volumes: π
- Logarítmos de números algébricos: $\log(2) = \int_1^2 \frac{dx}{x}$
- Valores de ζ: $\zeta(3) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} = \int_{0<x_1<x_2<x_3<1} \frac{dx_1 dx_2 dx_3}{(1-x_1)x_2 x_3}$

Mais exemplos:

- Integrais abelianas: $\omega = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-t^4}}$
- Valores especiais de funções L (reguladores): $\zeta_K^*(0) = -\frac{h_K r_k}{\omega_K}$
- Amplitudes de diagramas de Feynman:

$$\Phi\left(-\!\!\bigcirc\!\!-\right) = \int_{\mathbb{R}^D} \frac{\mathrm{d}^D k}{\pi^{D/2}} \frac{1}{k^{2a_1}(q+k)^{2a_2}}$$

Não-exemplos:

- $e = 2,718\ldots$ (conjectural)
- $\Gamma(p/q)$ (conjectural)
- $1/\pi$ (conjectural)
- Yoshinaga ('08), Tent-Ziegler ('10): $0,38883222177\ldots$

Propriedades básicas:

- O subconjunto dos períodos $\mathcal{P} \subset \mathbb{C}$ é enumerável.
- $\mathcal{P}$ é um subanel de $\mathbb{C}$.
- Exemplo: o produto é dado pelo teorema de Fubini

$$\left(\int_D f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n\right) \cdot \left(\int_E g(y_1, \dots, y_m) dy_1 \dots dy_m\right)$$

$$= \int_{D \times E} f(x_1, \dots, x_n) g(y_1, \dots, y_m) dx_1 \dots dx_n dy_1 \dots dy_m$$

Relações:

1. Aditividade:

$$\int_D (\omega_1 + \omega_2) = \int_D \omega_1 + \int_D \omega_2, \qquad \int_{D_1 \sqcup D_2} \omega = \int_{D_1} \omega + \int_{D_2} \omega$$

2. Mudança de variáveis algébrica:

$$\int_{\varphi(D)} \omega = \int_D \varphi^*(\omega)$$

3. Fórmula de Stokes:

$$\int_D d\omega = \int_{\partial D} \omega.$$

Conjectura (Kontsevich–Zagier)

Toda relação linear entre períodos é uma combinação das relações acima.

Exemplo (Calabi)

A identidade de Euler

$$\zeta(2) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

é equivalente a

$$\iint_{0 \leq x, y \leq 1} \frac{2dxdy}{(1 - xy)\sqrt{xy}} = \iint_{u,v \geq 0} \frac{4dudv}{(1 + u^2)(1 + v^2)}.$$

Considere a mudança de variáveis

$$(x, y) = \left(u^2 \frac{1 + v^2}{1 + u^2}, v^2 \frac{1 + u^2}{1 + v^2} \right).$$

Ponto de vista da geometria algébrica:

- Dado um par de variedades algébricas $(X, Y \subset X)$ sobre $\mathbb{Q}$, um período é uma integral

$$\int_D \omega$$

onde $\omega \in \Omega^n_{X/\mathbb{Q}}$ e $\partial D \subset Y$.

- Exemplo: $X = \mathbb{A}^1 \setminus \{0\}$, $Y = \{1, 2\}$, $\omega = \frac{dx}{x}$, $D = [1, 2]$

$$\int_D \omega = \int_1^2 \frac{dx}{x} = \log 2.$$

- Um período é um coeficiente matricial do isomorfismo

$$\int : H^n_{dR}(X, Y) \otimes \mathbb{C} \xrightarrow{\sim} H^n_{sing}(X, Y) \otimes \mathbb{C}$$

- Teoria de motivos (cohomologia de variedades algébricas).

Conjectura (Grothendieck)

Toda relação algébrica entre períodos tem origem motívica.

- Enunciados de transcendência/independência algébrica.
- Grupo de Galois motívico (grupo pro-algébrico sobre $\mathbb{Q}$) age sobre períodos.
- Exemplo: $\alpha \in \overline{\mathbb{Q}}$, conjugados de $\log \alpha$?

$$\log z = \int_1^z \frac{dx}{x} \qquad \overset{\textit{monodromia}}{\rightsquigarrow} \qquad \log z + 2\pi i$$

Conjugados de $\log \alpha$ são da forma

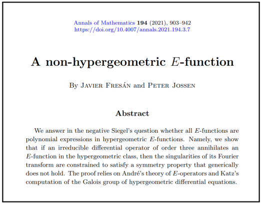
$$\log \alpha + v 2\pi i, \qquad v \in \mathbb{Q}$$

Conjugados de π são da forma

$$u\pi, \qquad u \in \mathbb{Q}^{\times}$$

Exemplo recente de “aplicação”:

- E-função: $f(z) = \sum_{n \geq 1} \frac{a_n}{n} z^n \in \overline{\mathbb{Q}}[\![z]\!]$ que satisfaz uma equação diferencial linear e uma condição de crescimento.
- Siegel (1929): toda E-função é combinação algébrica de E-funções hipergeométricas?



Annals of Mathematics **194** (2021), 903–942
https://doi.org/10.4007/annals.2021.194.3.7

A non-hypergeometric E-function

By Javier Fresán and Peter Jossen

Abstract

We answer in the negative Siegel's question whether all E-functions are polynomial expressions in hypergeometric E-functions. Namely, we show that if an irreducible differential operator of order three annihilates an E-function in the hypergeometric class, then the singularities of its Fourier transform are constrained to satisfy a symmetry property that generically does not hold. The proof relies on André's theory of E-operators and Katz's computation of the Galois group of hypergeometric differential equations.

- E-funções são períodos exponenciais. $\mathcal{D}$-módulos, teoria de Galois diferencial, etc.
- Fischler–Rivoal ('20): resposta afirmativa ao problema de Siegel contradiz a conjectura de períodos.

E as equações KZB?

- Funções de períodos satisfazem equações diferenciais algébricas (Picard–Fuchs, Gauss–Manin).
- Se $A_0, A_1 \in M_{n\times n}(\mathbb{Q})$ são simultaneamente nilpotentes, as soluções da equação

$$d + A_0 \frac{dz}{z} + A_1 \frac{dz}{z-1} = 0$$

  são dadas por polilogarítmos múltiplos:

$$Li_{n_1,\ldots,n_r}(z) = \sum_{0<k_1<\cdots<k_r} \frac{z^{k_r}}{k_1^{n_1}\cdots k_r^{n_r}}$$

  que são funções de períodos. Exemplo:

$$Li_2(z) = \int_0^z \int_0^y \frac{dx}{x-1} \frac{dy}{y}$$

- Considere $\mathfrak{g} = \mathbb{L}\widehat{(x_0, x_1)} \leq \mathbb{C}\langle\langle x_0, x_1 \rangle\rangle$ (álgebra de Lie pro-nilpotente).

- As equações acima derivam da *equação KZ*:

  $$d + \omega_{KZ} = 0, \qquad \omega_{KZ} = x_0 \frac{dz}{z} + x_1 \frac{dz}{z-1} \in \mathfrak{g} \otimes \Omega^1(\mathbb{C} \setminus \{0, 1\})$$

  Teoria conforme de campos, representações de grupos de tranças, etc.

- Análogos elípticos? Versões elípticas de polilogarítmos múltiplos? Integrais iteradas em curvas elípticas?

- Curva elíptica como toro complexo $E = \mathbb{C}^\times / q^{\mathbb{Z}}$, onde $|q| < 1$.
- Dilogarítmo elíptico (Bloch '00):

$$D_E(z) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} \mathcal{L}_2(q^m z)$$

onde $\mathcal{L}_2(z) = -2iIm(Li_2(z)) + 2 \log|z| \log(1 - \overline{z})$.

- Colaboração com Nils Matthes: teoria algébrica (motívica) de polilogarítmos múltiplos elípticos.
- Primeira etapa: descrever suas equações diferenciais algebricamente.

- Equações KZB universais ('10):

Universal KZB Equations: The Elliptic Case

Damien Calaque,[1] Benjamin Enriquez,[2] and Pavel Etingof[3]

[1] Université Lyon 1, Institut Camille Jordan (CNRS), F-69622 Villeurbanne, France calaque@math.univ-lyon1.fr
[2] ULP Strasbourg 1 et IRMA (CNRS), 7 rue René Descartes, F-67084 Strasbourg, France enriquez@math.u-strasbg.fr
[3] Department of Mathematics, MIT, Cambridge, MA 02139, USA etingof@math.mit.edu

To Yuri Ivanovich Manin on his 70th birthday

Summary. We define a universal version of the Knizhnik–Zamolodchikov–Bernard (KZB) connection in genus 1. This is a flat connection over a principal bundle on the moduli space of elliptic curves with marked points. It restricts to a flat connection on configuration spaces of points on elliptic curves, which can be used for proving the formality of the pure braid groups on genus 1 surfaces. We study the monodromy of this connection and show that it gives rise to a relation between the KZ associator and a generating series for iterated integrals of Eisenstein forms. We show that the universal KZB connection is realized as the usual KZB connection for simple Lie algebras, and that in the $\mathfrak{sl}_n$ case this realization factors through the Cherednik algebras. This leads us to define a functor from the category of equivariant D-modules on $\mathfrak{sl}_n$ to that of modules over the Cherednik algebra, and to compute the character of irreducible equivariant D-modules over $\mathfrak{sl}_n$ that are supported on the nilpotent cone.

- Generalização em "nível N": Calaque–Gonzalez ('20).
- Fórmula (analítica) em nível 1:

1.1.3. *Moduli: universal KZB connection.* In [8], Calaque, Enriquez, and Etingof promote the elliptic KZB connection to an integrable connection on a two-dimensional space which also takes into account the variation in the moduli direction τ. If $\mathfrak{H}$ denotes the upper half-plane, the *universal elliptic KZB connection* is the logarithmic integrable connection on $\mathcal{V}_{\mathrm{KZB}}$, the trivial infinite-rank vector bundle over $\mathfrak{H} \times \mathbb{C}$ with fibre $\mathbb{C}\langle\langle a, b\rangle\rangle$, defined by

$$\nabla_{\mathrm{KZB}} = d - dz \otimes \mathrm{ad}_a\, F_\tau(z, \mathrm{ad}_a)b - \frac{d\tau}{2\pi i} \otimes \left(\mathrm{ad}_a\, G_\tau(z, \mathrm{ad}_a)b + D_\tau\right), \tag{6}$$

where $G_\tau(z,x) = \frac{\partial}{\partial x} F_\tau(z,x) + \frac{1}{x^2}$, and

$$D_\tau = b\frac{\partial}{\partial a} + \frac{1}{2}\sum_{n\geq 2}(2n-1)G_{2n}(\tau) \sum_{\substack{j+k=2n-1 \\ j,k>0}} [(-\mathrm{ad}_a)^j b, \mathrm{ad}_a^k b]\frac{\partial}{\partial b} \tag{7}$$

is a derivation of $\mathbb{C}\langle\langle a, b\rangle\rangle$ given by the classical Eisenstein series $G_{2n}(\tau) = \sum_{(r,s)\neq(0,0)}(r + s\tau)^{-2n}$.

Se as equações KZB correspondem a funções de períodos, então elas deveriam ser algébricas.

Teorema (F.–Matthes '23)

As equações KZB universais em nível N são algébricas e definidas sobre $\mathbb{Q}(e^{2\pi i/N})$.

ELLIPTIC KZB CONNECTIONS VIA UNIVERSAL VECTOR EXTENSIONS

TIAGO J. FONSECA AND NILS MATTHES

Abstract. Let S be a scheme of characteristic zero, $E \to S$ be an elliptic curve, $f : E^\natural \to S$ be its universal vector extension, and $\pi : E^\natural \to E$ be the natural projection. Given a finite subset of torsion sections $Z \subset E(S)$, we study the dg-algebra over $\mathcal{O}_S$ of relative logarithmic differentials $\mathcal{A} = f_*\Omega^\bullet_{E^\natural/S}(\log \pi^{-1}Z)$. In particular, we prove that the residue exact sequence in degree one splits canonically, and we derive the formality of $\mathcal{A}$. When S is smooth over a field k of characteristic zero, we prove that sections of $\mathcal{A}^1$ admit canonical lifts to absolute logarithmic differentials in $f_*\Omega^1_{E^\natural/k}(\log \pi^{-1}Z)$. This extends a well known property for regular differentials given by the 'crystalline nature' of universal vector extensions.

Using the formalism of bar complexes and their relative versions, we apply the above results to give a new, purely algebraic, construction of the so-called *universal elliptic KZB connection* in arbitrary level. We compute explicit analytic formulae, and we compare our results with previous approaches to elliptic KZB equations and multiple elliptic polylogarithms in the literature.

Demonstração baseada na geometria de certas extensões de curvas elípticas (na categoria de grupos algébricos).

Obrigado!