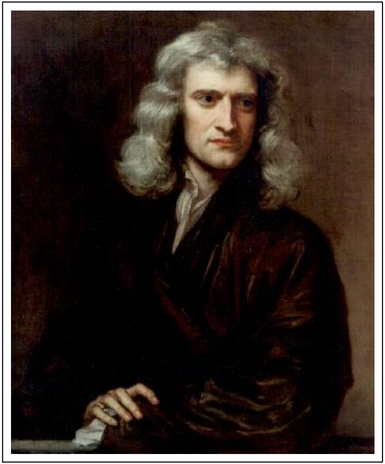
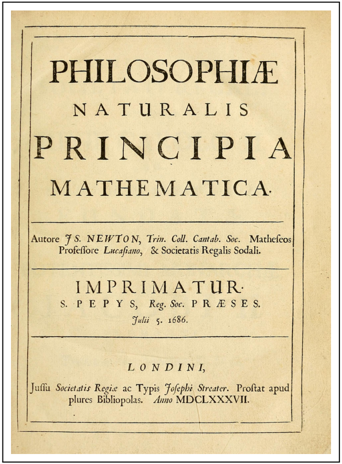
# Números transcendentes e geometria algébrica

Tiago J. Fonseca

IMECC - Unicamp, Fapesp

31 de março de 2022





PHILOSOPHIÆ
NATURALIS
PRINCIPIA
MATHEMATICA.

Autore *J S. NEWTON*, *Trin. Coll. Cantab. Soc.* Matheſeos Profeſſore *Lucaſiano*, & Societatis Regalis Sodali.

IMPRIMATUR.
S. PEPYS, *Reg. Soc.* PRÆSES.
*Julii* 5. 1686.

*LONDINI,*
Juſſu *Societatis Regiæ* ac Typis *Joſephi Streater*. Proſtat apud plures Bibliopolas. *Anno* MDCLXXXVII.

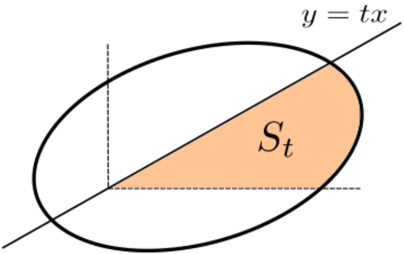
Figura: Isaac Newton (1643-1727)

## Lema XXVIII[1]

*Não há figura oval cuja área, arbitrariamente destacada por linhas retas, possa ser universalmente encontrada por meio de equações de qualquer número finito de termos e dimensões.*

Lema XXVIII[1]

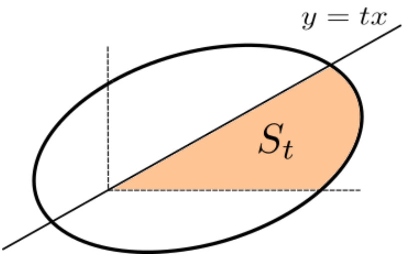
*Não há figura oval cuja área, arbitrariamente destacada por linhas retas, possa ser universalmente encontrada por meio de equações de qualquer número finito de termos e dimensões.*




$$A(t) = \iint_{S_t} dx\,dy$$

LEMA XXVIII[1]

*Não há figura oval cuja área, arbitrariamente destacada por linhas retas, possa ser universalmente encontrada por meio de equações de qualquer número finito de termos e dimensões.*




$$A(t) = \iint_{S_t} dx\,dy$$

A função $A(t)$ não é algébrica!

## Definição

Dizemos que $f(t)$ é uma função algébrica se existe um polinômio não-nulo $P(x, y)$ tal que $P(t, f(t)) \equiv 0$.

"Uma função é algébrica se o seu gráfico está contido numa curva algébrica plana."

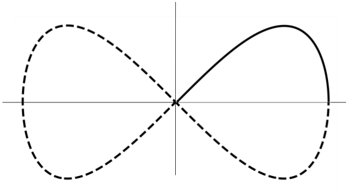
## Definição

Dizemos que $f(t)$ é uma função algébrica se existe um polinômio não-nulo $P(x, y)$ tal que $P(t, f(t)) \equiv 0$.

"Uma função é algébrica se o seu gráfico está contido numa curva algébrica plana."

## Exemplo

A função $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$, $f(t) = t\sqrt{1 - t^2}$, é algébrica.



$$P(x, y) = y^2 - x^2(1 - x^2)$$

### Definição

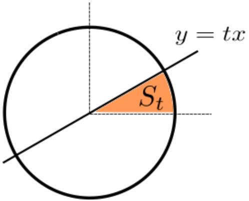
Uma função não-algébrica é chamada de transcendente.

## Definição

Uma função não-algébrica é chamada de transcendente.

## Exemplo (círculo)

Funções trigonométricas são transcendentes:



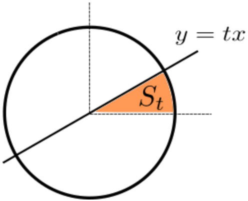

$$A(t) = \iint_{S_t} dx dy = \frac{1}{2}\arctan(t)$$

## Definição

Uma função não-algébrica é chamada de transcendente.

## Exemplo (círculo)

Funções trigonométricas são transcendentes:




$$A(t) = \iint_{S_t} dx\,dy = \frac{1}{2}\arctan(t)$$

## Exemplo (elipse)

> COROLÁRIO – Assim, a área de uma elipse, descrita por um raio traçado a partir do foco até o corpo móvel, não pode ser encontrada a partir do tempo dado por uma equação finita; e, portanto, não pode ser determinada pela descrição de curvas geometricamente racionais. Chamo de geometrica-

**Nº 2676.**
**G.W. Leibniz à Christiaan Huygens.**
**20 avril 1691.**

*La lettre se trouve à Leiden, coll. Huygens.*
*Elle a été publiée par P.J. Uylenbroek*[1] *et par C.I. Gerhardt*[2].
*Elle est la réponse au No.* 2667.
*Chr. Huygens y répondit par le No.* 2680.

A Hanover ce 10/20 d'Avril 1691.

Figura: Gottfried W. Leibniz (1646-1716)

Quant au cercle et à l'ellipse, l'impossibilité de leur quadrature generale est assez demonstrée, mais je n'ay pas encore vû qu'on aye donné aucune demonstration pour prouver, que le cercle entier, ou quelque portion determinée n'est pas quadrable.

### Definição

Um número $\alpha \in \mathbb{C}$ é algébrico se existe um polinômio não-nulo $P \in \mathbb{Q}[X]$ tal que $P(\alpha) = 0$.

### Definição

Um número $\alpha \in \mathbb{C}$ é algébrico se existe um polinômio não-nulo $P \in \mathbb{Q}[X]$ tal que $P(\alpha) = 0$.

### Exemplo

- $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, $P = X^2 - X - 1$
- $\alpha = e^{2\pi i \frac{k}{n}} = \cos(2\pi \frac{k}{n}) + i \sin(2\pi \frac{k}{n})$, $P = X^n - 1$

## Definição

Um número $\alpha \in \mathbb{C}$ é algébrico se existe um polinômio não-nulo $P \in \mathbb{Q}[X]$ tal que $P(\alpha) = 0$.

## Exemplo

- $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, $P = X^2 - X - 1$
- $\alpha = e^{2\pi i \frac{k}{n}} = \cos(2\pi \frac{k}{n}) + i \sin(2\pi \frac{k}{n})$, $P = X^n - 1$

Estrutura: número algébricos formam um subcorpo $\overline{\mathbb{Q}} \subset \mathbb{C}$; simetrias (teoria de Galois).

### Definição

Um número complexo é transcendente se não é algébrico.

### Definição

Um número complexo é transcendente se não é algébrico.

### Exemplo

- $\pi = 3,14159\ldots$ (Lindemann, 1882)
- Zeros da função de Bessel $J_0(z)$ (Siegel, 1929)
- $e^\pi$ (Nesterenko, 1996)

### Definição

Um número complexo é transcendente se não é algébrico.

### Exemplo

- $\pi = 3,14159\ldots$ (Lindemann, 1882)
- Zeros da função de Bessel $J_0(z)$ (Siegel, 1929)
- $e^\pi$ (Nesterenko, 1996)

Estrutura? Como decidir se dois números transcendentes estão relacionados?

$$\zeta(2) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}, \qquad \zeta(3) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} = ?$$

Figura: Maxim Kontsevich e Don Zagier

## Definição

Um período é um número complexo cujas partes real e imaginária são integrais convergentes

$$\int_D f(x_1, \ldots, x_n) dx_1 \cdots dx_n,$$

onde $f$ é uma função racional (ou algébrica) com coeficientes racionais e o domínio $D \subset \mathbb{R}^n$ é dado por desigualdades polinomiais com coeficientes racionais.

## Definição

Um período é um número complexo cujas partes real e imaginária são integrais convergentes

$$\int_D f(x_1, \ldots, x_n) dx_1 \cdots dx_n,$$

onde $f$ é uma função racional (ou algébrica) com coeficientes racionais e o domínio $D \subset \mathbb{R}^n$ é dado por desigualdades polinomiais com coeficientes racionais.

## Exemplo

- Números algébricos: $\sqrt{5} = \int_{2x^2 \leq 5} dx$
- Áreas: $\pi$, $A(t)$ $(t \in \mathbb{Q})$
- Logarítmos de números algébricos: $\log(2) = \int_1^2 \frac{dx}{x}$
- Valores de $\zeta$: $\zeta(3) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} = \int_{0<x_1<x_2<x_3<1} \frac{dx_1 dx_2 dx_3}{(1-x_1)x_2 x_3}$

## Definição

Um período é um número complexo cujas partes real e imaginária são integrais convergentes

$$\int_D f(x_1, \ldots, x_n) dx_1 \cdots dx_n,$$

onde $f$ é uma função racional (ou algébrica) com coeficientes racionais e o domínio $D \subset \mathbb{R}^n$ é dado por desigualdades polinomiais com coeficientes racionais.

## Exemplo

- Números algébricos: $\sqrt{5} = \int_{2x^2 \leq 5} dx$
- Áreas: $\pi$, $A(t)$ $(t \in \mathbb{Q})$
- Logarítmos de números algébricos: $\log(2) = \int_1^2 \frac{dx}{x}$
- Valores de $\zeta$: $\zeta(3) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} = \int_{0<x_1<x_2<x_3<1} \frac{dx_1 dx_2 dx_3}{(1-x_1)x_2 x_3}$

Períodos formam um subanel enumerável de $\mathbb{C}$!

Relações:

1. Aditividade:

$$\int_D (\omega_1 + \omega_2) = \int_D \omega_1 + \int_D \omega_2, \qquad \int_{D_1 \sqcup D_2} \omega = \int_{D_1} \omega + \int_{D_2} \omega$$

2. Mudança de variáveis algébrica:

$$\int_{\varphi(D)} \omega = \int_D \varphi^*(\omega)$$

3. Fórmula de Stokes:

$$\int_D d\omega = \int_{\partial D} \omega.$$

Relações:

1. Aditividade:

$$\int_D (\omega_1 + \omega_2) = \int_D \omega_1 + \int_D \omega_2, \qquad \int_{D_1 \sqcup D_2} \omega = \int_{D_1} \omega + \int_{D_2} \omega$$

2. Mudança de variáveis algébrica:

$$\int_{\varphi(D)} \omega = \int_D \varphi^*(\omega)$$

3. Fórmula de Stokes:

$$\int_D d\omega = \int_{\partial D} \omega.$$

**Conjectura (Kontsevich–Zagier)**

*Toda relação linear entre períodos é uma combinação das relações acima.*

## Exemplo (Calabi)

A identidade de Euler

$$\zeta(2) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

é equivalente a

$$\iint_{0 \le x,y \le 1} \frac{2dxdy}{(1-xy)\sqrt{xy}} = \iint_{u,v \ge 0} \frac{4dudv}{(1+u^2)(1+v^2)}.$$

Considere a mudança de variáveis

$$(x, y) = \left( u^2 \frac{1+v^2}{1+u^2}, v^2 \frac{1+u^2}{1+v^2} \right).$$

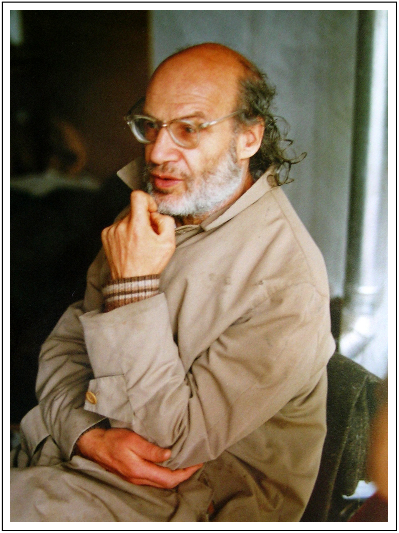


Figura: Alexander Grothendieck (1928-2014)

- Um período é uma integral $\int_D \omega$, onde $\omega$ é uma forma diferencial polinomial sobre uma variedade algébrica sobre $\mathbb{Q}$

$$X = \{(z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{C}^n : P_i(z_1, \ldots, z_n) = 0,\ 1 \leq i \leq m\},$$

e $\partial D \subset Y$, onde $Y \subset X$ é uma subvariedade algébrica.

- Um período é uma integral $\int_D \omega$, onde $\omega$ é uma forma diferencial polinomial sobre uma variedade algébrica sobre $\mathbb{Q}$

$$X = \{(z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{C}^n : P_i(z_1, \ldots, z_n) = 0,\ 1 \leq i \leq m\},$$

  e $\partial D \subset Y$, onde $Y \subset X$ é uma subvariedade algébrica.

- Relação com a teoria de motivos (cohomologia de variedades algébricas).

- Um período é uma integral $\int_D \omega$, onde $\omega$ é uma forma diferencial polinomial sobre uma variedade algébrica sobre $\mathbb{Q}$

$$X = \{(z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n : P_i(z_1, \dots, z_n) = 0,\ 1 \leq i \leq m\},$$

e $\partial D \subset Y$, onde $Y \subset X$ é uma subvariedade algébrica.

- Relação com a teoria de motivos (cohomologia de variedades algébricas).
- Teoria de Galois para períodos (conjectural).

- Um período é uma integral $\int_D \omega$, onde $\omega$ é uma forma diferencial polinomial sobre uma variedade algébrica sobre $\mathbb{Q}$

$$X = \{(z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{C}^n : P_i(z_1, \ldots, z_n) = 0,\ 1 \leq i \leq m\},$$

  e $\partial D \subset Y$, onde $Y \subset X$ é uma subvariedade algébrica.

- Relação com a teoria de motivos (cohomologia de variedades algébricas).

- Teoria de Galois para períodos (conjectural).

### Conjectura (Grothendieck)

*Toda relação algébrica entre períodos tem origem motívica.*

Aplicação:

- Considere a $m$-ésima série de Poincaré:

$$P_{m,k,N}(z) = \sum_{\gamma \in \Gamma_\infty \backslash \Gamma_0(N)} \frac{e^{2\pi i m \gamma \cdot z}}{(cz+d)^k}, \qquad Im(z) > 0$$

Forma modular de peso $k$ e nível $N$:

$$P_{m,k,N}(\gamma \cdot z) = (cz+d)^k P_{m,k,N}(z), \qquad \gamma = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \Gamma_0(N)$$

Aplicação:

- Considere a $m$-ésima série de Poincaré:

$$P_{m,k,N}(z) = \sum_{\gamma \in \Gamma_\infty \backslash \Gamma_0(N)} \frac{e^{2\pi i m \gamma \cdot z}}{(cz+d)^k}, \qquad Im(z) > 0$$

Forma modular de peso $k$ e nível $N$:

$$P_{m,k,N}(\gamma \cdot z) = (cz+d)^k P_{m,k,N}(z), \qquad \gamma = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \Gamma_0(N)$$

- Série de Fourier:

$$P_{m,k,N}(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n(P_{m,k,N}) e^{2\pi i n z}$$

Aplicação:

- Considere a $m$-ésima série de Poincaré:

$$P_{m,k,N}(z) = \sum_{\gamma \in \Gamma_\infty \backslash \Gamma_0(N)} \frac{e^{2\pi i m \gamma \cdot z}}{(cz+d)^k}, \qquad Im(z) > 0$$

  Forma modular de peso $k$ e nível $N$:

$$P_{m,k,N}(\gamma \cdot z) = (cz+d)^k P_{m,k,N}(z), \qquad \gamma = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \Gamma_0(N)$$

- Série de Fourier:

$$P_{m,k,N}(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n(P_{m,k,N}) e^{2\pi i n z}$$

- Fórmula explícita ("altamente transcendente"): se $m, n > 0$

$$a_n(P_{-m,k,N}) = 2\pi(-1)^{\frac{k}{2}} \left(\frac{n}{m}\right)^{\frac{k-1}{2}} \sum_{c \geq 1, N|c} \frac{K(-m,n;c)}{c} I_{k-1}\left(\frac{4\pi\sqrt{mn}}{c}\right)$$

Em alguns casos, $a_n(P_{-m,k,N})$ é racional, e.g.:

$$P_{-1,4,9} = q^{-1} + 2q^2 - 49q^5 + 48q^8 + 771q^{11} - \cdots, \qquad q = e^{2\pi iz}$$

Porquê?

Em alguns casos, $a_n(P_{-m,k,N})$ é racional, e.g.:

$$P_{-1,4,9} = q^{-1} + 2q^2 - 49q^5 + 48q^8 + 771q^{11} - \cdots, \qquad q = e^{2\pi i z}$$

Porquê?

## Teorema (F. '20)

*Os coeficientes de Fourier de séries de Poincaré são períodos.*

Exemplo: se $\dim S_k(\Gamma_0(N)) = 1$, então

$$a_n(P_{-m,k,N}) \in \mathbb{Q}\rho + \mathbb{Q}, \qquad \rho = \frac{\overline{\int_{\gamma_1}\omega}\int_{\gamma_2}\eta - \overline{\int_{\gamma_2}\omega}\int_{\gamma_1}\eta}{\overline{\int_{\gamma_1}\omega}\int_{\gamma_2}\omega - \overline{\int_{\gamma_2}\omega}\int_{\gamma_1}\omega}$$

## Corolário

*Se* $(N, k) \in \{(9,4), (27,2), (32,2), (36,2), (49,2)\}$ *então* $a_n(P_{-m,k,N}) \in \mathbb{Q}$ *para todos* $m, n > 0$.

Obrigado!