TD1

Raisonner simplement

Exercice 1

1. Exercice de conversion pour savoir quand la kinésine arrive au bout.
2. Autre exercice pour savoir combien de distance parcourue par une cellule.

Décrire un mouvement

Exercice 1

1. Exprimer les coordonnées cartésiennes des points suivants puis écrire le vecteur position $\overrightarrow{OM}$ associé. La base cartésienne est-elle une base fixe ou mobile ?
2. Exprimer les coordonnées polaires des points suivants puis écrire le vecteur position $\overrightarrow{OM}$ associé. La base polaire est-elle une base fixe ou mobile ?
3. Calculer le vecteur déplacement associé aux trajectoires suivantes. En considérant que les trajets ont été faits sur une durée $\Delta t = 5\,\mathrm{s}$, en déduire le vecteur vitesse moyenne associé.

Exercice 2

1. On donne la position d'une cellule, en déduire l'équation de la trajectoire.

Exercice 2

1. Donner les dérivées des fonctions suivantes :
2. Donner une primitive des fonctions suivantes : (en montrer une pas facile qui se déduit de celle d'avant)
3. On donne les vecteurs positions suivants. Calculer les vecteurs vitesse et accélération associés.
4. On donne les vecteurs accélération suivants. En supposant les conditions initiales $\overrightarrow{OM}(t=0) = \overrightarrow{0}$ et $\overrightarrow{v}(t=0) = \overrightarrow{0}$, calculer les vecteurs vitesse et position associés.

Exercice 3 On considère le bout d'un pendule blabla on donne les équations horaires.

1. Écrire le vecteur position de la masse au bout du pendule à tout instant t.
2. En déduire le vecteur vitesse instantané associé.
3. Pour quelles positions la vitesse du pendule s'annule-t-elle ?
4. Calculer l'accélération de la masse au bout du pendule à chaque instant t.
5. Bonus : Reprendre les questions suivantes en utilisant un repère polaire.

Exercice 4 Globule rouge en accélération constante. On donne l'accélération faut trouver la position. A quel moment est-ce qu'il tombe au fond ?

TD2

Manipuler les équations

Exercice 1 On suppose que le champ électromagnétique régnant dans une partie de l'espace vide de charges et de courants est donné par :

$$\vec{E}(\vec{r},t) = f(z)e^{-\alpha t}\hat{e}_x \quad \text{et} \quad \vec{B}(\vec{r},t) = g(z)e^{-\alpha t}\hat{e}_y$$

1. Les équations de Maxwell-Gauss et Maxwell-flux sont-elles vérifiées ?
2. Montrer que l'équation de Maxwell-Faraday impose une expression de $g(z)$ en fonction de $f'(z)$.
3. Montrer que l'équation de Maxwell-Ampère impose une expression de $f(z)$ en fonction de $g'(z)$.
4. En déduire une équation différentielle sur f dont on vérifiera l'homogénéité.
5. Déterminer $f(z)$ en supposant f paire et $\vec{E}(0,0) = E_0\hat{e}_x$
6. Donner l'expression du champ électromagnétique.

Résoudre des problèmes

Exercice 3 Les matériaux supraconducteurs voient leur conductivité électrique devenir infinie en-dessous d'une certaine température. Dans ce cas, on constate que les lignes du champ magnétique ne peuvent plus entrer dans le matériau mais doivent le contourner : c'est l'effet Meissner. Pour expliquer ce phénomène, les frères London ont ajouté aux équations de Maxwell la relation entre le vecteur densité volumique de courant $\vec{j}$ et le champ magnétique à l'intérieur de la plaque :

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\left(\vec{j}\right) = -\frac{1}{\mu_0\lambda^2}\vec{B}$$

où λ est une constante positive, caractéristique du matériau.

1. En se plaçant dans l'ARQSM, déterminer l'équation différentielle satisfaite en tout point intérieur du matériau par le champ magnétique. On donne par ailleurs la formule d'analyse vectorielle $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\left(\overrightarrow{\mathrm{rot}}\left(\vec{V}\right)\right) = \overrightarrow{\mathrm{grad}}\left(\mathrm{div}\left(\vec{V}\right)\right) - \Delta\vec{V}$.

On considère une plaque supraconductrice d'épaisseur $2d$ dans la direction $\hat{e}_z$ et d'extension infinie dans les deux autres directions. L'origine de l'axe z est prise au milieu de l'épaisseur de la plaque de sorte que les faces inférieure et supérieure aient pour équation respectivement $z = -d$ et $z = +d$. La plaque est plongée dans un champ magnétique statique et uniforme : $\vec{B_0} = B_0\hat{e}_x$. On cherche le champ magnétique à l'intérieur de la plaque sous la forme $\vec{B} = B(z)\hat{e}_x$

2. Faire un schéma simple du système.
3. Déterminer le champ magnétique à l'intérieur de la plaque en supposant que $\vec{B}(-d) = \vec{B}(d) = \vec{B_0}$.
4. En déduire le vecteur densité volumique de courant $\vec{j}$ à l'intérieur de la plaque.

Un modèle microscopique donne :

$$\lambda^2 = \frac{m_e}{\mu_0 n_s e^2}$$

avec : $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}\,\mathrm{H\,m^{-1}}$ la perméabilité magnétique du vide, $m_e = 9.1 \times 10^{-31}\,\mathrm{kg}$ la masse d'un électron, $e = 1.6 \times 10^{-19}\,\mathrm{C}$ la charge élémentaire, n_s la densité volumique d'électrons supraconducteurs,

5. Vérifier que λ est bien homogène à une longueur.
6. Calculer λ en prenant $n_s = 1.0 \times 10^{29}\,\mathrm{m^{-3}}$.
7. Tracer les graphes des composantes non nulles de $\vec{B}$ et $\vec{j}$ en fonction de z. Donner un sens concret à λ.
8. Pour $d \gg \lambda$, à quelle distance de la surface de la plaque la densité de courant est-elle réduite à un centième de sa valeur à la surface?

TD3

Onde électromagnétique plane progressive 1

On étudie la propagation d'une OEM dans le vide.

1. Rappeler l'équation aux dérivées partielles à laquelle satisfont les champs $\vec{E}$ et $\vec{B}$.
2. On suppose que le champ électrique est de la forme :

$$\vec{E} = E_0 \cos(\omega t - kz)\hat{e}_x, \quad k, \omega > 0$$

   (a) A quelle équation doit satisfaire k pour que ce champ soit solution de l'équation précédemment citée ?

   (b) Quels sont la direction, le sens et la vitesse de propagation de cette onde ?

   (c) Quelle est la structure de cette onde ?

   (d) Calculer le champ magnétique $\vec{B}$ associé à $\vec{E}$ ainsi que le vecteur de Poynting de l'onde ?

3. La puissance moyenne rayonnée par cette onde à travers une surface $S = 4\,\mathrm{mm}^2$ orthogonale à sa direction de propagation est $P = 10\,\mathrm{W}$. Calculer les amplitudes E_0 et B_0 des champs électriques et magnétiques. On donne $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}\,\mathrm{H\,m^{-1}}$.

Onde électromagnétique plane progressive 2

On étudie une onde électromagnétique dont le champ électrique est :

$$\underline{\vec{E}} = \underline{E_x}\hat{e}_x + \underline{E_y}\hat{e}_y \quad \text{avec} \quad \underline{E_x} = E_0 \exp\left(i\left(\omega t - \frac{K}{3}(2x + 2y + z)\right)\right)$$

L'onde se propage dans le vide et sa longueur d'onde est $\lambda = 6 \times 10^{-7}\,\mathrm{m}$.

1. Calculer la fréquence de l'onde.
2. Dans quel domaine du spectre électromagnétique se situe cette onde ?
3. Exprimer le vecteur d'onde en fonction de K.
4. Calculer la valeur numérique de la constante K.
5. Établir l'équation cartésienne d'un plan d'onde.
6. Exprimer $\underline{E_y}$ en fonction de $\underline{E_x}$ en utilisant l'équation de Maxwell-Gauss dans la représentation complexe.
7. Calculer le champ magnétique $\underline{\vec{B}}$ associé à cette onde.
8. Calculer la densité moyenne d'énergie électromagnétique associée à cette onde.
9. Calculer le vecteur de Poynting de cette onde et sa moyenne temporelle.

Communication avec la Terre (E3A MP 2015)

On se propose d'étudier la propagation des ondes électromagnétiques entre la sonde Rosetta et la Terre, dans le vide.

1. Rappeler les équations de Maxwell en présence de charges et de courants. Comment se simplifient-elles dans le vide ?
2. Etablir l'équation de propagation dans le vide vérifiée par le champ électrique $\vec{E}$. Donnez celle vérifiée par le champ magnétique $\vec{B}$.
3. En déduire la célérité des ondes électromagnétiques dans le vide en fonction de μ_0 et ϵ_0.

On considère une onde électromagnétique pour laquelle le champ électrique en coordonnées cartésiennes s'écrit :

$$\vec{E}(z,t) = E_x \cos\left(\omega\left(t - \frac{z}{c}\right)\right)\hat{e}_x + E_y \cos\left(\omega\left(t - \frac{z}{c}\right)\right)\hat{e}_y + E_z \cos\left(\omega\left(t - \frac{z}{c}\right)\right)\hat{e}_z$$

où E_x, E_y et E_z sont des constantes.

4. Dans quelle direction se propage cette onde ? Est-ce une OPPH ? Exprimer son vecteur d'onde k.
5. Simplifier l'expression donnée du champ électrique à l'aide de l'équation de Maxwell-Gauss.

Le champ magnétique associé s'écrit :

$$\vec{B}(z,t) = B_x \cos\left(\omega\left(t - \frac{z}{c}\right)\right)\hat{e}_x + B_y \cos\left(\omega\left(t - \frac{z}{c}\right)\right)\hat{e}_y + B_z \cos\left(\omega\left(t - \frac{z}{c}\right)\right)\hat{e}_z$$

où B_x, B_y et B_z sont des constantes.

6. Déterminer B_x, B_y et B_z en fonction de E_x, E_y et c.
7. Cette onde est-elle transversale ou longitudinale par rapport à la direction de propagation ?

Ondes sphériques

On considère un émetteur isotrope d'ondes électromagnétiques que l'on assimile à une source ponctuelle : il peut s'agir d'un émetteur de radio, d'un satellite, d'une étoile qui rayonne, etc. L'onde émise est sphérique, de la forme en coordonnées sphériques :

$$\vec{E}(\vec{r},t) = E_0(r)\cos(\omega t - kr)\hat{e}_\theta \quad \text{avec} \quad k = \frac{\omega}{c}.$$

Le milieu de propagation est assimilé au vide.

1. Par analogie avec une onde plane, identifier le vecteur d'onde $\vec{k}$ de l'onde sphérique.
2. On admet qu'une telle onde vérifie localement la même relation de structure qu'une onde plane. En déduire l'expression du champ magnétique associé.
3. Exprimer le vecteur de Poynting et sa moyenne temporelle.
4. Exprimer la puissance moyenne $\mathcal{P}$ rayonnée à travers une sphère de rayon r. Justifier par un argument physique que cette puissance est indépendante de r. En déduire que $E_0(r) = A/r$ avec A une constante à déterminer.

Mesures de concentration en CO_2 dans l'atmosphère (DS 2023)

Le développement de modèles climatiques et l'actualisation de leurs prédictions nécessitent des mesures précises de la fraction molaire en CO_2 présent dans l'atmosphère. Celle-ci est usuellement exprimée en parties par millions (ppm) : une fraction molaire de 413 ppm indique par exemple qu'un million de molécules d'air contient en moyenne 413 molécules de CO_2.

Pour ce faire, un échantillon d'air est prélevé, de préférence en relative altitude et loin de toute perturbation humaine, puis refroidi pour condenser toute la vapeur d'eau, avant d'être analysé. Le principe est celui de la spectrophotométrie : un faisceau laser de longueur d'onde 4.26 µm, à laquelle le spectre d'absorption du CO_2 présente un maximum, traverse un échantillon de longueur connue. Comparer les intensités lumineuses avant et après traversée de l'échantillon permet d'en déduire la concentration en CO_2, en nombre de molécules par m^3 d'air. Les capteurs de CO_2 popularisés comme indicateurs de la qualité de l'air lors de la crise du Covid-19 fonctionnent sur le même principe mais avec des exigences de précision bien moindre.

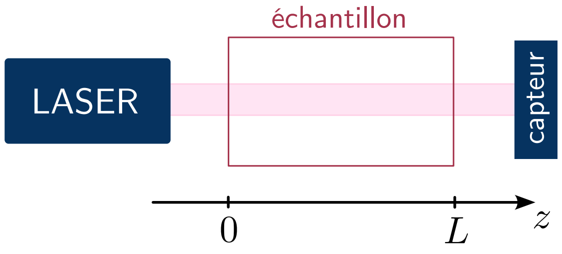

Figure 1: Principe de fonctionnement de la mesure

1. On modélise le faisceau laser par un cylindre de section S au sein duquel se propage dans la direction $+\hat{e}_z$ une onde plane progressive harmonique polarisée rectilignement selon $\hat{e}_x$.
   (a) Écrire le champ électrique $\vec{E}(\vec{r},t)$ associé à cette onde. On notera E_0 son amplitude, ω sa pulsation et k la norme de son vecteur d'onde.
   (b) En déduire le champ magnétique $\vec{B}(\vec{r},t)$ associé.
   (c) En déduire le vecteur de Poynting $\vec{\Pi}(\vec{r},t)$ associé ainsi que sa moyenne temporelle $\langle\vec{\Pi}(\vec{r},t)\rangle$ et son intensité $I = \|\langle\vec{\Pi}(\vec{r},t)\rangle\|$.
2. Dans l'échantillon, l'onde interagit avec la matière. On suppose alors que cette première conserve la même structure mais que la quantité d'énergie qu'elle transporte dépend maintenant de son avancée dans l'échantillon :

$$\langle\vec{\Pi}(\vec{r},t)\rangle = I(z)\hat{e}_z$$

avec $I(z)$ l'intensité du faisceau en z.

Chaque molécule de CO_2 se trouvant dans le faisceau absorbe en moyenne une puissance p proportionnelle à l'intensité : $p = \sigma I$, où σ est une constante tabulée dépendant uniquement de la longueur d'onde. On se propose de raisonner sur une tranche infinitésimale du faisceau située entre z et $z + \mathrm{d}z$ pour déterminer la loi d'évolution de l'intensité $I(z)$ au cours de la traversée de l'échantillon.

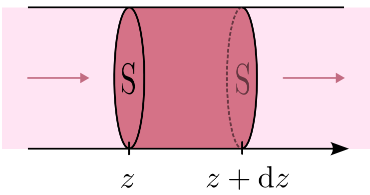

Figure 2: Tranche infinitésimale du faisceau située entre z et $z + \mathrm{d}z$

(a) Quelle est la dimension de σ ?

(b) Exprimer la puissance moyenne $\mathcal{P}(z)$ transmise par l'onde à travers la surface S à l'abscisse z en fonction de $I(z)$ et S. De même, exprimer la puissance moyenne $\mathcal{P}(z + \mathrm{d}z)$ transmise par l'onde à travers la surface S à l'abscisse $z + \mathrm{d}z$.

(c) On note n la densité volumique de CO_2, c'est-à-dire le nombre de molécules de CO_2 par unité de volume dans l'échantillon. Déterminer la puissance moyenne totale absorbée $\mathrm{d}P_{\mathrm{abs}}(z)$ par les molécules de CO_2 dans cette tranche en fonction de n, σ, S, $\mathrm{d}z$ et $I(z)$.

(d) En le justifiant par un argument de conservation de l'énergie, déterminer une relation entre $\mathcal{P}(z)$, $\mathcal{P}(z + \mathrm{d}z)$ et $\mathrm{d}P_{\mathrm{abs}}(z)$

(e) En déduire que l'intensité du faisceau vérifie l'équation différentielle :

$$\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}z} + \sigma n I = 0$$

3. On appelle absorbance de l'échantillon le rapport :

$$A = \ln \frac{I(z=0)}{I(z=L)}$$

Montrer qu'une mesure de l'absorbance permet de remonter à n.

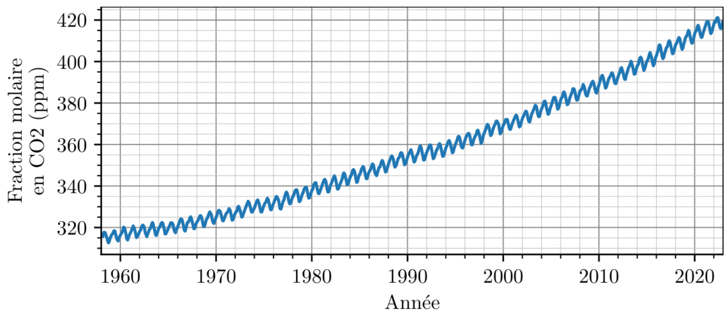

Figure 3: Fraction molaire en CO_2 mesurée à l'observatoire de Mauna Loa. Les mesures représentées sont des moyennes mensuelles.

4. La Figure 3 représente l'évolution temporelle de la fraction molaire en CO_2 mesurée à l'observatoire situé au sommet du volcan de Mauna Loa, à Hawaï. Proposer une interprétation aux tendances observées.

Orientation de la queue des comètes

La réflexion d'une onde électromagnétique sous incidence normale sur un métal parfaitement conducteur induit une pression de radiation P dont la valeur moyenne $\langle P \rangle$ est reliée à la densité moyenne d'énergie de l'onde $\langle u_{\mathrm{em}} \rangle$ par :

$$\langle P \rangle = 2 \langle u_{\mathrm{em}} \rangle$$

On se propose d'abord de retrouver ce résultat simple en faisant appel à la théorie corpusculaire.

1. A l'onde incidente, OPPH de fréquence ν, se propageant dans la direction et le sens de l'axe (Ox), on associe un faisceau de photons se propageant à la vitesse de la lumière c, parallèlement à l'axe (Ox). On rappelle qu'un photon de fréquence ν possède une énergie $h\nu$ et une quantité de mouvement de norme $p = h\nu / c$.

   (a) Quelle densité particulaire n de photons peut-on attribuer à l'onde incidente ? Exprimer n en fonction de $\langle u_{\mathrm{em}} \rangle$, h et ν.

   (b) Si l'on considère une surface S orthogonale à ce flux de photons, quel nombre $\mathrm{d}N$ de photons intercepte-t-elle pendant une durée $\mathrm{d}t$?

(c) En supposant que les collisions sont parfaitement élastiques sur cette paroi métallique, quelle est la force exercée par l'onde incidente sur la surface ? En déduire une expression de la pression de radiation associée.

2. Évaluer la force subie par une petite particule réfléchissante, assimilée à une sphère de rayon a, placée dans un tel faisceau lumineux.

3. Cette particule, de masse volumique μ, est située à une distance r du centre du Soleil.

   (a) Connaissant la puissance moyenne totale rayonnée par le soleil $\langle \mathcal{P}_S \rangle$, donner la valeur moyenne du vecteur de Poynting puis celle de la densité d'énergie électromagnétique à une distance r de celui-ci. *On rappelle que l'énergie est une grandeur conservative*

   (b) Calculer le rayon limite a_0 pour lequel la force de radiation équilibre l'attraction gravitationnelle due au Soleil.

4. Cette étude permet-elle d'expliquer pourquoi le nuage gazeux, appelé queue, qui accompagne une comète est derrière la comète quand cell-ci s'approche du Soleil et devant lorsqu'elle s'en éloigne ?

μ	$\mathcal{G}$	M	$\langle \mathcal{P}_S \rangle$
$3 \times 10^3\,\mathrm{kg\,m^{-3}}$	$6.67 \times 10^{-11}\,\mathrm{kg^{-1}\,m^3\,s^{-2}}$	$2 \times 10^{30}\,\mathrm{kg}$	$4 \times 10^{26}\,\mathrm{W}$

TD4

Nature de la polarisation d'une OPPH

Décrire l'état de polarisation des ondes suivantes :

1. $\vec{E}(z,t) = E_0 \left(\frac{1}{2} \cos(\omega t - kz)\, \hat{e}_x + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos(\omega t - kz)\, \hat{e}_y \right)$
2. $\vec{E}(z,t) = E_0 \left(\cos\left(\omega t - kz - \frac{\pi}{8}\right) \hat{e}_x + \sin\left(\omega t - kz - \frac{\pi}{8}\right) \hat{e}_y \right)$
3. $\vec{E}(z,t) = E_0 \left(\cos(\omega t - kz)\hat{e}_x + \sin\left(\omega t - kz + \frac{\pi}{3}\right) \hat{e}_y \right)$
4. $\vec{E}(z,t) = E_0 \left(\cos(\omega t + kz)\hat{e}_x + \sin\left(\omega t + kz + \frac{\pi}{3}\right) \hat{e}_y \right)$

Polarisation de la lumière (CCP PC 2011)

1. Une onde plane monochromatique se propage dans le sens des z croissants. Comment obtenir expérimentalement une onde polarisée rectilignement ?

2. Donner l'expression d'une onde électromagnétique monochromatique $\vec{E}(z,t)$, polarisée rectilignement suivant la direction $\frac{\sqrt{2}}{2}(\hat{e}_x + \hat{e}_y)$ et qui se propage dans le vide suivant la direction z, dans le sens des z croissants. On notera k le module du vecteur d'onde, ω la pulsation et E_0 l'amplitude de la norme du champ électrique.

3. Soit une onde électromagnétique polarisée circulairement, dont la notation complexe est :

$$\underline{\vec{E}}(z,t) = \frac{E_0}{\sqrt{2}} e^{j(\omega t - kz)} \hat{e}_x + \frac{E_0}{\sqrt{2}} e^{j\left(\omega t - kz - \frac{\pi}{2}\right)} \hat{e}_y$$

   Donner l'expression de $\vec{E}(z,t)$, partie réelle de $\underline{\vec{E}}$. Représenter la trajectoire temporelle de l'extrémité du vecteur $\vec{E}(z_0,t)$ dans le plan (x,y) lorsque la variable z est fixe et égale à z_0.

4. Comment, dans une expérience d'optique, peut-on convertir l'onde de polarisation rectiligne introduite à la question 1 en onde de polarisation circulaire introduite à la question 3 ? Justifier votre réponse.

Polarisation rectiligne (CCP MP 2009)

1. Définir l'état de polarisation rectiligne des ondes lumineuses représentées par les champs électrique $\vec{E}$ et magnétique $\vec{B}$. Qu'appelle-t-on plan de polarisation ?

2. Donner, dans la base orthonormale $\{\hat{e}_x, \hat{e}_y, \hat{e}_z\}$, les expressions complexes des champs électriques $\underline{\vec{E}}_1$ et $\underline{\vec{E}}_2$, associés aux ondes polarisées suivantes :

   (a) le champ $\underline{\vec{E}}_1$ se propage suivant l'axe z et fait un angle de 30° avec l'axe x.

   (b) le champ $\underline{\vec{E}}_2$ de polarisation rectiligne suivant l'axe x se propage dans une direction qui fait, dans le plan yz, un angle de 45° avec l'axe y.

Onde électromagnétique plane progressive (Centrale PC 2003)

Une onde électromagnétique plane, progressive, harmonique, se propage dans la direction définie par le vecteur unitaire $\hat{u}$ dans un milieu où la densité volumique de charges et le vecteur densité de courant sont nuls en tout point à tout instant. On écrit le champ électrique de cette onde, en notations complexes, sous la forme :

$$\underline{\vec{E}}(\vec{r}, t) = \underline{\vec{E}}_0 \exp(i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r}))$$

où $\underline{\vec{E}}_0$ est un champ uniforme avec $\underline{\vec{E}}_0 = \underline{E}_{0x}\hat{e}_x + \underline{E}_{0y}\hat{e}_y + \underline{E}_{0z}\hat{e}_z$, où $\underline{E}_{0x}, \underline{E}_{0y}$ et $\underline{E}_{0z}$ sont des grandeurs complexes.

1. Comment s'exprime le vecteur d'onde $\vec{k}$ en fonction de la longueur d'onde λ et du vecteur $\hat{u}$?

2. Exprimer, en notations complexes, le champ magnétique associé en fonction de $\vec{u}$ et de $\underline{\vec{E}}_0$. Décrire la structure de l'onde électromagnétique.

3. (a) Donner l'expression du vecteur de Poynting $\vec{\Pi}$. Quelle est sa direction ? Que représente-t-il concrètement?

   (b) On appelle " intensité lumineuse " I la valeur moyenne de la puissance surfacique de cette onde. En déduire l'expression de I en fonction de $E_0 = \sqrt{2\langle\left\|\vec{E}\right\|^2\rangle}, \varepsilon_0$ et c.

On définit l'état de polarisation d'une onde électromagnétique à partir de l'évolution temporelle du champ électrique $\vec{E}$ en un point M donné.

4. Donner l'expression générale du champ électrique d'une onde plane, progressive, harmonique, polarisée rectilignement dans une direction quelconque et qui se propage dans le sens des z croissants, dans un milieu assimilé au vide.

5. (a) Donner l'expression générale du champ électrique d'une onde plane, progressive, harmonique, polarisée elliptiquement, qui se propage dans le sens des z croissants.

   (b) Déterminer le sens de polarisation (gauche ou droite) de l'onde dont le champ électrique s'écrit :

   $$\vec{E}(\vec{r}, t) = E_{0x}\cos(\omega t - kz)\hat{e}_x + E_{0y}\cos\left(\omega t - kz + \frac{\pi}{6}\right)\hat{e}_y,$$

   On expliquera soigneusement le raisonnement en supposant E_{0x} et E_{0y} réels positifs.

   (c) À quelle(s) condition(s) une onde est-elle polarisée circulairement ?

6. Expliquer pourquoi la lumière émise par une source classique n'est pas polarisée.

Angle de Brewster

Comme vous le savez déjà grâce à l'optique géométrique, quand une onde lumineuse passe d'un milieu 1 d'indice n_1 à un milieu 2 d'indice n_2, elle donne lieu à une onde réfléchie dans le milieu 1 et à une onde réfractée dans le milieu 2. Toutefois, l'énergie transmise dans ces deux ondes dépend de la polarisation de l'onde incidente.

Une onde d'intensité I polarisée rectilignement parallèlement au plan d'incidence transmettra une intensité réfléchie $I_{\parallel}^r = R_{\parallel}I$ et une intensité réfractée $I_{\parallel}^t = T_{\parallel}I$. De même si elle est polarisée rectilignement orthogonalement au plan d'incidence, on aura $I_{\perp}^r = R_{\perp}I$ et $I_{\perp}^t = T_{\perp}I$. La valeur des coeffcients de transmission en puissance pour l'onde réfléchie sont donnés par les formules de Fresnel :

$$R_{\parallel} = \left(\frac{\tan(r-i)}{\tan(r+i)}\right)^2, \quad R_{\perp} = \left(\frac{\sin(r-i)}{\sin(r+i)}\right)^2 \tag{1}$$

avec i l'angle d'incidence et r l'angle de réfraction.

1. Montrer que $R_{\parallel}$ s'annule lorsque le rayon réfléchi et le rayon réfracté font un angle de $\pi/2$. Montrer que $R_{\perp}$ ne s'annule pas pour cette incidence.

2. En déduire que sous cette incidence, appelée incidence de Brewster, une onde polarisée de manière quelconque produit un rayon réfléchi polarisé rectilignement. Indiquer la direction de polarisation.

3. Montrer que sous incidence de Brewster, on a $\tan(i) = n_2/n_1$

4. En déduire une méthode de détermination de l'indice de réfraction d'un solide placé dans l'air.

Lames à retard (Centrale PC 2003)

1. Une lame à retard est une lame mince à faces parallèles taillée dans un cristal uniaxe ayant des propriétés optiques anisotropes et agit donc sur la polarisation d'une onde électromagnétique monochromatique sous incidence normale. La lame est caractérisée par deux indices, n_x selon Ox et n_y selon Oy.

   (a) Si $n_x < n_y$, préciser l'axe rapide et l'axe lent. Justifier la réponse.

   (b) On étudie la propagation d'une onde électromagnétique plane progressive harmonique sous incidence normale :

   $$\forall z < 0, \quad \vec{E} = \begin{pmatrix} E_{ox}\cos\left(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda}z\right) \\ E_{oy}\cos\left(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda}z - \phi\right) \\ 0 \end{pmatrix}$$

   Hors de la lame ($z < 0$ et $z > e$) le milieu est assimilé au vide. Préciser l'expression du champ électrique dans la lame, puis hors de la lame. Montrer que la composante du champ électrique selon l'axe lent a un retard de phase supplémentaire $\Delta\phi$ fonction de e, λ, n_x et n_y par rapport à la composante selon l'axe rapide.

2. Donner la définition d'une lame demi-onde et d'une lame quart d'onde notées respectivement D et Q. Calculer l'épaisseur minimale d'une lame de calcite D pour une longueur d'onde $\lambda = 600\,\text{nm}$ sachant que les indices de réfraction sont $n_y = 1.658$ et $n_x = 1.486$. Même question pour une lame de quartz D, avec, pour cette longueur d'onde les indices de réfraction $n_y = 1.544$ et $n_x = 1.553$. Comparer les résultats et conclure.

Polariseur circulaire (DS 2023)

On considère une source de lumière suivie d'un filtre monochromatique $\lambda = 600\,\text{nm}$, le tout émettant dans la direction $+\hat{e}_z$ de l'axe optique une OPPH polarisée de manière quelconque. On place juste après ce dispositif un polariseur de direction privilégiée $\hat{u} = \cos\alpha\ \hat{e}_x + \sin\alpha\ \hat{e}_y$.

1. (a) Quel est l'état de polarisation de l'onde à la sortie du polariseur ?

   (b) Donner une expression du champ $\vec{E}(\vec{r}, t)$ associé en fonction de E_0 son amplitude après traversée du polariseur, ω sa pulsation et k la norme de son vecteur d'onde.

   (c) Quelle relation existe-t-il entre k et λ ?

2. On place après le polariseur, entre $z = 0$ et $z = e$, une lame à retard de phase de lignes neutres (Ox) et (Oy) auxquelles sont associés les indices n_x et n_y.

   (a) Si $n_x > n_y$, quel est l'axe lent ? Justifier votre réponse.

   (b) Dans une telle lame, quelle est la norme k_x du vecteur d'onde associé à la propagation de la composante selon $\hat{e}_x$ du champ électrique ? On l'exprimera en fonction de λ et n_x.

   (c) Donner les expressions du champ $\vec{E}(\vec{r}, t)$ dans la région $0 < z < e$, en $z = e$ et dans la région $z > e$.

   (d) En déduire que la traversée de la lame a induit un déphasage $\Delta\phi$ entre les composantes E_x et E_y du champ électrique dont on donnera l'expression en fonction des données du problème.

3. On choisit la lame telle que $\Delta\phi = \pi/2$.

   (a) Comment appelle-t-on une telle lame ?

   (b) Quelle est la polarisation de l'onde en sortie du montage ?

   (c) Déduire de toutes les questions précédentes un dispositif (on pourra en faire un schéma) permettant de créer une polarisation circulaire à partir de n'importe quelle source de lumière. Pourquoi la présence d'un filtre monochromatique est-elle nécessaire ?

Loi de Fresnel (DS 2022)

Les milieux chiraux sont des milieux qui présentent une biréfringence circulaire, c'est-à-dire que les ondes polarisées circulairement droite s'y propagent à une vitesse différente des ondes polarisées circulairement gauche. On propose d'étudier l'effet de la traversée d'un de ces milieux sur une onde de polarisation rectiligne.

Considérons deux OPPH polarisées circulairement se propageant dans le vide selon l'axe (Oz) représentées par les champs électriques suivants :

$$\vec{E}_1(z,t) = E_0\cos(\omega t - kz)\vec{e}_x + E_0\sin(\omega t - kz)\vec{e}_y$$
$$\vec{E}_2(z,t) = E_0\cos(\omega t - kz)\vec{e}_x - E_0\sin(\omega t - kz)\vec{e}_y$$

1. Laquelle de ces ondes est polarisée circulairement droite ? Laquelle est polarisée circulairement gauche ?
2. Considérons l'onde résultant de la superposition de ces deux ondes, représentée par le champ $\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$. Quelle est sa polarisation ?
3. On place entre $z = 0$ et $z = e$ un milieu chiral dans lequel les ondes polarisées circulairement gauche se propagent avec un indice optique n_g et les ondes polarisées circulairement droite avec un indice optique n_d.
   (a) Montrer que dans le milieu, le champ $\vec{E}_1$ se propage avec un vecteur d'onde k_g à définir à partir des constantes k et n_g et le champ $\vec{E}_2$ avec un vecteur d'onde k_d à définir à partir des constantes k et n_d.
   (b) Donner l'expression des champs $\vec{E}_1$ et $\vec{E}_2$ à l'intérieur du milieu ($0 < z < e$).
4. Donner l'expression des champs $\vec{E}_1$ et $\vec{E}_2$ à la sortie du milieu ($z = e$) puis après ce milieu ($z > e$).
5. En déduire l'expression de $\vec{E}$ à la sortie du milieu.
6. Montrer que la traversée du milieu a fait tourner la polarisation incidente d'un angle α donné par la loi de Fresnel :

$$\alpha = \frac{\pi}{\lambda}\left(n_g - n_d\right)e$$

Traversée d'une suite de polariseurs (DS 2022)

On rappelle que l'intensité associée à une onde électromagnétique est proportionnelle au carré moyen (moyenne temporelle) du champ électrique associé :

$$I \propto \left\langle \|\vec{E}\|^2 \right\rangle_t$$

1. On place sur le trajet d'une onde plane progressive harmonique se propageant dans la direction de l'axe (Oz) et polarisée rectilignement dans la direction de $\vec{u}_x$ un polariseur orienté pour transmettre une polarisation rectiligne perpendiculaire à (Oz) et faisant un angle θ par rapport au vecteur $\vec{u}_x$.
   (a) Écrire l'expression du champ électrique de l'onde avant la traversée du polariseur en introduisant les notations nécessaires.
   (b) En déduire l'expression du champ électrique de l'onde après traversée du polariseur (on suppose que la traversée du polariseur n'induit pas de déphasage). Quel est le coefficient de transmission du polariseur défini comme le rapport de l'intensité de l'onde sortant du polariseur à l'intensité de l'onde arrivant sur le polariseur?
2. On place maintenant sur le trajet de l'onde une suite de N polariseurs infiniment proches les uns des autres (de telle manière que la traversée n'induit pas de déphasage). Le polariseur n est orienté pour transmettre une polarisation rectiligne formant un angle $n\theta$ par rapport à la polarisation initiale de l'onde.
   (a) Quelle est l'intensité de l'onde transmise après traversée des N polariseurs ?
   (b) Montrer que, pour une valeur de N suffisamment grande, le dispositif permet de faire tourner une polarisation linéaire de 90° avec une perte d'intensité négligeable. Combien de polariseurs faut-il utiliser pour que les pertes d'intensité de ce système soient inférieures à 1% ?