

# Contents

<b>1</b>	<b>The Hébraud-Lequeux model</b>	<b>1</b>
1.1	Derivation of a normal form . . . . .	1
1.1.1	Solution stationnaire . . . . .	1
1.1.2	Equation d'état sur $h$ à $\langle x \rangle$ imposé . . . . .	3
1.1.3	Equation linéarisée . . . . .	3
1.1.4	Développement en couches limites . . . . .	7
1.1.5	Ansatz . . . . .	7
1.2	Analytical variations of the Hébraud-Lequeux model . . . . .	14
1.2.1	Une autre version du bruit mécanique . . . . .	14
1.2.2	Hébraud-Lequeux model at low coupling . . . . .	17
1.2.3	Hébraud-Lequeux model with Poissonian noise . . . . .	18
1.3	Numerical variations of the Hébraud-Lequeux model . . . . .	20
1.3.1	Fully connected Hébraud-Lequeux . . . . .	20
1.3.2	Poorly connected Hébraud-Lequeux . . . . .	21
1.3.3	Modèle de Hébraud-Lequeux et diffusion anormale . . . . .	26
	<b>Bibliography</b>	<b>29</b>



# The Hébraud-Lequeux model

## 1.1 Derivation of a normal form

### 1.1.1 Solution stationnaire

#### Résultat

Le modèle HL est défini par [Equation 1.87](#), avec l'activité  $\Gamma(t)$  définie par [Equation 1.88](#) et reliée au coefficient de diffusion  $D$  par l'équation constitutive [Equation 1.89](#).

$$\partial_t P(x, t) = -h \partial_x P(x, t) + D \partial_x^2 P(x, t) - \Theta(|x| > 1) P(x, t) + \Gamma(t) \delta(x) \quad (1.1)$$

$$\Gamma(t) = \int dx \Theta(|x| > 1) P(x, t) \quad (1.2)$$

$$D(t) = \alpha \Gamma(t) \quad (1.3)$$

Dans le régime stationnaire, on peut résoudre cette équation par morceaux en restant dans l'espace réel et en considérant en premier lieu  $D$  constant. On aboutit alors à la forme de la distribution de probabilité stationnaire donnée par [Equation 1.24](#)

$$\begin{aligned} P(x) &= \Gamma_2 r_2 e^{r_2(x+1)} \quad (x < -1), \\ P(x) &= \Gamma_2 \left[ -\frac{1}{h} + \left( r_2 + \frac{1}{h} \right) e^{h(x+1)/D} \right] \quad (-1 < x < 0), \\ P(x) &= \Gamma_1 \left[ \frac{1}{h} + \left( r_1 - \frac{1}{h} \right) e^{h(x-1)/D} \right] \quad (0 < x < 1), \\ P(x) &= \Gamma_1 r_1 e^{-r_1(x-1)} \quad (x > 1), \end{aligned} \quad (1.4)$$

avec les fonctions  $r_1(h) = r(h)$  et  $r_2(h) = r(-h)$  définies par [Equation 1.5](#)

$$r(h) = \frac{1}{2D} \left( -h + \sqrt{h^2 + 4D} \right) \quad (1.5)$$

et les fonctions  $\Gamma_1(h)$  et  $\Gamma_2(h) = \Gamma_1(-h)$  définies par [Equation 1.6](#) et vérifiant  $\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2$ .

$$\begin{aligned}
 \Gamma_1(h) &= \frac{\psi(-h)}{\psi(-h)\kappa(h) + \psi(h)\kappa(-h)} \\
 \psi(h) &= \frac{1}{h} + \left(r(h) - \frac{1}{h}\right) e^{-h/D} \\
 \kappa(h) &= 1 + \frac{1}{h} + \left(r(h) - \frac{1}{h}\right) \frac{D}{h} (1 - e^{-h/D})
 \end{aligned} \tag{1.6}$$

$D$  est alors déterminé par la relation d'autocohérence donnée par [Equation 1.7](#).

$$\Gamma(D, h) = \frac{D}{f(D, h)}, \quad f(D, h) \equiv D \left[ 1 + \frac{1 + \left(\sqrt{1 + \frac{4D}{h^2}} + \frac{2D}{|h|}\right) \tanh \frac{|h|}{2D}}{|h| \left(\tanh \frac{|h|}{2D} + \sqrt{1 + \frac{4D}{h^2}}\right)} \right] \tag{1.7}$$

Dans le contexte des fluides à seuil, on cherche des solutions telles que  $\alpha < \frac{1}{2}$  ce qui nous suggère de considérer une forme pour le coefficient de diffusion  $D = u|h|$  avec le coefficient  $u$  admettant le développement [Equation 1.8](#) et la relation d'autocohérence [Equation 1.9](#).

$$u(h) = u_0 + \sqrt{|h|}u_1 \tag{1.8}$$

$$\alpha = u \tanh \frac{1}{2u} \tag{1.9}$$

### Développement à petit $h$

On s'intéresse au comportement proche du point critique donc  $h \rightarrow 0$ . On peut faire les développements suivants :

$$r(h) = \frac{1}{\sqrt{u_0}} \frac{1}{\sqrt{|h|}} - \frac{u_1 + \sqrt{u_0} \operatorname{sgn}(h)}{2u_0^{3/2}} + \mathcal{O}\left(\sqrt{|h|}\right)$$

$$\psi(h) = \frac{1}{h} \left(1 - e^{-\operatorname{sgn}(h)/u_0}\right) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\sqrt{|h|}}\right) \tag{1.10}$$

$$\kappa(h) = \frac{1}{h} \left(1 - \operatorname{sgn}(h)u_0 \left(1 - e^{-\operatorname{sgn}(h)/u_0}\right)\right) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\sqrt{|h|}}\right) \tag{1.11}$$

et donc :

$$\Gamma_1(h) = \frac{e^{\operatorname{sgn}(h)/u_0}}{e^{\operatorname{sgn}(h)/u_0} - 1} h + \mathcal{O}\left(h^{3/2}\right) \tag{1.12}$$

### 1.1.2 Equation d'état sur $h$ à $\langle x \rangle$ imposé

En multipliant par  $x$  puis en intégrant sur tout le domaine spatial l'Equation 1.87 on obtient l'Equation 1.13.

$$h(t) = \frac{d\langle x \rangle}{dt} + \int dx \Theta(|x| > 1) x P(x, t) \quad (1.13)$$

Dans le cas où  $\langle x \rangle$  est imposé on a donc l'Equation 1.14.

$$h(t) = \int dx \Theta(|x| > 1) x P(x, t) \quad (1.14)$$

En dérivant l'Equation 1.14 par rapport au temps et en utilisant l'Equation 1.87 on aboutit à une équation d'état sur  $h$  donnée par l'Equation 1.15 et l'Equation 1.16.

$$\partial_t h = -h + h\Gamma + h\Sigma P + D(\Delta P - \Sigma \partial P) \quad (1.15)$$

$$\Sigma P = P(x=1) + P(x=-1) \quad \Delta P = P(x=1) - P(x=-1) \quad \Sigma \partial P = \partial P(x=1) + \partial P(x=-1) \quad (1.16)$$

Pour déterminer l'équation d'état sur  $h$ , il suffit donc de connaître  $P$  et sa dérivée sur les bords absorbants.

### 1.1.3 Equation linéarisée

#### Cadre

On part de l'équation d'Hébraud-Lequeux (Equation 1.87) et on développe la solution non stationnaire sous la forme donnée par l'Equation 1.17.

$$P(x, t) = P_{ss}(x, t) + p(x, t), \quad |p(x, t)| \ll |P_{ss}(x, t)| \quad (1.17)$$

L'équation linéarisée sur  $p$  est alors la suivante :

$$\partial_t p(x, t) = -h_0 \partial_x p(x, t) + \alpha \Gamma_0 \partial_x^2 p(x, t) - \Theta(|x| > 1) p(x, t) + \delta \Gamma(t) \delta(x) - \delta h(t) \partial_x P_{ss}(x) + \alpha \delta \Gamma(t) \partial_x^2 P_{ss}(x) \quad (1.18)$$

On retrouve alors l'équation d'Hébraud-Lequeux avec un terme source supplémentaire.

#### Résolution dans l'espace réel

Pour résoudre cette équation dans l'espace réel on opère tout d'abord une transformée de Laplace sur la variable temporelle telle que :

$$\tilde{p}(x, s) = \int_0^\infty dt p(x, t) e^{-st} \quad (1.19)$$

L'Equation 1.18 devient alors :

$$\tilde{p}(x, s) - p(x, 0) = -h_0 \partial_x \tilde{p}(x, s) + \alpha \Gamma_0 \partial_x^2 \tilde{p}(x, s) - \Theta(|x| > 1) \tilde{p}(x, s) + \delta \tilde{\Gamma}(s) \delta(x) - \delta \tilde{h}(s) \partial_x P_{ss}(x) + \alpha \delta \tilde{\Gamma}(s) \partial_x^2 P_{ss}(x) \quad (1.20)$$

soit :

$$\begin{aligned} \partial_x^2 \tilde{p}(x, s) - \frac{h_0}{\alpha \Gamma_0} \partial_x \tilde{p}(x, s) - \tilde{p}(x, s) \frac{1 + \Theta(|x| > 1)}{\alpha \Gamma_0} &= F(x, s) \\ F(x, s) &= \frac{\delta \tilde{h}(s)}{\alpha \Gamma_0} \partial_x P_{ss}(x) - \frac{\delta \tilde{\Gamma}(s)}{\Gamma_0} \partial_x^2 P_{ss}(x) - \frac{p(x, 0)}{\alpha \Gamma_0} \end{aligned} \quad (1.21)$$

En supposant que l'état initial corresponde à un état stationnaire de  $h_0$  plus élevé :

$$P_i(x, 0) = P_{ss}(h_0 + \Delta h) = P_{ss}(h_0) + \Delta h \frac{\partial P_{ss}}{\partial h}(h_0) \quad (1.22)$$

soit :

$$p(x, 0) = \Delta h \frac{\partial P_{ss}}{\partial h}(h_0) \quad (1.23)$$

on aura alors un terme source de la forme :

$$\begin{aligned} F(x, s) &= F_1(s) e^{r_2 x} \quad (x < -1), \\ F(x, s) &= F_2 + F_3(s) e^{h_0 x / \alpha \Gamma_0} \quad (-1 < x < 0), \\ F(x, s) &= F_4 + F_5(s) e^{h_0 x / \alpha \Gamma_0} \quad (0 < x < 1), \\ F(x, s) &= F_6(s) e^{-r_1 x} \quad (x > 1), \end{aligned} \quad (1.24)$$

**Région  $x > 1$**  Dans ce cas là l'Equation 1.20 se réduit à :

$$\partial_x^2 \tilde{p}(x, s) - \frac{h_0}{\alpha \Gamma_0} \partial_x \tilde{p}(x, s) - \tilde{p}(x, s) \frac{1 + s}{\alpha \Gamma_0} = F(x, s) \quad (1.25)$$

qui est une équation différentielle linéaire du second ordre non homogène mais à coefficients constants. On la résout alors par la méthode de variation de la constante pour trouver la forme suivante :

$$\tilde{p}(x, s) = \frac{F_6}{\lambda_- - \lambda_+} \left( \frac{A_1 e^{\lambda_- x} - e^{-r_1 x}}{\lambda_- + r_1} + \frac{e^{-r_1 x} - A_0 e^{\lambda_+ x}}{\lambda_+ + r_1} \right) \quad (1.26)$$

avec  $A_0$  et  $A_1$  des constantes d'intégration réelles et **positives** et :

$$\lambda_{\pm} = \frac{h_0}{2\alpha \Gamma_0} \left( 1 \pm \sqrt{1 + \frac{4(1+s)\alpha \Gamma_0}{h_0^2}} \right) \quad (1.27)$$

La perturbation ne devant pas diverger à l'infini on a  $A_0 = 0$ .

**Région  $0 < x < 1$**

De la même manière on a :

$$\tilde{p}(x, s) = \frac{F_5}{\beta_- - \beta_+} \left( \frac{A_2 e^{\beta_- x} - e^{x h_0 / \alpha \Gamma_0}}{\beta_- - h_0 / \alpha \Gamma_0} + \frac{e^{x h_0 / \alpha \Gamma_0} - A_3 e^{\beta_+ x}}{\beta_+ - h_0 / \alpha \Gamma_0} \right) + \frac{F_4}{\beta_+ \beta_-} \quad (1.28)$$

avec :

$$\beta_{\pm} = \frac{h_0}{2\alpha\Gamma_0} \left( 1 \pm \sqrt{1 + \frac{4s\alpha\Gamma_0}{h_0^2}} \right) \quad (1.29)$$

**Région**  $-1 < x < 0$

Toujours pareil, on obtient cette fois :

$$\tilde{p}(x, s) = \frac{F_3}{\beta_- - \beta_+} \left( \frac{A_4 e^{\beta_- x} - e^{x h_0 / \alpha \Gamma_0}}{\beta_- - h_0 / \alpha \Gamma_0} + \frac{e^{x h_0 / \alpha \Gamma_0} - A_5 e^{\beta_+ x}}{\beta_+ - h_0 / \alpha \Gamma_0} \right) + \frac{F_2}{\beta_+ \beta_-} \quad (1.30)$$

**Région**  $x < -1$

Enfin on a ici :

$$\tilde{p}(x, s) = \frac{F_1}{\lambda_- - \lambda_+} \left( \frac{A_7 e^{\lambda_- x} - e^{r_2 x}}{\lambda_- - r_2} + \frac{e^{r_2 x} - A_6 e^{\lambda_+ x}}{\lambda_+ - r_2} \right) \quad (1.31)$$

Pour assurer que la perturbation ne diverge pas à l'infini on fixe  $A_7 = 0$

## Conditions aux limites

Les conditions aux limites sont :

$$\begin{aligned} \tilde{p}(1^-, s) &= \tilde{p}(1^+, s) \\ \partial_x \tilde{p}(1^-, s) &= \partial_x \tilde{p}(1^+, s) \\ \tilde{p}(-1^-, s) &= \tilde{p}(-1^+, s) \\ \partial_x \tilde{p}(-1^-, s) &= \partial_x \tilde{p}(-1^+, s) \\ \tilde{p}(0^-, s) &= \tilde{p}(0^+, s) \end{aligned} \quad (1.32)$$

et la condition de normalisation :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx \tilde{p}(x, s) = 0 \quad (1.33)$$

Ca va être lourd à écrire mais on peut le faire facilement sur Mathematica. Ca reste très compliqué comme forme, je suis même pas sûr que les développement vont vraiment simplifier la chose mais bon on peut toujours essayer.

### Ordre dominant en $h_0$

En développant à l'ordre dominant en  $h_0$  (les racines des polynômes caractéristiques) on a :

$$\begin{aligned}
 \tilde{p}(x, s) &= \frac{-F_6}{2\sqrt{1+sr^2}} \left( \frac{A_1 e^{-\sqrt{1+sr}x} - e^{-rx}}{1 - \sqrt{1+s}} + \frac{e^{-rx}}{1 + \sqrt{1+s}} \right), \quad x > 1 \\
 \tilde{p}(x, s) &= \frac{F_5}{2\sqrt{sr}} \left( \frac{A_2 e^{-\sqrt{sr}x} - e^{xh_0/\alpha\Gamma_0}}{\sqrt{sr} + h_0/\alpha\Gamma_0} + \frac{A_3 e^{\sqrt{sr}x} - e^{xh_0/\alpha\Gamma_0}}{\sqrt{sr} - h_0/\alpha\Gamma_0} \right) - \frac{F_4}{sr^2}, \quad 0 < x < 1 \\
 \tilde{p}(x, s) &= \frac{F_3}{2\sqrt{sr}} \left( \frac{A_4 e^{-\sqrt{sr}x} - e^{xh_0/\alpha\Gamma_0}}{\sqrt{sr} + h_0/\alpha\Gamma_0} + \frac{A_5 e^{\sqrt{sr}x} - e^{xh_0/\alpha\Gamma_0}}{\sqrt{sr} - h_0/\alpha\Gamma_0} \right) - \frac{F_2}{sr^2}, \quad -1 < x < 0 \\
 \tilde{p}(x, s) &= \frac{-F_1}{2\sqrt{1+sr^2}} \left( \frac{e^{rx} - A_6 e^{\sqrt{1+sr}x}}{\sqrt{1+s} - 1} + \frac{e^{rx}}{1 + \sqrt{1+s}} \right), \quad x < -1
 \end{aligned} \tag{1.34}$$

ou en allant jusqu'au bout (toutes les autres comparaisons ne sont pas pertinentes car les constantes sont des fonctions de  $h_0$ ) :

$$\begin{aligned}
 \tilde{p}(x, s) &= \frac{-F_6}{2\sqrt{1+sr^2}} \left( \frac{A_1 e^{-\sqrt{1+sr}x} - e^{-rx}}{1 - \sqrt{1+s}} + \frac{e^{-rx}}{1 + \sqrt{1+s}} \right), \quad x > 1 \\
 \tilde{p}(x, s) &= \frac{F_5}{2sr^2} \left( A_2 e^{-\sqrt{sr}x} + A_3 e^{\sqrt{sr}x} - 2e^{xh_0/\alpha\Gamma_0} \right) - \frac{F_4}{sr^2}, \quad 0 < x < 1 \\
 \tilde{p}(x, s) &= \frac{F_3}{2sr^2} \left( A_4 e^{-\sqrt{sr}x} + A_5 e^{\sqrt{sr}x} - 2e^{xh_0/\alpha\Gamma_0} \right) - \frac{F_2}{sr^2}, \quad -1 < x < 0 \\
 \tilde{p}(x, s) &= \frac{-F_1}{2\sqrt{1+sr^2}} \left( \frac{e^{rx} - A_6 e^{\sqrt{1+sr}x}}{\sqrt{1+s} - 1} + \frac{e^{rx}}{1 + \sqrt{1+s}} \right), \quad x < -1
 \end{aligned} \tag{1.35}$$

et qu'on peut simplifier par réabsorption dans les constantes :

$$\begin{aligned}
 \tilde{p}(x, s) &= \frac{F_6}{sr^2} \left( A_1 e^{-\sqrt{1+sr}x} - e^{-rx} \right), \quad x > 1 \\
 \tilde{p}(x, s) &= \frac{F_5}{sr^2} \left( A_2 e^{-\sqrt{sr}x} + A_3 e^{\sqrt{sr}x} - e^{xh_0/\alpha\Gamma_0} \right) - \frac{F_4}{sr^2}, \quad 0 < x < 1 \\
 \tilde{p}(x, s) &= \frac{F_3}{sr^2} \left( A_4 e^{-\sqrt{sr}x} + A_5 e^{\sqrt{sr}x} - e^{xh_0/\alpha\Gamma_0} \right) - \frac{F_2}{sr^2}, \quad -1 < x < 0 \\
 \tilde{p}(x, s) &= \frac{F_1}{sr^2} \left( A_6 e^{\sqrt{1+sr}x} - e^{rx} \right), \quad x < -1
 \end{aligned} \tag{1.36}$$

La résolution laisse une solution très longue, on est sûrement obligé de développer en  $s$  pour avoir quelque chose de lisible.

### Développement à petit $s$

Attention c'est discutable là parce qu'on a gardé que l'ordre dominant en  $h_0$  et les limites commutent pas. Si on développe à l'ordre 1 en  $s$  les exponentielles on a :



$$\begin{aligned}
 \tilde{p}(x, s) &= F_6 e^{-rx} \left( (A_1 - 1) - \frac{1}{2} (A_1 r x) s \right) \\
 \tilde{p}(x, s) &= \left( -F_4 + (A_2 + A_3 - e^{h_0 r^2 x}) F_5 + (A_3 - A_2) F_5 r x \sqrt{s} + \frac{F_5}{2} (A_2 + A_3) r^2 x^2 s \right) \\
 \tilde{p}(x, s) &= \left( -F_2 + (A_4 + A_5 - e^{h_0 r^2 x}) F_3 + (A_5 - A_4) F_3 r x \sqrt{s} + \frac{F_3}{2} (A_4 + A_5) r^2 x^2 s \right) \\
 \tilde{p}(x, s) &= (A_6 - 1) F_1 e^{rx} + \frac{A_6}{2} F_1 e^{rx} r x s
 \end{aligned} \tag{1.37}$$

Pas de solutions, on peut pas développer en  $s$  ?

### 1.1.4 Développement en couches limites

### 1.1.5 Ansatz

On propose le développement suivant avec  $u = h_0 t$  :

$$\begin{aligned}
 P(x, t) &= \sum_{k=0}^{\infty} h_0^{k/2} Q_k(x, u) \quad -1 < x < 1 \\
 P(x, t) &= \sum_{k=0}^{\infty} h_0^{k/2} R_k\left(\frac{x-1}{\sqrt{h_0}}, u\right) \quad x > 1
 \end{aligned} \tag{1.38}$$

Dans la limite où  $\alpha \rightarrow 0$ , d'après la solution stationnaire il serait éventuellement possible négliger les contributions en-dessous de  $x = -1$ . On a alors :

$$D(u) = \alpha \sum_{k=0}^{\infty} h_0^{(k+1)/2} d_k(u) \quad d_k(u) = \int_0^{\infty} dY R_k(Y, u) \tag{1.39}$$

$$h(u) = \sum_{k=0}^{\infty} \left( h_0^{(k+1)/2} d_k(u) + h_0^{k/2+1} c_k(u) \right) \quad c_k(u) = \int_0^{\infty} dY Y R_k(Y, u) \tag{1.40}$$

### Equation interne

En regroupant ordre par ordre, l'équation dans le domaine intérieur devient :

$$\partial_u Q_m(x, u) = - \sum_{k=0}^{m+1} d_{m-k+1} \partial_x Q_k(x, u) - \sum_{k=0}^m c_{m-k} \partial_x Q_k(x, u) + \alpha \sum_{k=0}^{m+1} d_{m-k+1} \partial_x^2 Q_k(x, u) + d_{m+1} \delta(x) \tag{1.41}$$

### Equation externe

De la même manière à l'extérieur on a :

$$\partial_u R_m(Y, u) = - \sum_{k=0}^{m+2} d_{m+2-k} \partial_Y R_k(Y, u) - \sum_{k=0}^{m+1} c_{m-k+1} \partial_Y R_k(Y, u) + \alpha \sum_{k=0}^{m+3} d_{m-k+3} \partial_Y^2 R_k(Y, u) - R_{m+2}(Y, u) \tag{1.42}$$

## Equation d'état

De la même manière, le membre de droite de l'équation d'état peut se développer avec l'ansatz ordre par ordre. Ici j'utilise directement le fait démontré a posteriori  $R_0 = 0$  :

$$(\partial_t h)_1 = \partial_u h_0 = -d_1 - \alpha d_1 R'_1(0, u) \quad ^1 \quad (1.43)$$

$$(\partial_t h)_{3/2} = \partial_u h_{1/2} = -d_2 - c_1 + (\alpha + 1)d_1 R_1(0, u) - \alpha d_1 R'_2(0, u) - \alpha d_2 R'_1(0, u) \quad (1.44)$$

$$(\partial_t h)_2 = \partial_u h_1 = -d_3 - c_2 + d_1^2 + R_1(0, u)(c_1 + d_2(\alpha + 1)) + R_2(0, u)d_1(\alpha + 1) - \alpha d_3 R'_1(0, u) - \alpha d_2 R'_2(0, u) - \alpha d_1 R'_3(0, u) \quad (1.45)$$

## Résolution des équations

### Résolution externe

La première équation extérieure (ordre  $-1/2$ ) donne :

$$\alpha d_0 \partial_Y^2 R_0(Y, u) = 0 \quad (1.46)$$

qui implique que  $R_0$  est identiquement nul car il doit être nul à l'infini.

L'équation externe à l'ordre suivant est :

$$\partial_Y^2 R_1(Y, u) - \frac{1}{\alpha d_1} R_1(Y, u) = 0 \quad (1.47)$$

qui se résout en :

$$R_1(Y, u) = \frac{e^{-\lambda Y}}{\alpha \lambda} \quad \lambda = \frac{1}{\sqrt{\alpha d_1}} \quad (1.48)$$

La seconde équation externe est alors :

$$\partial_Y^2 R_2(Y, u) - \lambda^2 R_2(Y, u) = - \left( \frac{1}{\alpha^2 \lambda^2} + \lambda d_2 \right) \lambda^2 e^{-\lambda Y} \quad (1.49)$$

dont la solution générale est :

$$R_2(Y, u) = \left( \left( \frac{1}{\alpha^2 \lambda^2} + \lambda d_2 \right) \frac{\lambda Y}{2} + A \right) e^{-\lambda Y} \quad (1.50)$$

qui par autocohérence s'écrit :

$$R_2(Y, u) = \left( \left( \frac{1}{\alpha^2 \lambda^2} + \lambda d_2 \right) \frac{\lambda Y}{2} + \frac{\lambda d_2}{2} - \frac{1}{2\alpha^2 \lambda^2} \right) e^{-\lambda Y} \quad (1.51)$$

d'où :

---

<sup>1</sup>ne pas confondre avec  $h_0$  solution de la solution stat, je trouverai une autre notation

$$R'_2(Y, u) = \left( \frac{1}{\alpha^2 \lambda} - \left( \frac{1}{2\alpha^2} + \frac{\lambda^3 d_2}{2} \right) Y \right) e^{-\lambda Y} \quad (1.52)$$

$$R''_2(Y, u) \left( -\frac{3}{2\alpha^2} - \frac{\lambda^3 d_2}{2} + \left( \frac{\lambda}{2\alpha^2} + \frac{\lambda^4 d_2}{2} \right) Y \right) e^{-\lambda Y} \quad (1.53)$$

### Retour à l'équation d'état

On peut ré-écrire les équations d'état avec ces premiers résultats intermédiaires :

$$c_1 = \frac{1}{\alpha \lambda^3} \quad R_1(0, u) = \frac{1}{\alpha \lambda} \quad R'_1(0, u) = -\frac{1}{\alpha} \quad R'_2(0, u) = \frac{1}{\alpha^2 \lambda} \quad (1.54)$$

$$\partial_u h_0 = 0 \quad (1.55)$$

$$\partial_u h_{1/2} = 0 \quad (1.56)$$

$$h_{1/2} = 0 \quad h_1 = \frac{1}{\alpha \lambda^2} \quad h_{3/2} = d_2 + \frac{1}{\alpha \lambda^3} \quad (1.57)$$

ce qui est cohérent car  $h_{1/2}$  est nul à tout temps.

### Retour aux équations externes

La prochaine équation externe est la première qui conserve la dérivée temporelle :

$$\partial_u R_1(Y, u) = -d_2 R'_1(Y, u) - d_1 R'_2(Y, u) - c_1 R'_1(Y, u) + \alpha d_1 R''_3(Y, u) + \alpha d_2 R''_2(Y, u) + \alpha d_3 R''_1(Y, u) - R_3(Y, u) \quad (1.58)$$

On peut alors résoudre cette équation sur  $R_3$  avec Mathematica (solution longue donc pas représentée ici).

### Retour à l'équation d'état

En injectant alors les expressions de  $R_1$ ,  $R_2$  et  $R_3$  dans l'[Equation 1.45](#) on obtient :

$$\partial_u h_1 = -\frac{2\lambda'(u)}{\alpha \lambda^3} \quad (1.59)$$

qui est en fait la définition de  $\partial_u h_1$ . En procédant de la sorte on ne peut aller nulle part je pense. En effet, l'équation sur  $h(t)$  ([Equation 1.15](#)) est la même que l'équation sur  $P(x, t)$  ([Equation 1.87](#)) (simplement intégrée) donc en injectant les ansatz dedans on ne peut aboutir finalement qu'à la même chose.

Quelle est l'équation à laquelle on s'attend ? Supposons que l'on ait :

$$\partial_t h(t) = \epsilon h(t) + \beta h^{3/2}(t) \quad (1.60)$$

On suppose les développements suivants (quelle supposition sur  $\beta$  ? assez peu d'idée sur ça, ça peut être n'importe quoi non ? On peut test un développement en puissance demi-entières) :

$$\epsilon = \epsilon^{1/2} \sqrt{h_0} \quad \beta = \beta^0 + \beta^{1/2} \sqrt{h_0} \quad (1.61)$$

$$h_0 \partial_u h(u) = \epsilon^{1/2} \sqrt{h_0} h(u) + (\beta^0 + \beta^{1/2} \sqrt{h_0}) h^{3/2}(u) \quad (1.62)$$

donc si l'on considère  $h(u) = h_1(u)h_0 + h_{3/2}(u)h_0^{3/2}$  et que l'on développe :

$$\partial_u h_1(u) = \epsilon^{1/2} h_{3/2}(u) + \frac{3\beta^0}{2} \sqrt{h_1(u)h_{3/2}(u)} + \beta^{1/2} h_1^{3/2}(u) \quad (1.63)$$

cela devient très détourné mais si l'on résout  $h_1$  et  $h_{3/2}$  on peut peut-être supporter cette équation ? (quoique, aucune idée des coefficient donc c'est un peu léger)

### Résolution interne

A l'intérieur les premières équations non nulles sont :

$$\partial_u Q_0(x, u) = -d_1 \partial_x Q_0(x, u) + \alpha d_1 \partial_x^2 Q_0(x, u) + d_1 \delta(x) \quad (1.64)$$

$$\partial_u Q_1(x, u) + d_1 \partial_x Q_1(x, u) - \alpha d_1 \partial_x^2 Q_1(x, u) = -(d_2 + c_1) \partial_x Q_0(x, u) + \alpha d_2 \partial_x^2 Q_0(x, u) + d_2 \delta(x) \quad (1.65)$$

On peut essayer de résoudre la première équation en reparamétrisant le temps tel que :

$$\partial_v = \frac{1}{d_1(u)} \partial_u \quad (1.66)$$

l'équation à résoudre est alors :

$$\partial_v Q_0(x, v) - \alpha \partial_x^2 Q_0(x, v) + \partial_x Q_0(x, v) = \delta(x) \quad (1.67)$$

On sépare sur chaque domaine (positif et négatif) pour se débarrasser du delta :

$$\partial_v Q_0^+(x, v) - \alpha \partial_x^2 Q_0^+(x, v) + \partial_x Q_0^+(x, v) = 0 \quad (1.68)$$

$$\partial_v Q_0^-(x, v) - \alpha \partial_x^2 Q_0^-(x, v) + \partial_x Q_0^-(x, v) = 0 \quad (1.69)$$

si l'on change de variable :

$$Q_0^\pm(x, v) = K_0^\pm(x, v) e^{ax+bv} \quad (1.70)$$

on obtient l'équation suivante :

$$\partial_v K_0^\pm = K_0^\pm(-b - a + \alpha a^2) + \partial_x K_0^\pm(-1 + 2a\alpha) + \alpha \partial_x^2 K_0^\pm \quad (1.71)$$

donc en rendant le changement de variables judicieux on a :

$$\partial_v K_0^\pm(x, v) = \alpha \partial_x^2 K_0^\pm(x, v) \quad Q_0^\pm(x, v) = K_0^\pm(x, v) e^{(2x-t)/4\alpha} \quad (1.72)$$

cette équation peut se résoudre par séparation des variables :

$$K_0^\pm(x, v) = X^\pm(x) V^\pm(v) \quad (1.73)$$

qui donne :

$$\frac{V'^\pm(v)}{V^\pm(v)} = \alpha C^\pm \quad \frac{X''^\pm(x)}{X^\pm(x)} = C^\pm \quad (1.74)$$

avec les conditions aux limites :

$$X^+(1) = 0 \quad X^-(-1) = 0 \quad K_0^+(0, v) = K_0^-(0, v) \quad (1.75)$$

La dernière condition aux limites implique  $V^+ = V^-$  donc  $C^+ = C^-$ . De plus, on sait que dans l'état stationnaire  $Q_0(x, \infty)$  est fini donc on a nécessairement une partie temporelle constante et donc :

$$C = \frac{1}{4\alpha^2} \quad (1.76)$$

qui mène après résolution à :

$$Q_0^+(x) = A \left(1 - e^{(x-1)/\alpha}\right) \quad (1.77)$$

$$Q_0^- = A e^{-1/\alpha} \left(e^{(x+1)/\alpha} - 1\right) \quad (1.78)$$

en intégrant l'équation avec discontinuité on a une condition intégrale simple qui donne :

$$A = \frac{1}{1 + e^{-1/\alpha}} \quad (1.79)$$

donc la première fonction interne est totalement déterminable. De plus elle correspond à peu près à la solution stationnaire (à noter qu'on a une approximation en plus ici donc c'est normal si on a une forme plus simple).

Passons à la seconde équation interne : comment la résoudre ? Si l'on revient à la condition de normalisation on a :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx P(x, t) = 1 \quad (1.80)$$

on a aux deux premiers ordres :

$$\int_{-1}^1 dx Q_0(x, u) = 1 \quad (1.81)$$

$$\int_{-1}^1 dx Q_1(x, u) = 0 \quad (1.82)$$

Par ailleurs les conditions de raccordement donnent :

$$Q_k(x = 1, u) = R_k(Y = 0, u) \quad (1.83)$$

$$\partial_x Q_k(x = 1, u) = R'_{k+1}(Y = 0, u) \quad (1.84)$$

On aboutit à une légère incohérence au premier ordre non nul mais cette incohérence vient de notre approximation  $\alpha \approx 0$ . A l'ordre suivant en intégrant la seconde équation interne et en utilisant les conditions de raccordement, on obtient  $d_2 = 0$ . **Cette solution n'est pas acceptable** car si  $d_2 = 0$  alors  $h_{3/2} = c_1 = \sqrt{\alpha} d_1^{3/2}$  et donc ne tend pas vers 0 dans l'état stationnaire.

### Résolution interne de la seconde équation

En faisant les mêmes changements de variable que pour la première équation, on obtient sur l'intervalle  $[0, 1]$ :

$$\partial_v K_1^+(x, v) - \alpha \partial_x^2 K_1^+(x, v) = \sqrt{\frac{d_1(v)}{\alpha}} \frac{e^{(x-1)/\alpha}}{1 + e^{-1/\alpha}} e^{-(2x-t)/4\alpha} \quad (1.85)$$

Je ne vois pas comment la résoudre étant donné qu'on ne connaît pas directement les conditions aux limites ça me paraît ambitieux. Je peux toujours essayer de mettre la solution formelle avec la fonction de Green de diffusion avec CL Dirichlet mais j'ai l'impression de m'enfoncer juste.

### Approximation positive

Pour effectuer ce calcul, on s'est placé dans la limite où  $P(x < -1, t)$  apportait une contribution négligeable à l'activité plastique. Cette hypothèse fait sens mais n'est pas vraiment vérifiable, toutefois on peut la tester sur la solution stationnaire. Au premier ordre non nul en  $h$  et  $h > 0$  on a :

$$\begin{aligned} P(x) &= \frac{e^{-1/u_0}}{\sqrt{u_0}(1 - e^{-1/u_0})} e^{(x+1)/\sqrt{hu_0}} \sqrt{h} \quad (x < -1), \\ P(x) &= \frac{e^{1/u_0}}{\sqrt{u_0}(e^{1/u_0} - 1)} e^{-(x-1)/\sqrt{hu_0}} \sqrt{h} \quad (x > 1) \end{aligned} \quad (1.86)$$

et donc pour  $\alpha \rightarrow 0$  soit  $u_0 \rightarrow 0$  on a bien la partie négative négligeable devant la partie positive. La validité de cette approximation à tout ordre en  $h$  n'est pas simple a priori même pour la solution stationnaire car elle fait intervenir d'autres termes dans le développement de  $D(u_1, u_2, \dots)$  dont la dépendance en  $\alpha$  n'est pas explicite. De la même façon j'ai l'impression que si l'on utilise cette approximation on peut considérer

que  $Q_i(x < 0)$  n'est non négligeable qu'autour de  $x = 0$  et donc le raccord en  $-1$  est nul à tout ordre. Je ne sais pas comment montrer ça correctement par contre.

### **Développement asymptotique en temps**

## 1.2 Analytical variations of the Hébraud-Lequeux model

### 1.2.1 Une autre version du bruit mécanique

Le modèle HL classique est défini par l'Equation 1.87, avec l'activité  $\Gamma(t)$  définie par l'Equation 1.88 et reliée au coefficient de diffusion  $D$  par l'équation constitutive Equation 1.89.

$$\partial_t P(\sigma, t) = -h\partial_\sigma P(\sigma, t) + D\partial_\sigma^2 P(\sigma, t) - \Theta(|\sigma| > 1)P(\sigma, t) + \Gamma(t)\delta(\sigma) \quad (1.87)$$

$$\Gamma(t) = \int d\sigma \Theta(|\sigma| > 1)P(\sigma, t) \quad (1.88)$$

$$D(t) = \alpha\Gamma(t) \quad (1.89)$$

Ici on considère une autre forme de bruit mécanique qui consiste en un nouveau mécanisme de resetting auquel sont soumis tous les sites indépendamment de leur contrainte  $\sigma$ . Ce resetting se fait avec un taux proportionnel à l'activité avec un coefficient de proportionnalité  $\beta$ . L'équation stationnaire devient alors :

$$0 = -h\partial_\sigma P(\sigma, t) - \beta\Gamma(t)P(\sigma, t) - \Theta(|\sigma| > 1)P(\sigma, t) + \Gamma(t)(1 + \beta)\delta(\sigma) \quad (1.90)$$

#### Solution

Sans le terme de diffusion, aucun site ne peut posséder de contrainte négative. La solution est donc définie sur  $[0, \infty[$ . Par ailleurs,  $P(\sigma)$  n'est plus continu en  $\sigma = 0$  et sa dérivée n'est plus continue en  $\sigma = 1$ . On résout alors sur les deux intervalles  $x < 1$  et  $x > 1$  :

$$\begin{aligned} 0 &= -\dot{\gamma}\partial_\sigma P_1(\sigma) - \beta\Gamma P_1(\sigma) \\ 0 &= -\dot{\gamma}\partial_\sigma P_2(\sigma) - (\beta\Gamma + 1)P_2(\sigma) \end{aligned} \quad (1.91)$$

ce qui donne avec la condition de raccord en  $\sigma = 1$  :

$$\begin{aligned} P_1(\sigma) &= A \exp\left(-\frac{\beta\Gamma}{\dot{\gamma}}x\right) \\ P_2(\sigma) &= Ae^{1/\dot{\gamma}} \exp\left(-\frac{\beta\Gamma + 1}{\dot{\gamma}}x\right) \end{aligned} \quad (1.92)$$

La condition de normalisation donne :

$$\frac{1}{\dot{\gamma}A} = \frac{1 - e^{-\beta\Gamma/\dot{\gamma}}}{\beta\Gamma} + \frac{e^{-\beta\Gamma/\dot{\gamma}}}{\beta\Gamma + 1} \quad (1.93)$$

et la condition d'autocohérence :

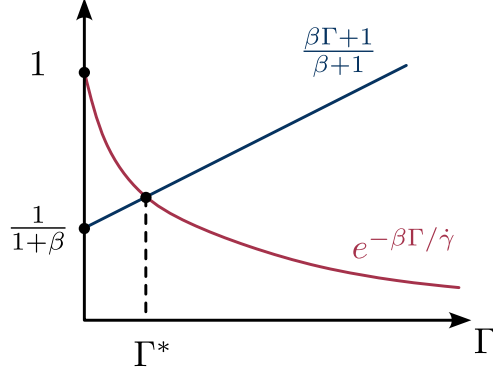
$$\Gamma = \frac{\dot{\gamma}A}{\beta\Gamma + 1} e^{-\beta\Gamma/\dot{\gamma}} \quad (1.94)$$



La combinaison de ces deux équations donne alors :

$$\frac{\beta\Gamma + 1}{\beta + 1} = e^{-\beta\Gamma/\dot{\gamma}} \quad (1.95)$$

Graphiquement, cette équation possède bien une solution pour tout  $\dot{\gamma}$ .



### Développement

On peut développer  $\Gamma$  en série entière de  $\dot{\gamma}$  :

$$\Gamma = \sum_{n \geq 1} \Gamma_n \dot{\gamma}^n \quad (1.96)$$

et en utilisant la relation donnée par l'Equation 1.95 on peut déduire les premiers termes de la série :

$$\begin{aligned} \Gamma_1 &= \frac{1}{\beta} \ln(1 + \beta) \\ \Gamma_2 &= -\frac{1}{\beta} \ln(1 + \beta) \end{aligned} \quad (1.97)$$

soit :

$$\Gamma = \frac{\dot{\gamma}}{\beta} \ln(1 + \beta)(1 - \dot{\gamma}) + \mathcal{O}(\dot{\gamma}^3) \quad (1.98)$$

ce qui implique le développement suivant de la constante de normalisation :

$$A = \frac{(1 + \beta) \ln(1 + \beta)}{\beta} (1 - \dot{\gamma}) + \mathcal{O}(\dot{\gamma}^2) \quad (1.99)$$

### Contrainte moyenne et contrainte seuil

La contrainte globale dans l'état stationnaire est :

$$\langle \sigma \rangle = A \dot{\gamma} \left( \frac{1}{\beta\Gamma} \left( \frac{\dot{\gamma}}{\beta\Gamma} - \left( 1 + \frac{\dot{\gamma}}{\beta\Gamma} \right) e^{-\beta\Gamma/\dot{\gamma}} \right) + \frac{1}{\beta\Gamma + 1} \left( 1 + \frac{\dot{\gamma}}{\beta\Gamma + 1} \right) e^{-\beta\Gamma/\dot{\gamma}} \right) \quad (1.100)$$

que l'on peut aussi développer :

$$\langle \sigma \rangle = \frac{\beta - \ln(1 + \beta)}{\beta \ln(1 + \beta)} (1 + \dot{\gamma}) + \mathcal{O}(\dot{\gamma}^2) \quad (1.101)$$

soit proche de la transition :

$$\dot{\gamma} \sim (\langle \sigma \rangle - \sigma_c)^{1/n}, \quad \sigma_c = \frac{\beta - \ln(1 + \beta)}{\beta \ln(1 + \beta)}, \quad n = 1 \quad (1.102)$$

**Limite  $\beta \rightarrow 0$**

Dans la limite où il n'y a pas de bruit mécanique on a :

$$\dot{\gamma} \sim (\langle \sigma \rangle - \sigma_c)^{1/n}, \quad \sigma_c = \frac{1}{2}, \quad n = 1 \quad (1.103)$$

avec un profil de probabilité constitué d'un plateau et d'une exponentielle décroissante. Un bruit mécanique de cette sorte ne permet donc pas de complexifier la rhéologie.

### 1.2.2 Hébraud-Lequeux model at low coupling

The idea here is to study the Hébraud-Lequeux model for small  $\alpha$  as a correction to the  $\alpha = 0$  case. For this we go back to the resolution of the original Hébraud-Lequeux equation which first yields, before self-consistency, to the system of equations:

$$P_1(x) = A_1 \exp(r(-h)) \quad (1.104)$$

#### Numerical resolution

In order to probe the behavior of the Hébraud-Lequeux model at low coupling  $\alpha$ , we first solve it numerically. The first step is to solve the self-consistency equation (see Equation 1.7) for any  $h$  and  $\alpha$ . The resolution yields the expected behavior which is that at low  $h$  the diffusion coefficient scales linearly with the drift and then saturates (see Figure 1.1). This saturation means that for high drifts, the ratio  $D/h$  goes to zero.

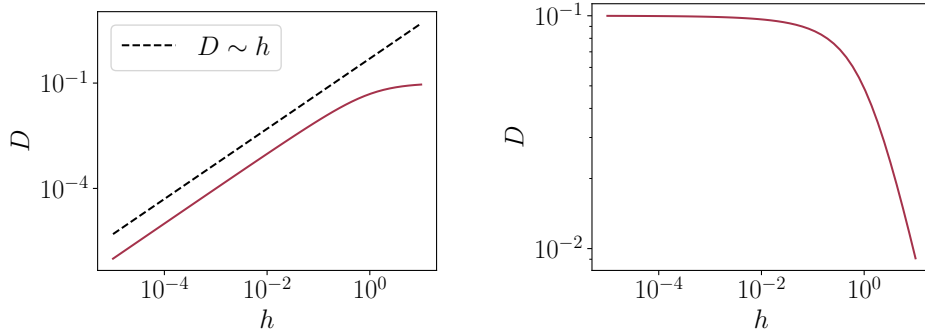
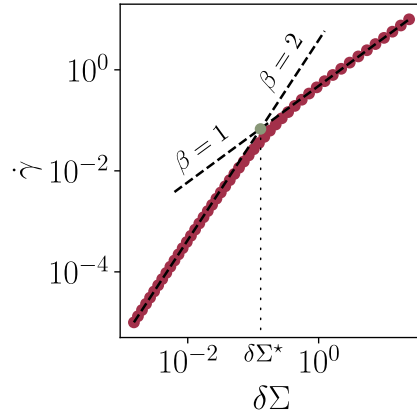
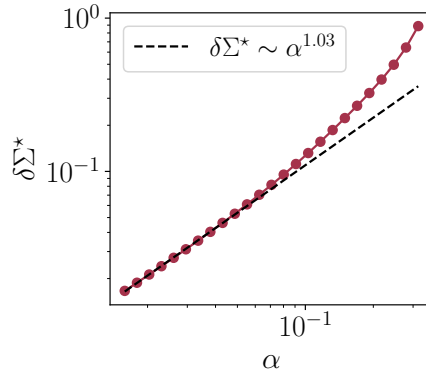


Figure 1.1: Numerical resolution of the self-consistency equation of the Hébraud-Lequeux model for  $\alpha = 0.1$

This self-consistency relation solved, it is possible to fully compute the probability distribution of the stress and its moments. This way, the rheological curves can be computed. As it can be seen in Figure 1.2, there are two regimes, one with  $\beta = 1$  and one with  $\beta = 2$ , separated by a critical value  $\delta\Sigma^*$ .

What we are interested in is the evolution of this critical value with the coupling parameter  $\alpha$ . To get it we compute the rheological curve for different  $\alpha$  and define  $\delta\Sigma^*$  as the intersect between the two power-laws. Doing this we get the evolution depicted in Figure 1.3. It seems then that the crossover decays as  $\alpha$ . The problem is that it is complicated to solve numerically this problem for very low  $\alpha$ . For this study, we could not go below  $\alpha = 0.015$


 Figure 1.2: Rheological curve for the HL model with  $\alpha = 0.1$ 

 Figure 1.3: Evolution of the cross-over with the coupling parameter  $\alpha$ 

### 1.2.3 Hébraud-Lequeux model with Poissonian noise

In its original version, the Hébraud-Lequeux model is a mean-field model for yielding in the sense that every element is connected to the other (fully-connected). Another approach could be to consider that all elements are randomly connected. In this version, each time an element becomes plastic it redistributes its stress via finite steps to a finite number of random elements. Considering that this process is Poissonian with rate  $\lambda$  and that the random steps  $z_i$  are distributed according to a distribution  $q(z)$ , the modified equations are the following:

$$\partial_t P(\sigma, t) = -h \partial_\sigma P(\sigma, t) - \lambda P(\sigma, t) + \lambda \int_{-\infty}^{+\infty} dy P(y, t) q(\sigma - y) - \Theta(|\sigma| > 1) P(\sigma, t) + \Gamma(t) \delta(\sigma) \quad (1.105)$$

Considering further the simplest example where  $q$  is uniform as in:

$$q(z) = \frac{\theta(|z| - \Delta)}{2\Delta} \quad (1.106)$$

we get:

$$\partial_t P(\sigma, t) = -h\partial_\sigma P(\sigma, t) - \lambda P(\sigma, t) + \frac{\lambda}{2\Delta} \int_{x-\Delta}^{x+\Delta} dy P(y, t) - \Theta(|\sigma| > 1)P(\sigma, t) + \Gamma(t)\delta(\sigma) \quad (1.107)$$

in the limit  $\Delta \rightarrow 0$ , this equation reduces to:

$$\partial_t P(\sigma, t) = -h\partial_\sigma P(\sigma, t) + \frac{\lambda\Delta^2}{2}\partial_\sigma^2 P(\sigma, t) - \Theta(|\sigma| > 1)P(\sigma, t) + \Gamma(t)\delta(\sigma) \quad (1.108)$$

which corresponds to the original Hébraud-Lequeux model.

Denoting  $\xi$  the number of elements affected by a plastic event, to be consistent we should have:

$$\lambda = \xi\Gamma, \quad \Delta = \frac{a}{\sqrt{\xi}} \quad (1.109)$$

$a$  being the stress redistribution of the singly connected model. The consistent stationary equation is then expected to be the following one:

$$0 = -h\partial_\sigma P(\sigma) - \xi\Gamma P(\sigma) + \frac{\xi^{3/2}\Gamma}{2a} \int_{\sigma-a/\xi}^{\sigma+a/\xi} dy P(y) - \Theta(|\sigma| > 1)P(\sigma) + \Gamma\delta(\sigma) \quad (1.110)$$

**Attention il y avait une erreur dans le scaling !!!**

## 1.3 Numerical variations of the Hébraud-Lequeux model

### 1.3.1 Fully connected Hébraud-Lequeux

In order to perform numerical simulations of the Hébraud-Lequeux model, we consider it as a Langevin dynamics of  $N$  particles depicted in Figure 1.4. Each particle is subjected to a constant drift  $h$  that drives it to the absorbing boundary. At each time step, the ratio of active particles  $\Gamma(t)$  is computed as the number of particles within the absorbing wall. This ratio then determines the intensity of the diffusive noise felt by all the particles in the system. At the end of each time step, active particles positions are reset to 0 with a probability  $\Delta t/\tau$ .

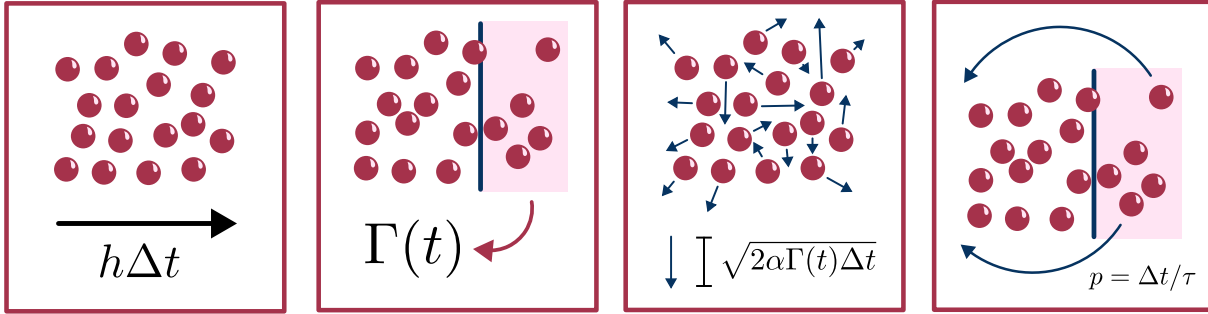


Figure 1.4: Numerical scheme for the classical version of the Hébraud-Lequeux model

With this type of numerical simulations, I get a strange non-monotonic behavior of the flow-curve at low drift, making it impossible to measure the expected exponent of  $\beta = 2$ . This effect does not seem to come from the finite nature of our system as very different sizes yield the same strange behavior. Activity scales linearly with the drift as expected.

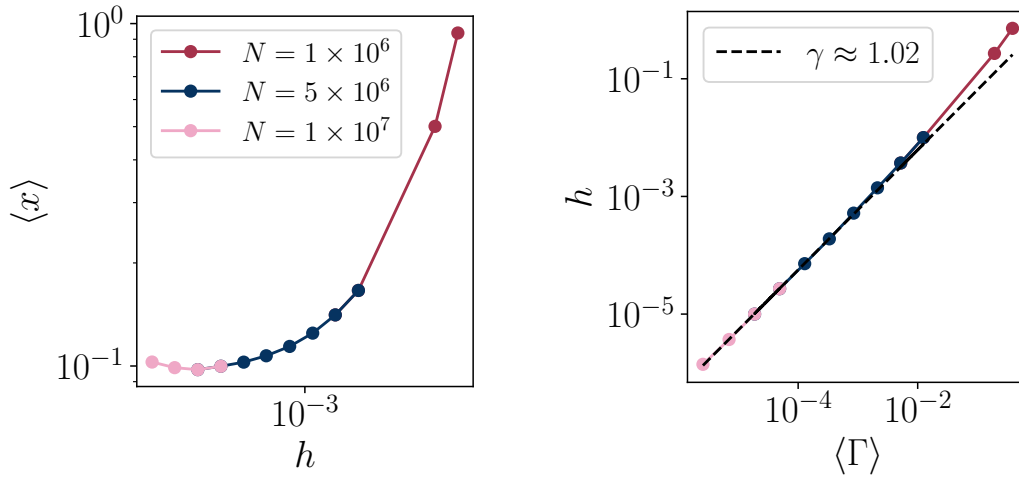


Figure 1.5: Langevin simulations of the Hébraud-Lequeux model for  $\alpha = 0.45$ . Left: order parameter curve. Right: scaling of the mean activity with the drift.

This weird behavior should be the result of a bad implementation but I don't see why.

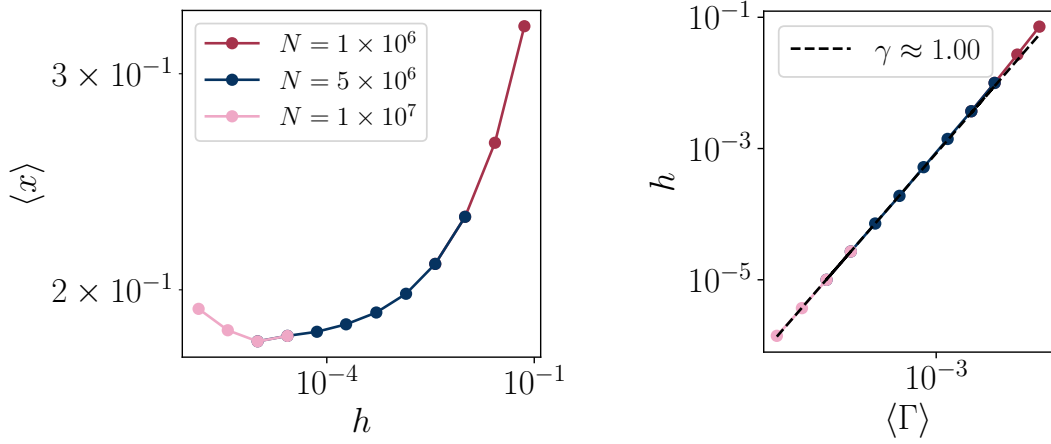


Figure 1.6: Langevin simulations of the Hébraud-Lequeux model for  $\alpha = 0.35$ . Left: order parameter curve. Right: scaling of the mean activity with the drift.

**Problem solved** Simple precision is the limiting reason. It is not clear to me why but it is. Computation should be done in float.

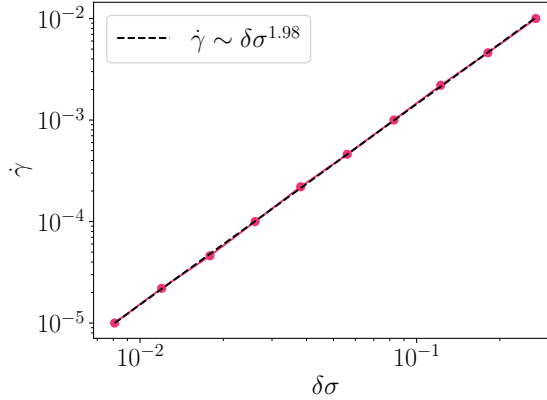


Figure 1.7: Flow curve for  $\alpha = 0.35$  in double precision

### 1.3.2 Poorly connected Hébraud-Lequeux

#### Method

The algorithm for a time step to simulate the poorly connected HL model is the following:

- Particles are advected by the drift  $h$ , leading to an increase  $h\Delta t$  in their position.
- The ratio of active particles  $\Gamma$  is computed, as the fraction of particles which show  $x > 1$ .

- $\frac{\xi \Gamma N \Delta t}{\tau}$  sets the number of kicks that should be felt by the system due to active particles in one time step. For that, we generate a poisson distributed variable of mean  $\frac{\xi \Gamma \Delta t}{\tau}$  for each particle, representing the number  $m$  of kicks it receives.
- Each particle then receives a kick that is represented by a gaussian variable of zero mean and  $m\epsilon$  variance (for that we simply generate a normal variable for each particle that we multiply by  $\sqrt{m}$ )
- Active particles are reseted to the origin with probability  $p = \frac{\Delta t}{\tau}$

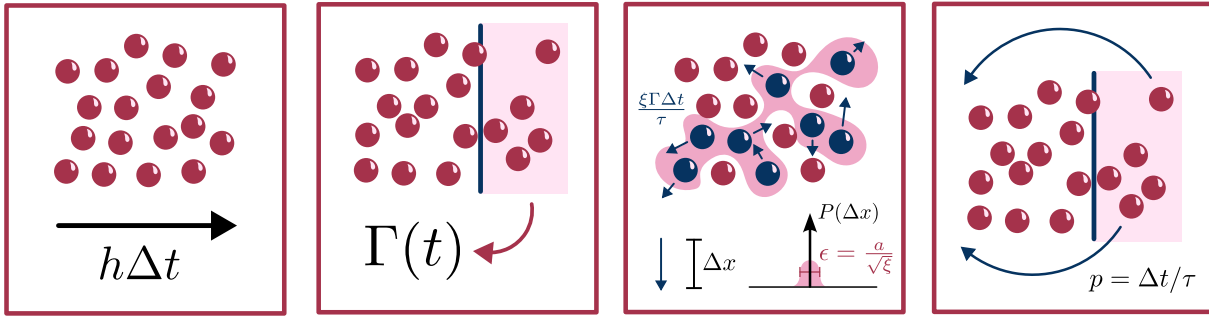
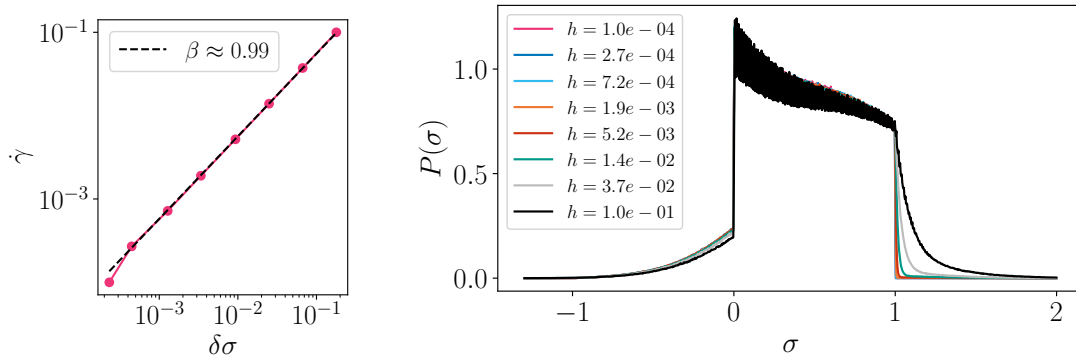


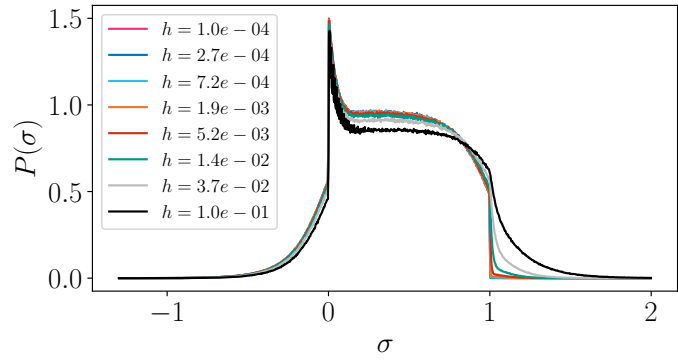
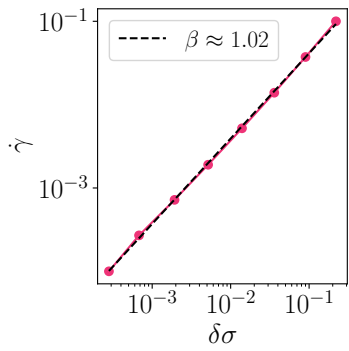
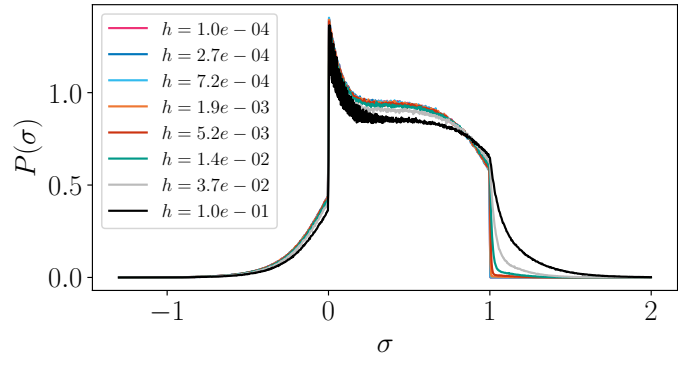
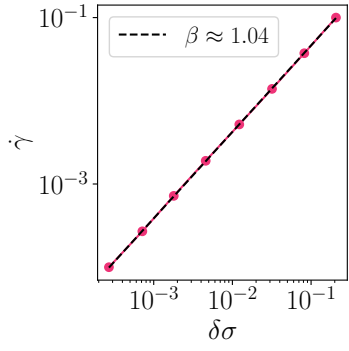
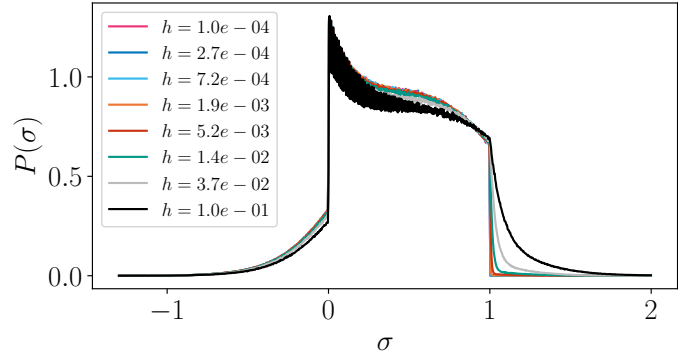
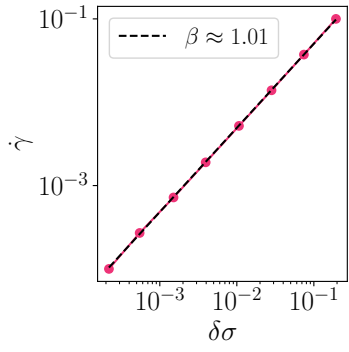
Figure 1.8: Numerical scheme for the poissonian version of the Hébraud-Lequeux model

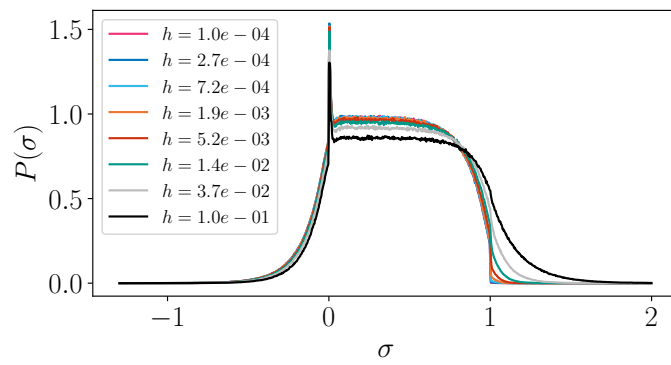
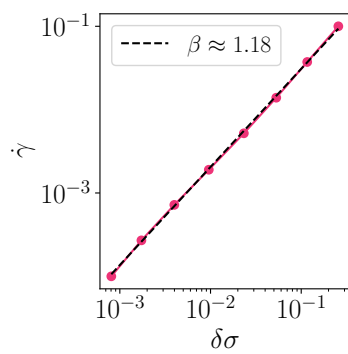
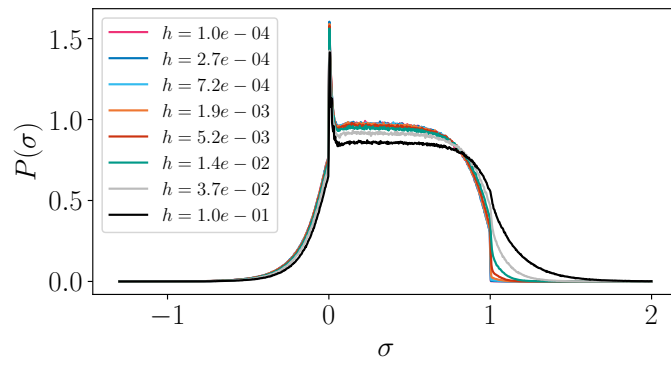
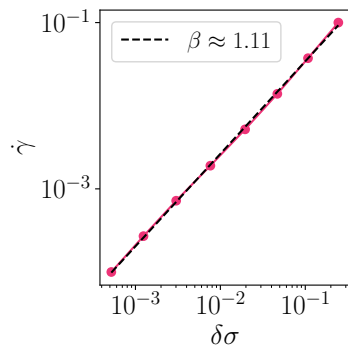
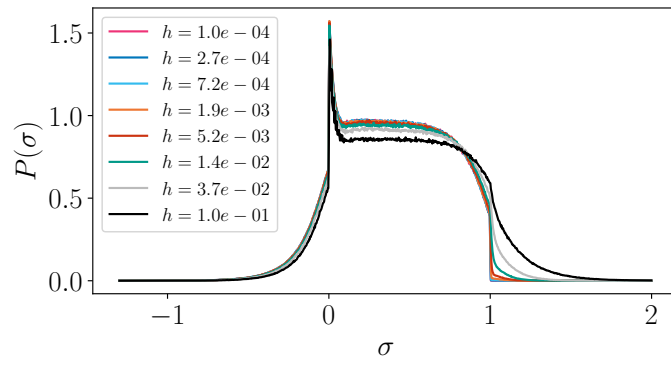
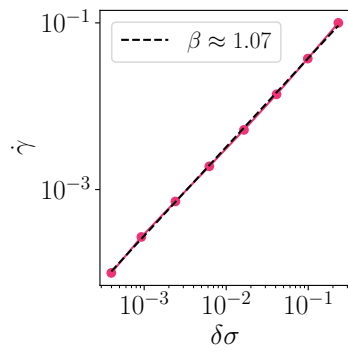
### First results

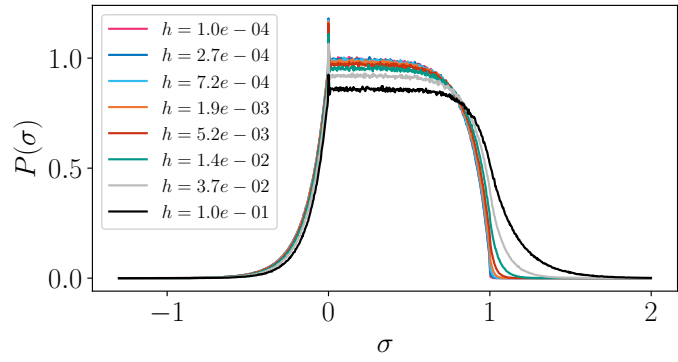
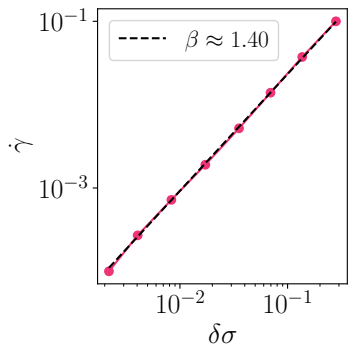
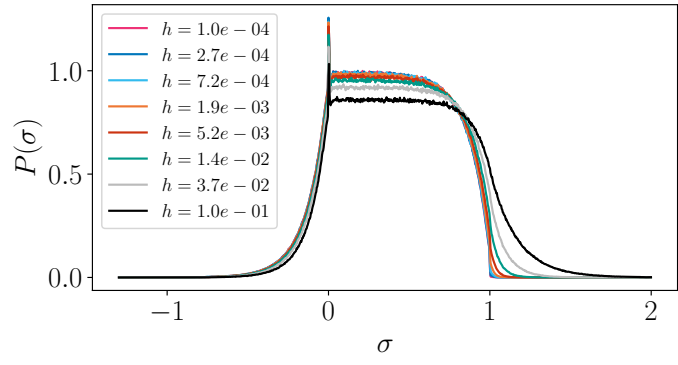
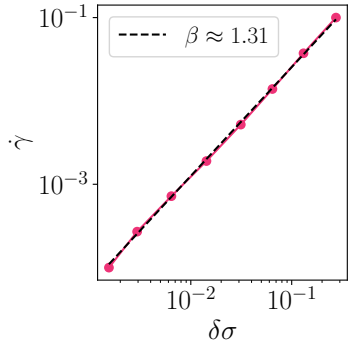
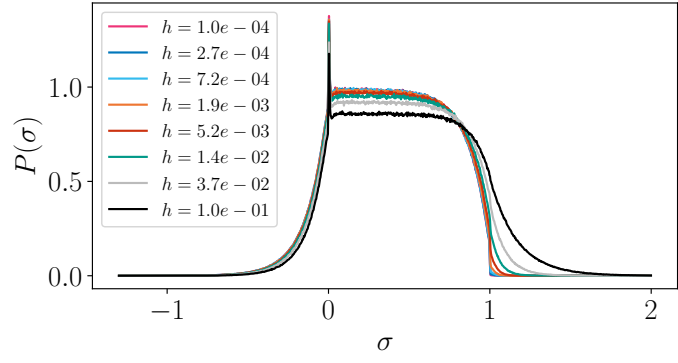
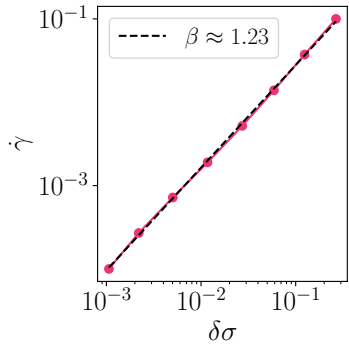
Using  $\epsilon = \frac{a}{\xi}$  with  $a = 0.5$ , we run simulations with  $\Delta t = 0.01$ ,  $\tau = 1$  and  $N = 10^7$  for different ranges of interaction  $\xi$ . For each  $\xi$  we measure the flow curve and the stress repartition in the system in the steady state. In the following  $\xi$  is going from 2 to 4096.

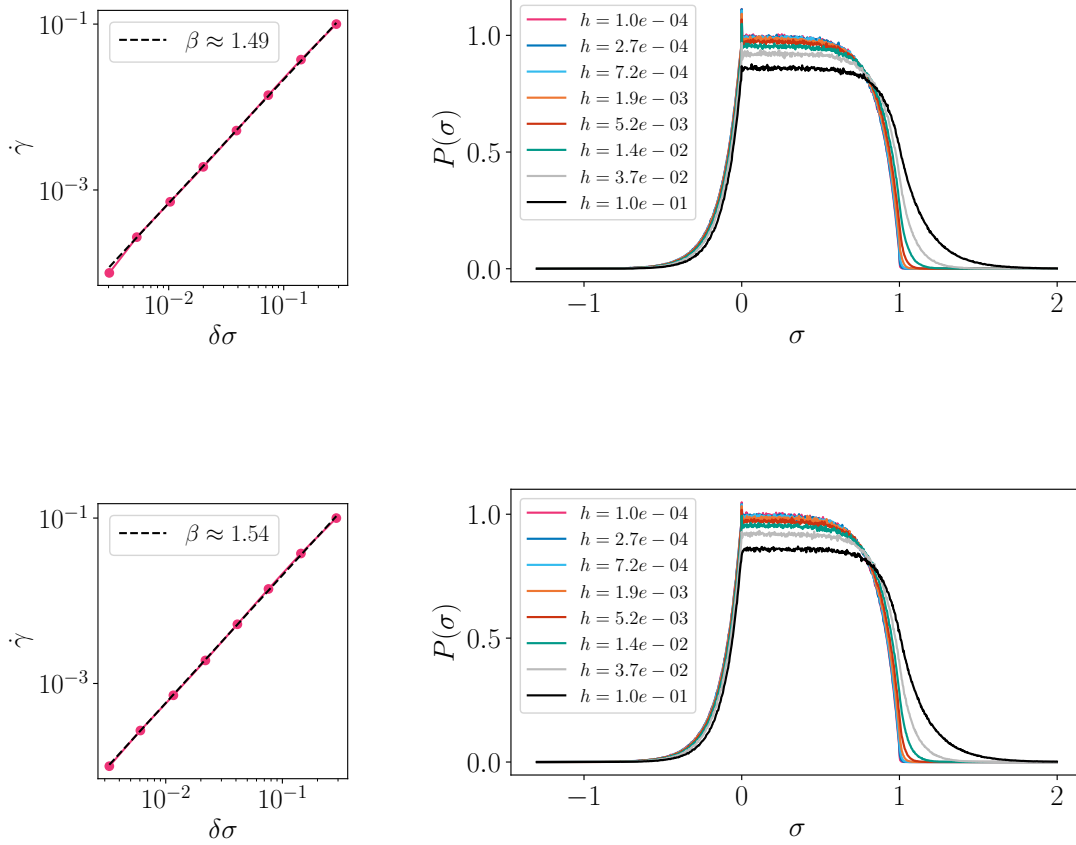












It feels like the transition to mean field is pretty smooth, range of interaction should be increased more to get the  $\beta = 2$  limit.

### 1.3.3 Modèle de Hébraud-Lequeux et diffusion anormale

On se propose ici d'étudier le modèle de Hébraud-Lequeux où le bruit diffusif habituel serait remplacé par un bruit de type Lévy, représenté par une distribution avec décroissance algébrique, et sans biais. Formellement on peut modéliser cette situation par l'équation aux dérivées partielles fractionnaires suivante :

$$\partial_t P(x, t) = \alpha \Gamma \partial_x^\mu P(x, t) - \Theta(|x| > x_c) P(x, t) + \Gamma(t) \delta(x) \quad (1.111)$$

où la dérivée fractionnaire  $\partial_x^\mu$  est définie au sens de Riesz selon :

$$\partial_x^\mu = - \int \frac{dk}{2\pi} |k|^\mu e^{ikx} \quad (1.112)$$

#### Piste de résolution analytique

La résolution analytique de ce type d'équation est rendue complexe par la présence de l'opérateur fractionnaire non local et de la discontinuité du terme absorbant. Dans le cas gaussien  $\mu = 2$ , l'équation stationnaire du second ordre peut être résolue par morceaux. Dans le cas où  $\mu$  est quelconque, la non-localité ne permet plus cette approche

naïve. Lorsque le resetting est au plus quadratique en  $x$ , il semble possible de résoudre le problème avec une approche intégrale de chemin [1, 2]. Cependant une discontinuité fait perdre tout l'intérêt de cette approche. Par ailleurs les cas discontinus ont déjà été l'objet d'une étude en mécanique quantique, et même le puits de potentiel infini est très compliqué à résoudre [3].

La piste la plus prometteuse cependant serait de reprendre le raisonnement de Lin et Wyart [4] qui parviennent à obtenir des résultats sur la contrainte moyenne. On essaye alors de le commencer au minimum. Dans la limite  $N \rightarrow \infty$ , en notant  $x = 1 - \sigma$ , la distribution de probabilité suit dans l'état stationnaire :

$$\Gamma \left( \alpha \int_{-\infty}^{\infty} dy A \frac{P(y) - P(x)}{|x - y|^{\mu+1}} + \delta(x - 1) \right) - \Theta(-x)P(x) = 0 \quad (1.113)$$

par ailleurs, on a dans la limite d'activité nulle :

$$\alpha_c \int_0^{\infty} dy A \frac{P_c(y) - P_c(x)}{|x - y|^{\mu+1}} + \delta(x - 1) - \Theta(-x)\alpha_c \int_0^{\infty} dy A \frac{P_c(y)}{|x - y|^{\mu+1}} = 0 \quad (1.114)$$

et donc en perturbant la première équation autour de la solution critique on a :

$$\alpha_c \int_{-\infty}^{\infty} dy A \frac{\delta P(y) - \delta P(x)}{|x - y|^{\mu+1}} - \Theta(-x) \frac{\delta P(x)}{\Gamma} = -S_1(x) - S_2(x) \quad (1.115)$$

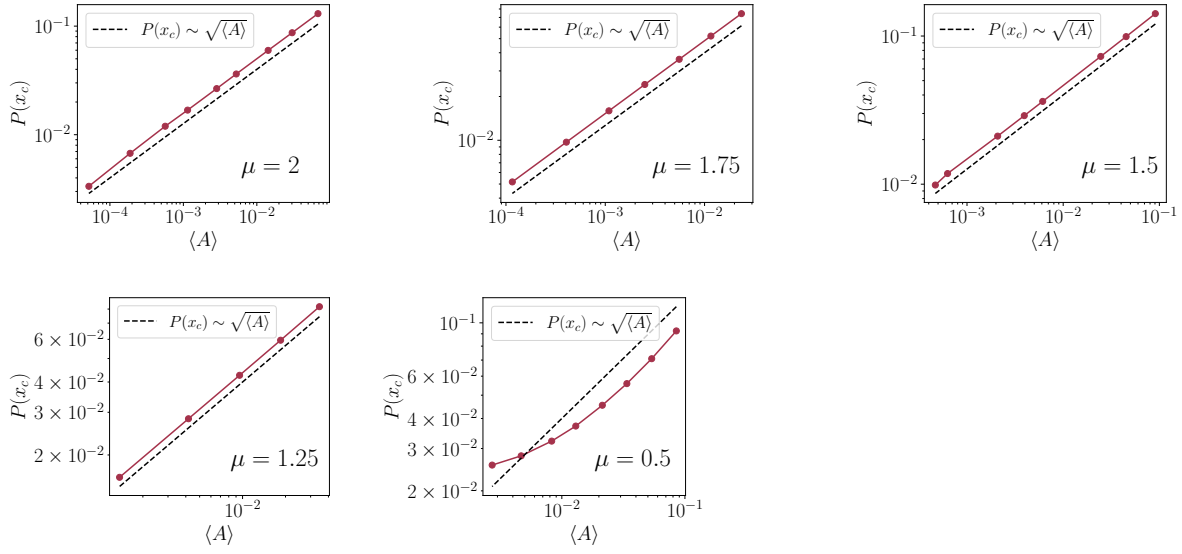
avec :

$$S_1(x) = \delta\alpha\Theta(x) \int_0^{\infty} dy A \frac{P_c(y) - P_c(x)}{|x - y|^{\mu+1}}, \quad S_2(x) = \alpha\Theta(-x) \int_0^{\infty} dy A \frac{P_c(y)}{|x - y|^{\mu+1}} \quad (1.116)$$

### Résolution numérique indirecte par les marches aléatoires

Une manière d'intégrer numériquement cette équation sur la distribution de  $x$  est de considérer la dynamique de Langevin sous-jacente et de mesurer la distribution associée après coup.

**Valeurs de la distribution au seuil** Pour différentes valeurs du paramètre d'ordre  $x_c$  associé à une activité moyenne  $\langle A \rangle$ , on mesure la valeur de la distribution de probabilité  $P(x_c)$  au seuil. Comment évolue cette quantité en fonction de l'activité dans le système ?



On remarque que dès lors que  $\mu \geq 4$ , la probabilité d'être au seuil scale comme la racine de l'activité globale dans le système. (NB: cela fait penser au fait que tous les Lévy walk ont des first passage time qui scalent de la même façon dès lors que  $\alpha > 1$ )

# Bibliography

- [1] E. Roldan and S. Gupta, “Path-integral formalism for stochastic resetting: Exactly solved examples and shortcuts to confinement,” *Physical Review E*, vol. 96, p. 022130, Aug. 2017. Publisher: American Physical Society.
- [2] D. Janakiraman and K. L. Sebastian, “Path Integral Formulation for Levy Flights - Evaluation of the Propagator for Free, Linear and Harmonic Potentials in the Over- and Underdamped Limits,” *Physical Review E*, vol. 86, p. 061105, Dec. 2012. arXiv:1211.4083 [cond-mat].
- [3] Y. Luchko, “Fractional Schrödinger equation for a particle moving in a potential well,” *Journal of Mathematical Physics*, vol. 54, Jan. 2013.
- [4] J. Lin and M. Wyart, “Microscopic processes controlling the Herschel-Bulkley exponent,” *Physical Review. E*, vol. 97, p. 012603, Jan. 2018.