

---

## Notions de mécanique

---

Tristan Jocteur



# Table des matières

<b>Note d'intention</b>	<b>1</b>
<b>1 Cinématique du point</b>	<b>3</b>
1.1 L'approximation ponctuelle en mécanique . . . . .	3
1.2 Repérage d'un point . . . . .	4
1.2.1 Repérage sur une droite . . . . .	5
1.2.2 Repérage dans un plan . . . . .	5
1.2.3 Repérage dans l'espace . . . . .	7
1.3 Notion de référentiel . . . . .	9
1.3.1 Problématisation . . . . .	9
1.3.2 Définition . . . . .	9
1.4 Les descripteurs du mouvement . . . . .	10
1.4.1 Le vecteur position . . . . .	10
1.4.2 Le vecteur vitesse . . . . .	12
1.4.3 Le vecteur accélération . . . . .	15
1.5 Étude de mouvements caractéristiques (*) . . . . .	16
1.5.1 Mouvement rectiligne uniforme . . . . .	16
1.5.2 Mouvement uniformément accéléré . . . . .	17
1.5.3 Mouvement circulaire uniforme (**) . . . . .	18
<b>2 Dynamique du point</b>	<b>21</b>
2.1 Principe fondamental de la dynamique . . . . .	21
2.1.1 Énoncé . . . . .	21
2.1.2 La masse . . . . .	21
2.1.3 Notion de force . . . . .	22
2.1.4 Système soumis à plusieurs forces . . . . .	22
2.1.5 Utilisation du principe fondamental de la dynamique . . . . .	23
2.1.6 Écueil sur les référentiels galiléens (*) . . . . .	23
2.2 Forces en présence dans le systèmes biologiques . . . . .	24
2.2.1 Le poids . . . . .	24
2.2.2 Force de rappel d'un ressort . . . . .	24
2.2.3 Force de frottements visqueux . . . . .	24
2.2.4 Poussée d'Archimède . . . . .	25
2.2.5 Force d'interaction coulombienne . . . . .	25
2.3 Exemples d'applications (*) . . . . .	26
2.3.1 Chute libre d'une balle . . . . .	26
2.3.2 Sédimentation d'un globule rouge . . . . .	27

## TABLE DES MATIÈRES

---

2.3.3	Mesure de force grâce aux pinces optiques . . . . .	27
<b>3</b>	<b>Aspects énergétiques de la dynamique du point</b>	<b>29</b>
3.1	Énergie cinétique . . . . .	29
3.2	Transmission d'énergie par une force . . . . .	30
3.2.1	Travail d'une force . . . . .	30
3.2.2	Puissance d'une force . . . . .	30
3.2.3	Théorème de l'énergie cinétique . . . . .	31
3.3	Énergie potentielle et forces conservatives . . . . .	31
3.3.1	Exemples d'énergie potentielle . . . . .	32
3.4	Principe de conservation de l'énergie mécanique . . . . .	33
3.4.1	Corps soumis à des forces conservatives . . . . .	33
3.4.2	Cas général . . . . .	33
3.5	Mouvement dans un profil d'énergie potentielle (*) . . . . .	34
3.5.1	Principe . . . . .	34
3.5.2	Électron lié à un atome . . . . .	34

# Note d'intention

De tout temps, les doctorants et doctorantes ont voulu rédiger leur thèse en L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X sans avoir à perdre trop de temps sur l'élaboration d'un template fonctionnel. Malheureusement, faire un template clef-en-main qui réponde aux attentes de tout le monde est illusoire. Néanmoins, je vous partage le mien, parce qu'on ne sait jamais, peut-être qu'il vous conviendra et que vous n'aurez pas à modifier trop de choses dedans pour avoir un rendu qui vous plaise! (Et au passage je discute quelques points souvent utiles pour les thèses de sciences : comment gérer les unités, et comment faire des figures avec des sous-figures imbriquées qui sont citables dans le texte.)



# Chapitre 1

## Cinématique du point

*La mécanique est la science du mouvement des corps. Comment la Terre tourne-t-elle autour du Soleil ? Comment les oiseaux volent-ils ? Comment les roches sédimentent-elles ? Pourquoi certains acides aminés s'attirent-ils ? Voilà autant de questions auxquelles la mécanique prétend pouvoir répondre. Dans ce cours nous allons aborder les bases de la mécanique classique afin de développer votre intuition physique sur cet aspect du monde qui nous entoure quotidiennement.*

*Pour commencer, nous allons nous intéresser à une branche spécifique de la mécanique : la cinématique. Celle-ci s'intéresse à la description du mouvement des objets, sans s'intéresser aux causes de celui-ci. C'est la fondation essentielle nécessaire à la compréhension du reste, car pour pouvoir comprendre le mouvement, il faut d'abord être capable de le décrire.*

### Objectifs du chapitre

- Définir l'approximation ponctuelle en mécanique.
- Repérer un point dans l'espace dans différentes dimensions et grâce à différents systèmes de coordonnées.
- Être familier avec la notion de référentiel.
- Décrire une trajectoire dans l'espace via la position, la vitesse et l'accélération.
- Caractériser des mouvements modèle simples.

### 1.1 L'approximation ponctuelle en mécanique

En mécanique classique, la plupart du temps, les objets dont on souhaite décrire le mouvement sont des solides. Par définition, un solide est un système matériel dont les points restent à distance constante les uns des autres. Pour décrire totalement un solide on a donc besoin de six paramètres : la position du centre de gravité (donc trois coordonnées) et trois angles d'orientation (voir [figure 1.1](#)).

Cette quantité de paramètres rend l'étude riche mais potentiellement complexe sans raison. En effet, dans la plupart des cas, on s'intéresse uniquement à la position du centre de gravité du solide (une sorte de position moyenne) et son évolution au cours du temps. Pour simplifier

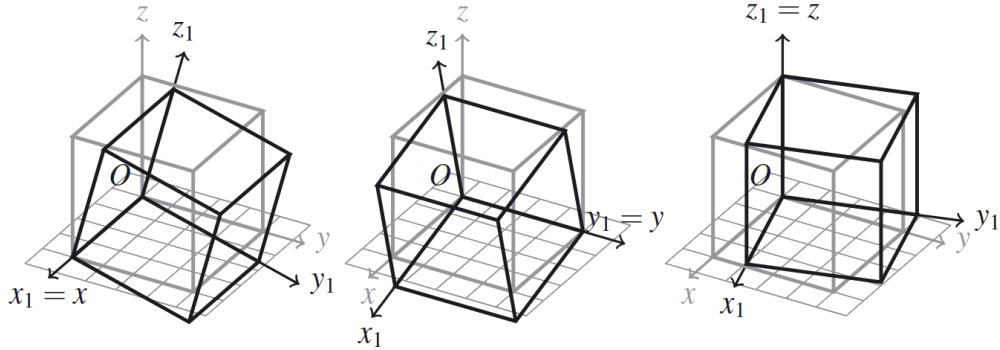


FIGURE 1.1 – Repérage d'un solide

l'étude du mouvement on considère alors souvent les objets d'étude comme des points matériels. C'est ce qu'on appelle l'**approximation ponctuelle** de la mécanique.

Un point matériel est un solide dont on peut négliger l'extension spatiale et la rotation sur lui-même. Une fois l'approximation faite, on a donc besoin plus que de 3 paramètres pour décrire la position du solide (les 3 coordonnées nécessaires au repérage de la position du centre de masse). Modélisant le solide initial, on attribue alors à ce point la masse du solide.

*Une masse ponctuelle n'est pas un objet physique réel car un objet d'extension spatiale infinitement petite ne représente aucune matière. La notion de point matériel est donc uniquement un moyen de modéliser simplement les objets en mécanique classique afin d'alléger la résolution des problèmes. Cette approche est en fait une très bonne représentation du raisonnement physique : tant qu'une modélisation simple permet de rendre compte du réel, autant s'y tenir ! Mais dès lors que la théorie rentre en contradiction avec l'expérience, il faut aller plus loin et considérer des théories plus complètes. Par exemple, l'approximation ponctuelle ne pourra pas nous aider à comprendre la rotation de la Terre sur elle-même mais elle pourra nous aider à comprendre la rotation de la Terre autour du Soleil !*

Dans ce cours, nous ferons essentiellement (voire uniquement) de la mécanique dans l'approximation ponctuelle, c'est-à-dire de la mécanique du point. On négligera alors l'effet de toute extension spatiale de nos objets et leur rotation sur eux-mêmes dans la suite.

## 1.2 Repérage d'un point

Dans l'approximation ponctuelle, repérer un objet revient donc à repérer un point. C'est certes plus simple, mais comment s'y prend-on en pratique pour repérer un point ?

Il y a en fait différentes manières de faire, dépendantes de la dimension de l'espace que l'on considère (1D, 2D, 3D, ...). Dans la suite de ce cours, nous désignerons systématiquement l'objet de notre étude comme le point matériel  $M$ . La question à laquelle nous allons répondre ici est donc la suivante : comment peut-on s'y prendre pour décrire la position du point  $M$  ?

### 1.2.1 Repérage sur une droite

Commençons par étudier le cas le plus simple d'un système ne comportant qu'une seule dimension (1D). L'espace est alors représenté par une droite. On définit alors un repère sur cette droite, représenté par un axe généralement noté ( $Ox$ ), dont la direction est donné par le vecteur unitaire directeur de la droite  $\vec{e}_x$  (voir figure 1.2).

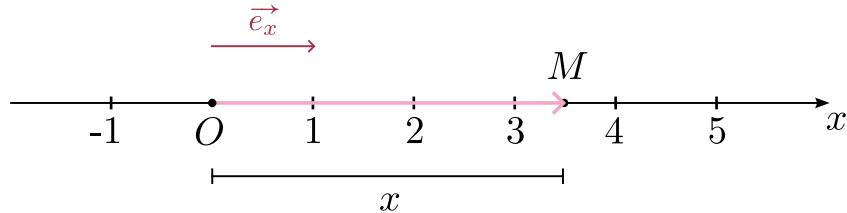


FIGURE 1.2 – Repère cartésien en 1D.

#### Vecteur unitaire

Un vecteur unitaire, généralement désigné par la lettre  $e$ , est un vecteur dont la norme est égale à 1. Il sert ainsi uniquement à indiquer une direction.

La position du point  $M$  est alors donnée dans ce repère par le **vecteur position** :

$$\overrightarrow{OM} = x\vec{e}_x \quad (1.1)$$

avec  $x$  la coordonnée du point  $M$  selon l'axe ( $Ox$ ). Cette dernière peut être aussi bien positive ( $M$  situé à droite de  $O$ ) que négative ( $M$  situé à gauche de  $O$ ). Des exemples de vecteurs position en 1D sont donnés à la figure 1.3.

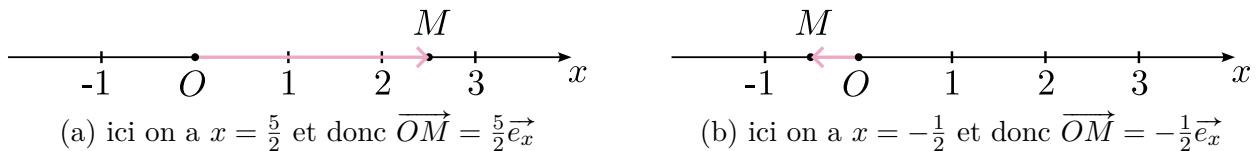


FIGURE 1.3 – Exemples de vecteur position en 1D.

*Un repère est un objet fictif arbitraire que l'on fixe en début d'étude. En fonction du repère que l'on choisit (position de l'origine par exemple) on ne repérera pas un même point avec les mêmes coordonnées.*

### 1.2.2 Repérage dans un plan

#### Coordonnées cartésiennes

La manière la plus simple d'étendre le repérage à deux dimensions est d'ajouter un axe, généralement appelé ( $Oy$ ) et dirigé par le vecteur unitaire  $\vec{e}_y$ , orthogonal au premier (voir figure 1.4a).

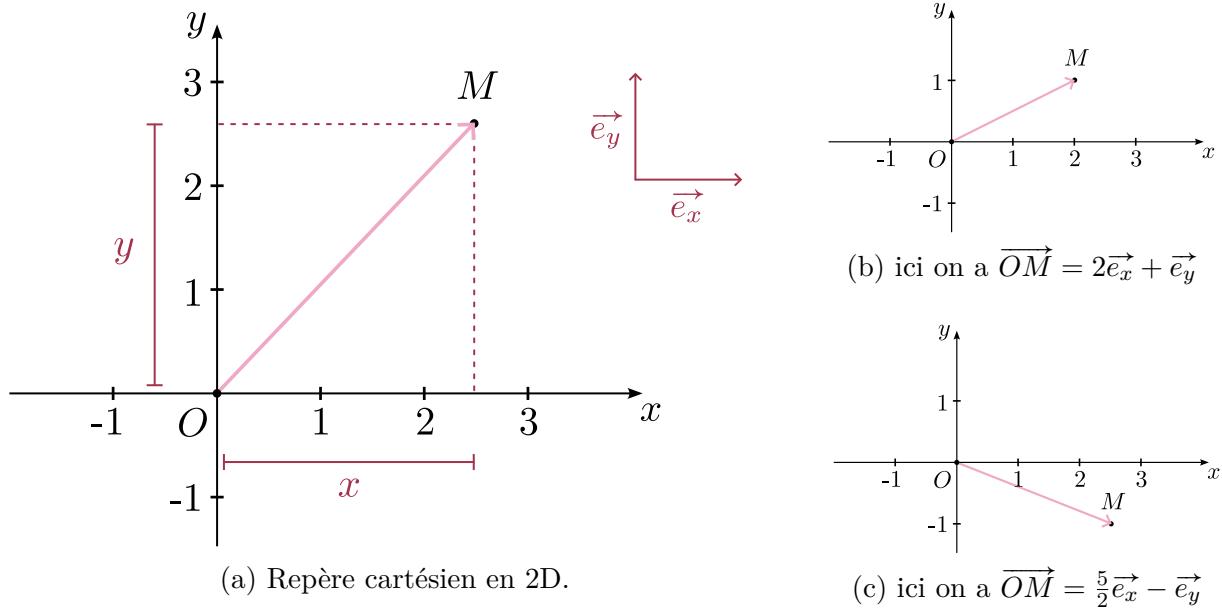


FIGURE 1.4 – Utilisation des coordonnées cartésiennes en 2D.

Le vecteur position s'écrit alors :

$$\overrightarrow{OM} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y \quad (1.2)$$

et les coordonnées  $x$  et  $y$  correspondent aux projections du vecteur  $\overrightarrow{OM}$  sur les axes ( $Ox$ ) et ( $Oy$ ) respectivement. On les appelle  **coordonnées cartésiennes**, et le repère formé des axes ( $Ox$ ) et ( $Oy$ ) repère cartésien. Des exemples de vecteurs positions définis en coordonnées cartésiennes en 2D sont donnés à la figure 1.4.

Peu importe où se situe le point  $M$  dans le plan, la base de vecteurs unitaires  $(\vec{e}_x, \vec{e}_y)$  des coordonnées cartésiennes reste la même (les vecteurs unitaires pointent une direction fixe). On dit alors que la base cartésienne est une **base fixe**.

### Coordonnées polaires

Dans le cas de certains mouvements, les coordonnées cartésiennes ne sont pas les plus adaptées pour décrire la position d'un point  $M$ . C'est le cas notamment des mouvements circulaires plans. Ceux-ci se retrouvent notamment dans l'étude de l'orbite des satellites géostationnaires ou encore dans le comportement des colonies de bactéries (voir figure 1.5). Dans ces cas là, un type de coordonnées particulièrement bien adapté sont les  **coordonnées polaires**.

Dans ce système, le point  $M$  est repéré par :

- L'angle  $\theta$  entre l'axe ( $Ox$ ) et le vecteur  $\overrightarrow{OM}$ .
- La distance  $r$  entre le point  $M$  et l'origine  $O$  du repère, soit la norme du vecteur  $\overrightarrow{OM}$ .

Par définition,  $r$  est positif et peut donc varier dans l'intervalle  $[0, \infty]$ , tandis que  $\theta$  est un angle et varie donc dans l'intervalle  $[0, 2\pi]$ . Ces deux grandeurs représentent les deux coordonnées polaires du point  $M$ .

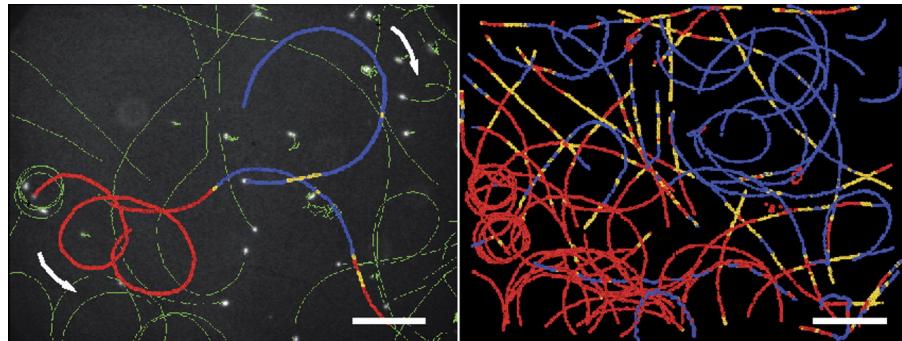


FIGURE 1.5 – Image of the trajectories (green) of *E. coli* (4-h growth time) swimming in the air-TN interfaces superimposed on the last frame of one acquisition (bacteria in white). Motion orientation of three highlighted trajectories is indicated by arrows, and values of instantaneous curvature

La base de vecteurs unitaires adaptée aux coordonnées polaires est constituée (voir figure 1.6a) :

- du vecteur  $\vec{e}_r$  qui possède la même direction que le vecteur  $\overrightarrow{OM}$ .
- du vecteur  $\vec{e}_\theta$  qui correspond au vecteur  $\vec{e}_r$  tourné d'un angle  $\pi/2$  dans le sens trigonométrique (i.e. inverse au sens horaire).

Ainsi, en coordonnées polaires, le vecteur position associé au point  $M$  de coordonnées  $(r, \theta)$  s'exprime simplement comme :

$$\overrightarrow{OM} = r\vec{e}_r \quad (1.3)$$

Des exemples de vecteurs  $\overrightarrow{OM}$  décrit en coordonnées polaires sont donnés à la figure 1.6.

Contrairement aux coordonnées cartésiennes, la base de vecteurs unitaires en coordonnées polaires dépend donc de la position du point  $M$  (le doublet de vecteurs change d'orientation en fonction de la coordonnée  $\theta$ ). On dit que c'est une **base mobile**.

*L'existence des coordonnées polaires montrent que dans un même espace, il est possible de repérer un point de différentes façons. Dans le but de simplifier les problèmes au maximum, bien choisir son repère et son système de coordonnées est essentiel en physique.*

### 1.2.3 Repérage dans l'espace

#### Coordonnées cartésiennes

Pour se repérer dans l'espace en 3D, la manière la plus simple de faire est d'ajouter un axe ( $Oz$ ) orthogonal au plan ( $xOy$ ), dont la direction est donnée par le vecteur directeur  $\vec{e}_z$  (voir figure 1.7-(a)). Dans la base  $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ , le vecteur position  $\overrightarrow{OM}$  s'écrit alors simplement :

$$\overrightarrow{OM} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z \quad (1.4)$$

et  $x$ ,  $y$  et  $z$  sont les coordonnées cartésiennes du point  $M$ .

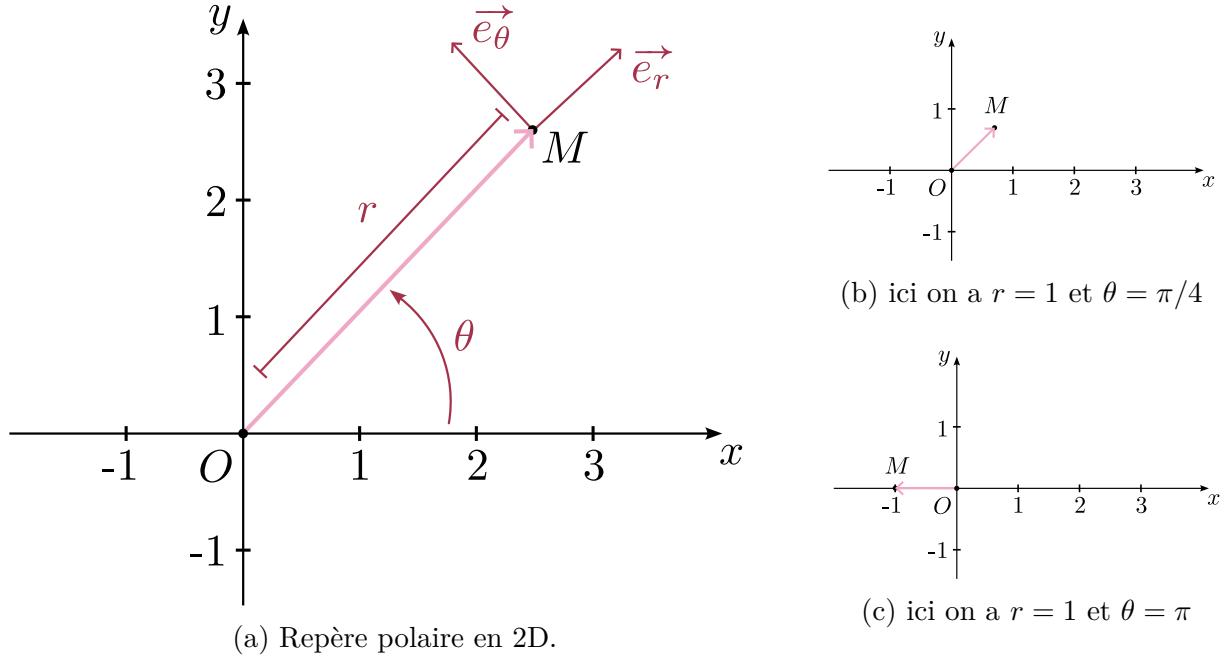


FIGURE 1.6 – Utilisation des coordonnées polaires en 2D.

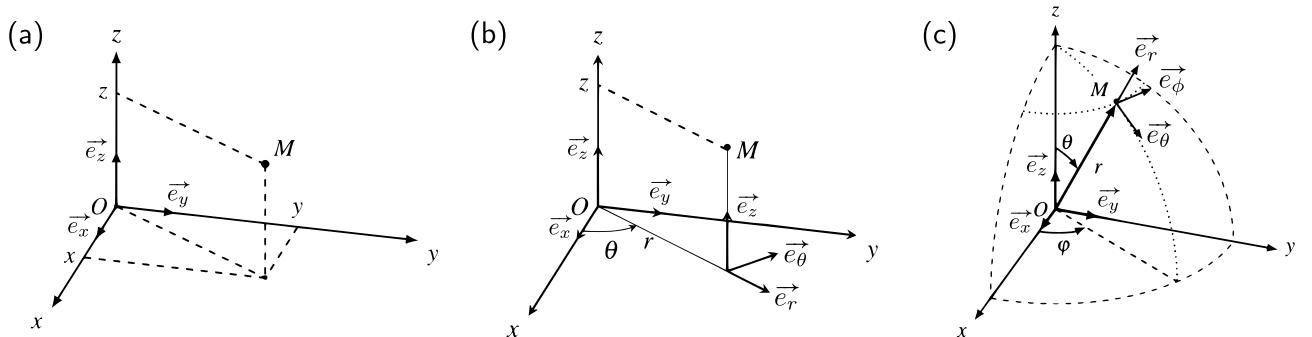


FIGURE 1.7 – Systèmes de coordonnées en 3D. (a) cartésiennes (b) cylindriques (c) sphériques.

### Autres systèmes de coordonnées dans l'espace

Comme il existe les coordonnées polaires en 2D, il existe des systèmes de coordonnées plus spécifiques que les coordonnées cartésiennes en 3D.

Les coordonnées cylindriques, représentées sur la [figure 1.7-\(b\)](#), correspondent à l'ajout d'un repérage via l'axe ( $Oz$ ) en plus des coordonnées polaires dans le plan ( $xOy$ ). Elles sont particulièrement utiles pour décrire le mouvement le long d'un tube, comme la marche de la kinésine le long d'un microtubule.

Les coordonnées sphériques, représentées sur la [figure 1.7-\(c\)](#), correspondent à l'ajout d'un repérage via un second angle  $\phi$  en plus des coordonnées polaires. Elles sont particulièrement utiles pour décrire le mouvement sur une sphère, comme le mouvement des humains sur la Terre.

*Nous savons maintenant comment repérer un point dans l'espace, quelque soit la dimension considérée. Cependant, pour faire de la mécanique, ce qui nous intéresse n'est pas la position fixe d'un objet mais plutôt son évolution au cours du temps. Il va donc falloir ajouter une variable au problème : le temps.*

## 1.3 Notion de référentiel

Avant de se lancer dans l'étude générale de l'évolution d'une position au cours du temps, il est utile de rappeler une notion essentielle : celle de référentiel.

### 1.3.1 Problématisation

Prenons l'exemple d'une organelle, le noyau par exemple, dans une cellule en migration (voir figure 1.8). Du point de vue de la cellule, cette organelle ne bouge pas, elle a une position fixe. Par contre, du point de vue du biologiste en laboratoire, celle-ci se déplace avec la cellule. Cette observation montre que le mouvement d'un objet dépend en fait du point de vue adopté. Il est donc très important de définir au préalable ce point de vue pour caractériser un mouvement et donc lever cette ambiguïté.

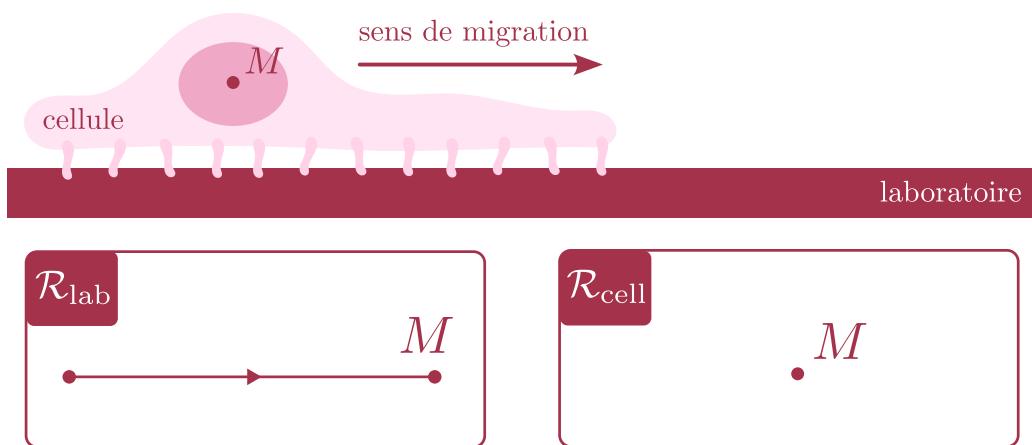


FIGURE 1.8 – Trajectoires du noyau d'une cellule en migration dans deux référentiels différents. Dans le référentiel du laboratoire, le noyau effectue le mouvement de la migration. Dans le référentiel de la cellule, le noyau est immobile.

### 1.3.2 Définition

En physique, on définit rigoureusement le point de vue d'observation à travers la notion de référentiel.

#### Référentiel

Le référentiel est le cadre spatio-temporel de l'étude mécanique. Pour le définir on a besoin d'un repère d'espace et d'un repère de temps.

Le repère de temps est défini par une origine des temps  $t = 0$  et une mesure du temps (conventionnellement la seconde). L'origine des temps est arbitraire mais elle doit être fixée en début d'étude afin de pouvoir situer les différents instants sur la flèche du temps.

Le repère d'espace est défini par une origine des positions (le point  $O$ ), une mesure des distances (conventionnellement le mètre) et trois axes (( $Ox$ ), ( $Oy$ ) et ( $Oz$ )).

Dans le cas présenté en problématisation, la différence de mouvement perçu vient du fait que l'origine du repère d'espace est différente selon les points de vue :

- Dans le référentiel  $\mathcal{R}_c$  de la cellule, l'origine des positions se déplace avec la cellule. Ainsi, l'appareil de Golgi ne se déplace pas dans ce référentiel car sa position par rapport à l'origine du repère d'espace est constante.
- Dans le référentiel  $\mathcal{R}_l$  du laboratoire, l'origine des positions est fixée à la table d'expérimentation. Ainsi, l'appareil de Golgi se déplace dans ce référentiel car sa position par rapport à l'origine du repère d'espace évolue.

In fine, on retiendra qu'il est essentiel de définir le référentiel dans lequel on étudie un mouvement lors de la problématisation d'une situation physique !

*Une fois le référentiel défini, nous allons voir avec quels outils nous pouvons décrire le mouvement d'un objet, i.e. l'évolution de sa position au cours du temps.*

## 1.4 Les descripteurs du mouvement

Dans la suite, on considère le mouvement du point matériel  $M$  par rapport à l'origine du repère d'espace  $O$ , fixe dans le référentiel d'étude  $\mathcal{R}$ .

### 1.4.1 Le vecteur position

#### Définitions

Le premier descripteur évident du mouvement est le vecteur position  $\overrightarrow{OM}(t)$  que nous avons déjà rencontré. Simplement, ici, dans le cadre de l'étude d'un mouvement, celui-ci dépend du temps (puisque  $M$  se déplace au cours du temps). On a donc :

$$\overrightarrow{OM}(t) = x(t)\vec{e}_x + y(t)\vec{e}_y + z(t)\vec{e}_z \quad (1.5)$$

Les composantes de ce vecteur, et donc sa norme, sont des distances. Elles s'expriment donc en mètre (m). Ce vecteur permet de définir les notions d'équations horaires et de trajectoire.

#### Trajectoire

La trajectoire d'un point  $M$  est la courbe décrite par l'extrémité du vecteur position au cours du temps.

Par exemple, la trajectoire d'un satellite géostationnaire est un cercle, alors que la trajectoire d'une balle de fusil est un segment.

## Équations horaires

Les équations horaires correspondent aux équations décrivant l'évolution des coordonnées du point  $M$  en fonction du temps.

Par exemple, les équations horaires représentant un mouvement à vitesse constante  $v_0$  dirigée selon  $\vec{e}_x$  sont :

$$\begin{cases} x(t) = x_0 + v_0 t \\ y(t) = y_0 \\ z(t) = z_0 \end{cases} \quad (1.6)$$

tandis que celles décrivant un mouvement circulaire plan de rayon  $R_0$  et de vitesse angulaire  $\omega$  sont :

$$\begin{cases} r(t) = R_0 \\ \theta(t) = \omega t \end{cases} \quad (1.7)$$

## Vecteur déplacement

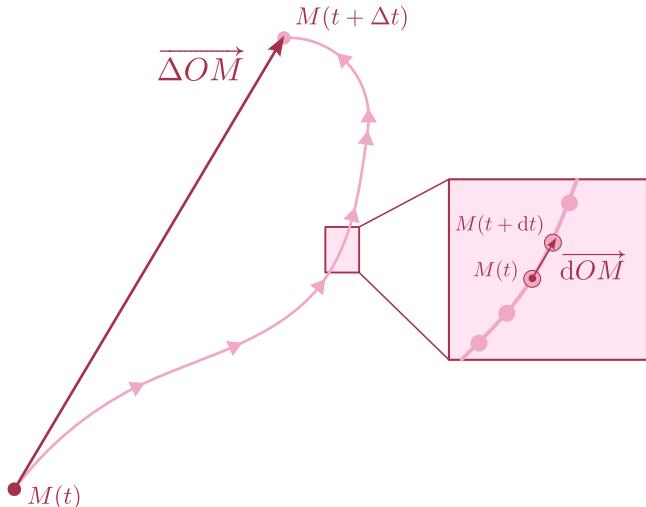


FIGURE 1.9 – Représentation des vecteurs déplacement et déplacement infinitésimal sur une trajectoire

Si l'on considère l'évolution de la position du point  $M$  entre l'instant  $t$  et l'instant  $\Delta t$ , il est possible de décrire son déplacement sur la durée  $\Delta t$  via le vecteur déplacement :

$$\overrightarrow{\Delta OM}(t) = \overrightarrow{OM}(t + \Delta t) - \overrightarrow{OM}(t) = \overrightarrow{M(t)M(t + \Delta t)} \quad (1.8)$$

Pour décrire le déplacement de  $M$  précisément à chaque instant  $t$  il faut considérer des durées  $\Delta t$  les plus petites possibles. On parle dans ce cas là de durée infinitésimale (pour dire infiniment petites mais non nulles) et on la note  $dt$ . Le vecteur déplacement infinitésimal  $\overrightarrow{dOM}(t)$  est alors défini comme :

$$d\overrightarrow{OM}(t) = \overrightarrow{M(t)M(t+dt)} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \overrightarrow{\Delta OM}(t) \quad (1.9)$$

Par définition, le vecteur déplacement infinitésimal est toujours tangent à la trajectoire (voir figure 1.9).

### 1.4.2 Le vecteur vitesse

#### Définition

Vous avez normalement déjà toutes entendu parler du concept de vitesse. Prenons l'exemple de la kinésine qui se déplace sur les microtubules. Si elle se déplace d'une distance  $D$  sur le microtubule au cours d'une durée  $\Delta t$ , alors celle-ci a une vitesse  $v$  telle que :

$$v = \frac{D}{\Delta t} \quad (1.10)$$

Cette grandeur physique s'exprime en mètre par seconde ( $m \cdot s^{-1}$ ), comme on peut le déduire facilement de l'équation 1.10.

Dans cet exemple, pour être plus précis, la vitesse  $v$  correspond en fait à la moyenne de la vitesse de la kinésine sur le trajet. En effet, si l'on étudie expérimentalement le trajet d'une kinésine, on se rend compte que son déplacement n'est pas du tout uniforme mais se fait plutôt par pas : elle alterne des phases de pause immobile ( $v = 0$ ) et des avancées ponctuelles ( $v > 0$ ). Pour spécifier cette notion de moyenne sur le trajet, on préférera alors utiliser la notation  $\langle v \rangle$ .

On peut en fait généraliser assez simplement cette notion de vitesse dans le cas où le mouvement se fait dans l'espace et non uniquement en ligne droite. C'est le cas pour la kinésine si le microtubule est courbé par exemple. Dans ce cas là, la vitesse moyenne est définie par un vecteur vitesse moyenne  $\langle \vec{v} \rangle$ . Dans le cas du mouvement d'un point matériel  $M$ , il est relié au déplacement  $\overrightarrow{\Delta OM}$  effectué pendant la durée  $\Delta t$  considérée selon :

$$\langle \vec{v} \rangle = \frac{\overrightarrow{\Delta OM}}{\Delta t} \quad (1.11)$$

On retrouve donc exactement la même définition que précédemment mais appliquée au cas des vecteurs.

Toutefois, la vitesse moyenne est souvent insuffisante pour décrire correctement un mouvement et un même vecteur  $\langle \vec{v} \rangle$  peut décrire des trajectoires extrêmement différentes. Pour une description plus fine, il faut en fait connaître la vitesse du point  $M$  à chaque instant  $t$ , en moyennant le moins possible au cours du trajet. Pour ce faire, on considère donc une durée de trajet infinitésimale  $dt$  afin de définir le vecteur vitesse instantané :

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\overrightarrow{\Delta OM}}{\Delta t} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} \quad (1.12)$$

avec  $d\overrightarrow{OM}$  le vecteur déplacement infinitésimal.

Mathématiquement, on a  $\frac{\overrightarrow{dOM}}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\overrightarrow{OM}(t+\Delta t) - \overrightarrow{OM}(t)}{\Delta t}$  et donc  $\vec{v}$  correspond simplement à la dérivée du vecteur position par rapport au temps. Selon ce principe, on utilisera dans la suite la notation  $\frac{d}{dt}$  comme équivalente à "dérivée par rapport au temps". De plus, par souci de concision on appellera simplement vecteur vitesse le vecteur vitesse instantanée.

### Vecteur vitesse

Le vecteur vitesse correspond à la dérivée du vecteur position en fonction du temps :

$$\vec{v} = \frac{\overrightarrow{dOM}}{dt} \quad (1.13)$$

Sa norme s'exprime en  $\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$ .

### Dérivation

Afin de calculer une vitesse, il est donc essentiel de maîtriser ses dérivées. Les dérivées de fonctions usuelles sont répertoriées dans le tableau suivant. Si vous n'êtes pas à l'aise avec cet outil, il est conseillé de reprendre vos cours de lycées. **Table de dérivées**

TABLE 1.1 – Dérivée des fonctions usuelles

$x(t)$	$\frac{dx}{dt}$
$t$	1
$t^2$	$2t$
$t^n$	$nt^{n-1}$
$e^t$	$e^t$
$\cos(t)$	$-\sin(t)$
$\sin(t)$	$\cos(t)$

TABLE 1.2 – Règles de dérivation

$x(t)$	$\frac{dx}{dt}$
$x(at)$	$a \frac{dx}{dt}$
$x(t) + y(t)$	$\frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt}$
$x(t) \times y(t)$	$\frac{dx}{dt} \times y(t) + x(t) \frac{dy}{dt}$
$x(y(t))$	$\frac{dy}{dt} \times \frac{dx}{dy}$

Dériver un vecteur peut paraître un peu déstabilisant au premier abord mais si l'on connaît ses règles de dérivation, c'est en fait très simple. Dans le cas des coordonnées cartésiennes on a :

$$\vec{v} = \frac{\overrightarrow{OM}}{dt} = \frac{d}{dt} (x(t)\vec{e}_x + y(t)\vec{e}_y + z(t)\vec{e}_z) \quad (1.14)$$

La base  $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$  étant fixe, les vecteurs unitaires sont constants au cours du temps. Ainsi on a simplement :

$$\vec{v} = \frac{dx}{dt}\vec{e}_x + \frac{dy}{dt}\vec{e}_y + \frac{dz}{dt}\vec{e}_z \quad (1.15)$$

Ainsi les composantes du vecteur vitesse sont simplement les dérivées des composantes du vecteur position.

### Exemple

Considérons le vecteur position :

$$\overrightarrow{OM}(t) = 3t \vec{e}_x + e^{-t} \vec{e}_y \quad (1.16)$$

alors le vecteur vitesse associé est :

$$\vec{v}(t) = 3 \vec{e}_x - e^{-t} \vec{e}_y \quad (1.17)$$

## Exemple du mouvement de la kinésine

### 1.4.3 Le vecteur accélération

De la même manière que la vitesse caractérise la variation de la position au cours du temps, l'accélération caractérise la variation de la vitesse au cours du temps. Lorsqu'on accélère on augmente sa vitesse alors que lorsque l'on décélère on diminue sa vitesse. On définit donc de même un vecteur accélération à tout instant  $t$ .

#### Vecteur accélération

Le vecteur accélération correspond à la dérivée du vecteur vitesse en fonction du temps et donc à la dérivée double <sup>a</sup> du vecteur position en fonction du temps :

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{OM}}{dt^2} \quad (1.18)$$

Sa norme s'exprime en  $\text{m} \cdot \text{s}^{-2}$ .

a. On utilisera la notation  $\frac{d^2}{dt^2}$  pour désigner la dérivée double par rapport au temps.

Si l'on connaît l'expression du vecteur position au cours du temps, on peut donc caractériser complètement le mouvement en calculant les vecteurs vitesse et accélération associés.

#### Exemple

Considérons le vecteur position :

$$\vec{OM}(t) = t^2 \vec{e}_x + \cos(t) \vec{e}_y \quad (1.19)$$

alors le vecteur vitesse associé est :

$$\vec{v}(t) = 2t \vec{e}_x - \sin(t) \vec{e}_y \quad (1.20)$$

et le vecteur accélération est :

$$\vec{a}(t) = 2 \vec{e}_x - \cos(t) \vec{e}_y \quad (1.21)$$

De manière inverse, si l'on connaît l'accélération du point  $M$  ou sa vitesse et que l'on veut déterminer son vecteur position il faut faire le chemin inverse, donc non pas dériver mais intégrer. Il ne faut alors pas oublier les constantes d'intégration qui se déduisent des conditions initiales du mouvement (c'est-à-dire les caractéristiques du mouvement  $t = 0$ ). Si vous n'êtes pas à l'aise avec la notion d'intégration, il est fortement conseillé de reprendre un cours de mathématique de niveau lycée (**spécifié**).

### Exemple

Considérons une voiture modélisée par un point matériel  $M$  se déplaçant en 1D sur un axe ( $Ox$ ), ayant une accélération constante :

$$\vec{a}(t) = F \vec{e}_x \quad (1.22)$$

et ayant comme position initiale  $\overrightarrow{OM}(t=0) = x_0 \vec{e}_x$  et comme vitesse initiale  $\vec{v} = v_0 \vec{e}_x$ . On peut calculer le vecteur vitesse par intégration :

$$\vec{v}(t) = (Ft + C_1) \vec{e}_x \quad (1.23)$$

or on sait qu'à  $t = 0$  on a  $\vec{v} = \vec{0}$  donc  $C_1 = 0$ . On peut alors intégrer une seconde fois pour trouver le vecteur position :

$$\overrightarrow{OM}(t) = \left( \frac{1}{2} Ft^2 + C_2 \right) \vec{e}_x \quad (1.24)$$

or on sait qu'à  $t = 0$  on a  $\overrightarrow{OM} = x_0 \vec{e}_x$  donc  $C_2 = x_0$ . Ainsi on a finalement :

$$\overrightarrow{OM}(t) = \left( \frac{1}{2} Ft^2 + x_0 \right) \vec{e}_x \quad (1.25)$$

## 1.5 Étude de mouvements caractéristiques (★)

*Pour mettre en pratique tous ces outils nous allons étudier dans cette dernière partie trois mouvements caractéristique simples.*

### 1.5.1 Mouvement rectiligne uniforme

Beaucoup de mouvements peuvent être décrits par un vecteur vitesse  $\vec{v}_0$  constant au cours du temps. Cela signifie que la norme de la vitesse  $v_0$  est constante et que sa direction l'est aussi. On peut par exemple penser au trajet de migration d'une cellule sur un substrat unidimensionnel.

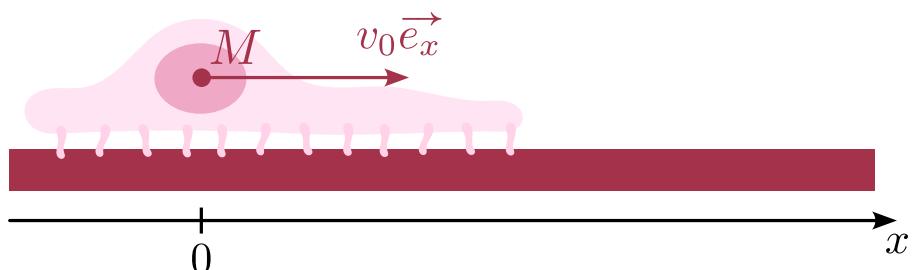


FIGURE 1.10 – Description de la trajectoire d'une cellule en migration rectiligne uniforme.

La meilleure manière de représenter un tel trajet est sur une droite. En effet, dans un repère choisi judicieusement, le mouvement se fait selon un axe. Définissons un axe ( $Ox$ ) de vecteur

directeur unitaire  $\vec{e}_x$  dans la même direction que  $\vec{v}_0$ , tel que  $\vec{v}_0 = v_0 \vec{e}_x$  (voir figure 1.10). Dans ce repère, les descripteurs du mouvement prennent la forme :

$$\overrightarrow{OM}(t) = x(t)\vec{e}_x, \quad \vec{v}(t) = v_x(t)\vec{e}_x, \quad \vec{a}(t) = a_x(t)\vec{e}_x \quad (1.26)$$

On a donc  $v_x(t) = v_0$  qui est indépendant du temps.  $a_x(t)$  étant la dérivée de  $v_x(t)$ , celle-ci est nulle et donc on a  $a_x(t) = 0$ . Enfin, pour trouver l'équation horaire  $x(t)$ , il suffit d'intégrer :

$$x(t) = v_0 t + C \quad (1.27)$$

avec  $C$  une constante d'intégration à déterminer à l'aide des conditions initiales. En supposant que l'objet est à la position  $\overrightarrow{OM}(t = 0) = x_0$  à l'instant initial, on a alors  $C = x_0$ . Les trois descripteurs de ce mouvement sont alors :

$$\overrightarrow{OM}(t) = v_0 t + x_0, \quad \vec{v}(t) = v_0 \vec{e}_x, \quad \vec{a}(t) = \vec{0} \quad (1.28)$$

### 1.5.2 Mouvement uniformément accéléré

Certains mouvements peuvent être décrits par un vecteur accélération constante. C'est le cas du mouvement d'une balle soumise à la gravité par exemple. Considérons un objet se déplaçant dans le plan  $xOy$  soumis à une accélération constante  $\vec{a}(t) = a_y \vec{e}_y$ , avec une vitesse initiale  $v(t = 0) = v_0 \vec{e}_x$  et une position initiale  $\overrightarrow{OM}(t = 0) = x_0 \vec{e}_x$ . Essayons de déterminer la vitesse et la position de cet objet à tout instant  $t$ .

Pour obtenir la vitesse, il suffit d'intégrer l'accélération, sans oublier les constantes d'intégration :

$$\vec{v}(t) = C_1 \vec{e}_x + (a_y t + C_2) \vec{e}_y \quad (1.29)$$

On détermine alors ces constantes d'intégration sachant que  $v(t = 0) = v_0 \vec{e}_x$  et donc  $v_x(t = 0) = v_0$  et  $v_y(t = 0) = 0$ . On obtient alors  $C_1 = v_0$  et  $C_2 = 0$  soit :

$$\vec{v}(t) = v_0 \vec{e}_x + a_y t \vec{e}_y \quad (1.30)$$

Pour obtenir la position, il suffit d'intégrer la vitesse. De même on a :

$$\overrightarrow{OM}(t) = (v_0 t + C_3) \vec{e}_x + \left( \frac{1}{2} a_y t^2 + C_4 \right) \vec{e}_y \quad (1.31)$$

En utilisant les conditions initiales sur la position on trouve finalement  $C_3 = x_0$  et  $C_4 = 0$ . Finalement, les trois descripteurs de ce mouvement sont donc :

$$\overrightarrow{OM}(t) = (v_0 t + x_0) \vec{e}_x + \frac{1}{2} a_y t^2 \vec{e}_y, \quad \vec{v}(t) = v_0 \vec{e}_x + a_y t \vec{e}_y, \quad \vec{a}(t) = a_y \vec{e}_y \quad (1.32)$$

**Équation de la trajectoire** En reprenant les équations horaires :

$$\begin{cases} x(t) = v_0 t + x_0 \\ y(t) = \frac{1}{2} a_y t^2 \end{cases} \quad (1.33)$$

il est possible de déterminer la trajectoire de notre mouvement dans le plan  $xOy$ . Pour ce faire, on commence par exprimer le temps  $t$  en fonction de la coordonnée  $x$  :

$$t = \frac{x - x_0}{v_0} \quad (1.34)$$

puis de remplacer le temps  $t$  par cette expression dans l'équation horaire sur la coordonnée  $y$  :

$$y(x) = \frac{a_y}{2v_0^2} (x - x_0)^2 \quad (1.35)$$

Dans le plan  $xOy$ , l'objet parcourt donc une parabole.

### 1.5.3 Mouvement circulaire uniforme (\*\*)

Un autre type de mouvement caractéristique sont les mouvements circulaires uniformes. C'est le mouvement associé à un satellite géostationnaire par exemple. Considérons un tel mouvement dans le plan  $xOy$ . De manière évidente, les coordonnées les plus adaptées pour décrire ce mouvement sont les coordonnées polaires. En notant  $R$  le rayon de la trajectoire et  $\omega$  la vitesse angulaire du mouvement on a :

$$\begin{cases} r(t) = R \\ \theta(t) = \omega t \end{cases} \quad (1.36)$$

Le vecteur position s'écrit dans ce cas :

$$\overrightarrow{OM}(t) = R\vec{e}_r \quad (1.37)$$

On cherche alors à en déduire l'expression du vecteur vitesse et du vecteur accélération. Pour trouver le vecteur vitesse, il faut dériver le vecteur position :

$$\vec{v}(t) = \frac{d}{dt} (R\vec{e}_r) \quad (1.38)$$

mais attention ! Comme nous l'avons vu précédemment, la base polaire est une base mobile, c'est-à-dire que les vecteurs unitaires  $\vec{e}_r$  et  $\vec{e}_\theta$  dépendent de la position du point  $M$  et donc du temps. Ainsi, il faut donc aussi dériver le vecteur  $\vec{e}_r$  et ne pas le considérer constant comme dans le cas des coordonnées cartésiennes. En fait, et nous ne le démontrerons pas ici, les dérivées en fonction du temps des vecteurs unitaires de la base polaire sont :

$$\frac{d\vec{e}_r}{dt} = \frac{d\theta}{dt} \vec{e}_\theta, \quad \frac{d\vec{e}_\theta}{dt} = -\frac{d\theta}{dt} \vec{e}_r \quad (1.39)$$

Ainsi, la dérivée du vecteur position donne dans le cas du mouvement circulaire uniforme :

$$\vec{v} = R \frac{d\theta}{dt} \vec{e}_\theta = R\omega \vec{e}_\theta \quad (1.40)$$

La vitesse de l'objet est donc dans la direction du vecteur unitaire orthoradial  $\vec{e}_\theta$  et sa norme est constante.

En reprenant le même raisonnement pour calculer l'accélération à partir de la vitesse, on trouve :

$$\vec{a}(t) = -R\omega^2 \vec{e}_r \quad (1.41)$$

Ainsi, l'objet est accéléré vers l'origine du repère. Dans le cas du satellite géostationnaire, cela signifie donc qu'il est accéléré, tiré par le centre de la Terre... Nous allons voir dans le chapitre suivant comment l'expliquer !

## Objectifs de ce chapitre

À l'issue de ce chapitre, vous devez :

- Savoir repérer un point sur un axe.
- Savoir repérer un point dans le plan en coordonnées cartésiennes et polaires.
- Savoir repérer un point dans l'espace en coordonnées cartésiennes.
- Avoir compris la notion de référentiel d'étude d'un mouvement.
- Écrire un vecteur position à partir des coordonnées d'un point.
- Calculer un vecteur déplacement.
- Calculer une vitesse moyenne et un vecteur vitesse moyenne.
- Définir et calculer un vecteur vitesse instantanée à partir d'un vecteur position.
- Définir et calculer un vecteur accélération instantanée à partir d'un vecteur position ou d'un vecteur vitesse.
- Retrouver un vecteur position à partir d'un vecteur vitesse ou d'un vecteur accélération et de conditions initiales.
- Établir l'équation de la trajectoire d'un point à partir d'un vecteur position.



# Chapitre 2

## Dynamique du point

*Grâce au premier chapitre, nous sommes en mesure de décrire le mouvement d'un objet via sa position, sa vitesse et son accélération. Dans ce second chapitre nous allons nous intéresser aux causes des mouvements des objets : les forces. Nous verrons alors qu'il est possible de prédire le mouvement d'un objet en connaissant les forces qui s'y appliquent : c'est ce qu'on appelle la dynamique. Grâce à cette dernière, la mécanique prend un aspect divinatoire.*

### 2.1 Principe fondamental de la dynamique

#### 2.1.1 Énoncé

En mécanique classique, un objet de masse  $m$  soumis à une force  $\vec{F}$  possède une accélération  $\vec{a}$  telle que :

$$\vec{F} = m \vec{a}, \quad \text{ou} \quad \vec{a} = \frac{\vec{F}}{m} \quad (2.1)$$

On appelle l'**équation 2.1 principe fondamental de la dynamique** (PFD), énoncé par Isaac Newton<sup>1</sup>. Dans la suite, nous allons voir que ce principe est en fait assez intuitif.

#### 2.1.2 La masse

Tous les objets ne se comportent pas de la même façon face à la mise en mouvement. En effet, même en appliquant le même effort dans sa raquette, il est beaucoup plus compliqué de renvoyer une balle de pétanque qu'une balle de ping pong. C'est ce qu'on appelle le phénomène d'inertie, certains objets résistent plus à la mise en mouvement que d'autres.

De manière intuitive, on peut qualifier l'inertie d'un objet par sa masse. La masse est donc une grandeur positive qui qualifie la résistance à la mise en mouvement. Plus un objet est lourd (la balle de pétanque par exemple), plus il résiste à la mise en mouvement. À l'inverse, plus un objet est léger (la balle de ping pong par exemple), plus il peut être mis en mouvement facilement. La masse s'exprime en kilogrammes (kg).

1. Vous connaissez peut-être déjà ce principe sous le nom de seconde loi de Newton

Cette définition de la masse se retrouve directement dans le PFD. En effet, en termes de normes on a :

$$a = \frac{F}{m} \quad (2.2)$$

et donc plus la masse de l'objet est grande plus, à force égale, l'accélération de l'objet est faible et donc sa mise en mouvement peu efficace.

### 2.1.3 Notion de force

Les modifications sur le mouvement d'un objet (mise en mouvement ou changement du mouvement déjà en cours) sont dues à des interactions avec l'environnement extérieur. Pour modéliser ces interactions, on utilise la notion de force :

#### Force

Une force est une grandeur vectorielle, dont la norme s'exprime en Newton (N), qui décrit l'interaction capable de modifier le mouvement d'un objet.

Le caractère vectoriel d'une force apparaît de manière assez évidente. En effet, l'interaction doit être définie par une direction, un sens et une intensité. Par exemple, si je tire sur un ressort, la force exercée par ce ressort sur ma main se fait dans la direction d'élongation du ressort, dans le sens de repli du ressort, et cette force est d'autant plus intense que le ressort a été étiré. Sans caractère vectoriel de cette grandeur, on ne sait pas dans quelle direction l'objet soumis à la force est tiré (ou bien repoussé).

Si l'on regarde en termes de norme le PFD (voir [équation 2.2](#)), on remarque que l'accélération d'un objet est d'autant plus grande que la norme de la force (et donc son intensité) est grande. Cela est tout à fait intuitif : plus on frappe fort la balle de ping pong avec notre raquette, plus celle-ci va être accélérée.

### 2.1.4 Système soumis à plusieurs forces

Dans le cas où le système étudié est soumis à plusieurs forces, le PFD se généralise en considérant la somme vectorielle de toutes les forces  $\vec{F}_i$  en jeu :

$$\sum_i \vec{F}_i = m \vec{a} \quad (2.3)$$

*Le principe fondamental de la dynamique est donc un principe très simple qui relie les interactions extérieures sur un objet et le mouvement de celui-ci. Malgré sa simplicité, son interprétation se révèle en fait très riche.*

### 2.1.5 Utilisation du principe fondamental de la dynamique

#### Détermination du mouvement d'un objet

Grâce au PFD, si l'on connaît les différentes forces s'appliquant sur un objet, on est capable de connaître l'accélération de ce dernier. Or dans le premier chapitre, nous avons vu que, de l'accélération, nous pouvons tirer la vitesse et la position de l'objet. Ainsi, simplement à partir des forces extérieures, nous sommes capable de prédire le mouvement de l'objet. C'est là tout le sujet de la dynamique newtonienne.

Dans la partie suivante, nous verrons quelques exemples de prédictions de mouvement basées sur ce principe.

#### Systèmes isolés et pseudo-isolés

Il existe un cas particulier d'application du PFD, celui dans lequel l'objet étudié n'est soumis à aucune force extérieure (système isolé) ou bien dans lequel la résultante des différentes forces est nulle (système pseudo-isolé). Dans le cas des systèmes isolés ou pseudo-isolés, l'application du PFD nous dit que l'accélération est nulle :

$$\sum_i \vec{F}_i = \vec{0} \Rightarrow \vec{a} = \vec{0} \quad (2.4)$$

Par définition de l'accélération (qui est la dérivée du vecteur vitesse), cela signifie qu'un tel système possède un vecteur vitesse constant en direction et en norme. Autrement dit, cela correspond à un mouvement rectiligne uniforme (voir **Chap XX**). Notons par ailleurs que l'immobilité est un cas particulier du mouvement rectiligne uniforme (vitesse uniformément nulle). Ce raisonnement constitue le principe d'inertie :

#### Principe d'inertie

Un système isolé ou pseudo-isolé conserve un mouvement rectiligne uniforme.

Si la prédition d'un mouvement rectiligne uniforme ou l'absence de mouvement n'est pas très intéressant, la réciproque du principe d'inertie peut, elle, s'avérer utile. Par exemple, si l'on sait qu'un objet est immobile, on sait que la résultante des forces s'appliquant sur lui est nulle. De cette manière il est possible de caractériser des forces extérieures !

### 2.1.6 Écueil sur les référentiels galiléens (\*)

En toute rigueur, le PFD n'est valable que lorsque l'on se place dans un référentiel galiléen. Toutefois, nous ne considérerons dans ce cours que des référentiels galiléens et omettront donc cette subtilité. Pour lae lecteurice intéressé-e, il est en fait possible de généraliser le PFD à des référentiels non galiléens en considérant les forces fictives d'inertie qu'ils génèrent. C'est notamment le cas lorsqu'on considère la force centrifuge dans un référentiel en rotation, comme dans le cas d'un manège tournant ou d'une centrifugation différentielle en biologie.

## 2.2 Forces en présence dans le systèmes biologiques

*Dans cette partie, nous allons faire l'inventaire de quelques forces omniprésentes en biologie afin de pouvoir prédire le mouvement de systèmes intéressants.*

### 2.2.1 Le poids

La force la plus largement étudiée sur Terre est le poids. Le poids est la force d'attraction gravitationnelle dans le cas précis de la Terre. Un objet possédant une masse sur la surface de la Terre ressent une attraction vers le centre de cette dernière (en direction du sol donc) proportionnelle à sa masse. Soit un objet de masse  $m$ , le poids s'appliquant sur celui-ci s'exprime :

$$\vec{P} = m \vec{g} \quad (2.5)$$

avec  $\vec{g}$  l'accélération de la pesanteur, de norme  $g = 9.8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ , et dirigée vers le sol. Sur la **Fig XX** on représente le poids de différentes balles lancées en l'air. En premier approximation, le poids est une force qui ne varie ni dans l'espace, ni dans le temps. Tout au long du mouvement, un objet est soumis au même poids.

*Dans le langage courant, on confond souvent poids et masse. Ce n'est pas la même chose ! Le poids est une force (s'exprime en N) s'appliquant sur un objet qui a une masse (s'exprime en kg). La confusion vient du fait qu'on se sert en général du poids pour mesurer indirectement la masse. En effet, une balance mesure le poids qui s'applique sur un objet et, par conversion, en utilisant l'équation 2.5, en déduit la masse.*

### 2.2.2 Force de rappel d'un ressort

Une autre force très utilisée en physique est la force de rappel qu'applique un ressort sur un objet collé à son extrémité. Si la longueur à vide du ressort est  $l_0$ , alors un ressort étiré d'une longueur  $l$  applique une force de traction sur son extrémité :

$$\vec{F}_r = k(l_0 - l)\vec{e}_x \quad (2.6)$$

avec  $k$  la constante de raideur du ressort, s'exprimant en  $\text{N} \cdot \text{m}^{-1}$  (d'autant plus grande que le ressort est raide) et  $\vec{e}_x$  le vecteur unitaire dans le sens de l'élongation du ressort.

En pratique, on fait rarement face à des problèmes faisant intervenir des ressorts à proprement parler. Toutefois, dans bien des cas, il est très pratique de modéliser certains objets par des ressorts. **Exemple du microtubule et de la pince optique**

### 2.2.3 Force de frottements visqueux

Si vous l'avez déjà essayé, vous avez sûrement remarqué qu'il est bien plus difficile de courir dans l'eau plutôt que de courir dans l'air. Cela vient du fait que lorsque l'on se déplace dans un milieu matériel, nous sommes soumis à une force de frottements visqueux. Si l'on considère une sphère de rayon  $R$  se déplaçant dans un fluide à la vitesse  $\vec{v}$ , celle-ci est en fait soumise à une force de frottements visqueux  $\vec{f}$  de la forme :

$$\vec{f} = 6\pi\eta R \vec{v} \quad (2.7)$$

avec  $\eta$  la viscosité dynamique du fluide. Comme son nom l'indique, la viscosité dynamique d'un fluide est d'autant plus grande que le fluide est visqueux. Par exemple, on a  $\eta_{\text{eau}} = 1.00 \times 10^{-3} \text{ Pa} \cdot \text{s}$  et  $\eta_{\text{miel}} = 10 \text{ Pa} \cdot \text{s}$

D'après cette expression, on remarque donc bien que cette force s'oppose au mouvement de l'objet puisque son sens est opposé à celui de la vitesse. De plus, elle est d'autant plus forte que la vitesse de l'objet est grande. Ainsi, plus on essaie de courir vite dans l'eau, plus on aura l'impression d'être entravé par celle-ci.

Dans le cas où l'objet étudié n'est pas une sphère, on définit un rayon hydrodynamique équivalent  $R$  qui permet de modéliser convenablement cette force.

#### 2.2.4 Poussée d'Archimède

Lorsque l'on essaie de plonger une balle sous l'eau, on ressent une certaine résistance. Cette résistance correspond en fait à une nouvelle force que l'on appelle la poussée d'Archimède. Si l'on considère un objet plongé d'un volume  $V_{\text{im}}$  dans un fluide de masse volumique  $\rho_f$  (exprimé en  $\text{kg} \cdot \text{m}^{-3}$ ), celui-ci est soumis à une force :

$$\vec{\Pi} = -\rho_f V_{\text{im}} \vec{g} \quad (2.8)$$

La poussée d'Archimède est donc une force antagoniste de la gravité. Si on prend l'exemple de la balle remplie d'air immergée dans l'eau de la **Fig XX**, on a  $\rho_f > \rho$  et donc la poussée d'Archimède est orientée dans le sens opposé de l'accélération de la pesanteur. Cette force retranscrit donc bien le fait qu'il est difficile d'immerger la balle entièrement dans l'eau !

#### 2.2.5 Force d'interaction coulombienne

Enfin, une force très présente en biologie, notamment en biologie cellulaire, est la force d'interaction coulombienne ou force de Coulomb. Cette force est celle existante entre deux charges. Si l'on considère une charge  $q_1$  à une distance  $r$  d'une charge  $q_2$ , alors la force coulombienne que la charge 2 exerce sur la charge 1 est :

$$F_{2 \rightarrow 1} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 r^2} \overrightarrow{e_{2 \rightarrow 1}} \quad (2.9)$$

avec  $\epsilon_0$  une constante fondamentale appelée permittivité du vide, et  $\overrightarrow{e_{2 \rightarrow 1}}$  le vecteur unitaire dans la direction de la charge 2 vers la charge 1.

Cette force est donc d'autant plus intense que les charges sont grandes et d'autant plus faible qu'elles sont éloignées. Son sens, dépend lui du signe des deux charges (voir **Fig XX**). Si les deux charges sont de même signe, alors  $q_1 q_2 > 0$  et donc la force est attractive. Si les deux charges sont de signes opposés, alors  $q_1 q_2 < 0$  et donc la force est répulsive.

En biologie moléculaire, la force d'interaction coulombienne est omniprésente, notamment dans les protéines. En effet, certains acides aminés sont chargés positivement ou négativement, ce qui favorise ou défavorise leur rapprochement via la force d'interaction coulombienne. Ainsi, cette force joue un grand rôle dans la conformation des protéines : les conformations stables sont grandement dictées par les interactions électrostatiques. De plus, même si la plupart des acides aminés ne portent pas de charge nette, beaucoup possèdent une charge partielle (on parle de molécules polaires), qui entre aussi en jeu dans les interactions coulombiennes.

## 2.3 Exemples d'applications (★)

*Dans cette partie, nous allons voir quelques exemples d'utilisation du PFD appliquées à des situations concrètes.*

### 2.3.1 Chute libre d'une balle

Un des cas les plus simples d'application du PFD est celui de la chute libre d'un objet. Prenons l'exemple d'un ballon de foot shooté par un-e joueuse dont on veut prédire la trajectoire. Comme indiqué sur la **Fig XX**, on définit un repère cartésien en 2D et on place l'origine de ce dernier à la position initiale du ballon<sup>2</sup>. Juste après avoir été shooté, le ballon de masse  $m$  possède une vitesse initiale  $\vec{v}_0 = v_{0x}\vec{e}_x + v_{0y}\vec{e}_y$ .

En négligeant les frottements de la balle avec l'air, la seule force s'exerçant sur la balle est son poids :

$$\vec{P} = m\vec{g} = -mg\vec{e}_y \quad (2.10)$$

Ainsi, le PFD appliqué à la balle donne :

$$\vec{a} = -g\vec{e}_y \Rightarrow a_x = 0, \quad a_y = -g \quad (2.11)$$

Pour obtenir la vitesse de la balle au cours du temps il suffit alors d'intégrer :

$$\vec{v}(t) = C_1\vec{e}_x + (C_2 - gt)\vec{e}_y \quad (2.12)$$

puis d'appliquer les conditions initiales à  $t = 0$ , qui nous donnent  $C_1 = v_{0x}$  et  $C_2 = v_{0y}$  soit :

$$\vec{v}(t) = v_{0x}\vec{e}_x + (v_{0y} - gt)\vec{e}_y \quad (2.13)$$

Pour obtenir le vecteur position en fonction du temps, il faut alors intégrer la vitesse et appliquer les conditions initiales. On trouve alors :

$$\overrightarrow{OM}(t) = v_{0x}t\vec{e}_x + \left(v_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2\right)\vec{e}_y \quad (2.14)$$

Ainsi, nous sommes capables de déterminer la position de la balle à chaque instant du mouvement. Par exemple, grâce à cette étude, on peut prédire à quel instant la balle va toucher le sol et où !

---

2. Le référentiel considéré ici est le référentiel terrestre.

### 2.3.2 Sémentation d'un globule rouge

Pour étudier l'état inflammatoire d'un patient, on peut étudier le mouvement de ses globules rouges dans son sang. Plus précisément, une analyse répandue consiste à placer du sang dans un tube et mesurer la vitesse constante de sémentation des globules rouges dans le fluide. Comment cette vitesse peut-elle nous renseigner sur les globules rouges eux-mêmes ? Pour le comprendre nous allons appliquer le PFD sur le globule rouge.

En terme de bilan des forces, celui-ci est soumis à trois forces : son poids, la poussée d'Archimète et la force de frottements visqueux. Si l'on note  $\rho$  la masse volumique du globule,  $R$  son rayon,  $\rho_s$  la masse volumique du sang et  $\eta$  la viscosité dynamique du sang, alors on a les trois expressions suivantes de ces forces :

$$\vec{P} = \rho \frac{4}{3}\pi R^3 \vec{g}, \quad \vec{\Pi} = -\rho_s \frac{4}{3}\pi R^3 \vec{g}, \quad \vec{f} = -6\pi\eta R \vec{v} \quad (2.15)$$

Étant donné qu'un globule sédimente à vitesse constante, le principe d'inertie nous dit que la somme des forces s'exerçant sur lui est nulle. Ainsi, on a :

$$\rho \frac{4}{3}\pi R^3 \vec{g} - \rho_s \frac{4}{3}\pi R^3 \vec{g} - 6\pi\eta R \vec{v} = \vec{0} \quad (2.16)$$

ce qui nous permet directement d'obtenir :

$$\vec{v} = \frac{2R^2}{9\eta}(\rho - \rho_s) \vec{g} \Rightarrow v = \frac{2R^2}{9\eta}(\rho - \rho_s)g \quad (2.17)$$

Lors d'une inflammation, les globules rouges ont tendance à s'agglomérer et donc former une sorte de super globule de rayon  $R$  plus élevé. D'après l'expression établie précédemment, cela correspond donc à une vitesse de sémentation plus grande. Mesurer la vitesse de sémentation permet, de cette, manière de déduire l'état d'un patient.

### 2.3.3 Mesure de force grâce aux pinces optiques

#### Objectifs de ce chapitre

À l'issue de ce chapitre, vous devez :

- Savoir repérer un point sur un axe.



# Chapitre 3

## Aspects énergétiques de la dynamique du point

*Dans ce chapitre nous allons voir comment relier la notion intuitive d'énergie à la mécanique. Dans les deux chapitres précédents, nous avons vu que, soumis à des forces, les corps peuvent voir leur mouvement se modifier, leur vitesse augmenter ou diminuer. Comme si rien n'était durable. Ce que nous allons voir dans ce chapitre c'est un principe très important dans le monde physique : celui de la conservation de l'énergie.*

### 3.1 Énergie cinétique

On peut qualifier l'énergie d'un corps d'une première façon : via la notion d'énergie cinétique. L'énergie cinétique est l'énergie reliée au mouvement d'un objet. Son existence se manifeste lors des impacts entre des corps en mouvement par exemple. Prenons l'exemple d'un vélo fonçant dans un mur. On comprend assez intuitivement que plus le vélo arrive avec une grande vitesse, plus l'impact sera violent, et donc plus il possède avant cela une grande énergie cinétique. On s'attend donc à ce que cette quantité augmente avec la vitesse de l'objet. Si l'on considère maintenant non pas un vélo mais une voiture, avec donc une masse bien plus élevée, on comprend intuitivement qu'à une vitesse similaire, l'impact sera beaucoup plus violent dans le cas de la voiture. En d'autres termes, la voiture possède donc une énergie cinétique supérieure à celle du vélo. On s'attend donc à ce que l'énergie cinétique augmente avec la masse de l'objet.

En fait, pour un objet de masse  $m$  et de vitesse  $v$ , l'énergie cinétique est définie comme :

$$E_c = \frac{1}{2}mv^2 \quad (3.1)$$

avec  $E_c$  une grandeur qui s'exprime en joules ( $J$ ), qui représente l'énergie contenue dans le mouvement de l'objet.

Comme toute énergie en physique, l'énergie cinétique est une grandeur conservative. C'est à dire qu'elle n'apparaît pas ou ne disparaît pas spontanément. Si l'énergie cinétique d'un corps varie, c'est qu'elle est échangée avec l'extérieure sous une autre forme.

## 3.2 Transmission d'énergie par une force

### 3.2.1 Travail d'une force

Comme on l'a vu dans le chapitre précédent, une force extérieure est capable de mettre en mouvement, ou de modifier le mouvement d'un corps. Cela signifie donc qu'elle peut modifier son énergie cinétique, via un transfert d'énergie avec l'extérieur. En fait c'est possible de le comprendre en partant du PFD ! En effet, si l'on considère un corps de masse  $m$  soumis à une force  $\vec{F}$  on a :

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F} \quad (3.2)$$

et donc en prenant le produit scalaire avec  $\vec{v}$  :

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \vec{v} = \vec{F} \cdot \vec{v} \Rightarrow \frac{1}{2} m \frac{d\vec{v}^2}{dt} = \vec{F} \cdot \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} \quad (3.3)$$

$m$  étant une constante on a en fait  $\frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} mv^2 \right) \frac{dE_c}{dt} = \vec{F} \cdot \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}$  et donc en intégrant entre un instant  $t_i$  et un instant  $t_f$  :

$$E_{c,B} - E_{c,A} = \int_{t_A}^{t_B} \vec{F} \cdot d\overrightarrow{OM} \quad (3.4)$$

On définit alors  $W_{AB} = \int_{t_A}^{t_B} \vec{F} \cdot d\overrightarrow{OM}$  le travail fourni par la force  $\vec{F}$  à l'objet. Le travail est une énergie (qui s'exprime donc aussi en J) qui mesure en quelques sortes l'effort fourni par une force. Si l'on considère une force constante, alors on a simplement :

$$W_{AB} = \vec{F} \cdot \overrightarrow{\Delta OM} \quad (3.5)$$

le travail d'une force correspond alors simplement au produit scalaire de la force avec le déplacement de l'objet sur la durée considérée.

Dans le cas où le travail d'une force est positif  $W_{AB} > 0$ , et que donc la force est globalement dans le sens du déplacement, on dit que la force est motrice. En effet, dans ce cas là, la force permet de favoriser le mouvement de l'objet et d'augmenter son énergie cinétique. Par contre, dans le cas où le travail est négatif  $W_{AB} < 0$ , et que donc la force est globalement dans le sens inverse au déplacement, on dit que la force est résistante.

Via cette définition, on en déduit aussi qu'une force orthogonale au mouvement à tout instant produit un travail nul. C'est par exemple le cas du poids s'exerçant sur une boule de bowling qui roule par terre : son poids ne permet ni d'accélérer ni de ralentir son mouvement.

### 3.2.2 Puissance d'une force

Une autre manière de définir le transfert d'énergie opéré par une force est de manière instantanée via la notion de puissance. En effet, via la notion de travail, on définit l'apport énergétique d'une force en considérant un trajet, une durée finie. Pour un objet se déplaçant à une vitesse  $\vec{v}$  et soumis à une force  $\vec{F}$ , la puissance de cette force sur cet objet est :

$$\mathcal{P} = \vec{F} \cdot \vec{v} \quad (3.6)$$

Elle s'exprime en joules par seconde, équivalent à des watts (W) et permet de quantifier la quantité d'énergie apportée par la force au mouvement par unité de temps.

*Une force peut produire un très grand travail à très faible puissance comme un très faible travail à une grande puissance. Tout dépend de la durée sur laquelle l'effort est fourni.*

De la même manière que pour le travail, une puissance positive  $\mathcal{P} > 0$  correspond à une force instantanément motrice tandis qu'une puissance négative  $\mathcal{P} < 0$  correspond à une force instantanément résistante.

### 3.2.3 Théorème de l'énergie cinétique

Dans le cas d'une unique force, nous avons vu que l'énergie cinétique d'un objet pouvait être échangé avec l'extérieur via le travail de cette force. En fait, cette règle s'applique dans le cas général. La variation d'énergie cinétique d'un corps entre deux instants  $t_A$  et  $t_B$  correspond à la somme des travaux reçus par ce corps pendant cette durée :

$$\Delta E_c = E_c(t_B) - E_c(t_A) = \frac{1}{2}mv_B^2 - \frac{1}{2}mv_A^2 = \sum_i W_{AB}(\vec{F}_i) \quad (3.7)$$

Ce théorème peut permettre de prédire la variation d'énergie cinétique en connaissant les travaux ou bien de déduire un travail de force en connaissant une variation d'énergie cinétique.

## 3.3 Énergie potentielle et forces conservatives

On dit qu'une force est conservative si le travail qu'elle fournit entre deux points  $A$  et  $B$  ne dépend que de la position de ces deux points et non du chemin parcouru entre ces deux points. Dans ce cas là, le travail peut s'écrire comme :

$$W_{AB}(\vec{F}) = E_p(A) - E_p(B) \quad (3.8)$$

avec  $E_p$  l'énergie potentielle associée à la force  $\vec{F}$ , définie comme :

$$\vec{F}(x, y, z) = -\frac{\partial E_p}{\partial x} \vec{e}_x - \frac{\partial E_p}{\partial y} \vec{e}_y - \frac{\partial E_p}{\partial z} \vec{e}_z \quad (3.9)$$

Dans cette expression, l'opérateur  $\frac{\partial}{\partial x}$  correspond à la dérivée partielle par rapport à  $x$ . Une dérivée partielle correspond à une dérivée d'une fonction de plusieurs variables par rapport à l'une seule de ces variables en gardant les autres constantes. Par exemple, si l'on considère la fonction  $g(x, y, z) = xy + z$  alors on a :

$$\frac{\partial g}{\partial x} = y, \quad \frac{\partial g}{\partial y} = x, \quad \frac{\partial g}{\partial z} = 1 \quad (3.10)$$

Étant donné que l'énergie potentielle est définie comme une intégrale de la force, elle n'est définie qu'à une constante près. Toutefois ce n'est pas un problème car pour calculer un travail, on utilise une différence d'énergie potentielle (donc les constantes s'annulent). Pour déterminer l'énergie potentielle uniquement, on définit souvent une origine  $O$  où celle-ci est nulle.

*Nous allons voir dans la partie suivante quelques exemples d'énergie potentielle.*

### 3.3.1 Exemples d'énergie potentielle

#### Énergie potentielle de pesanteur

Prenons tout d'abord l'exemple d'une force très simple : le poids. Si l'on définit un repère cartésien d'axe ( $Oz$ ) ascendant du sol vers le ciel, alors on a vu que la force de poids s'écrit :

$$\vec{P} = -mg\vec{e}_z \quad (3.11)$$

On peut montrer simplement que cette force est conservative. En effet si l'on définit  $E_p = mgz + C$  on a :

$$-\frac{\partial E_p}{\partial x}\vec{e}_x - \frac{\partial E_p}{\partial y}\vec{e}_y - \frac{\partial E_p}{\partial z}\vec{e}_z = -mg\vec{e}_z = \vec{P} \quad (3.12)$$

En choisissant arbitrairement qu'à l'altitude  $z = 0$  on a  $E_p = 0$  alors on a  $C = 0$  et donc finalement :

#### Énergie potentielle de pesanteur

$$E_p = mgz = mg \times \text{altitude} \quad (3.13)$$

Ainsi, d'après la définition de l'énergie potentielle, le travail du poids entre deux points  $A$  et  $B$  s'exprime simplement :

$$W_{AB}(\vec{P}) = mg(z_A - z_B) \quad (3.14)$$

Le poids est donc moteur lorsque  $z_A > z_B$  et que donc le mouvement perd en altitude, ce qui est logique car la gravité fait tomber les corps en direction du sol. À l'inverse, lors de l'ascension d'un corps, le poids est résistant.

#### Énergie potentielle de rappel élastique

La force de rappel exercée par un ressort est elle aussi conservative. En effet, on peut montrer que l'énergie potentielle  $E_p = \frac{1}{2}k(l - l_0)^2 + C$  est l'énergie potentielle dont dérive la force de rappel définie à l'[équation 2.6](#). En choisissant comme origine de l'énergie potentiel la position du ressort au repos ( $l = l_0$ ) on a  $C = 0$  et donc finalement :

#### Énergie potentielle de rappel élastique

$$E_p = \frac{1}{2}k(l - l_0)^2 \quad (3.15)$$

## Énergie potentielle coulombienne

Enfin, de la même manière que pour les autres forces, on peut montrer que la force coulombienne d'interactions entre deux charges  $q_1$  et  $q_2$  prend la forme :

### Énergie potentielle coulombienne

$$E_p = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 r} \quad (3.16)$$

avec  $r$  la distance séparant les deux charges.

## Force de frottements visqueux : un exemple de force non conservative

Toutes les forces ne peuvent pas s'exprimer comme la dérivée d'une énergie potentielle. C'est le cas de la force de frottements visqueux que l'on a vu au chapitre précédent. En effet, celle-ci dépend de la vitesse du corps sur le trajet entre  $A$  et  $B$ . Ainsi, pour un même point de départ et d'arrivée on peut avoir des intensités de force très différentes (avec des trajectoires très différentes). On dit alors qu'une telle force est non-conservative. Nous verrons pourquoi.

## 3.4 Principe de conservation de l'énergie mécanique

### 3.4.1 Corps soumis à des forces conservatives

La conservation de l'énergie en mécanique prend tout son sens lorsqu'on ne considère pas l'énergie cinétique seule ou l'énergie potentielle seule mais plutôt les deux ensemble dans un même concept d'énergie mécanique :

### Énergie mécanique

Pour un corps donné, l'énergie mécanique et la somme de son énergie cinétique et de ses énergies potentielles (si plusieurs forces conservatives s'exercent sur le corps) :

$$E_m = E_c + E_p \quad (3.17)$$

En effet, un corps soumis uniquement à des forces conservatives voit son énergie mécanique conservée. C'est à dire que tout au long du mouvement on a  $E_m = \text{cste}$ . Cette propriété peut s'avérer très utile pour résoudre certains problèmes comme on le verra dans la partie suivante.

### 3.4.2 Cas général

Dans le cas général où le corps serait aussi soumis à des forces non conservatives, l'énergie mécanique n'est plus conservée. Dans ce cas, la variation d'énergie mécanique sur un trajet de  $A$  à  $B$  correspond aux travaux des forces non-conservatives (uniquement) sur ce trajet :

$$\Delta E_m = E_m(B) - E_m(A) = \sum_i W_{AB}(\overrightarrow{F_{i,NC}}) \quad (3.18)$$

## 3.5 Mouvement dans un profil d'énergie potentielle (★)

### 3.5.1 Principe

Le principe de conservation de l'énergie mécanique peut s'avérer très pratique pour étudier le mouvement d'un corps soumis uniquement à des forces conservatives dont on connaît l'énergie potentielle totale associée. Considérons par exemple un snowboardeur évoluant sur une piste, repérée par la coordonnée  $x$  et dont le profil est le suivant :

Celui-ci n'est soumis qu'à son poids en termes de force conservative<sup>1</sup>, dont on a vu que l'énergie potentielle associée est proportionnelle à l'altitude. Ainsi, on a le profil d'énergie potentielle suivant :

On suppose que le snowboardeur part du début de la piste en  $x = 0$  avec une vitesse nulle. Son énergie cinétique est donc nulle  $E_c = 0$  et donc son énergie mécanique totale égale à son énergie potentielle initiale. On peut donc la représenter sur la **Fig XX**. Lorsque le snowboardeur se laisse glisser, son énergie cinétique augmente et son énergie potentielle diminue de telle manière que son énergie mécanique reste constante. Grâce à ce graphe, on peut calculer la vitesse du snowboardeur et les zones auxquelles il peut accéder en glissant sans trop de calcul. En effet, il est possible de lire direction l'énergie cinétique sur ce graphe comme  $E_c = E_m - E_p$ . De plus, étant donné que l'on a nécessairement  $E_m \geq E_p$  car l'énergie cinétique est une grandeur positive, on a  $E_m \geq E_p$ . Ainsi, le snowboardeur ne pourra pas atteindre les zones se situant au-dessus de la droite  $E_p = E_m$ .

### 3.5.2 Électron lié à un atome

Dans l'atome d'hydrogène, l'électron est soumis à des forces d'interaction avec le noyau, résultant en l'énergie potentielle dont le profil est le suivant, avec  $r$  la distance entre le noyau et l'électron :

Infiniment loin du noyau, l'énergie potentielle de l'électron est nulle. Infiniment proche du noyau, l'énergie potentielle de l'électron est infinie. En fonction de l'énergie totale de l'électron, on peut tirer de ce diagramme plusieurs informations :

- L'énergie minimale de l'électron dans l'atome d'hydrogène est  $E_{\min} = E_{p,\min}$ .
- Pour  $E_m < 0$ , l'électron est lié au noyau, il ne peut pas s'en éloigner arbitrairement loin. On parle d'état lié de l'électron.
- Pour  $E_m > 0$ , l'électron possède assez d'énergie pour "fuir" l'attraction du noyau et donc partir infiniment loin. On parle d'état libre de l'électron.

Formellement, on peut relier la quantité d'énergie à fournir à l'électron pour qu'il puisse être dans un état libre à l'énergie d'ionisation.

---

1. On néglige ici les frottements et la réaction du support ne travaille pas.

Il existe de nombreux autres cas physiques possédant des profils d'énergie potentielle non-monotones présentant ces mêmes notions d'états liés et d'états libres. C'est notamment le cas de certains systèmes d'astres en gravitation.

## Objectifs de ce chapitre

À l'issue de ce chapitre, vous devez :

- Savoir repérer un point sur un axe.