Sobre a natureza aritmética das séries de Poincaré

Tiago J. Fonseca

IMECC - Unicamp, Fapesp

LATeN, 4 de maio de 2022

- $\mathfrak{H} = \{z \in \mathbb{C} \mid Im(z) > 0\}$
- $\Gamma_0(N) = \left\{ \left(\begin{array}{cc} a & b \\ c & d \end{array} \right) \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \middle| c \equiv 0 \pmod N \right\}$

Definição

Uma *forma modular fracamente holomorfa de peso k e nível N* é uma função holomorfa $f : \mathfrak{H} \to \mathbb{C}$ satisfazendo

$$f\left(\frac{az+b}{cz+d}\right) = (cz+d)^k f(z), \qquad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma_0(N)$$

e "meromorfa nas cúspides".

Espaço vetorial complexo $M_k^!(\Gamma_0(N))$.

Definição

Suponha $k \geq 4$ e seja $m \in \mathbb{Z}$. A *m-ésima série de Poincaré de peso k e nível N* é definida por

$$P_{m,k,N}(z) = \sum_{\gamma \in \Gamma_\infty \backslash \Gamma_0(N)} \frac{e^{2\pi i m \gamma z}}{(cz+d)^k} \in M_k^!(\Gamma_0(N))$$

onde

$$\Gamma_\infty = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma_0(N) \,\middle|\, c = 0 \right\} = \left\{ \pm \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \,\middle|\, n \in \mathbb{Z} \right\}$$

- Podemos também definir séries de Poincaré de peso $k = 2$ (truque de Hecke)
- $m = 0 \implies$ série de Eisenstein

Toda $f \in M_k^!(\Gamma_0(N))$ admite uma série de Fourier (q-expansão):

$$f(z) = \sum_{n \gg -\infty} a_n(f) q^n, \qquad q = e^{2\pi i z}$$

Exemplo

Se $k \geq 4$,

$$P_{0,k,1}(z) = E_k(z) = 1 - \frac{2k}{B_k} \sum_{n \geq 1} \sigma_{k-1}(n) q^n \in M_k(\Gamma_0(1))$$

Exemplo

- $\Delta(z) = \frac{E_4(z)^3 - E_6(z)^2}{1728} = q \prod_{n \geq 1} (1 - q^n)^{24} \in S_{12}(\Gamma_0(1))$
- $j(z) = \frac{E_4(z)^3}{\Delta(z)} = \frac{1}{q} + 744 + 196884q + \cdots \in M_0^!(\Gamma_0(1))$

Definição (Produto interno de Petersson)

Para duas formas modulares cuspidais $f, g \in S_k(\Gamma_0(N))$, definimos

$$(f, g)_{Pet} = \int_{\Gamma_0(N)\backslash\mathfrak{H}} f(z)\overline{g(z)}y^k \frac{dxdy}{y^2}$$

where $z = x + iy$.

Teorema (Petersson)

Para $m \geq 1$, temos $P_{m,k,N} \in S_k(\Gamma_0(N))$ e

$$(f, P_{m,k,N})_{Pet} = \frac{(k-2)!}{(4\pi m)^{k-1}} a_m(f)$$

para toda $f \in S_k(\Gamma_0(N))$.

Corolário

A séries de Poincaré $P_{m,k,N}$, $m \geq 1$, geram $S_k(\Gamma_0(N))$ como espaço vetorial.

O que podemos dizer sobre os coeficientes de Fourier de séries de Poincaré?

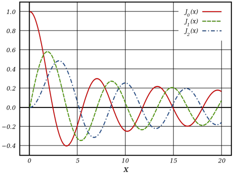
- Existem fórmulas explícitas?
- Eles são algébricos ou transcendentes?

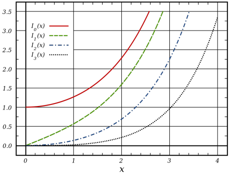
Fórmulas clássicas ($m > 0$):

$$P_{m,K,N}(z) = q^m + \sum_{n \geq 1} \left(2\pi(-1)^{\frac{k}{2}} \left(\frac{n}{m}\right)^{\frac{k-1}{2}} \sum_{\substack{c \geq 1 \\ N|c}} \frac{K(m,n;c)}{c} J_{k-1}\left(\frac{4\pi\sqrt{mn}}{c}\right) \right) q^n$$

$$P_{-m,K,N}(z) = q^{-m} + \sum_{n \geq 1} \left(2\pi(-1)^{\frac{k}{2}} \left(\frac{n}{m}\right)^{\frac{k-1}{2}} \sum_{\substack{c \geq 1 \\ N|c}} \frac{K(-m,n;c)}{c} I_{k-1}\left(\frac{4\pi\sqrt{mn}}{c}\right) \right) q^n$$

- $K(a,b;c) = \sum_{x \in (\mathbb{Z}/c\mathbb{Z})^\times} e^{\frac{2\pi i}{c} ax + bx^{-1}} \in \mathbb{R} \cap \overline{\mathbb{Q}}$ soma de Kloosterman
- J_r, I_r funções de Bessel





H. POINCARÉ
Fonctions modulaires et fonctions fuchsiennes
Annales de la faculté des sciences de Toulouse 3e série, tome 3 (1911), p. 125-149.

Je me bornerai à constater que $\sum$ E n'est pas nul en général. Il reste à sommer par rapport à γ et notre coefficient s'écrit :

$$\sum_\gamma \mu_j \left[\sum \mathrm{E}\right] \mathrm{J}\left(m, \frac{4pj\pi^2}{\gamma^2}\right).$$

Il n'y a aucune raison pour qu'il y ait des relations linéaires entre les valeurs des fonctions de Bessel $\mathrm{J}\left(m, \frac{4pj\pi^2}{\gamma^2}\right)$ correspondant aux différentes valeurs de γ. Il n'y a donc aucune raison pour que ce coefficient s'annule.

Il en va tout différemment dans le cas de $p = 0$; nos fonctions J se réduisent à une constante simple que je puis faire sortir du signe $\sum$, de sorte que notre coefficient s'écrit :

$$\mu_j \mathrm{J}(m, 0) \sum_\gamma \left[\sum \mathrm{E}\right].$$

- $P_{1,12,1} = \lambda\Delta$, onde $\lambda = 2.84028...$

> ((1.5.4) is of course an algebraist's nightmare; one expresses a good integer like $\tau(n)$ as an infinite series with Bessel functions!)

Conjectura de Lehmer: $P_{m,12,1} \not\equiv 0$ para todo $m \geq 1$.

- $P_{-1,2,1} = -\frac{1}{2\pi i}\frac{dj}{dz} = \frac{1}{q} - 196884q + 42987520q^2 + \cdots$

Corolário: $a_n(j) \sim \frac{e^{4\pi\sqrt{n}}}{\sqrt{2}n^{3/4}}$ (Rademacher, Petersson)

- $P_{m,4,8} \equiv 0,\ m = 2, 4, 6, 8, \ldots$

- $P_{-1,4,9} = \frac{1}{q} + 2q^2 - 49q^5 + 48q^8 + 711q^{11} - \cdots \in \mathbb{Z}[\![q]\!]$

(Bruinier-Ono-Rhoades '08, Candelori '14)

- Como explicar este fenômeno de racionalidade?
- Existe interpretação geométrica para coeficientes de séries de Poincaré?

Períodos (à la Kontsevich-Zagier):

Definition. A *period* is a complex number whose real and imaginary parts are values of absolutely convergent integrals of rational functions with rational coefficients, over domains in $\mathbb{R}^n$ given by polynomial inequalities with rational coefficients.

Exemplo

X variedade algébrica afim suave sobre $\mathbb{Q}$

- $H^n_{dR}(X) = \Omega^n(X)^{d=0}/d\Omega^{n-1}(X) = \mathbb{Q}\cdot[\omega_1]\oplus\cdots\oplus\mathbb{Q}\cdot[\omega_r]$
- $H^n_B(X) = H_n(X(\mathbb{C});\mathbb{Q})^\vee = \mathbb{Q}\cdot[\sigma_1]^\vee\oplus\cdots\oplus\mathbb{Q}\cdot[\sigma_r]^\vee$
- Isomorfismo de comparação (Grothendieck '66)

$$\mathrm{comp} : H^n_{dR}(X)\otimes\mathbb{C} \xrightarrow{\sim} H^n_B(X)\otimes\mathbb{C}$$

- Matriz de períodos

$$P = \begin{pmatrix} \int_{\sigma_1}\omega_1 & \cdots & \int_{\sigma_1}\omega_r \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \int_{\sigma_r}\omega_1 & \cdots & \int_{\sigma_r}\omega_r \end{pmatrix} \in GL_r(\mathbb{C})$$

Afirmação

Coeficientes de Fourier de séries de Poincaré são dados por períodos de motivos modulares.

Exemplo

- Curva modular $X_0(11) = E : y^2 + y = x^3 - x^2 - 10x - 20$
- $H^1_{dR}(E) = \mathbb{Q} \cdot [\frac{dx}{2y+1}] \oplus \mathbb{Q} \cdot [x\frac{dx}{2y+1}]$, $H^1_B(E) = \mathbb{Q} \cdot [\gamma_1]^\vee \oplus \mathbb{Q} \cdot [\gamma_2]^\vee$
- Matriz de períodos:

$$P = \begin{pmatrix} \omega_1 & \eta_1 \\ \omega_2 & \eta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.269... & -2.214... \\ 0.634... + i1.458... & -1.107... + i2.405... \end{pmatrix}$$

- $a_1(P_{1,2,11}) = 1.696... = -\frac{2\pi i}{\omega_1\overline{\omega}_2 - \overline{\omega}_1\omega_2}$
- $a_1(P_{-1,2,11}) = -0.952... = \frac{\overline{\omega}_1\eta_2 - \overline{\omega}_2\eta_1}{\omega_1\overline{\omega}_2 - \overline{\omega}_1\omega_2} - 1$

Períodos univaluados (Brown-Dupont '18) de $H^n(X)$, onde X é afim e suave sobre $\mathbb{Q}$:

- Grosso modo, são combinações de integrais da forma $\int_\sigma \omega \wedge \overline{\eta}$, com $\omega, \eta \in \Omega^n(X)$.
- Conjugação complexa $X(\mathbb{C}) \to X(\mathbb{C})$ induz involução $F_\infty : H^n_B(X) \to H^n_B(X)$, que induz

$$sv : H^n_{dR}(X) \otimes \mathbb{R} \xrightarrow{\sim} H^n_{dR}(X) \otimes \mathbb{R}$$

- Matriz de períodos univaluados:

$$S = P^{-1}\overline{P} = P^{-1}F_\infty P \in GL_r(\mathbb{R})$$

Exemplo ($H^1(E)$)

$$S = \frac{1}{2\pi i}\begin{pmatrix} \overline{\omega}_1\eta_2 - \overline{\omega}_2\eta_1 & \overline{\eta}_1\eta_2 - \eta_1\overline{\eta}_2 \\ \omega_1\overline{\omega}_2 - \overline{\omega}_1\omega_2 & \omega_1\overline{\eta}_2 - \omega_2\overline{\eta}_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.028... & -1.695... \\ -0.589... & 0.028... \end{pmatrix}$$

Dado um nível $N \geq 1$, temos uma curva modular $Y_0(N)$ sobre $\mathbb{Q}$ tal que

$$Y_0(N)(\mathbb{C}) = \Gamma_0(N)\backslash\mathfrak{H}$$

A um peso $k \geq 2$ e um nível $N \geq 1$ associamos um motivo

$$M(k,N) = H^1_{cusp}(\mathcal{Y}_0(N), Sym^{k-2}H^1(\mathcal{E}/\mathcal{Y}_0(N)))$$

subquociente de

$$H^{k-1}(\underbrace{\mathcal{E} \times_{\mathcal{Y}_0(N)} \cdots \times_{\mathcal{Y}_0(N)} \mathcal{E}}_{k-2})$$

Exemplo

- Seja $X_0(N) = \overline{Y_0(N)}$. Então $M(2,N) = H^1(X_0(N))$.
- No exemplo anterior $X_0(11) = E$. Coeficientes de Fourier de $P_{m,2,11}$ são períodos univaluados de $M(2,11)$.

Teorema (F. '20)

Seja $S = (s_{ij})_{1\le i,j\le r} \in GL_r(\mathbb{R})$ *uma matriz de períodos univaluados de* $M(k,N)$*. Então,*

$$\mathbb{Q}(s_{ij} : 1 \le i,j \le r) = \mathbb{Q}(a_n(P_{m,k,N}) : m,n \in \mathbb{Z}).$$

- $\mathbb{Q}(a_n(P_{m,k,N}) : m,n \in \mathbb{Z})$ é finitamente gerado.
- Se $M(k,N) = 0$, então $a_n(P_{m,k,N}) \in \mathbb{Q}$ para todos m, n.

  Exemplo: $M(2,1) = H^1(X_0(1)) = H^1(\mathbb{P}^1) = 0$.

  $$P_{-1,2,1} = \frac{1}{q} - 196884q + 42987520q^2 + \cdots$$
- A conjectura de períodos de Grothendieck "explica" a natureza aritmética dos coeficientes de séries de Poincaré.

Seja $D = \frac{1}{2\pi i}\frac{d}{dz} = q\frac{d}{dq}$.

Teorema (Scholl '85, Coleman '96, Brown-Hain '18, ...)

Para todo $k \geq 2$, $N \geq 1$, existe um isomorfismo canônico

$$M(k, N)_{dR} \cong S_k^!(\Gamma_0(N))_{\mathbb{Q}} / D^{k-1} M_{2-k}^!(\Gamma_0(N))_{\mathbb{Q}}$$

[$f \in S_k^!$ se os termos constantes nas cúspides se anulam, e.g. $a_0(f) = 0$]

Exemplo ($k = 2$)

- Temos $M_2^!(\Gamma_0(N))_{\mathbb{Q}} \cong \Omega^1(Y_0(N))$ via $f \mapsto 2\pi i\, f(z)dz$, logo

$$M_2^!(\Gamma_0(N))_{\mathbb{Q}} / D M_0^!(\Gamma_0(N))_{\mathbb{Q}} \cong \Omega^1(Y_0(N))/d\mathcal{O}(Y_0(N)) = H^1_{\mathrm{dR}}(Y_0(N))$$

- $S_2^!(\Gamma_0(N))_{\mathbb{Q}}$: 1-formas cujos resíduos nas cúspides se anulam, logo

$$S_2^!(\Gamma_0(N))_{\mathbb{Q}} / D M_0^!(\Gamma_0(N))_{\mathbb{Q}} \cong H^1_{dR}(X_0(N)) = M(2, N)_{dR}$$

- Suponha que $M(k,N)$ tenha posto 2.
- Sejam $f \in S_k(\Gamma_0(N))_{\mathbb{Q}}$ e $g \in S_k^!(\Gamma_0(N))_{\mathbb{Q}}$ induzindo uma base de $M(k,N)_{dR}$.
- Seja $S = \left(\begin{smallmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{21} & s_{22} \end{smallmatrix}\right)$ a matriz de períodos univaluados correspondente.

Teorema (F. '20)

Para todo $m \geq 1$*, existe* $h_m \in M_{2-k}^!(\Gamma_0(N))_{\mathbb{Q}}$ *tal que, para todo* $n \geq 1$*,*

$$a_n(P_{m,k,N}) = -\frac{(k-2)!}{m^{k-1}} a_m(f) a_n(f) \frac{1}{s_{21}}$$

$$a_n(P_{-m,k,N}) = \frac{(k-2)!}{m^{k-1}} a_m(f) a_n(f) \frac{s_{11}}{s_{21}} + r_{m,n}$$

onde $r_{m,n} = \frac{(k-2)!}{m^{k-1}} a_m(f) a_n(g) + n^{k-1} a_n(h_m) \in \mathbb{Q}$.

Multiplicação complexa por $L = \mathbb{Q}(\sqrt{-d})$:

- Suponha que $M(k, N) \otimes L$ admite um endomorfismo não-trivial (f é uma forma modular CM).
- Obtemos $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ 0 & d \end{smallmatrix}\right) \in M_{2\times 2}(L)$ tal que

$$\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{21} & s_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{21} & s_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overline{a} & \overline{b} \\ 0 & \overline{d} \end{pmatrix}$$

- Logo:

$$\frac{s_{11}}{s_{21}} = \frac{b}{\overline{a} - a} \in L \cap \mathbb{R} = \mathbb{Q}$$

Exemplo

$M(4, 9)$ tem CM por $\mathbb{Q}(\sqrt{-3})$. Corolário: $P_{-m,4,9}$ tem coeficientes de Fourier racionais para todo $m \geq 1$.

Como provar os teoremas?

- Descrição explícita de

$$sv : M(k,N)_{dR} \otimes \mathbb{R} \to M(k,N)_{dR} \otimes \mathbb{R}$$

via formas harmônicas de Maass:

$$sv([f]) = \frac{(4\pi)^{k-1}}{(k-2)!}[D^{k-1}(F)]$$

onde $F \in H^{!}_{2-k}(\Gamma_0(N))$ é um *levantamento harmônico* de f:

$$\frac{2i}{Im(z)^{2-k}}\overline{\frac{\partial F}{\partial \bar{z}}} = f(z)$$

- Bringmann-Ono '07 $\Longrightarrow sv([P_{m,k,N}]) = -[P_{-m,k,N}]$.

Algumas referências:

- T. J. Fonseca, *On coefficients of Poincaré series and single-valued periods of modular forms.* Res Math Sci 7, 33 (2020).
- F. Brown, C. Dupont, *Single-Valued Integration and Double Copy*. Reine Angew. Math. 775 (2021).
- K. Acres, D. Broadhurst, *Eta quotients and Rademacher sums*. In: *Elliptic integrals, Elliptic Functions and Modular Forms in Quantum Field Theory*, Texts Monogr. Symbol. Comput., Springer, Cham (2019).