

## THÈSE

Pour obtenir le grade de

### DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ GRENOBLE ALPES

École doctorale : PHYS - Physique

Spécialité : Physique Théorique

Unité de recherche : Laboratoire Interdisciplinaire de Physique

### Criticalité des transitions absorbantes en matière molle en présence d'interactions médiées à longue portée

### Criticality of absorbing phase transitions in soft matter with long-range mediated interactions

Présentée par :

### Tristan JOCTEUR MONROZIER FABRE

Direction de thèse :

**Eric BERTIN**

DIRECTEUR DE RECHERCHE, CNRS DELEGATION ALPES

**Romain MARI**

Directeur de thèse

Co-encadrant de thèse

Rapporteurs :

**Alberto ROSSO**

DIRECTEUR DE RECHERCHE, CNRS DELEGATION ILE DE FRANCE GIF SUR YVETTE

**Frédéric VAN WIJLAND**

PROFESSEUR DES UNIVERSITES, Université Paris Cité

Thèse soutenue publiquement le **20 juin 2025**, devant le jury composé de :

**Alberto ROSSO,**

DIRECTEUR DE RECHERCHE, CNRS DELEGATION ILE DE FRANCE  
GIF SUR YVETTE

Rapporteur

**Frédéric VAN WIJLAND,**

PROFESSEUR DES UNIVERSITES, Université Paris Cité

Rapporteur

**Laura FOINI,**

CHARGEÉE DE RECHERCHE, CEA Paris-Saclay

Examinateur

**Léonie CANET,**

PROFESSEURE DES UNIVERSITES, Université Grenoble Alpes

Examinateur

**Pierre LE DOUSSAL,**

DIRECTEUR DE RECHERCHE, CNRS DELEGATION PARIS CENTRE

Examinateur

**Stéphane SANTUCCI,**

DIRECTEUR DE RECHERCHE, CNRS DELEGATION RHÔNE  
AUVERGNE

Examinateur



# Table des matières

<b>Introduction</b>	<b>1</b>
<b>1 Criticalité absorbante et interactions à longue portée en matière molle</b>	<b>3</b>
1.1 Écoulement des matériaux amorphes et cisaillement cyclique des suspensions	3
1.1.1 Transition de réversibilité dans les suspensions cisaillées cycliquement	4
1.1.2 Transition vers l'écoulement des matériaux amorphes . . . . .	5
1.1.3 Des similarités non-conventionnelles . . . . .	6
1.2 Transitions de phases absorbantes . . . . .	7
1.2.1 Phénomènes critiques à l'équilibre . . . . .	7
1.2.2 Transitions de phase absorbantes . . . . .	12
1.3 Percolation dirigée conservée . . . . .	17
1.3.1 Conditions d'appartenance . . . . .	17
1.3.2 Modèles théoriques . . . . .	17
1.3.3 Comportement critique . . . . .	19
1.3.4 Classe CDP et transition de depinning . . . . .	20
1.3.5 Avalanches . . . . .	25
1.3.6 Hyperuniformité . . . . .	26
1.3.7 Conclusion de la section . . . . .	27
1.4 Comprendre les transitions de réversibilité et d'écoulement comme des transitions de phase absorbantes . . . . .	28
1.4.1 Transition de réversibilité . . . . .	28
1.4.2 Transition vers l'écoulement . . . . .	34
1.4.3 Conclusion de la section . . . . .	40
1.5 Longue portée et comportement critique . . . . .	40
1.5.1 Phénoménologie . . . . .	40
1.5.2 Formulation théorique dans la classe CDP . . . . .	42
1.5.3 Prédictions et contradictions . . . . .	44
1.6 Problématisation . . . . .	45
1.6.1 Des interactions à longue portée de nature différente . . . . .	45
1.6.2 Questions guidant ce travail . . . . .	46
1.6.3 Déroulé du manuscrit . . . . .	48
<b>2 Transport à longue portée dans la classe CDP</b>	<b>49</b>
2.1 Motivations . . . . .	50
2.1.1 Compléter la littérature . . . . .	50
2.1.2 Un cadre d'intérêt réel . . . . .	50
2.2 Modèles . . . . .	51

2.2.1	LR-Manna . . . . .	51
2.2.2	LR-ROM . . . . .	53
2.3	Méthodes . . . . .	54
2.3.1	Détermination des exposants critiques . . . . .	55
2.3.2	Caractérisation de l'hyperuniformité . . . . .	58
2.4	Exposants critiques . . . . .	61
2.4.1	Exposants statiques . . . . .	61
2.4.2	Exposant dynamique . . . . .	62
2.5	Hyperuniformité . . . . .	63
2.5.1	Hyperuniformité dans le LR-ROM . . . . .	64
2.5.2	Difficultés dans les mesures d'hyperuniformité . . . . .	66
2.5.3	Hyperuniformité dans le modèle LR-Manna . . . . .	69
2.6	Conclusion de chapitre . . . . .	73
<b>3</b>	<b>Transition de réversibilité dans les suspensions cisaillées cycliquement</b>	<b>75</b>
3.1	Importance de la spatialisation des interactions . . . . .	76
3.2	Méthode . . . . .	77
3.2.1	Le ROM comme modèle de dynamique stroboscopique . . . . .	77
3.2.2	Modélisation des interactions médiées . . . . .	79
3.2.3	Implémentation numérique . . . . .	81
3.3	Comportement critique . . . . .	84
3.3.1	Détermination du point critique . . . . .	84
3.3.2	Évolution des exposants critiques . . . . .	86
3.3.3	Hyperuniformité . . . . .	91
3.3.4	Retour sur les cas physiques . . . . .	93
3.4	Interprétation . . . . .	94
3.4.1	Modèle de $\mu$ -Hébraud-Lequeux . . . . .	95
3.4.2	Interprétation mean-field de la transition . . . . .	101
3.4.3	Zone concave . . . . .	109
3.5	Avalanches . . . . .	112
3.5.1	Avalanches à densité fixée . . . . .	112
3.5.2	Évolution des exposants . . . . .	114
3.6	Conclusion . . . . .	116
<b>4</b>	<b>Transition vers l'écoulement des matériaux amorphes</b>	<b>119</b>
4.1	Étudier la transition vers l'écoulement des matériaux amorphes . . . . .	120
4.1.1	Expérimentalement . . . . .	120
4.1.2	Numériquement . . . . .	121
4.1.3	Théoriquement . . . . .	121
4.2	Les modèles élastoplastiques comme outils privilégiés . . . . .	123
4.2.1	Principe d'un modèle élastoplastique . . . . .	123
4.2.2	Le modèle de Picard . . . . .	124
4.2.3	Implémentation numérique . . . . .	125
4.2.4	Changement du paramètre de contrôle . . . . .	127
4.3	Comportement critique . . . . .	127
4.3.1	Transition vers l'écoulement en milieu élastique . . . . .	127

## TABLE DES MATIÈRES

---

4.3.2	De l'importance de la longue portée - Modèles d'écoulement à courte portée . . . . .	133
4.3.3	Situer la transition vers l'écoulement . . . . .	141
4.3.4	Influence de la portée sur les corrélations de contrainte dans l'état stationnaire . . . . .	148
4.4	Caractérisation dynamique et avalanches . . . . .	154
4.4.1	Avalanches de plasticité . . . . .	155
4.4.2	Avalanches en contrainte imposée . . . . .	159
4.4.3	Influence de la portée sur les avalanches en contrainte imposée . . . . .	163
4.5	Conclusion . . . . .	166
<b>5</b>	<b>Discussion</b>	<b>169</b>
5.1	Comparaison des transitions étudiées . . . . .	169
5.1.1	Des mécanismes et des transitions similaires . . . . .	169
5.1.2	Une tentative de description commune . . . . .	169
5.1.3	De nouvelles interrogations . . . . .	170
5.2	Equations de champ pour les transitions convexes . . . . .	170
5.2.1	Motivations et difficultés . . . . .	170
5.2.2	Cadre de travail . . . . .	170
5.2.3	Tests . . . . .	170
5.3	Notes random . . . . .	171
5.4	Points de discussion (mais pas à mettre dans la discussion) . . . . .	172
<b>Conclusion</b>		<b>173</b>
<b>Bibliographie</b>		<b>175</b>
<b>Annexe</b>		<b>185</b>
6.1	Transport à longue portée . . . . .	185
6.1.1	Mesures d'hyperuniformité dans le modèle LR-Manna . . . . .	185
6.2	Transition de réversibilité . . . . .	185
6.2.1	Transformée de Fourier des propagateurs . . . . .	185
6.2.2	Test de l'approximation scalaire . . . . .	185
6.2.3	Résolution numérique du modèle $\mu$ -Hébraud-Lequeux . . . . .	185
6.2.4	Fonctions de corrélation de paire . . . . .	185
6.2.5	Avalanches dans le modèle $\alpha$ -ROM . . . . .	185
6.3	Transition vers l'écoulement . . . . .	185
6.3.1	Modèles $\alpha$ -Picard . . . . .	185
6.3.2	Dépendance en protocole des avalanches à contrainte imposée dans les modèles élastoplastiques . . . . .	188
6.3.3	Modèle de Picard écranté . . . . .	200

# Introduction

TODO :

- Intégrer la taille du système quelque part dans la définition de la variance.
- Attention aux notations fractionnaires  $\alpha - \sigma$  pour les portées.
- Attention aux attendus LR-CDP qu'on aura pas présenté dans l'intro
- Harmoniser la taille des figures, c'est giga moche comme ça.
- Changer le code couleur tout pourri
- Et si en fait on pouvait voir les transitions comme celles associées à un champ conservé diffusif ?



# Chapitre 1

## Criticalité absorbante et interactions à longue portée en matière molle

Dans cette thèse, nous présentons l'étude comparée de deux phénomènes de matière molle : la transition de réversibilité dans les suspensions cisaillées cycliquement et la transition vers l'écoulement des matériaux amorphes. Le but de ce chapitre est d'introduire ces deux phénomènes que rien ne rassemble au premier regard et d'en proposer une vision unificatrice dans un cadre d'étude bien délimité.

Pour ce faire, nous commencerons par présenter succinctement la phénoménologie de ces transitions, mettant en évidence un comportement singulier et des mécanismes communs. Cette première familiarisation avec les deux systèmes nous amènera alors à un cadre naturel commun pour l'étude de ces deux phénomènes : celui des transitions de phase absorbantes. Nous proposerons alors de prendre un peu de recul en présentant la phénoménologie globale de ces transitions, analogue à celle des phénomènes critiques d'équilibre. Après une description complète de la classe d'universalité de la percolation dirigée conservée, nous montrerons en quoi la transition de réversibilité et la transition vers l'écoulement en représentent des bons candidats. En accord avec les études précédentes de ces deux systèmes, nous montrerons que leur comportement critique s'éloigne fortement de cet attendu théorique et en proposerons une explication via la nature fondamentalement différente des interactions à longue portée présentes dans ces systèmes. Enfin, nous formulerons les problématiques relatives à ce comportement singulier qui guideront notre étude tout au long de cet ouvrage.

### 1.1 Écoulement des matériaux amorphes et cisaillement cyclique des suspensions

Dans cette section, nous présentons succinctement et successivement la transition de réversibilité dans les suspensions cisaillées cycliquement et la transition vers l'écoulement des matériaux amorphes. Le rapprochement des deux phénoménologies associées nous permettra alors de comprendre en quoi l'étude comparée de ces deux systèmes représente un objet riche et intéressant.

### 1.1.1 Transition de réversibilité dans les suspensions cisaillées cycliquement

Certains systèmes en matière molle présentent un phénomène intrigant sous l'action d'un cisaillement cyclique. Sous une amplitude de déformation relativement faible, ceux-ci opèrent une dynamique réversible, laissant le système inchangé d'un cycle de déformation à l'autre. Toutefois, si cette amplitude devient suffisamment grande, le système est soumis à des changements irréversibles, menant à une évolution constante de sa structure au fil des cycles [1-3]. Nous appellerons transition de réversibilité le passage d'une phase à l'autre de ce système.

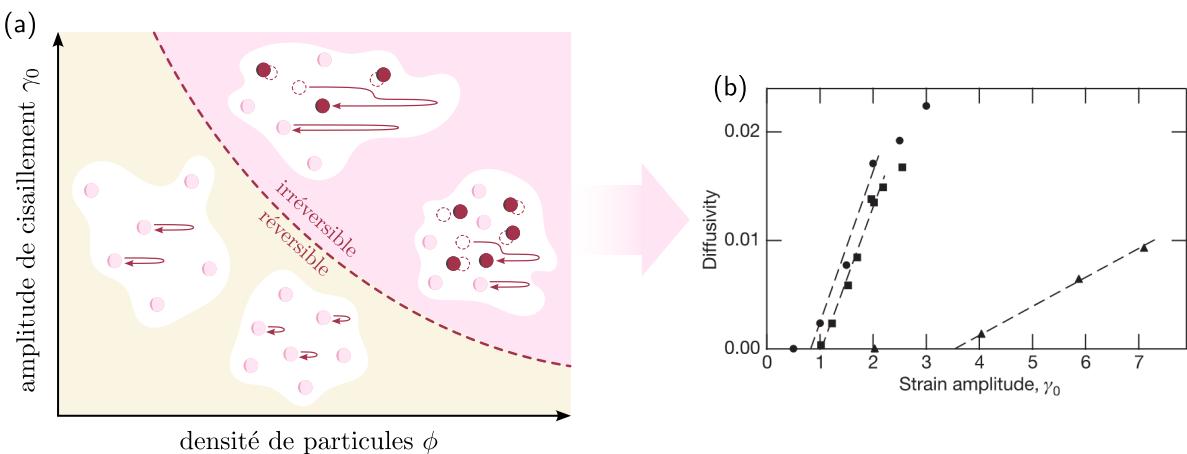


FIGURE 1.1 – (a) Diagramme de phase de la transition de réversibilité inspiré de [4]. Les particules rouges montrent une dynamique irréversible. (b) Évolution du coefficient de diffusion stroboscopique en fonction de l'amplitude de cisaillement dans les expériences de Pine et al. [5]

La transition de réversibilité peut être illustrée parfaitement par les expériences menées par Pine et al. [5], dans lesquelles une suspension peu dense est cisaillée dans un écoulement de Couette cylindrique. En suivant la position de certaines particules du système d'un cycle à l'autre, les auteurs ont pu observé deux comportements distincts. Pour une amplitude de cisaillement suffisamment faible  $\gamma_0 < \gamma_{0,c}$ , les particules conservent la même position d'un cycle à l'autre. Cependant pour  $\gamma_0 > \gamma_{0,c}$ , une partie des particules se déplacent entre le début et la fin d'un cycle. En étudiant la dynamique stroboscopique du système, i.e. à chaque début de cycle, la suspension est donc immobile pour  $\gamma_0 < \gamma_{0,c}$  et elle diffuse pour  $\gamma_0 > \gamma_{0,c}$ . Il est alors possible de visualiser cette transition en représentant l'évolution du coefficient de diffusion stroboscopique  $D_0$  associé en fonction de l'amplitude de cisaillement  $\gamma_0$ , comme sur la figure 1.1-(b).

L'origine de cette diffusion stroboscopique à l'échelle macroscopique est attribuée à des interactions microscopiques irréversibles entre les particules, comme illustré sur la figure 1.1-(a). Lorsque les particules sont suffisamment éloignées au cours du cisaillement, leur dynamique est uniquement régie par les équations de Stokes, qui ont la propriété d'être réversibles dans le temps. D'un cycle à l'autre, la dynamique est donc identique. Toutefois, lorsque celles-ci sont suffisamment rapprochées par le cisaillement (ou proches

initialement du fait d'une forte densité), elles interagissent entre elles au cours du cycle via des interactions locales irréversibles (contact, **lubrification**, ...), induisant de ce fait une évolution d'un cycle à l'autre. C'est la succession de ces interactions irréversibles qui induit une diffusion stroboscopique sous grande amplitude de cisaillement [6].

### 1.1.2 Transition vers l'écoulement des matériaux amorphes

Le second phénomène auquel nous nous intéressons est l'écoulement des matériaux amorphes. Les **solides amorphes** sont des objets peuplant notre quotidien à différentes échelles. Nous les retrouvons à l'état naturel par l'écume marine, les argiles ou les dunes de sable mais aussi par les matériaux d'origine **anthropologique** comme les **verres**, le dentifrice ou la mayonnaise. Une de leurs particularités vient de leurs propriétés rhéologiques, bien plus complexes que celles des fluides newtoniens comme l'eau ou le miel. En effet, à la différence de ces derniers, les matériaux amorphes s'écoulent en général comme des fluides à seuil [7, 8].

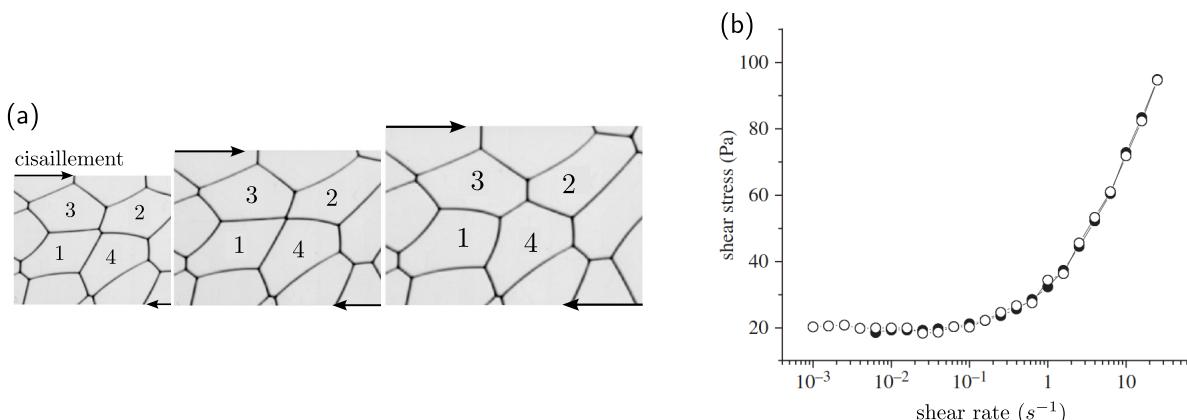


FIGURE 1.2 – (a) Image tirée de [9] d'un réarrangement plastique dans une mousse : les bulles voisines changent leur contact afin de minimiser la contrainte supportée. (b) Evolution du taux de cisaillement en fonction de la contrainte appliquée. Données tirées de [10]

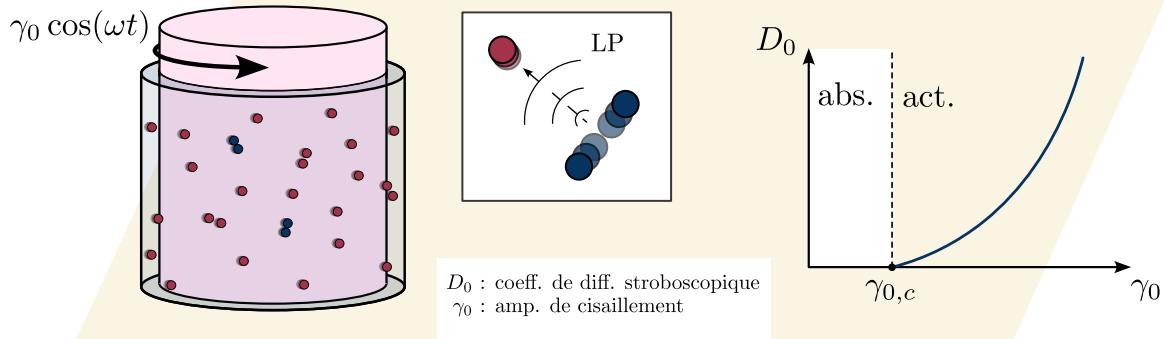
Si l'on considère le cas du cisaillement simple d'un tel fluide, celui-ci possède la particularité de ne s'écouler que si la contrainte de cisaillement  $\Sigma$  appliquée est supérieure à une certaine contrainte seuil  $\Sigma_c$  propre au matériau. Un exemple édifiant est celui du dentifrice, qui ne s'écoule de son tube que lorsqu'on le presse suffisamment.

En-deçà de la contrainte seuil, le matériau répond élastiquement à la sollicitation à l'échelle locale comme globale, **définissant un taux de cisaillement nul**  $\dot{\gamma} = 0$ . En revanche, **au-delà de cette contrainte seuil**, l'étude du matériau révèle la présence de réarrangement plastiques locaux (voir figure 1.2-(a)) [11–13]. Pour  $\Sigma > \Sigma_c$  la succession de ces événements résulte alors en un écoulement global et donc un taux de cisaillement non-nul  $\dot{\gamma} > 0$ . Il est ainsi possible de visualiser cette transition en représentant l'évolution du taux de cisaillement en fonction de la contrainte appliquée, comme sur l'exemple de la figure 1.2-(b).

### 1.1.3 Des similarités non-conventionnelles

Ces phénomènes ont en première apparence très peu de points communs. Toutefois, il existe entre eux des similitudes très fortes, illustrées sur la figure 1.3. Tout d'abord, comme la lectrice l'aura peut-être déjà remarqué, ceux-ci séparent dans chacun des systèmes concernés deux états : un état actif et un état arrêté. Dans le cas de la transition vers l'écoulement l'état actif correspond à un état coulant tandis que dans la transition de réversibilité il correspond à un état diffusant.

#### Transition de réversibilité



#### Transition vers l'écoulement

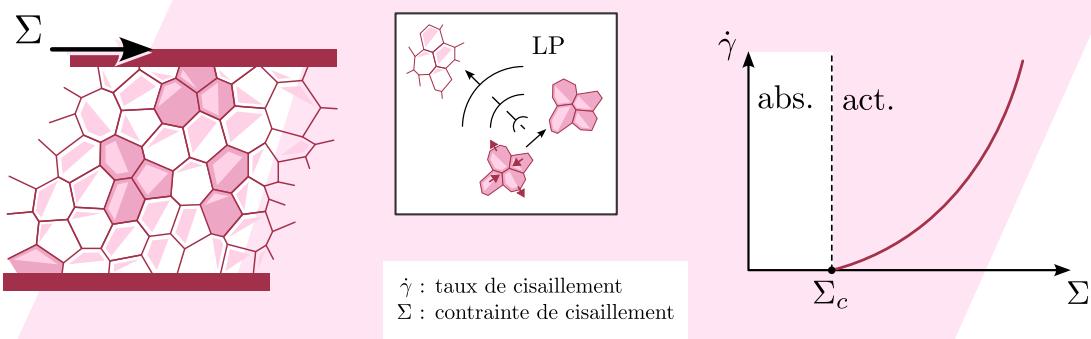


FIGURE 1.3 – Illustration schématique du parallèle existant entre la transition de réversibilité dans les suspensions cisaillées cycliquement et la transition vers l'écoulement des matériaux amorphes.

De plus, un autre point commun encore rendu non apparent est la présence de longue portée. En effet, si dans chacun de ces systèmes la phase active est représentée par des mouvements locaux (réarrangement plastiques ou interactions irréversibles de contact), il y a de fortes raisons de penser que ceux-ci affectent la dynamique globale via des interactions à longue portée. Dans le cas de la transition de réversibilité dans les suspensions, les particules sont immergés dans un fluide visqueux. Celui-ci est alors capable de propager l'irréversibilité locale à grande distance selon les lois de l'hydrodynamique, affectant de ce fait la dynamique des particules n'interagissant pas directement avec les autres. Dans

le cas de la transition vers l'écoulement, les réarrangements plastique se font dans une matrice élastique. Cette situation largement étudiée montre que ces évènements locaux induisent des interactions à longue portée dans le matériau, susceptibles d'en induire d'autre à grande distance. Dans cette optique, la transition vers l'écoulement et la transition de réversibilité peuvent donc être toutes les deux comprises comme des transitions de phase absorbantes en présence d'interactions à longue portée.

Enfin, une dernière similarité frappante de ces systèmes vient de leur manière d'approcher la phase absorbante. D'une part, dans le cas de la transition vers l'écoulement, les expériences en laboratoire comme les modélisations numériques ont permis de caractériser l'évolution du taux de cisaillement avec la contrainte, montrant une évolution convexe de la courbe descriptive  $\dot{\gamma} = f(\Sigma)$ . D'autre part, dans le cas de la transition de réversibilité, une modélisation numérique simple faisant intervenir les interactions à longue portée a de la même façon montré une évolution convexe du coefficient de diffusion stroboscopique avec le paramètre de transition [14]. Cette observation se révèle alors très surprenante puisque, comme nous le montrerons dans la suite de ce chapitre, le cadre théorique évident associé à ces transitions avec interactions à longue portée ne permet pas d'expliquer une telle convexité, étrangère du domaine des phénomènes critiques.

Dans ce chapitre, nous proposons d'éclairer les similitudes entre ces deux phénomènes et cette confrontation théorique afin de pouvoir finalement la problématiser. Pour ce faire, nous commencerons par introduire la notion de transition de phase absorbante dans la théorie des phénomènes critiques. Nous décrirons ensuite la classe d'universalité de la percolation dirigée conservée, a priori la plus à même de décrire ces deux phénomènes. Puis, par sa généralisation à longue portée, nous montrerons en quoi la convexité observée dans ces deux transitions les exhortent de ce cadre. Enfin, nous soulignerons les ingrédients physiques précis qui suggèrent la compréhension de la spécificité de ces phénomènes via une approche commune.

## 1.2 Transitions de phases absorbantes

Dans cette section, nous présentons dans un premier temps la phénoménologie des phénomènes critiques à l'équilibre. La présentation des théories et des concepts sous-jacents à ces phénomènes largement étudiés nous permettra de mieux appréhender la seconde partie de cette section. Dans celle-ci, nous introduirons par analogie la notion de transition de phase absorbante et les spécificités qui lui sont associées.

### 1.2.1 Phénomènes critiques à l'équilibre

#### 1.2.1.1 Phénoménologie d'une transition de phase

La plupart des systèmes physiques existent sous plusieurs états possibles. Par exemple, nous connaissons l'eau, indispensable à la vie sur Terre, sous différentes formes. Elle peut se faire vapeur dans l'atmosphère, liquide dans les rivières ou bien encore solide sur les glaciers. Ces différents états possibles, appelés plus généralement phases du systèmes, présentent des domaines de stabilité qui dépendent de paramètres extérieurs. Par exemple,

dans le cas de l'eau, la phase stable dépend de la température et de la pression dans l'environnement considéré. En variant ces paramètres, il est possible de passer d'un domaine de stabilité à un autre, i.e. de passer d'une phase à une autre : c'est ce que l'on appelle une transition de phase.

Si dans nos esprits la notion de changement d'état s'attache spontanément aux changements structurels classiques de la matière (évaporation, fusion, ...), celle-ci recouvre en fait quelque chose de bien plus général. On pourra par exemple penser à la formation du diamant [15], la dénaturation de l'ADN [16] ou encore la transition superfluide de l'hélium [17]. Un autre exemple, pris en cas d'école, est la transition ferromagnétique-paramagnétique des métaux, qui sépare un état magnétique d'un état non magnétique du matériau en fonction de la température considérée [18]. De manière tout à fait générale, une transition de phase est définie comme une transformation abrupte amenant un système d'une phase à une autre sous la variation d'un paramètre de contrôle. En-dessous d'une certaine valeur du paramètre de contrôle, le système est dominé par l'une des phases, tandis qu'au-dessus de cette valeur, le système est dominé par l'autre phase.

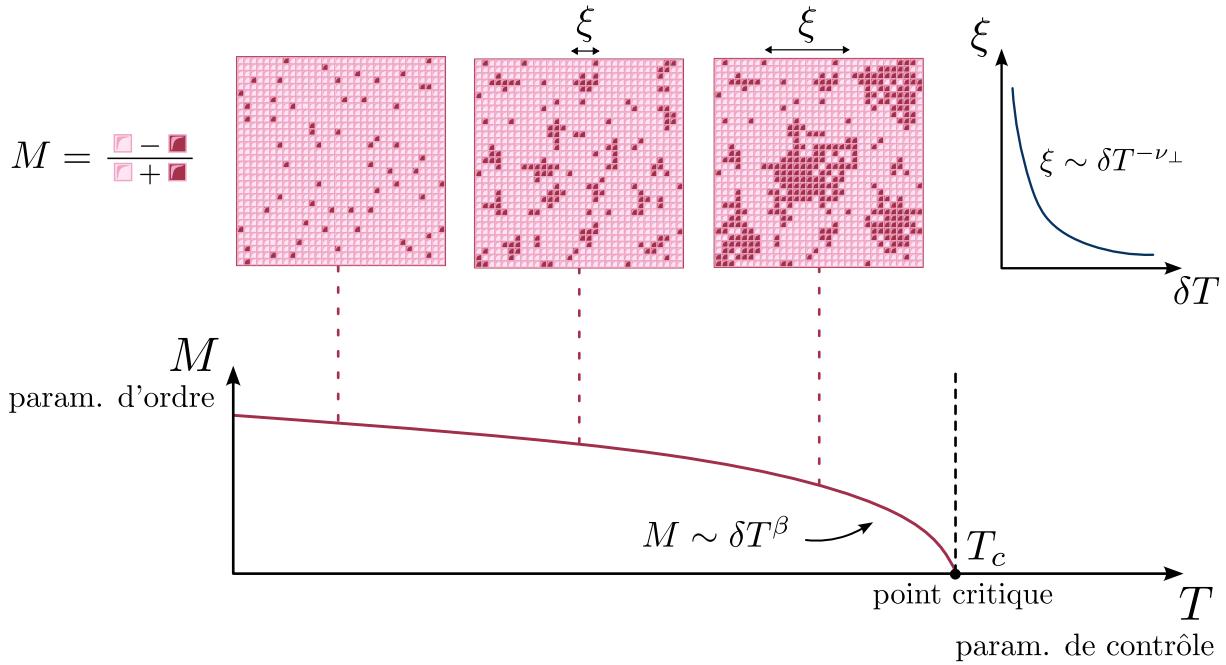


FIGURE 1.4 – Illustration de la phénoménologie générale d'une transition de phase via l'exemple de la transition ferromagnétique-paramagnétique

Pour conceptualiser le problème, il est d'usage de définir une grandeur, appelée paramètre d'ordre, qui prend des valeurs distinctement différentes dans chacune des phases. La transition se traduit alors par un changement abrupt du paramètre d'ordre autour de la valeur critique du paramètre de contrôle. Dans le cadre de la transition ferromagnétique-paramagnétique, le paramètre d'ordre du système est son aimantation  $M$  et le paramètre de contrôle est sa température  $T$ , dont la valeur critique est la température de Curie  $T_c$ . Lorsque le matériau est porté à une température  $T > T_c$ , la phase dominante est la phase paramagnétique, caractérisée par  $M = 0$ , et lorsque celui-ci est refroidi à  $T < T_c$  la

phase dominante est la phase ferromagnétique, caractérisée par  $M \neq 0$  (voir [figure 1.4](#)). Le domaine d'étude des phénomènes critiques consiste alors à comprendre l'évolution du système et des quantités le caractérisant proche de ce point de transition. Dans la suite de cette sous-section, pour plus de clarté, nous conserverons les notations associées à la transition ferromagnétique-paramagnétique pour développer les concepts associés aux phénomènes critiques.

### 1.2.1.2 Hypothèse de scaling

Afin d'opérer des changements macroscopiques aussi drastiques au cours d'une légère modification du paramètre de contrôle, les entités microscopiques constituant le système doivent coopérer largement proche de la transition. C'est en effet ce que l'on observe : à mesure que l'on s'approche de la transition, la longueur de corrélation  $\xi$  associée au système augmente, comme schématisé à la [figure 1.4](#). Au point de transition, aussi appelé point critique, celle-ci diverge.

En accord avec ces observations, l'hypothèse de scaling généralisée est une hypothèse fondatrice de l'étude des phénomènes critiques qui permet de comprendre leur phénoménologie [18]. Celle-ci repose sur le fait que, dans le régime critique (i.e. suffisamment proche de la transition), la longueur de corrélation est la seule échelle de longueur pertinente pour décrire le système. En d'autres termes, tous les détails microscopiques du système en-dessous de l'échelle de longueur représentée par  $\xi$  sont d'intérêt négligeable. De plus, cette hypothèse suppose que cette longueur de corrélation est une fonction homogène de la distance au point critique :

$$\xi = \lambda^{\nu_{\perp}} \tilde{\xi}(\lambda \delta T), \quad \delta T = \frac{T_c - T}{T_c}, \quad \lambda > 0 \quad (1.1)$$

Le propre d'une fonction homogène étant que l'[équation 1.1](#) est valide pour tout  $\lambda$ , en prenant  $\lambda = 1/\delta T$  nous obtenons :

$$\xi = \delta T^{-\nu_{\perp}} \tilde{\xi}(1) \quad (1.2)$$

Cela retranscrit alors bien le fait que la longueur de corrélation diverge algébriquement avec la distance au point critique.

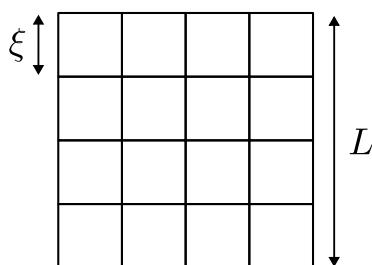


FIGURE 1.5 – Découpage schématique d'un système de dimension  $L^D$  en une collections de sous-systèmes de dimension  $\xi^D$

Cette hypothèse implique un résultat important. Considérons un système de taille  $L^D$  que l'on subdivise en un ensemble de sous-compartiments de dimension  $\xi^D$ , comme présenté à la figure 1.5. Par définition de la longueur de corrélation, chacun de ces sous-compartiments peut être considéré comme indépendant. Chacun de ceux-ci, au nombre de  $(\frac{L}{\xi})^D$  contribue à l'énergie libre  $f$  du système par la même quantité. En d'autres termes, la partie singulière (associée à la transition) de  $f$  se comporte comme  $\xi^{-D}$ . C'est donc aussi une fonction homogène :

$$f = \lambda^{y_f} \tilde{f}(\lambda\delta T), \quad \lambda > 0 \quad (1.3)$$

et dont l'exposants caractéristique est relié au précédent par la relation  $y_f = -\nu_\perp D$ , communément appelée relation d'échelle.

La force de la théorie d'échelle vient alors du point suivant. Les dérivées ou transformées de Legendre d'une fonction homogène sont elles-mêmes des fonctions homogènes. Par ailleurs, celles de l'énergie libre (ou autre potentiel thermodynamique considéré en fonction du système) correspondent à différentes grandeurs physique d'intérêt. Cela signifie donc que sous cette hypothèse, dans le régime critique, la plupart des quantités physiques décrivant le système sont des fonctions homogènes dont les exposants associés sont liés par des lois d'échelles. Proche du point critique, les observables telles que  $\xi$  évoluent donc sans échelle caractéristique, selon des lois de puissances définissant ce qu'on appelle des exposants critiques. Notamment, via le temps de corrélation  $\tau$  et la valeur moyenne du paramètre d'ordre  $\langle M \rangle$ , nous définissons, en plus de  $\nu_\perp$ , les exposants critiques  $\beta$  et  $\nu_\parallel$  selon :

$$\begin{aligned} \langle M \rangle &= \lambda^{-\beta} \tilde{M}(\lambda\delta T) \Rightarrow \langle M \rangle \sim \delta T^\beta \\ \tau &= \lambda^{\nu_\parallel} \tilde{\tau}(\lambda\delta T) \Rightarrow \tau \sim \delta T^{-\nu_\parallel} \end{aligned} \quad (1.4)$$

L'hypothèse de scaling ainsi que les relations d'échelle qui en découlent ont été testés expérimentalement de manière exhaustive. Ces validations a posteriori ont alors érigé la théorie d'échelle comme le pilier de l'étude des phénomènes critiques, ouvrant la porte à un nouveau domaine d'étude de la physique.

### 1.2.1.3 Universalité

#### Principe

Un aspect essentiel de ce cadre d'étude est de considérer que les détails microscopiques des systèmes situés à des échelles inférieures à  $\xi$  ne sont pas pertinents pour en décrire la physique. Dans le régime critique où la longueur de corrélation diverge, ceci motive le fait que le comportement d'une transition peut être déterminé simplement par des considérations globales : c'est le principe d'universalité. L'étude des transitions de phase à l'équilibre a renforcé ce principe d'universalité en montrant que des transitions de natures physiques complètement différentes partageaient le même comportement critique. Il a alors été possible d'élaborer une catégorisation des phénomènes critiques, les regroupant en classes d'universalité définies uniquement par deux aspects simples : la dimension de l'espace

et les symétries du paramètre d'ordre [18]. Par exemple, la transition ferromagnétique-paramagnétique des matériaux avec un seul axe privilégié d'aimantation appartient à la classe d'universalité d'Ising au même titre que la transition liquide-gaz ou celle de démixtion des liquides [19]. En pratique, cette catégorisation passe par la mesure des exposants critiques, dont chaque ensemble caractérise une unique classe d'universalité.

### Théorie continue

Le fait qu'un comportement critique dépende uniquement de critères très généraux motive l'étude de ces phénomènes via des modélisations continues simples sous-forme d'équations de champ. Par exemple, celle associée à la classe d'Ising peut être modélisée par l'équation de champ de Langevin suivante :

$$\partial_t \phi(\mathbf{r}, t) = -r\phi(\mathbf{r}, t) + u\phi^3(\mathbf{r}, t) + \kappa\Delta\phi(\mathbf{r}, t) + \sigma\eta(\mathbf{r}, t) \quad (1.5)$$

avec  $\eta$  représentant les fluctuations par un bruit gaussien défini selon :

$$\langle \eta(\mathbf{r}, t) \rangle = 0, \quad \langle \eta(\mathbf{r}, t)\eta(\mathbf{r}', t') \rangle = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')\delta(t - t') \quad (1.6)$$

$\phi$  représentant une version gros grains locale du paramètre d'ordre et  $r$  la distance au point critique. Cette théorie continue est connue sous le nom de théorie  $\phi^4$  [18].

Dans la limite où les fluctuations de la dynamique sont négligeables, la criticalité décrite par cette équation peut être appréhendée dans son approximation de champ moyen :

$$\partial_t \phi = -r\phi + u\phi^3 \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \phi = \left(\frac{r}{u}\right)^{\frac{1}{2}} \quad (1.7)$$

menant donc à  $\beta^{\text{CM}} = \frac{1}{2}$ . Cependant cette approximation n'est valable que dans certains cas.

Dans l'idée que les détails microscopiques ne sont pas pertinents dans le régime critique, nous pouvons redimensionner les distances dans cette équation selon  $\mathbf{r} \rightarrow b\mathbf{r}$  avec  $b > 1$ . Sous cette transformation, d'après la théorie d'échelle, les différentes quantités de l'équation sont transformées selon :

$$\mathbf{r} \rightarrow b\mathbf{r}, \quad t \rightarrow b^{\nu_{\parallel}/\nu_{\perp}} t, \quad \phi \rightarrow b^{-\beta/\nu_{\perp}} \phi \quad (1.8)$$

si bien que ce redimensionnement revient à obtenir une équation équivalente à l'équation 1.6 avec un redimensionnement des constantes selon :

$$r \rightarrow b^{\nu_{\parallel}/\nu_{\perp}} r, \quad u \rightarrow b^{\nu_{\parallel}/\nu_{\perp} - 2\beta/\nu_{\perp}} u, \quad \kappa \rightarrow b^{\nu_{\parallel}/\nu_{\perp} - 2} \kappa, \quad \sigma \rightarrow b^{\nu_{\parallel}/2\nu_{\perp} + \beta/\nu_{\perp} - D/2} \sigma \quad (1.9)$$

A grande échelle ( $b \rightarrow \infty$ ), les fluctuations sont donc négligeables seulement pour  $D > (2\beta + \nu_{\parallel})/\nu_{\perp}$ . Par ailleurs, dans ce cas champ moyen, l'invariance d'échelle du système au point critique ( $r = 0$ ) impose la valeur des exposants  $\nu_{\parallel}^{\text{CM}} = 1$  et  $\nu_{\perp}^{\text{CM}} = \frac{1}{2}$ . Ce raisonnement définit donc une dimension critique supérieure du système  $D_c = 4$  au-delà de laquelle la criticalité décrite par l'équation 1.6 est triviale.

En-dessous de cette dimensions critique ( $D < D_c$ ), on ne peut plus négliger les fluctuations dans le système : c'est là que toute la complexité des comportements critiques entre en jeu. Pour étudier le comportement de la théorie de champ à grande échelle dans ce cas, des outils théoriques ont été mis en place. Ceux-ci font intervenir le formalisme associé au groupe de renormalisation. Grâce à ces techniques, il est possible de prédire les valeurs des exposants critiques associés à une théorie de champ à basse dimension, et donc prédire la criticalité de toute une catégorie de systèmes.

En conclusion, les phénomènes critiques à l'équilibre sont caractérisés par des évolutions algébriques des quantités physiques. Ces évolutions sont caractérisées par différents exposants critiques, reliés par des relations d'échelle. Différentes transitions de phase peuvent être regroupées en une classe d'universalité, décrite par un ensemble de valeurs des exposants critiques. Pour étudier l'universalité de ces classes, il est d'usage de faire appel aux théorie de champ continues associées, dont la résolution fait intervenir des outils complexes en-dessous de la dimension critique supérieure.

## 1.2.2 Transitions de phase absorbantes

Après avoir rappelé les bases de la théorie des phénomènes critiques à l'équilibre, nous proposons dans cette sous-section de décrire la phénoménologie propre aux transitions de phase absorbantes qui concernent plus spécifiquement notre étude. Pour ce faire, nous en proposerons une définition, que nous compléterons ensuite par quelques exemples. Puis, nous présenterons les exposants critiques pertinents pour caractériser ces transitions et la classe d'universalité principale associée.

### 1.2.2.1 Définition

Les transitions de phase absorbantes prennent place dans des systèmes présentant des états absorbants. Ceux-ci correspondent à un état accessible à la dynamique du système mais dans lequel celle-ci se retrouve piégée à jamais [19]. Dans une telle transition, le paramètre de contrôle que l'on notera d'abord génériquement  $p$  permet de séparer une phase active d'une phase absorbée par sa valeur critique  $p_c$ . Dans la phase active  $p > p_c$ , la dynamique du système à temps long est caractérisée par une valeur moyenne finie du paramètre d'ordre  $A$ , appelé génériquement activité. Dans la phase absorbante  $p < p_c$ , le système tombe dans un état absorbant au bout d'un temps fini, caractérisé par une activité nulle  $A = 0$ .

La notion d'activité dans ce cadre ne tisse pas de liens avec celle de l'activité dans le contexte de la matière active. Dans une transition de phase absorbante, l'activité correspond plutôt à un état des agents microscopiques qui peut prendre différente forme selon les systèmes spécifiques considérés.

### 1.2.2.2 Exemples

Sous le point de vue adéquat, de nombreux systèmes peuvent être compris comme des transitions de phase absorbantes. Un exemple incontournable à l'aune de notre époque est celui des épidémies, dans lequel un agent pathogène (virus, bactérie, ...) se propage

au sein d'une population [19–21]. Au premier ordre, on peut modéliser ce système comme à la figure 1.6. La population peut alors contenir deux types d'individus : des individus malades, susceptibles de transmettre la maladie à un taux  $\lambda$  et de s'en rétablir à un taux  $\gamma$ , et des individus sains, susceptibles d'être infectés. En fonction de la transmissibilité du virus  $\lambda$  et de la capacité de guérison de la population  $\gamma$ , le système peut connaître deux sorts à temps longs : pour  $\lambda/\gamma$  suffisamment grand, l'épidémie persistera à temps longs alors que pour  $\lambda/\gamma$  suffisamment petit, tous les individus seront sains. Un tel état est alors un état absorbant puisque dès lors que l'agent pathogène n'a plus de vecteur, il ne peut plus se propager. Dans ce système, on retrouve donc une transition de phase absorbante de paramètre de contrôle  $p = \lambda/\gamma$  et dont l'activité correspond à la proportion de personnes infectées dans la population.

Un autre exemple pouvant présenter une dynamique tout à fait similaire est celui des feux de forêt [22] (voir figure 1.6). De la même manière, nous pouvons modéliser ce système au premier ordre par une population d'arbres existants sous deux états possibles : des arbres en feu susceptibles de provoquer l'embrasement d'autres à un taux  $\lambda$  et de s'éteindre à un taux  $\gamma$ , et des arbres sains, seulement susceptibles de prendre feu. Ici encore, selon la valeur du paramètre  $p = \lambda/\gamma$ , l'état du système à temps long peut prendre deux formes : incendié pour  $p > p_c$  et éteint pour  $p < p_c$ . La forêt sans aucun arbre en feu correspond alors à un état absorbant du système, puisqu'une fois dans cet état, le feu ne peut plus se propager. Dans ce système l'activité correspond alors à la proportion d'arbres en feu dans la forêt.

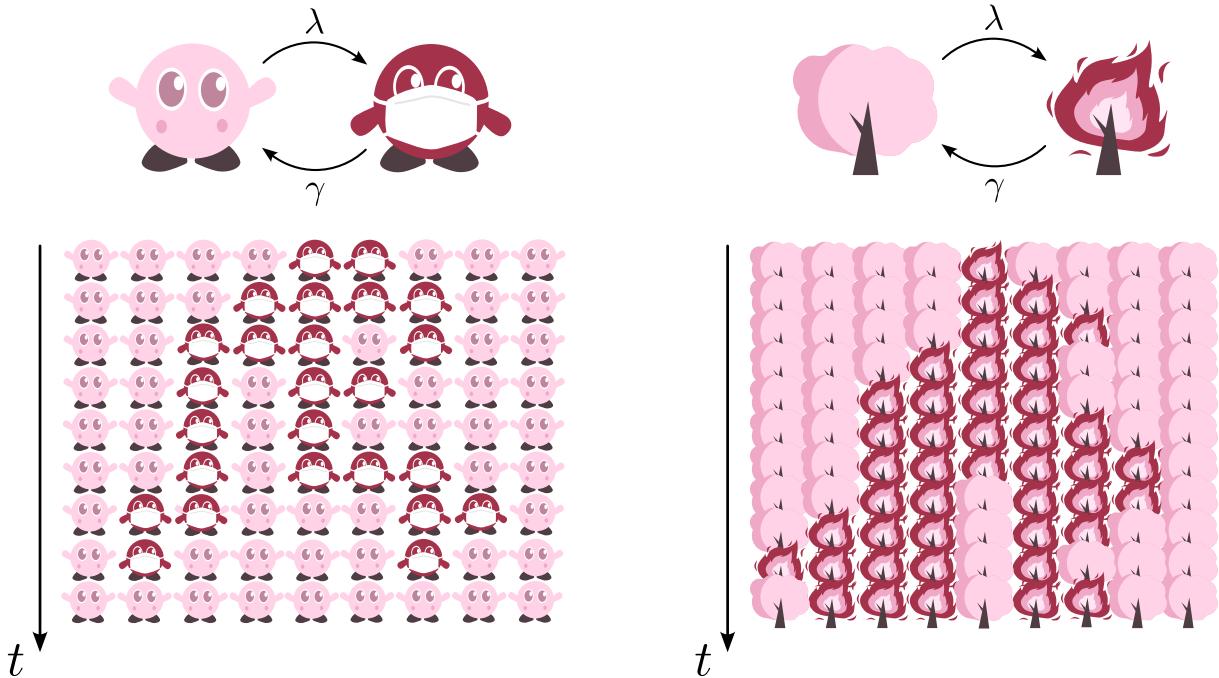


FIGURE 1.6 – Exemples de phénomènes présentant des transitions de phase absorbantes : la propagation des épidémies et des feux de forêts.

De manière générale, de nombreux systèmes peuvent être compris comme des transitions de phase absorbantes s'ils sont observés sous le bon angle. Les ingrédients principaux

nécessaires à cette dynamique sont une activité microscopique susceptible de se propager comme de s'atténuer et l'existence d'un état bloqué de la dynamique globale.

### 1.2.2.3 Exposants critiques

Les transitions de phase absorbantes sont des phénomènes hautement hors d'équilibre puisque la présence d'états absorbants implique, par définition, la violation du principe de bilan détaillé. Toutefois, il se trouve que la phénoménologie observée de ces transitions ressemble fortement à celle de leurs homologues d'équilibre. Notamment, nous y retrouvons la notion d'homogénéité, d'exposants critiques et d'universalité. Concernant les exposants critiques associés aux transitions de phase absorbantes, ceux-ci peuvent être catégorisés en deux types : ceux reliés à l'état stationnaire de l'activité dans le système, que l'on appellera statiques et ceux reliés à l'état transitoire, que l'on appellera dynamiques.

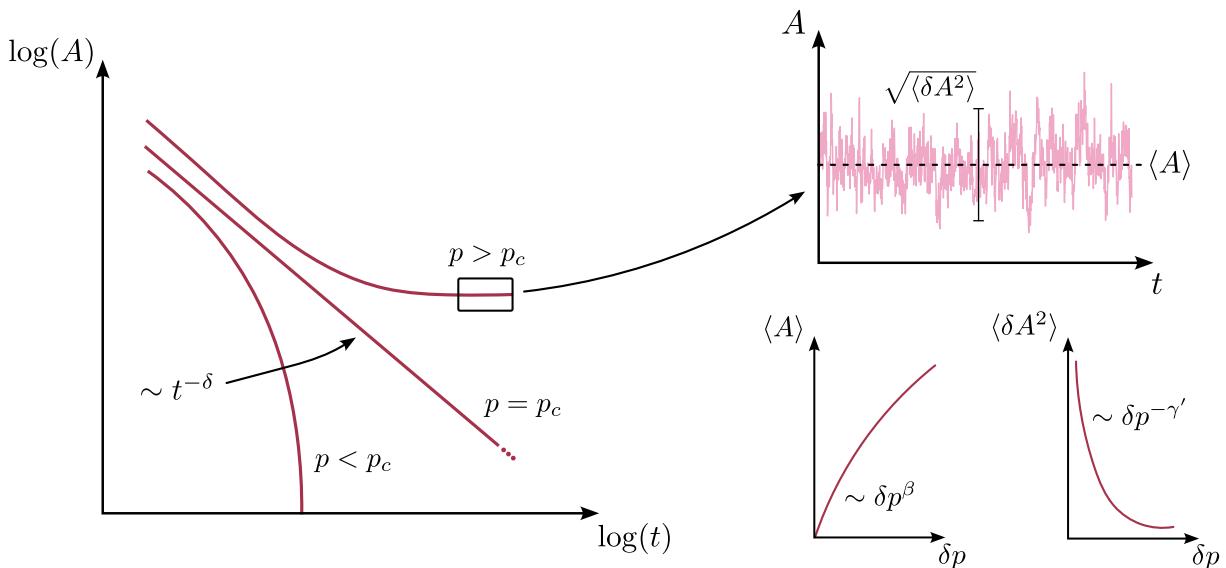


FIGURE 1.7 – Phénoménologie et définition des différents exposants critiques pertinents dans le cadre des transitions de phase absorbantes.

Du côté des exposants statiques, nous retrouvons naturellement l'exposant  $\beta$  reliant la valeur moyenne de l'activité dans l'état stationnaire à la distance au point critique et l'exposant  $\nu_\perp$  caractérisant la divergence de la longueur de corrélation  $\xi$  :

$$\langle A \rangle \sim \delta p^\beta, \quad \xi \sim \delta p^{-\nu_\perp}, \quad \delta p = \frac{p - p_c}{p_c} \quad (1.10)$$

De plus, nous nous intéresserons aussi dans ce travail à l'évolution des fluctuations du paramètre d'ordre dans l'état stationnaire. Pour un système de taille  $L^D$ , nous les caractérisons via la variance  $\langle \delta A^2 \rangle = L^D \times (\langle A^2 \rangle - \langle A \rangle^2)$  dont l'évolution est alors dictée par l'exposant  $\gamma'$  :

$$\langle \delta A^2 \rangle \sim \delta p^{-\gamma'} \quad (1.11)$$

Le signe apposé à la définition de cet exposant vient du fait qu'en général les fluctuations du paramètre d'ordre divergent à l'approche du point critique, signe d'une dynamique de

plus en plus corrélée. En-dessous de la dimensions critique  $D_c$ , les exposants  $\beta$ ,  $\gamma'$  et  $\nu_\perp$  sont liés par une relation d'échelle :

$$2\beta + \gamma' = \nu_\perp D \quad (1.12)$$

appelée relation d'hyperscaling. Nous ferons appel à cette relation d'échelle à plusieurs reprises dans les différents chapitres de ce manuscrit.

Du point de vue dynamique, il existe deux façon principales de caractériser une transition de phase absorbante [19]. La première est de partir d'un état initial avec une zone localisée d'activité, comme c'est le cas sur la [figure 1.6](#), et d'étudier la propagation de l'activité dans le système. Une autre possibilité, que nous favoriserons par la suite, est de caractériser la relaxation du système à partir d'un état aléatoire. Dans ce cas, [proche du point critique, la valeur instantanée de l'activité dans le système décroît à temps longs vers sa valeur stationnaire de manière algébrique](#), définissant l'exposant dynamique  $\delta$  :

$$A(t) \sim t^{-\delta} \quad (1.13)$$

Les exposants  $\beta$ ,  $\gamma'$  et  $\delta$  ainsi définis et illustrés sur la [figure 1.7](#) permettent de caractériser une transition de phase absorbante sous différents aspects et de manière unique.

#### 1.2.2.4 Classes d'universalité

Comme à l'équilibre, un grand nombre de transitions de phase absorbantes se regroupent sous forme de classes d'universalité représentées par des valeurs communes des exposants critiques. Dans ce cas hors d'équilibre, la classe d'universalité la plus importante, de manière analogue à la classe d'Ising, est celle de la percolation dirigée (DP) [19, 20].

Sa dénomination vient de la transition géométrique bien connue qui la représente. Dans le cas de la transition de percolation isotrope, rappelée à la [figure 1.8-\(a\)](#), deux sites voisins d'un réseau de  $D$  dimensions sont reliés avec une probabilité  $p$ . Une valeur critique  $p_c$  de cette probabilité sépare alors statistiquement deux états du système : pour  $p < p_c$  les clusters formés par les liens sont de taille finie tandis que pour  $p > p_c$  ceux-ci s'étendent dans tout le système : on dit que le [système percole](#)<sup>1</sup>. La percolation dirigée est représentée par le même phénomène, simplement dans ce cas les liaisons entre sites ne peuvent se faire que dans une direction privilégiée (voir [figure 1.8-\(a\)](#)). Dans ce cas, les issues possibles en fonction de la valeur du paramètre  $p$  sont représentées graphiquement en 2D sur la [figure 1.8-\(b\)](#). Nous pouvons alors remarquer de fortes similarités entre la [figure 1.8-\(b\)](#) et la [figure 1.6](#). En fait, les processus absorbants simples présentés précédemment correspondent directement à un phénomène de percolation dirigée, mais dont le temps équivaut à une dimension, soit en  $D + 1$  dimensions. Une valeur finie de l'activité à temps longs correspond alors à la percolation du système alors que la tombée dans un état absorbant représente la phase non percolante. Cette équivalence fait que tous ces systèmes sont caractérisés par le même comportement critique : celui de la classe DP.

1. C'est un peu dit bizarrement mais c'était pour pas tout développer

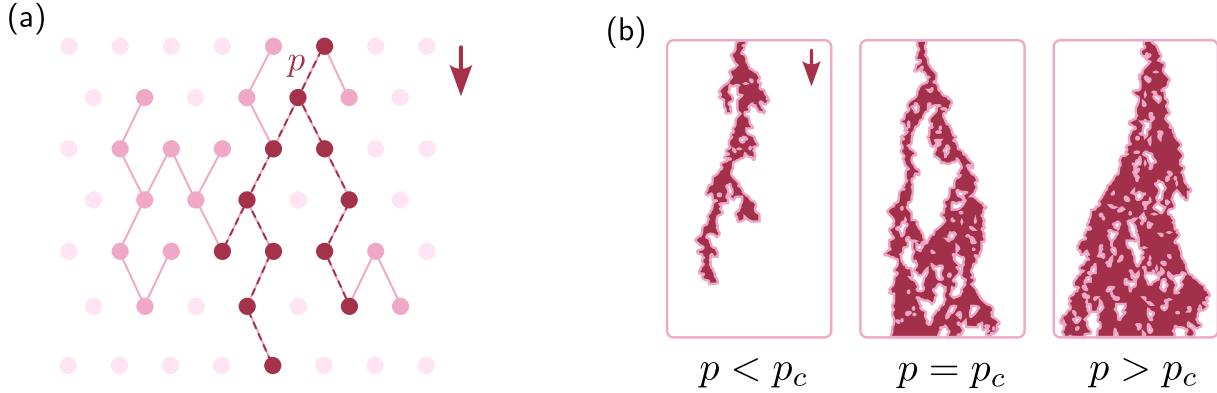


FIGURE 1.8 – Transition de percolation et de percolation dirigée en 2D. (a) règles associées à la percolation isotrope (lien roses) et à la percolation dirigée (liens rouges) dont la direction privilégiées est donnée par la flèche. (b) états du système en fonction de la valeur du paramètre de liaison  $p$ . Pour  $p \geq p_c$  le système percole.

Beaucoup d'autres systèmes avec des dynamiques plus complexes ont été caractérisés comme appartenant à la classe DP. Cette ubiquité a motivé une conjecture simple d'appartenance formulée par Janssen et Grassberger [23, 24] : les systèmes présentant une transition de phase absorbante continue vers un unique état absorbant, faisant intervenir des interactions à courte portée et aucune symétrie particulière, appartiennent à la classe DP.

D'un point de vue des processus plus abstraits de réaction-diffusion, les modèles appartenant à la classe DP peuvent être modélisés par deux processus, un de création et un d'annihilation :

$$A \xrightarrow{\lambda} 2A, \quad A \xrightarrow{\gamma} \emptyset \quad (1.14)$$

avec  $A$  une espèce représentant les agents actifs, diffusant avec un coefficient de diffusion  $D_A$ . Via cette approche il est possible d'associer, comme pour la classe d'Ising, une théorie de champ à la classe DP :

$$\partial_t A(\mathbf{r}, t) = rA(\mathbf{r}, t) - uA^2(\mathbf{r}, t) + \kappa\Delta A(\mathbf{r}, t) + \sigma\sqrt{A(\mathbf{r}, t)}\eta(\mathbf{r}, t) \quad (1.15)$$

avec la particularité de faire intervenir un bruit multiplicatif (i.e. dépendant de  $A$ ) qui permet de préserver l'existence d'une état absorbant (pour  $A = 0$ , il n'y a plus de fluctuations). Par une approche d'échelle identique à celle présentée dans le cadre de la théorie de champ de la classe d'Ising, il est possible de déterminer la valeur champ moyen des exposants critiques en-dessous de la dimension critique supérieure  $D_c = 4$ . Celles-ci sont reportées dans le tableau 1.1. Via des mesures numériques sur des modèles, ou des approches analytiques sur la théorie de champ, la classe DP a aussi été caractérisée précisément en dimension finie. Notamment, nous reportons leur valeur des exposants critiques associés en 2D dans le tableau 1.1.

Si DP est la classe la plus répandue et la plus caractérisée aussi bien numériquement qu'analytiquement, il existe d'autres classes, cousins de cette première, correspondant à

Classe	$\beta$	$\gamma'$	$\delta$	$\nu_\perp$
DP (en 2D)	0.58	0.30	0.45	0.73
CDP (en 2D)	0.64	0.37	0.42	0.80
DP/CDP champ moyen	1	0	1	0.5

TABLE 1.1 – Valeurs des exposants critiques associés aux classe d'universalité DP et CDP, en 2D et en champ moyen [19]

l'ajout d'ingrédients supplémentaires dans les modèles. Notamment, celle d'intérêt pour ce travail est celle de la percolation dirigée conservée (CDP), puisqu'elle représente une dynamique très proche de celles mises en place dans la transition de réversibilité et dans la transition vers l'écoulement.

## 1.3 Percolation dirigée conservée

Dans cette section, nous présentons la classe d'universalité CDP de manière exhaustive puisque, comme nous le verrons, elle représente un premier cadre de compréhension des transition de réversibilité et d'écoulement. Pour ce faire, nous en donnerons d'abord les conditions d'appartenance et les modèles théoriques qu'elle représente. Ensuite, nous introduirons la transition de depinning comme représentante incontournable de cette classe en présentant son principe, ses réalisations physiques, et la riche phénoménologie qui lui est associée. Par correspondance, nous montrerons alors comment la physique du depinning se retrouve dans les autres modèles théoriques de type CDP afin de montrer toute la complexité présente dans cette classe d'universalité.

### 1.3.1 Conditions d'appartenance

La classe CDP se démarque de la classe DP par la présence d'un couplage de la dynamique de l'activité à une quantité conservée et d'un nombre infini d'états absorbants. À la façon de la conjecture proposée dans le cas de la classe DP, Rossi et al. [25] en ont définie une dans le cadre de la classe CDP : tout système stochastique présentant un nombre infini d'états absorbants dans lequel l'activité est couplée à un champ conservée



-diffusif appartient à la classe CDP.

Pour comprendre les éléments de cette distinction, il est plus simple de passer directement par la présentation de modèles appartenant à cette classe d'universalité.

### 1.3.2 Modèles théoriques

#### 1.3.2.1 Modèle Manna

Le modèle Manna [26] est un modèle emblématique de la classe CDP, si bien qu'il lui en donne parfois le nom (classe d'universalité Manna) [19]. Dans ce modèle,  $N$  agents sont disposés sur  $L^D$  sites d'un réseau  $D$ -dimensionnel, chacun de ces sites pouvant accueillir un nombre arbitraire  $n$  d'agents. Historiquement, ces agents peuvent représenter des grains de sable ou des particules, autant que des paquets d'énergie. La règle dynamique d'un pas

de temps à l'autre de l'évolution est alors la suivante : chaque site du réseau accueillant plus de  $m$  agents les redistribue aléatoirement aux sites voisins (voir figure 1.9). Ces sites redistribuant la masse qu'ils supportent sont considérés comme actifs.

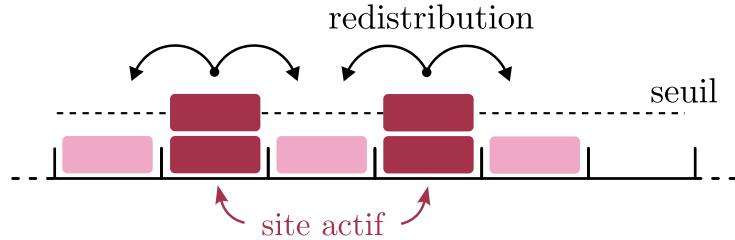


FIGURE 1.9 – Représentation schématique de la dynamique du modèle Manna en 1D. Ici le seuil est fixé à  $m = 2$ .

Via cette redistribution, les sites sur lesquels a été redistribuée la masse sont susceptibles de dépasser le seuil local  $m$  et de devenir actifs à leur tour, menant à une propagation de l'activité dans le système. Ce système présente alors une transition de phase absorbante bien étudiée, dont la densité d'agents  $\phi = N/L^D$  est le paramètre de contrôle et dont l'activité  $A$  correspond à la proportion de sites actifs du réseau. Pour  $\phi > \phi_c$ , le système évolue d'un pas de temps à l'autre à travers des configurations avec toujours un excès de particules sur certains sites et donc des redistributions de masse ( $A > 0$ ). Cependant, pour  $\phi < \phi_c$ , le système finit par tomber à temps longs dans un état où tous les sites sont inactifs et donc d'activité nulle  $A = 0$ . Un tel état est un état absorbant puisque dès lors qu'aucune redistribution n'a lieu, aucun site ne peut devenir actif.

Dans les modèles épidémiques et de feux de forêts présentés précédemment, il existe **un unique état absorbant** (toute la population est guérie ou toute la forêt est éteinte). Dans le modèle Manna, il en existe plusieurs. En effet, tout état où tous les sites vérifient  $n < m$  sont des états absorbants de la dynamique. Dans la limite thermodynamique  $L \rightarrow \infty$ , il y en a une infinité. Cela remplit donc la première condition de la conjecture de Rossi et al. [25]. Par ailleurs, la dynamique d'activité des sites du réseau est couplée à la dynamique des  $N$  particules, dont le nombre est conservé à chaque instant. Ces  $N$  particules constituent un champ de densité  $\rho(\mathbf{r}, t)$  de **divergence nulle** (i.e. de **valeur intégrale constante**) et diffusant uniquement sous l'action de l'activité (donc dit **non-diffusif**). Cela remplit donc la seconde condition de la conjecture, faisant du modèle Manna un représentant de la classe CDP.

### 1.3.2.2 Random Organization model

Un second modèle respectant la conjecture de Rossi et al. [25] et appartenant à la classe CDP est le Random Organization Model (ROM) [6, 27]. Le ROM est très proche du modèle Manna dans son principe et sa dynamique, à la différence que celle-ci a lieu dans un espace continu.

Dans le cadre de ce modèle,  $N$  particules sphériques de diamètre  $D_p$  sont positionnées dans un espace de  $D$  dimensions et d'extension spatiale  $L$ . Chacune de ces  $N$  particules

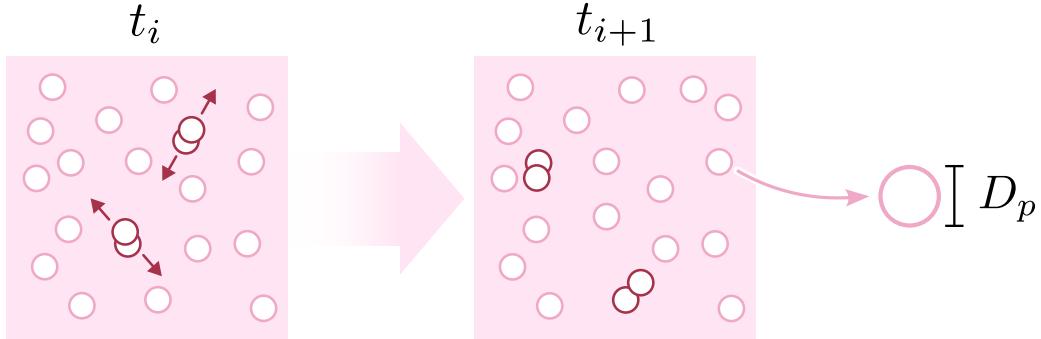


FIGURE 1.10 – Représentation schématique de la dynamique du ROM en 2D.

peut alors prendre deux états à chaque pas de temps : si la particule se recouvre avec une autre particule elle est active, sinon elle est passive. Lorsqu'une particule est active, celle-ci est soumise à un déplacement d'amplitude aléatoire, modifiant sa position dans l'espace continu. Ce déplacement représente alors la possibilité d'un recouvrement avec une nouvelle particule, menant alors à une potentielle propagation de l'activité dans le système. Cette dynamique présente une transition de phase absorbante dont le paramètre d'ordre est la fraction volumique  $\phi$  de particules dans le système et dont l'activité  $A$  correspond à la proportion de particules actives. Pour  $\phi > \phi_c$ , le système traverse des configurations où il existe toujours au moins un recouvrement entre particules ( $A > 0$ ). Cependant, pour  $\phi < \phi_c$ , le système finit par tomber dans une configuration où toutes les particules sont suffisamment éloignées pour qu'aucune ne se recourent ( $A = 0$ ). Une telle configuration est un état absorbant puisque sans le déplacement d'une particule active, aucune particule passive ne peut le devenir.

Comme dans le cas du modèle Manna, le ROM possède un nombre infini d'états absorbants. En effet, chaque ensemble de position des particules  $\{\mathbf{r}_i\}_{i < N}$  vérifiant  $|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j| < D_p$  pour tout  $i \neq j$  est un état absorbant. Les positions étant continues, il y en a une infinité (et pas seulement dans la limite thermodynamique). Le ROM vérifie donc la première condition de la conjecture de Rossi et al. [25]. Par ailleurs, de la même manière que dans le modèle Manna, ce modèle fait intervenir la dynamique non-diffusive de  $N$  particules dont le nombre est conservé à chaque instant, vérifiant de ce fait la seconde condition de la conjecture. **La seule différence ici est que l'activité est aussi portée par les particules et non l'espace.** Ce modèle est donc aussi un représentant de la classe CDP.

Par définition d'une classe d'universalité le modèle Manna et le ROM sont donc caractérisés par la même théorie sous-jacente, associée à un ensemble cohérent d'exposants critiques.

### 1.3.3 Comportement critique

D'un point de vue des processus de réaction-diffusion, les modèles appartenant à la classe CDP peuvent être ramenés à un processus de deux espèces [28–30] (contrairement à la classe DP qui n'en fait intervenir qu'une) :



avec l'espèce  $A$  diffusant avec un coefficient de diffusion  $D_A$ . Dans le cas du ROM par exemple,  $A$  représente une particule active et  $B$  une particule passive. Ces deux processus conservent alors le nombre  $N = N_A + N_B$  de particules. Via ce formalisme, il est possible de définir une théorie de champ décrivant cette dynamique proche de celle de DP [31, 32] :

$$\begin{aligned} \partial_t A(\mathbf{r}, t) &= (\omega\rho(\mathbf{r}, t) - r)A(\mathbf{r}, t) - uA^2(\mathbf{r}, t) + \kappa\Delta A(\mathbf{r}, t) + \sigma\sqrt{A(\mathbf{r}, t)}\eta(\mathbf{r}, t) \\ \partial_t \rho(\mathbf{r}, t) &= \kappa\Delta A(\mathbf{r}, t) \end{aligned} \quad (1.17)$$

avec  $\rho(\mathbf{r}, t)$  le champ conservé.

Via une analyse d'échelle similaire au cas DP, il est possible de montrer que la classe CDP admet des exposants de champ moyen identiques en-dessous de la même dimension critique supérieure  $D_c = 4$  [19, 32]. Ainsi, en champ moyen, les classes DP et CDP sont équivalentes. Pour  $D < D_c$  cependant, les mesures numériques sur les différents modèles représentant la classe CDP ont permis de la séparer de son homologue DP. En 2D, la valeur des exposants déterminés pour cette classe est reportée dans le tableau 1.1.

Comme on peut le remarquer, les exposants critiques caractérisant les deux transitions sont en fait très similaires, avec un écart relatif de seulement quelques pourcents. Cette grande proximité a rendu compliquée la séparation de ces deux classes, qui a alors été un sujet de débats. Toutefois, les techniques numériques actuelles et des arguments analytiques basés sur les techniques du groupe de renormalisation permettent aujourd'hui d'affirmer que ces deux criticalités sont bien distinctes.

### 1.3.4 Classe CDP et transition de depinning

En dehors des modèles de particules comme le modèle Manna ou le ROM, la classe CDP possède une forte représentation, notamment en matière molle, via la transition de depinning. Dans cette sous-section, nous proposons de présenter succinctement la transition de depinning. Pour ce faire, nous en donnerons d'abord une image générale dans le cadre théorique de la des variétés élastiques. Cela nous permettra d'en décrire la phénoménologie associée, notamment via la rugosité de l'interface et la dynamique d'avalanches. Puis, nous présenterons deux exemples de systèmes de matière molle dans lesquels cette transition prend place. Enfin, nous ferons le parallèle entre transition de depinning et la classe CDP en expliquant l'équivalence récemment mise en évidence entre ces deux approches.

#### 1.3.4.1 Phénoménologie de la transition de depinning

##### Une transition de phase absorbante

Dans un cadre général, la transition de depinning concerne le mouvement d'une variété élastique de  $D$  dimensions dans un milieu désordonné de  $D+n$  dimensions [33]. Au cours de celui-ci, deux phénomènes entrent en jeu. D'une part, l'élasticité de la variété tend à rapprocher localement chacune de ses points. D'autres part, le milieu désordonné agit sur



chaque point de la variété en les piégeant localement, plus ou moins fortement. L'exemple le plus parlant est celui-ci d'une ligne élastique ( $D = 1$ ) se déplaçant sur une interface rugueuse ( $n = 1$ ), comme représenté à la figure 1.11.

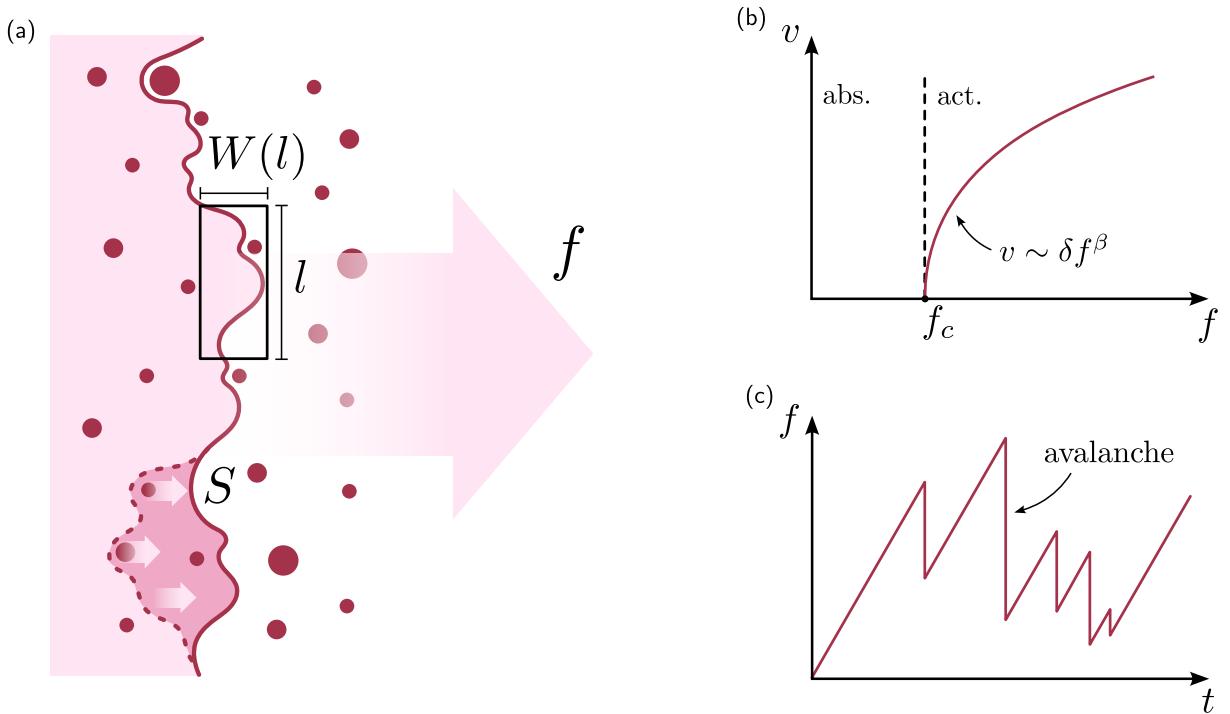


FIGURE 1.11 – (a) Représentation schématique de la dynamique à l'œuvre dans la transition de depinning en 1D, i.e. dans le cas d'une ligne élastique. Les disques rouges représentent le substrat désordonné. (b) Evolution de la vitesse moyenne de l'interface en fonction de la force appliquée (c) Dynamique d'avalanche dans le cadre d'un processus de forçage-dissipation. Chaque chute de force globale représente une avalanche dans la ligne élastique.

Sous l'action d'une force extérieure  $f$ , la ligne peut se dépiéger localement de l'interaction avec le substrat et se déplacer jusqu'au prochain point de piégeage. Ce déplacement modifie alors par élasticité la force à laquelle sont soumis les autres points de la ligne. Si l'addition de cette nouvelle force élastique et de la force extérieure est suffisamment grande, un autre point de la ligne peut se dépiéger et avancer. Cela constitue un mécanisme de propagation du dépiégeage. Il y a alors deux cas possibles en regard du comportement global de la ligne. Pour une force extérieure suffisamment grande  $f > f_c$ , le système se dépiège localement en permanence, amenant dans l'état stationnaire à une vitesse moyenne de déplacement de l'interface non-nulle  $v > 0$ . Cependant, pour une force extérieure trop faible  $f < f_c$ , le système finit par tomber dans un état totalement piégé : localement l'addition de la force extérieure et de la force élastique ne permet pas de contrer la force de piégeage exercée par le substrat.

Cette transition, entre un état mobile et un état piégé, est ce qu'on appelle la transition de depinning. Comme la lectrice l'aura sûrement déjà compris, cette transition peut être abordée comme une transition de phase absorbante dont le paramètre de contrôle est la force extérieure  $f$  et dont l'activité correspond à la vitesse de l'interface (localement,

un point de l'interface est actif s'il se déplace). L'état piégé correspond effectivement à un état absorbant puisque, en l'absence de fluctuations thermiques que l'on ne considérera pas dans ce travail, il est impossible qu'un point de la ligne se dépiège sans ajout supplémentaire de force.

Dans la suite de cette partie, nous présentons deux caractéristiques incontournables de la criticalité associée à la transition de depinning : la rugosité de l'interface et la dynamique d'avalanches.

## Rugosité

La compétition complexe entre force de rappel élastique qui tend à aplatiser l'interface et force de piégeage qui tend à déformer l'interface rend la structure de cette dernière non-triviale : proche de la transition, elle acquiert une certaine rugosité [33, 34]. La rugosité d'une interface est définie via la largeur  $W$  balayée par une portion d'extension  $l$  de cette interface (voir figure 1.11). Proche de la transition,  $W$  varie algébriquement avec  $l$  selon :

$$W(l) \sim l^\eta \quad (1.18)$$

$\eta$  définissant l'exposant de rugosité, un exposant universel au même titre qu'un autre exposant critique.

## Avalanches

En partant d'une configuration piégée de la ligne élastique et en augmentant lentement la force extérieure  $f$  tout en gardant  $f < f_c$ , la ligne finit par se dépiéger localement, et une portion de celle-ci se déplace avant de se retrouver bloquée à nouveau. Ce saut d'un état absorbant à un autre est ce qu'on appelle une avalanche. Ces objets sont définis par leur taille  $S$ , correspondant au déplacement moyen de la ligne lors de l'évènement, et leur durée  $T$ . Proche du point critique  $f = f_c$ , ces caractéristiques sont distribuées algébriquement selon [34–38] :

$$P_S(S) \sim S^{-\tau} g_S \left( \frac{S}{S_c} \right), \quad P_T(T) \sim T^{-\tau'} g_S \left( \frac{T}{T_c} \right) \quad (1.19)$$

avec  $g_S(x)$  et  $g_T(x)$  constantes pour  $x \ll 1$  et à décroissance rapide pour  $x > 1$ .  $\tau$  et  $\tau'$  définissant des exposants d'avalanche universels. Ces deux quantités peuvent être reliées à l'extension spatiale  $l$  de l'avalanche par deux nouveaux exposants critiques :

$$S \sim l^{d_f}, \quad T \sim l^z \quad (1.20)$$

avec  $d_f$  la dimension fractale des avalanches et  $z$  l'exposant dynamique. Ces deux exposants sont reliés à deux autres exposants présentés précédemment par les relations d'échelle :

$$d_f = D + \eta, \quad z = \frac{\nu_{||}}{\nu_{\perp}} \quad (1.21)$$

Pour  $f > f_c$ , la dynamique se prolonge indéfiniment et il est donc complexe de séparer les différentes avalanches. Pour analyser les avalanches au-dessus de la force critique il est alors d'usage de procéder d'une manière un peu différente : en plus du mécanisme de forçage, un mécanisme de dissipation est ajouté. Cette fois, en parallèle de l'augmentation constante de  $f$ , la force extérieure suit une diminution instantanément proportionnelle à l'activité globale dans le système [34, 39]. Lorsque l'augmentation de  $f$  est suffisamment lente, une séparation d'échelle se crée entre le forçage et la relaxation du système d'un état piégé à un autre. Les évènements de relaxation ainsi désignés sont associés aux avalanches au-dessus du seuil (voir figure 1.11-(c)). De la même façon, il est possible d'en caractériser la statistique via la taille et la durée des évènements. Sous ces conditions, le système évolue naturellement vers le point critique  $f = f_c$ . On parle alors de criticalité auto-organisée (SOC) [19, 40, 41]. Dans ce cadre, les cut-offs des distributions ne dépendent que de l'extension spatiale  $L$  du système selon :

$$S_c \sim L^{d_f}, \quad T_c \sim L^z \quad (1.22)$$

### 1.3.4.2 Réalisations expérimentales

Après avoir défini la transition de depinning dans le cadre général et les spécificités qui lui sont associées, nous illustrons ce phénomène par deux réalisations physiques dans le domaine de la matière molle.

#### Dynamique de mouillage à la ligne triple

En condition de mouillage non-total, lorsque l'on dépose une goutte sur un substrat solide, il se forme trois interfaces : une entre le liquide et le solide, une entre le solide et le gaz et une entre le liquide et le gaz. La ligne reliant ces trois interfaces est appelée ligne triple. Cette ligne est soumise à différentes forces : une force de pesanteur, favorisant l'étalement de la goutte, une force de tension de surface, favorisant la minimisation des interfaces, et, dans le cas d'un solide rugueux, non-homogène, une force d'attraction exercée par les asperités. On reconnaît là tous les ingrédients nécessaires au phénomène de la transition de depinning [39, 42, 43] : la pesanteur joue le rôle de force extérieure, la tension de surface la force de rappel élastique et l'interaction avec le solide la force de piégeage.

Dans cette optique, des expériences ont été mises en place pour reproduire le phénomène du depinning dans le cadre du mouillage [44, 45]. Par exemple, dans [44], un substrat solide de verre chromé est retiré d'un bain liquide d'un mélange eau-glycérol à vitesse constante. Ce protocole correspond alors au phénomène de depinning avec vitesse imposée de l'interface (et non la force extérieure). Via une capture optique du système, les auteurs ont pu analysé le mouvement de l'interface au cours du temps et sa structure, révélant une rugosité non-triviale, caractéristique du phénomène.

#### Propagation d'une fracture

La propagation des fractures dans les solides désordonnés représente un autre exemple de la transition de depinning. Dans l'exemple présenté à la figure 1.12-(b), un matériau

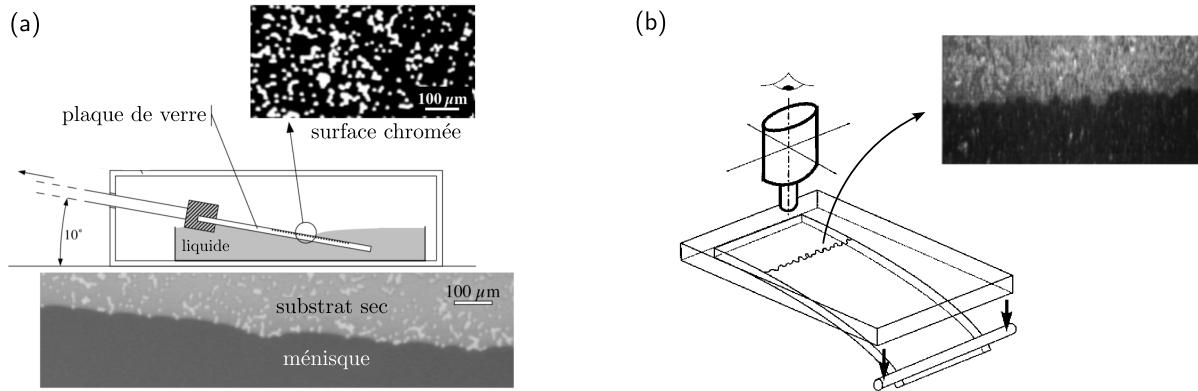


FIGURE 1.12 – Illustrations des dispositifs expérimentaux permettant l'observation de la transition de depinning dans des conditions réelles. (a) Expérience (et figure) tirée de [44] sur la propagation d'une ligne de mouillage. (b) Expérience (et figure) tirée de [46] sur la propagation d'un front de fracture solide dans un bloc de plexiglas.

est fracturé selon un mode I de fracture [39], i.e. en tirant une plaque perpendiculairement à la direction de propagation du front de fracture. Dans ce cadre, la limite entre les deux morceaux du solide peut être associée à une interface soumise au phénomène de depinning. On y retrouve en effet tous les ingrédients nécessaires à cette transition : une force de rappel élastique exercée via l'élasticité du solide en volume, une force extérieure via la traction de la plaque inférieure, et une force de piégeage aléatoire directement associée à la structure amorphe du solide.

Comme pour le phénomène de mouillage, des expériences réelles ont permis d'étudier la propagation de ce front [46–49]. Dans ce cas, l'analyse de la dynamique de l'interface et de sa rugosité a permis de confirmer sa compréhension dans le cadre de la théorie du depinning.

De nombreux autres phénomènes physiques peuvent être vus comme une transition de depinning. Cela rend l'universalité associée d'autant plus intéressante. De plus cette universalité est d'intérêt global dans le cadre de notre travail puisqu'elle correspond à celle de la classe CDP.

### 1.3.4.3 Mapping avec la classe CDP

L'intérêt de présenter la transition de depinning dans le cadre de notre travail est que toute la richesse de ce phénomène longuement étudié se retrouve dans les modèles appartenant à la classe CDP. En effet, nous montrons dans cette partie que la transition de depinning peut être directement mise en équivalence avec l'universalité de la percolation dirigée conservée.

La transition de depinning peut être modélisée simplement par une équation de mouvement continu sur la ligne. Dans le cas où l'élasticité de la ligne est à courte portée, celle-ci prend la forme suivante [33, 34] :

$$\partial_t u(x, t) = (\Delta - m^2)u(x, t) + F(x, u(x, t)) + f(x, t), \quad F(x, u) = -\partial_u V(x, u) \quad (1.23)$$

avec  $u$  la position de l'interface,  $f$  la force extérieure et  $F$  la force aléatoire de piégeage, dérivant d'un potentiel  $V$ . Dans la limite  $m = 0$ , celle-ci correspond à l'équation de quenched-Edward-Wilkinson [50].

Par cette formulation, il a été possible de faire une équivalence entre l'[équation 1.23](#) et l'[équation 1.17](#), associant alors directement la transition de depinning à la classe d'universalité CDP [32, 51]. Dans ce cadre, le champ d'activité  $A$  correspond naturellement au champ de vitesse de l'interface  $\partial_t u$ . La correspondance moins évidente que montre cette équivalence est celle entre la densité de particules  $\rho(x, t)$  dans la théorie CDP et la force de rappel élastique dans le cadre théorique du depinning :

$$\rho(x, t) - \rho_0 = \Delta u(x, t) \quad (1.24)$$

où  $\rho_0$  représente la densité moyenne de particules. Cette correspondance permet de faire un lien entre les deux mécanismes de propagation de l'activité. Dans un modèle de particules comme le modèle Manna, l'activité induit une redistribution de la masse (représentée par  $\rho(x, t)$ ), susceptible de générer de l'activité par surcharge de nouveaux sites. De manière équivalente, dans le cas du depinning, l'activité induit une redistribution de la force élastique susceptible de générer de l'activité par traction suffisante de nouveaux points de la ligne.

L'étude de la transition de depinning via sa théorie continue a été réalisée de manière extensive, numériquement mais aussi analytiquement via la mise en place d'outils du groupe de renormalisation fonctionnel. Cette équivalence permet alors de transposer tous les résultats obtenus à la théorie CDP, comme la valeur des exposants critiques associés. De plus, ce mapping permet de faire le lien entre les différentes propriétés de la transition de depinning et celles des modèles de particules, notamment celles de rugosité et de dynamique d'avalanches. Dans la suite de cette section, nous proposons d'expliquer l'équivalent de ces propriétés dans les modèles de particules.

### 1.3.5 Avalanches

De la même manière que dans la transition de depinning, il est possible d'observer des avalanches dans les modèles de particules appartenant à la classe CDP [52, 53]. La façon la plus courante de les observer est, comme dans le cas du depinning, d'ajouter au modèle une composante de forçage et de dissipation [19]. Prenons l'exemple du modèle Manna. Dans ce cas, le forçage correspond à l'augmentation progressive de la densité de particules, via l'ajout aléatoire à un taux  $\kappa$  de particules dans le système. La dissipation correspond, elle, à une disparition des particules sur les sites actifs à un taux  $\tau$ . Dans la limite  $\kappa/\tau \ll 1$ , la séparation d'échelle entre le forçage et la dissipation fait place à un phénomène d'avalanche : le système saute d'un état inactif à un autre, via des impulsions d'activité. Via ce processus, le système oscille naturellement autour de sa densité critique  $\phi_c$ .

De la même manière que dans la transition de depinning, ces avalanches peuvent être caractérisées via leur taille et leur durée et les exposants critiques  $\tau$ ,  $\tau'$ ,  $d_f$  et  $z$  qu'elles définissent. Ces deux transitions étant équivalentes, elles partagent les mêmes valeurs de ces exposants. Dans le cas des modèles de particules, la taille d'une avalanche correspond à la quantité d'activations générées lors de la relaxation  $S = \int_0^T dt A(t)$ .

Dans le cadre de la classe CDP, il est possible de relier les exposants d'avalanches aux exposants critiques dynamiques [19, 54], reliant sans équivoque la dynamique critique à densité imposée à celle sous le mécanisme de forçage-dissipation. Ainsi, l'étude des avalanches revient à étudier la dynamique de la transition d'un point de vue différent de celui présenté à la [sous-sous-section 1.2.2.3](#).

### 1.3.6 Hyperuniformité

La rugosité est une propriété propre aux interfaces. Il est donc difficile de voir comment son aspect critique se transpose aux modèles de particules. En fait, l'équivalence soulignée dans l'[équation 1.24](#) permet de relier cette propriété à celle de l'hyperuniformité. Nous commençons donc d'abord par introduire cette notion d'hyperuniformité.

La répartition d'un ensemble de points dans l'espace peut prendre différentes formes, associées à différents types de corrélations. Celle-ci peut aller de la structure cristalline infiniment corrélée au cas aléatoire totalement décorrélé. Une manière de quantifier cela est d'étudier comment évoluent les fluctuations de densité à différentes échelles du système.

Dans le cas d'une répartition poissonienne totalement décorrélée (voir [figure 1.13-\(b\)](#)), la variance  $\langle \delta n^2 \rangle$  du nombre de particule  $n$  dans un échantillon évolue proportionnellement à son extension spatiale  $l^D$ . Considérant des répartitions uniformes, on a par ailleurs  $\langle n \rangle \sim l^D$ . Ainsi dans ce cas décorrélé on a :

$$\langle \delta n^2 \rangle_l \sim \langle n \rangle_l \quad (1.25)$$

Dans le cas d'un ordre parfaitement cristallin (voir [figure 1.13-\(a\)](#)), la variance  $\langle \delta n^2 \rangle$  évolue proportionnellement au périmètre de la zone considérée, lui-même évoluant comme  $l^{D-1}$ . Ainsi, on aura :

$$\langle \delta n^2 \rangle_l \sim \langle n \rangle_l^{1-1/D} \quad (1.26)$$

Une évolution concave de  $\langle \delta n^2 \rangle$  avec  $\langle n \rangle$  indique la présence de corrélations de la répartition de la densité dans le système. Si le cas cristallin est le plus extrême, il existe un continuum de répartitions caractérisées par  $\langle \delta n^2 \rangle_l \sim \langle n \rangle_l^\sigma$ , indiquant la présence de corrélations intermédiaires. Dès lors que  $\langle \delta n^2 \rangle$  croît moins rapidement que  $\langle n \rangle$  (i.e.  $\sigma < 1$ ), on qualifie cette répartition d'hyperuniforme.

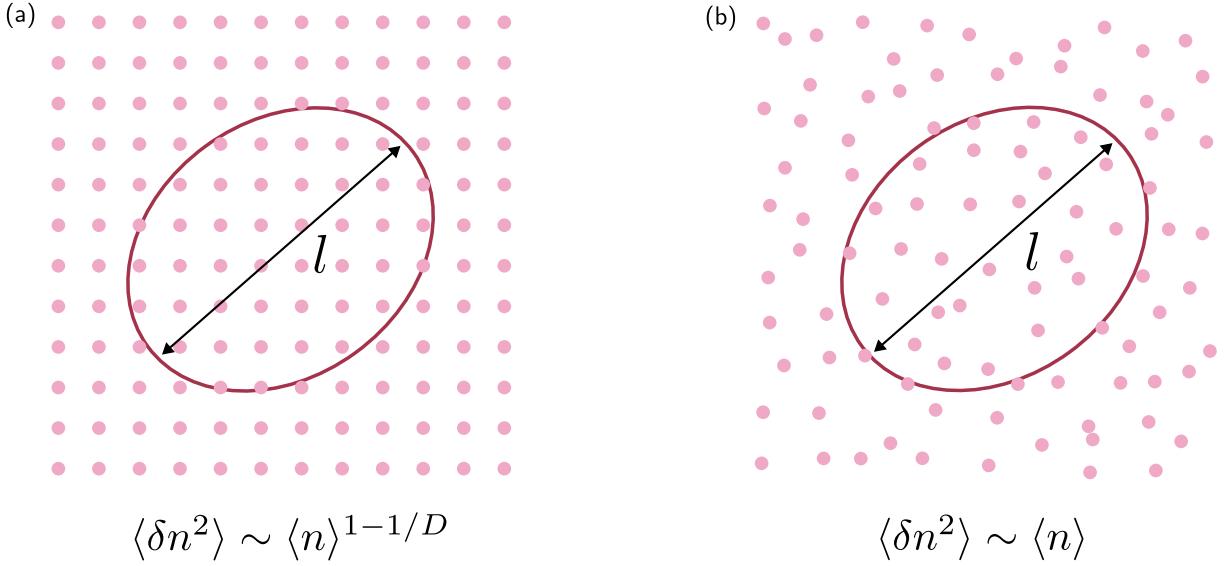


FIGURE 1.13 – Répartitions de masse dans le cas cristallin (a) et dans le cas poissonien (b), amenant à des lois d'échelle différentes entre  $\langle \delta n^2 \rangle$  et  $\langle n \rangle$

Proche de la transition, il a été montré que les systèmes de particules appartenant à la classe CDP possèdent une répartition hyperuniforme de la densité de masse. L'exposant  $\sigma$  ainsi définit correspond à un exposant permettant de caractériser la transition au même titre que n'importe quel autre exposant critique. Par exemple, dans le cas du ROM en 2D, il a été mesuré de manière consistante  $\sigma \approx 0.775$  [55–57].

Via l'équivalence depinning-CDP qui associe la densité de particules à une fonction de la forme de l'interface, il est possible de montrer que l'hyperuniformité dans les modèles de particules est équivalente à la rugosité dans la transition de depinning [51]. Notamment il existe une relation directe entre les exposants  $\sigma$  et  $\eta$  :

$$\sigma = 2 + \frac{2\eta - 4}{D} \quad (1.27)$$

Ainsi, la complexité de la forme de l'interface dans le cas du depinning se retrouve dans la complexité de la répartition de la masse dans les modèles de particules.

### 1.3.7 Conclusion de la section

En conclusion, la classe d'universalité CDP prétend à représenter tous les modèles présentant une transition de phase absorbante avec une infinité d'états absorbants et impliquant la dynamique d'un champ conservé. Cette classe tire deux représentations principales : les modèles de particules comme le modèle Manna ou le ROM et les modèles de depinning. Les phénomènes apparentés à cette classe présentent une phénoménologie riche, caractérisée par des propriétés hyperuniformes et une dynamique d'avalanche critique. Via l'étude combiné des modèles de particules et de la transition de depinning, le cadre CDP représente un objet d'étude bien balisé, regroupant prédictions théoriques et mesures numériques dans différentes dimensions. L'intérêt d'avoir présenté cette classe exhaustivement est qu'elle présente en fait un cadre de description adéquat au premier ordre

pour les transitions qui motivent ce travail : la transition de réversibilité dans les suspensions cisaillées cycliquement et la transition vers l'écoulement des matériaux amorphes.

## 1.4 Comprendre les transitions de réversibilité et d'écoulement comme des transitions de phase absorbantes



Dans cette section, nous revenons sur les deux objets d'intérêt de notre travail : la transition de réversibilité dans les suspensions cisaillées cycliquement et la transition vers l'écoulement des matériaux amorphes. Pour chacune d'elle, nous explicitons la dynamique sous-jacente à ces transitions et expliquons en quoi celle-ci correspond à celle d'une transition de phase absorbante. Puis, en se basant sur la conjecture de Rossi et al. [25], nous montrons que ces deux systèmes sont proches de ceux représentés par la classe CDP. Enfin, en exposant des mesures de criticalité différentes, nous montrons que cette hypothèse d'appartenance ne tient pas et tenons cela au fait que ces deux transitions présentent des interactions à longue portée.

### 1.4.1 Transition de réversibilité

Dans la première partie de l'introduction, nous avions présenté la transition de réversibilité dans les suspensions cisaillées cycliquement comme séparant un état réversible, stroboscopiquement arrêté, d'un état irréversible, stroboscopiquement diffusif. Pour comprendre comment ce phénomène peut être appréhendé dans le cadre des transitions de phase absorbantes, il est nécessaire de remarquer comment cette diffusion stroboscopique prend place.

#### 1.4.1.1 La diffusion comme une succession d'interactions irréversibles

Dans la limite de bas Reynolds, les équations de Stokes qui gouvernent la dynamique de ce système sont réversibles dans le temps [58]. En d'autres termes, si lors de la première moitié d'un cycle une particule n'est déplacée que par les mouvements réversibles du fluide, alors lors de la seconde moitié de ce cycle, elle reviendra à sa place initiale. Toutefois, si au cours de cette première moitié de cycle la particule interagit irréversiblement avec une autre particule à courte portée, cette irréversibilité laissera une trace lors du mouvement retour du fluide. Dans ce cas, la particule ne revient pas à sa position d'origine. Dès lors, une dynamique collective se met en place : une particule qui a changé de position entre le début et la fin d'un cycle va suivre une nouvelle trajectoire, perturbant alors possiblement celle d'une autre particule par une interaction de contact irréversible. Dès lors, cette nouvelle particule change d'orbite et peut perturber l'orbite d'une autre particule à son tour. Ce faisant, ce mécanisme permet une propagation de l'irréversibilité dans le système, d'autant plus efficace que les orbites sont développées et donc l'amplitude de cisaillement globale grande.

Il y a alors deux possibilités. Dans le premier cas, l'amplitude de cisaillement est suffisamment grande ( $\gamma_0 > \gamma_{0,c}$ ) et la propagation des interactions irréversibles perdure à

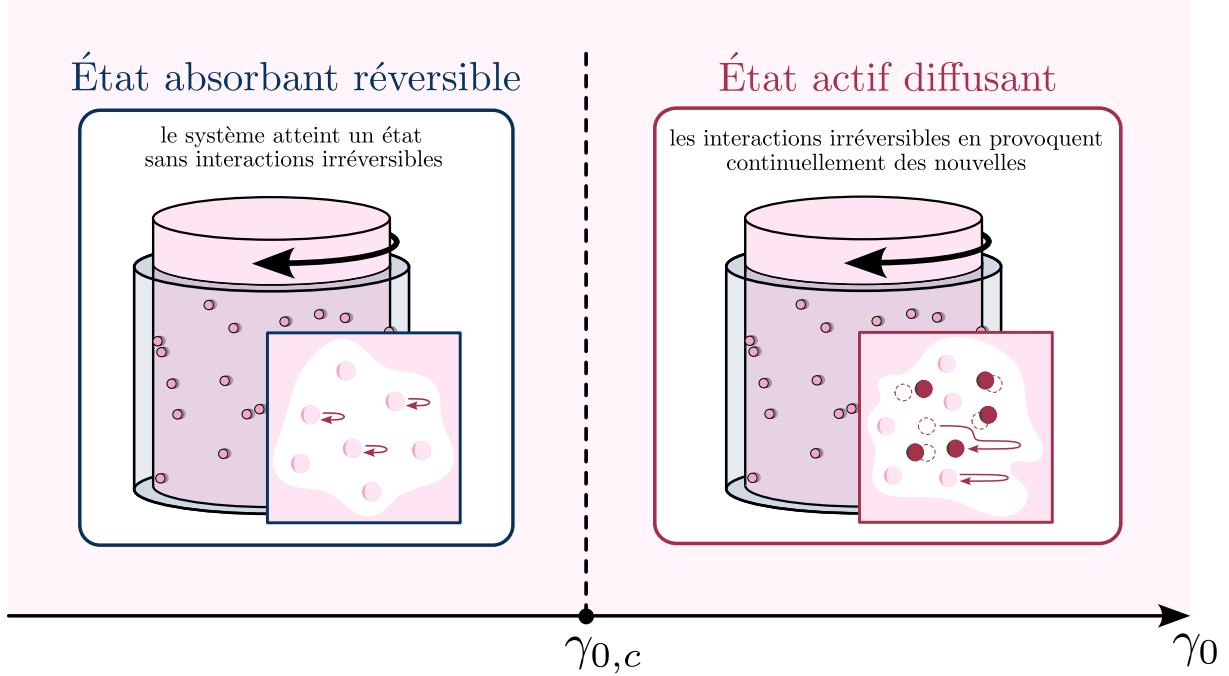


FIGURE 1.14 – Interprétation de la dynamique de la transition de réversibilité comme celle d'une transition de phase absorbante.

temps long dans le système, amenant à un coefficient de diffusion stroboscopique non-nul  $D_0 > 0$ . Dans le second cas, l'amplitude de cisaillement globale est trop faible ( $\gamma_0 < \gamma_{0,c}$ ) et le système finit par tomber dans un état réversible où chaque particule suit une orbite stable isolée, amenant à un état stroboscopiquement arrêté  $D_0 = 0$ .

Comme illustré à la figure 1.16, la transition de réversibilité peut donc être comprise comme une transition de phase absorbante dont le paramètre de contrôle est l'amplitude de cisaillement  $\gamma_0$  et le paramètre d'ordre le coefficient de diffusion stroboscopique  $D_0$ . Dans ce système, l'activité est donc directement associée aux déplacements irréversibles des particules, susceptibles de disparaître (via le repositionnement sur une nouvelle orbite stable) ou de se propager (via le repositionnement sur une orbite recoupant une orbite stable), de la même manière que l'activité dans les modèles présentés précédemment. De plus, l'état arrêté dans lequel toutes les particules sont sur une orbite stable est bien un état absorbant puisque la déstabilisation de l'orbite d'une particule ne peut se faire que par l'intersection avec une autre orbite. Ainsi, si toutes les orbites sont stables, elles le resteront pour toujours. Nous pouvons alors définir les mêmes exposants critiques que dans n'importe quelle autre transition de phase absorbante :

$$D_0 \sim \delta\gamma_0^\beta, \quad \langle \delta D_0^2 \rangle \sim \delta\gamma_0^{-\gamma'}, \quad \xi \sim \delta\gamma_0^{-\nu_\perp}, \quad \delta\gamma_0 = \frac{\gamma_0 - \gamma_{0,c}}{\gamma_{0,c}} \quad (1.28)$$

La question est de connaître la valeur de ces exposants dictant cette criticalité.

### 1.4.1.2 Candidature à la classe CDP

La classe d'universalité pressentie au premier abord pour la transition de réversibilité est la classe CDP. En effet, nous retrouvons ici un couplage de la propagation de l'activité à celle de la dynamique d'un champ conservé. De fait, les particules, vecteurs de cette propagation dans l'espace, constituent un champ de densité qui, par conservation du nombre de particules (système fermé) est lui-même conservé. De plus, ce système possède un nombre infini d'états absorbants. En effet, tout ensemble d'orbite stable, et il en existe une infinité en espace continu, est un état absorbant. Ainsi, les deux principaux critères de la conjecture de Rossi et al [25] sont respectés. On pourrait donc s'attendre à ce que l'universalité CDP représente cette transition.

Afin d'étudier la criticalité de ce système, une approche de modélisation numérique simple a été développée. Celle-ci se concentre uniquement sur la dynamique stroboscopique du système. Dans ce cadre, comme nous l'expliquerons plus en détail dans le chapitre 3, le modèle numérique adéquat pour caractériser la transition correspond au ROM que nous avons présenté dans la section précédente. De ce fait, sous cet angle de modélisation, la transition de réversibilité appartient à la classe CDP. Ainsi, en 2D, elle est caractérisée par les exposants critiques  $\beta \approx 0.64$  et  $\gamma' \approx 0.37$ . Nous pourrions nous arrêter là et nous satisfaire de cette réponse.

Toutefois, de notre point de vue, un mécanisme essentiel est perdu dans la simplification de cette modélisation : seules les interactions irréversibles de contact sont prises en compte dans la dynamique du système. Or, dans un système réel, les particules n'interagissent pas seulement par contact direct mais aussi indirectement via le fluide suspendant. Cette simplification est tout sauf anodine puisque la forme pressentie de ces interactions hydrodynamiques suggère que leur prise en compte est susceptible de modifier significativement la criticalité du système. En effet, nous allons montrer dans la partie suivante que celles-ci sont génériquement à longue portée.

### 1.4.1.3 Interactions visqueuses médiées par le fluide

Dans cette partie, nous proposons de montrer que l'interaction hydrodynamique entre deux particules immersées dans un fluide est génériquement à longue portée. En commençant par dériver sa forme dans le cas idéal, nous montrerons comment un raisonnement basé sur des principes simples de conservation permet d'appliquer cette analyse à toute une zoologie de systèmes, confirmant l'omniprésence de la longue portée dans les dispositifs expérimentaux et donc, a fortiori, dans la transition de réversibilité.

#### Hydrodynamique en milieu infini

Dans le cas de la transition de réversibilité, lorsqu'une particule interagi irréversiblement avec une autre particule au cours d'un cycle, elle quitte son orbite initiale en appliquant une certaine force sur le fluide. Cette force va alors modifier l'écoulement du fluide via les lois régissant sa dynamique et donc affecter le mouvement des particules environnantes. La

question est de savoir comment. Pour y répondre, nous nous concentrerons sur un problème générique à deux particules : une particule 1 située en  $\mathbf{r}$  exerce une force  $\mathbf{F}^1(\mathbf{r})$  sur le

## 1.4. Comprendre les transitions de réversibilité et d'écoulement comme des transitions de phase absorbantes

---

fluide et induit un écoulement qui entraîne le déplacement d'une particule 2 située en  $\mathbf{r}'$  à la vitesse  $\mathbf{v}^2$ . En considérant le fluide suspendant comme incompressible et dans la limite de bas Reynolds, son écoulement suit une dynamique régie par les équations de Stokes :

$$\begin{aligned} -\partial_i P + \eta \partial_j \partial_j v_i + f_i &= 0 \\ \partial_j v_j &= 0 \end{aligned} \quad (1.29)$$

avec  $\mathbf{v}(\mathbf{r})$  le champ de vitesse eulérien du fluide,  $P(\mathbf{r})$  le champ de pression,  $\eta$  la viscosité dynamique et  $\mathbf{f}(\mathbf{r})$  le champ de force extérieur. Dans la limite de champ lointain, i.e. à grande distance des particules, celles-ci peuvent être assimilées à des objets ponctuels. Dans cette approximation, nous pouvons décrire la force exercée par la particule 1 sur le fluide comme infinitement localisée  $\mathbf{F}^1(\mathbf{r}) = \mathbf{F}^1 \delta(\mathbf{r})$  et la vitesse de la particule 2 comme correspondant à celle du fluide en ce point  $\mathbf{v}^2 = \mathbf{v}(\mathbf{r}')$  [59]. La résolution de ce problème revient donc à résoudre les équations de Stokes pour obtenir le champ de vitesse du fluide en  $\mathbf{r}'$  sous l'action du champ de force extérieur  $\mathbf{f}(\mathbf{r}) = \mathbf{F}^1 \delta(\mathbf{r})$ . En d'autres termes, cela revient à calculer la fonction de Green associée aux équations de Stokes [60].

La résolution de ce problème bien connu (voir [61] par exemple) permet de définir le tenseur d'Oseen  $G_{ij}$ , reliant  $\mathbf{F}^1$  à  $\mathbf{v}(\mathbf{r}')$  par la relation linéaire :

$$v_i(\mathbf{r}') = G_{ij}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') F_j^1, \quad G_{ij}(\mathbf{r}) = \frac{1}{8\pi\eta r} \left( \delta_{ij} + \frac{r_i r_j}{r^2} \right) \quad (1.30)$$

définissant ainsi une interaction hydrodynamique entre les deux particules, décroissant comme  $\sim 1/r$  dans un milieu tridimensionnel infini.

Ce résultat calculatoire peut aussi se comprendre plus intuitivement, comme l'explique très clairement l'étude [59]. Dans la suite de cette partie, nous présentons le raisonnement de l'auteur. En fait, les équations de Stokes dérivent de deux lois de conservation fondamentales : celle de la quantité de mouvement et celle de la masse. Lorsqu'une particule applique une force locale sur le fluide, celle-ci se comporte comme une source de quantité de mouvement. Pour que cette dernière soit conservée, le flux local de quantité de mouvement émanant de la particule doit décroître comme  $\sim 1/r^2$ . Or ce flux local de quantité de mouvement n'étant autre que le tenseur des contraintes  $\sigma$  associé au fluide, cette conservation implique directement  $\sigma \sim 1/r^2$ . La partie associée au cisaillement de ce tenseur étant  $\sigma_{cis} \sim \eta \nabla \mathbf{v}$  on a donc  $\mathbf{v} \sim 1/\eta r$ . De plus, par des considérations de symétrie, la partie adimensionnelle du propagateur hydrodynamique prend nécessairement la forme  $\delta_{ij} + C \frac{r_i r_j}{r^2}$ . On retrouve donc finalement, basé sur ces arguments simples :

$$G_{ij} \sim \frac{1}{\eta r} \left( \delta_{ij} + C \frac{r_i r_j}{r^2} \right) \quad (1.31)$$

avec  $C$  une constante qui peut être déterminée par conservation de la masse (en imposant  $\partial_i G_{ij} = 0$ ) pour donner  $C = 1$ .

En plus de ce premier effet, nous pouvons identifier une autre source de modification de l'écoulement. Celle-ci vient de la conservation de la masse de fluide. En fait, lors de son déplacement, la particule 1 modifie la répartition de masse dans le fluide. Celle-ci peut alors être vue, en plus d'une source de quantité de mouvement, comme un dipôle

de source de matière (avec création de masse à l'avant du mouvement et suppression de masse à l'arrière). En 3D, un tel dipôle génère une vitesse d'écoulement décroissant comme  $\sim 1/r^3$ , générant ainsi un terme additionnel à l'équation 1.31 en  $\sim 1/r^3$ . Cependant, à grande distance, cette contribution est négligeable devant celle décroissant comme  $\sim 1/r$ . On retrouve donc bien en champ lointain le tenseur d'Oseen.

Ce résultat basé sur les deux principes de conservation sont très généraux et permettent facilement d'étendre leur validité à d'autre situations. Notamment, dans une suspensions de plus de deux particules, la forme de l'interaction en champ lointain ne sera pas modifiée puisque dans ce cas on a toujours conservation de la quantité de mouvement et de la masse [59]. A priori, dans un système assimilé à un milieu infini, les interactions hydrodynamiques entre les particules lors d'un cycle de cisaillement sont donc bien à longue portée. Toutefois une telle approximation de milieu infini est parfois non valable dans les dispositifs expérimentaux réalisant la transition de réversibilité. Dans ces cas là, le raisonnement doit être adapté.

### Hydrodynamique en milieux complexes

Un premier exemple vient des systèmes quasi-2D. Lorsque le fluide suspendant est confiné entre deux plaques rigides, espacées d'une faible distance  $\lambda$ , les frottements avec le solide constituent une perte de quantité de mouvement dans la direction orthogonale aux plaques. Dans ce cas, le flux local de quantité de mouvement généré par la particule 1 décroît exponentiellement avec la distance au-delà de cette distance typique de confinement  $r > \lambda$ . Toutefois, dans une telle configuration, la masse du fluide est toujours conservée. Le déplacement de la particule 1 peut toujours être vu comme un dipôle de source de matière mais prenant cette fois place dans un milieu 2D. La vitesse de l'écoulement associé décroît alors comme  $\sim 1/r^2$ , amenant à un propagateur hydrodynamique de la forme :

$$G_{ij} \sim \frac{1}{\eta r^2} \left( \delta_{ij} - 2 \frac{r_i r_j}{r^2} \right) \quad (1.32)$$

Ainsi, sous confinement, les interactions médiées par le fluide restent à longue portée.

Un autre système envisageable est celui d'un fluide contenu dans un film suspendu (i.e. entouré de gaz par exemple, comme dans une bulle de savon). Dans ce cas, la quantité de mouvement et la masse sont conservées mais l'écoulement prend place dans un milieu 2D. La conservation de la quantité de mouvement implique donc cette fois un flux local évoluant comme  $\sim 1/r$  et donc une vitesse d'écoulement se comportant comme  $\sim \ln(r)$ , soit des interactions d'une portée extrêmement grande.

Enfin une dernière situation envisageable, bien que peut-être moins pertinente dans le cas de la transition de réversibilité, est celle d'un écoulement dans un milieu poreux. Dans ce cas, la quantité de mouvement n'est pas conservée, comme dans le cas du confinement entre deux plaques, mais cette fois la conservation de la masse prend place dans un espace 3D. Dans ce cas, le raisonnement de conservation nous amène à un propagateur hydrodynamique décroissant comme  $\sim 1/r^3$ .

## 1.4. Comprendre les transitions de réversibilité et d'écoulement comme des transitions de phase absorbantes

De manière toute à fait générale, le fluide suspendant permet donc de médier des interactions entre les particules, représentée par un propagateur hydrodynamique de la forme :

$$G_{ij} \sim \frac{1}{r^\alpha} \left( \delta_{ij} - 2 \frac{r_i r_j}{r^2} \right) \quad (1.33)$$

avec  $\alpha$  un entier pouvant prendre différentes valeurs en fonction du dispositif spécifique étudié. Via a minima la conservation de la masse, ces interactions présentent donc toujours la particularité d'être à longue portée.



Cette caractéristique n'est pas anodine puisque la conjecture de Rossi et al. [25] quant à l'appartenance à la classe CDP suppose implicitement la présence d'interaction à courte portée seulement. La présence d'interactions médiées par le fluide, a priori inévitable, constitue donc un mécanisme de la transition de réversibilité susceptible de rendre sa criticalité différente de celle de la classe CDP.

### 1.4.1.4 Influence de la longue portée sur le comportement critique

Pour conclure cette sous-section, nous mettons en évidence des éléments suggérant l'importance de la prise en compte des interactions hydrodynamiques pour l'étude de la transition de réversibilité.

L'étude menée par Mari et. al [14] propose de pallier à l'absence des interactions hydrodynamiques dans les simulations numériques stroboscopiques pré-existantes. Pour ce faire, en reprenant le cadre de modélisation offert par le ROM, les auteurs ont explicitement intégré l'effet de ces interactions en les représentant par une diffusion effective des particules. Celle-ci est alors décrite par un coefficient de diffusion proportionnel aux nombres de particules actives (i.e. subissant une interaction de contact irréversible à un instant  $t$ ) dans le système. Cela équivaut alors en quelques sortes à considérer les interactions médiées dans une approche de champ moyen, c'est-à-dire de portée infinie<sup>2</sup>.



Ce faisant, les auteurs ont étudié le comportement critique du système en 2D et mesuré les exposants critiques  $\beta$ ,  $\gamma'$  et  $\nu_\perp$  associés, trouvant les valeurs :

$$\beta \approx 1.85 \quad \gamma' \approx -1.2 \quad \nu_\perp \approx 1.3 \quad (1.34)$$

Ces valeurs sont alors très éloignées des valeurs associées à la classe CDP en 2D (voir tableau 1.1). Notamment, elles décrivent une évolution convexe du paramètre d'ordre avec la distance au point critique ( $\beta > 1$ ), là où la criticalité CDP décrit une évolution concave de celui-ci. Même si l'implémentation de ces interactions peut être discutée (dans un système réel, nous avons montré que leur portée était finie), leur intégration dans le modèle est donc bien susceptible de modifier le comportement critique de la transition.

2. La philosophie derrière cette modélisation sera présentée plus en détail au chapitre 3.

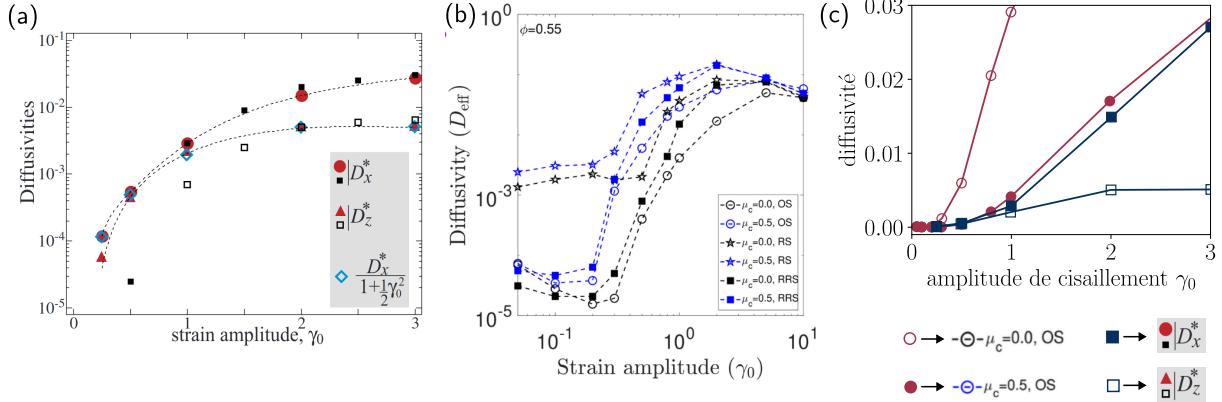


FIGURE 1.15 – Caractérisation de la transition de réversibilité dans les suspensions cisaillées cycliquement dans des études de dynamiques moléculaires. Évolution de la diffusivité stroboscopique avec l'amplitude de cisaillement dans l'étude [62] (a) et [63] (b). (c) Représentation lin-lin de certaines courbes tirées de (a) et (b), la légende spécifie lesquelles.

Si l'on regarde du côté des expériences (voir figure 1.1-(b)) ou des simulations plus réaliste de dynamique moléculaire, les mesures proposées sur ces systèmes ne semblent par ailleurs pas vraiment pencher vers une criticalité de type CDP. En effet, sur la figure 1.15-(c) où nous avons reproduit les résultats des études [62, 63], il n'apparaît pas clairement que l'évolution du paramètre d'ordre soit concave.

Ces éléments suggèrent alors que la transition de réversibilité pourrait ne pas être appréhendée directement via la classe CDP mais plutôt via la classe CDP en présence d'interactions à longue portée. Dans la sous-section suivante, nous montrons qu'il en est de même pour la transition vers l'écoulement.

## 1.4.2 Transition vers l'écoulement

En première partie de ce chapitre, nous avons présenté la transition vers l'écoulement des matériaux amorphes comme séparant un état coulant d'un état élastique. Pour comprendre plus spécifiquement comment celle-ci peut être appréhendée comme une transition de phase absorbante, il est important de comprendre comment l'écoulement prend place dans la phase active.

### 1.4.2.1 L'écoulement comme une succession de réarrangement

Prenons l'exemple d'un matériau amorphe, comme une mousse, soumis à un cisaillement simple. Lorsque l'on applique une certaine contrainte de cisaillement  $\Sigma$  à ce système, celle-ci se voit supportée par les différentes régions du matériau sous-forme de contrainte locale  $\sigma$ . Dans la limite où cette contrainte locale est suffisamment faible, la région associée la supporte en opérant une déformation élastique. Cependant, dès lors que cette contrainte locale dépasse un certain seuil  $\sigma_c$ , propre à chaque région, la région associée se déforme plastiquement et irréversiblement. Cette déformation plastique permet alors de relaxer la trop forte contrainte locale et, par conservation de la contrainte appliquée, la redistribuer aux autres régions du matériau [8].

## 1.4. Comprendre les transitions de réversibilité et d'écoulement comme des transitions de phase absorbantes

---

Dans le cas des mousses, les réarrangements plastiques permettant la relaxation de la contrainte locale prennent une forme bien spécifique : les événements dits T1 [11]. Au cours d'un tel évènement, un groupe de quatre bulles (correspondant à une région locale précédemment mentionnée) opère un changement topologique par changement de voisins. Ce processus géométrique de relaxation local de la contrainte est illustré à la figure 1.2-(a) via les images tirées de [9]. Ce type de réarrangement plastique caractéristique est retrouvé dans l'écoulement d'autres systèmes amorphes comme les émulsions ou les verres métalliques, seulement impliquant un plus grand nombre d'entités microscopiques [8].

En redistribuant la contrainte locale relaxée, une région se réarrangeant plastiquement est capable d'induire le dépassement du seuil de contrainte local dans une autre région du matériau. Celles-ci vont alors à leur tour se réarranger plastiquement, redistribuer leur surplus de contrainte locale et déclencher de nouveaux évènements dans le système. Mises à la suite les unes des autres, ces déformations plastiques locales créent alors un écoulement plastique macroscopique global via une dynamique collective.

Il y a alors deux possibilités. Dans le premier cas, la contrainte globale appliquée au système  $\Sigma$  est trop faible ( $\Sigma < \Sigma_c$ ) et le système finit par tomber dans un état où toutes les régions du matériaux sont capables de soutenir la contrainte locale élastiquement ( $\sigma < \sigma_c$ ). Le matériau ne coule donc pas, on observe un taux de cisaillement nul  $\dot{\gamma} = 0$ . Dans le second cas, la contrainte globale est suffisamment grande ( $\Sigma > \Sigma_c$ ) pour que, à temps longs, le système soit toujours traversé par des réarrangement plastiques locaux. Dans l'état stationnaire, le matériau s'écoule et on mesure un taux de cisaillement non-nul  $\dot{\gamma} > 0$ . Il est important de noter que la dynamique collective complexe à l'œuvre fait que la contrainte seuil globale  $\Sigma_c$  ne peut pas être trivialement déduite des contraintes seuil locales  $\sigma_c$ .

Comme illustré à la figure 1.16, la transition vers l'écoulement peut donc être comprise comme une transition de phase absorbante dont le paramètre de contrôle est la contrainte de cisaillement  $\Sigma$  et le paramètre d'ordre le taux de cisaillement  $\dot{\gamma}$ . Dans ce système, l'activité est donc directement associée à la déformation plastique locale du matériau qui est susceptible de disparaître (via la relaxation de la contrainte locale) comme de se propager (via la redistribution de contrainte), de la même façon que dans les modèles précédemment évoqués dans ce chapitre. Par ailleurs, l'état arrêté représenté par  $\dot{\gamma} = 0$  est bien un état absorbant de la dynamique puisque, à  $\Sigma$  fixée, un réarrangement plastique ne peut être provoqué que par la redistribution de contrainte engendrée par un réarrangement précédent. De cette façon, on peut définir les mêmes exposants critiques que dans le cadre de n'importe quelle autre transition de phase absorbante :

$$\dot{\gamma} \sim \delta\Sigma^\beta, \quad \langle \Delta\dot{\gamma}^2 \rangle \sim \delta\Sigma^{-\gamma'}, \quad \xi \sim \delta\Sigma^{-\nu_\perp}, \quad \delta\Sigma = \frac{\Sigma - \Sigma_c}{\Sigma_c} \quad (1.35)$$

Il ne va pas sans remarquer que la phénoménologie décrite de la transition vers l'écoulement ressemble fortement à celle de la transition de depinning. On peut en effet faire une analogie directe entre la contrainte globale de cisaillement  $\Sigma$  et la force extérieure  $f$  du depinning, et entre le taux de cisaillement  $\dot{\gamma}$  et la vitesse de l'interface  $v$  dans le

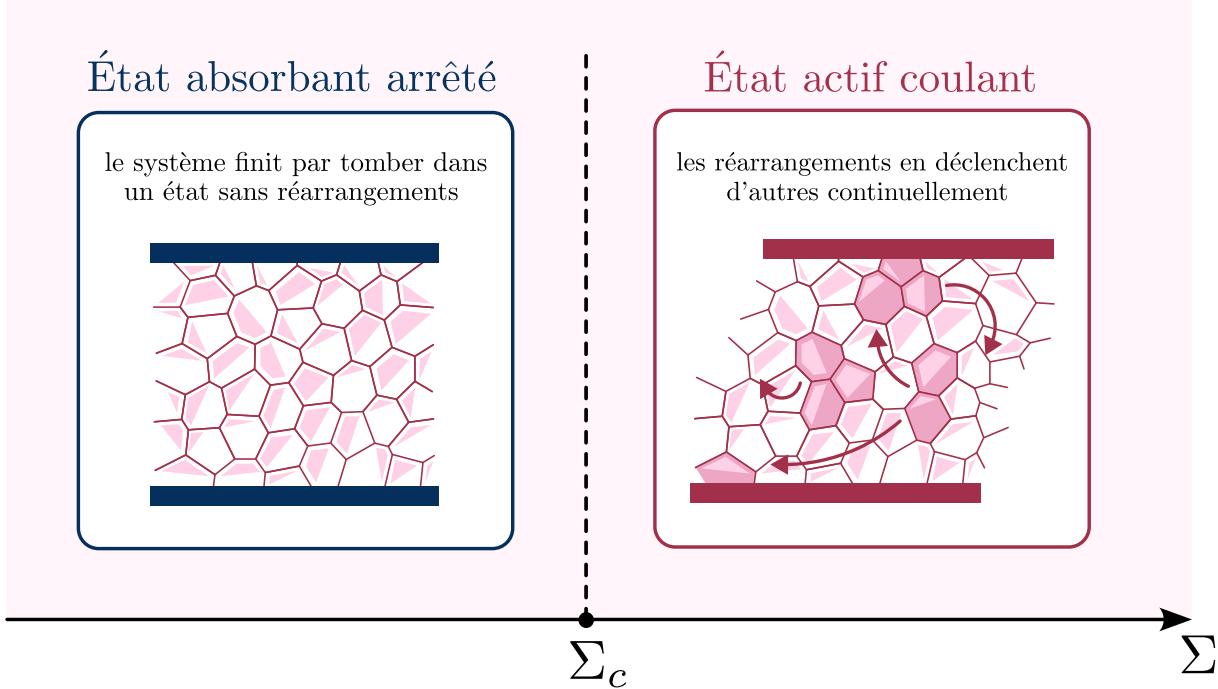


FIGURE 1.16 – Interprétation de la dynamique de l’écoulement des matériaux amorphes comme celle d’une transition de phase absorbante.

depinning. D’ailleurs, plusieurs études se sont concentrées sur la comparaison de ces deux phénomènes [64–66]. Dans cette optique, on pourrait s’attendre naturellement à ce que la transition vers l’écoulement soit aussi représentée par la classe CDP.

#### 1.4.2.2 Candidature à la classe CDP

La classe d’universalité naturelle à laquelle se rapporte la transition vers l’écoulement avec les éléments que nous avons apporté est la classe CDP, représentant aussi la transition de depinning. De fait, celle-ci présente une dynamique d’activité couplée à celle d’un champ conservé non-diffusif : le champ de contrainte locale. En effet, à contrainte globale fixée  $\Sigma$ , le champ de contrainte locale dans le matériau est de divergence nulle. De plus, celui-ci n’est modifié que sous l’effet de l’activité (plasticité) et est donc non-diffusif. Par ailleurs, cette transition possède une infinité d’états absorbants. En effet, n’importe quel état du système possédant un champ de contrainte local vérifiant  $\sigma < \sigma_c$  en tout point du matériau est un état absorbant. Les deux critères de la conjecture de Rossi et al. [25] sont donc bien vérifiés.

Pourtant la criticalité de la transition vers l’écoulement semble bien différente de celle de la classe CDP. Plus particulièrement, celle-ci a été étudiée via des modèles mésoscopique en deux dimensions [64, 67–69]. Dans ces travaux, l’exposant  $\beta$  a été mesuré à de nombreuses reprises comme  $\beta \approx 1.5$ , en accord qualitatif avec la convexité de la courbe d’écoulement mesurée dans de nombreuses expériences (voir figure 1.2-(b) par exemple). Pourtant en 2D, la classe d’universalité CDP est caractérisée par un exposant  $\beta \approx 0.64$ , soit une évolution concave du paramètre d’ordre.

Comme pour la transition de réversibilité, une possibilité évidente pour expliquer le désaccord avec cet attendu naïf est que la transition vers l'écoulement fait intervenir des interactions à longue portée, contredisant la condition de courte portée implicitement inscrite dans la conjecture de Rossi et al [25]. En effet, nous montrons dans la partie suivante que le milieu élastique dans lequel prennent place les réarrangements plastiques permet de redistribuer la contrainte relaxée à longue portée.

#### 1.4.2.3 Interactions élastiques médiées par le solide

Afin de comprendre comment la contrainte est redistribuée dans le milieu au cours d'un réarrangement plastique, nous présentons la résolution de ce problème, déjà abordé à de nombreuses reprises dans la littérature, dans le cadre de la théorie de l'élasticité linéaire. Le problème initial est alors le suivant : comment est modifié le champ de contrainte local  $\sigma$  sous forçage suite à une déformation plastique locale  $\epsilon^{\text{pl}}$  ?

#### Calcul du propagateur d'Eshelby

Pour répondre à cette question, nous reprenons les calculs des travaux [13, 70]. Considérons un milieu continu élastique infini, isotrope et incompressible dans lequel nous définissons un champ de déplacement  $u_i(\mathbf{r}) = u_i^{\text{él}}(\mathbf{r}) + u_i^{\text{pl}}(\mathbf{r})$ , décomposable en une composante élastique et une composante plastique. À ce champ est associé un tenseur de déformation  $\epsilon_{ij}$  défini comme :

$$\epsilon_{ij}(\mathbf{r}) = \epsilon_{ij}^{\text{él}}(\mathbf{r}) + \epsilon_{ij}^{\text{pl}}(\mathbf{r}) = \frac{1}{2} \left( \partial_i u_j^{\text{él}}(\mathbf{r}) + \partial_j u_i^{\text{él}}(\mathbf{r}) \right) + \frac{1}{2} \left( \partial_i u_j^{\text{pl}}(\mathbf{r}) + \partial_j u_i^{\text{pl}}(\mathbf{r}) \right) \quad (1.36)$$

et un tenseur des contraintes  $\sigma_{ij}$  défini via l'incompressibilité comme :

$$\sigma_{ij} = 2\mu \epsilon_{ij}^{\text{él}}(\mathbf{r}) = 2\mu \epsilon_{ij}(\mathbf{r}) - 2\mu \epsilon_{ij}^{\text{pl}}(\mathbf{r}) \quad (1.37)$$

Dans le cas de notre étude, il est d'usage de décomposer les champs dans le milieu en une partie de réponse purement élastique au forçage ( $\sigma^0$ ,  $u^0$ ) et une partie de réponse à la déformation plastique ( $\sigma^1$ ,  $u^1$ ), donnant alors avec ces notations :

$$\epsilon_{ij}^{\text{él}} = \epsilon_{ij}^{\text{él},0} + \epsilon_{ij}^{\text{él},1}, \quad \epsilon_{ij}^{\text{pl}} = \epsilon_{ij}^{\text{pl},1}, \quad \sigma_{ij} = \sigma_{ij}^0 + \sigma_{ij}^1 \quad (1.38)$$

L'effet non-trivial de la déformation plastique est alors encodé dans les équations :

$$\begin{cases} -\partial_i P^1(\mathbf{r}) + \partial_j \sigma_{ij}^1(\mathbf{r}) = 0 \\ \partial_k u_k^1(\mathbf{r}) = 0 \end{cases} \quad (1.39)$$

la première équation correspondant à la condition d'équilibre mécanique et la seconde à l'incompressibilité du matériau. L'objectif est alors de déterminer  $\sigma_{ij}^1$  en fonction de  $\epsilon_{ij}^{\text{pl},1}$  à partir de ces équations. Dans la suite, nous omettrons les notations <sup>1</sup> et  $(\mathbf{r})$  pour alléger l'écriture.

En utilisant l'[équation 1.36](#) et l'[équation 1.37](#), nous pouvons ré-exprimer la condition d'équilibre mécanique comme suit :

$$-\partial_i P + \mu \partial_j \partial_j u_i = 2\mu \partial_j \hat{\epsilon}_{ij}^{\text{pl}} \quad (1.40)$$

En passant dans l'espace de Fourier, avec les conventions exposées dans **Annexe**, on obtient grâce à la condition d'incompressibilité :

$$\hat{P} = -2\mu \frac{q_i q_j}{q^2} \hat{\epsilon}_{ij}^{\text{pl}} \quad (1.41)$$

soit :

$$\hat{u}_i = \left( q_j \hat{\epsilon}_{ij}^{\text{pl}} - q_i \frac{q_\alpha q_\beta}{q^2} \hat{\epsilon}_{\alpha\beta}^{\text{pl}} \right) \frac{2i}{q^2} \quad (1.42)$$

En se rapportant à la définition du tenseur des contraintes dans l'espace de Fourier on a alors finalement :

$$\begin{aligned} \hat{\sigma}_{ij} &= 2\mu \hat{G}_{ijkl} \hat{\epsilon}_{kl}^{\text{pl}} \\ \hat{G}_{ijkl} &= \frac{q_i q_l \delta_{kj} + q_j q_l \delta_{ki}}{q^2} - 2 \frac{q_i q_j q_k q_l}{q^4} - \delta_{ki} \delta_{jl} \end{aligned} \quad (1.43)$$

Afin d'obtenir une expression finale du champ de contrainte suite au réarrangement plastique, nous faisons l'hypothèse que celui-ci possède la même symétrie que le forçage, que nous prenons comme un cisaillement simple dans la direction  $\hat{\mathbf{e}}_x$ . Sous cette hypothèse, on a alors en deux dimensions  $\hat{\epsilon}_{xy}^{\text{pl}} = \hat{\epsilon}_{yx}^{\text{pl}} = \hat{\epsilon}^{\text{pl}} \neq 0$  et  $\hat{\epsilon}_{xx}^{\text{pl}} = \hat{\epsilon}_{yy}^{\text{pl}} = 0$ . L'[équation 1.43](#) nous permet alors d'obtenir l'expression :

$$\sigma_{xy} = 2\mu G \epsilon^{\text{pl}}, \quad G(\mathbf{q}) = -4 \frac{q_x^2 q_y^2}{q^4} \quad (1.44)$$

qui relie directement la perturbation du champ de contrainte au réarrangement plastique. Des expressions similaires peuvent être obtenues pour les composantes  $\sigma_{xx}$  et  $\sigma_{yy}$  du tenseur des contraintes. Toutefois, on se concentrera ici seulement sur la contrainte locale de cisaillement  $\sigma_{xy}$ . En espace réel, cette relation devient :

$$\sigma_{xy}(\mathbf{r}) = \int d\mathbf{r}' G(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \epsilon^{\text{pl}}(\mathbf{r}'), \quad G(\mathbf{r}) = \frac{\cos(4\theta)}{\pi r^2} \quad (1.45)$$

On appelle alors le propagateur  $G$  propagateur d'Eshelby, dont la dénomination revient à la personne l'ayant calculé en premier [71]. Celui-ci correspond à la redistribution de contrainte de cisaillement induite par un réarrangement plastique infinitement localisé (de la forme  $\epsilon^{\text{pl}}(\mathbf{r}) = \epsilon_0 \delta(\mathbf{r})$ ) ou de manière équivalente à celle induite en champ lointain par un événement d'extension finie. La redistribution de contrainte opérée lors d'un tel événement est donc effectivement à longue portée, décroissant comme  $\sim 1/r^2$  en 2D.

## Forme et observations expérimentales

Sur la figure 1.17-(a), nous représentons la redistribution de la contrainte de cisaillement locale suite à un réarrangement plastique. Comme on peut le remarquer, en plus d'être à longue portée, la redistribution est fortement anisotrope. Plus particulièrement, le signe de celle-ci dépend de la direction considérée : la redistribution est positive dans les directions principales du cisaillement  $\hat{\mathbf{e}}_x$  et  $\hat{\mathbf{e}}_y$  et négative dans les directions intermédiaires. En d'autres termes, un réarrangement plastique d'une région dans le milieu élastique déstabilise aussi bien qu'il ne stabilise les autres régions. Par ce mécanisme, la plasticité dans le milieu favorise donc la propagation de l'activité en même temps qu'elle l'inhibe (une redistribution de contrainte négative défavorise le déclenchement d'un nouveau réarrangement plastique).

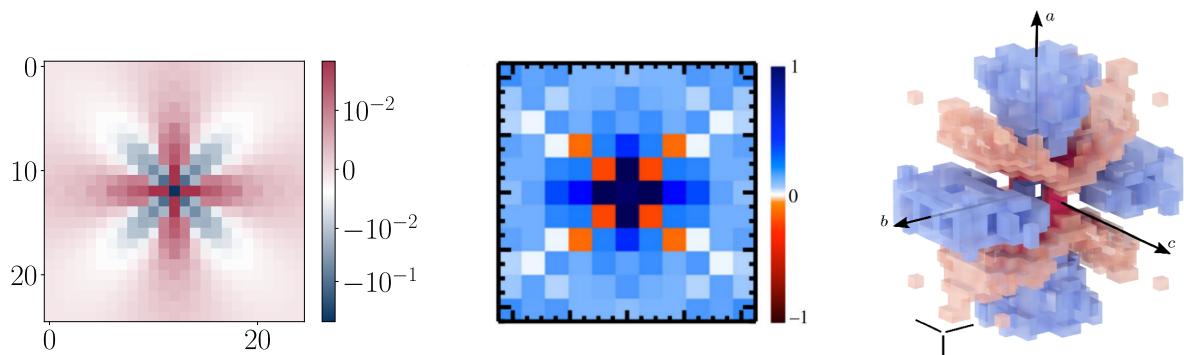


FIGURE 1.17 – Anisotropie de la redistribution de contrainte après un réarrangement plastique (les unités spécifiques n'ont pas d'importance). (a) représentation en 2D du propagateur d'Eshelby défini par l'équation 1.45. (b) Redistribution de contrainte suite à un réarrangement plastique mesurée dans [72]. (c) Idem dans [73], les zones rouges représentent des redistributions positives et les zones bleues des redistributions négatives.

La redistribution de la contrainte suite à un tel évènement a été mesurée en conditions réelles dans différents systèmes, confirmant la forme prédite par la théorie continue [72–74]. Par exemple, dans [73], les auteurs ont mesuré la redistribution de contrainte dans une mousse après un évènement T1 et ont pu mettre en évidence la forme quadrupolaire caractéristique du propagateur d'Eshelby. D'autre part, via des simulations de dynamique moléculaire, la topologie et la portée de l'interaction d'Eshelby s'est aussi vue confirmée dans différents systèmes [75–77]. Cette forme simple de l'interaction permet alors d'encoder le mécanisme d'écoulement des matériaux amorphes dans des modèles mésoscopiques que nous présenterons au chapitre 4.

### Parenthèse : écrantage de l'interaction d'Eshelby

De la même façon que dans le cas des suspensions, les dispositifs expérimentaux étudiés peuvent agir significativement sur la portée des interactions. Si le cas de l'interaction d'Eshelby est le plus plébiscité dans la communauté des matériaux amorphes, nous pouvons imaginer une variation de la redistribution de contrainte dans un dispositif différent.

En effet, si l'on considère un écoulement quasi-2D entre deux plaques rigides, alors les frottements entre le matériau et les plaques vont induire la présence d'un nouveau terme de dissipation dans la condition d'équilibre mécanique :

$$-\partial_i P^1(\mathbf{r}) + \partial_j \sigma_{ij}^1(\mathbf{r}) - \mu \lambda u_i^1 = 0 \quad (1.46)$$

avec  $\lambda$  un coefficient retranscrivant l'intensité de la dissipation et définissant une longueur d'écrantage  $\xi \sim 1/\sqrt{\lambda}$ . Par une résolution similaire, cette étude mène à un propagateur dans l'espace réciproque qui prend les formes asymptotiques suivantes (voir **Annexe**) :

$$\begin{aligned} \hat{G}_\lambda(\mathbf{q}) &\xrightarrow[q \gg \lambda]{} -4 \frac{q_x^2 q_y^2}{q^4} \Rightarrow G_\lambda(\mathbf{r}) \xrightarrow[r \ll \xi]{} \sim \frac{\cos 4\theta}{r^2} \\ \hat{G}_\lambda(\mathbf{q}) &\xrightarrow[q \ll \lambda]{} -4 \frac{q_x^2 q_y^2}{\lambda^2 q^2} - 1 \Rightarrow G_\lambda(\mathbf{r}) \xrightarrow[r \gg \xi]{} \sim \frac{\cos 4\theta}{r^4} \end{aligned} \quad (1.47)$$

Ainsi, dans l'espace réel, en dehors de la relaxation globale imposée par le terme de dissipation, la redistribution du système écranté est la même que celle dans le problème original à petite distance  $r \ll \xi$ , décroissant comme  $\sim 1/r^2$ , mais, au-delà de la longueur d'écrantage, celle-ci décroît significativement plus vite, comme  $\sim 1/r^4$ . Ainsi, comme dans le cas des suspensions, l'écrantage ne supprime pas le caractère de longue portée de l'interaction mais change son évolution algébrique.

In fine, il semble aussi que la transition vers l'écoulement des matériaux amorphes peut être comprise dans le cadre CDP avec la présence d'interactions à longue portée.

### 1.4.3 Conclusion de la section

En conclusion, si les deux transitions présentent au premier abord toutes les caractéristiques nécessaires à l'appartenance à la classe CDP, celles-ci s'en démarquent par la présence d'interactions à longue portée médiées par le milieu. Dans le cas de la transition de réversibilité, ces interactions sont les interactions hydrodynamiques médiées par le fluide visqueux. Dans le cas de la transition vers l'écoulement, ce sont les interactions de redistribution de type Eshelby, médiées par le milieu élastique. Dans le cadre de la théorie des phénomènes critiques, ce genre d'interactions à décroissance algébrique ont un effet bien connu.

## 1.5 Longue portée et comportement critique

Dans cette section, nous présentons l'influence générique des interactions de longue portée sur la criticalité d'un système. En s'attachant à l'exemple de la classe d'universalité CDP, nous montrons alors en quoi cette compréhension canonique ne permet a priori pas d'appréhender la transition de réversibilité et la transition vers l'écoulement.

### 1.5.1 Phénoménologie

Dans de nombreux systèmes de physique statistique, les interactions entre agents prennent un caractère non-local. Dans la plupart de ces cas, cette non-localité peut-être représentée

par des interactions décroissant algébriquement avec la distance  $r$  séparant les agents, soit comme  $\sim 1/r^\alpha$  avec  $\alpha > 0$ . On peut par exemple penser aux interactions de Coulomb entre deux charges ou aux interactions gravitationnelles entre deux masses qui décroissent comme  $\sim 1/r$  en trois dimensions, soit  $\alpha = 1$ .

Via cette non-localité, un agent du système interagit avec tous les autres agents du système, de manière d'autant plus importante que la portée de l'interaction est grande (i.e.  $\alpha$  petit). Dans la limite où cette portée est infinie, tous les agents interagissent de manière équivalente entre eux, détruisant ainsi la notion d'espace dans le système. De ce fait, son comportement équivaut celui du champ moyen associé. À l'opposé de ce spectre, dans la limite où cette portée est infiniment faible, l'interaction non-locale n'est significative que dans la voisinage direct de chaque agent. Ainsi, ce cas se rapporte à la présence d'interactions locales uniquement.

Dans les systèmes présentant des transitions de phase, cette idée se retrouve dans le comportement critique associé. Lorsque l'on généralise l'interaction locale sous-jacente d'un phénomène critique au cas de longue portée, décrit par un exposant  $\alpha$ , le comportement critique présente deux cas limites. Dans la limite de grande portée, le comportement critique retrouvé est celui du champ moyen, décrit par des exposants critiques triviaux. À l'inverse, dans la limite de courte portée, les exposants critiques décrivant le système prennent leur valeur non-triviale de dimension finie. Dans le cas général, ces deux comportement limites ne prennent pas uniquement place pour des formes asymptotique de la portée d'interaction. À la place, il est possible d'identifier deux bornes  $\alpha^+$  et  $\alpha^-$  définissant deux zones. Dans toute la gamme d'exposants  $\alpha > \alpha^+$ , le système présente son comportement critique de courte portée, associé au cas faisant intervenir des interactions locales uniquement. De la même façon, dans toute la gamme d'exposants  $\alpha < \alpha^-$ , le comportement critique mesuré est celui du champ moyen associé.

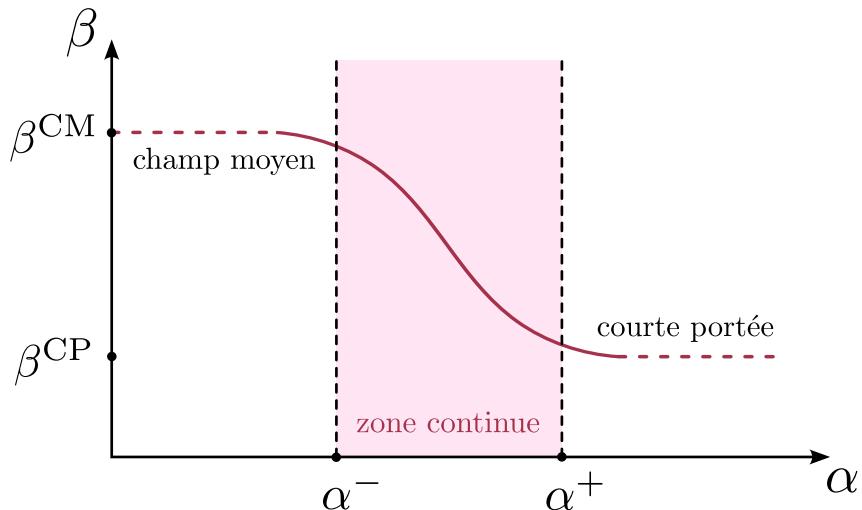


FIGURE 1.18 – Évolution générique de l'exposant  $\beta$  avec la portée d'interaction.  $\beta^{CP}$  est l'exposant attendu dans un modèle avec interactions locales et  $\beta^{CM}$  est l'exposant attendu dans le cas champ moyen. Cette évolution générique est retrouvée pour les autres exposants critiques.

Dans le cas d'une portée intermédiaire  $\alpha^- < \alpha < \alpha^+$ , plusieurs scénario sont intuitivement possibles. En fait, ce que l'on observe et rationalise c'est qu'entre ces deux bornes, le comportement critique évolue continûment avec la portée. Chaque exposant critique prend une valeur unique dépendant uniquement de la portée  $\alpha$ , reliant une valeur de courte portée pour  $\alpha = \alpha^+$  à une valeur de champ moyen pour  $\alpha = \alpha^-$ , comme représenté à la figure 1.18. Ainsi, il est possible de définir une infinité continue de classes d'universalité associées à celle de courte portée. Par exemple, la classe d'Ising en 2D avec une interaction caractérisée par  $\alpha = 3.5$ , définit une classe d'universalité, représentée par des valeurs précises de chaque exposant critique, différentes de celles obtenues avec des interactions locales et de celles obtenues en champ moyen.

Dans l'idée que les transitions de réversibilité et d'écoulement se rapprochent de transitions appartenant à la classe CDP avec des interactions à longue portée, nous nous penchons sur la généralisation de la classe CDP à longue portée dans la suite de cette section.

### 1.5.2 Formulation théorique dans la classe CDP

#### Modification des équations de champ

Il est possible de comprendre la phénoménologie liée à l'ajout d'interactions à longue portée via les théories continues associées aux phénomènes critiques. Généralement, dans le cas de la présence d'interactions à longues portées, les équations de champ sont modifiées par l'ajout de termes d'interactions généralisés. Là où les interactions locales sont représentées par l'opérateur laplacien  $\Delta$ , représenté par un terme en  $\sim q^2$  dans l'espace réciproque, les interactions non-locales sont représentées par l'opérateur laplacien fractionnaire  $\Delta_\alpha$ , représenté par un terme en  $\sim q^{\alpha-D}$  dans l'espace réciproque [78]. Dans le cas de la théorie de champ CDP, les équations généralisées prennent donc la forme :

$$\begin{aligned}\partial_t A(\mathbf{r}, t) &= (\omega\rho(\mathbf{r}, t) - r)A(\mathbf{r}, t) - uA^2(\mathbf{r}, t) + \kappa\Delta A(\mathbf{r}, t) + \kappa_\alpha\Delta_\alpha A(\mathbf{r}, t) + \sigma\sqrt{A(\mathbf{r}, t)}\eta(\mathbf{r}, t) \\ \partial_t \rho(\mathbf{r}, t) &= \kappa\Delta A(\mathbf{r}, t) + \kappa_\alpha\Delta_\alpha A(\mathbf{r}, t)\end{aligned}\tag{1.48}$$

avec :

$$\Delta_\alpha A(\mathbf{r}, t) \propto \int d\mathbf{r}' \frac{A(\mathbf{r} + \mathbf{r}') - A(\mathbf{r})}{|\mathbf{r}'|^\alpha}\tag{1.49}$$

On appellera cette théorie LR-CDP pour *long-range conserved directed percolation*. Il est à noter que ce type de cadre théorique n'est pas propre à cette classe, on le retrouve génériquement pour les autres théories comme la théorie  $\phi^4$  ou la théorie DP [78, 79].

#### La longue portée comme transport

Basé sur cette formulation continue, dans le cadre LR-CDP, la non-localité se traduit donc comme une redistribution de la masse à longue portée sous l'effet de l'activité. Plus spécifiquement, cela revient à considérer que les particules actives (comme dans le ROM ou le modèle Manna) font des sauts  $\mathbf{r}'$  distribués selon  $P(\mathbf{r}') \sim 1/|\mathbf{r}'|^\alpha$ , et non

plus uniquement dans leur voisinage direct. Dans cette approche, les interactions à longue portée représentent donc un transport.

Dans le cas de la transition de depinning appartenant à la classe CDP, nous avons associé la redistribution de masse à la redistribution de force élastique. Ainsi, l'extension à la théorie LR-CDP correspond dans ce cas à des interactions élastiques à longue portée. Le propagateur qui redistribue cette force élastique est alors le pendant direct de la distribution de probabilité des sauts dans les modèles de particules. On peut donc voir dans le depinning à longue portée un transport de la force élastique à longue portée. C'est en fait un cas d'étude qui a concentré de nombreux travaux car beaucoup de problèmes de depinning, notamment ceux présentés à la [sous-sous-section 1.3.4.2](#), présentent de l'élasticité à longue portée. En effet, la propagation de la ligne triple et des fronts de fracture sont par exemple toutes les deux caractérisées par  $\alpha = 2$  en  $D = 1$ .

### Zone continue d'évolution des exposants

Pour déterminer les bornes  $\alpha^+$  et  $\alpha^-$  dans le cadre de la théorie LR-CDP, nous pouvons raisonner sur des arguments d'échelle.

Par définition, la borne de courte portée  $\alpha^+$  résulte d'une compétition entre le terme d'interaction local en  $\Delta A$  et le terme d'interaction à longue portée en  $\Delta_\alpha A$ . Pour comparer l'importance de ces deux termes, il est plus simple de raisonner dans l'espace réciproque. Dans ce cas, l'interaction locale est représentée par un terme en  $\sim q^2$  tandis que l'interaction non-locale par un terme en  $\sim q^{\alpha-D}$ . À grande échelle ( $q \rightarrow 0$ ), le terme local prédomine donc dans la limite  $\alpha > D + 2$  alors que le terme non-local l'emporte pour  $\alpha < D + 2$ . Ainsi, on a  $\alpha^+ = D + 2$ . Dans le cas qui nous intéresse, en deux dimensions, nous nous attendons donc à ce que l'interaction à longue portée affecte le comportement critique seulement pour  $\alpha < 4$ . En-deçà de cette portée, on retrouve le comportement habituel de la classe CDP en 2D.

Pour identifier la borne  $\alpha^-$ , nous pouvons mener une analyse d'échelle sur l'[équation 1.48](#) pour déterminer la dimension critique supérieure associée, de la même manière que dans la théorie  $\phi^4$  ou DP à courte portée (voir [sous-sous-section 1.2.1.3](#)). En gardant en mémoire que le terme d'interaction pertinent dans ce cas est le terme non-local, nous trouvons simplement :

$$D_c = 2(\alpha - D) \quad (1.50)$$

Par définition on a  $\alpha = \alpha^-$  lorsque  $D_c = D$ , puisque l'on arrive dans ces deux cas à la validité de l'approximation champ moyen. Finalement on a donc ici  $\alpha^- = 3D/2$ . Ainsi, en 2D on a  $\alpha^- = 3$ .

In fine, dans le cadre de la théorie LR-CDP, nous attendons une évolution continue des exposants critiques pour des portée  $3 < \alpha < 4$  en 2D. Pour  $\alpha > 4$ , nous nous attendons à retrouver le comportement de courte portée de la classe CDP en 2D et pour  $\alpha < 3$ , celui de la classe triviale champ moyen associée à CDP. Ces bornes  $\alpha^+ = D + 2$  et  $\alpha^- = 3D/2$

déterminées par simple analyse dimensionnelle sont en fait connues depuis longtemps dans le cadre de la théorie du depinning à longue portée.

### 1.5.3 Prédictions et contradictions

#### 1.5.3.1 Évolution attendue des exposants dans la théorie LR-CDP

Pour connaître qualitativement le comportement critique attendu dans le cadre de la théorie LR-CDP, il suffit donc de connaître le comportement critique de la classe CDP et celui du champ moyen associé. Dans cette partie, nous proposons un bref aperçu des évolutions prévues par cette théorie sur les différents exposants en se concentrant sur le cas bidimensionnel.

##### Exposants critiques

Pour la classe CDP en 2D, nous avons notamment  $\beta \approx 0.64$  et  $\gamma' = 0.37$  alors que dans le cas champ moyen nous avons  $\beta = 1$  et  $\gamma' = 0$ . Ainsi, en augmentant progressivement la portée de l'interaction dans le système, nous nous attendons à retrouver une évolution de l'activité avec la distance au point critique de moins en moins concave, pour finalement atteindre une évolution linéaire. De la même manière, nous nous attendons à observer des fluctuations de l'activité qui divergent de moins en moins fortement à l'approche du point critique, jusqu'à atteindre une constance totale.

##### Avalanches

Pour ce qui est du phénomène dynamique d'avalanches, on a pour la classe CDP en 2D  $\tau \approx 1.27$  et  $d_f \approx 2.75$  [19, 34, 80–82] alors qu'en champ moyen on a  $\tau = 1.5$  et  $d_f = D$ . Nous nous attendons alors qu'en augmentant la portée d'interaction dans un modèle s'inscrivant dans la théorie LR-CDP, les distributions de taille d'avalanche deviennent moins larges et les avalanches moins compactes.

##### Hyperuniformité

En ce qui concerne l'hyperuniformité, directement reliée à la rugosité dans la transition de depinning, nous avons en 2D  $\eta \approx 0.5$  soit  $\sigma \approx 0.75$  alors qu'en champ moyen nous avons  $\eta = 0$  soit  $\sigma = 1$  [34]. Nous nous attendons donc qu'à mesure que  $\alpha$  diminue et se rapproche de  $\alpha = 3$ , les propriétés d'hyperuniformité dans le système se perdent.

#### 1.5.3.2 Retour sur la transition de réversibilité et la transition vers l'écoulement

Dans la section précédente, nous avions présenté les transitions de réversibilité et d'écoulement comme similaires à la classe CDP à laquelle s'ajoutaient des interactions à longue portée. La théorie naturelle pour comprendre leur criticalité est donc LR-CDP. Toutefois, nous avons montré que des études précédentes de ces transitions amenaient à une évolution convexe du paramètre d'ordre, avec  $\beta > 1$ . Or, dans le cadre de la théorie LR-CDP, la transition reste concave à toutes les portées, voire linéaire tout au plus dans le cas  $\alpha < 3$ . De plus, dans le modèle de la transition de réversibilité proposé par Mari et al. [14], une

annulation des fluctuations de l'activité à l'approche du point critique a été mesurée. Or dans le cadre de la théorie LR-CDP, nous attendons une divergence de celles-ci à toute les portées.

Ainsi, de manière surprenante, il ne semble pas possible de comprendre ces deux transitions dans le cadre de la théorie LR-CDP. L'objectif de cette thèse est donc de comprendre pourquoi les criticalité présentées par ces modèles sont si différentes de celles attendues théoriquement et comment appréhender ces différences dans un nouveau cadre commun.

## 1.6 Problématisation

### 1.6.1 Des interactions à longue portée de nature différente

Ce qui motive l'étude comparée de la transition de réversibilité et de la transition vers l'écoulement, c'est qu'en plus de présenter cette convexité inattendue, les deux transitions semblent faire intervenir un mécanisme de même nature. Dans le cadre de la compréhension générique des interactions à longue portée, via la théorie LR-CDP, nous avons souligné que celles-ci peuvent être vues comme un transport sous l'action de l'activité. Ce transport prend la forme d'une redistribution à longue portée de la masse dans les modèles de particules et d'une redistribution à longue portée de force élastique dans les modèles de depinning. Or, dans la transition de réversibilité et d'écoulement, les interactions à longue portée médiées par le milieu ne peuvent pas vraiment être comprises comme telles.

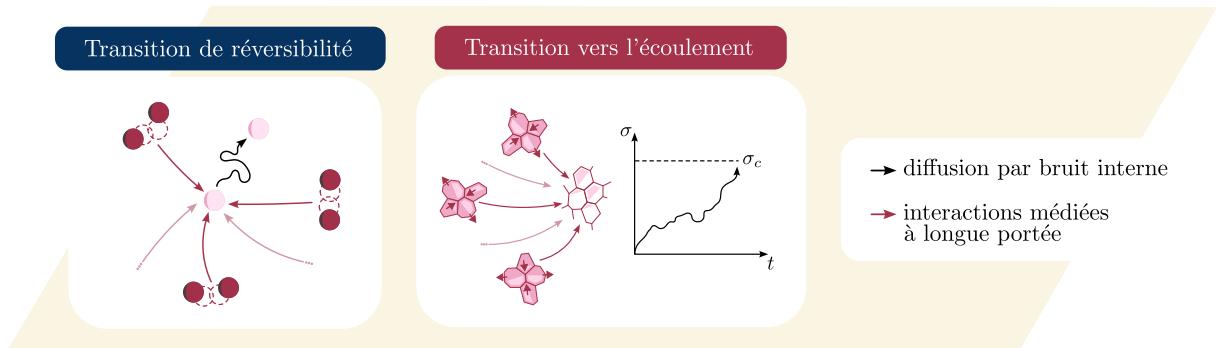


FIGURE 1.19 – Nouveaux mécanismes de création d'activité induits par les interactions à longue portée dans la transition de réversibilité et la transition vers l'écoulement.

Dans le cas de la transition de réversibilité, les interactions hydrodynamiques provoquent des petits déplacements des particules dans tout le milieu suite à un événement irréversible. Ainsi, ce n'est pas la particule à l'origine de l'interaction irréversible qui est transportée à longue portée, mais plutôt l'influence de l'activité sur les particules qui est à longue portée. Dans ce cas, la longue portée ne prend pas la forme d'un transport mais plutôt d'un bruit interne : chaque particule est soumise à des petits déplacements induits à longue portée par l'activité dans le système. Un nouveau mécanisme potentiel de création d'activité prend place : via l'influence de ce bruit interne, l'orbite stable associée à une particule passive peut se déformer progressivement jusqu'à rencontrer une autre orbite

stable et ainsi créer un évènement irréversible. En d'autres termes, la création d'activité peut être approchée par une sorte de diffusion (et non plus par un déplacement fini issu d'un évènement irréversible précédent).

Comme nous l'avons mentionné à la [sous-section 1.4.2](#), la transition vers l'écoulement est très proche de celle du depinning. De la même façon que l'on peut voir la redistribution de force élastique dans le depinning comme un transport, on peut appréhender une partie de la redistribution de contrainte dans la transition vers l'écoulement comme un transport. Lors du réarrangement plastique d'une région, la contrainte locale de celle-ci est relaxée et transmise aux autres régions du matériaux. Toutefois, l'effet complet de la redistribution ne peut pas être appréhendée comme tel. En effet, comme nous l'avons montré à la [sous-section 1.4.2](#), le propagateur d'Eshelby est de signe alterné. Ainsi, à la différence du propagateur élastique associé au depinning qui est toujours positif, il ne peut pas être le pendant direct de la distribution de probabilité associée au transport de masse dans les modèles de particules. À la place, la propriété de signe alterné montre qu'une partie de l'interaction peut être comprise comme un bruit mécanique, qui peut autant stabiliser que déstabiliser une région du matériau. Cette interprétation n'est d'ailleurs pas nouvelle dans le cadre de cette transition [68, 83]. Ainsi, en plus du mécanisme de transport qui tend à déstabiliser globalement le matériau, un mécanisme de diffusion des contraintes locales vers les contraintes seuils locales prend place (voir [figure 1.19](#)). De la même manière que dans la transition de réversibilité, on a donc un mécanisme de diffusion vers la création d'activité.

Ainsi, dans ces deux transitions présentant un comportement critique non-conventionnel, nous retrouvons un mécanisme de diffusion vers la création d'activité issue des interactions à longue portée. Nous pensons alors que c'est ce mécanisme, hors du cadre de description proposé par la théorie LR-CDP, qui permet d'expliquer les spécificités associées à la transition de réversibilité dans les suspensions cisailées cycliquement et à la transition vers l'écoulement des matériaux amorphes. À partir de ce point de nombreuses questions se posent.

## 1.6.2 Questions guidant ce travail

### Quelle criticalité caractérise les transition de réversibilité et d'écoulement ?

Le premier axe de recherche autour duquel s'articule ce travail correspond à la caractérisation des deux transitions. Nous nous demanderons notamment quelles sont les valeurs prises par les exposants critiques dans le cas d'interactions à longue portée réalistes, i.e. réalisables en conditions expérimentales. Plusieurs questions concernant cette caractérisation découlent de l'étude menée par Mari et al. [14] sur la transition de réversibilité avec portée infinie des interactions médiées par le milieu.

Nous nous demanderons d'abord si les spécificités non conventionnelles révélées par cette étude sont toujours présentes dans un système présentant une transition de réversibilité avec des interactions à portée finie. Notamment, nous chercherons à savoir si la transition reste dans ce cas convexe  $\beta > 1$  et avec des fluctuations qui s'annulent à l'approche du

point critique  $\gamma' < 0$ . Par ailleurs, dans cette étude de portée infinie, la double non-conventionnalité  $\beta > 1$  et  $\gamma' < 0$  avait été rationalisée par la relation d'hyperscaling  $2\beta + \gamma' = \nu_\perp D$ , qui justifie une valeur anormalement faible de  $\gamma'$  dans le cas d'une valeur anormalement grande de  $\beta$ . Les caractérisations précédentes de la transition vers l'écoulement révélant un exposant  $\beta > 1$ , nous nous demanderons alors si, vue comme une transition de phase absorbante, celle-ci présente aussi des fluctuations d'activité qui s'annulent à l'approche du point critique.

Mari et al. ont par ailleurs montré que la propriété d'hyperuniformité était effacée par l'ajout des interactions hydrodynamiques de portée infinie. Nous nous demanderons alors si cette perte d'hyperuniformité est aussi retrouvée dans les cas de portées réalistes de l'interaction. Par analogie, nous transposerons cette question dans le cas de la transition vers l'écoulement : le système présente-t-il une forme d'hyperuniformité en présence des interactions élastiques d'Eshelby à longue portée ?

Enfin, nous nous demanderons, sans attendu préalable, la forme prise par les dynamiques d'avalanches proche du point critique dans ces deux systèmes.

### **Quelle est l'influence de la portée des interactions médiées sur la criticalité de ces systèmes ?**

Nous avons montré que les transitions de réversibilité et d'écoulement ne semblent pas pouvoir être décrite dans le cadre LR-CDP. Dès lors, le rôle de la longue portée des interactions dans ces systèmes n'est pas évident. Nous chercherons à comprendre de manière systématique l'influence de la portée sur les différents aspects de la criticalité de ces systèmes, i.e. à déterminer comment évoluent chacun des exposants critiques caractérisant l'état stationnaire du système, son hyperuniformité et sa dynamique d'avalanche en fonction de l'exposant de portée  $\alpha$ .

Nous chercherons alors à comparer ces évolutions avec celles initialement attendues dans le cadre LR-CDP, afin de comprendre dans quelle mesure cette nature différente des interactions rend ce cadre théorique inadéquat.

### **Peut-on comprendre ces systèmes dans un cadre de description commun, différent de celui proposé par la théorie LR-CDP ?**

Le troisième axe d'étude consiste à comprendre la transition de réversibilité et d'écoulement dans un cadre commun. Notamment nous nous interrogerons sur la possibilité d'une description champ moyen permettant de rendre compte des observations faites sur les dynamiques en dimension finie, via la prise en compte du nouveau mécanisme de création proposé par les interactions médiées à longue portée. La mise en place de ce cadre pourrait alors aider à mettre en évidence les similarités et les différences éventuelles entre ces deux phénomènes. Aussi, nous nous interrogerons sur la possibilité d'une description continue, à la manière des équations de champ dans la théorie LR-CDP, pour décrire la dynamique de ces systèmes en toutes dimensions.

### 1.6.3 Déroulé du manuscrit

Pour répondre à toutes les questions révélées par ce chapitre, nous organiserons ce manuscrit comme suit :

Dans le [chapitre 2](#), nous caractériserons quantitativement le cadre théorique LR-CDP en 2D pour pouvoir mener convenablement, par contraste, l'étude des transitions de réversibilité et d'écoulement dans les chapitres suivants. Pour ce faire, nous généraliserons les modèles Manna et ROM dans le cas d'un transport à longue portée et caractériserons l'évolution des exposants critiques et des propriétés d'hyperuniformité en fonction de la portée de la redistribution de masse.

Dans le [chapitre 3](#), nous nous concentrerons sur la transition de réversibilité dans les suspensions cisaillées cycliquement. En généralisant le modèle numérique initialement proposé par Mari et al. [14], nous étudierons la criticalité du système associée à différentes portées des interactions hydrodynamiques. Cette caractérisation se fera via la détermination des exposants critiques et l'étude des propriétés d'hyperuniformité et des statistiques d'avalanches. Ensuite, nous proposerons un modèle champ moyen permettant de rendre compte des spécificités de la transition via la compréhension du mécanisme de diffusion induit par les interactions médiées à longue portées. Nous comparerons enfin les prédictions de ce modèle avec les résultats obtenus en dimension finie afin de mettre en évidence les sources de complexité dans la dynamique réelle.

Dans le [chapitre 4](#), nous nous concentrerons sur la transition vers l'écoulement des matériaux amorphes. Nous proposerons tout d'abord une étude détaillée de la transition en présence d'interactions élastiques d'Eshelby, via l'utilisation d'un modèle mésoscopique numérique. Ensuite, nous mettrons en évidence deux ingrédients susceptibles d'expliquer les spécificités de la criticalité associée : celui déjà évoqué concernant la nature spécifique des interactions à longue portée, et une symétrie particulière retrouvée dans le propagateur de redistribution. Puis, nous procéderons à une généralisation de notre modèle pour étudier différentes portées d'interactions afin de comprendre l'influence de ces dernières sur le comportement critique. Encore une fois, cette caractérisation portera sur l'évolution des exposants critiques, des propriétés d'hyperuniformité et de la dynamique d'avalanches.

Enfin, dans un dernier chapitre, nous mettrons face à face les résultats obtenus dans les deux chapitres précédents. Cela nous permettra de tisser une analogie directe entre la transition de réversibilité dans les suspensions cisaillées cycliquement et la transition vers l'écoulement des matériaux amorphes. Nous discuterons alors de l'application du cadre théorique présenté au [chapitre 3](#) dans le cadre de la transition de réversibilité à la transition vers l'écoulement. Cette analyse permettra de marquer les points communs et les différences entre les deux systèmes et d'en fournir une image compréhensive globale, montrant l'utilité d'une telle étude comparée. Pour terminer cette discussion, nous présenterons finalement les pistes explorées du point de vue d'une modélisation systématique de ces systèmes, via la formulation d'équations de champ. Les résultats préliminaires obtenus ouvriront la voie sur de nouvelles pistes de réflexion pour la continuation de ce projet.

# Chapitre 2

## Transport à longue portée dans la classe CDP

### Pré-requis

- Présentation des exposants critiques et de la relation d'hyperscaling
- Présentation de la notion d'hyperuniformité dans la classe CDP
- Présentation du cadre théorique LR-CDP et les prédictions analytiques associées pour l'évolution de l'hyperuniformité.
- Présentation des modèles Manna et ROM comme représentants de la classe CDP.

Dans le chapitre précédent, nous avons présenté la percolation dirigée conservée comme une classe d'universalité recouvrant un grand nombre de transitions de phase absorbantes en matière molle. Un système appartenant à cette classe est décrit par un ensemble de comportements et d'exposants critiques caractéristiques de la criticalité associée. Par exemple, en notant  $\langle A \rangle$  l'activité moyenne dans le système,  $\langle \delta A^2 \rangle$  ses fluctuations,  $\xi$  la longueur de corrélation et  $\epsilon$  la distance au point critique, les exposants  $\beta$ ,  $\gamma'$  et  $\nu_\perp$  permettent de définir les évolutions suivantes proche de la transition :

$$\langle A \rangle \sim \epsilon^\beta, \quad \langle \delta A^2 \rangle \sim \epsilon^{-\gamma'}, \quad \xi \sim \epsilon^{-\nu_\perp} \quad (2.1)$$

Ces exposants sont connus exactement dans l'approximation de champ moyen avec  $\beta^{\text{MF}} = 1$ ,  $\gamma'^{\text{MF}} = 0$ ,  $\nu_\perp^{\text{MF}} = \frac{1}{2}$  et mesurés et calculés précisément en dimension finie  $D < 4$  en présence d'interactions à courte portée.

Un cadre théorique, baptisé LR-CDP au chapitre précédent, permet d'appréhender l'évolution de cette criticalité suite à l'ajout d'interactions à longue portée sous forme de transport. Dans ce cas, il est attendu que sur une gamme de portées bien définie tous les exposants critiques caractérisant la transition évoluent continûment de leur équivalent de courte portée à leur équivalent de champ moyen. L'identification de cette gamme peut se faire théoriquement de manière exacte. Cependant la détermination analytique de l'évolution de chaque exposant en son sein est soumise à certaines approximations. Des mesures sur des modèles numériques sont donc nécessaires pour déterminer totalement la criticalité des systèmes dans cette zone.

Dans ce chapitre nous proposons de compléter par des mesures numériques le cadre théorique LR-CDP en 2D, dimension sur laquelle se concentre le principal de nos travaux. Par l'étude de l'évolution des exposants critiques statiques, dynamiques et d'hyperuniformité, nous précisons l'influence d'un transport à longue portée sur les systèmes appartenant initialement à la classe CDP. La complétion de ce cadre nous permettra alors d'analyser plus précisément, par contraste, les transitions aux comportements inhabituels étudiées dans les chapitres suivants.

## 2.1 Motivations

Dans cette section, nous motivons un peu plus spécifiquement la caractérisation numérique du cadre théorique LR-CDP en deux dimensions.

### 2.1.1 Compléter la littérature

Comme nous l'avons mentionné à la [section 1.5](#), de nombreuses études se sont déjà intéressées à l'influence d'un transport à longue portée sur le comportement critique des transitions de phase absorbantes. Dans le cadre de la percolation dirigée, cette influence a notamment été caractérisée de manière exhaustive en 1D [78, 84] et en 2D [85] sur des modèles de particules. Dans le cadre de la percolation dirigée conservée, cadre d'intérêt pour ce travail, les seules études numériques caractérisant l'impact de ce type d'interactions à longue portée viennent de l'étude de la transition de depinning. Cependant, cette dernière trouvant essentiellement des réalisations physiques en 1D avec le cas de la ligne élastique, ces études se sont concentrés jusque là uniquement sur le cas monodimensionnel [39, 86–88].

Dans ces travaux, les résultats numériques restent fidèles aux prédictions théoriques et confirment une évolution continue des exposants dans une gamme de portée déterminable par une analyse d'échelle. Toutefois, aucune étude à notre connaissance n'a été réalisée dans le cas d'un système appartenant à la classe CDP en 2D. Il manque alors à cette littérature un point de comparaison essentiel à notre étude dans les chapitres suivants. Par ailleurs cette caractérisation peut s'avérer utile en soi, simplement pour tester les prédictions analytiques disponibles à cette dimension [89].

### 2.1.2 Un cadre d'intérêt réel

Bien que cela constitue notre motivation principale, la caractérisation de l'impact du transport à longue portée sur les systèmes de la classe CDP en 2D n'a pas seulement un intérêt théorique. En effet, certains modèles ou même certaines réalisations physiques correspondent vraisemblablement à cette situation. Cette étude peut alors permettre l'appréhension de leur criticalité plus spécifiquement.

Les réalisations physiques les plus évidentes de ce cadre sont celles associées à la transition de depinning, de laquelle nous pouvons tirer deux exemples. Le premier est le mouvement de l'interface d'un fluide dans un milieu poreux par action de la gravité [90].

Dans ce cas, le mouvement de l'interface bidimensionnelle peut être sujet à des interactions à longue portée permises par le fluide en volume. Le second concerne le mouvement des parois des domaines magnétiques dans les milieux magnétiques tridimensionnels [91]. Dans ce cas, ce sont les interactions entre charges magnétiques qui induisent la longue portée.

Un autre type de réalisations envisageables concerne les modèles épidémiques. Ces modèles que nous avons déjà introduit comme présentant une transition de phase absorbante ont de bonnes raisons d'introduire un transport à longue portée. En effet, dans ce cadre, celui-ci représente la capacité des vecteurs, i.e. des personnes, à se déplacer : par exemple une personne infectée prenant le train est susceptible de contaminer une autre personne à des kilomètres. La plupart des modèles épidémiologiques sont plutôt enclins à appartenir à la classe DP [92]. C'est notamment le cas du modèle SIS bien connu [93]. Toutefois, certains modèles plus complexes, faisant intervenir une diffusion locale des agents, peuvent présenter une criticalité différente, et dans une certaine limite, celle de la classe CDP [94]. Dans ce cadre, l'ajout d'un transport à longue portée pourrait donc effectivement être compris dans le cadre LR-CDP.

L'avantage du principe d'universalité est que, pour caractériser le comportement de tous ces systèmes, il suffit d'en caractériser un seul appartenant à la même classe. En étudiant un modèle numérique appartenant au cadre théorique LR-CDP en 2D, nous proposons une caractérisation de tous ces autres systèmes hypothétiques appartenant à la même classe. In fine, le but de notre étude est donc double : développer une base de comparaison pour nos travaux et proposer une caractérisation numérique manquante dans la littérature mais pas intéressante.

## 2.2 Modèles

Pour étudier l'influence du transport à longue portée dans la classe CDP en 2D, nous nous concentrons sur deux modèles emblématiques déjà présentés à la [sous-section 1.3.2](#) : le modèle Manna et le ROM. Dans cette section, nous présentons l'implémentation numérique précise de ces deux modèles et leur généralisation par l'ajout d'un transport à longue portée. Cette généralisation nous permettra alors d'étudier le comportement critique de ces modèles numériques à n'importe quelle portée de transport pour ainsi confronter et compléter la théorie LR-CDP en 2D.

### 2.2.1 LR-Manna

#### 2.2.1.1 Implémentation générale

Nous commençons par présenter notre implémentation du modèle Manna. Le modèle Manna est un modèle très simple, appelant de ce fait une implémentation facilitée. Dans nos simulations, nous considérons un réseau 2D bipériodique de  $N = L \times L$  sites, chacun indiqué par un entier  $i$ , et positionné autour d'une position  $\mathbf{r}_i = na\hat{\mathbf{e}}_x + ma\hat{\mathbf{e}}_y$  avec  $(n, m) \in \mathbb{N}^2$ .  $a$  représente le pas du réseau, que l'on prend égal à 1. Sur l'ensemble de ces  $N$  sites sont disposés initialement et de manière aléatoire  $N_p$  particules.

À chaque pas de temps  $t_i$  de la dynamique, les  $n$  sites accueillant plus de  $m$  particules sont considérés comme actifs. Ceux-ci redistribuent alors l'entièreté de leur masse (i.e. leurs particules) aux sites directement voisins, et ce de manière aléatoire. La redistribution de masse de tous les sites actifs se fait de manière synchrone, i.e. sur le même pas de temps. À la fin de cette redistribution, un nouveau pas de temps est initié. Le schéma numérique associé est relativement parallélisable et nous l'implémentons donc via le langage CUDA [95] afin de réaliser les simulations sur GPU (cartes graphiques). Par opposition aux CPU, les GPU sont dotés d'un bien plus grands nombres de cœurs, permettant ainsi un plus grand nombre d'opérations simultanées. Ces cœurs sont individuellement moins performants mais les opérations nécessaires à la réalisation de la dynamique Manna sont très peu onéreuses et donc particulièrement adaptées à ce type architecture.

L'activité du système au pas de temps  $t_i$  est alors donnée par la proportion de sites actifs  $A(t_i) = n(t_i)/N$ . Par ailleurs, la densité de particules  $\phi$  correspond simplement au rapport  $\phi = N_p/N$  et peut donc prendre des valeurs plus ou moins grandes en fonction du seuil  $m$  choisi. Ce modèle présente alors une transition de phase absorbante séparant une phase active où l'activité  $A$  prend une valeur moyenne finie à temps longs pour  $\phi > \phi_c$ , d'une phase absorbante où le système finit par tomber dans un état absorbant pour  $\phi < \phi_c$ . La valeur de la densité critique du système  $\phi_c$  dépend des détails microscopiques d'implémentation choisis. Elle ne peut donc pas a priori être reprise de travaux précédents.

### 2.2.1.2 Sauts à longue portée

Dans le modèle Manna original, les particules sur les sites actifs font des sauts à courte portée. L'extension de cette dynamique au transport à longue portée y prend donc une forme évidente. Dans ce cas, les particules redistribuées ne le sont plus uniquement sur les sites voisins mais, à la place, celles-ci font des sauts largement distribués. Dans le cadre théorique LR-CDP présenté au chapitre précédent, la longue portée caractérisée par un exposant  $\alpha$  dans l'équation :

$$\partial_t A(\mathbf{r}, t) = aA(\mathbf{r}, t) - bA^2(\mathbf{r}, t) + D\Delta^{\alpha/2}A(\mathbf{r}, t) + \eta\sqrt{A(\mathbf{r}, t)}\xi(\mathbf{r}, t) \quad (2.2)$$

correspond à une probabilité  $P(\mathbf{r})$  de transport de l'activité à une distance  $r$ , définie comme :

$$P(\mathbf{r}) \sim \frac{1}{r^\alpha} \quad (2.3)$$

Dans un espace de dimension  $D$ , cela revient donc à effectuer des sauts de taille  $\Delta$ , distribuée selon :

$$P_\Delta(\Delta) \sim \frac{1}{\Delta^{1+\alpha-D}} \quad (2.4)$$

La première étape de notre implémentation est donc de tirer, pour chaque particule effectuant un saut, un nombre distribué selon l'équation 2.4. Pour ce faire, nous utilisons une méthode d'inversion [96] pour générer des nombres aléatoires distribués selon :

$$P_{\Delta}(\Delta) = \begin{cases} \Delta^{D-\alpha-1}, & \text{si } \Delta > a \\ 0, & \text{sinon} \end{cases} \quad (2.5)$$

Le cut-off à petits  $\Delta$  est nécessaire à l'intégrabilité de la distribution pour  $\alpha > D$ . En pratique, nous commençons par tirer un nombre réel  $x$  uniformément distribué dans  $[0, 1[$  grâce à des algorithmes pré-existants, puis  $\Delta$  est obtenu par la transformation :

$$\Delta = (1 - x)^{\frac{1}{D-\alpha}} \quad (2.6)$$

Nous générerons ensuite une direction aléatoire  $\theta$  permettant de définir le déplacement  $\Delta_x = \Delta \cos \theta$  selon  $\hat{\mathbf{e}}_x$  et  $\Delta_y = \Delta \sin \theta$  selon  $\hat{\mathbf{e}}_y$ . Les deux réels  $\Delta_x$  et  $\Delta_y$  sont alors convertis en entiers pour représenter une distance en nombre de sites. Enfin, les conditions aux limites périodiques sont appliquées pour déterminer le site d'arrivée de la particule. La procédure est complète résumée sur la figure 2.1-(a).

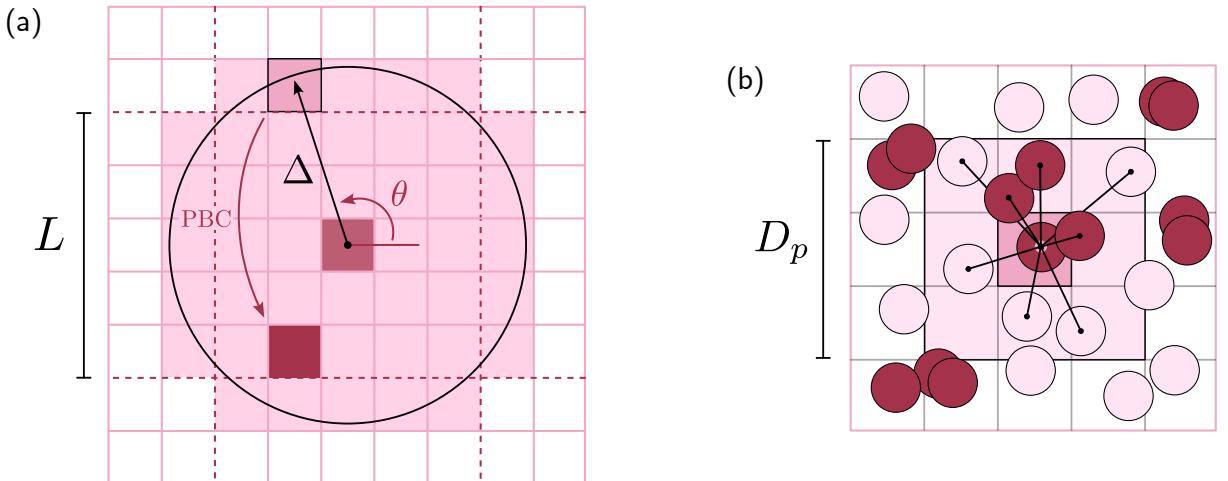


FIGURE 2.1 – Implémentation numérique des modèles LR-Manna et LR-ROM. (a) Procédure de saut à longue portée dans le modèle LR-Manna. PBC signifie *periodic boundary conditions*. (b) Méthode cell-list pour la détermination des recouvrements dans le LR-ROM. En 2D, seules 9 cellules ont besoin d'être sondées pour déterminer les contacts d'une particules.

Par cette implémentation numérique, il est possible d'étudier la transition de phase absorbante associée au modèle pour chaque portée  $\alpha$ . Dans la suite, nous appelons ce modèle généralisé LR-Manna.

## 2.2.2 LR-ROM

Le second modèle que nous utilisons pour notre caractérisation numérique est le ROM. Ce modèle étant très proche du modèle Manna, son implémentation est très similaire.  $N_p$  particules sont donc disposées initialement aléatoirement sur un espace 2D bipériodique de volume  $L \times L$ . La différence principale entre le ROM et le modèle Manna vient du fait que la dynamique des particules a lieu dans ce cas en espace continu (par opposition au réseau de sites du modèle Manna). Dans ce modèle, la condition de mise en activité d'une particule située en  $\mathbf{r}$  correspond au recouvrement avec une autre particule, située en  $\mathbf{r}'$ .

En notant  $D_p$  le diamètre des particules, cette condition est équivalente à  $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| < D_p$ . Afin de déterminer si une particule est active au début d'un pas de temps, il est donc nécessaire de calculer sa distance aux autres particules du système. En principe, ce calcul de distance admet une complexité d'ordre  $N_p^2$ , ce qui rend la recherche de recouvrement fastidieuse. Pour remédier à ce problème, nous utilisons une méthode dite cell-list [97] dont le principe est résumé à la [figure 2.1-\(b\)](#).

Le principe de cette méthode est de découper l'espace de volume  $L \times L$  en une collection de  $\frac{L}{b} \times \frac{L}{b}$  cellules. À chaque pas de temps, nous calculons à quelle cellule  $i$  appartient chacune des  $N_p$  particules. La portée de l'interaction de contact étant bornée par  $D_p$ , en choisissant  $b = D_p$ , seules les particules situées dans une cellule voisine<sup>1</sup> de la cellule  $i$  sont susceptibles de recouvrir les particules situées dans la cellule  $i$ . Ainsi, cela restreint le calcul de distance à un sous-ensemble du système, diminuant alors la complexité de l'opération à l'ordre  $N_p$ .

Chaque particule ayant été identifiée comme active en début de pas de temps effectue un déplacement décomposé en deux déplacements aléatoires  $\Delta_x$  et  $\Delta_y$ , chacun de taille typique  $a_p$ . Pour implémenter le transport à longue portée dans ce modèle, nous utilisons exactement la même méthode que dans le cas du modèle Manna, simplement cette fois la conversion en nombres entiers n'est pas nécessaire. Le schéma numérique global alors relativement parallélisable est aussi implémenté sur une architecture GPU afin de gagner en efficacité de calcul.

À la différence du modèle Manna, nous définissons l'activité dans le ROM comme la proportion de particules actives à un pas de temps donné et la densité  $\phi$  comme la fraction d'espace occupée par les particules. Celles-ci étant choisies sphériques au sens général du terme, nous avons  $\phi = \frac{\pi D_p^2 N_p}{4L^2}$  en 2D. Par cette implémentation, nous sommes donc capables d'étudier l'évolution du comportement critique de ce deuxième modèle en présence de transport à longue portée. De la même façon, nous baptisons ce modèle généralisé LR-ROM. Dans la suite de ce travail nous choisissons  $a_p = 1$  et  $D_p = 1$  par souci de simplicité.

## 2.3 Méthodes

La caractérisation du comportement critique d'un système ou d'une classe d'universalité passe par la détermination de ses exposants. Dans cette section, nous présentons les méthodes utilisées pour la détermination spécifique des exposants critiques  $\beta$  et  $\gamma'$ , de l'exposant dynamique  $\delta$  et de l'exposant d'hyperuniformité  $\sigma$ , tous présentés au [chapitre 1](#). Ces méthodes nous permettront de caractériser les transitions dans le LR-ROM et le modèle LR-Manna pour chaque portée  $\alpha$  et seront ensuite réutilisées dans les chapitres suivants. De ce fait, nous nous attachons à les décrire de la manière la plus précise possible.

---

1. Ici la notion de voisinage prend en compte les conditions aux limites périodiques

### 2.3.1 Détermination des exposants critiques

#### 2.3.1.1 Détermination du point critique

La première étape essentielle à la caractérisation d'une transition de phase est la localisation de son point critique. Ici, cela correspond à la détermination de la densité critique  $\phi_c$ . Pour la mettre en oeuvre, nous nous appuyons sur la loi d'évolution du paramètre d'ordre dans le régime critique :

$$\langle A \rangle \sim \delta\phi^\beta, \quad \delta\phi = \frac{\phi - \phi_c}{\phi_c} \quad (2.7)$$

D'après celle-ci, la fonction  $\langle A \rangle = f(\delta\phi)$  correspond à une droite de pente  $\beta$  dans une représentation logarithmique. Cela peut donc représenter une méthode graphique pour la détermination de  $\phi_c$  : la valeur recherchée est celle définissant la distance  $\delta\phi$  permettant d'obtenir la courbe la plus proche d'une droite à petits  $\delta\phi$ . Si nous sous-estimons  $\phi_c$ , alors cette fonction montrera une courbure concave en échelle logarithmique. À l'inverse, si nous sur-estimons  $\phi_c$ , celle-ci montrera une courbure convexe. De cette manière, il est possible d'encadrer graphiquement la valeur adéquate de  $\phi_c$  comme illustré à la figure 2.2-(a). En pratique, afin de mieux percevoir les variations de forme de la courbe, nous examinons aussi l'évolution compensée  $\langle A \rangle / \delta\phi^{\beta_t} = f(\delta\phi)$  par l'évolution attendue avec un exposant test  $\beta_t$  en échelle log-lin (voir figure 2.2-(b)). La méthode graphique d'encadrement associée est alors plus précise. Celle-ci permet alors de définir la densité critique  $\phi_c$  et l'exposant  $\beta$  comme les deux paramètres permettant d'obtenir une courbe constante à petits  $\delta\phi$ .

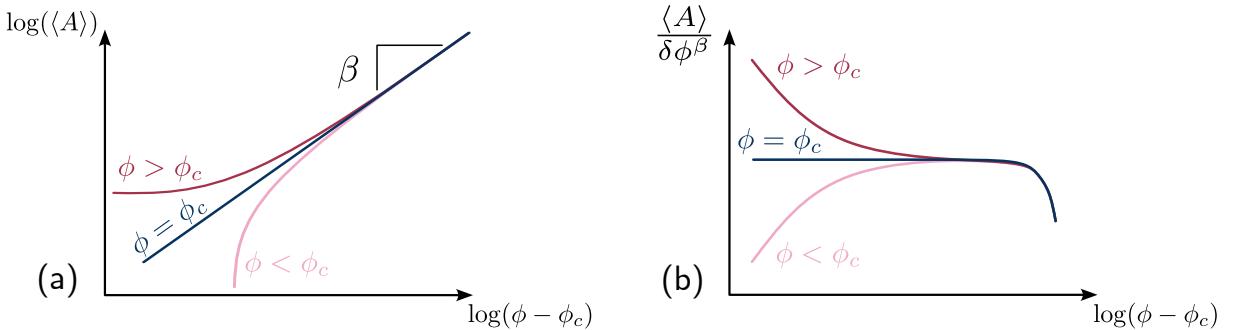


FIGURE 2.2 – Méthode de détermination de la densité critique (a) en échelle logarithmique et (b) en échelle log-lin via une représentation compensée.

Cette mesure repose donc finalement sur la détermination de la courbe  $\langle A \rangle = f(\delta\phi)$  et donc sur les mesures précises de  $\langle A \rangle$  pour différentes densités  $\phi$ . Pour réaliser ces mesures, à une taille  $L$  de système donnée, nous laissons le système relaxer vers l'état stationnaire dans lequel nous mesurons la valeur moyenne de la variable instantanée  $A(t)$ . La détermination du régime stationnaire est effectuée graphiquement en représentant  $A(t) = f(t)$  en échelle logarithmique (voir figure 2.3). Afin de déterminer  $\phi_c$ , nous devons sonder le comportement du système proche du point critique et donc proche de la phase absorbante. Le problème est que, dans un système fini de taille  $L$ , les fluctuations de la dynamique peuvent amener le système dans un état absorbant même pour  $\phi \gtrsim \phi_c$ , rendant

alors la détermination de  $\langle A \rangle$  impossible. Les fluctuations critiques se comportant comme  $L^{-D}$ , il est possible de contourner cet obstacle en considérant des systèmes plus grands. La méthode que l'on choisit consiste alors à augmenter la taille  $L$  du système à mesure que l'on considère des densités  $\phi$  plus proches de  $\phi_c$  afin de ne jamais risquer de tomber dans un état absorbant. In fine, la courbe  $\langle A \rangle = f(\delta\phi)$  obtenue correspond donc à une concaténation de courbes obtenues pour différentes tailles  $L$  du système.

Ne pas se concentrer uniquement sur la plus grande taille  $L$  envisageable est un choix permettant de réduire l'effort numérique associé. En effet, plus un système est grand, plus la simulation de sa dynamique est longue. Cette méthode suppose cependant que toutes ces courbes sont bien équivalentes, i.e. que  $\phi_c$  est indépendant de  $L$ . En théorie  $\phi_c$  présente toujours une dépendance de taille finie, mais dans notre cas il est possible de s'en affranchir raisonnablement. En effet, statistiquement, si un système tombe dans l'état absorbant c'est parce que la longueur de corrélation  $\xi$  de la dynamique associée est devenue au moins comparable à la taille  $L$  de ce système. Or, par définition des effets de taille finie, la dépendance de  $\phi_c$  en  $L$  n'est visible que lorsque la dynamique "ressent" la taille du système, i.e.  $\xi \gtrsim L$ . Ainsi, en ne sondant que les états statistiquement non absorbés, nous pouvons considérer que  $\phi_c$  est indépendante de  $L$ . Cette hypothèse se confirme alors très bien avec nos mesures puisque celles faites à différentes tailles de système se recouvrent parfaitement. Toutefois, cela invite à ne pas sonder le système trop proche de sa limite d'absorption et de préférer systématiquement le passage à une taille supérieure.

### 2.3.1.2 Détermination des exposants statiques

Une fois la densité critique  $\phi_c$  déterminée précisément pour un système, il est possible de mesurer les exposants critiques de la transition. L'exposant statique  $\beta$  est en fait déjà déterminé lors de la détermination de  $\phi_c$  via les méthodes graphiques présentées précédemment. Afin d'obtenir un ordre de grandeur de son incertitude, nous effectuons un ajustement de la courbe  $\langle A \rangle = f(\delta\phi)$  à petits  $\delta\phi$  en échelle logarithmique pour les deux valeurs extrémiales de l'encadrement de  $\phi_c$ .

Pour déterminer l'exposant des fluctuations critiques  $\gamma'$ , nous mesurons la variance de l'activité  $\langle \delta A^2 \rangle$  dans l'état stationnaire sur les mêmes courbes  $A(t) = f(t)$  qui ont permis de mesurer  $\langle A \rangle$ . La densité critique ayant été précédemment déterminée, nous déterminons  $\gamma'$  directement par ajustement de la courbe  $\langle \delta A^2 \rangle = f(\delta\phi)$  en échelle logarithmique. La variance correspondant à un moment d'ordre supérieur par rapport à la moyenne, sa détermination précise est plus délicate. Ainsi, la détermination de  $\gamma'$  sera généralement entachée de plus grandes erreurs. Toutefois, étant donné que nous ne nous concentrerons essentiellement sur l'évolution de  $\gamma'$  avec la portée dans la suite de ce travail, nous nous satisferons d'une telle précision. Les incertitudes sur cette détermination sont associées à l'incertitude sur l'ajustement de la courbe en échelle logarithmique<sup>2</sup>.

---

2. En pratique, nous constatons que les incertitudes liées à la détermination de  $\phi_c$  sont négligeables devant l'incertitude de l'ajustement effectué.

### 2.3.1.3 Détermination de l'exposant dynamique

Comme nous l'avons vu au [chapitre 1](#), en partant d'une configuration initiale aléatoire, proche du point critique, le système relaxe vers l'état stationnaire de manière algébrique :

$$A(t) \sim t^{-\delta} \quad (2.8)$$

L'exposant  $\delta$  ainsi défini permet de caractériser la transition d'un point de vue dynamique. Une difficulté de sa détermination est que le régime de temps dans lequel le comportement de l'[équation 2.8](#) est valable est situé entre un comportement non-universel à temps courts et une saturation à temps long du fait que  $\phi > \phi_c$ . Il n'est donc pas aisément de mesurer  $\delta$  par un simple ajustement sur une unique courbe.

Pour remédier à ce problème, nous utilisons une méthode de redimensionnement comme outil de détermination plus précis. Pour ce faire, nous nous appuyons sur le fait que, hors du régime de temps courts, l'activité dans le système prend la forme :

$$A(t, \delta\phi) \sim \langle A \rangle(\delta\phi) + t^{-\delta} \sim \delta\phi^\beta + t^{-\delta} \Rightarrow \frac{A(t)}{\delta\phi^\beta} \sim 1 + \left( \frac{t}{\delta\phi^{\beta/\delta}} \right)^{-\delta} \quad (2.9)$$

par définition de l'exposant  $\beta$ . Ainsi, si nous redimensionnons  $A(t)$  par  $\delta\phi^\beta$  et  $t$  par  $\delta\phi^{\beta/\delta}$ , nous obtenons une évolution indépendante de la distance au point critique  $\delta\phi$ . En d'autres termes, si l'on mesure l'évolution  $\frac{A(t)}{\delta\phi^\beta} = f\left(\frac{t}{\delta\phi^{\beta/\delta}}\right)$  pour différentes densités  $\phi$ , celles-ci se superposent graphiquement (voir [figure 2.3](#)).  $\beta$  et  $\phi_c$  étant précédemment mesurés,  $\delta$  est alors déterminé comme l'exposant qui permet la superposition de toutes les courbes sur une courbe maîtresse sous ce redimensionnement. L'incertitude de mesure sur cette exposant est alors donnée par la gamme d'exposants pour laquelle la superposition des courbes est jugée satisfaisante. Ce principe de mesure par redimensionnement très efficace sera utilisé à plusieurs reprises dans les chapitres suivants pour mesurer d'autres quantités.

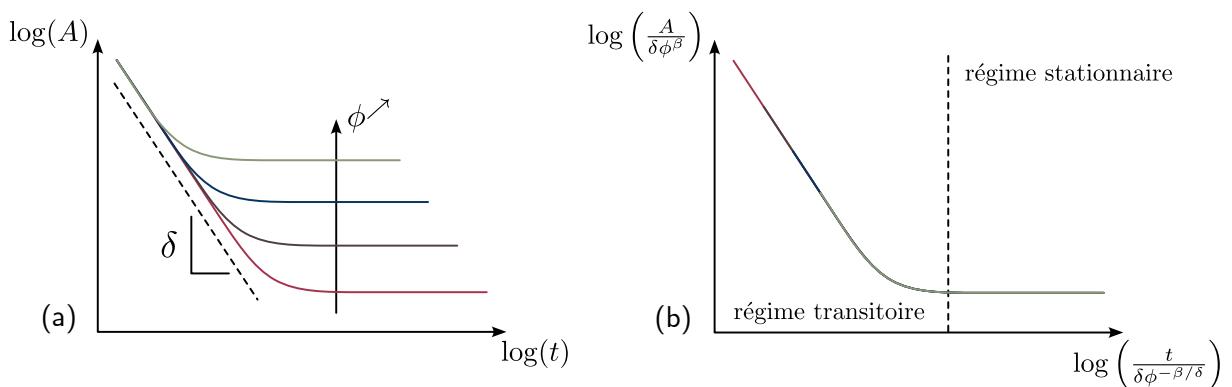


FIGURE 2.3 – Méthode de détermination de l'exposant dynamique  $\delta$ . (a) Évolution de l'activité dans le système en fonction du temps pour différentes densités  $\phi$ . (b) Redimensionnement du temps et de l'activité par la distance au point critique permettant la superposition des différentes courbes sur une courbe maîtresse.

### 2.3.2 Caractérisation de l'hyperuniformité

Dans cette dernière sous-section nous présentons les méthodes utilisées pour sonder les propriétés d'hyperuniformité dans nos modèles. Celles-ci reposant sur des propriétés de structure, nous ne pouvons pas nous limiter à une étude du comportement macroscopique pour déterminer l'exposant  $\sigma$ . Toutefois, la philosophie des mesures utilisées en pratique restent très similaires.

#### 2.3.2.1 Mesure directe du facteur de structure

Comme nous l'avons évoqué au [chapitre 1](#), les systèmes appartenant à la classe CDP exhibent des propriétés hyperuniformes. Proche de la transition, la répartition des particules dans l'espace présente des corrélations à longue portée. Une manière de les caractériser est de passer dans l'espace réciproque. En effet, dans de tels systèmes, cette propriété se traduit par une diminution du facteur de structure  $S(\mathbf{q})$  à petits  $q$  selon :

$$S(\mathbf{q}) \sim q^{\alpha_{\text{HU}}}, \quad 0 < \alpha < 1 \quad (2.10)$$

L'exposant  $\alpha_{\text{HU}}$  permet alors de caractériser la transition de phase au même titre qu'un autre exposant critique. Le cas limite  $\alpha_{\text{HU}} = 0$  représente une répartition totalement décorrélée à grande échelle et le cas  $\alpha_{\text{HU}} = 1$  un ordre parfait, cristallin<sup>3</sup>.

Une manière de quantifier l'hyperuniformité caractéristique d'un comportement critique est donc de mesurer précisément le facteur de structure à petits  $q$  dans un état stationnaire proche du point critique afin d'en déduire une estimation de cet exposant  $\alpha_{\text{HU}}$ .

#### 2.3.2.2 Méthode de box-counting

##### Définition

Une autre façon de procéder est de revenir à la définition initiale de l'hyperuniformité [98]. Comme nous l'avons présenté à la [sous-section 1.3.6](#), dans un système hyperuniforme, la variance  $\langle \delta n^2 \rangle_l$  du nombre de particules contenues dans un sous-ensemble du système de volume  $l^D$  se comporte comme :

$$\langle \delta n^2 \rangle_l \sim \langle n \rangle_l^\sigma, \quad 1 - \frac{1}{D} < \sigma < 1 \quad (2.11)$$

$\sigma = 1 - \frac{1}{D}$  représentant l'ordre cristallin ( $\sigma = 0.5en2D$ ) et  $\sigma = 1$  le cas trivial de l'absence de corrélations. Cette représentation de l'hyperuniformité est en fait directement liée à celle observée dans l'espace réciproque, les exposants  $\sigma$  et  $\alpha_{\text{HU}}$  étant reliés par la relation [56, 98, 99] :

$$\sigma = \begin{cases} 1 - \frac{\alpha_{\text{HU}}}{D}, & \text{si } 0 < \alpha_{\text{HU}} < 1 \\ 1 - \frac{1}{D}, & \text{si } \alpha_{\text{HU}} > 1 \end{cases} \quad (2.12)$$

3. Note pour moi :  $\alpha > 1$  existe, simplement ça se traduit en une saturation pour la variance.

Une méthode de qualification de l'hyperuniformité, que nous appelons méthode box-counting, consiste donc à mesurer  $\langle \delta n^2 \rangle_l$  et pour différentes tailles  $l$  de sous-ensembles dans des configurations de l'état stationnaire du système proche de son point critique. Ainsi, nous pouvons étudier son évolution en fonction de  $\langle n \rangle_l$  pour déterminer directement l'exposant  $\sigma$  associé.

Si la définition de l'hyperuniformité s'est construite autour de l'équation 2.11, plusieurs travaux s'intéressent aux fluctuations de densité locale  $\langle \delta \rho^2 \rangle_l$  au lieu du nombre de particules, et en fonction de l'extension  $l$  du sous-ensemble au lieu du nombre moyen de particules [56, 100]. Dans ce cas, on définit la loi d'échelle entre ces quantités par l'exposant  $\lambda$  selon :

$$\langle \delta \rho^2 \rangle_l \sim l^{-\lambda} \quad (2.13)$$

qui est alors directement relié à l'exposant  $\sigma$  par :

$$\sigma = 2 - \frac{\lambda}{D} \quad (2.14)$$

## Implémentation

Dans ce chapitre, nous caractérisons l'hyperuniformité des modèles de sauts à longue portée via la méthode de box-counting. Pour ce faire, nous générerons des configurations par la dynamique stationnaire de systèmes proches du point critique. Chacune de ces configurations est alors analysée de la même façon.

Pour le modèle Manna comme pour le ROM, nous découpons l'espace cubique de surface  $L \times L$  en une collection compacte de sous-ensembles cubiques de taille  $l \times l$ . En comptant le nombre de particules présentes dans chacun de ces sous-ensembles, nous en déduisons la variance  $\langle \delta n^2 \rangle_l$  associée. Le nombre moyen de particules dans les sous-ensembles est directement donné par  $\langle n \rangle_l = \phi \times l^D$ . Si à petits  $\langle n \rangle_l$  l'évolution est satisfaisante avec une mesure unique, celle à grande échelle nécessite un certain effort numérique. Cela s'explique par le manque d'échantillonnage aux grandes échelles dans les configurations de taille finie et des temps de corrélations importants à longue portée. Afin d'obtenir une statistique raisonnable, chaque mesure associée à une densité  $\phi$  et une portée  $\alpha$  est donc moyennée dans le temps et sur différents états initiaux complètement décorrélés les uns des autres.

## Détermination par redimensionnement

En principe, la forme définie par l'équation 2.11 n'est valable qu'à des échelles de longueur  $l$  suffisamment grandes, soit  $\langle n \rangle_l \gg 1$ . Pour mesurer l'exposant  $\sigma$ , il est donc nécessaire se placer à grande échelle. Par ailleurs, pour sonder un état stationnaire, il est aussi nécessaire se placer à une distance finie  $\delta \phi > 0$  du point critique, sans quoi le système tombera dans un état absorbant. Cette distance finie du point critique définit alors une échelle de longueur  $l_c$ , ou de manière équivalente un cut-off  $\langle n \rangle_c$ , au-delà de laquelle l'évolution algébrique n'est plus valide. En fait, dans nos mesures, au-delà de cette échelle de longueur, la courbe  $\langle \delta n^2 \rangle = f(\langle n \rangle)$  présente un crossover non monotone vers l'évolution triviale  $\sigma = 1$ , aussi distinguable sur l'évolution du facteur de structure [56, 101, 102]. En

pratique, au-delà de  $l_c$ , avant que l'exposant effectif local de la courbe  $\langle \delta n^2 \rangle = f(\langle n \rangle)$  ne rejoigne le cas décorrélé avec  $\sigma_{\text{eff}} = 1$ , il diminue ( $\sigma_{\text{eff}} < \sigma$ ). Cette diminution est visible sur les évolutions représentées à la [figure 2.9](#) par exemple. L'évolution globale de  $\langle \delta n^2 \rangle$  à grands  $\langle n \rangle$  peut donc être modélisée par l'équation suivante :

$$\langle \delta n^2 \rangle \sim \langle n \rangle^\sigma g\left(\frac{\langle n \rangle}{\langle n \rangle_c}\right) \quad (2.15)$$

avec  $g$  une fonction initialement décroissante définissant la forme du crossover.

Du fait de la présence de deux crossovers, un de petite taille et un dû à la distance finie au point critique, il peut s'avérer difficile de mesurer l'exposant  $\sigma$  ou  $\lambda$  sur une unique courbe. Une méthode utilisée dans [56] consiste alors à étudier différentes courbes associées à différentes distances du point critique  $\delta\phi$ . En supposant que l'échelle de longueur définissant le cut-off se comporte comme la longueur de corrélation  $\xi \sim \delta\phi^{-\nu_\perp}$ , nous avons  $\langle n \rangle_c \sim \delta\phi^{-D\nu_\perp}$ . Ainsi, en redimensionnant  $\langle n \rangle$  par  $\delta\phi^{-D\nu_\perp}$  et  $\langle \delta n^2 \rangle$  par  $\delta\phi^{-\nu_\perp D\sigma}$ , les courbes obtenues pour différentes densités devraient se superposer sur une même courbe maîtresse. Cela définit alors une potentielle méthode graphique pour la mesure de  $\sigma$ , utilisant les effets de crossover à son avantage. Néanmoins, en pratique, cette méthode peut s'avérer coûteuse numériquement car elle suppose la détermination précise d'un ensemble de courbes à différentes densités  $\phi$ . C'est pourquoi, nous ne l'utiliserons que dans le cas d'une analyse plus poussée.

### 2.3.2.3 Des mesures complexes

Si l'hyperuniformité n'a jamais été mesurée des les modèles de transport à longue portée, celle-ci a fait l'objet de nombreuses études dans le cas de courte portée. Notamment, le ROM et le modèle Manna ont été caractérisés en ce sens à plusieurs reprises.

Les premières études ont été menées par Hexner et Levine [56], Tjhung et Berthier [55] et Weijs et al [57]. Dans [55], les auteurs ont mesuré proche de la transition un exposant  $\alpha_{\text{HU}} \approx 0.45$  dans le cas du ROM en 2D. En parallèle, l'étude [56] s'est concentrée sur les propriétés de différents modèles appartenant à la classe CDP, dont le modèle Manna et le ROM. Dans le cas bidimensionnel, il a été déterminé  $\lambda \approx 2.45$  et  $\alpha_{\text{HU}} \approx 0.45$ , deux mesures cohérentes et indiquant  $\sigma \approx 0.775$ . Ces valeurs ont alors été confirmées dans [57] et comparées à une situation expérimentale. Par la suite, ces résultats furent retrouvés dans des généralisations de ces modèles [101, 103].

Les résultats précédents confortent l'idée que les exposants d'hyperuniformité sont universels, i.e. communs à tous les modèles de la classe CDP. Toutefois, une étude plus récente semble mettre en défaut cette idée. Dans [100], en utilisant des tailles de systèmes plus grandes que dans les études précédentes, les auteurs semblent relever une légère différence de l'ordre de 5% entre les exposants d'hyperuniformité du ROM et du modèle Manna en 2D, qualifiant alors l'hyperuniformité de "faiblement universelle" dans ces modèles. Dans [51], il a par ailleurs été montré que les mesures d'hyperuniformité peuvent être soumises à de forts effets de taille finie, affectant significativement les résultats des mesures. Sans nécessairement remettre en question l'universalité des propriétés hyperuniformes, ces

études nous invitent donc à questionner nos méthodes et rester critique face aux mesures que nous présenterons.

## 2.4 Exposants critiques

Afin de préciser quantitativement l'évolution des exposants critiques dans le cadre LR-CDP en 2D, nous nous concentrerons d'abord sur sa représentation par le modèle LR-ROM. Dans cette section, nous présentons les résultats obtenus quant à la caractérisation des exposants critiques associés à chaque portée de transport  $\alpha$ .

Dans le [chapitre 1](#) nous avons vu que dans ce cadre nous attendions une évolution continue de la criticalité entre  $\alpha = 4$  et  $\alpha = 3$ . Pour  $\alpha \geq 4$  nous nous attendons à retrouver les valeurs des exposants reportées à la première ligne du [tableau 2.1](#). Pour  $\alpha \leq 3$ , nous nous attendons à retrouver les valeurs triviales des exposants associées au champ moyen. Pour cerner et caractériser précisément la zone d'évolution continue des exposants, nous nous attachons par la suite à caractériser les portées de transport dictées par  $\alpha \in \{6, 5, 4, 3.75, 3.5, 3.25, 3, 2.5\}$ .

### 2.4.1 Exposants statiques

En appliquant les méthodes décrites à la [sous-section 2.3.1](#), nous déterminons les densités critiques  $\phi_c$  des systèmes pour chacune des portées  $\alpha$ . Pour ce faire, nous utilisons des tailles de systèmes allant jusqu'à  $L = 16384$ . Un exemple de détermination est représentée à la [figure 2.4](#) dans le cas  $\alpha = 3.75$ . Les exposants  $\beta$  et  $\gamma'$  et leurs incertitudes sont alors mesurés, leurs valeurs sont reportées dans le [tableau 2.1](#) et leurs évolutions sont représentées à la [figure 2.6](#).

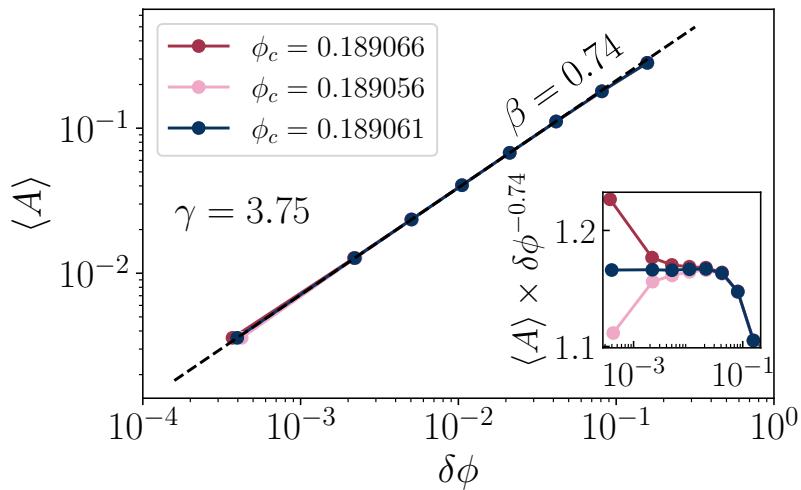


FIGURE 2.4 – Détermination de la densité critique dans le LR-ROM pour  $\alpha = 3.75$ . En encart, la représentation compensée permet de distinguer clairement  $\phi_c = 0.189061$  comme une meilleure estimation que  $\phi_c = 0.189056$  et  $\phi_c = 0.189066$

Dans la limite de courte portée, nous retrouvons le comportement critique associé à la classe CDP. Pour  $\alpha > 4$ , nous mesurons  $\beta \approx 0.63$  et  $\gamma' \approx 0.37$ , tous deux en accord avec  $\beta_{\text{CDP}}^{2D} \approx 0.64$  et  $\gamma'_{\text{CDP}}^{2D} \approx 0.37$ . À l'opposé, dans la limite de longue portée, nous retrouvons les exposants associés au champ moyen de la classe CDP. Notamment, pour  $\alpha = 2.5$ , l'accord est exact dans la limite des incertitudes de détermination. L'évolution des exposants prend majoritairement place entre  $\alpha = 4$  et  $\alpha = 3$ , en accord avec le cadre théorique. Toutefois, nous notons un léger écart avec les valeurs attendues au niveau de ces bornes. Notamment, pour  $\alpha = 4$ , nous mesurons  $\beta \approx 0.69$  soit une valeur légèrement supérieure à celle associée à la courte portée. Nous discuterons de l'origine potentielle de cet écart dans la section suivante.

En pratique, la détermination de l'exposant  $\nu_{\perp}$  nécessite l'analyse des corrélations spatiales d'activité dans le système afin d'en déduire la longueur de corrélation  $\xi$  associée. Toutefois, il existe une relation d'échelle entre les exposants  $\beta$ ,  $\gamma'$  et  $\nu_{\perp}$ , présentée au chapitre 1 :

$$2\beta + \gamma' = \nu_{\perp} D \quad (2.16)$$

En supposant que celle-ci reste valable à n'importe quelle portée en-dessous de la dimension critique  $D_c = 2(\alpha - D)$ , nous pouvons tirer profit de cette relation pour dériver l'exposant  $\nu_{\perp}$  associé. En utilisant les valeurs mesurées de  $\beta$  et  $\gamma'$ , nous répertorions dans le tableau 2.1 la valeur  $\nu_{\perp}^*$  déduite de cette relation. Comme nous l'avons mentionné au chapitre précédent, la subtilité est que, en présence d'interactions à longue portée, la valeur champ moyen de cet exposant est donnée par  $\nu_{\perp} = 1/(\alpha - D)$ , et donc dépendante de  $\alpha$ . En gardant cela en mémoire, nous observons de la même façon que les valeurs de  $\nu_{\perp}^*$  suivent une évolution continue de la limite de courte portée avec  $\nu_{\perp} \approx 0.82$  pour  $\alpha > 4$  à la limite de champ moyen avec  $\nu_{\perp} \approx 1 = 1/(\alpha - D)$  pour  $\alpha = 3$ . Pour  $\alpha < 3$ , nous avons  $D > D_c$  et il n'est donc plus possible d'utiliser la relation d'échelle pour déterminer  $\nu_{\perp}$ .

## 2.4.2 Exposant dynamique

L'exposant dynamique  $\delta$  est ensuite déterminé pour chaque portée  $\alpha$  en suivant la méthode de redimensionnement précédemment présentée. Un exemple de détermination est présenté pour  $\alpha = 5$  à la figure 2.5. Les valeurs estimées sont reportées dans le tableau 2.1 et son évolution est représentée à la figure 2.6.

Comme dans le cas des exposants statiques, nous retrouvons les comportements limite de champ moyen  $\delta_{\text{CDP}}^{\text{MF}} = 1$  et de courte portée  $\delta_{\text{CDP}}^{2D} \approx 0.42$  dans la limite des petits et des grands  $\alpha$ . De la même façon, l'évolution significative de l'exposant a lieu dans la gamme  $3 < \alpha < 4$  bien que nous notions encore une fois un léger écart aux valeurs attendues au niveau de ces bornes.

Finalement, l'estimation des exposants critiques dans le modèle LR-ROM confirme l'inscription des interactions de transport à longue portée dans le cadre théorique LR-CDP présenté au chapitre 1. En augmentant la portée du transport de matière dans le système, la criticalité passe continûment de son équivalent de courte portée à son

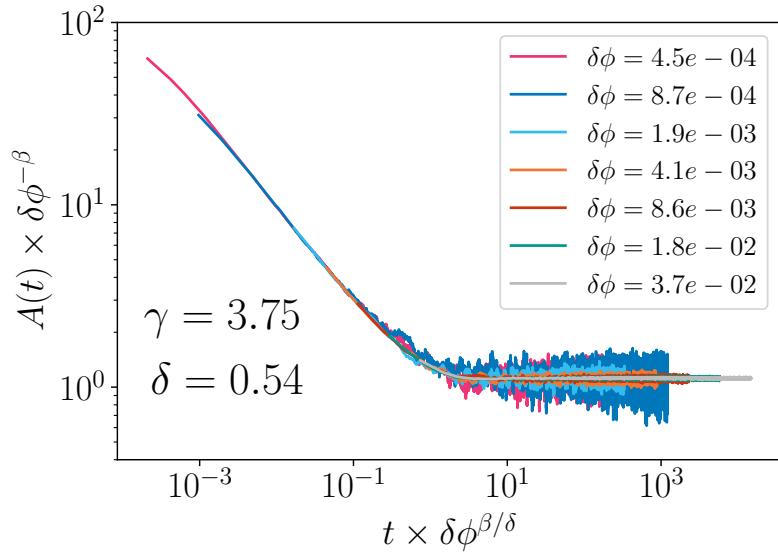


FIGURE 2.5 – Détermination de l’exposant dynamique  $\delta$  par redimensionnement dans le LR-ROM pour  $\alpha = 3.75$ .

équivalent de champ moyen, gardant une évolution concave du paramètre d’ordre ( $\beta < 1$ ) et une divergence des fluctuations à l’approche du point critique ( $\gamma' > 0$ ). Au premier ordre, cette évolution prend effectivement place dans la zone  $3D/2 < \alpha < D + 2$  soit  $3 < \alpha < 4$  dans le cas bidimensionnel.

$\alpha$	$\beta$	$\gamma'$	$\delta$	$\nu_{\perp}^*$	$\nu_{\perp}^{\text{MF}}$
CDP [19]	0.64	0.37	0.42	0.80	0.50
6	0.63	0.37	0.42	0.82	0.50
5	0.63	0.37	0.44	0.82	0.50
4	0.69	0.30	0.54	0.84	0.50
3.75	0.74	0.27	0.62	0.88	0.57
3.5	0.81	0.20	0.70	0.91	0.67
3.25	0.89	0.11	0.83	0.95	0.80
3	0.98	0.06	0.96	1.01	1.00
2.5	0.99	0.03	0.98	-	2.00

TABLE 2.1 – Exposants critiques  $\beta$ ,  $\gamma'$  et  $\delta$  déterminés dans les modèles LR-ROM en 2D. La troisième colonne représente l’exposant  $\nu_{\perp}^*$  dérivé par la relation d’échelle (équation 2.16) et la quatrième l’exposant champ moyen associé à chaque portée  $\alpha$

## 2.5 Hyperuniformité

Dans cette dernière section, nous proposons de conclure la caractérisation quantitative du cadre théorique LR-CDP en 2D en nous intéressant à l’évolution de l’hyperuniformité en présence d’un transport à longue portée. Dans le chapitre 1 nous avons vu que dans

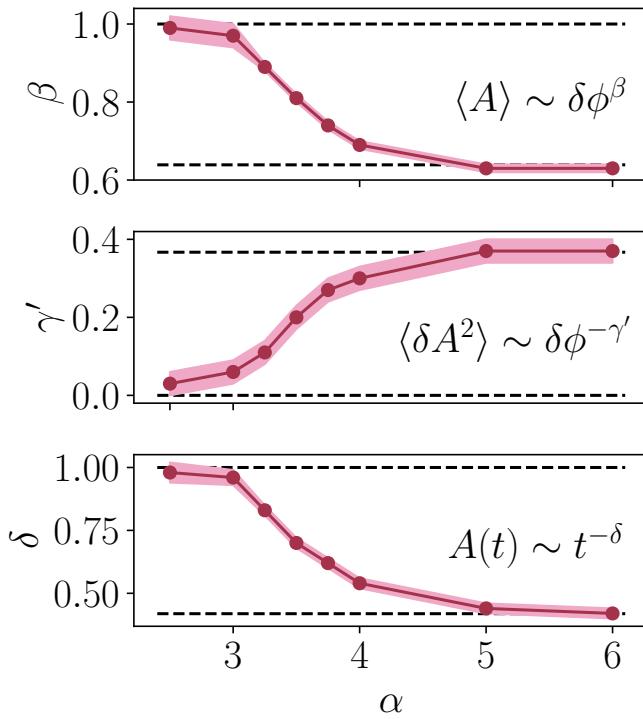


FIGURE 2.6 – Évolution des exposants critiques  $\beta$ ,  $\gamma'$  et  $\delta$  avec la portée dans les modèles LR-ROM. Les zones colorées en rose représentent les incertitudes de détermination.

ce cadre nous attendions une évolution continue de l'exposant d'hyperuniformité  $\sigma$  entre  $\alpha = 4$  et  $\alpha = 3$ . Dans la limite de courte portée  $\alpha \geq 4$ , la théorie développée par mapping avec le depinning [51] prédit  $\sigma = 0.75$  tandis qu'elle préconise  $\sigma = 1$  à  $\alpha = 3$ . Entre ces deux limites, des calculs issus du groupe de renormalisation fonctionnel permettent de prédire l'évolution de l'exposant  $\sigma$  avec  $\alpha$ . Dans la suite de cette étude, nous proposons de confronter ces calculs théoriques via la caractérisation des propriétés hyperuniformes des modèles LR-ROM et LR-Manna pour différentes portées de transport  $\alpha$ . Ce travail, mené en collaboration étroite avec K. Wiese, est encore au stade préliminaire mais les premiers résultats associés soulèvent des points intéressants qu'il semble judicieux de faire figurer dans cette thèse, bien qu'ils n'en constituent pas l'objet principal.

### 2.5.1 Hyperuniformité dans le LR-ROM

En utilisant la méthode de box-counting présentée à la [sous-section 2.3.2](#), nous commençons par caractériser les propriétés hyperuniformes des transitions du LR-ROM pour  $\alpha \in \{5, 4, 3.75, 3.5, 3.25, 3\}$ . Afin d'opérer une comparaison juste entre toutes ces portées, nous étudions chacune d'elle pour une distance similaire au point critique  $\delta\phi \approx 1 \times 10^{-3}$  et une taille de système  $L = 4096$ .

Nous présentons un exemple de mesure obtenue pour  $\alpha = 4$  à la [figure 2.7](#). Une manière plus fine d'analyser ces résultats est de calculer la dérivée logarithmique de la courbe  $\langle \delta n^2 \rangle = f(\langle n \rangle)$ , afin d'obtenir une mesure de l'exposant effectif  $\sigma_{\text{eff}}$  dépendante de l'échelle

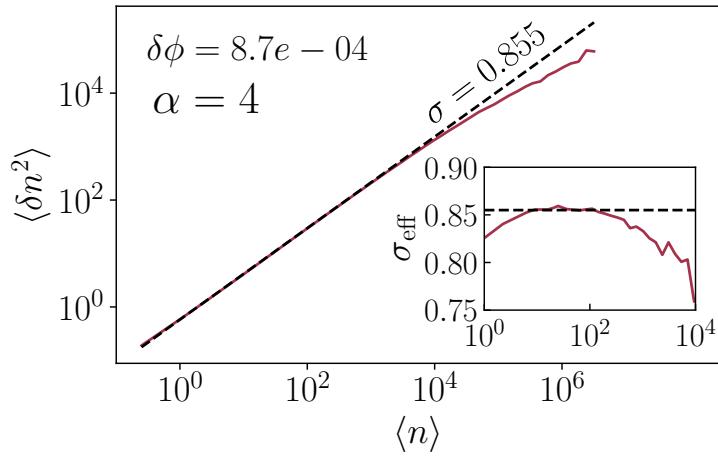


FIGURE 2.7 – Estimation de l'exposant d'hyperuniformité  $\sigma$  dans le LR-ROM pour  $\alpha = 4$ . En encart, l'exposant effectif local, déterminé comme la dérivée logarithmique de la courbe représentée en figure principale.

de longueur considérée. Celle-ci est représentée dans l'encart de la même figure. Comme nous l'avons mentionné précédemment, les propriétés universelles d'hyperuniformité sont valables entre deux crossovers : un de petite échelle (détails microscopiques non-universels) et un de grande échelle (distance finie du point critique). Afin de déterminer  $\sigma$ , nous devons donc nous situer entre ces deux limites. Le choix que nous faisons pour l'estimation de  $\sigma$  est alors de retenir la valeur de l'exposant effectif dans la zone sur laquelle il varie très peu, i.e. entre la croissance à petite échelle et la décroissance à grande échelle. Dans l'exemple de la figure 2.7, celle-ci se situe entre  $\langle n \rangle \approx 10$  et  $\langle n \rangle \approx 1000$  et donne  $\sigma \approx 0.855$ .

En appliquant la même procédure pour les différentes portées  $\alpha$ , nous obtenons l'évolution des exposants d'hyperuniformité présentée à la figure 2.8, mise en comparaison avec les résultats théoriques [104]. Nous remarquons alors que pour  $3.25 < \alpha < 3.75$  les mesures sont très proches de l'attendu théorique. Toutefois, il existe un fort désaccord entre théorie et simulations pour les plus courtes portées  $\alpha \geq 4$ . En effet, nous attendons dans cette zone un plateau à  $\sigma = 0.75$ . Or ici, pour  $\alpha \geq 4$ ,  $\sigma$  semble encore diminuer légèrement avec  $\alpha$  et prend des valeurs bien plus grandes que  $\sigma = 0.75$ . D'autre part, la valeur  $\sigma \approx 0.96$  pour  $\gamma = 3$  est aussi légèrement différente de l'attendu champ moyen  $\sigma = 1$ . Malgré cela, nous retrouvons bien la tendance générale d'une hyperuniformité progressivement perdue avec l'augmentation de la portée du transport. Dans la suite de cette section, nous proposons des explications aux désaccords entre les résultats préliminaires obtenus dans le cadre de la caractérisation du LR-ROM et la théorie issue des calculs de groupe de renormalisation fonctionnel.

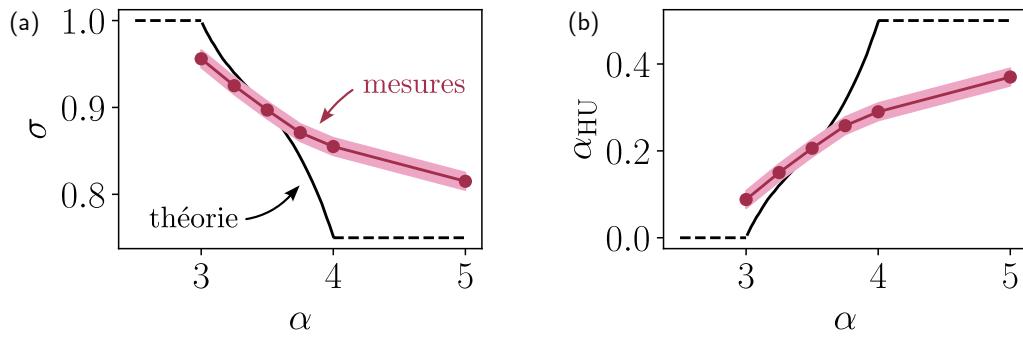


FIGURE 2.8 – (a) Évolution de l'exposant d'hyperuniformité  $\sigma$  avec la portée dans les modèles LR-ROM. La courbe noire représente les prédictions théoriques [34, 51, 104]. Les zones colorées rose représentent les incertitudes de détermination. (b) Déduction de l'évolution de l'exposant  $\alpha_{HU}$  se basant sur l'équation 2.12.

## 2.5.2 Difficultés dans les mesures d'hyperuniformité

### 2.5.2.1 Importance de la conservation du centre de masse

Une première explication à ces différences vient du mouvement du centre de masse du système. En effet, dans la théorie de champ associée à CDP permettant d'effectuer les prédictions pour  $\sigma$  présentées précédemment, le centre de masse du système est une quantité conservée [105]. Or dans le LR-ROM, les sauts aléatoires des particules actives ne conservent ce centre de masse qu'en moyenne, leur direction étant complètement aléatoire. La rupture de cette symétrie fondamentale, directement reliée à la répartition des particules dans le système, pourrait donc affecter nos mesures de l'hyperuniformité et expliquer un désaccord avec les prédictions du cadre LR-CDP.

La façon la plus simple de le remarquer est de se placer dans le cas de la courte portée. Prenons le modèle Manna, appartenant à la classe CDP, et considérons deux de ses représentations. Dans la première représentation du modèle, l'implémentation est faite de la manière décrite à la sous-section 2.2.1, i.e. avec une redistribution aléatoire des particules sur les sites voisins. Celle-ci ne conserve donc pas le centre de masse du système. Dans la seconde représentation, lorsqu'un site est actif, il redistribue aléatoirement (i.e. dans une des deux directions du plan) une paire de particules sur deux sites voisins opposés, de manière à conserver le centre de masse du système à chaque instant. En effectuant alors des mesures sur ces deux représentations dans des configurations équivalentes avec  $L = 4096$  et  $\langle A \rangle \approx 2 \times 10^{-3}$ , nous obtenons les résultats présentés à la figure 2.9-(a)-(b).

En représentant l'évolution  $\langle \delta n^2 \rangle = f(\langle n \rangle)$  compensée par une loi test  $\langle n \rangle^\sigma$ <sup>4</sup>, ces mesures nous permettent d'estimer deux exposants distincts pour chacune des représentations :  $\sigma \approx 0.76$  dans le cas où le centre de masse est conservé et  $\sigma \approx 0.80$  dans le cas où il ne l'est pas. Dans le cas du ROM (donc avec des sauts courts) sans conservation

4. Cette méthode de mesure est similaire à celle de la dérivée logarithmique mais permet de travailler avec des signaux plus bruités

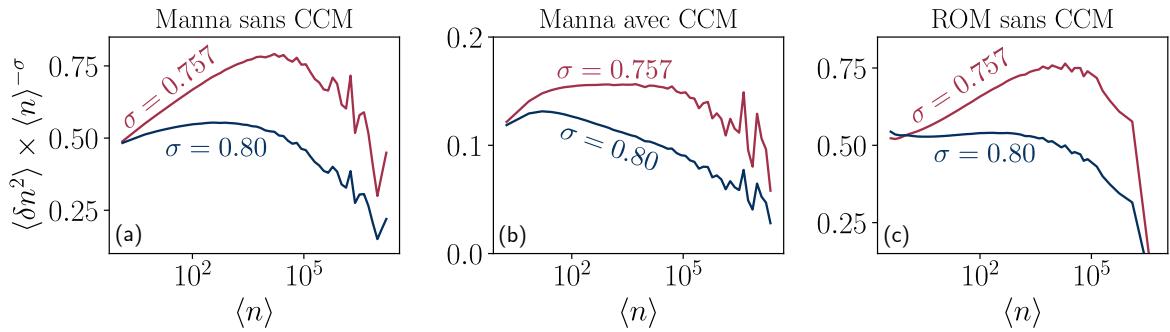


FIGURE 2.9 – Représentation compensée de l'évolution de  $\langle \delta n^2 \rangle$  avec  $\langle n \rangle$  par une loi de puissance test dans (a) le modèle Manna sans conservation de la position du centre de masse ( $\phi = 1.30628$ ), (b) le modèle Manna avec conservation de la position du centre de masse ( $\phi = 1.75895$ ) et (c) le ROM ( $\phi = 0.235248$ ). Les courbes rouges représentent la compensation par l'exposant test  $\sigma = 0.757$ , adéquate pour le modèle conservant la position du centre de masse, et les courbes bleues représentent la compensation par l'exposant test  $\sigma = 0.80$ , adéquat pour les modèles ne conservant pas la position du centre de masse.

du centre de masse, nous mesurons aussi dans ces mêmes conditions  $\sigma \approx 0.80$ , comme présenté à la figure 2.9-(c).

Ces résultats suggèrent donc que la conservation du centre de masse joue un rôle essentiel dans les propriétés hyperuniformes du système. Notamment lorsque celle-ci est bafouée, il semble que cela revient à surestimer l'exposant  $\sigma$  et donc diminuer l'hyperuniformité dans le système. Cela explique en partie pourquoi, dans le cas du LR-ROM, nous obtenons à  $\alpha = 4$  une mesure de  $\sigma \approx 0.86$  significativement plus grande que la valeur attendue  $\sigma = 0.75$ . Toutefois, cette valeur reste encore relativement éloignée de la valeur  $\sigma \approx 0.80$  obtenue ici dans la limite de courte portée. Une explication à cette différence subsistante peut venir de la taille finie des systèmes étudiés.

### 2.5.2.2 Effet de taille finie

Si la loi de distribution des sauts des particules actives est une loi de puissance parfaite grâce à notre méthode de génération, en pratique elle se retrouve modifiée par sa mise en place dans un système de taille finie. En effet, par application des conditions aux limites périodiques, tous les sauts de taille  $\Delta \gtrsim L$  se voient "repliés" dans l'espace périodique, changeant ainsi la distribution effective des sauts des particules actives. De plus, cette loi algébrique n'est définie que pour  $\Delta > 1$ , du fait de l'introduction d'une distance de saut minimale lors de l'implémentation numérique.

Dans les approches théoriques permettant la prédiction de l'exposant  $\sigma$ , l'interaction à longue portée est considérée dans l'espace réciproque [104]. Dans l'hypothétique système parfait et infini sur lequel se basent ces prédictions, la transformée de Fourier de la distribution de taille des sauts est définie par :

$$\hat{P}_\Delta(q) \sim 1 - |q|^{D-\alpha} \quad (2.17)$$

soit correspondant à la fonction caractéristique d'une loi stable  $S_{D-\alpha}$  dans la limite de petit  $q$ <sup>5</sup>. Une hypothèse est alors que dans nos simulations, dû à la taille finie du système et à l'introduction d'un cut-off, les distributions s'éloignent de cet attendu par l'addition de termes réguliers dans le développement de la fonction caractéristique :

$$\hat{P}_\Delta(q) \sim 1 - |q|^{D-\alpha} + q^2 + \dots \quad (2.18)$$

Dans ce cas, nous pouvons nous attendre à ce que lorsque  $\alpha \rightarrow D + 2$ , soit  $\alpha = 4$  dans notre cas, le premier terme régulier en  $q^2$  devienne sous-dominant par rapport au terme en  $|q|^{D-\alpha}$  et écarte significativement la distribution de celle utilisée dans la théorie<sup>6</sup>.

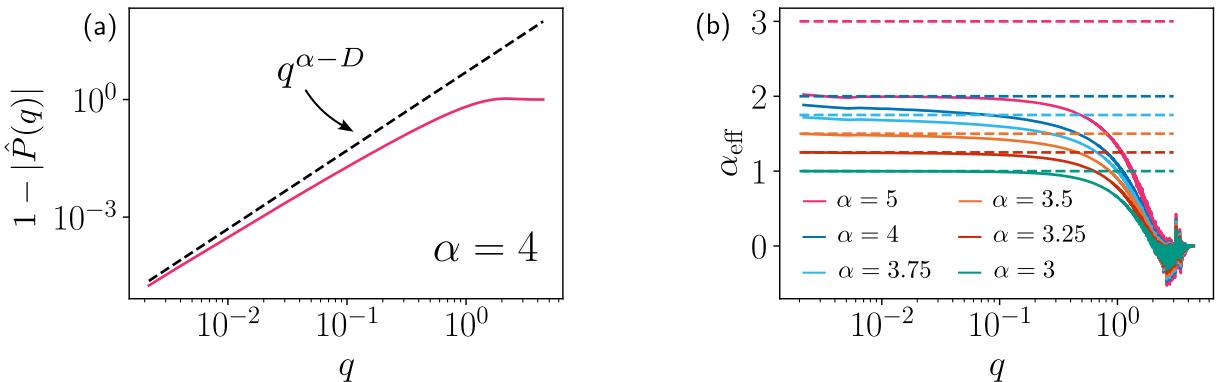


FIGURE 2.10 – (a) Évolution de la quantité  $1 - |\hat{P}_\Delta(q)|$  avec  $q$  pour le LR-ROM avec  $\alpha = 4$ . En pointillé noir, le cas idéal sur lequel se basent les prédictions théoriques. (b) Exposant effectif obtenu par dérivée logarithmique de la courbe représentée en (a) pour toutes les portées  $\alpha$ . En pointillés de même couleur, la valeur  $D_\alpha$  associée.

Pour le vérifier, nous considérons le cas du LR-ROM pour  $L = 4096$ , dans lequel mesurons la distribution de probabilité  $P(\mathbf{r})$  d'effectuer un déplacement  $\mathbf{r}$  dans le système suite à un saut actif. En pratique nous en réalisons l'histogramme sur la grille introduite précédemment dans le cadre de la méthode cell-list. En prenant la transformée de Fourier discrète bidimensionnelle de cette distribution nous obtenons par une moyenne isotrope un équivalent de la distribution recherchée  $\hat{P}_\Delta(q)$ . Sur la figure 2.10, nous représentons  $1 - |\hat{P}_\Delta(q)|$  en fonction de  $q$  pour  $\alpha = 4$  et la dérivée logarithmique obtenue de ces courbes pour chaque  $\alpha$ , définissant alors un exposant effectif local  $\alpha_{\text{eff}}$ . Pour chacune de ces portées, nous représentons en pointillés l'hypothèse théorique d'un exposant  $D - \alpha$ .

Nous observons alors effectivement une déviation de l'idéal théorique, d'autant plus que  $\alpha$  se rapproche de  $\alpha = 4$ . De plus, pour  $\alpha = 5$ , nous obtenons un exposant effectif  $\alpha_{\text{eff}} \approx 2$ , signe de la prédominance du terme en  $q^2$  dans l'équation 2.18 proposée précédemment, justifiant de ce fait notre raisonnement. À la vue de ces observations, il est donc possible que les propriétés d'hyperuniformité du système soient effectivement affectées par les détails de l'implémentation des sauts à longue portée, et ce d'autant plus que  $\alpha$  est proche de  $\alpha = 4$ . Ceci, conjointement au fait de non conservation de la position du centre

5. Dans le cas d'une loi stable  $S_{D-\alpha}$  on a en effet  $\hat{P}_\Delta(q) \sim \exp(-|q|^{D-\alpha})$

6. Après ça devrait l'écartier dans l'autre sens dans ce cas non ?

de masse, pourrait expliquer le fort désaccord avec la théorie observé avec les résultats préliminaires obtenus dans le cas du LR-ROM.

### 2.5.3 Hyperuniformité dans le modèle LR-Manna

#### 2.5.3.1 Résultats préliminaires

Pour aller un peu plus loin, nous proposons d'étudier l'hyperuniformité dans les modèles de transport à longue portée au plus proche possible des conditions d'applications des prédictions théoriques afin de les confronter directement. Pour ce faire, nous considérons le modèle LR-Manna dans sa version qui inclue la conservation de la position du centre de masse. Ce choix n'est pas anodin. Ce modèle étant plus simple que le LR-ROM, il est plus aisément dans ce cas de considérer des tailles de systèmes plus grandes, et ainsi se rapprocher de la limite théorique de système infini. Nous appliquons alors la méthode de box-counting sur des systèmes allant jusqu'à des tailles  $L = 16384$  et des distances au point critique allant jusqu'à  $\delta\phi \approx 5 \times 10^{-5}$  pour chaque portée  $\alpha \in \{4, 3.75, 3.5, 3.25, 3\}$ . La figure 2.11 présente les résultats obtenus pour  $\alpha = 4$  pour toutes les densités considérées.

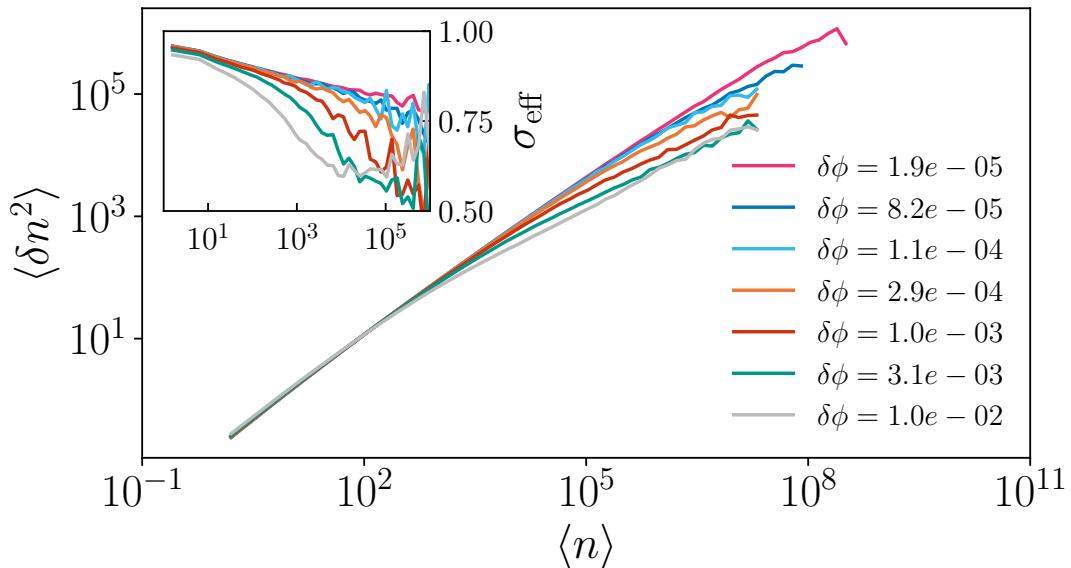


FIGURE 2.11 – Évolution de  $\langle \delta n^2 \rangle$  avec  $\langle n \rangle$  dans le cas du modèle LR-Manna avec conservation de la position du centre de masse pour  $\alpha = 4$  à différentes distances  $\delta\phi$  du point critique. En encart, l'évolution de l'exposant effectif mesuré par dérivation logarithmique des courbes en figure principale.

Dans l'encart de cette figure, nous représentons l'exposant effectif local  $\sigma_{\text{eff}}$  obtenu par dérivation logarithmique des courbes en figure principale. De manière assez surprenante, celui-ci semble évoluer de manière significative avec l'échelle de longueur considérée. Plus précisément, cette dépendance avec  $\langle n \rangle$  semble être presque logarithmique, voire une loi de puissance de très faible exposant, jusqu'à un cut-off dépendant de la distance au point critique  $\delta\phi$ . Plus le système est proche du point critique, plus cette décroissance s'étend sur une large gamme d'échelles de longueur. Pour la distance la plus proche du point critique

étudiée  $\delta\phi \approx 2 \times 10^{-5}$ , il semblerait que cette évolution commence tout juste à arriver à saturation à grande échelle (léger début d'infexion de la courbe) avant l'apparition du cut-off, suggérant le début d'une convergence vers la valeur asymptotique  $\sigma$  de la limite thermodynamique de grande échelle.

Cette analyse des données préliminaires ne permet donc pas la mesure d'un exposant unique dans la limite de grande échelle et suggère qu'une meilleure approche du point critique est nécessaire pour cela. Les modèles Manna et ROM étant dans la même classe d'universalité, nous pouvons considérer qu'il en est en fait de même pour les données présentées à la [figure 2.8](#). Ceci expliquerait une partie du désaccord avec la prédiction théorique, notamment le fait que pour  $\alpha = 4$ , nos mesures ne convergent pas vers celles obtenues à courte portée.

Dans le cadre du modèle LR-Manna, en prenant l'exemple de la portée  $\alpha = 4$  et en considérant qu'à taille de système infinie nous attendons  $\sigma = 0.75$ , l'analyse de ces données suggère que le régime algébrique est atteint, pour un système infini, pour  $\langle n \rangle^* \gg 2 \times 10^7$  soit  $l^* \gg 4 \times 10^3$ . Afin de le mesurer directement, il faut donc parvenir à sonder un état pour lequel la longueur de corrélation  $\xi$  associée est telle que  $\xi \gg l^*$ . Or, avec les ressources actuellement à notre disposition, nous pouvons difficilement envisager des tailles de systèmes  $L > 16384$  et donc atteindre une telle longueur de corrélation sans tomber dans un état absorbant.

Dans le cas des plus grandes portées  $\alpha < 4$ , l'analyse est parfois un peu moins défavorable (essentiellement pour le cas  $\alpha = 3$ ) mais conserve les mêmes conclusions. Dans la suite, en nous basant sur ces observations préliminaires, nous proposons une piste permettant une estimation de l'exposant d'hyperuniformité  $\sigma$  de la limite thermodynamique à chaque portée, ou à défaut une borne supérieure raisonnable de son encadrement.

### 2.5.3.2 Perspectives

Comme nous l'avons présenté précédemment, une manière de mesurer efficacement l'hyperuniformité dans un système est de procéder à une méthode de redimensionnement par la distance au point critique. En suivant [56], nous redimensionnons donc la dimension de la boîte de comptage  $l$  par  $\delta\phi^{-\nu_\perp^*}$ ,  $\nu_\perp^*$  étant l'exposant de corrélation spatiale dérivé précédemment de la relation d'hyperscaling. Cela revient alors à redimensionner  $\langle n \rangle_l$  par  $\delta\phi^{-D\nu_\perp^*} = \delta\phi^{-2\beta-\gamma'}$ . Parallèlement, nous redimensionnons  $\langle \delta n^2 \rangle$  par  $\delta\phi^a$  avec  $a$  un exposant test afin d'espérer une superposition des courbes sur une courbe maîtresse. Ce faisant, il n'est en pratique pas aisément de déterminer un critère de bonne superposition puisque cette dernière n'est possible que localement. Pour s'en apercevoir, un exemple de redimensionnement pour  $\alpha = 4$  est donné sur la [figure 2.12-\(a\)](#), dans lequel nous avons essayé de superposer la région à grand  $\langle n \rangle$ . Une méthode de cette nature ne semble donc pas pouvoir nous informer davantage.

Toutefois, si nous opérons la même procédure sur l'exposant effectif (i.e. la dérivée logarithmique de ces courbes), il est possible de superposer toutes ses évolutions sur une courbe maîtresse. Un exemple est donné dans le cas  $\alpha = 4$  sur la [figure 2.12-\(b\)](#) et le cas

des autres portées est relégué en appendice. De cette façon, il est possible d'en déduire précisément l'évolution algébrique de  $\sigma_{\text{eff}}$  avec  $\langle n \rangle$ . Par ailleurs, nous remarquons que pour les distances  $\delta\phi$  les plus petites, les courbes semblent s'éloigner légèrement, en moyenne, de cette superposition. Cet écart correspondrait alors au début de saturation vers l'exposant asymptotique déjà suggéré sur les données brutes. En d'autres termes, il semblerait que l'exposant effectif suive une évolution du type :

$$\sigma_{\text{eff}} = (\sigma + \langle n \rangle^{-x}) g \left( \frac{\langle n \rangle}{\langle n \rangle_c} \right), \quad \langle n \rangle_c \sim \delta\phi^{-D\nu_{\perp}} \quad (2.19)$$

avec  $g$  une fonction à décroissance rapide. En pratique nous mesurons un exposant  $x < 0.015$ , décroissant davantage avec l'augmentation de la portée de l'interaction et donc la diminution de  $\alpha$ .  $\alpha = 4$  constitue donc le cas de plus forte dépendance de  $\sigma_{\text{eff}}$  avec  $\langle n \rangle$  même si celle-ci reste très ténue.

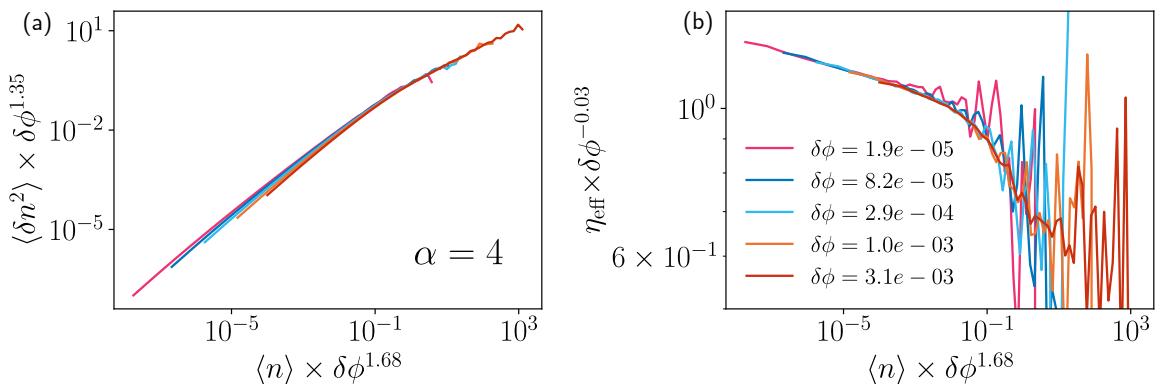


FIGURE 2.12 – Redimensionnement des mesures d'hyperuniformité dans le cas du modèle LR-Manna avec conservation de la position du centre de masse pour  $\alpha = 4$ . Le redimensionnement par la distance au point critique  $\delta\phi$  est appliqué sur (a) les données brutes et (b) l'exposant effectif obtenu par dérivée logarithmique.

Cette méthode d'analyse, si elle n'a rien de révolutionnaire, présente un grand avantage : elle permet de déterminer sur une courbe  $\langle \delta n^2 \rangle = f(\langle n \rangle)$  donnée la zone affectée par la distance finie au point critique considérée (i.e. l'influence du cut-off). Elle permet donc, si la forme donnée à l'équation 2.19 est valide, de déterminer une borne supérieure sur l'encadrement de  $\sigma$ . En effet, dans ce cadre, tous les points sur la décroissance purement algébrique vérifient  $\sigma_{\text{eff}} > \sigma$ . Par ailleurs dans les cas les plus favorables où la saturation vers l'exposant asymptotique semble être presque atteinte, nous pouvons estimer approximativement une valeur de  $\sigma$ , voire même une borne inférieure de l'encadrement. Ainsi, ces données préliminaires nous permettent de placer des indications de comparaison à la théorie sur la figure 2.13. L'affinage nécessaire de ces estimations exige cependant un effort ultérieur.

La détermination des propriétés hyperuniformes dans les modèles de sauts à longue portée exige donc de se placer à de très grandes échelles de longueur et donc des densités

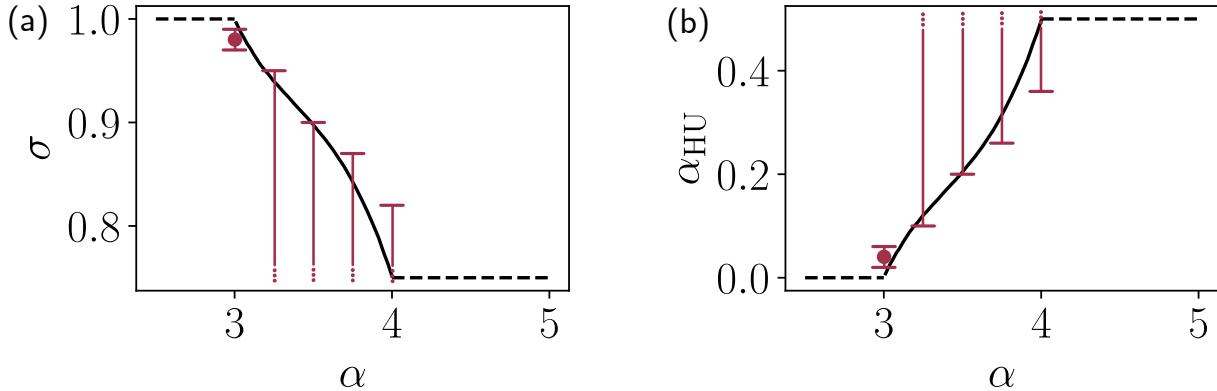


FIGURE 2.13 – (a) Estimation de l'exposant d'hyperuniformité  $\sigma$  dans le modèle LR-Manna avec conservation de la position du centre de masse pour les différentes portées  $\alpha$ . En pratique, il n'est possible d'encadrer et d'estimer la valeur de  $\sigma$  que pour  $\alpha = 3$ . Pour  $\alpha > 3$ , nous proposons tout de même une borne supérieure de l'encadrement de cet exposant. En trait noir, les prédictions issues du mapping sur la transition de depinning [104]. (b) Déduction de l'évolution de l'exposant  $\alpha_{HU}$  se basant sur l'équation 2.12.

très proches du point critique. Il semble alors que c'est cette observation, plus que celle de la taille finie du système, ajoutée à celle concernant l'influence de la conservation du centre de masse, qui explique pourquoi nos mesures préliminaires dans le cadre du LR-ROM s'éloignent des prédictions théoriques.

En conclusion, cette première étude révèle que les mesures de l'hyperuniformité dans ces modèles semble relever d'une tâche très exigeante. La caractérisation quantitative des exposants  $\sigma$  et leur évolution précise avec la portée  $\alpha$  n'étant pas essentielle au reste de notre propos, nous nous limiterons à cette détermination au premier ordre. Celle-ci décrit alors, comme prédit par la théorie, une perte progressive de l'hyperuniformité dans le système avec l'augmentation de la portée de  $\alpha = 4$  à  $\alpha = 3$ . Ces éléments nous suffiront alors à contraster les évolutions observées en présence d'interactions médiées à longue portée.

### 2.5.3.3 Retour sur les exposants critiques

La nécessité de s'approcher extrêmement près du point critique pour observer la criticité de la limite thermodynamique pourrait aussi avoir un impact sur la détermination des exposants critiques présentée à la section 2.4. Cela pourrait expliquer pourquoi dans le cas identifié comme le plus défavorable  $\alpha = 4$ , nous observons un écart à la limite de courte portée concernant les exposants  $\beta$ ,  $\gamma'$  et  $\delta$ .

Toutefois, cette dépendance n'est pas aussi évidente dans ces cas. En effet, sous un choix adéquat de densité critique  $\phi_c$ , les différentes lois de puissance déterminées sont bien plus convaincantes que celles obtenues par la méthode de box-counting dans le cadre de la mesure de l'hyperuniformité. Nous pouvons supposer par ailleurs que la conservation ou non de la position du centre de masse joue un rôle moins important dans le cas des exposants liés à l'activité dans le système ( $\beta$ ,  $\gamma'$ ,  $\delta$ ) plutôt qu'à la répartition de la masse ( $\sigma$ ). Pour étudier ces hypothèses, il faudrait notamment sonder des états plus

proches du point critique, requérant de fait une mobilisation de ressources numériques très importantes. Le but de ce travail étant essentiellement de caractériser une base de comparaison pour les études suivantes, nous nous limiterons aussi pour ces exposants à cette détermination de première ordre.

## 2.6 Conclusion de chapitre

Dans ce chapitre, nous avons étudié des modèles emblématiques de la classe CDP auxquels nous avons ajouté un mécanisme de transport à longue portée. En caractérisant les transitions de phase absorbantes associées à chaque portée de transport, nous avons montré que les exposants critiques évoluent continûment avec la portée du transport, allant de leur équivalent de courte portée à leur équivalent de champ moyen. Au premier ordre, cette évolution se fait dans la gamme de portées prédictive par la théorie LR-CDP. En deux dimensions, cette gamme se situe entre  $\alpha = 3$  et  $\alpha = 4$ ,  $\alpha$  étant l'exposant caractérisant la portée du transport.

Dans une seconde partie, nous avons étudié les propriétés d'hyperuniformité de ces systèmes et leur évolution avec la portée du transport. La détermination des exposants critiques dans ce cadre s'est alors révélée bien plus compliquée, révélant un écart avec les prédictions théoriques dont nous avons proposé deux explications complémentaires. La première vient de la conservation de la position du centre de masse qui est essentielle à la correspondance aux prédictions théoriques. La seconde vient d'un comportement pré-asymptotique s'étendant sur de très grandes plages d'échelles de longueur, rendant difficile l'estimation du comportement dans la limite thermodynamique.

En conclusion, cette étude nous a permis de préciser la zone flottante d'évolution des exposants critiques située entre  $\alpha = 3$  et  $\alpha = 4$  en deux dimensions. Grâce à cet ajout, nous disposons d'un cadre mieux défini pour décrire l'évolution de la criticalité des systèmes sous l'ajout d'un transport à longue portée. Dans la suite de cet ouvrage, nous nous servirons de cette base de comparaison afin de montrer que les interactions à longues portées, lorsqu'elles correspondent à des interactions médiées par le milieu plutôt qu'un transport, font évoluer la criticalité des systèmes d'une manière tout à fait différente.



# Chapitre 3

## Transition de réversibilité dans les suspensions cisaillées cycliquement

**TODO : Corriger les interprétations de  $\nu_\perp$  et  $z$ , Citer Bartolo**

### Pré-requis pour le chapitre

- Introduction : Influence du déplacement d'une particule sur une autre particule dans un fluide.
- Introduction : CDP, depinning, ROM, LR-depinning
- Introduction : avoir relié  $\beta > 1$  et  $\gamma' < 0$  avec l'hyperscaling
- Chapitre 2 : LR-ROM

Dans la ?? nous avons vu que, sous cisaillement cyclique, les suspensions peuvent être soumises à une transition de réversibilité. Celle-ci peut être interprétée comme une transition de phase absorbante [5, 6, 27, 106]. Le paramètre de contrôle de cette transition est alors l'amplitude de cisaillement appliquée  $\gamma_0$  et le paramètre d'ordre le coefficient de diffusion stroboscopique des particules  $D_0$ . Dans la phase absorbante, pour  $\gamma_0 < \gamma_{0,c}$ , les particules de la suspension suivent un mouvement réversible et donc on a  $D_0 = 0$ . Dans la phase active, pour  $\gamma_0 > \gamma_{0,c}$ , les interactions irréversibles entre particules induisent une diffusion stroboscopique des particules d'un cycle à l'autre et donc  $D_0 > 0$ . Proche de la transition ( $\gamma_0 \approx \gamma_{0,c}$ ),  $D_0$ , ses fluctuations  $\langle \delta D_0^2 \rangle$  et la longueur de corrélation associée au système suivent une évolution dictée par les exposants critiques  $\beta$ ,  $\gamma'$  et  $\nu_\perp$  :

$$D_0 \sim \delta\gamma_0^\beta, \quad \langle \delta D_0^2 \rangle \sim \delta\gamma_0^{-\gamma'}, \quad \xi \sim \delta\gamma_0^{-\nu_\perp}, \quad \delta\gamma_0 = \frac{\gamma_0 - \gamma_{0,c}}{\gamma_{0,c}} \quad (3.1)$$

Les modélisations simples de ce système [6, 27, 106] semblent placer ce phénomène critique dans la classe d'universalité CDP. Toutefois, en considérant les interactions entre les particules, médiées par le fluide suspendant, Mari et al. [14] ont proposé un modèle présentant une criticalité très différente. Alors que pour la classe CDP l'évolution du paramètre d'ordre est concave ( $\beta < 1$ ) et ses fluctuations divergentes ( $\gamma' > 0$ ), le modèle prenant en compte les interactions médiées définit une évolution convexe du paramètre d'ordre ( $\beta > 1$ ) et des fluctuations qui s'annulent au point critique ( $\gamma' < 0$ ).

Dans le ??, nous avons vu que l'introduction de la longue portée sous forme de transport à longue portée dans un modèle appartenant à la classe CDP permettait de passer continûment de la criticalité de courte portée à celle de champ moyen. Cette évolution canonique suit un cadre théorique que nous avons appelé LR-CDP. Dans ce cas, nous avons sur toute cette gamme  $\beta \leq 1$  et  $\gamma' \geq 0$ . La criticalité exposée par le modèle prenant en compte les interactions médiées semble donc échapper à ce cadre.

Dans ce chapitre, nous proposons d'étudier plus en profondeur le modèle proposé par Mari et al. [14] afin de comprendre comment les interactions médiées à longue portée induisent une criticalité différente de celle induite par le transport à longue portée. Pour ce faire, nous présenterons un modèle numérique capable de prendre en compte ces interactions de manière spatialisée dans le système. Nous étudierons alors le comportement critique associé à ce modèle et sa dépendance en portée de l'interaction d'un point de vue statique, dynamique et structurel. Nous proposerons enfin un cadre de description champ moyen pour interpréter les fortes différences de comportement critique observées entre ce modèle et le cadre de référence LR-CDP.

### 3.1 Importance de la spatialisation des interactions

#### Limite de l'approche champ moyen

Dans leur modèle initial, Mari et al. [14] ont implémenté les interactions à longue portée médiées par le fluide d'un point de vue champ moyen. Les détails de cette implémentation seront donnés dans la section suivante. Dans cette approche, chaque particule est soumise à une interaction médiée moyenne, assimilée à une sorte de diffusion, qui dépend uniquement du nombre instantané de particules subissant une interaction de contact irréversible dans le système. En d'autres termes, peu importe la distance d'une particule à un évènement irréversible, l'impact de ce dernier sur elle reste le même. Via ce modèle en deux dimensions, les auteurs ont mené des analyses numériques permettant de déterminer précisément la valeur des exposants critiques associés au paramètre d'ordre :

$$\beta \approx 1.85, \quad \gamma' \approx -1.3 \tag{3.2}$$

Cette approche simplificatrice met alors en évidence un mécanisme, la diffusion des particules via les interactions médiées, permettant de sortir du cadre de description LR-CDP. En effet, nous rappelons que pour celui-ci nous avons en champ moyen  $\beta = 1$  et  $\gamma' = 0$ .

Toutefois, d'un point de vue de la modélisation d'un système réel ce modèle présente des lacunes. Notamment, comme nous l'avons vu au chapitre 1, les interactions médiées par un fluide visqueux sont en général fonction de la distance. Celles-ci sont représentées formellement par un propagateur hydrodynamique, présenté à la ??, qui décroît comme :

$$\mathcal{G}_{ij}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \sim \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^\alpha} \tag{3.3}$$

à grande distance  $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$  de la source de l'interaction. La question est alors de savoir si le comportement critique exotique exhibé par le modèle traitant les interactions médiées en champ moyen est effacé par une représentation spatialisée de celles-ci.

## Quelle portée étudier ?

La première question à nous poser pour mener notre étude est donc de savoir quelle est la portée  $\alpha$  pertinente pour modéliser un système réel. En fait, comme nous l'avons vu à la ??, cela dépend fortement du dispositif considéré. Dans le cadre de la transition de réversibilité des suspensions cisaillées cycliquement, nous pouvons imaginer deux conditions expérimentales simples.

La première concerne le cisaillement d'une suspension dans un écoulement de Couette cylindrique (trouver un livre de méca flu), à la manière de Pine et al. [5]. Dans ce cas, à condition que l'écart entre les parois rigides cylindriques soit suffisamment grand devant le diamètre des particules, nous pouvons approximer les interactions médiées dans ce système comme celles caractérisant un système infini en trois dimensions, et pour lesquelles on a  $\alpha = 1$  (trouver un livre de méca flu). En considérant alors que les interactions irréversibles de contact entre les paires de particules correspondent à la forme dipolaire de l'interaction, la portée pertinente pour caractériser ce système 3D est  $\alpha = 2$ .

La seconde concerne le cisaillement d'une suspension dans un espace confiné entre des plaques rigides, rendant le problème quasi-2D. La transition de réversibilité a déjà été étudiée dans un dispositif proche de ces conditions [107]. Dans ce cas là, nous avons vu que le propagateur hydrodynamique décroît comme  $1/r^2$  à grande distance dans le milieu bidimensionnel, soit  $\alpha = 2$  [59]. Selon la même hypothèse que les interactions irréversibles de contact entre les paires de particules correspondent à la forme dipolaire de l'interaction, la portée pertinente pour caractériser ce système 2D est donc  $\alpha = 3$ .

Nous pouvons imaginer encore d'autres dispositifs, comme un confinement quasi-2D sur une interface libre [108]. Ainsi, il ne semble pas y avoir une portée pertinente mais des portées pertinentes pour aborder le problème de la transition de réversibilité. Dans ce chapitre, nous proposons donc d'étudier un modèle mettant en jeu des interactions dont la portée  $\alpha$  peut être variée librement. Son étude nous permettra alors de mieux comprendre l'influence des interactions médiées et de leur portée sur la criticalité de la transition associée, replaçant alors l'étude de Mari et al. [14] dans une image plus globale.

## 3.2 Méthode

Dans cette section, nous présentons le modèle que nous avons mis au point pour étudier la transition de réversibilité en présence d'interactions médiées à longue portée.

### 3.2.1 Le ROM comme modèle de dynamique stroboscopique

D'un point de vue numérique, la transition de réversibilité dans les suspensions cisaillées cycliquement peut être étudiée de différentes façons. Les approches les plus évidentes, i.e. les plus proches des expériences, sont celles de dynamique particulaire. Dans les travaux de Ge et Elfring [106] par exemple, des suspensions de quelques 500 particules ont été étudiées et montrent effectivement une transition de réversibilité, dont une estimation de l'exposant critique  $\beta$  a même été faite. Néanmoins, ces simulations comportant de

nombreux degrés de liberté, il est difficile d'étendre ce type d'étude à des systèmes plus grands. Cette condition est pourtant indispensable à l'étude des phénomènes critiques, puisque celle-ci n'est valable qu'à grande échelle. De plus, ces modèles font intervenir de nombreux paramètres (forme du potentiel d'interaction, modélisation du solvant, ...) rendant les résultats de chaque simulation modèle-spécifique. Ils ne sont donc pas adéquat pour étudier les propriétés universelles de la transition.

Pour remédier à ce problème, il est nécessaire de s'appuyer sur des modèles simplificateurs, basés sur des aspects phénoménologiques essentiels du problème. Une approche possible, développée par Corte et al. [6], consiste à considérer la dynamique du système d'un point de vue stroboscopique. En d'autres termes, les cycles de cisaillement ne sont pas considérés dans leur ensemble mais seulement représentés par deux instants : leur début et leur fin (voir [figure 3.1](#)). Le postulat de modélisation est alors le suivant : lorsqu'au cours d'un cycle deux particules sont suffisamment proches, elles interagissent irréversiblement. Cette interaction irréversible fait alors qu'entre le début et la fin du cycle, les particules ayant interagi ne se retrouvent pas exactement à la même position. Les interactions irréversibles que subissent les particules peuvent avoir des origines complexes comme des interactions de surface [3]. Ainsi, dans un but de simplification globale, l'approche stroboscopique considère ces interactions comme erratiques. En d'autres termes, d'un pas au suivant de la modélisation stroboscopique, les particules ayant interagi subissent un déplacement aléatoire de courte amplitude.

Le modèle simplificateur recherché doit donc, à chaque pas de temps, déterminer la distance entre les particules en début de cycle. Celles suffisamment proches sont alors considérées comme interagissant durant le cycle. Elles sont donc déplacées aléatoirement au prochain pas de temps, i.e. à l'issue de ce cycle. L'état réversible absorbant correspond donc à un état où toutes les particules de la suspension sont suffisamment loin pour ne pas interagir. L'état irréversible correspond au contraire à un état où, dans le régime stationnaire, il y a toujours des déplacements sur un pas de temps. Ce modèle correspond donc exactement au ROM, introduit et étudié dans les chapitres précédents, comme illustré à la [figure 3.1](#). En réalité cette correspondance n'est pas un total hasard puisque le ROM a précisément été créé pour modéliser cette transition [6].

Toutefois, nous avons vu dans le [chapitre 1](#) que la transition de réversibilité était une transition de phase absorbante avec comme paramètre de contrôle l'amplitude de cisaillement  $\gamma_0$  et comme paramètre d'ordre le coefficient de diffusion stroboscopique  $D_0$ . Il n'est donc pas évident de transposer ces observables au ROM, pour lequel le paramètre de contrôle est la densité de particules  $\phi$  et le paramètre d'ordre l'activité  $A$ . En effet, dans le modèle stroboscopique, la notion de cisaillement est totalement perdue. Pourtant, il est possible de faire un parallèle direct entre ces deux approches. En fait, l'amplitude de cisaillement dans les expériences désigne simplement une distance de déplacement des particules lors d'un cycle. En d'autres termes, elle atteint sa valeur critique lorsque cette distance se compare à la distance interparticulaire  $l \sim \phi^{-1/D}$ <sup>1</sup>. Un paramètre de contrôle équivalent de la transition est donc cette distance interparticulaire, via la densité

---

1. à réfléchir parce que les expériences ont l'air de dire le contraire

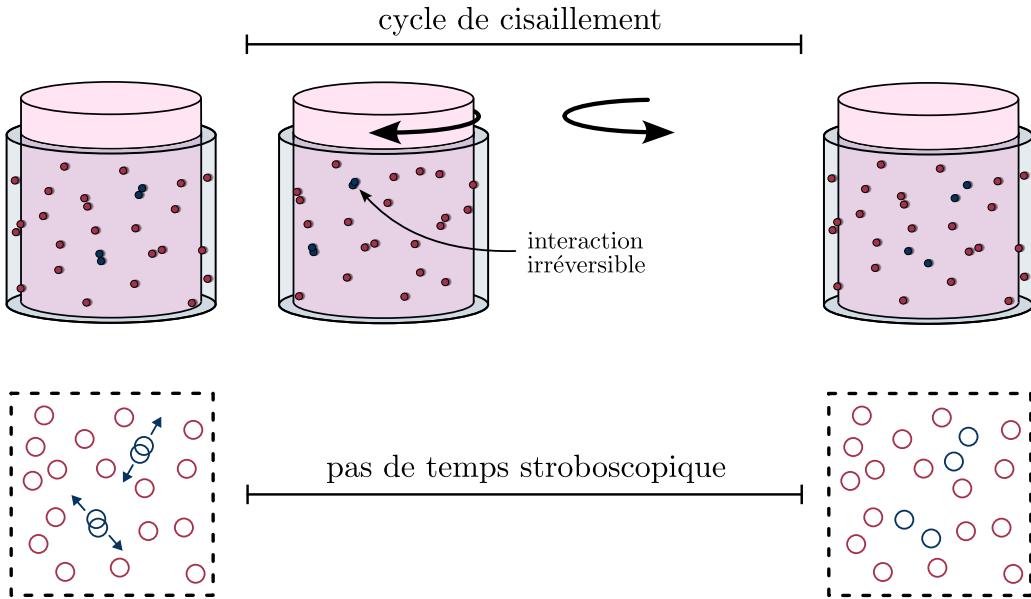


FIGURE 3.1 – Équivalence entre la vision dynamique et la vision stroboscopique dans les expériences de suspensions cisaillées cycliquement

de particules  $\phi$ . De la même façon, le coefficient de diffusion stroboscopique du système est directement relié au nombre de particules interagissant irréversiblement. Ainsi, un paramètre d'ordre équivalent est bien l'activité dans le ROM. En d'autres termes, une particule active dans le ROM est une particule interagissant irréversiblement dans la vision dynamique. Par la correspondance  $\gamma_0 \rightarrow \phi$  et  $D_0 \rightarrow A$ , le ROM est donc le modèle numérique idéal pour simuler la transition de réversibilité dans les suspensions cisaillées cycliquement de par sa simplicité.

Suivant ces lignes, Tjhung et al. [27] ont utilisé cette équivalence pour justifier l'appartenance de cette transition à la classe CDP. Toutefois cette approche néglige totalement la présence du fluide suspendant et les interactions qu'il peut médier entre les particules. Notre objectif est alors de comprendre comment ces interactions médiées peuvent affecter la criticalité du système. Or, si le ROM est un modèle efficace pour sonder la transition dans le cas d'interactions à courte portée, il ne permet pas en l'état de modéliser les interactions médiées par le fluide suspendant.

### 3.2.2 Modélisation des interactions médiées

Afin de conserver l'efficacité du modèle stroboscopique tout en y ajoutant la présence d'interactions médiées à longue portée, ces dernières doivent pouvoir être modélisées de manière simple et efficace. Le premier objectif de cette étude est donc de déterminer la modélisation adaptée.

En pratique, au cours d'un cycle de cisaillement, chaque particule suspendue dans le fluide interagit avec les autres particules via des interactions hydrodynamiques (voir ??). Considérons une particule située en  $\mathbf{r}'$  et soumise à une vitesse de déplacement  $v_i(\mathbf{r}')$  selon

chaque coordonnée spatiale  $i$ . En première approximation<sup>2</sup>, d'après la théorie hydrodynamique, celle-ci induira une vitesse de déplacement  $v_i^p(\mathbf{r})$  pour une particule située en  $\mathbf{r}$  selon :

$$v_i^p(\mathbf{r}) = \mathcal{G}_{ij}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') v_j(\mathbf{r}') \quad (3.4)$$

avec  $\mathcal{G}_{ij}(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$  le tenseur hydrodynamique adéquat pour la modélisation du problème, décroissant comme  $1/|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^\alpha$  à grande échelle.

Au cours de la transition réelle, les déplacements irréversibles des particules lors d'un cycle prennent des formes complexes et ne sont a priori pas instantanés. Afin de modéliser l'influence d'une telle trajectoire irréversible, nous la considérons simplement dans l'approche stroboscopique. Nous considérons alors qu'une telle trajectoire autour de  $\mathbf{r}'$  équivaut in fine à un simple déplacement aléatoire  $\delta_i^a(\mathbf{r}')$ , qui induit un déplacement  $\delta_i^p(\mathbf{r})$  sur une particule située en  $\mathbf{r}$  selon :

$$\delta_i^p(\mathbf{r}) = \mathcal{G}_{ij}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \delta_j^a(\mathbf{r}') \quad (3.5)$$

Nous postulons alors que la forme adéquate du tenseur hydrodynamique est la même que pour le problème standard.

Cette modélisation implique une approche tensorielle de l'influence des particules actives sur les particules passives (par opposition à actives) dans le modèle stroboscopique : le déplacement d'une particule passive induit par une particule active dépend de la direction de déplacement de cette dernière. Pour simplifier davantage cette approche, nous nous appuyons sur le fait que, dans la phase active, dans la limite thermodynamique, chaque particule passive reçoit des interactions médiées de la part d'un grand nombre de particules actives.. En notant  $\{\mathbf{r}'\}$  l'ensemble des positions des particules actives, on a alors :

$$\delta_i^p(\mathbf{r}) = \sum_{\mathbf{r}'} \mathcal{G}_{ij}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \delta_j^a(\mathbf{r}') \quad (3.6)$$

De ce fait, nous pouvons aborder cette interaction d'un point de vue statistique. Les déplacements des particules actives étant de moyenne nulle on a de même  $\langle \delta_i^p(\mathbf{r}) \rangle = 0$ . Par ailleurs, ces premiers sont de directions aléatoires. En les considérant d'amplitude typique  $a$  on a alors en première approximation :

$$\langle \delta_i^p(\mathbf{r})^2 \rangle \sim a^2 \sum_{\mathbf{r}'} \mathcal{G}^2(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \quad (3.7)$$

avec  $\mathcal{G}^2$  un propagateur effectif de l'interaction, que nous choisissons isotrope et décroissant comme  $1/r^{2\alpha}$ . En pratique, Le propagateur scalaire effectif retenu pour la modélisation est de la forme spécifique suivante :

$$\mathcal{G}^2(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = \frac{c}{\left(1 + \left(\frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{D_p}\right)^2\right)^\alpha}, \quad c \in \mathbb{R}^+ \quad (3.8)$$

---

2. Sous quelle approximation on assimile une particule se déplaçant à une force ponctuelle sur le fluide ?

avec  $D_p$  le diamètre des particules et  $c$  un paramètre représentant la borne supérieure de l'interaction. Dans la suite de ce travail, nous considérons  $c = 0.25$ , à comparer avec  $a = 1$ . Cette formulation modélise alors bien une interaction entre particules actives et particules passives qui décroît comme  $1/r^\alpha$  en champ lointain. La régularisation en  $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| = 0$  permet par ailleurs de considérer sans difficulté des interactions pour lesquelles on a  $2\alpha > D$ , sans quoi cette forme ne serait plus intégrable.

In fine, dans cette modélisation simplificatrice, chaque particule passive est donc soumise à un déplacement de moyenne nulle et dont l'amplitude typique dépend de la distance aux particules actives. Ces simplifications permettent alors de rendre la modélisation des interactions scalaire, ce qui permet d'alléger fortement l'implémentation numérique.

### 3.2.3 Implémentation numérique

Pour l'implémentation numérique de ce modèle, nous reprenons les éléments de base du ROM, détaillé au chapitre précédent. Les interactions médiées représentent alors simplement une composante additionnelle à ce modèle, à implémenter à chaque pas de temps.

#### 3.2.3.1 Calcul de l'influence des particules actives

Afin de simplifier le calcul numérique de la somme de l'équation 3.7, nous choisissons de considérer une version gros grains de l'activité dans le système. Pour ce faire, nous définissons un champ d'activité discret  $A(\mathbf{r}_i)$ , défini sur le réseau utilisé pour la méthode cell-list, introduite à la sous-section 2.2.2. Chaque case du réseau est alors définie autour d'une position  $\mathbf{r}_i = na\hat{\mathbf{e}}_x + ma\hat{\mathbf{e}}_y$  avec  $(n, m) \in \mathbb{N}^2$  et  $a$  le pas du réseau que l'on prend de nouveau égal à  $D_p = 1$ . À chaque pas de temps, après identification des particules actives, nous calculons ce champ d'activité sur la case du réseau centrée autour de  $\mathbf{r}_i$  comme le nombre de particules actives dans cette case (voir figure 3.2).  $A(\mathbf{r}_i)$  représente alors en quelques sortes la quantité locale d'activité sur toute la surface du réseau.

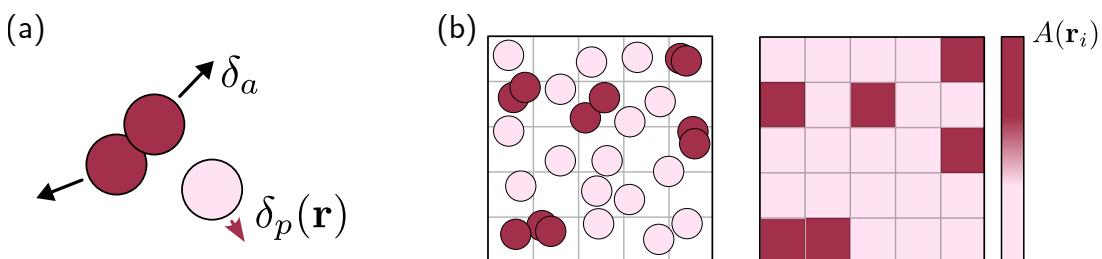


FIGURE 3.2 – Implémentation numérique du modèle  $\alpha$ -ROM. (a) Les particules actives (rouges) sont soumises à des déplacements aléatoires  $\delta^a$  indépendants de leur position. Les particules passives sont soumises à des déplacements aléatoires  $\delta^p$  dont l'amplitude typique dépend de leur distance à l'activité. (b) Méthode de détermination du champ d'activité discret  $A(\mathbf{r}_i)$

Pour déterminer la variance du déplacement des particules passives à chaque pas de temps, il suffit donc de calculer la convolution discrète suivante :

$$\langle \delta_\alpha^p(\mathbf{r}_i)^2 \rangle = a^2 \sum_j G^2(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) A(\mathbf{r}_j) \quad (3.9)$$

avec  $G^2$  la version discrétisée du propagateur  $\mathcal{G}^2$ . Cette convolution étant définie sur un réseau régulier, il est possible de la calculer efficacement par une méthode pseudo-spectrale. En pratique, nous la calculons donc dans l'espace réciproque où elle devient le simple produit  $\hat{G}^2(\mathbf{q}_i)\hat{A}(\mathbf{q}_i)$ , avec  $\mathbf{q}_i = (\frac{2\pi}{L}n, \frac{2\pi}{L}m)$  et  $L$  la taille du système. Pour ce faire, nous définissons directement le propagateur hydrodynamique dans l'espace de Fourier. Dans le cas continu, le calcul relégué à la [sous-section 6.2.1](#) donne en deux dimensions :

$$\hat{\mathcal{G}}(\mathbf{q}) = \frac{2\pi c}{\Gamma(\alpha)} \left(\frac{q}{2}\right)^{\alpha-1} K_{\alpha-1}(q) \quad (3.10)$$

avec  $\Gamma$  la fonction Gamma d'Euler et  $K_{\alpha-1}$  la fonction de Bessel modifiée de seconde espèce d'ordre  $\alpha - 1$  [109]. On peut alors estimer la valeur de ce propagateur continu en  $\mathbf{q} = 0$  pour un milieu de taille finie en calculant sa valeur moyenne dans l'espace réel :

$$\hat{\mathcal{G}}(0) = \frac{\pi c}{\alpha - 1} \left(1 - (1 + L^2)^{1-\alpha}\right) \xrightarrow[L \rightarrow \infty]{\alpha > 1} \frac{\pi c}{\alpha - 1} \quad (3.11)$$

Nous choisissons donc de définir le propagateur discret  $\hat{G}$  dans l'espace réciproque par l'expression :

$$\hat{G}(\mathbf{q}_i) = \hat{\mathcal{G}}(\mathbf{q}_i), \quad q = \sqrt{\left(2 - 2 \cos\left(\frac{2\pi}{L}n\right)\right) + \left(2 - 2 \cos\left(\frac{2\pi}{L}m\right)\right)} \quad (3.12)$$

la conversion du nombre d'onde étant essentielle pour définir proprement le propagateur dans l'espace réciproque discret [68, 110]. La forme alors obtenue par cette procédure dans l'espace discret réel pour  $\alpha \in \{3, 2, 1.5\}$  est présentée à la [figure 3.3-\(a\)](#).

Finalement, la valeur réelle de la convolution est obtenue en opérant une transformée de Fourier inverse discrète sur le produit. Cette méthode devenant alors parallélisable, elle nous permet de conserver l'architecture GPU utilisée pour les simulations précédentes. De plus, la méthode pseudo-spectrale permet de prendre en compte les conditions aux limites périodiques du système naturellement. Enfin, afin d'optimiser notre utilisation des fonctions de Fast Fourier Transform [111], nous privilégions les tailles de système de la forme  $L = 2^p$  avec  $p \in \mathbb{N}$ .

De cette manière, en plus des particules actives, les particules passives sont soumises à un déplacement dont la variance est donnée par l'[équation 3.9](#) à chaque pas de temps. Ce modèle représente alors une généralisation du modèle étudié par Mari et al., qui correspond exactement au cas  $\alpha = 0$  (et donc des interactions médiées indépendantes de la distance). Ce nouveau mécanisme permet d'observer une transition de phase absorbante analogue à celle du ROM et dont les propriétés critiques varient avec la portée de l'interaction  $\alpha$ . Nous appelons alors ce nouveau modèle  $\alpha$ -ROM, et, par analogie, celui de Mari et al. 0-ROM.

### 3.2.3.2 Non-intégrabilité du propagateur à longue portée

Si la régularisation du propagateur en  $r = 0$  permet de le rendre intégrable pour  $2\alpha > D$ , pour  $2\alpha < D$  c'est la limite  $r \rightarrow \infty$  qui pose problème. En effet dans ce cas, la valeur moyenne du propagateur diverge comme  $L^{2-2\alpha}$  pour  $L$  grand. Si cette divergence n'est pas un problème en soi pour l'étude d'un système de taille finie, elle en représente un pour la comparaison des comportements critiques à différentes tailles. En effet, cette dépendance du propagateur en taille rend la densité critique  $\phi_c$  elle aussi fortement dépendante de  $L$  (voir figure 3.3-(b)). De ce fait, il n'est alors plus possible d'utiliser différentes tailles du système pour sonder le comportement critique à une portée  $\alpha$  donnée, comme cela a été fait à la section 2.4 dans le cas des sauts à longue portée.

Afin de remédier à ce problème, nous choisissons de normaliser les propagateurs pour  $2\alpha < D$  par un facteur  $L^{2-2\alpha}$ , rendant de ce fait la valeur moyenne du propagateur indépendante de la taille du système. Par cette procédure, nous retrouvons alors pour  $\alpha = 0.5$  une densité critique indépendante de la taille du système à grande taille (voir figure 3.3-(c)). Toutefois pour  $\alpha = 1$ , pour lequel la divergence de la valeur moyenne du propagateur évolue logarithmiquement avec la taille, cette procédure de normalisation n'est pas concluante. En effet, dans ce cas,  $\phi_c$  montre une forte dépendance avec la taille du système même après normalisation. Ceci peut être expliqué par le fait qu'une telle divergence logarithmique n'est valable qu'à des tailles de systèmes excessivement grandes. Ce cas restant néanmoins d'intérêt, nous conservons son étude mais nous nous limitons pour cela à une taille de système fixée.

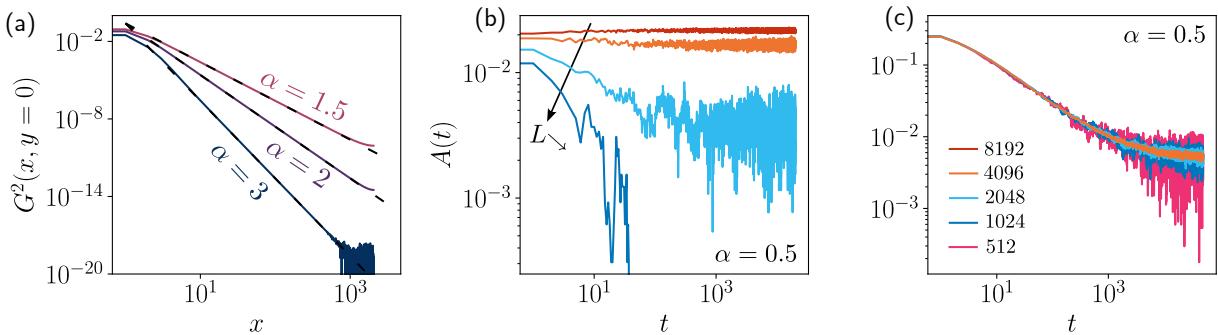


FIGURE 3.3 – Propagateurs d’interaction dans le modèle  $\alpha$ -ROM

- . (a) Évolution du propagateur effectif dans l'espace discret réel pour  $\alpha \in \{3, 2, 1.5\}$ . Les pointillés noirs représentent les lois de puissance  $1/r^{2\alpha}$ . (b) Évolution de l'activité vers l'état stationnaire à  $\phi = 0.00486859$  pour différentes tailles de système avec  $\alpha = 0.5$  dans le cas d'un propagateur non normalisé. La distinction des courbes montre un point critique discernablement différent pour chaque taille. (c) Idem à  $\phi = 0.101117$  avec le propagateur normalisé.

### 3.2.3.3 Extension aux dimensions supérieures

Notre travail se focalise sur une étude de la transition en deux dimensions. Toutefois, certains cas physiques de cette transition ont lieu dans un espace de trois dimensions [5]. De plus, d'un point de vue purement théorique, il peut être intéressant de comprendre

comment cette transition évolue avec le nombre de dimensions du système. Pour ces raisons, nous généralisons cette méthode de simulation numérique à  $n$  dimensions,  $n \in \mathbb{N}^+$ .

La complexité de cette implémentation réside alors essentiellement dans l'intégration des conditions aux limites périodiques. Dans le cas du calcul des interactions à longue portée, celles-ci sont directement prises en compte par la méthode pseudo-spectrale. Pour le calcul des interactions de contact cependant, la périodicité nécessite plus d'attention, mais reste généralisable grâce à un peu d'algèbre.

Afin de mesurer de manière annexe le comportement critique du  $\alpha$ -ROM en 3D, nous implémentons les interactions médiées de la même façon qu'en 2D. Seulement, cette fois, la forme spectrale continue du propagateur est<sup>3</sup> :

$$\hat{\mathcal{G}}(\mathbf{q}) = \frac{c\pi^{\frac{3}{2}} 2^{\frac{5}{2}-\alpha}}{\Gamma(\alpha)} q^{\alpha-\frac{3}{2}} K_{\alpha-\frac{3}{2}}(q) \quad (3.13)$$

Pour  $\alpha < \frac{3}{2}$ , nous opérons la même procédure de normalisation que pour le cas 2D mais seulement cette fois par le facteur  $L^{3-2\alpha}$ .

Finalement le modèle ainsi implanté du  $\alpha$ -ROM nous permet d'étudier efficacement les transitions de phase absorbantes associées à chaque portée de l'interaction médiée  $\alpha$  en deux et trois dimensions. Grâce à cet outil, il est alors possible de comprendre comment l'on passe du cas limite de courte portée du ROM ( $\alpha \rightarrow \infty$ ), représenté par la classe CDP, au cas limite  $\alpha \rightarrow 0$ , représenté par une transition convexe et des fluctuations critiques évanescentes [14], totalement hors du cadre LR-CDP. Pour ce faire, nous caractérisons d'abord en 2D la gamme de portées suivante :  $\alpha \in \{0.5, 1, 1.25, 1.5, 1.75, 2, 3\}$ .

### 3.3 Comportement critique

Afin de déterminer l'évolution de la criticalité du système avec la portée d'interaction  $\alpha$  et de la comparer avec le cadre de référence LR-CDP, nous commençons par déterminer le comportement critique statique des modèles  $\alpha$ -ROM. Pour ce faire, nous mesurons les exposants critiques  $\beta$  et  $\gamma'$ .

#### 3.3.1 Détermination du point critique

Dans cette optique, nous commençons par déterminer les densités critiques  $\phi_c$  associées à chaque transition. En utilisant des tailles de systèmes allant de  $L = 2048$  à  $L = 8192$ , nous mesurons l'activité moyenne  $\langle A \rangle$  dans l'état stationnaire pour différentes densités  $\phi$  et ce pour chaque portée  $\alpha$ . Pour le cas problématique  $\alpha = 1$  évoqué précédemment, le comportement critique est évalué pour la plus grande taille  $L = 8192$ . En estimant grossièrement la densité critique associée à chaque portée il est alors possible de tracer les courbes d'évolution du paramètre d'ordre, représentées à la figure 3.4-(a).

3. Le calcul est relayé en [sous-section 6.2.1](#)

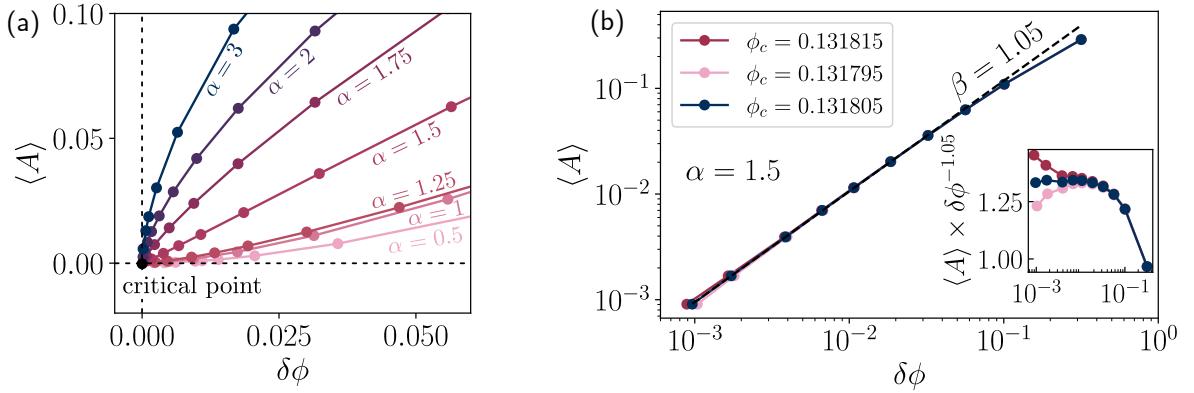


FIGURE 3.4 – (a) Évolution de l’activité moyenne dans l’état stationnaire avec la distance au point critique pour différentes portée  $\alpha$  des interactions médiées en 2D. (b) Exemple de détermination d’une densité critique  $\phi_c$  dans le cas  $\alpha = 1.5$  en 2D. Le choix  $\phi_c = 0.131805$  est significativement meilleure que  $\phi_c = 0.131815$  et  $\phi_c = 0.131795$ . En encart, la représentation compensée permet d’exacerber ces différences.

Nous remarquons que cette évolution passe effectivement d’une forme concave à grand  $\alpha$ , à une forme convexe à petit  $\alpha$ . Ce comportement qualitatif est donc en accord avec les limites de courte portée ( $\beta \approx 0.64$  [19]) et de portée infinie ( $\beta \approx 1.85$  [14]). Ainsi, comme dans le cas des sauts à longue portée, la criticalité semble évoluer continûment avec la portée de l’interaction. Toutefois, en plus de la différence asymptotique à très longue portée, une différence fondamentale semble apparaître quant au domaine de portées sur lequel cette évolution continue a lieu. En effet, nous rappelons que dans le cadre LR-CDP, pour  $\alpha = 3$ , la théorie est déjà à sa limite champ moyen (voir chapitre 1).

Afin d’évaluer plus quantitativement cette différence, il nous faut mesurer précisément l’exposant  $\beta$  associé. Nous reprenons alors la méthode présentée à la section 2.4. Un exemple de détermination dans le cas du  $\alpha$ -ROM pour  $\alpha = 1.5$  est représenté à la figure 3.4-(b). Ces déterminations sont alors bien plus compliquées que dans le cas des sauts à longue portée et ce pour deux raisons principales. La première est que le régime transitoire est bien plus long à atteindre en présence de la diffusion des particules passives. Notamment, la décroissance initiale et la transition entre régime transitoire et régime stationnaire sont bien moins abruptes. Ainsi, pour une courbe de convexité équivalente (i.e.  $\beta$  équivalent), les simulations nécessitent plus de dix fois plus de pas de temps avant équilibration<sup>4</sup>. La seconde vient du fait que les transitions convexes sont plus difficiles à caractériser. En effet, pour une distance au point critique équivalente, celles-ci impliquent de descendre à des activités bien plus faibles (puisque  $\langle A \rangle \sim \delta\phi^\beta$ ). Cela requiert alors des tailles de systèmes de plus en plus grandes et donc des simulations de plus en plus longues. Au final, l’équilibration de certains points a nécessité plus de 800 heures de simulation continue. En général, la caractérisation des transitions convexes amènera donc plus d’incertitudes.

4. De plus, les pas de temps du  $\alpha$ -ROM sont bien plus coûteux en termes de ressources numériques puisqu’ils font intervenir des calculs de FFT.

### 3.3.2 Évolution des exposants critiques

#### 3.3.2.1 Exposants statiques

Les densités critiques déterminées permettent de représenter les courbes  $\langle A \rangle = f(\delta\phi)$  en échelle logarithmique pour chaque  $\alpha$  sur la figure 3.5-(a). Les exposants  $\beta$  estimés par cette méthode sont reportés dans le tableau 3.1 et leur évolution est résumée sur la figure 3.6-(a).

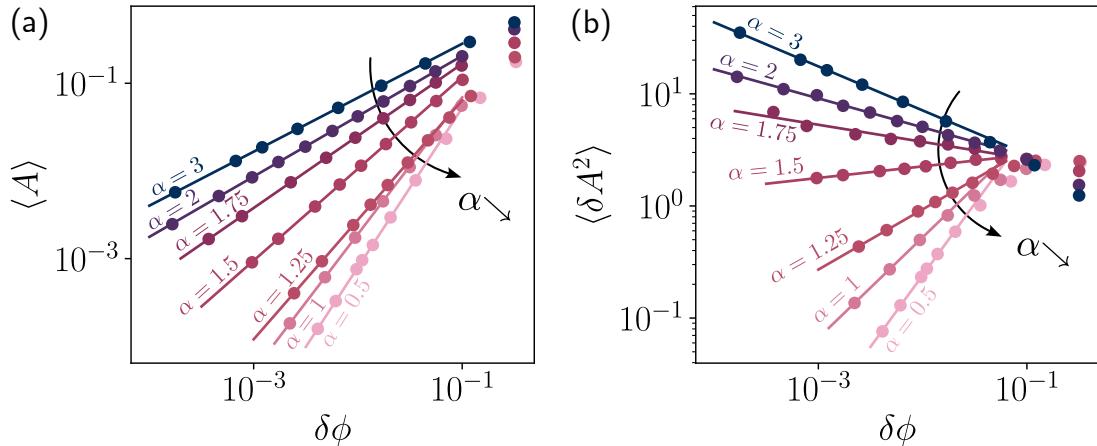


FIGURE 3.5 – (a) Évolution de la valeur moyenne de l'activité dans l'état stationnaire  $\langle A \rangle$  en fonction de la distance au point critique  $\delta\phi$  à différentes portées dans le  $\alpha$ -ROM en 2D. (b) Idem pour la variance  $\langle \delta A^2 \rangle$

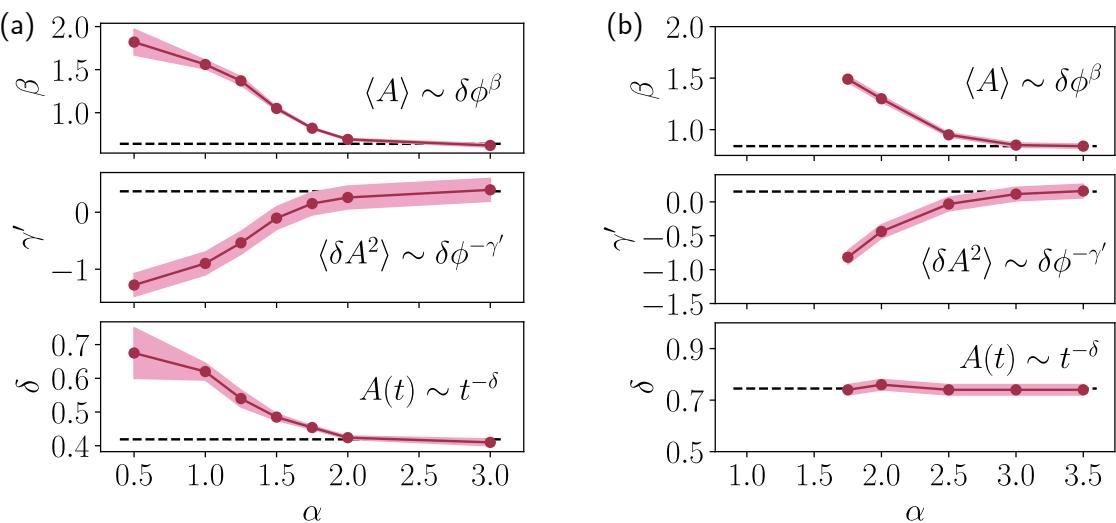
Pour déterminer l'exposant  $\gamma'$ , comme dans le ??, nous mesurons  $\langle \delta A^2 \rangle$  dans l'état stationnaire. La détermination de  $\phi_c$  étant déjà effectuée, l'exposant se mesure par un simple ajustement de la courbe en échelle logarithmique. L'évolution des fluctuations en fonction de la portée est alors représentée sur la figure 3.5-(b). Nous observons que l'on passe de fluctuations divergentes à l'approche du point critique pour les courtes portée à des fluctuations qui s'annulent pour les longues portées. Cette observation est à nouveau en accord avec les comportements limites de courte portée (CDP) et de portée infinie (0-ROM). Les valeurs des exposants  $\gamma'$  sont reportées dans le tableau 3.1 et leur évolution est résumée sur la figure 3.6-(a).

#### Zones d'évolution

Nous observons alors effectivement une évolution continue des deux exposants avec la portée. Notamment, l'évolution est significative entre  $\alpha \approx 2$  et  $\alpha \approx 1 - 0.5$ , au-delà de quoi elle semble arriver à saturation des deux côtés. Par ailleurs les valeurs des exposants aux plus grands  $\alpha$  rejoignent celles de la classe CDP : pour  $\alpha = 6$ , l'accord est exact aux incertitudes de détermination près et pour  $\alpha = 4$  la différence est minime. Cela suggère donc de considérer  $\alpha \approx 2$  comme limite de courte portée de la transition. Dans le cadre de référence LR-CDP, cette borne se situe en  $\alpha = 4$ . À l'opposé du spectre, les exposants déterminés pour  $\alpha = 0.5$  rejoignent aussi ceux déterminés dans le cas du 0-ROM. Cette observation suggère alors  $\alpha \approx 0.5$  comme la limite champ moyen de la transition. Dans le

$\alpha$	$\beta$	$\gamma'$	$\delta$	$\nu_{\perp}^*$
CDP [19]	0.64	0.37	0.42	0.80
3	0.62	0.39	0.41	0.82
2	0.69	0.26	0.42	0.82
1.75	0.82	0.15	0.45	0.90
1.5	1.05	-0.10	0.49	1.00
1.25	1.37	-0.54	0.54	1.10
1	1.56	-0.90	0.62	1.11
0.5	1.82	-1.28	0.67	1.18
0 [14]	1.85	-1.2	-	1.3

$\alpha$	$\beta$	$\gamma'$	$\delta$	$\nu_{\perp}^*$
CDP [19]	0.84	0.15	0.75	0.59
3.5	0.84	0.16	0.74	0.61
3	0.85	0.11	0.74	0.60
2.5	0.95	-0.03	0.74	0.62
2	1.30	-0.44	0.76	0.72
1.75	1.49	-0.82	0.75	0.72

 TABLE 3.1 – Exposants critiques déterminés dans les modèles  $\alpha$ -ROM en 2D (a) et en 3D (b)

 FIGURE 3.6 – Évolution des exposants critiques  $\beta$ ,  $\gamma'$  et  $\delta$  avec la portée dans le modèle  $\alpha$ -ROM en 2D (tableau de gauche) et en 3D (tableau de droite). Les zones colorées rose représentent les incertitudes de détermination.

cadre de référence LR-CDP, cette borne se situe en  $\alpha = 3$ . La zone d'évolution continue des exposants  $0.5 - 1 < \alpha < 2$  est alors très différente de celle déterminée pour le cadre LR-CDP. Les interactions médiées ne se différencient donc pas du transport à longue portée uniquement dans la limite de portée infinie mais à toutes les portées. Cette distinction a donc de fortes implications dans l'étude des systèmes réels.

### Comportement exotique et point singulier

En plus de présenter une zone de variation des exposants inhabituelle, la spécificité de la limite de portée infinie rend cette variation physiquement significative. En effet, si la courbe décrivant l'évolution du paramètre d'ordre reste concave ( $\beta < 1$ ) pour  $\alpha \gtrsim 1.5$ , celle-ci change de convexité ( $\beta > 1$ ) pour  $\alpha \lesssim 1.5$ . C'est aussi autour de ce même point  $\alpha \approx 1.5$  que le comportement des fluctuations critiques s'inverse, passant de divergent à évanescence. Le comportement exotique du 0-ROM est donc retrouvé dans toute la gamme

d'évolution  $\alpha \lesssim 1.5$ . Dans le cadre du 0-ROM, nous avons montré que cette double spécificité  $\beta > 1$ ,  $\gamma' < 0$  peut être rationalisée dans le cadre de la relation d'hyperscaling [19] :

$$2\beta + \gamma' = \nu_{\perp} D \quad (3.14)$$

Celle-ci permet en effet d'expliquer qu'une transition avec une valeur de  $\beta$  anormalement grande donne lieu à une valeur de  $\gamma'$  anormalement petite. Étant donné que cette relation est aussi vérifiée dans la limite de courte portée CDP, nous pouvons supposer qu'elle l'est dans toute la zone d'évolution. Ainsi, l'annulation des fluctuations critiques s'expliquerait par la convexité de la transition à toute portée  $\alpha \lesssim 1.5$ .

Par ailleurs, si nous allons plus loin dans notre hypothèse, la relation d'hyperscaling permet de dériver pour chaque  $\alpha$  un exposant de corrélation spatiale  $\nu_{\perp}$ . Dans le tableau 3.1, nous répertorions le résultat de cette dérivation. Cette exposant hypothétique  $\nu_{\perp}^*$  semble alors suivre une évolution continue avec la portée  $\alpha$  qui lie les deux limites de CDP et du 0-ROM. Une différence alors marquante avec le cadre de référence LR-CDP et que cet exposant augmente avec la portée des interactions médiées alors que dans le cas canonique nous avons  $\nu_{\perp}^{CDP,2D} = 0.80$  et  $\nu_{\perp}^{CDP,CM} = 0.50$ , soit une tendance à diminuer lorsque le champ moyen est approché.

Le point  $\alpha \approx 1.50$  se positionne alors à un changement drastique des propriétés de la transition, sortant alors complètement du cadre d'interprétation LR-CDP. En ce point spécifique, les exposants critiques  $\beta$  et  $\gamma'$  prennent la valeur des exposants du champ moyen de CDP. Une différence majeure est alors que, dans le cas des interactions actives-passives, ce point n'est pas une limite asymptotique mais il est effectivement dépassé pour des portées plus grandes.

## Une limite non triviale

En général, les champs moyens des théories critiques amènent à des valeurs triviales des exposants critique ( $\beta_{CDP}^{MF} = 1$  par exemple). Or ici, la limite de portée infinie atteinte en  $\alpha = 0.5$ , tout comme le 0-ROM caractérisé par Mari et al. [14], est caractérisée par des exposants non-triviaux. Ces mesures peuvent alors suggérer que cette limite n'est pas un équivalent champ moyen du système.

Cette observation n'est en fait pas si surprenante car certains éléments de la dynamique restent non-triviaux à portée infinie. En effet, même lorsque les interactions actives-passives sont à longue portée, les particules actives effectuent des sauts de taille finie et dans un espace de dimension finie. De plus, les particules passives, elles aussi diffusent dans un espace de dimension finie. La dimension de l'espace étant inférieure à la dimension critique supérieure de CDP  $D_c = 4$ , il est probable que ces mécanismes éloignent le modèle du champ moyen, même si les interactions médiées sont sous leur forme extrémale. Nous pouvons cependant nous attendre à approcher ce champ moyen en augmentant la dimension du système.

Cette première analyse statique suggère donc que le modèle  $\alpha$ -ROM, modélisant les interactions médiées à longue portée, ne peut pas être compris dans le cadre de référence LR-CDP comme c'est le cas du transport à longue portée. Dans la suite de cette section, nous caractérisons la transition par d'autres aspects pour confirmer cette opposition.

### 3.3.2.2 Exposant dynamique

Une autre possibilité pour caractériser la criticalité et son évolution avec la portée est d'étudier la transition d'un point de vue dynamique. Comme dans le cas du transport à longue portée, proche du point critique, le système relaxe vers l'état stationnaire de manière algébrique :

$$\langle A \rangle(t) \sim t^{-\delta} \quad (3.15)$$

$\delta$  définissant alors un exposant critique universel. Il peut être alors intéressant de comprendre comment celui-ci varie avec  $\alpha$  dans le cas du  $\alpha$ -ROM, par opposition à son évolution observée dans le cadre LR-CDP (voir [sous-section 2.4.2](#)).

Pour aborder cette question, nous reprenons la méthode de redimensionnement utilisée à la [sous-section 2.4.2](#). Pour chaque  $\alpha$ , nous déterminons alors l'exposant  $\delta$  associé en se basant sur les mesures précédentes de  $\beta$  et  $\phi_c$ . Un exemple de redimensionnement obtenu dans le cas du  $\alpha$ -ROM est représenté à la [figure 3.7](#) pour  $\alpha = 1.5$ . Les valeurs mesurées pour chaque portée sont reportées dans le [tableau 3.1](#) et leur évolution est représentée sur la [figure 3.6-\(a\)](#).

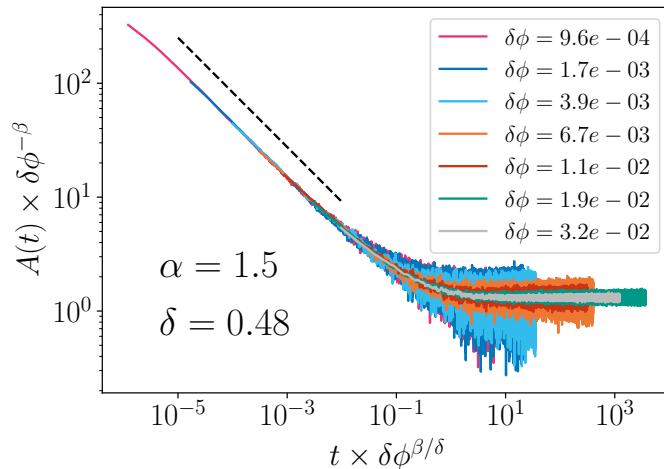


FIGURE 3.7 – Redimensionnement avec la distance au point critique  $\delta\phi$  des évolutions de l'activité moyenne  $\langle A \rangle$  avec le temps  $t$  dans le cadre du  $\alpha$ -ROM en 2D pour  $\alpha = 1.5$ .

Comme pour les exposants  $\beta$  et  $\gamma'$ , l'exposant dynamique  $\delta$  évolue de sa valeur CDP pour  $\alpha \gtrsim 2$  à une valeur de saturation pour  $\alpha \lesssim 1 - 0.5$ . Cela confirme la zone d'évolution continue précédemment déterminée.

Par ailleurs, dans la limite de longue portée  $\alpha = 0.5$ , nous mesurons  $\delta \approx 0.67$ . Cette valeur est alors très différente de celle attendue dans la limite champ moyen de CDP pour laquelle on a  $\delta_{\text{CDP}}^{\text{CM}} = 1$ . Par ailleurs, cette valeur non triviale conforte le fait que le système n'est pas dans sa limite champ moyen pour une portée infinie. Il est tout à fait envisageable que les sauts à courte portée des particules actives jouent un rôle dans la relaxation vers l'état stationnaire.

Enfin, si le point  $\alpha \approx 1.5$  correspondait aux propriétés critiques statiques du champ moyen de CDP avec  $\beta = 1$  et  $\gamma' = 0$ , ses propriétés dynamiques sembleront différer. En effet, pour  $\alpha = 1.5$  nous mesurons  $\delta \approx 0.49$ , qui est notablement inférieur à  $\delta_{\text{CDP}}^{\text{MF}} = 1$ . Malgré cette légère différence, l'évolution des propriétés de relaxation du système semblent donc souligner de la même façon un désaccord clair entre le comportement du  $\alpha$ -ROM et le cadre de référence LR-CDP.

### 3.3.2.3 Extension à trois dimensions

Afin de confirmer ces désaccords statiques et dynamiques, nous étendons notre analyse à des systèmes en trois dimensions. Nous rappelons que dans ce cas là, la théorie LR-CDP prédit une évolution continue des exposants dans la zone  $4.5 < \alpha < 5$ . Dans la limite de courte portée  $\alpha > 5$ , les exposants prennent les valeurs reportées dans le [tableau 3.1](#).

En appliquant la même méthode, nous étudions la criticalité des modèles pour  $\alpha \in \{3.5, 3, 2.5, 2, 1.75\}$ <sup>5</sup>. Les analyses étant coûteuses numériquement et pour des raisons de temps, nous n'étudions pas le cas des très longues portées. Ce faisant, nous obtenons les évolutions de  $\langle A \rangle$  et  $\langle \delta A^2 \rangle$  en fonction de  $\delta\phi$  tracées à la [figure 3.8](#). Les valeurs des exposants critiques sont alors reportées dans le [tableau 3.1](#) et leurs évolutions en fonction de la portée sont tracées sur la [figure 3.6-\(b\)](#). Nous retrouvons alors à très courte portée le comportement critique CDP en trois dimensions dès  $\alpha \gtrsim 3$  et non  $\alpha > 5$ . À moyennes portées  $\alpha \lesssim 3$ , l'évolution des exposants statiques  $\beta$  et  $\gamma'$  est similaire au cas 2D, avec une augmentation progressive de  $\beta$  conjointement à une diminution progressive de  $\gamma'$ .

Par ailleurs, nous retrouvons aussi dans ce cas un point autour duquel la transition change simultanément de convexité et de comportement fluctuant, seulement cette fois localisé en  $\alpha \approx 2.5$ . Dans cette dimension aussi, la criticalité des modèles  $\alpha$ -ROM est donc très différente de celle prévue par le cadre LR-CDP. Pour ce qui est du comportement dynamique, l'exposant  $\delta$  opère cette fois une évolution quelque peu surprenante. En effet, il reste constant autour de  $\delta \approx 0.74$ , valeur associée à la classe CDP à courte portée. Dans cette dimension, les interactions médiées ne semblent donc pas affecter la relaxation vers l'état stationnaire.

Finalement, l'étude des modèles  $\alpha$ -ROM révèle un comportement critique très différent du cadre de référence LR-CDP en deux ou trois dimensions. Si l'on retrouve une zone d'exposants  $\alpha$  pour lesquels la criticalité dépend continûment de la portée, celle-ci concerne des valeurs de  $\alpha$  bien plus grandes que dans le cadre canonique. De plus, cette zone d'évolution continue n'est pas bornée par le champ moyen associé à celui de CDP, mais par

5. Pourquoi il fait un truc bizarre comme ça ?

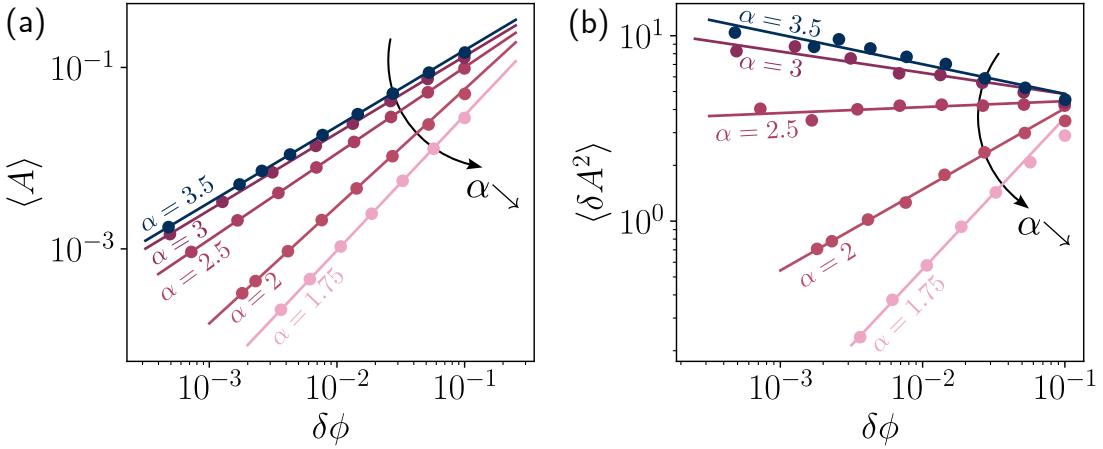


FIGURE 3.8 – (a) Évolution de la valeur moyenne de l’activité dans l’état stationnaire  $\langle A \rangle$  en fonction de la distance au point critique  $\delta\phi$  à différentes portées dans le  $\alpha$ -ROM en 3D. (b) Idem pour la variance  $\langle \delta A^2 \rangle$

une limite non-triviale en dimension finie, caractérisée par une convexité et des fluctuations évanescentes. Pourtant, l’évolution continue des exposants passe effectivement par un point caractérisé par les mêmes exposants statiques que le champ moyen canonique. Seulement, dans le cas des interactions médiées, celui-ci ne constitue pas un comportement limite. Les interactions médiées constituent donc un mécanisme permettant d’aller au-delà du champ moyen canonique, laissant place à un comportement exotique  $\beta > 1$ ,  $\gamma' < 0$  sur toute une gamme de portées physiquement envisageables.

### 3.3.3 Hyperuniformité

Une autre manière de comparer le modèle  $\alpha$ -ROM avec le cadre LR-CDP est de s’intéresser aux propriétés de structure de la transition. En effet, dans le chapitre 1, nous avons vu que proche du point critique, les modèles dans la classe CDP exhibent un phénomène d’hyperuniformité. Dans le ??, nous avons vu que dans le cadre LR-CDP, la propriété d’hyperuniformité est modifiée par la présence de transport à longue portée. Notamment, l’exposant  $\alpha_{HU}$  caractérisant l’évolution du facteur de structure selon  $S(\mathbf{q}) \sim q^{\alpha_{HU}}$  évolue continûment de  $\alpha_{HU}^{\text{CDP, 2D}} \approx 0.5$  à  $\alpha_{HU}^{\text{CDP, CM}} = 0$  dans la zone  $3 < \alpha < 4$  en 2D. L’hyperuniformité est donc perdue à longue portée dans ce cas. Les exposants critiques  $\beta$ ,  $\gamma'$  et  $\delta$  suivant une évolution différente du cadre LR-CDP dans le cas d’interactions médiées, il est naturel de se demander si l’en va de même pour l’exposant d’hyperuniformité. En d’autres termes, l’hyperuniformité est-elle aussi perdue dans le cas d’interactions médiées à longue portée ?

En réalité, cette question a déjà été abordée par Mari et al. [14] lors de l’étude du 0-ROM. Dans ce cas de portée infinie, les auteurs ont montré que l’hyperuniformité est effectivement perdue à grande échelle. La question restante est alors de savoir comment s’opère ce changement de propriété avec l’évolution de la portée des interactions. Dans cette sous-section, nous nous basons sur des observations qualitatives pour fournir un début de réponse à cette question.

### 3.3.3.1 Méthode

Pour ce faire, nous utilisons, en plus de la méthode de box-counting présentée à la section 2.5, une mesure du facteur de structure  $S(\mathbf{q})$ . Afin de rendre son calcul efficace, nous définissons un champ de densité  $\rho(\mathbf{r}_i)$  sur le réseau discret de pas  $D_p$ , utilisé pour calculer les interactions actives-passives. Dans chaque case située autour de  $\mathbf{r}_i$ ,  $\rho(\mathbf{r}_i)$  prend alors une valeur entière correspondant aux nombres de particules présentes dans cette case. Ce faisant, nous pouvons donc utiliser les algorithmes de FFT pour calculer  $\hat{\rho}(\mathbf{q}_i)$  dans l'espace réciproque discret et on a alors directement :

$$S(\mathbf{q}_i) = |\hat{\rho}(\mathbf{q}_i)|^2 \quad (3.16)$$

Pour évaluer l'évolution de  $S(\mathbf{q})$  avec la norme du vecteur d'onde  $q$  et donc sonder son évolution à petits  $q$ , nous réalisons une moyenne isotrope dans l'espace réciproque. En pratique, chaque point  $S(q)$  est calculé par une moyenne sur l'anneau d'épaisseur  $\frac{2\pi}{L}$  associé dans l'espace réciproque.

Afin de pouvoir comparer les répartitions de densité pour les différentes portées  $\alpha$ , nous nous plaçons à une distance fixée du point critique  $\delta\phi \approx 1 \times 10^{-2}$ . Ce critère est en effet essentiel pour la comparaison puisque, comme nous l'avons vu au ??, les propriétés d'hyperuniformité dépendent de la distance au point critique. Notamment, la propriété d'hyperuniformité est perdue à grande échelle pour des distances  $\delta\phi$  trop grandes. Cette distance fixée est alors choisie de telle façon que les simulations associées à chaque portée puissent se dérouler sur des temps raisonnables ( $< 24$  h). Afin d'obtenir une meilleure statistique, nous moyennons ces mesures sur quelques dizaines de configurations indépendantes dans l'état stationnaire. Les résultats obtenus sont alors représentés sur la figure 3.9-(a). En parallèle, les mesures de type box-counting sont effectuées et les résultats associés sont représentés sur la figure 3.9-(b).

### 3.3.3.2 Résultats

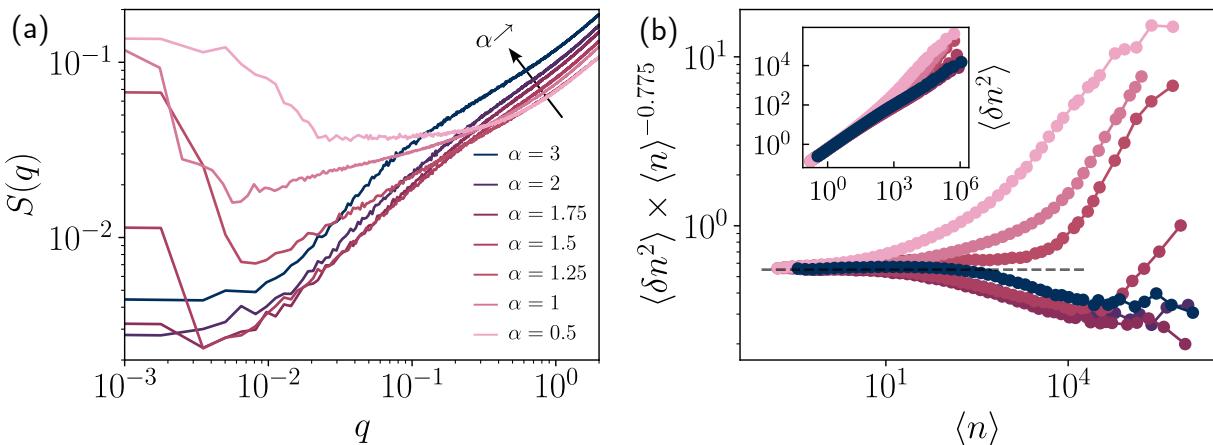


FIGURE 3.9 – Hyperuniformité dans le modèle  $\alpha$ -ROM en 2D à  $\delta\phi \approx 1 \times 10^{-2}$ . (a) Facteur de structure isotrope. (b) Méthode box-counting (voir section 2.5) compensée par le comportement mesuré à courte portée  $\alpha = 3$ . En encart, les données brutes.

Dans la limite de longue portée  $\alpha = 0.5$ , nous retrouvons les résultats de Mari et al. [14] avec une perte du caractère évanescence de  $S(\mathbf{q})$  à petits  $q$ . Dans la limite de courte portée  $\alpha = 3$ , l'allure globale de la courbe présente bien une diminution de  $S(\mathbf{q})$  à petits  $q$  bien que celle-ci ne semble pas suivre une loi de puissance évidente et sature à très petits  $q$ . Cette saturation peut notamment s'expliquer par la distance finie au point critique examinée. L'observation de cette évanescence marque alors une forte différence avec le cas LR-CDP. En effet, dans ce cas, l'hyperuniformité est déjà complètement perdue à cette portée. Entre ces deux extrémités, les portées intermédiaires montrent une évolution intéressante. Si pour  $\alpha > 1.5$  les facteurs de structure sont difficilement distinguables, pour  $\alpha \leq 1.5$  leur évolution montrent d'abord décroissance plus faible à des valeurs de  $q$  intermédiaires puis une augmentation à très petits  $q$ . Cette évolution suggère alors une perte de l'hyperuniformité à grande échelle dans le régime critique.

On pourrait objecter que la différence de comportement en fonction de  $\alpha$  est due à la distance finie du point critique choisi. En effet, à distance égale du point critique, les transitions de longue portée (petits  $\alpha$ ) correspondent à des activités bien plus faibles ( $\beta$  plus grands). Ainsi, cette analyse pourrait avoir tendance à sous-estimer, si présentes, les propriétés d'hyperuniformité des transitions à petit  $\alpha$ . Or ici, malgré ce choix, nous observons clairement une perte des propriétés hyperuniformes conjointement à l'augmentation de la portée. Cette observation à distance fixée du point critique semble donc pouvoir être conclusive sur le fait d'une dégradation de l'hyperuniformité pour  $\alpha < 1.5$ , puisque ce choix de méthode "joue contre" la zone complémentaire  $\alpha > 1.5$ . Néanmoins, une étude plus poussée serait nécessaire pour étudier ce changement plus quantitativement, notamment en s'approchant davantage du point critique.

Cette tendance est toutefois moins évidente dans le cas de la méthode de box-counting. Mais en compensant l'évolution de  $\langle \delta n^2 \rangle$  avec l'évolution mesurée à très courte portée  $\langle \delta n^2 \rangle \sim \langle n \rangle^{0.775}$  sur la figure 3.9-(b), les évolutions pour  $\alpha < 1.5$  semblent néanmoins aussi contraster avec celles de plus courtes portées  $\alpha > 1.5$ , révélant un comportement localement "moins hyperuniforme" (i.e. un exposant effectif local  $\alpha_{\text{HU}}^{\text{eff}}$  plus grand).

Finalement, cette analyse qualitative des propriétés d'hyperuniformité du  $\alpha$ -ROM semble montrer un changement autour de  $\alpha = 1.5$ . Pour  $\alpha < 1.5$ , les observations suggèrent une hyperuniformité perdue à grande échelle. De la même manière que le transport d'activité à longue portée, les interactions médiées effacent donc le caractère hyperuniforme de la transition. Toutefois, la zone d'effet  $\alpha < 1.5$  qualitativement identifiable ici est à nouveau très différente de celle prévue par le cadre de référence LR-CDP  $\alpha < 3$ . Un étude plus approfondie est cependant nécessaire pour confirmer ces premières observations.

### 3.3.4 Retour sur les cas physiques

Au début de ce chapitre, nous avions identifié deux cas de portée pertinents dans le cadre de la transition de réversibilité des suspensions cisailées cycliquement. Le premier, similaire au cas de l'expérience de Pine et al [5], a lieu dans un milieu 3D avec des conditions aux bords supposées négligeables. Dans notre modélisation stroboscopique cela revient à  $\alpha = 3$  dans le  $\alpha$ -ROM en 3D. Les résultats présentés au cours de cette section

placent ce cas au cœur de la zone d'évolution continue des exposants avec  $\beta > 1$  et  $\gamma' < 0$ . La transition attendue est donc convexe.

Le second cas pertinent est le cas d'un cisaillement confiné entre deux plaques rigides, pour lequel on a  $\alpha = 3$  dans un milieu quasi-2D. Notre étude du  $\alpha$ -ROM en 2D place alors cette situation dans la limite de courte portée, dans laquelle la transition adopte le comportement de la classe CDP, soit concave, avec des fluctuations qui divergent et des propriétés hyperuniformes. Ainsi, notre analyse indique que l'influence des interactions médiées à longue portée dépend fortement du système réel étudié, celles-ci n'ayant un impact sur le comportement critique que dans certains cas.

Finalement, l'analyse des propriétés statiques ([sous-sous-section 3.3.2.1](#)), dynamiques ([sous-sous-section 3.3.2.2](#)) et de structure ([sous-section 3.3.3](#)) des transitions du  $\alpha$ -ROM montre que les interactions médiées dans ce système ne peuvent pas être comprises dans le cadre de référence LR-CDP. Notamment, une large gamme de portées en 2D et en 3D montrent un comportement convexe de la transition et évanescents des fluctuations. Ces observations n'étant pas rationalisables dans le cas canonique, il semble que la diffusion des particules passives dans le modèle constitue un mécanisme dont l'appréhension nécessite un nouveau cadre théorique.

## 3.4 Interprétation

Dans le cadre de la transition du ROM appartenant à la classe CDP, la dynamique du système est contrôlée par les sauts à courte portée des particules actives. Dans la généralisation au transport à longue portée décrite par le cadre LR-CDP, la dynamique est similaire, déterminée par le déplacement fini des particules après leur activation. Visiblement ce mécanisme, ne permet pas de rendre compte de la criticalité du  $\alpha$ -ROM, laissant sa spécificité aux interactions médiées. Celles-ci introduisent en effet un tout nouveau mécanisme. Sous influence des particules actives, les particules passives opèrent de petits déplacements, diffusant alors vers le contact d'autres particules. Les particules passives représentent donc une nouvelle source de création d'activité, a priori très différente de celle représentée par les particules actives. Nous postulons que c'est ce mécanisme de diffusion vers le contact qui permet de rendre compte de la convexité de cette transition si spéciale.

Dans cette section, nous proposons un modèle champ moyen simple permettant de rendre compte de la convexité de la transition due à la diffusion des particules passives. Nous discuterons ensuite dans quelle mesure ce modèle peut nous aider à interpréter les résultats obtenus en dimensions finies.

### 3.4.1 Modèle de $\mu$ -Hébraud-Lequeux

#### 3.4.1.1 Approximation gaussienne

##### Présentation du modèle

L'idée de ce modèle est de se concentrer sur une approche statistique, en considérant la dynamique effective d'une particule unique, représentée à la figure 3.10. Dans cette optique de champ moyen, toutes les corrélations de position et d'activité dans le système sont négligées. L'impact de l'environnement est alors pris en compte en considérant qu'il forme, statistiquement, une cage effective de rayon  $R$  dans laquelle la particule initialement passive est piégée. En supposant une répartition uniforme des particules dans le système, on a alors  $R \sim \phi^{-1/D}$ . En centrant cette zone de piégeage sur l'origine du repère, la particule cible positionnée en  $\mathbf{r}$  peut alors prendre deux états : passive si elle n'entre pas en contact avec d'autres particules ( $|\mathbf{r}| < R$ ), et active si elle sort de la cage effective ( $|\mathbf{r}| > R$ ).

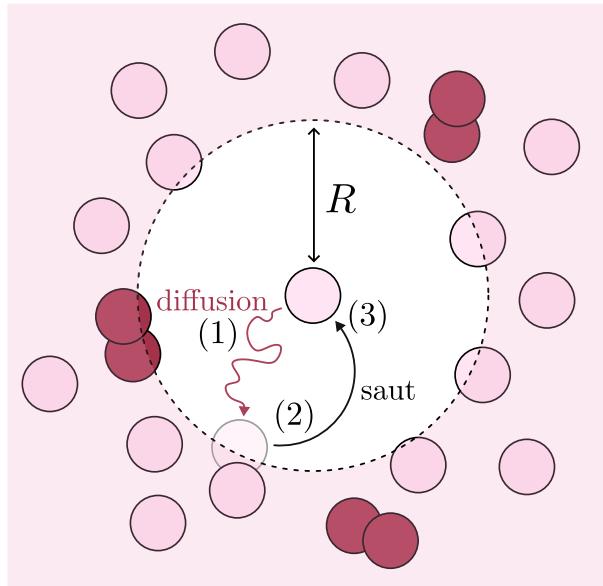


FIGURE 3.10 – Représentation champ moyen de la dynamique du  $\alpha$ -ROM.

Lorsque la particule est passive, celle-ci est soumise à un bruit interne dont l'intensité est proportionnelle au nombre de particules actives dans l'environnement (i.e. l'activité dans le système). Dans cette vision statistique du problème où toutes les particules ont une dynamique équivalente, cette intensité du bruit est donc proportionnelle à la probabilité (notée  $\Gamma\tau$  dans la suite) pour les particules d'être actives. De plus dans le cadre champ moyen, nous considérons ce bruit comme gaussien. D'autre part, lorsque la particule est active, elle effectue, sur un temps typique  $\tau$ , un saut suffisamment grand pour la replacer à l'origine d'une nouvelle cage effective. Nous retrouvons donc les mécanismes principaux présents dans le  $\alpha$ -ROM. Nous pouvons modéliser l'évolution de la distribution de probabilité  $P(\mathbf{r})$  de la position  $\mathbf{r}$  de la particule par les équations suivantes :

$$\partial_t P(\mathbf{r}, t) = \alpha \Gamma(t) \Delta P(\mathbf{r}, t) - \frac{1}{\tau} \Theta(|\mathbf{r}| > R) P(\mathbf{r}, t) + \delta(\mathbf{r}) \Gamma(t), \quad \Gamma(t) = \frac{1}{\tau} \int_{|\mathbf{r}| > R} d\mathbf{r} P(\mathbf{r}, t) \quad (3.17)$$

avec  $\alpha$  un paramètre réel. Le premier terme du membre de droite représente la diffusion de la particule ((1) sur la [figure 3.10](#)), le second le processus de saut actif ((2) sur la [figure 3.10](#)) et le troisième l'apparition dans une nouvelle cage ((3) sur la [figure 3.10](#)). Ce modèle a alors pour paramètre d'ordre  $\Gamma(t)$ , directement associé à l'activité dans le système  $A(t)$  et comme paramètre de contrôle  $R$ , directement associé à la densité de particules  $\phi$ . Cette forme ressemble alors fortement au modèle de Hébraud-Lequeux [112], dont on discutera au chapitre suivant.

## Résolution en 2D

Afin de montrer que ce modèle champ moyen permet effectivement de retrouver une transition convexe par ce mécanisme de diffusion, nous le résolvons en deux dimensions pour déterminer la relation  $\Gamma \sim (R - R_c)^\beta$  à petits  $\Gamma$ . Pour ce faire, nous commençons par adimensionner ces équations par les transformations :

$$\tilde{t} = \frac{t}{\tau}, \quad \tilde{\mathbf{r}} = \frac{\mathbf{r}}{R} \quad (3.18)$$

En nous plaçant de plus dans l'état stationnaire, nous obtenons alors :

$$0 = \tilde{\alpha} \tilde{\Gamma} \Delta P(\tilde{\mathbf{r}}) - \Theta(|\tilde{\mathbf{r}}| > 1) P(\tilde{\mathbf{r}}) + \delta(\tilde{\mathbf{r}}) \tilde{\Gamma}, \quad \tilde{\Gamma} = \int_{|\tilde{\mathbf{r}}| > 1} d\tilde{\mathbf{r}} P(\tilde{\mathbf{r}}), \quad \tilde{\alpha} = \frac{\alpha}{R^2} \quad (3.19)$$

Dans la suite de la résolution, nous omettrons les  $\tilde{\cdot}$  pour alléger les notations. Le paramètre de contrôle adimensionnel est alors  $\alpha$ .

Nous résolvons ensuite cette équation par morceaux dans les domaines disjoints  $r < 1$  (zone I) et  $r > 1$  (zone II). Dans la zone I, la résolution donne :

$$P_I(\mathbf{r}) = c_1 \ln(r) + c_2, \quad (c_1, c_2) \in \mathbb{R}^2 \quad (3.20)$$

et dans la zone II :

$$P_{II}(\mathbf{r}) = c_3 K_0 \left( \frac{r}{\sqrt{\alpha \Gamma}} \right), \quad c_3 \in \mathbb{R} \quad (3.21)$$

avec  $K_0$  la fonction de Bessel modifiée de seconde espèce d'ordre 0 [109]. La distribution  $P(\mathbf{r})$  étant continue et de dérivée continue en  $r = 1$ , on obtient finalement :

$$P(\mathbf{r}) = \begin{cases} c_3 \left( K_0 \left( \frac{1}{\sqrt{\alpha \Gamma}} \right) - K_1 \left( \frac{1}{\sqrt{\alpha \Gamma}} \right) \frac{\ln(r)}{\sqrt{\alpha \Gamma}} \right), & r < 1 \\ c_3 K_0 \left( \frac{r}{\sqrt{\alpha \Gamma}} \right), & r > 1 \end{cases} \quad (3.22)$$

La condition de normalisation de la distribution permet alors de déterminer la constante  $c_3$ . En effet on a :

$$I_{\text{I}} = \int_0^1 dr \ 2\pi r P(\mathbf{r}) = \pi c_3 K_0\left(\frac{1}{\sqrt{\alpha\Gamma}}\right) + \frac{\pi c_3}{2\sqrt{\alpha\Gamma}} K_1\left(\frac{1}{\sqrt{\alpha\Gamma}}\right) \quad (3.23)$$

$$I_{\text{II}} = \int_0^\infty dr \ 2\pi r P(\mathbf{r}) = 2\pi c_3 \sqrt{\alpha\Gamma} K_1\left(\frac{1}{\sqrt{\alpha\Gamma}}\right) \quad (3.24)$$

en utilisant la propriété  $(z^\nu K_\nu(z))' = -z^\nu K_{\nu-1}(z)$ . Nous obtenons alors :

$$\frac{1}{c_3} = \pi K_0\left(\frac{1}{\sqrt{\alpha\Gamma}}\right) + \frac{\pi}{2\sqrt{\alpha\Gamma}} K_1\left(\frac{1}{\sqrt{\alpha\Gamma}}\right) + 2\pi\sqrt{\alpha\Gamma} K_1\left(\frac{1}{\sqrt{\alpha\Gamma}}\right) \quad (3.25)$$

La valeur de  $\Gamma$  dans l'état stationnaire est alors donnée par la relation d'auto-cohérence :

$$\Gamma = \frac{2\pi\sqrt{\alpha\Gamma} K_1\left(\frac{1}{\sqrt{\alpha\Gamma}}\right)}{\pi K_0\left(\frac{1}{\sqrt{\alpha\Gamma}}\right) + \frac{\pi}{2\sqrt{\alpha\Gamma}} K_1\left(\frac{1}{\sqrt{\alpha\Gamma}}\right) + 2\pi\sqrt{\alpha\Gamma} K_1\left(\frac{1}{\sqrt{\alpha\Gamma}}\right)} \quad (3.26)$$

Étant intéressés par le comportement asymptotique à petits  $\Gamma$ , nous développons les fonctions de Bessel asymptotiquement selon :

$$K_\nu(x) \sim \sqrt{\frac{\pi}{2x}} e^{-x} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k(\nu)}{x^k}, \quad a_k(\nu) = \frac{(4\nu^2 - 1^2)(4\nu^2 - 3^2)\dots(4\nu^2 - (2k-1)^2)}{k!8^k} \quad (3.27)$$

et on a donc au premier ordre non-trivial<sup>6</sup> :

$$\begin{cases} \sqrt{\Gamma} \sim \frac{8}{\sqrt{\alpha}} \frac{4\alpha - 1}{19 - 12\alpha}, & \alpha > \frac{1}{4} \\ \sqrt{\Gamma} = 0, & \text{sinon} \end{cases} \quad (3.28)$$

Ainsi, ce modèle rend bien compte d'une transition de phase absorbante avec une phase absorbée  $\Gamma = 0$  lorsque la cage effective est suffisamment grande  $R > R_c \Rightarrow \alpha < \alpha_c = \frac{1}{4}$ , et une phase active  $\Gamma > 0$  lorsque celle-ci est suffisamment petite  $R < R_c \Rightarrow \alpha > \alpha_c$ . Étant donné que  $R$  se comporte comme l'inverse de la densité de particules, le comportement qualitatif de transition du  $\alpha$ -ROM est bien retrouvé. De plus, dans la limite de faible activité on a :

$$\Gamma \sim (\alpha - \alpha_c)^2 \quad (3.29)$$

soit un exposant critique  $\beta = 2$ . Ainsi, ce modèle simple permet effectivement de retrouver la convexité de la transition. Cela conforte alors notre hypothèse selon laquelle le mécanisme de diffusion des particules passives vers le contact est le responsable de cette convexité.

---

6. à vérifier

Ce cadre de modélisation semble donc être plus adéquat qu'une approche de type champ moyen à la CDP pour comprendre notre système d'étude. Toutefois, cette approche reste du côté champ moyen, négligeant tout type de corrélation. Or, comme nous l'avons vu à la section précédente, même dans la limite de portée infinie notre système n'est pas vraiment dans un cadre purement champ moyen. Il est alors intéressant de voir si ces écarts peuvent être compris, au moins partiellement, dans une généralisation de ce modèle afin de dresser un cadre théorique plus large dans lequel intégrer les modèles  $\alpha$ -ROM (et donc le 0-ROM).

### 3.4.1.2 Extension non-gaussienne

#### Interactions à longue portée et distributions de bruit interne

Le modèle  $\alpha$ -ROM peut s'écartier du cadre champ moyen par plusieurs aspects. L'un deux vient du bruit interne généré par les interactions actives-passives. En effet, il n'est pas évident que ces interactions à longue portée puissent être modélisées par un bruit gaussien dans la dynamique effective. Considérons le cas d'un système infini de  $D$  dimensions dans lequel une unique particule est active. Si les interactions médiées décroissent comme  $1/r^\alpha$  alors d'un point de vue probabiliste, une particule passive prise au hasard se déplacera, à cause de cette particule active, d'un saut de taille typique  $\Delta_1$  distribué selon :

$$P_1(\Delta_1) \sim \int d\mathbf{r} \delta(\mathcal{G}(\mathbf{r}) - \Delta_1) \sim \frac{1}{\Delta_1^{1+\mu}}, \quad \mu = \frac{D}{\alpha} \quad (3.30)$$

La fonction caractéristique associée à cette distribution de bruit sera donc :

$$\hat{P}_1(k) \sim \exp(-|k|^\mu) \quad (3.31)$$

Ainsi, pour  $\mu = 2$ , nous retrouvons la fonction caractéristique d'une gaussienne. Pour considérer le cas réel de plusieurs particules actives dans le système, nous nous intéressons à la somme des sauts induits par chacune de ces  $n$  particules actives :  $\Delta = \sum_i^n \Delta_i$ . Si l'on fait l'hypothèse forte que l'activité est totalement décorrélée dans le système alors dans la limite de faible activité on a :

$$P\left(\Delta = \sum_i^n \Delta_i\right) = P_1(\Delta_1) * P_2(\Delta_2) * \dots * P_n(\Delta_n) \quad (3.32)$$

Dans la limite de taille infinie, pour une activité finie, on a  $n \rightarrow \infty$ . La distribution de probabilité adéquate pour décrire le saut des particules passives devient alors la limite du produit de convolution infini. Pour  $\mu \geq 2$ , les distributions individuelles sont de moyenne et de variance finies. D'après le théorème central limite, cette limite est donc une gaussienne (citer un livre de proba). Le bruit interne est donc bien modélisé par le terme en  $\Delta P(\mathbf{r}, t)$  dans l'équation 3.17. Pour  $\mu < 2$  cependant, les distributions individuelles  $P_i(\Delta_i)$  ne sont plus de variance finie et donc le théorème central limite ne s'applique plus. Une modélisation de cette limite de convolution correspond alors plutôt à une loi stable  $S_\mu$ , définie par la fonction caractéristique (citer un livre de proba) :

$$\hat{P}(k) \sim \exp(-|k|^\mu) \quad (3.33)$$

Cela correspond à une distribution de saut décroissant comme  $1/\Delta^{(1+\mu)}$ .

L'approximation gaussienne n'est donc adéquate que pour  $\mu \geq 2$  soit  $\alpha \leq D/2$ . Afin de prendre en compte cette forme différente du bruit interne pour des portées d'interaction  $\alpha > D/2$ , nous généralisons le modèle précédent en remplaçant le Laplacien  $\Delta$  par son équivalent fractionnaire  $\Delta^{\mu/2}$  (citer un livre de fractional calculus) :

$$\partial_t P(\mathbf{r}, t) = \alpha \Gamma(t) \Delta^{\mu/2} P(\mathbf{r}, t) - \frac{1}{\tau} \Theta(|\mathbf{r}| > R) P(\mathbf{r}, t) + \delta(\mathbf{r}) \Gamma(t), \quad \Gamma(t) = \frac{1}{\tau} \int_{|\mathbf{r}| > R} d\mathbf{r} P(\mathbf{r}, t) \quad (3.34)$$

L'opérateur laplacien fractionnaire étant défini dans l'espace de Fourier selon :

$$\mathcal{F}[(-\Delta)^{\mu/2} f] = |q|^\mu \mathcal{F}[f] \quad (3.35)$$

par analogie avec l'opérateur Laplacien.

Nous nommons ce modèle généralisé, le modèle  $\mu$ -Hébraud-Lequeux. Il est alors intéressant de voir comment cette généralisation permet de modifier l'exposant  $\beta$  associé en fonction du paramètre  $\mu$ , afin d'interpréter la dépendance en  $\alpha$  observée dans les simulations numériques.

### Un modèle pas si nouveau

Remarque : Mettre un schéma de  $P(r)$  pour montrer ce que représente  $\Gamma$  graphiquement et pourquoi pas illustrer  $\theta$  aussi. Sinon c'est peut-être un peu rapide.

Ce modèle que nous proposons ressemble en réalité fortement à un modèle déjà étudié dans la littérature. En effet, motivé dans le cadre de la transition vers l'écoulement, Lin. et al. [83, 113] ont étudié une forme très similaire de ce modèle en 1D et avec un paramètre supplémentaire de forçage  $\dot{\gamma}$ . En l'adaptant à notre formalisme, ce modèle prend la forme suivante :

$$\begin{aligned} \partial_t P(\mathbf{r}, t) &= -\dot{\gamma} \partial_r P(r, t) + \alpha \Gamma(t) \partial^\mu P(r, t) - \frac{1}{\tau} \Theta(|r| > R) P(r, t) + \delta(r) \Gamma(t) \\ \Gamma(t) &= \frac{1}{\tau} \int_{|r| > R} dr P(\mathbf{r}, t), \quad r \in [-\infty, +\infty] \end{aligned} \quad (3.36)$$

avec  $\partial^\mu$  l'opérateur de dérivée fractionnaire d'ordre  $\mu$ , défini de la même façon que le laplacien fractionnaire en une dimension. Dans notre cas, ce terme de forçage supplémentaire correspondrait à un mécanisme poussant la particule hors de la cage effective. En ce sens, le modèle  $\mu$ -Hébraud-Lequeux représente une version simplifiée du modèle étudié par Lin et al.. Le paramètre de contrôle associé à cette transition n'est alors plus  $\tilde{\alpha} = \alpha/R^D$  mais la position moyenne  $\langle r \rangle$  de la particule. En effet, le forçage brisant la symétrie du problème, celle-ci n'est plus nulle pour  $\dot{\gamma} > 0$ . Toutefois, on retrouve une phénoménologie équivalente :

$$\Gamma \sim (\langle r \rangle - \langle r \rangle_c)^\beta \quad (3.37)$$

Nous exposons alors deux résultats principaux issus de ces travaux afin de nous appuyer dessus par la suite.

Dans la limite stationnaire et quasistatique, i.e. d'activité nulle ( $P(r > R) = 0$ ), les auteurs ont montré que la distribution  $P(r)$  régie par l'équation 3.36 montrait un comportement sans échelle proche du bord  $r = R$  [83] :

$$P(R - r) \sim (R - r)^\theta \quad (3.38)$$

avec  $\theta$  l'exposant de pseudo-gap. Dans le cas où le système n'est pas forcée, il a été montré que cet exposant dépend de l'exposant de bruit  $\mu$  selon :

$$\theta = \begin{cases} \frac{\mu}{2}, & \mu \leq 2 \\ 1, & \mu \geq 2 \end{cases} \quad (3.39)$$

L'exposant  $\mu$  a donc dans ce cas une influence sur le comportement d'échelle de  $P(r)$  dans la limite non-gaussienne  $\mu \leq 2$ . De plus, dans le cas du système forcée, dans la limite de faible activité, il a été montré que [113] :

$$\beta = \begin{cases} 2, & \mu > 2 \\ \mu, & 1 < \mu < 2 \\ 1, & \mu < 1 \end{cases} \quad (3.40)$$

et donc que le comportement critique du système dépend aussi de l'exposant de bruit dans la limite non-gaussienne. Pour  $\mu > 1$ , la dynamique du système est entièrement dominé par le bruit interne et non le forçage [113]. Ce modèle permet donc de qualifier la convexité de la transition en fonction du bruit interne associé. Il diffère du modèle  $\mu$ -Hébraud-Lequeux par deux aspects principaux : il est monodimensionnel et il incorpore un terme de forçage qui modifie le paramètre de contrôle de la transition. Toutefois les mécanismes à l'œuvre sont sensiblement les mêmes, surtout pour  $\mu > 1$  où le forçage est dominé par le bruit interne. On peut donc supposer que les deux modèles partagent la même criticalité. Ainsi, une hypothèse naturelle est que les résultats de l'équation 3.39 et de l'équation 3.40 sont conservés dans le cadre du modèle  $\mu$ -Hébraud-Lequeux.

## Résolution numérique

**TODO :** Nuancer un peu pour montrer que les résultats sont pas transcendants mais qu'ils nous guident vers ça quand même (on va pas très proche du PC donc c'est une première estimation)

Afin de confirmer que le modèle  $\mu$ -Hébraud-Lequeux suit bien ce même comportement critique, nous résolvons l'équation 3.34 par une méthode numérique. Celle-ci, détaillée dans la sous-section 6.2.3, consiste à interpréter cette équation comme une équation de Fokker-Planck et de la résoudre statistiquement par son équivalent en équation de Langevin. Il est alors possible de déterminer l'évolution de  $\Gamma$  avec  $R$  et d'en déduire l'exposant critique  $\beta$  associé. La méthode de détermination suit alors le même principe que celle dans le cas du  $\alpha$ -ROM. Les résultats obtenus en 1D et en 2D sont reportés sur la figure 3.11 où nous avons aussi représenté le comportement du modèle de Lin. et al [113].

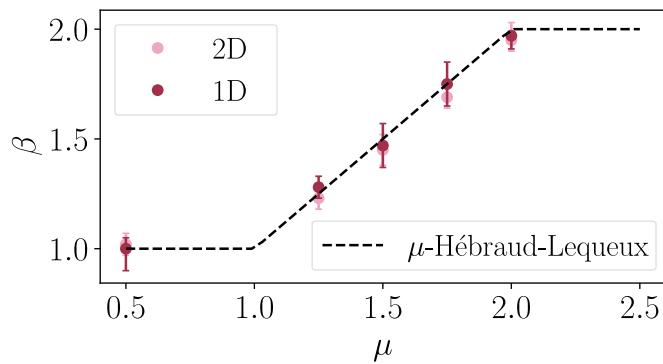


FIGURE 3.11 – Évolution de l'exposant  $\beta$  mesuré par la résolution numérique de l'équation 3.34 en 1D et en 2D (voir sous-section 6.2.3). En pointillés noirs, le comportement du modèle de Lin et al. [113]

La détermination des exposants n'est pas aisée car elle est coûteuse numériquement, laissant ainsi place à de larges incertitudes de mesure. Toutefois, que ce soit en une ou deux dimensions, les points mesurés montrent un plutôt bon accord avec l'attendu théorique. Les points en 1D semblent ainsi montrer que l'ajout du terme de forçage ne modifie pas la criticalité de la transition, tandis que les points en 2D suggèrent que cette théorie s'étend trivialement aux dimensions supérieures.

Pour la suite de notre analyse nous considérerons donc que le modèle  $\mu$ -Hébraud-Lequeux suit effectivement une criticalité dictée par l'équation 3.39 et l'équation 3.40. En d'autres termes, dans une gamme d'exposants  $1 < \mu < 2$ , la criticalité du modèle dépend continûment de  $\mu$ . Pour  $\mu < 1$ , le modèle atteint une limite de grands sauts pour laquelle on a trivialement  $\beta = 1$ . Pour  $\mu > 2$ , le modèle atteint une limite diffusive dans laquelle nous avons montré que  $\beta = 2$ . La forme propre du bruit permet donc d'induire des transitions de convexité différentes. Si ce résultat est en accord qualitatif avec le comportement du  $\alpha$ -ROM, qu'en est-il quantitativement ?

### 3.4.2 Interprétation mean-field de la transition

#### 3.4.2.1 Comparaison avec les simulations

Dans l'hypothèse que le bruit interne total est assimilable au bruit interne généré par une unique particule, l'exposant de bruit  $\mu$ , que nous notons alors  $\mu_1$ , est relié à l'exposant de portée de l'interaction  $\alpha$  selon :

$$\mu_1 = \frac{D}{\alpha} \quad (3.41)$$

Dans ce cas là, il est possible de comparer directement les prédictions du modèle  $\mu$ -Hébraud-Lequeux avec l'évolution de la criticalité du  $\alpha$ -ROM en fonction de l'exposant de portée  $\alpha$ . Sur la figure 3.12-(a), nous représentons les évolutions de l'exposant  $\beta$  en 2D et 3D pour le  $\alpha$ -ROM et les comparons avec l'attendu théorique de champ moyen du modèle  $\mu$ -Hébraud-Lequeux.

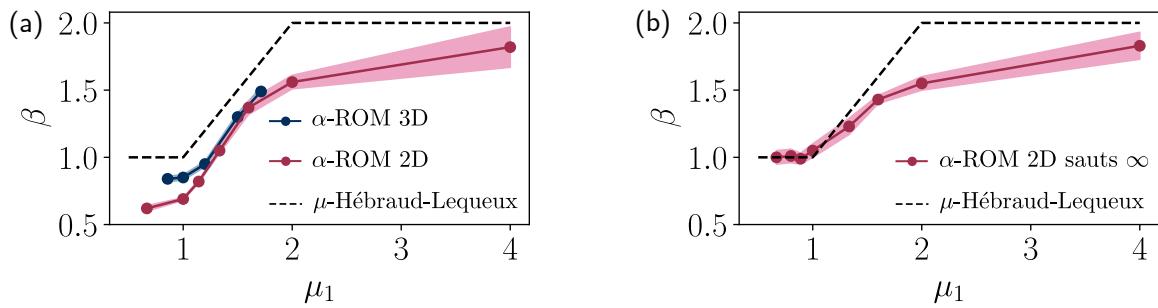


FIGURE 3.12 – Évolution de l'exposant  $\beta$  dans le  $\alpha$ -ROM en 2D et 3D (a) et avec sauts infinis en 2D (b) avec l'approximation naïve du bruit  $\mu_1 = D/\alpha$ .

Pour le cas 2D, l'accord quantitatif est très limité. Nous retrouvons un fort désaccord à courte portée (et donc petits  $\mu_1$ ). Ce n'est toutefois pas surprenant car dans ce cas le  $\alpha$ -ROM présente le comportement critique non trivial de CDP dû à la dynamique de saut des particules actives. Or dans le modèle  $\mu$ -Hébraud-Lequeux, l'optique champ moyen gomme totalement cet aspect. Le désaccord se réduit alors à mesure que la portée et  $\mu_1$  augmentent bien que la convexité du  $\alpha$ -ROM reste toujours plus faible que celle prédicta par la théorie champ moyen. Cette observation est en accord avec le fait, mentionné précédemment, que le  $\alpha$ -ROM n'est en fait pas champ moyen dans sa limite de portée infinie et que donc  $\beta < 2$  pour  $\alpha \rightarrow 0$ .

Toutefois, si l'accord à  $\mu_1$  donné est peu satisfaisant, l'évolution globale de la courbe l'est beaucoup plus. En effet, le bruit interne lié aux interactions médiées démarre effectivement son impact sur la criticalité à  $\mu_1 = 1$ , valeur à partir de laquelle  $\beta$  commence à dépendre de  $\mu$ . En  $D = 2$ , cela correspond à  $\alpha = 2$ , comme nous l'avions remarqué à la [sous-sous-section 3.3.2.1](#). Pour la saturation à très longue portée, celle-ci semble intervenir à des plus grandes portées que  $\mu_1 = 2$ , correspondant à  $\alpha = 1$  en 2D. L'accord de cette borne est donc un peu moins satisfaisant. Finalement, ce modèle champ moyen semble donc être capable d'effectuer une prédiction raisonnable sur la dynamique en dimension finie quant à la zone d'évolution des exposants critiques.

La comparaison avec les simulations 3D est alors similaire quoique marquant un accord quantitatif plus fort. Bien que surestimées par la théorie, les valeurs de  $\beta$  à  $\mu_1$  donné sont en meilleur accord. À petits  $\mu_1$ , cela vient en partie du fait que la dynamique de sauts des particules actives en 3D est elle-même plus proche de celle du champ moyen. Toutefois, le légèrement meilleur accord à des portées intermédiaires montre que la dimension permet aussi de rapprocher la dynamique des particules passives de leur dynamique champ moyen. Enfin, nous retrouvons dans ce cas la borne  $\mu_1 = 1$  à laquelle les interactions médiées démarrent leur influence sur le comportement critique. En 3D, cette borne correspond à  $\alpha = 3$ .

Le modèle  $\mu$ -Hébraud-Lequeux développé précédemment permet donc de rationaliser la zone d'exposants  $\alpha$  dans laquelle les exposants critiques évoluent continûment, et ce

en dimension arbitraire. Toutefois, l'accord quantitatif à une portée donnée reste assez limité. Ceci n'est cependant pas surprenant, puisque nous essayons ici de modéliser une dynamique complexe en dimension finie par une dynamique triviale de champ moyen. Notamment, les corrélations induites par le déplacement des particules actives jouent probablement un rôle prépondérant dans ce désaccord.

### 3.4.2.2 Destruction des corrélations

#### Modèle à sauts infinis

Afin de comprendre si les corrélations d'activité sont effectivement la source du désaccord entre le modèle théorique et les simulations, nous proposons d'étudier un modèle numérique analogue au  $\alpha$ -ROM qui les ferait disparaître. Pour ce faire, nous considérons exactement la même dynamique à l'exception des particules actives qui ne font plus des sauts finis mais sont redistribuées aléatoirement dans l'espace. Cela équivaut à faire des sauts de taille infinie. De ce fait, les corrélations spatiales d'activité sont totalement détruites.

Nous menons alors la même analyse que dans le cas du  $\alpha$ -ROM pour déterminer l'exposant  $\beta$  pour différentes portées d'interaction  $\alpha$ . Nous nous concentrons sur les portées  $\alpha \in \{0.5, 1, 1.25, 1.5, 2, 2.5, 3\}$ . Nous représentons alors de la même manière l'évolution de  $\beta$  avec  $\mu_1$  sur la figure 3.12-(b). Comme on peut le remarquer, l'accord est bien meilleur à courtes portées. Ceci n'est pas surprenant puisque dans le cas de sauts infinis nous avons bien le cas trivial  $\beta = 1$  sans interactions médiées. La zone d'évolution continue des exposants reste alors inchangée et relativement compatible avec la théorie. Cependant, à mesure que la portée augmente, un écart se creuse entre la théorie et les simulations. Notamment, dans la limite de portée infinie, l'exposant  $\beta$  mesuré est toujours sensiblement inférieur à 2. Pour les portées intermédiaires, la théorie surestime encore une fois l'exposant  $\beta$  à chaque portée  $\mu_1$ .

Si les corrélations spatiales d'activité permettent effectivement d'expliquer une partie du désaccord, celles-ci ne suffisent donc pas à rendre compte de l'écart en théorie et simulations numériques. C'est donc la dynamique des particules passives qui semble faire défaut au modèle champ moyen. En effet, dans ce modèle à sauts infinis, les particules passives diffusent toujours dans un espace de dimension finie.

#### Approche du champ moyen par les grandes dimensions

Si le modèle  $\mu$ -Hébraud-Lequeux est le bon champ moyen associé à la transition, alors ces désaccords devraient s'estomper en augmentant la dimension du système. Afin de le confirmer, nous nous intéressons à la limite de portée infinie du modèle à sauts infinis. Pour les dimensions  $D \in \{2, 3, 4, 6\}$ , nous déterminons alors l'exposant  $\beta$  associé à ce point. Il est à noter que plus la dimension du système est grande, plus les coûts numériques des simulations l'est aussi. L'évolution de cet exposant en portée infinie est alors reporté sur la figure 3.13.

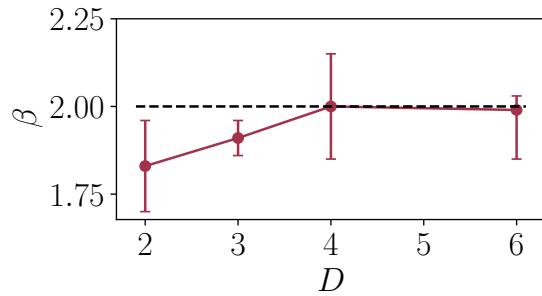


FIGURE 3.13 – Evolution de l’exposant critique  $\beta$  en fonction de la dimension de l’espace  $D$  dans le modèle  $\alpha$ -ROM avec sauts infinis des particules actives.

Malgré les larges incertitudes de mesure, il semble y avoir une tendance générale d’augmentation de  $\beta$  avec  $D$  qui passe de  $\beta \approx 1.8$  pour  $D = 2$  à  $\beta \approx 1.96$  pour  $D = 4$  et  $D = 6$ . Par analogie avec les phénomènes critiques plus classiques, la saturation à  $D = 4$  suggère que la dimension critique supérieure associée à la transition est  $D_c = 4$ . Il semble donc raisonnable de considérer le modèle  $\mu$ -Hébraud-Lequeux comme le champ moyen associé à cette transition. Par ailleurs, ces résultats suggèrent donc effectivement que la dynamique n’est pas triviale en 2D, même avec des sauts infinis des particules actives. Cela montre alors que le bruit interne ne peut pas être modélisé aussi simplement dans un système réel de dimension finie. Ces conjectures sont cependant à nuancer et nécessiteraient un travail plus abouti pour arriver à des conclusions définitives.

### 3.4.2.3 Relaxation des hypothèses du modèle

La dynamique en dimension finie du  $\alpha$ -ROM est donc difficilement capturable dans la version naïve du modèle champ moyen. Dans cette sous-sous-section, nous montrons qu’il est en fait possible de rendre compte de la non-trivialité de la transition en dimension finie avec le modèle  $\mu$ -Hébraud-Lequeux, à condition que nous relaxions certaines hypothèses.

#### Un bruit interne plus complexe

L’hypothèse principale du modèle repose sur l’assimilation du bruit interne à celui produit par une unique particule. Celle-ci nous a alors amené à  $\mu = D/\alpha$ . De plus, la modélisation décrite par l’équation 3.34 suppose le bruit décorrélé temporellement et donc des corrélations temporelles d’activité dans le système négligeables. Or nous savons que ces corrélations spatio-temporelles d’activité sont essentielles dans le comportement du système, au moins à courte portée, puisqu’il rejoint dans ce cas là celui de CDP. Par ailleurs, comme les éléments précédents le suggèrent, la dynamique des particules passives est aussi complexe. Ainsi, de la même façon, il doit exister des corrélations non négligeables entre les particules passives. Ces deux sources de complexité ne devraient pas jouer exactement sur les mêmes mécanismes du modèle : les corrélations d’activité devraient influer sur le bruit tandis que les corrélations des particules passives devraient plutôt jouer sur la forme de la cage effective. Toutefois, nous postulons que ces deux aspects peuvent être inclus dans le formalisme  $\mu$ -Hébraud-Lequeux via une redéfinition

du bruit par un exposant  $\mu$  non trivial. Ceci constitue alors notre hypothèse initiale que nous confrontons dans la suite de cette sous-sous-section.

Nous ne disposons pas de théorie pour prédire la valeur effective  $\mu_{\text{eff}}$  de cet exposant de bruit en dimension finie. Une possibilité est alors de le mesurer lors de la dynamique. Il n'y a cependant pas de manière évidente de procéder. Une approche naturelle serait de mesurer la distribution du bruit sur les particules passives dans l'état stationnaire sur un pas de temps. Mais cette méthode ne serait pertinente que si chaque pas de temps était totalement décorrélé du précédent, ce qui n'est évidemment pas le cas ici.

Une autre possibilité est alors d'analyser les trajectoires complètes de diffusion des particules passives pour inférer la distribution de bruit à laquelle elles sont soumises. Cette approche a l'avantage de pouvoir étudier le système au-delà de son temps de corrélation en se concentrant sur des trajectoires suffisamment longues. Nous testons alors cette méthode dans le modèle  $\alpha$ -ROM en 2D. Pour ce faire, nous enregistrons les trajectoires d'un millier de particules passives dans un état stationnaire proche du point critique. Afin d'en inférer les propriétés statistiques du bruit, nous mesurons pour chacune de ces trajectoires  $r_i(t)$  la quantité :

$$\delta(\epsilon) = \langle |r_i(t) - r_i(t + \epsilon)| \rangle \quad (3.42)$$

qui est un équivalent du déplacement quadratique moyen, ou plutôt sa racine carrée. Pour un bruit distribué selon l'équation 3.31, nous attendons alors :

$$\delta(\epsilon) \sim \epsilon^H, \quad H = \frac{1}{\mu} \quad (3.43)$$

avec  $H$  l'exposant de Hurst (citer livre de probas). Pour  $H = 1/2$ , l'évolution caractérise un bruit gaussien. En mesurant cette quantité au-delà du temps de corrélation de l'activité, il est donc théoriquement possible de remonter à l'exposant effectif  $\mu_{\text{eff}}$  caractérisant le bruit interne de la transition de manière adéquate.

Nous calculons alors  $\delta(\epsilon)$  pour  $\epsilon$  allant de  $10$  à  $10^6$  pas de temps et le moyennons sur les 1000 trajectoires. Sur la figure 3.14, nous représentons les évolutions  $\delta(\epsilon) = f(\epsilon)$  obtenues en échelle logarithmique pour différents  $\alpha$ . Comme on peut le remarquer, les évolutions dépendent bien de  $\alpha$  avec une pente logarithmique moyenne qui semble diminuer avec la portée. Cela correspond alors, comme attendu en première approximation, à une augmentation de  $\mu$  avec la portée. Toutefois, nous remarquons qu'à temps long, l'évolution de  $\delta(\epsilon)$  se comporte comme  $\sqrt{\epsilon}$  pour tout  $\alpha$ . Ainsi, à temps longs les particules passives semblent suivre des trajectoires gaussiennes, peu importe la portée de l'interaction.

Ceci peut en fait s'expliquer par le fait que les distributions réelles de bruit pour un événement unique n'ont pas réellement la forme de l'équation 3.31. En effet, étant dans un système de taille finie, l'interaction possède un cut-off à petite distance (valeur maximale) et un cut-off à grande distance (valeur minimale). Cela rend la distribution de bruit associée de variance et de moyenne finies. Ainsi, par ces effets de taille finie, la distribution du bruit cumulé finit effectivement par converger vers une gaussienne d'après le théorème

central limite. Cette convergence pouvant être plus ou moins lente, cela explique pourquoi on ne retrouve le comportement gaussien des particules passives que dans la limite de grands temps.

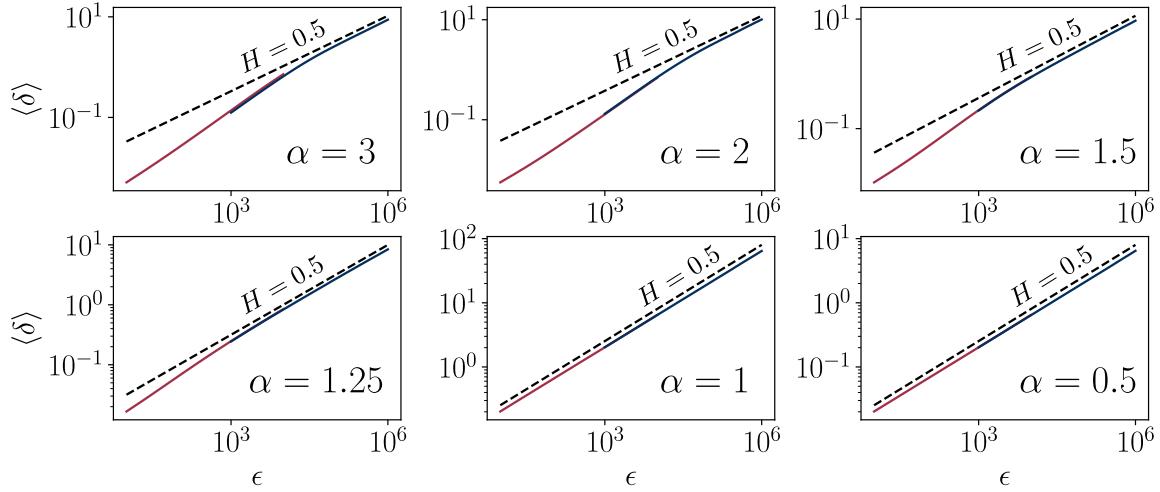


FIGURE 3.14 – Evolution de  $\delta(\epsilon)$  pour différentes portées  $\alpha$  dans le  $\alpha$ -ROM. Cette représentation est l’assemblage de deux analyses, une à temps courts (rouge) et une à temps longs (bleu). Les pointillés noirs représentent le comportement gaussien  $\delta(\epsilon) \sim \sqrt{\epsilon}$ . Mettre les distance au point critique pour chaque portée. Remarque : J’ai beau avoir cherché je ne comprends pas le désaccord entre les courbes temps longs et temps courts...

Cela ne remet cependant pas en cause notre hypothèse initiale de modélisation par un exposant effectif  $\mu_{\text{eff}}$ . En effet, dans notre cadre, la zone pertinente à étudier n'est pas celle à temps infini mais plutôt celle associée typiquement au temps nécessaire à la mise en contact avec une autre particule. Toutefois l'identification de cette zone pose des difficultés. En effet, entre le régime de courte durée corrélé (et donc inadapté à la modélisation de l'[équation 3.34](#)) et le régime de longue durée gaussien (hors des gammes de temps pertinentes), aucun régime clair de loi de puissance n'est distinctement visible sur les courbes obtenues. Il n'est alors pas possible de déterminer un exposant effectif à partir de ces données.

### Mesure indirecte par la fonction de corrélation de paire

Les mesures directes sur le bruit interne n'étant pas concluantes, nous proposons une méthode alternative pour déterminer  $\mu_{\text{eff}}$ . Pour ce faire, nous passons par une approche indirecte. Dans le modèle  $\mu$ -Hébraud-Lequeux, la distribution de bruit n'agit pas que sur l'exposant  $\beta$  mais aussi sur la forme de la distribution de position  $P(r)$ . Ce comportement est caractérisé par l'exposant  $\theta$  dont la dépendance en  $\mu$  est donnée par l'[équation 3.39](#).

$P(r)$  représentant la distribution de position dans la cage effective, dans notre modèle numérique en dimension finie, l'équivalent de  $P(r)$  est en fait directement la fonction

de corrélation de paire des particules passives  $g^p(r)$ . En notant  $x = r - D_p$  avec  $D_p$  le diamètre des particules, nous nous attendons donc, d'après le cadre champ moyen, à avoir au point critique dans nos simulations numériques :

$$g^p(x) \sim x^\theta, \quad \theta = \begin{cases} \frac{\mu}{2}, & \mu \leq 2 \\ 1, & \mu \geq 2 \end{cases} \quad (3.44)$$

$g^p$  est une quantité d'intérêt et facilement mesurable dans les simulations de particules. Ainsi, en mesurant  $\theta$ , il est possible de déterminer indirectement l'exposant effectif de bruit  $\mu_{\text{eff}} = 2\theta$  permettant de rendre compte de ce comportement via le modèle  $\mu$ -Hébraud-Lequeux. Si notre hypothèse initiale est correcte, alors, par cohérence, l'exposant  $\mu_{\text{eff}}$  déterminé ainsi sera directement lié à la valeur de l'exposant  $\beta$  selon :

$$\begin{cases} \beta = \mu_{\text{eff}} = 2\theta, & 1 < \mu_{\text{eff}} < 2 \\ \beta = 1, & \mu_{\text{eff}} < 1 \end{cases} \quad (3.45)$$

Nous proposons alors d'évaluer l'exposant  $\theta$  dans les modèles de particules. Nous choisissons d'abord de nous concentrer sur le cas le plus proche de la théorie champ moyen, le  $\alpha$ -ROM en 2D avec sauts infinis des particules actives. Nous mesurons alors la fonction de corrélation de paire entre particules passives  $g^p(r)$  à petits  $r$ , pour différentes distances au point critique  $\delta\phi$  et ce pour chaque portée  $\alpha$ . Un exemple de mesure pour  $\alpha = 1.5$  et  $\alpha = 5$  est présenté sur les encarts de la [figure 3.15](#). Nous observons alors effectivement un comportement algébrique de  $g^p(x)$  avec  $x$  qui s'étend à petits  $x$  à mesure que le point critique est approché. À très petits  $x$ , la fonction de corrélation sature sur un plateau dont la valeur décroît avec la distance au point critique. Cela s'explique par le fait que le comportement donné par l'[équation 3.44](#) n'est en fait valable qu'au point critique.

Pour s'affranchir de cet effet, nous utilisons une méthode de redimensionnement par  $\delta\phi$  pour mesurer l'exposant  $\theta$ . Cette méthode est alors très similaire à celle présentée à la [sous-section 2.4.2](#) pour la détermination de l'exposant  $\delta$ . Pour ce faire, nous supposons donc que la fonction  $g^p(x = r - D_p, \delta\phi)$  est homogène de ses arguments dans le régime critique. Dans le cadre de cette hypothèse, en redimensionnant  $g^p(x, \delta\phi)$  par  $\delta\phi^{a_1}$  et  $x$  par  $\delta\phi^{a_2}$ , il est possible de trouver  $a_1$  et  $a_2$  tels que les courbes pour différents  $\delta\phi$  se superposent toutes sur une courbe maîtresse. L'exposant  $\theta$  caractérisant le comportement de la fonction avec  $x$  est alors directement donné par  $\theta = a_1/a_2$ .

Nous représentons à la [figure 3.15](#) le meilleur redimensionnement par  $\delta\phi$  obtenu dans les cas  $\alpha = 1.5$  et  $\alpha = 5$  et reportons le cas des autres portées à la [sous-section 6.2.4](#). Comme on peut le remarquer, la superposition des courbes est remarquablement satisfaisante sous le bon choix d'exposants. Notre hypothèse d'homogénéité de la fonction  $g^p(r, \delta\phi)$  est donc bien validée. Les exposants  $\theta$  déterminés permettent alors de tracer l'évolution de  $\mu_{\text{eff}} = 2\theta$  avec  $\alpha$  sur la [figure 3.16](#). Afin de confronter notre hypothèse initiale, nous traçons sur la même figure l'évolution de  $\beta$  avec  $\alpha$  précédemment déterminée.

Nous remarquons alors un très bon accord entre les deux courbes pour  $\mu_{\text{eff}} \geq 1$ . Pour  $\mu_{\text{eff}} < 1$ ,  $\beta$  sature à la valeur triviale  $\beta = 1$ , comme prédict par la théorie effective. Par

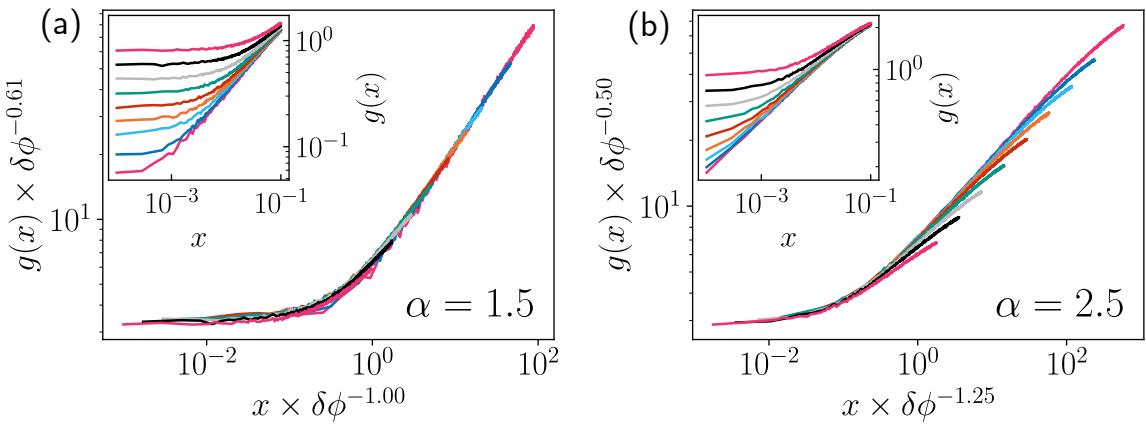


FIGURE 3.15 – Redimensionnement des fonctions de corrélation de paire des particules passives avec la distance au point critique  $\delta\phi$  dans le  $\alpha$ -ROM avec sauts infinis des particules actives pour  $\alpha = 1.5$  (a) et  $\alpha = 5$  (b). En encart, les données brutes associées. Remarque : mettre une flèche pour l'évolution de  $\delta\phi$  et les donner en légende

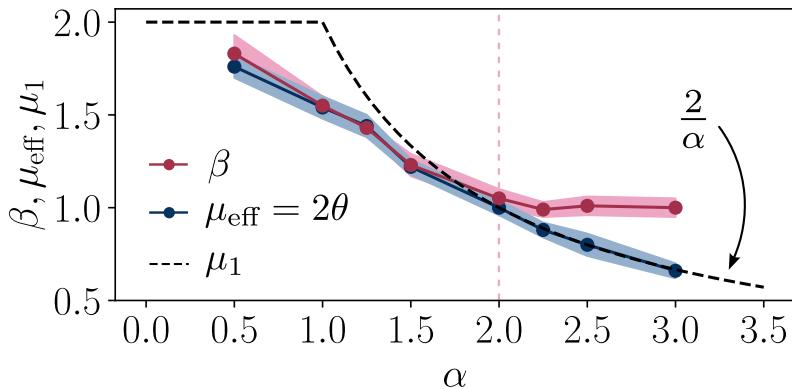


FIGURE 3.16 – Comparaison des évolutions de  $\mu_{\text{eff}} = 2\theta$  et  $\beta$  avec  $\alpha$  dans la modèle  $\alpha$ -ROM avec sauts infinis des particules actives. En pointillés noirs, l'évolution de  $2\theta$  dans le modèle de Lin et al. [83]

ailleurs, sur cette même figure, nous montrons que dans cette zone de courte portée, l'exposant  $\mu_{\text{eff}}$  coïncide avec la première approximation  $\mu = D/\alpha$  (en pointillés noirs). Notre hypothèse initiale de modélisation de la transition en dimension finie par un exposant de bruit effectif semble donc parfaitement vérifiée dans ce cas. Si les corrélations ne peuvent pas être incorporées directement dans le modèle champ moyen, celles-ci peuvent donc tout de même être interprétées par celui-ci dans le cadre du  $\alpha$ -ROM en 2D avec sauts infinis.

Une autre information que nous tirons de ces redimensionnement est que, pour  $\mu_{\text{eff}} > 1$ , la valeur au contact  $x = 0$  de la fonction  $g^p$  évolue comme  $\delta\phi^\theta$ . De plus, pour  $\mu_{\text{eff}} < 1$ , là où  $\beta = 1$ , celle-ci évolue comme  $\delta\phi^{0.5}$ . Ainsi, par définition de l'exposant  $\beta$ , la valeur du plateau se comporte comme  $\sqrt{\langle A \rangle}$  à toute portée. La forme adéquate de la fonction de corrélation de paire à une distance finie du point critique est donc :

$$g^p(x) \sim \sqrt{\langle A \rangle} + x^\theta \quad (3.46)$$

avec  $\theta$  non trivialement déductible de la portée de l'interaction. Cette observable étant accessible expérimentalement, cette forme en lien direct avec l'exposant  $\beta$  pourrait être testée en conditions réelles.

En conclusion, les corrélations de dimension finie peuvent effectivement être incorporées dans le modèle  $\mu$ -Hébraud-Lequeux via un exposant de bruit  $\mu_{\text{eff}}$  non-trivial. Cette procédure permet alors d'expliquer les écarts entre champ moyen et simulations numériques et d'étendre le pouvoir explicatif du cadre mis en place. Toutefois, le modèle numérique utilisé ici reste une version simplifiée du phénomène. Qu'en est-il du modèle  $\alpha$ -ROM conservant une dynamique de sauts finis des particules actives ?

### Retour au modèle $\alpha$ -ROM

Pour répondre à cette question, nous menons la même analyse que dans le cas des sauts finis. Simplement, du fait des résultats de l'analyse précédente, nous choisissons de redimensionner directement les quantités par  $\langle A \rangle$  et non  $\delta\phi$ . Les redimensionnements les plus convaincants obtenus sont alors représentés pour  $\alpha = 0.5$  et  $\alpha = 1.25$  à la [figure 3.17](#). Les autres analyses sont reléguées à la [sous-section 6.2.4](#).

La superposition des courbes est alors toujours très satisfaisante pour tout  $\alpha$ . Dans le cas de très longue portée, nous retrouvons un comportement en  $\sqrt{\langle A \rangle}$  de  $g^p(0)$ . Toutefois ce comportement semble perdu à plus courtes portées où l'on mesure  $g^p(0) \sim A^b$  avec  $b > 0.5$  dès  $\alpha = 1$ . De plus, si la comparaison entre  $\mu_{\text{eff}} = 2\theta$  est  $\beta$  est excellente pour  $\alpha = 0.5$  ( $2 \times 0.50/0.55 \approx 1.82$  à comparer à  $\beta \approx 1.83$ ), cette correspondance semble se perdre dès  $\alpha = 1$ . En effet, à cette portée nous mesurons  $2\theta \approx 1.7$  alors que nous avions mesuré  $\beta \approx 1.56$  à la [sous-sous-section 3.3.2.1](#). Cet écart continue alors de se creuser pour des portées plus courtes pour lesquelles on sature à  $\mu_{\text{eff}} \approx 1.5$  dès  $\alpha = 1.25$ . Cette valeur est alors bien loin de l'équivalent champ moyen  $\beta = 1$  à petits  $\mu$ .

La prise en compte des corrélations dans la théorie semble donc difficile pour la version plus réaliste du  $\alpha$ -ROM. Cela suggère que le rôle des particules actives, qui ne peut être compris que d'un point de vue collectif, est dans ce cas là essentiel à la criticalité. Toutefois, il est remarquable que le modèle puisse interpréter le comportement critique dans la limite de très grande portée. Ainsi, même si  $\alpha \rightarrow 0$  n'est pas un cas champ moyen à proprement parler, il peut être décrit dans le même cadre qu'une dynamique trivialisée. Cela permet donc de rationaliser les comportements mesurés par Mari et al dans le cas du 0-ROM [14].

### 3.4.3 Zone concave

Les analyses précédentes nous ont permis de montrer en quoi la diffusion des particules passives représentait un mécanisme essentiel dans la transition du  $\alpha$ -ROM. Toutefois, à courte portée, il ne semble pas que celle-ci suffise à comprendre entièrement la criticalité du modèle. Notamment, les cas où l'on mesure  $\beta < 1$  ne peuvent être compris que par

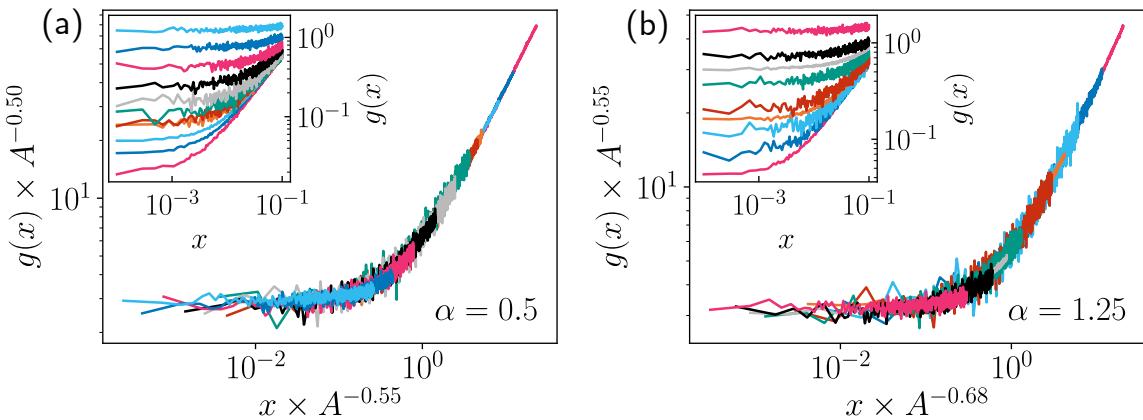


FIGURE 3.17 – Redimensionnement des fonctions de corrélation de paire des particules passives avec la distance au point critique  $\delta\phi$  dans le  $\alpha$ -ROM avec sauts finis des particules actives pour  $\alpha = 0.5$  (a) et  $\alpha = 1.25$  (b). En encart, les données brutes associées. **Remarque :** mettre une flèche pour l'évolution de  $\delta\phi$  et les donner en légende

les corrélations induites par les sauts des particules actives. Bien que la zone  $\beta > 1$  soit hors d'atteinte du cadre de référence LR-CDP, il est tentant de vouloir interpréter cette zone  $\beta < 1$  via ce formalisme. Le paysage global présenté à la [sous-sous-section 3.3.2.1](#) se formerait donc d'une zone avec  $\beta > 1$  dominée par la dynamique des particules passives, et d'une zone  $\beta < 1$  interprétable comme une zone dominée par la dynamique des particules actives.

Un premier conflit d'interprétation de cette région concave vient du fait que la zone d'exposant  $\alpha$  pour laquelle on passe de  $\beta \approx 0.64$  en 2D à  $\beta = 1$  n'est pas du tout la même que celle du cadre LR-CDP. En effet, nous avons identifié  $0.5 \lesssim \alpha \gtrsim 2$  pour le  $\alpha$ -ROM et  $3 < \alpha < 4$  pour LR-CDP en 2D. Toutefois, il est possible que le mécanisme de diffusion dans cette zone agisse de la même manière qu'un transport à longue portée, seulement avec un exposant effectif différent. Il serait alors possible de réconcilier le  $\alpha$ -ROM avec le cadre de référence dans cette zone concave.

Dans le cas d'un transport à longue portée contrôlé par l'exposant  $\gamma$ , une particule active dans un espace de dimension  $D$  fait un saut dont l'amplitude  $\Delta$  suit une distribution  $P(\Delta) \sim \Delta^{D-1-\gamma}$  (voir ??). En supposant la densité de particules homogène dans le système, cela correspond à une probabilité  $P_a(r)$  de créer de l'activité à une distance  $r$  à l'issue du pas de temps telle que :

$$P_a(r) \sim \frac{1}{\Delta^{1+\gamma-D}} \quad (3.47)$$

La question est alors de savoir si une telle quantité peut être dérivée dans le cas du  $\alpha$ -ROM, et comment celle-ci se compare au cas du transport à longue portée à comportement critique équivalent. Peut-on dériver un exposant de saut effectif  $\gamma_{\text{eff}}$  dans le cadre de ce modèle ?

Pour ce faire, nous considérons la portée  $\alpha = 1.75$  pour laquelle nous avons mesuré  $\beta \approx 0.82$ . Elle se situe donc à mi-chemin entre la limite de courte portée  $\beta = 0.64$  et la valeur triviale  $\beta = 1$ , et donc cette criticalité peut-être atteinte dans le cadre du transport à longue portée. Pour ce faire, nous générions un état absorbant du système à  $\phi = \phi_c$ . À partir de cet état absorbant, nous activons aléatoirement une particule, générant alors un saut de courte portée et un bruit sur toutes les autres particules passives. En identifiant les particules activées suite à ce pas de temps et leur distance  $r$  à la particule activée, nous pouvons mesurer la quantité  $P_a(r)$  dans ce cadre. Le même protocole peut être appliqué dans le cadre du transport à longue portée. Pour un système de taille  $L = 4096$ , nous comparons alors la mesure de  $P_a(r)$  obtenue pour  $\alpha = 1.75$  à celle obtenue dans le cas d'un transport à longue portée avec  $\gamma = 3.5$ . La valeur de  $\gamma$  est choisie ainsi puisque dans ce cas nous avons mesuré  $\beta \approx 0.81$ , soit une valeur très proche de  $\beta \approx 0.82$  pour  $\alpha = 1.75$ . Les résultats sont présentés sur la figure 3.18.

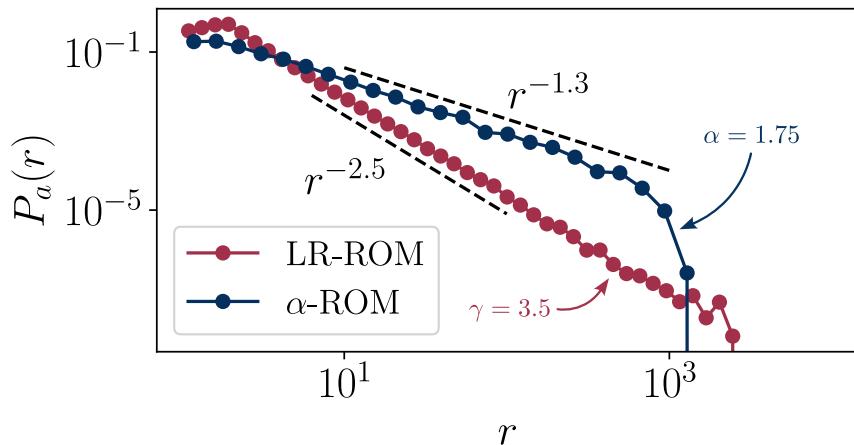


FIGURE 3.18 – Evolution des distributions  $P_a(r)$  pour le LR-ROM avec  $\gamma = 3.5$  et pour le  $\alpha$ -ROM avec  $\alpha = 1.75$ .

Nous constatons alors que dans le cas du transport à longue portée,  $P_a(r)$  décroît bien comme  $1/r^{2.5}$  en 2D. Dans le cas du  $\alpha$ -ROM, cette distribution décroît comme  $1/r^{1.3}$  soit  $\gamma_{\text{eff}} \approx 2.3$ , donc bien moins rapidement. En réalisant ces mêmes mesures sur des états actifs de la dynamique, les mêmes observations peuvent être faites. Ainsi, si les deux modèles partagent le même exposant  $\beta$  à ces portées, ils ne partagent pas du tout les mêmes propriétés de création d'activité. En d'autres termes, il ne semble pas possible d'interpréter la criticalité du  $\alpha$ -ROM via le cadre LR-CDP dans la zone concave. La dynamique des particules passives reste donc importante à toute portée  $\alpha < D$  et le changement de convexité ne semble pas relever d'un changement abrupt de mécanisme prépondérant.

En conclusion, nous avons établi dans cette section un modèle de type champ moyen permettant une transition de réversibilité convexe. Son étude révèle alors la place essentielle du bruit interne, i.e. de la diffusion des particules passives, dans la criticalité du  $\alpha$ -ROM. Ce modèle permet par ailleurs d'expliquer la zone déterminée précédemment sur laquelle la criticalité évolue continûment avec la portée en dimension finie. Pour obtenir

des prédictions quantitatives sur la valeur de l'exposant critique  $\beta$ , il est nécessaire de prendre en compte les corrélations dans le modèle champ moyen via une redéfinition effective du bruit interne. Cela n'est cependant efficace qu'à très longue portée. Enfin, si la zone concave pour laquelle on retrouve  $\beta < 1$  prend l'apparence du comportement attendu dans le cadre LR-CDP, celle-ci correspond en fait à une dynamique bien différente. In fine, le modèle  $\alpha$ -ROM est donc différent en tout point du cadre LR-CDP sous les aspects abordés et nécessite un traitement théorique fondamentalement différent.

## 3.5 Avalanches

Afin de souligner ces différences par un dernier aspect incontournable de la criticalité absorbante, nous proposons d'étudier dans cette section la dynamique d'avalanches à l'œuvre dans le  $\alpha$ -ROM.

### 3.5.1 Avalanches à densité fixée

Remarque : Peut-être un schéma ?

#### 3.5.1.1 Redéfinition

Comme nous l'avons vu au [chapitre 1](#), les modèles appartenant à la classe CDP présentent une dynamique d'avalanches. Pour être mise en évidence, il est d'usage de se placer dans le cas de la criticalité auto-organisée (abrégée SOC pour *self-organized criticality*). Dans ce cadre, la séparation d'échelle entre le temps de forçage (ajout de matière aléatoire) et de relaxation (disparition de matière induite par l'activité) permet d'observer distinctement des événements d'activité fortement corrélés et distribués de manière algébrique : ce sont les avalanches.

Une autre manière d'observer cette dynamique critique est de se placer dans l'état stationnaire à une densité fixée de particules  $\phi$  dans le système, proche de la densité critique  $\phi_c$ . Une subtilité est que, dans ces conditions, le système est proche d'une transition de phase absorbante. Ainsi, pour un système de taille finie, du fait des fluctuations de la dynamique, cette dernière peut régulièrement tomber dans un état absorbant pour  $\phi \gtrsim \phi_c$ . Pour sonder la dynamique d'avalanches à densité imposée, il est donc nécessaire de réactiver le système à chaque fois qu'il se retrouve bloqué. Un protocole généralement utilisé est alors d'activer artificiellement une particule dans le système, alors précurseur de l'événement [54, 114, 115].

Cette situation impose de redéfinir la notion d'avalanches à densité fixée. Dans ce cadre, nous définissons une avalanche comme l'évènement ayant lieu entre deux réactivations du système. Il est alors possible de définir ces évènements exactement de la même manière que les avalanches de la SOC, i.e. par leur taille  $S$ , leur durée  $T$  et le nombre de particules  $N$  qu'ils impliquent. Dans le cadre du  $\alpha$ -ROM, la taille d'une avalanche correspond au nombre d'évènements d'activité individuels ayant lieu pendant l'évènement global. La durée correspond alors simplement aux nombres de pas de temps entre le début et la fin de l'avalanche. Plusieurs études ont montré que ces avalanches étaient de même nature

que celles de la SOC dans les modèles à courte portée<sup>7</sup> [54, 114, 115]. Il est alors attendu que ces évènements soient aussi distribués de manière algébrique, définis par les exposants d’avalanche déjà présentés à la [sous-section 1.3.5](#) :

$$\begin{aligned} P(S) &\sim S^{-\tau} f\left(\frac{S}{S_c}\right), \quad S_c \sim L^{d_f} \\ P(T) &\sim T^{-\tau'} g\left(\frac{T}{T_c}\right), \quad T_c \sim L^z \\ P(N) &\sim N^{-\tau''} h\left(\frac{N}{N_c}\right), \quad N_c \sim L^\chi \end{aligned} \quad (3.48)$$

Afin d’analyser le comportement des avalanches à la transition dans le cadre du  $\alpha$ -ROM et de le comparer avec l’attendu présupposé de LR-CDP, nous choisissons de nous placer à densité fixée. Ce choix se justifie par cohérence, les analyses précédentes ayant toutes été réalisées à densité fixée. Cela nous permet alors de caractériser directement la dynamique qui donne lieu au comportement critique précédemment déterminé.

### 3.5.1.2 Protocole

Pour étudier les avalanches à densité fixée dans le modèle  $\alpha$ -ROM, pour une portée  $\alpha$  donnée, nous nous plaçons à la densité critique  $\phi_c$  du système. Dès lors, nous générerons un état absorbant du système en partant d’une configuration initiale aléatoire. À chaque fois que le système tombe dans un état absorbant, la dynamique est réactivée en activant artificiellement une particule choisie au hasard. Ce processus est alors réitéré suffisamment de fois pour obtenir une statistique propre et stationnaire pour les observables  $S$ ,  $T$  et  $N$ <sup>8</sup>. Nous réalisons alors ces mesures en 2D pour  $\alpha \in \{3, 2, 1.75, 1.5, 1.25, 0.5\}$  et pour les tailles de systèmes  $L \in \{256, 512, 1024, 2048\}$ . Un exemple des  $3 \times 4$  distributions obtenues est alors présenté à la [figure 3.19](#) pour  $\alpha = 1.5$

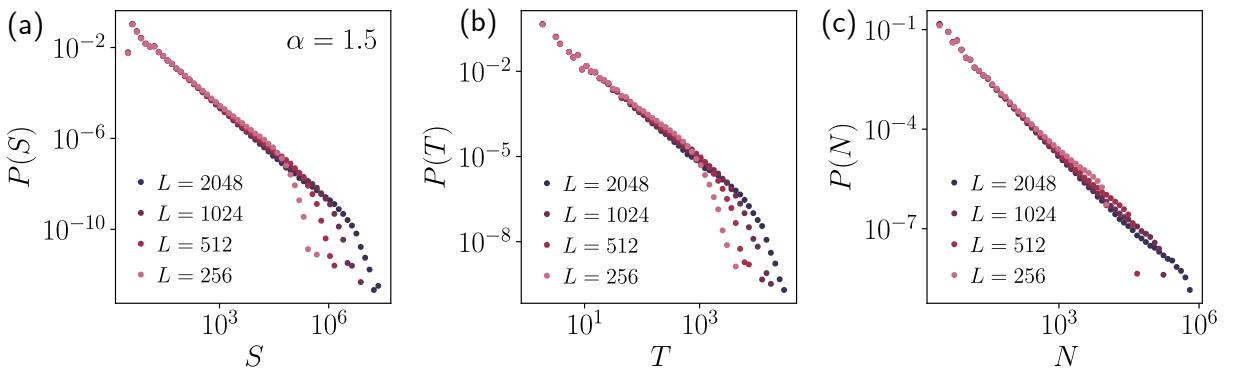


FIGURE 3.19 – Distributions de taille (a), de durée (b) et du nombre de particules impliquées (c) pour les avalanches mesurées dans le modèle  $\alpha$ -ROM à densité fixée  $\phi = \phi_c$  pour  $\alpha = 1.5$  et pour  $L \in \{256, 512, 1024, 2048\}$ .

7. Ces études n’interprétaient cependant pas ces évènements à densité fixée comme des avalanches à proprement parler.

8. En pratique, la stationnarité impose d’ignorer les premiers évènements

Les formes des distributions sont alors celles supposées, présentant une décroissance en loi de puissance, commune à chaque taille, puis un cut-off, augmentant avec la taille du système. Par ailleurs, ce cut-off, dans le cas de  $P(S)$  et  $P(T)$ , semble présenter une bosse qui s'étale à mesure que la portée augmente. Afin de déterminer précisément les exposants d'avalanche associés à ces distributions, nous procédons à une analyse d'échelle en taille finie. Pour ce faire, nous reprenons les formes définies par l'équation 3.48. Selon ces ansatz, toute la dépendance des distributions en  $L$  est portée par le cut-off. Prenons alors l'exemple de la distribution des tailles  $P(S)$ . En redimensionnant  $S$  par  $S_c$ , nous obtenons :

$$P(S) \sim L^{-d_f \tau} \tilde{S}^{-\tau} f(\tilde{S}), \quad \tilde{S} = \frac{S}{L^{d_f}} \quad (3.49)$$

Ainsi, en redimensionnant  $P(S)$  par  $L^{-d_f \tau}$  et  $S$  par  $L^{d_f}$ , les courbes obtenues pour différentes tailles de système  $L$  sont indépendantes de  $L$ , i.e. se superposent. Ce principe constitue alors une méthode graphique de détermination des exposants : les exposants  $d_f$  et  $\tau$  sont déterminés comme ceux définissant le redimensionnement qui permet la meilleure superposition des courbes obtenues pour différents  $L$ . Nous représentons alors sur la figure 3.20 la meilleure superposition obtenue pour  $\alpha = 1.5$ . Les représentations graphiques obtenues pour les autres portées sont reportées à la sous-section 6.2.5 et les exposants ainsi déterminés sont tous reportés dans le tableau 3.2.

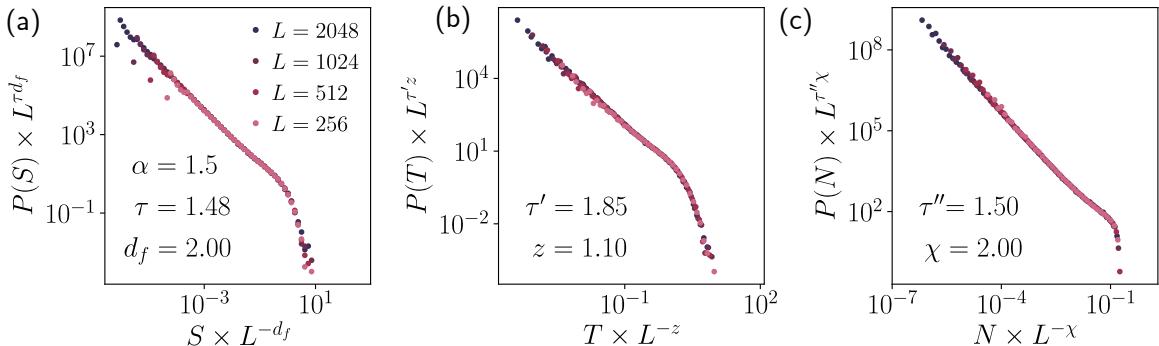


FIGURE 3.20 – Redimensionnement par  $L$  des distributions de taille (a), de durée (b) et du nombre de particules impliquées (c) pour les avalanches mesurées dans le modèle  $\alpha$ -ROM à densité fixée  $\phi = \phi_c$  pour  $\alpha = 1.5$  et pour  $L \in \{256, 512, 1024, 2048\}$ .

### 3.5.2 Évolution des exposants

Pour les exposants  $\tau$ ,  $\tau'$  et  $\tau''$ , nous observons une tendance d'augmentation avec la portée, comme dans le cadre LR-CDP/depinning (voir section 1.5). Par exemple, on passe de  $\tau \approx 1.28$  pour  $\alpha = 3$  à  $\tau \approx 1.47$  pour  $\alpha = 1.25$ . Nous remarquons par ailleurs que la valeur obtenue à courte portée  $\alpha = 3$  est compatible avec les mesures déjà effectuées dans le cas de la classe CDP [81]. Nous notons cependant une anomalie à cette tendance d'augmentation pour  $\alpha = 0.5$ , portée à laquelle le cut-off s'étale le plus sur la loi de puissance. Même si cette tendance générale est modérée, cela montre que les avalanches sont globalement distribuées de moins en moins largement à mesure que la portée des

interactions augmente. De ce point de vue, l'évolution est alors compatible avec le cadre LR-CDP, bien que la gamme de portées sur laquelle a lieu l'évolution soit toujours très différente.

En contraste, les exposants de structure  $d_f$ ,  $z$  et  $\chi$  sont soumis à des variations fondamentales. Dans le cas de la courte portée, pour  $\alpha = 3$  et  $\alpha = 2$ , nous mesurons  $d_f \approx 2.75$ ,  $z \approx 1.55$  et  $\chi \approx 2$ , soit un parfait accord avec le cas CDP/depinning à courte portée [19, 34, 80–82]. Les études précédentes ayant été menées dans le cadre de la SOC, cela valide l'équivalence avec le cas de densité fixée à courte portée. Nous rappelons par ailleurs qu'obtenir  $d_f > D$  dans notre cas n'est pas surprenant puisque la taille  $S$  des avalanches caractérise une dynamique en  $D + 1$  dimensions.

$\alpha$	$\tau$	$\tau'$	$\tau''$	$d_f$	$z$	$\chi$
3	1.28	1.47	1.37	2.8	1.55	2
2	1.34	1.57	1.42	2.75	1.55	2
1.75	1.41	1.72	1.47	2.4	1.30	2
1.5	1.48	1.85	1.50	2.00	1.10	2
1.25	1.47	1.85	1.49	1.75	0.95	1.75
0.5	1.40	1.70	1.42	1.4	0.90	1.50

TABLE 3.2 – Exposants d'avalanche déterminés dans les modèles  $\alpha$ -ROM. L'évolution des exposants de structure  $d_f$ ,  $z$  et  $\chi$  est représentée graphiquement à la [figure 3.21](#).

Dès lors que  $\alpha < 2$ , la dimension fractale associée à ces avalanches diminue, pour atteindre  $d_f \approx 1.5$  à  $\alpha = 0.5$ . Autour du point  $\alpha = 1.5$ , la dimension fractale des avalanches passe en dessous de la dimension spatiale  $D$  du système. Ce point  $\alpha = 1.5$  marque donc un changement caractéristique dans la structure des avalanches, qui ne sont alors plus compactes spatialement aux portées plus grandes. Cette observation se confirme par l'évolution de  $\chi$ , qui caractérise la surface occupée par les avalanches (leur taille spatiale en quelques sortes). En effet,  $\chi = D$  signifie qu'au maximum, les avalanches occupent toute la surface du système, elles sont donc compactes spatialement. En revanche  $\chi < D$  montre des événements qui présentent une fractalité spatiale. Le passage de  $\chi \approx 2$  pour  $\alpha \geq 1.5$  à  $\chi < 2$  pour  $\alpha < 1.5$  montre donc bien une perte en compacité spatiale des événements autour de  $\alpha = 1.5$ .

L'exposant dynamique diminue lui aussi avec la portée pour  $\alpha < 2$ . Il effectue un changement notable autour de  $\alpha = 1.5$  puisqu'il passe de  $z > 1$  à  $\alpha = 1.5$  à  $z < 1$  à  $\alpha = 1.25$ . Cette diminution de  $z$  avec la portée est à l'opposé de l'attendu CDP/depinning pour lequel  $z$  augmente vers sa valeur champ moyen  $z = 2$  [34]. Si l'on suppose que la relation de scaling  $z = \frac{\nu_{\parallel}}{\nu_{\perp}}$  est vérifiée dans notre cadre d'étude [19], alors cette anomalie entre en résonance avec l'anomalie de l'évolution de  $\nu_{\perp}$ , discutée à la [sous-sous-section 3.3.2.1](#). En effet nous avions vu que  $\nu_{\perp}$ , dérivé par hyperscaling, augmentait avec la portée, alors que le comportement inverse était attendu dans le cadre LR-CDP.

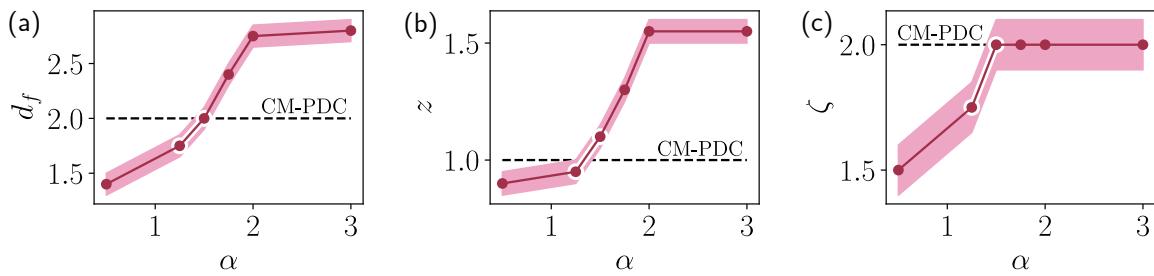


FIGURE 3.21 – Evolution des exposants de strcuture des avalanches  $d_f$ ,  $z$  et  $\chi$  avec la portée  $\alpha$  dans le modèle  $\alpha$ -ROM en 2D.

Finalement, les propriétés d’avalanches du  $\alpha$ -ROM suivent une évolution similaire à celle des exposants critiques. Pour  $\alpha \lesssim 1.5$ , l’évolution observée est celle convenue dans le cadre LR-CDP/depinning pour les exposants  $\tau$ ,  $\tau'$ ,  $\tau''$  et  $d_f$  avec des évènements spatialement compacts  $\chi = D$ . Pour  $\alpha \gtrsim 1.5$  cependant, nous observons un comportement hors des bornes du cadre LR-CDP avec des avalanches spatialement fractales. Comme dans le cas de l’évolution des exposants critiques, la ressemblance avec le cadre canonique dans la zone concave est à nuancer. En effet, ici l’exposant dynamique  $z$  diminue avec l’augmentation de la portée dans toute la zone d’évolution des exposants. De ce fait, au point où l’on retrouve les autres exposants tous proches de leurs homologues CDP champ moyen,  $z$  prend la valeur  $z \approx 1$  très différente de  $z_{\text{CDP}}^{\text{CM}} = 2$ .

## 3.6 Conclusion

En conclusion, nous avons caractérisé dans ce chapitre l’influence des interactions médiées sur la transition de réversibilité des suspensions cisaillées cycliquement. Cette caractérisation s’est faite via la définition d’un modèle numérique baptisé  $\alpha$ -ROM en deux et trois dimensions, contrastant avec le modèle de transport à longue portée LR-ROM établi au chapitre précédent. Celle-ci a alors montré des différences fondamentales entre le comportement critique observé et celui attendu dans le cadre théorique LR-ROM.

En déterminant les exposants critiques statiques et dynamiques associés, nous avons mis en évidence l’influence de la portée des interactions sur le comportement critique. Cette influence prenant alors place sur une gamme de portée disjointe de celle prévue par le cadre LR-CDP. De plus, nous avons identifié une gamme de portées sur laquelle la transition se révèle convexe ( $\beta > 1$ ) et les fluctuations évanescantes ( $\gamma' < 0$ ), rejoignant alors le modèle de portée infini initialement proposé par Mari et al. [14].

Ces observations nous ont poussé à définir un nouveau cadre théorique pour décrire la transition de réversibilité en présence d’interactions médiées. Nous avons alors défini un modèle champ moyen baptisé  $\mu$ -Hébraud-Lequeux, permettant de rendre compte de la convexité de la transition via la dynamique des particules passives. Ce modèle permet de rationaliser la gamme de portées sur laquelle la criticalité du système évolue continûment en dimension finie, alors très différente de celle prévue par le cadre LR-CDP.

Par ailleurs, en généralisant cette théorie à un modèle effectif, nous avons pu expliquer quantitativement la valeur non triviale de  $\beta$  mesurée dans la limite de portée infinie.

Enfin, nous avons caractérisé cette famille de transition par sa dynamique d’avalanches. En réalisant des avalanches à densité de particules fixées, nous avons montré que leur statistique dépend fortement de la portée de l’interaction étudiée. Notamment, les exposants d’avalanche suivent une évolution proche des exposants critiques statiques, délimitant une zone fondamentalement différente du cadre LR-CDP. Dans cette zone où les avalanches dans le cadre LR-CDP ont déjà atteint leur régime de champ moyen, les avalanches dans le cadre du modèle  $\alpha$ -ROM montrent une structure spatialement fractale.



# Chapitre 4

## Transition vers l'écoulement des matériaux amorphes

**TODO :**

- Discuter du fait que  $\nu_\perp$  et  $z$  ont des évolutions anormales et que donc le point champ moyen ne l'est en fait pas vraiment. Donc moins insister dessus. Alors en fait pas vraiment... chiant
- Pas appuyer la zone  $4 < 6$  avec les valeurs de beta ou alors l'opposer aux particules qui sautent

### Pré-requis pour ce chapitre

- Transitions de phase : exposants, hypothèse de scaling.
- CDP et CDP-LR : bornes, exposants limites, théorie de champ
- Introduction au yielding : systèmes concernés, phénoménologie, interaction d'Eshelby, point de vue transition de phase absorbante.
- Transition de depinning : phénoménologie, comportement critique, avalanches
- Suspensions : détermination du point critique (figure détermination log-log), analyse des avalanches dans les suspensions
- Conventions et notations : Transformées de Fourier

Dans la ??, nous avons vu que la transition vers l'écoulement peut être comprise comme une transition de phase absorbante. Le paramètre de contrôle est alors la contrainte imposée au système  $\Sigma$  et le paramètre d'ordre le taux de déformation  $\dot{\gamma}$ . Ce dernier est nul dans la phase absorbante pour  $\Sigma < \Sigma_c$  et non-nul dans la phase active  $\Sigma > \Sigma_c$ . Proche de la transition, l'évolution de  $\dot{\gamma}$ , de sa variance  $\langle \Delta \dot{\gamma}^2 \rangle$  et de la longueur de corrélation  $\xi$  sont dictées par les exposants critiques  $\beta$ ,  $\gamma'$  et  $\nu_\perp$  selon :

$$\dot{\gamma} \sim \delta \Sigma^\beta, \quad \langle \Delta \dot{\gamma}^2 \rangle \sim \delta \Sigma^{-\gamma'}, \quad \xi \sim \delta \Sigma^{-\nu_\perp}, \quad \delta \Sigma = \frac{\Sigma - \Sigma_c}{\Sigma_c} \quad (4.1)$$

avec la spécificité  $\beta > 1$  qui rend cette transition très différente de celle qui lui est souvent associée, le depinning. Le depinning étant lui-même associé à la criticalité LR-CDP, cette observation place la transition vers l'écoulement hors de ce cadre de référence.

Le but de ce chapitre est alors de caractériser précisément cette transition par tous ses aspects, et de montrer en quoi celle-ci se démarque de la transition de depinning/LR-CDP dans chacun de ceux-ci. Pour ce faire, nous présenterons d'abord la méthode élastoplastique utilisée. Ensuite nous mettrons en application cette méthode pour déterminer les exposants critiques de la transition. Puis, par des modifications sur le modèle de base, nous mettrons en évidence des ingrédients clés permettant de situer cette transition dans une compréhension globale, différente de celle du depinning. Enfin, par l'analyse de l'hyperuniformité, de la rugosité et des avalanches proche de la transition, nous mettrons en évidence une zone de criticalité en rupture avec le cadre de référence LR-CDP, dans laquelle se situe la transition vers l'écoulement.

## 4.1 Étudier la transition vers l'écoulement des matériaux amorphes

La transition vers l'écoulement, même si peu abordée en tant que transition de phase absorbante, reste un objet d'étude central en matière molle. Notamment, beaucoup se sont intéressé-es à la forme de la courbe d'écoulement associée  $\dot{\gamma} = f(\Sigma)$  et de sa potentielle universalité. Un modèle phénoménologique communément utilisé pour la décrire est celui d'Herschel-Bulkley [116] :

$$\dot{\gamma} = k(\Sigma - \Sigma_c)^{1/n}, \quad k, n \in \mathbb{R}^+ \quad (4.2)$$

Cette forme est alors tout à fait équivalente à la description en termes de phénomène critique, avec l'exposant  $\beta$  relié à l'exposant d'Herschel-Bulkley par  $\beta = 1/n$ . Par la mesure de  $n$  sur différents systèmes, les chercheur-euses ont alors questionné l'universalité de cette courbe. En d'autres termes, cela revient donc à explorer un aspect de la criticalité de cette transition. Ces études peuvent alors nous guider sur la méthode la plus adaptée pour explorer plus largement et précisément cette criticalité.

### 4.1.1 Expérimentalement

Expérimentalement, l'exposant de Herschel-Bulkley a été mesuré dans de nombreux systèmes. Que ce soit dans les monocouches de mousse [117], les émulsions [118, 119], les suspensions colloïdales [120] ou les verres de colloïdes [121], des exposants allant de  $n \approx 0.4$  à  $n \approx 0.7$  ont pu être mesurés. Même si les mesures se montrent souvent dépendantes de certaines propriétés du système, la grande majorité soulignent un caractère convexe de la courbe d'écoulement avec  $n < 1$  et donc  $\beta > 1$ . Dans certains cas cependant, la propriété de fluide à seuil ou la monotonie de la courbe d'écoulement peuvent être perdues par une faible modification des propriétés microscopiques du système [118]. De plus, la mesure de la contrainte et du taux de déformation peuvent être grandement affectées par des effets parasites comme les glissements à l'interface [7].

Ainsi, si les expériences d'écoulement des matériaux amorphes en laboratoire révèlent une certaine universalité via la relation d'Herschel-Bulkley, leur exécution peut être soumise à de nombreuses contraintes réelles et à l'interférence de mécanismes supplémentaires.

Le but de notre étude étant de se focaliser sur le concept global du phénomène d'écoulement, il peut être avantageux de travailler dans des situations idéalisées pour une analyse précise et simplifiée.

### 4.1.2 Numériquement

L'outil numérique apparaît alors comme une évidence pour étendre cette étude. Via les méthodes de dynamique moléculaire, il est possible de simuler des écoulements amorphes à différents degrés de modélisation. Des comportements similaires aux expériences ont alors pu être observés, même à de très petites échelles, souvent moins accessibles en laboratoire. Un problème soulevé par ces études est que, dans de tels systèmes, l'agitation thermique peut jouer un rôle essentiel sur la transition, modifiant de fait la courbe d'écoulement [122] et donc toute la criticalité. Afin d'étudier le phénomène dans sa forme la plus simple possible, nous choisissons de nous limiter dans ce travail au cas athermique. Cela signifie que l'agitation thermique est considérée négligeable, sans impact sur le comportement critique. Cette simplification n'exclue cependant pas la modélisation de tous les systèmes à petites échelles car ces derniers peuvent s'avérer effectivement athermiques sous certaines conditions. Par exemple, un exposant  $n \approx 0.5$  est retrouvé pour le régime athermique du silicium amorphe dans [123]. Les méthodes moléculaires permettent donc de retrouver les résultats expérimentaux dans des conditions plus contrôlées. Par contre, le problème de ces méthodes est leur fort coût numérique qui rend impossible l'étude de très grands systèmes. Or les phénomènes critiques étant décrit aux grandes échelles, cela représente un obstacle de taille pour la caractérisation de la transition vers l'écoulement des matériaux amorphes athermiques.

### 4.1.3 Théoriquement

Une manière de répondre à cette difficulté est de s'appuyer sur une approche complètement théorique et donc applicable à des systèmes infinis.

#### 4.1.3.1 Groupe de renormalisation et difficultés

Dans le cas des phénomènes critiques, ces approches théoriques se basent en général sur les théories de champs et les outils du groupe de renormalisation. Notamment, dans le cas du depinning, les méthodes du groupe de renormalisation fonctionnel permettent de prédire la courbe d'écoulement du système proche de la transition. Toutefois, même si des études ont tenté de décrire la transition vers l'écoulement dans le même formalisme que celui du depinning [66], une différence fondamentale bloque l'application de ces méthodes dans notre cas. En effet, là où le propagateur de redistribution dans le cas du depinning est positif en tout point, dans le cas de la transition vers l'écoulement, celui-ci change de signe. En effet, comme nous l'avons vu à la ??, l'interaction de redistribution d'Eshelby, lors d'un réarrangement plastique, stabilise aussi bien qu'elle ne déstabilise le reste du matériau. Au contraire, dans le cas du depinning, le dépiégage d'une zone entraîne nécessairement la déstabilisation des autres zones.

Cette différence physique a souvent été mise en avant pour expliquer les différences existantes entre depinning et transition vers l'écoulement. Pour conserver une approche

théorique, il faut donc se baser sur de nouvelles méthodes de description. Une voie s'ouvre alors sur des approches de type champ moyen, dont l'une des plus célèbres d'entre elles est le modèle de Hébraud-Lequeux.

#### 4.1.3.2 Modèle de Hébraud-Lequeux

Le modèle de Hébraud-Lequeux [124] est un modèle qui permet de prédire certaines propriétés de la transition vers l'écoulement, notamment la forme de la courbe  $\dot{\gamma} = f(\Sigma)$ . Ce modèle se base en fait sur la phénoménologie présentée au chapitre 1. Considérant le matériau comme un ensemble de régions distinctes portant chacune une contrainte  $\sigma$  et soumises à un taux de cisaillement  $\dot{\gamma}$ , la distribution de probabilité  $P(\sigma)$  se voit régie par l'évolution :

$$\begin{aligned}\partial_t P(\sigma, t) &= -\dot{\gamma} \partial_\sigma P(\sigma, t) + \alpha \Gamma(t) \partial_\sigma^2 P(\sigma, t) - \frac{\Theta(|\sigma| > \sigma_Y)}{\tau} P(\sigma, t) + \Gamma(t) \delta(\sigma) \\ \Gamma(t) &= \frac{1}{\tau} \int_{|\sigma| > \sigma_Y} d\sigma P(\sigma, t)\end{aligned}\quad (4.3)$$

avec  $\tau$  un temps caractéristique de relaxation et  $\alpha$  un paramètre du modèle aussi appelé fluidité. Le premier terme représente alors le chargement élastique du matériau. Le troisième et le dernier terme représentent le phénomène de relaxation locale lorsque la région dépasse sa contrainte seuil  $\sigma_Y$  et opère un réarrangement plastique. Toute la physique capturée dans le modèle réside alors dans le second terme de diffusion. Celui-ci modélise l'influence des régions en réarrangement sur les autres régions via les interactions élastiques d'Eshelby. Dans cette approche cela se fait par un bruit gaussien, reflet du point de vue champ moyen adopté. L'intensité de ce bruit dépend alors proportionnellement de la proportion de régions en réarrangement dans le système  $\Gamma(t)$ .

En résolvant ce système d'équations simple dans la limite stationnaire pour  $\alpha < \frac{\sigma_Y^2}{2}$ , il est possible de déduire une relation entre la contrainte moyenne  $\langle \sigma \rangle = \int d\sigma P(\sigma)$  et le taux de cisaillement lorsque  $\dot{\gamma} \rightarrow 0$  [125, 126] :

$$\dot{\gamma} \sim (\langle \sigma \rangle - \Sigma_c)^\beta, \quad \beta = 2 \quad (4.4)$$

On retrouve alors une forme de type Herschel-Bulkley avec  $n = 0.5$ , prédiction proche des résultats expérimentaux et numériques. Ce modèle simple permet donc de rendre compte de la convexité de la transition vers l'écoulement. Il se démarque alors des approches classiques de théorie des champs comme celle associée à la classe CDP ou au depinning en proposant une description statistique à l'échelle mésoscopique.

Toutefois, ce modèle reste très simplificateur et ne permet pas de rendre compte de toutes les propriétés critiques associées à la transition. Des approches de généralisation de ce modèle ont été étudiées [127, 128], notamment en complexifiant la forme du bruit mécanique afin de rendre compte de la spatialisation des interactions [83, 113]. Mais si ces études sont intéressantes d'un point de vue champ moyen, elles ne permettent pas d'accéder à certaines quantités comme les fluctuations critiques et les corrélations spatiales proche de la contrainte seuil. Afin d'étudier pleinement cette transition en dimension finie

et toute la richesse qui y est associée, il est donc nécessaire d'effectivement spatialiser ce type de description.

## 4.2 Les modèles élastoplastiques comme outils privilégiés

L'approche idéale pour l'étude de la transition vers l'écoulement des matériaux amorphes athermiques semble alors se situer entre une description microscopique réaliste et spatialisée, mais coûteuse, et une description phénoménologique macroscopique, mais trop simplificatrice. Les modèles élastoplastiques répondent alors parfaitement à ce besoin. Nous présentons alors la méthode utilisée dans ce travail pour caractériser la transition.

### 4.2.1 Principe d'un modèle élastoplastique

Comme expliqué dans le [chapitre 1](#), l'écoulement des matériaux amorphes consiste en une succession d'évènements plastiques locaux, lesquels s'entre-déclenchent les uns les autres. Afin de modéliser ce comportement spécifique tout en conservant une efficacité de calcul satisfaisante, les modèles élastoplastiques se basent sur une description mésoscopique du matériau étudié [8]. Conceptuellement, le matériau est découpé en une collection de sites représentant chacun un groupe de particules susceptible d'effectuer un réarrangement plastique (voir [figure 4.1](#)). En pratique ces sites peuvent donc représenter quelques constituants élémentaires, comme dans le cas des mousses [73], ou quelques centaines d'entre eux, comme dans le cas des verres métalliques [129].

Dans la description élastoplastique, on associe à chacun de ces sites indexé par un indice  $i$  une contrainte tensorielle locale  $\bar{\sigma}_i$ . Afin de simplifier au maximum la modélisation du phénomène d'écoulement, nous considérons dans la suite de ce travail le cas simple d'un matériau bidimensionnel situé dans le plan  $(\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y)$  et cisaillé dans la direction  $\mathbf{e}_x$ . Dans ce cas, il est d'usage de se concentrer sur une unique composante  $\sigma_{xy}$  du tenseur afin de rendre la description scalaire [64, 67–69]. Ainsi, chaque site  $i$  porte une contrainte  $\sigma_i \equiv \sigma_{xy,i}$  constituante de la contrainte globale imposée au système  $\Sigma = \frac{1}{N} \sum_i \sigma_i$ , avec  $N$  le nombre de sites. En notant  $\mu$  le module de cisaillement associé au matériau étudié, on peut associer de la même manière une déformation élastique  $\epsilon_{\text{él},i}$  à chaque site selon  $\epsilon_{\text{él},i} = \sigma_i / \mu$ .

Chaque site possède un seuil de contrainte microscopique local  $\sigma_{Y,i}$  qu'il est capable de soutenir élastiquement. Mais dès lors que la contrainte locale excède ce seuil local ( $\sigma_i > \sigma_{Y,i}$ ), le site devient à même d'opérer un réarrangement plastique. Ce processus intervient alors selon un temps caractéristique  $\tau_{\text{pl}}$ . Quand le réarrangement se produit, le site passe alors dans un état plastique ( $n_i = 1$ ) et accumule une déformation plastique  $\epsilon_{\text{pl},i}$  sur un temps caractéristique  $\tau$ . Cette déformation plastique permet alors une relaxation de la contrainte locale proportionnellement. La relaxation a lieu sur temps caractéristique  $\tau_{\text{rel}}$  après lequel le site retrouve son état élastique ( $n_i = 0$ ).

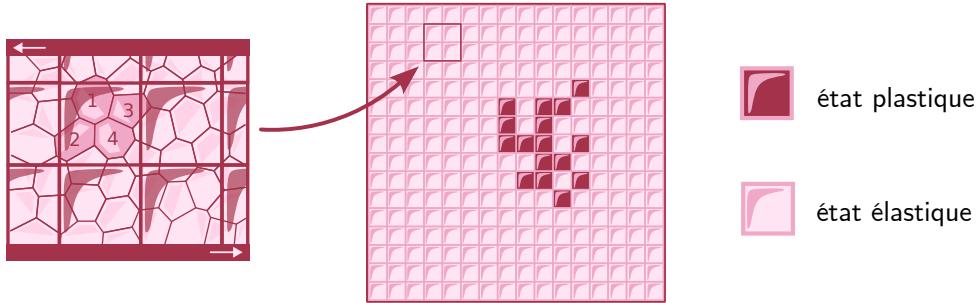


FIGURE 4.1 – Représentation schématique du principe des modèles élastoplastiques. Chaque groupe de particules dans la vision microscopique est représenté par un site pouvant prendre deux états : élastique ou plastique.

Durant la relaxation, la contrainte accumulée par le site est redistribuée aux autres sites constituant le matériau via les interactions élastiques d'Eshelby, dont la forme est rappelée [figure 4.3-\(a\)](#). Cette redistribution va alors potentiellement permettre à d'autres sites de dépasser à leur tour leur seuil local et ainsi opérer un réarrangement. C'est cette interaction de redistribution et ces réarrangements en chaîne qui sont à l'origine du comportement collectif d'écoulement plastique du matériau.

Les règles précises qui définissent la co-évolution des variables  $(\sigma_i, \epsilon_{pl,i}, n_i)$  sur chaque site dépendent alors du modèle spécifique considéré.

#### 4.2.2 Le modèle de Picard

Le modèle élastoplastique retenu pour mener notre étude est le modèle de Picard [69]. Ce modèle pionnier du domaine est reconnu pour sa simplicité. C'est alors un outil de choix pour étudier ce système du point de vue des transitions de phase absorbantes.

Dans le modèle de Picard, tous les sites composant le matériau, indicés  $i$  et situés en  $\mathbf{r}_i$ , possèdent un seuil local uniforme et constant au cours du temps  $\sigma_{Y,i} = \sigma_Y$ . Dès lors que son seuil est dépassé, un site devient plastique avec un taux de transition constant  $1/\tau_{pl}$ . Une fois plastique, ce site retrouve sa forme élastique avec un taux  $1/\tau_{el}$ . L'évolution de la contrainte locale d'un site isolé prend alors la forme illustrée sur la [figure 4.2](#).

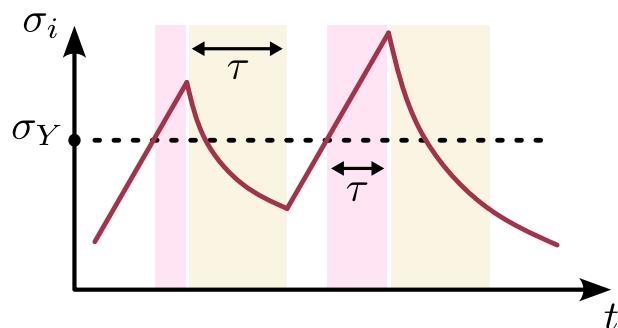


FIGURE 4.2 – Représentation schématique de l'évolution de la contrainte locale dans le modèle de Picard pour un site isolé.

Pour simplifier davantage cette approche, nous choisissons d'uniformiser les échelles de temps de telle manière que  $\tau_{\text{pl}} = \tau_{\text{el}} = \tau$ . On peut alors résumer ce modèle par le système d'équations suivant :

$$\partial_t \sigma_i = 2\mu \sum_j G_{ij} \partial_t \epsilon_{pl,j}, \quad \partial_t \epsilon_{pl,i} = \frac{1}{2\mu\tau} n_i \sigma_i, \quad \begin{cases} n_i : & 0 \xrightarrow{\tau} 1 \quad |\sigma_i| > \sigma_Y \\ n_i : & 0 \xleftarrow{\tau} 1 \quad \forall \sigma_i \end{cases} \quad (4.5)$$

avec  $G_{ij} = G(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j)$  le noyau de redistribution d'Eshelby en champ lointain défini au [chapitre 1](#) et décrit en coordonées polaires par  $G(r, \theta) = \frac{\cos 4\theta}{\pi r^2}$ . Cette description peut aisément se généraliser en trois dimensions mais notre étude s'est concentrée uniquement sur le cas bidimensionnel. Afin de simplifier l'implémentation numérique, ce système d'équations est adimensionné par les transformations :

$$\tilde{\sigma}_i = \frac{\sigma_i}{\sigma_Y}, \quad \tilde{t} = \frac{t}{\tau}, \quad \tilde{\epsilon}_{pl,i} = \frac{\mu\tau}{\sigma_Y} \epsilon_{pl,i} \quad (4.6)$$

pour obtenir :

$$\partial_t \tilde{\sigma}_i = \sum_j G_{ij} \partial_t \tilde{\epsilon}_{pl,j}, \quad \partial_t \tilde{\epsilon}_{pl,i} = n_i \tilde{\sigma}_i, \quad \begin{cases} n_i : & 0 \xrightarrow{\tau} 1 \quad |\tilde{\sigma}_i| > 1 \\ n_i : & 0 \xleftarrow{\tau} 1 \quad \forall \tilde{\sigma}_i \end{cases} \quad (4.7)$$

et nous omettrons le  $\sim$  pour alléger les notations dans la suite.

Il semble par ailleurs important de mentionner que la simplicité de ce modèle n'enlève rien à son pouvoir descriptif. En effet, pour les quantités et les phénomènes sur lesquels nous allons nous concentrer ici (exposants critiques, avalanches, ...) le modèle de Picard reproduit à l'identique les résultats des modèles plus raffinés [\[68\]](#), notamment ceux conservant une description tensorielle complète [\[8, 130\]](#).

### 4.2.3 Implémentation numérique

Afin de simuler l'écoulement cisaillé représenté par ce modèle,  $N$  sites sont positionnés sur une grille carrée périodique de taille  $L \times L = N$  et d'axes principaux ( $\hat{\mathbf{e}}_x, \hat{\mathbf{e}}_y$ ). La position de chaque site est alors donnée par  $\mathbf{r}_i = na\hat{\mathbf{e}}_x + ma\hat{\mathbf{e}}_y$  avec  $(n, m) \in \mathbb{N}^2$  et  $a$  le pas du réseau que l'on prend égal à 1. En pratique, nous considérons la règle d'évolution directement sous sa forme intégrée :

$$\sigma_i(t) = \sigma_{\text{int},i}(t) + \sigma_{\text{ext}} = \sum_j G_{ij} \epsilon_{pl,j}(t) + \Sigma \quad (4.8)$$

et l'évolution de  $\epsilon_{pl,j}$  donnée par [l'équation 4.7](#) est discrétisée dans le temps, calculée sur chaque site tous les  $\Delta t = 10^{-2} \tau$  selon une méthode d'Euler. À chaque pas de temps, les sites élastiques ( $n_i = 0$ ) au-dessus du seuil microscopique ( $\sigma_i > 1$ ) ont une probabilité  $\Delta t / \tau$  de devenir plastiques tandis que les sites plastiques ont la même probabilité de redevenir élastiques.

Le point clé de l'algorithme est alors le calcul de la convolution  $\sum_j G_{ij}\epsilon_{pl,j}$  puisqu'elle admet naïvement une complexité d'ordre  $N^2$ . Afin d'optimiser nos calculs, nous tirons parti du fait que les sites soient disposés sur une grille régulière. Cela nous permet de déterminer ce terme selon une méthode pseudo-spectrale : la convolution est calculée dans l'espace de Fourier discret où elle devient le simple produit  $\hat{G}(\mathbf{q})\hat{\epsilon}_{pl}(\mathbf{q})$  puis l'on revient à sa représentation dans l'espace réel par une transformée de Fourier inverse discrète. Pour ce faire, nous implémentons directement le propagateur de Eshelby dans sa forme spectrale discrète [13] :

$$\hat{G}(\mathbf{q}) = -4 \frac{q_x^2 q_y^2}{q^4}, \quad (q_x, q_y) = \frac{2\pi}{L} \times (n, m) \quad (4.9)$$

avec  $\hat{G}(\mathbf{q} = 0) = 0$  afin de conserver la contrainte totale du système. L'optimisation des algorithmes de FFT permet alors de réduire la complexité à l'ordre  $N \log(N)$  [111]. De plus, l'analyse de Fourier permet de prendre en compte les limites périodiques de manière naturelle. Le schéma de calcul devenant complètement parallélisable, il est implanté sur des cartes graphiques via le langage CUDA [95] afin d'optimiser nettement la rapidité d'exécution des simulations. Grâce à ces ajustements, nous sommes capables de simuler le comportement de systèmes dont la taille va de  $L = 32$  à  $L = 2048$ <sup>1</sup>.

En pratique, le système est d'abord cisaillé sous une forte contrainte globale  $\Sigma_{\text{preshear}}$  durant un temps  $T_{\text{preshear}}$  avant d'être soumis brutalement à la contrainte globale souhaitée  $\Sigma$ . Le système évolue alors jusqu'à un état stationnaire caractérisé par une valeur moyenne du taux de déformation  $\dot{\gamma} = \frac{1}{N} \sum_i \partial_t \epsilon_{pl,i}$  (voir figure 4.3-(b)), nulle pour  $\Sigma < \Sigma_c$  et positive pour  $\Sigma > \Sigma_c$ . Nous sommes alors capables avec ce modèle de tracer la courbe d'écoulement  $\langle \dot{\gamma} \rangle = f(\Sigma)$  représentée sur la figure 4.3-(c), qui montre clairement la convexité de la transition, par opposition à la concavité de celle du depinning. En étudiant le comportement du système pour  $\Sigma \sim \Sigma_c$  il est alors possible de caractériser cette criticalité spécifique.

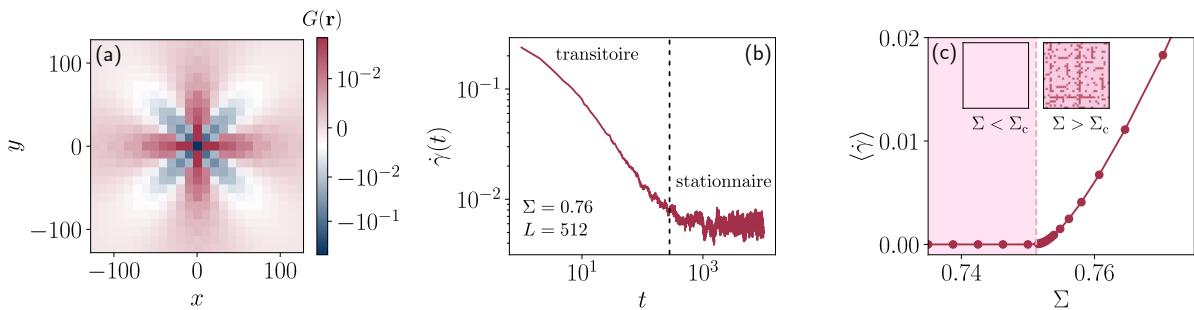


FIGURE 4.3 – Résultats de l'implémentation numérique du modèle de Picard. (a) Image du propagateur de redistribution d'Eshelby. (b) Exemple d'équilibration d'une simulation à contrainte imposée. (c) Courbe d'écoulement pour un système de taille  $L = 256$ .

1. L'algorithme de FFT étant optimisé pour des tailles de la forme  $2^n$  avec  $n \in \mathbb{N}$ , nous privilégions ces tailles pour les simulations.

#### 4.2.4 Changement du paramètre de contrôle

De la même manière qu'il est possible de contrôler la contrainte globale à laquelle est soumis le système lors de la simulation, il est aussi possible de contrôler le taux de déformation  $\dot{\gamma}$ . Dans ce cas, les règles du modèle de Picard se voient légèrement modifiées [69]. Un terme de forçage  $\mu\dot{\gamma}$  s'ajoute à l'évolution de la contrainte locale dans l'équation 4.5 et l'on a  $\hat{G}(0) = -1$  de telle sorte que les évènements plastiques permettent une relaxation globale du système (et plus seulement locale).

Il est alors possible d'appliquer un taux de déformation  $\dot{\gamma}$  constant au système et d'observer l'évolution de la contrainte globale. Dans l'état stationnaire, cette dernière fluctue alors autour d'une valeur moyenne  $\langle \Sigma \rangle$ . Lorsque  $\dot{\gamma}$  tend vers 0, la contrainte moyenne tend vers la contrainte seuil  $\Sigma_c$ . Ce changement de paramètre de contrôle permet lui aussi d'observer le comportement du système et de tracer une courbe d'écoulement  $\langle \Sigma \rangle = f(\dot{\gamma})$ . On remarque par ailleurs que ces deux approches sont équivalentes sous cet aspect [67].

Si la condition de contrainte imposée semble évidente dans le cas de l'étude de la transition de phase absorbante, contrôler le taux de déformation peut se révéler intéressant autant d'un point de vue numérique que du point de vue de la modélisation d'expériences réelles, comme nous le verrons par la suite.

### 4.3 Comportement critique

Grâce au modèle de Picard, nous sommes donc en mesure de déterminer le comportement local et global du système proche du point critique ( $\Sigma = \Sigma_c, \dot{\gamma} = 0$ ). Des études basées sur une méthode élastoplastique similaire ont déjà permis d'analyser certaines propriétés critiques de la transition vers l'écoulement. On retrouve notamment une mesure  $\beta \approx 1.5$  pour différents modèles [64, 67, 68] ou même une estimation de l'exposant  $\nu_\perp$  [64]. Notre travail a pour vocation d'aller plus loin en caractérisant la transition de manière plus exhaustive et par d'autres aspects, afin de mieux contraster son comportement avec celle du depinning.

#### 4.3.1 Transition vers l'écoulement en milieu élastique

##### 4.3.1.1 Détermination du point critique

###### Méthodes

Le première étape dans l'étude d'une transition de phase est la détermination de son point critique. Ici, cela revient à mesurer la contrainte seuil globale du système  $\Sigma_c$ . Pour ce faire plusieurs approches sont possibles.

La première approche consiste à reproduire la méthode appliquée dans les sections précédentes sur les modèles de particules. Cela revient ici à mesurer pour différentes contraintes imposées au système  $\Sigma$  la valeur du taux de déformation moyen  $\langle \dot{\gamma} \rangle$  dans l'état stationnaire. La contrainte seuil correspond alors à la contrainte pour laquelle la

fonction  $\langle \dot{\gamma} \rangle = f(\Sigma - \Sigma_c)$  est représentée par une droite sur une échelle logarithmique. Cette méthode, comme pour les modèles de particules, nécessite d'augmenter la taille du système  $L$  à mesure que l'on s'approche du point critique et que l'activité dans le système (ici représentée par  $\langle \dot{\gamma} \rangle$ ) s'approche de 0. Cela requiert alors des temps de calcul conséquents pour une détermination précise de la contrainte seuil.

La seconde méthode, plus communément utilisée dans la littérature, est de ne pas contrôler la contrainte imposée au système mais le taux de cisaillement. De la même manière, la contrainte seuil est alors définie comme celle pour laquelle la fonction  $\langle \Sigma \rangle - \Sigma_c = f(\dot{\gamma})$  est représentée par une droite sur une échelle logarithmique. L'avantage de ce choix est que lorsque le système est forcé, il ne peut jamais tomber dans l'état absorbant (puisque de fait  $\dot{\gamma} > 0$ ). Cela permet alors de s'affranchir du tâtonnement nécessaire à la première méthode. Toutefois cette méthode n'est pas exempte de défauts. En effet, si l'on peut imposer  $\dot{\gamma}$  arbitrairement petit à n'importe quelle taille de système  $L$ , dès lors que la longueur de corrélation  $\xi$  devient comparable à  $L$ , le système est soumis à des effets de taille finie. Ces effets parasitent alors la méthode de détermination graphique et incitent donc néanmoins à utiliser de plus grands systèmes à mesure que l'on s'approche du point critique.

Enfin, une troisième méthode astucieuse permet d'utiliser ces effets de taille finie afin de déterminer précisément  $\Sigma_c$ . Présentée dans [64], celle-ci consiste à soumettre le système à un cisaillement quasistatique selon un protocole qui sera développé à la [sous-sous-section 4.4.2.2](#). Pour chaque taille  $L$  de système il est alors possible de mesurer la contrainte moyenne dans l'état quasistatique  $\langle \Sigma_c(L) \rangle$ . En supposant la correction de taille finie algébrique :  $\langle \Sigma_c(L) \rangle = \Sigma_c + k_1 L^{-1/\nu_\perp}$ , il est alors possible de déterminer graphiquement  $\Sigma_c$ . Le même raisonnement peut être effectué sur les fluctuations de cette contrainte en taille finie.

Les deux premières méthodes présentent l'avantage de déterminer conjointement  $\Sigma_c$  et  $\beta$ , qui est un exposant d'intérêt principal pour nous. La troisième présente elle l'avantage de s'affranchir des effets parasites de taille finie. Toutefois, les deux dernières méthodes nécessitent la possibilité de changer de paramètre de contrôle (pour contrôler  $\dot{\gamma}$  et non  $\Sigma$ ). Elles sont donc facilement réalisables dans le cas physique mais, comme nous le verrons par la suite, cela devient moins évident dans le cadre d'une généralisation à des portées arbitraires.

### Détermination à taux de cisaillement imposé

Pour l'analyse du cas physique, nous utilisons la deuxième méthode présentée. Pour des tailles de système  $L \in [256, 512, 1024]$ , nous réalisons des simulations à taux de cisaillement imposé. La mesure de  $\langle \Sigma(\dot{\gamma}, L) \rangle$  se fait une fois l'état stationnaire atteint. Les données associées aux trois systèmes sont alors assemblées et l'on trace la fonction  $\dot{\gamma} = f(\langle \Sigma \rangle - \Sigma_c)$  en échelle logarithmique pour différentes valeurs de  $\Sigma_c$ . Comme illustré sur la [figure 4.4](#),  $\Sigma_c = 0.75125$  est une estimation convaincante de la contrainte seuil alors que  $\Sigma_c^+ = 0.75130$  et  $\Sigma_c^- = 0.75120$  le sont moins. Moyennant les potentiels effets de taille finie entâchant la mesure, nous retiendrons  $\Sigma_c = 0.75125 \pm 0.00010$  comme détermination finale.

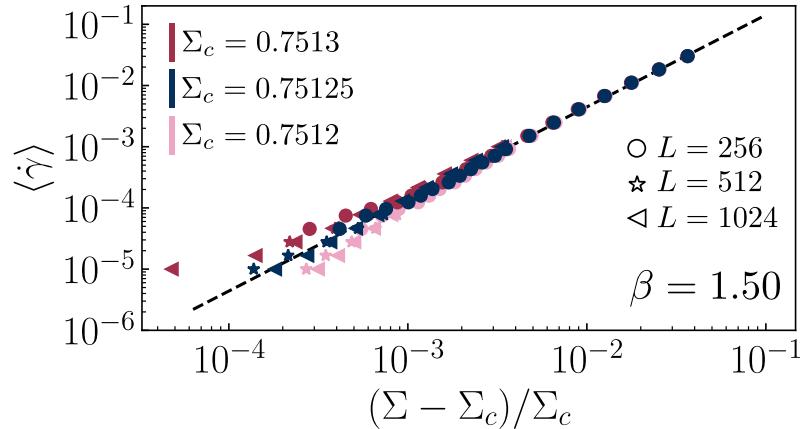


FIGURE 4.4 – Détermination de la contrainte critique pour le modèle de Picard à taux de cisaillement imposé. La courbe en tirets noirs correspond à la loi de puissance  $\langle \dot{\gamma} \rangle \sim \delta \Sigma^\beta$ .

Via cette détermination, la pente de la courbe donne directement  $\beta = 1.50 \pm 0.05$ . Cette valeur est en parfait accord avec les résultats pré-existants sur les modèles élastoplastiques [64, 68], confortant de ce fait la justesse de notre méthode de détermination. L'exposant  $\beta$  mesuré est alors supérieur à 1, ce qui suggère bien que cette transition ne peut pas être décrite dans le cadre LR-CDP comme le depinning. De plus, cette valeur est différente de celle prédite par le modèle champ moyen généralement associé de Hébraud et Lequeux avec  $\beta = 2$  [112]. La transition vers l'écoulement semble alors présenter une criticalité à la fois spécifique et non triviale. Afin de la caractériser plus précisément, nous déterminons dans la suite de cette section les autres exposants critiques associés.

#### 4.3.1.2 Analyse d'échelle de taille finie

### Difficultés dans la détermination des exposants critiques

La détermination du point critique et de l'exposant  $\beta$  est relativement coûteuse numériquement mais reste accessible. Pour les autres exposants  $\gamma'$  et  $\nu_\perp$ , celle-ci peut s'avérer plus fastidieuse. En effet, dans le cas de  $\gamma'$ , la quantification précise de l'amplitude des fluctuations nécessite de très longues simulations. De plus le régime dans lequel  $\langle \Delta\dot{\gamma}^2 \rangle$  suit effectivement une loi de puissance est souvent plus réduit et demande donc une meilleure approche du point critique. Celle-ci ne peut se faire qu'en augmentant la taille du système et donc en allongeant de ce fait le temps de simulation. De plus, dans le cas de  $\nu_\perp$ , une mesure directe de la longueur de corrélation est fastidieuse du fait de l'anisotropie du modèle et de la longue portée des interactions [131].

## Méthode

Afin de remédier à ces difficultés, nous proposons une méthode astucieuse inspirée des méthodes canoniques pour l'analyse des phénomènes critiques [19]. La difficulté première dans l'analyse de cette transition venant de la présence d'états absorbants, cette méthode permet de les supprimer. De la même manière que l'ajout d'un champ magnétique dans le modèle d'Ising permet de favoriser l'une des phases [18], nous ajoutons au modèle un champ d'activation permettant de favoriser la phase active. En pratique, nous ajoutons

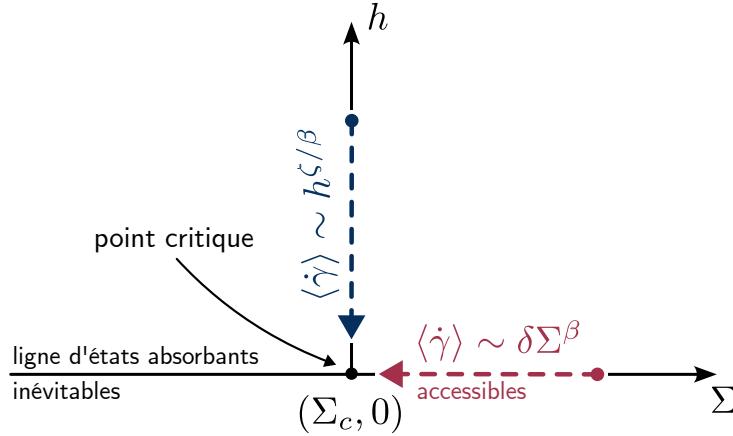


FIGURE 4.5 – Représentation schématique du principe de l'ajout d'un champ d'activation  $h$ .

une règle au modèle de Picard. Désormais, un site élastique peut devenir plastique peu importe sa contrainte locale. Cette nouvelle voie d'activation se fait selon un taux de transition  $h$  qui représente alors l'intensité du champ d'activation :

$$n_i : 0 \xrightarrow{h} 1, \quad \forall \sigma_i. \quad (4.10)$$

De ce fait, dès lors que  $h > 0$  le système ne peut pas tomber dans un état absorbant, quelque soit  $\Sigma$ . Cela revient à ajouter un paramètre de contrôle et donc une nouvelle dimension au diagramme critique, relocalisant le point critique en  $(\Sigma = \Sigma_c, h = 0)$ , à la marge d'une zone non absorbante (voir figure 4.5). En se plaçant à  $\Sigma = \Sigma_c$  et  $h > 0$ , faire tendre  $h$  vers 0 constitue ainsi un nouveau moyen de s'approcher du point critique sans aucun risque de tomber dans un état absorbant. En ce sens, imposer un champ d'activation  $h$  est tout à fait analogue à imposer un taux de cisaillement  $\dot{\gamma}$ . Il est alors possible de sonder les propriétés critiques du système aussi près que l'on veut de la transition.

Néanmoins, comme dans le cas où l'on impose le taux de cisaillement  $\dot{\gamma}$ , dès lors que  $\xi \sim L$  le système est soumis à des effets de taille finie. L'idée de l'analyse d'échelle en taille finie est alors de faire de ces effets de taille finie une force. Comme nous l'avons présenté au chapitre 1, dans le régime critique et pour un système de taille infinie, les observables physiques sont des fonctions homogènes des paramètres de contrôle. En adaptant les notations au cas de la transition vers l'écoulement, cela signifie que l'on peut écrire  $\langle \dot{\gamma} \rangle$  comme :

$$\langle \dot{\gamma} \rangle \sim \lambda^{-\beta} R(a_\Sigma \lambda \delta \Sigma, a_h \lambda^\zeta h) \quad (4.11)$$

avec  $R$  une fonction universelle homogène de ses arguments,  $a_i$  des paramètres non-universels et  $\lambda \in \mathbb{R}$ .  $\zeta$  représente alors un nouvel exposant critique caractérisant le champ d'activation  $h$ . En effet si l'on se place en  $\Sigma = \Sigma_c$  et que l'on pose  $\lambda = (a_h h)^{-1/\zeta}$  alors on obtient :

$$\langle \dot{\gamma} \rangle \sim (a_h h)^{\beta/\zeta} R(0, 1) \quad (4.12)$$

et donc  $\langle \dot{\gamma} \rangle \sim h^{\beta/\zeta}$ . Afin d'intégrer les effets de taille finie dans cette description, nous considérons  $L$  comme un nouveau paramètre de contrôle dont les propriétés d'échelle sont décrites par le même exposant  $\nu_{\perp}$  que la longueur de corrélation  $\xi$  :

$$\langle \dot{\gamma} \rangle \sim \lambda^{-\beta} \tilde{R}(a_{\Sigma} \lambda \delta \Sigma, a_h \lambda^{\zeta} h, a_L L \lambda^{-\nu_{\perp}}) \quad (4.13)$$

En prenant alors  $\Sigma = \Sigma_c$  et  $\lambda = (a_L L)^{1/\nu_{\perp}}$  on obtient :

$$\langle \dot{\gamma} \rangle \sim (a_L L)^{-\beta/\nu_{\perp}} \tilde{R}(0, a_h (a_L L)^{\zeta/\nu_{\perp}} h, 1) \quad (4.14)$$

$\tilde{R}$  étant une fonction universelle, cela signifie qu'en redimensionnant  $\langle \dot{\gamma} \rangle$  par  $(a_L L)^{-\beta/\nu_{\perp}}$  et  $h$  par  $(a_L L)^{-\zeta/\nu_{\perp}}/a_h$ , les courbes  $\langle \tilde{\gamma} \rangle = f(\tilde{h})$  ainsi représentées ne dépendent pas de la taille du système choisie. En des termes graphiques, les courbes obtenues pour différents  $L$  se superposent, même au niveau des effets de taille finie. On peut alors établir une méthode graphique de détermination des exposants : en traçant les courbes  $\langle \dot{\gamma} \rangle = f(h)$  pour différentes tailles  $L$ , les exposants critiques sont déterminés comme ceux définissant le redimensionnement permettant la superposition de toutes les courbes. En pratique, étant donné que cette étude ne sera menée que sur ce modèle spécifique, nous oublierons les paramètres non-universels  $a_i$ .

Ce raisonnement peut être mené sur deux autres quantités mesurables dans l'état stationnaire : la variance du taux de cisaillement global  $\langle \Delta \dot{\gamma}^2 \rangle$  et son cumulant de Binder  $Q$  [132] défini selon :

$$Q = 1 - \frac{\langle \dot{\gamma}^4 \rangle}{3 \langle \dot{\gamma}^2 \rangle^2} \quad (4.15)$$

L'universalité est alors obtenue avec le redimensionnement de  $\langle \Delta \dot{\gamma}^2 \rangle$  par  $L^{\gamma'/\nu_{\perp}}$  tandis que  $Q$  ne nécessite pas de redimensionnement. La méthode que nous suivons pour la détermination des exposants est donc la suivante :

- par l'étude du cumulant  $Q$  nous déterminons  $\zeta/\nu_{\perp}$ .
- par l'étude de  $\langle \dot{\gamma} \rangle$  nous déterminons  $\beta/\nu_{\perp}$ .
- en utilisant la valeur mesurée de  $\beta$  nous déduisons  $\zeta$  et  $\nu_{\perp}$ .
- par l'étude de  $\langle \Delta \dot{\gamma}^2 \rangle$  nous déterminons  $\gamma'$ .

Cette méthode peut en réalité être adaptée au cas similaire où le taux de cisaillement  $\dot{\gamma}$  est imposé comme c'est le cas dans [64]. Néanmoins notre méthode présente l'avantage de conserver la contrainte comme paramètre de contrôle et donc de permettre l'accès aux fluctuations de taux du cisaillement.

## Résultats

Nous simulons l'écoulement du système avec des tailles allant de  $L = 32$  à  $L = 1024$  et des valeurs de  $h$  allant de  $10^{-7}$  à  $10^{-2}$ . En appliquant la méthode décrite précédemment, il est possible d'obtenir la meilleure estimation des exposants  $\zeta$ ,  $\nu_{\perp}$  et  $\gamma'$  grâce aux superpositions de courbes représentées à la figure 4.6. La justesse des superpositions obtenues

Modèle/Classe	$\beta$	$\gamma'$	$\nu_{\perp}$	$\zeta$
Picard	1.5	-0.70	1.1	2.5
Picard-CP	0.59	0.26	0.70	2.1
FES $^{\pm}$	0.62	0.36	0.79	2.25
CDP [19]	0.64	0.37	0.80	2.23

TABLE 4.1 – Exposants critiques déterminés dans le modèle de Picard, le modèle Picard-CP, le modèle FES $^{\pm}$  et les exposants attendus pour la classe CDP.

valide notre approche d'échelle et nous permet d'obtenir des estimations plus précises que via une méthode d'ajustement classique. Les valeurs des exposants sont alors reportées dans le tableau 4.1. Notons que si cette transition est largement étudiée, la valeur des exposants  $\gamma'$  et  $\zeta$  n'avait encore jamais été déterminée.

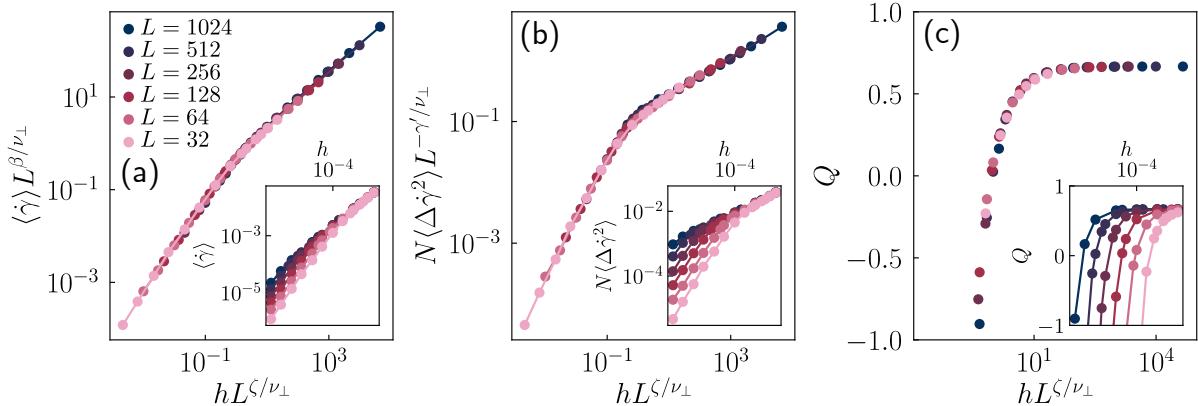


FIGURE 4.6 – Analyse d'échelle de taille finie pour le modèle de Picard. Redimensionnement de l'évolution de (a) la valeur moyenne du taux de cisaillement, (b) de la variance taux de cisaillement, (c) du cumulant de Binder. En inset, nous représentons les données brutes avant redimensionnement.

La valeur de l'exposant lié à la longueur de corrélation  $\nu_{\perp} \approx 1.13$  est en accord avec celle trouvée dans le cas d'un autre modèle élastoplastique [64]. De plus, elle est légèrement supérieure à celle associée au champ moyen de la CDP ( $\nu_{\perp, \text{CDP}}^{\text{CM}} = 1$ ), confirmant ainsi le désaccord avec le scénario de type LR-CDP du depinning.

#### 4.3.1.3 Relation d'hyperscaling

L'exposant lié aux fluctuations critiques prend lui une valeur  $\gamma' \approx -0.7$ , elle aussi très différente de celle associée au champ moyen de la CDP ( $\gamma'_{\text{CDP}}^{\text{CM}} = 0$ ). Mais le point le plus intéressant est que cette valeur est négative. Cela signifie que lorsque l'on approche la contrainte seuil du système, les fluctuations du taux de déformation diminuent et finissent par s'annuler complètement au point critique exactement. Ce comportement est assez contre-intuitif de prime abord. En effet, du fait du renforcement des corrélations spatiales et temporelles à l'approche du point critique, le scénario habituel des phénomènes

critiques présente des fluctuations critiques qui, au contraire, divergent [18]. Cette observation surprenante permet néanmoins de satisfaire la relation d'hyperscaling introduite au chapitre 1 :

$$\gamma' = \nu_{\perp} D - 2\beta \quad (4.16)$$

pour laquelle on trouve ici  $(2\beta + \gamma')/\nu_{\perp} D \approx 1.01$ .

Cette dernière peut en fait être rationalisée par un scénario simple dans le cas de la transition vers l'écoulement. Dans l'état stationnaire, le système peut être vu comme une collection de  $(L/\xi)^D$  sous-systèmes indépendants de taille  $\xi \times \xi$ . Conforté par le scénario proposé dans [64], dans chaque compartiment le taux de cisaillement moyen  $\langle \dot{\gamma} \rangle_{\xi}$  est imposé par celui produit par les plus grands évènements, ici d'extension spatiale  $\xi$ . Les compartiments étant indépendants, chacun d'entre eux possède un taux de cisaillement moyen égal au taux de cisaillement moyen global du système  $\langle \dot{\gamma} \rangle$ . Supposé alors que la durée des évènements et leur période d'apparition suivent les mêmes lois d'échelles, la variance du taux de cisaillement dans chaque compartiment, qui est une quantité positive, se comporte comme le carré du taux de cisaillement moyen  $\langle \Delta \dot{\gamma}^2 \rangle_{\xi} \sim \langle \dot{\gamma} \rangle_{\xi}^2 \sim \langle \dot{\gamma} \rangle^2$ . La variance globale  $\langle \Delta \dot{\gamma}^2 \rangle$  est alors l'addition de celle de tous les compartiments indépendants :

$$\langle \Delta \dot{\gamma}^2 \rangle \sim \left( \frac{L}{\xi} \right)^D \langle \Delta \dot{\gamma}^2 \rangle_{\xi} \sim \left( \frac{L}{\xi} \right)^D \langle \dot{\gamma} \rangle^2 \quad (4.17)$$

ce qui permet d'arriver à la relation d'hyperscaling en ré-exprimant toutes les grandeurs en fonction de la distance au point critique  $\delta\Sigma$ . En d'autres termes, l'évolution des fluctuations du taux de cisaillement est le fruit de deux phénomènes en compétition. D'une part à l'approche de la transition le nombre de zones indépendantes spatialement diminue, augmentant de ce fait les fluctuations globales (terme  $\nu_{\perp} D$  dans l'équation équation 4.16). D'autre part le taux de cisaillement moyen, et donc sa variance, diminue dans chacune de ces zones à l'approche du point critique (terme  $-2\beta$  dans l'équation équation 4.16). Dès lors que l'exposant  $\beta$  est suffisamment grand, l'exposant  $\gamma'$  est donc susceptible de devenir négatif, ce qui est bien le cas ici.

### 4.3.2 De l'importance de la longue portée - Modèles d'écoulement à courte portée

Grâce au modèle de Picard, nous avons donc pu estimer les exposants critiques liés à la transition vers l'écoulement. Cette analyse dans le cas physique des interactions d'Eshelby montre donc qu'elle ne peut être comprise dans le cadre de la théorie LRCDP, comme c'est le cas du depinning. Pour poursuivre cette étude, nous proposons alors d'identifier des caractéristiques du modèle qui pourraient expliquer ce désaccord. Pour ce faire, nous commençons par étudier l'importance de la longue portée des interactions de redistribution.

#### 4.3.2.1 Le modèle Picard-CP

Pour ce faire, nous produisons la même analyse mais sur une variation du modèle de Picard que l'on nommera Picard-CP pour "Picard courte portée". Le modèle Picard-

CP reprend alors toutes les règles du modèle de Picard mais considère une interaction différente. Celle-ci porte uniquement sur les premiers voisins, supprimant ainsi tous les effets de la longue portée de l'interaction. Pour conserver toutes choses égales par ailleurs, le noyau de redistribution choisi conserve la symétrie particulière du noyau d'Eshelby et prend donc la forme décrite sur la figure 4.7-(a). Nous nous attendons alors à ce que ce modèle appartienne à la classe CDP puisqu'il ressemble fortement à un modèle de tas de sables, comme le modèle Manna. Nous rappelons que cette classe d'universalité est décrite par les exposants récapitulés dans le tableau 4.1.

Pour déterminer la contrainte critique associée à ce nouveau modèle, nous utilisons la méthode de contrainte imposée présentée à la sous-sous-section 4.3.1.1. Dans ce cas, il n'y a en fait aucune manière naturelle de changer le paramètre de contrôle du système pour contrôler le taux de cisaillement. En effet, cela demanderait d'ajouter une composante de relaxation globale au noyau de redistribution qui peut alors prendre n'importe quelle forme (uniforme, locale, ...), et qui a priori ne donnera pas la même courbe d'écoulement que dans des conditions de contrainte imposée. En utilisant des systèmes de tailles allant de  $L = 256$  à  $L = 1024$ , nous obtenons les résultats présentés sur la figure 4.7-(b), permettant de déterminer la contrainte seuil comme étant  $\Sigma_c = 0.75433 \pm 0.00005$  et l'exposant  $\beta = 0.59 \pm 0.02$ . On trouve alors une courbe d'écoulement concave, plus communément attendue dans le cadre des phénomènes critiques. Un point à noter est que la détermination du point critique se révèle ici beaucoup plus simple que dans le cas physique en termes de temps de calcul. Cela vient directement du caractère concave de la transition qui permet de s'approcher tout aussi près du point critique sans pour autant avoir à descendre à des taux de cisaillement très faibles.

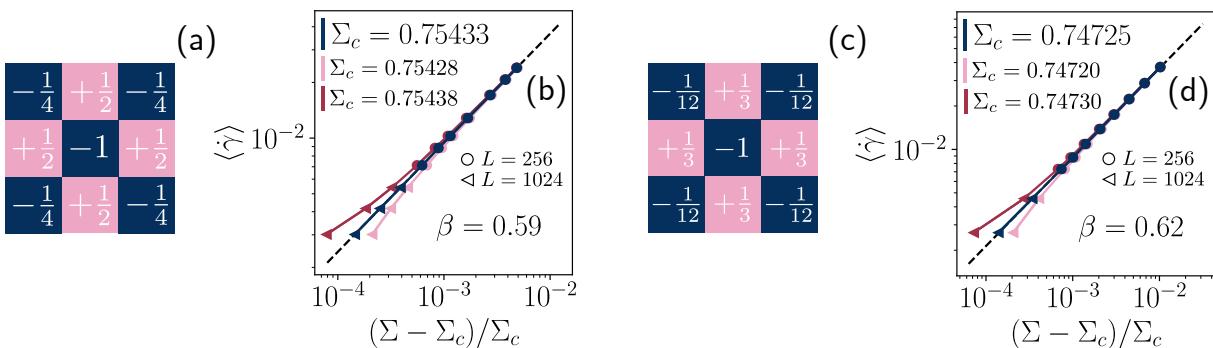
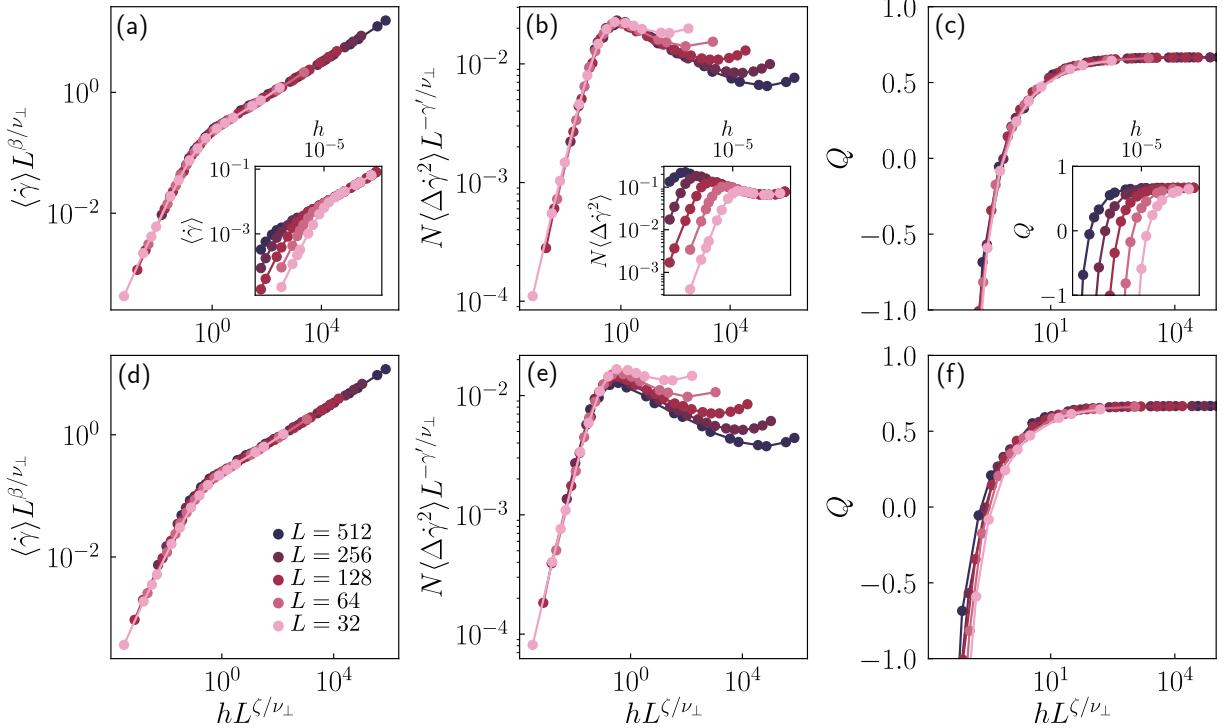


FIGURE 4.7 – Détermination de la contrainte critique  $\Sigma_c$  et de l'exposant  $\beta$  pour le modèle Picard-CP (b) (dont le propagateur est représenté en (a)) et pour le modèle FES $^\pm$  (c) (dont le propagateur est représenté en (d))

La valeur obtenue de l'exposant  $\beta$  est alors très proche de celle attendue pour la classe CDP, même si la mesure numérique semble s'en éloigner très légèrement. Cet écart n'est pas non plus dérisoire puisque c'en est un du même ordre de grandeur qui permet de séparer les classes PD et CDP par exemple [19]. Afin de confirmer ou réfuter l'hypothèse que CDP, comme pour le depinning, est la classe représentant le modèle Picard-CP, nous le caractérisons grâce à une analyse d'échelle de taille finie. En simulant des systèmes pour des tailles allant de  $L = 32$  à  $L = 512$ , la meilleure superposition des courbes après

redimensionnement est représentée [figure 4.8-\(a\)-\(c\)](#). Les valeurs des exposants critiques estimées sont alors reportées dans le [tableau 4.1](#).



**FIGURE 4.8 –** Analyse d'échelle de taille finie dans le cas du modèle Picard-CP. Les redimensionnements de la valeur moyenne (a), de la variance (b) et du cumulant de Binder (c) du taux de cisaillement sont représentés en figures principales et les données brutes en inset. Les figures (d), (e) et (f) montrent ces mêmes redimensionnements avec les exposants connus de la classe CDP [19].

La première observation à faire est que l'exposant lié aux fluctuations  $\gamma' \approx 0.26$  est positif. On retrouve donc le comportement canonique des fluctuations critiques qui divergent à l'approche de la transition, conjointement au fait de retrouver une valeur de l'exposant  $\beta$  relativement petite. Par ailleurs, avec la valeur mesurée plus faible de l'exposant  $\nu_{\perp} \approx 0.7$ , la relation d'hyperscaling est encore une fois très bien vérifiée avec  $(2\beta + \gamma')/\nu_{\perp}D \approx 1.03$ . Le scénario proposé à la section précédente est donc toujours envisageable, mais le terme  $2\beta$  subit une variation plus importante que le terme  $\nu_{\perp}D$  ce qui inverse le rapport de force entre les deux phénomènes en compétition.

Par ailleurs, les exposants  $\nu_{\perp}$ ,  $\zeta$  et  $\gamma'$  prennent eux aussi des valeurs proches des valeurs attendues pour la classe CDP, mais semblent pourtant discernablement différents. Pour se convaincre de cette différence, nous utilisons les exposants associés à la classe CDP pour la procédure de redimensionnement. Si cette classe est bien la représentante du modèle, alors la superposition dans ce cas devrait être au moins aussi convaincante. La superposition des courbes obtenue dans ce cas est présentée sur la [figure 4.8-\(d\)-\(f\)](#). On remarque alors que celle-ci est de qualité bien moindre, notamment dans le cas de la variance et du cumulant de Binder. En effet, la zone de changement de tendance pour

la variance (i.e. la bosse [figure 4.8-\(e\)](#)) marque un désaccord entre les différentes courbes tandis que la superposition des cumulants  $Q$  est relativement mauvaise à petits  $h$ . Les exposants précédemment estimés permettant d'améliorer fortement ces désaccords, cette analyse suggère que le modèle Picard-CP n'appartient pas à la classe d'universalité CDP. Cela peut paraître surprenant car toutes les conditions de la conjecture de Rossi et al. [25] semblent être réunies ici.

#### 4.3.2.2 Modes zéros, propriété fondamentale de la transition vers l'écoulement

Si le modèle fait bien intervenir une infinité d'états absorbants, des interactions à courte portée et une quantité conservée, il n'est pas dépourvu de symétrie supplémentaire. En effet, si l'on se penche sur la structure du noyau de redistribution, on remarque que la somme des contributions sur chaque ligne et chaque colonne est nulle (voir [figure 4.9-\(a\)](#)). Cette symétrie n'est pas anodine puisqu'elle implique qu'au cours de l'écoulement la contrainte portée par une ligne ou une colonne est conservée. Le système n'est donc pas contraint uniquement par la conservation de la contrainte globale mais aussi par celle de  $2L$  contraintes partielles. En espace de Fourier, cette symétrie correspond à  $\hat{G}(q_x = 0, q_y) = \hat{G}(q_x, q_y = 0) = 0$ , qui est bien apparente dans le cas du modèle Picard-CP où l'on a :

$$\hat{G}(\mathbf{q}) = \cos(q_x) + \cos(q_y) - \cos(q_x)\cos(q_y) - 1 \quad (4.18)$$

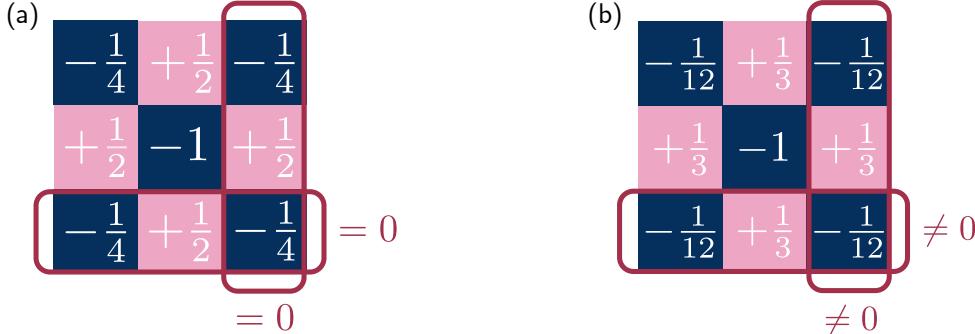


FIGURE 4.9 – Illustration de la propriété de mode zéro dans le cas du modèle Picard-CP (a) et sa brisure dans le cas du modèle FES $^\pm$  (b)

Cette propriété est en fait une propriété déjà connue et étudiée dans le cas classique [65, 66]. En effet, d'après l'[équation 4.9](#) on a de même pour l'interaction d'Eshelby  $\hat{G}(q_x = 0, q_y) = \hat{G}(q_x, q_y = 0) = 0$ . Cette conservation supplémentaire peut être interprétée sous un autre angle. Si un évènement plastique ne modifie pas la contrainte partielle portée par chaque ligne et colonne, alors une ligne ou colonne d'évènements ne modifie pas l'état de contrainte locale du système. En termes de physique d'équilibre, si l'on s'accorde ce parallèle, ces lignes plastiques ont un coût énergétique nul et peuvent donc être qualifiées de "modes mous". C'est cette propriété qui explique pourquoi ce système, proche du point critique, présente une activité plastique organisée sous-forme de clusters de faible compacité, presque linéaires (voir [figure 4.10](#)). Les bandes de cisaillement [110, 133] sont

alors la représentation à son paroxysme de cette symétrie. Ces corrélations observées dans différents dispositifs expérimentaux montrent par ailleurs que cette propriété n'est pas uniquement un artefact numérique mais a un impact bien réelle sur la physique du phénomène d'écoulement. Par analogie avec les modes mous de la physique d'équilibre et la condition dans l'espace de Fourier, nous appellerons ces modes de plasticité "modes zéros".

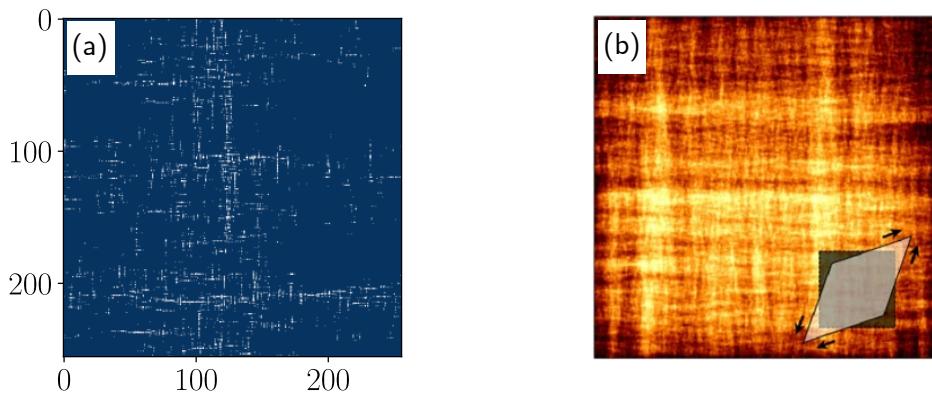


FIGURE 4.10 – (a) Carte d'activité plastique cumulée au cours d'une simulation du modèle de Picard. Les zones blanches représentent des zones de forte activité plastique. (b) Même carte dans le cas d'un modèle élastoplastique tensoriel implémenté par une méthode d'éléments finis [130]

Dans le cas classique, cette propriété de modes zéros qui se retrouve dans le noyau d'Eshelby n'est pas un hasard. En effet, elle vient du fait que l'interaction considérée est regardée dans la théorie de l'élasticité linéaire à l'équilibre mécanique. Cela implique donc que la divergence du tenseur des contraintes est nulle à tout moment de l'écoulement :

$$\partial_i \sigma_{ij} = 0 \Rightarrow \begin{cases} \partial_x \sigma_{xx} + \partial_y \sigma_{yx} = 0 \\ \partial_y \sigma_{yy} + \partial_x \sigma_{xy} = 0 \end{cases} \quad (4.19)$$

En intégrant alors sur  $x$  la première équation et sur  $y$  la seconde, et en se rappelant que  $\sigma_{xy} = \sigma_{yx}$  on a :

$$\partial_x \int dy \sigma_{xy} = \partial_y \int dx \sigma_{xy} = 0 \quad (4.20)$$

ce qui implique que la contrainte partielle portée par chaque ligne et colonne est la même. Le propagateur de redistribution d'Eshelby qui répond à cette contrainte d'équilibre mécanique doit donc redistribuer la même contrainte partielle sur chaque ligne et colonne. De plus, étant de moyenne nulle afin de conserver la contrainte globale, cette contrainte partielle redistribuée est nécessairement nulle.

#### 4.3.2.3 Retour à l'universalité et classe CDP-0

Afin de confirmer l'hypothèse que le modèle Picard-CP ne tombe pas dans la classe CDP du fait de la présence de modes zéros, nous étudions une troisième variation du

modèle. Tout en conservant les mêmes règles par ailleurs, le noyau d'interaction sur les plus proches voisins est modifié de sorte que les modes zéros disparaissent (voir figure 4.9). Ceci se fait tout en gardant la symétrie quadrupolaire de l'interaction et donc des signes alternés. En ce sens, nous appelons ce modèle  $\text{FES}^\pm$  du fait de sa forte ressemblance avec les modèles de tas de sable à énergie conservée (fixed-energy sandpiles) mais qui ne présentent en général que des redistributions de masse positives.

Nous déterminons alors le point critique associé à ce modèle de la même manière que pour le précédent. Les résultats présentés sur la figure 4.7-(c) donnent  $\Sigma_c \approx 0.74725 \pm 0.00005$  et  $\beta = 0.62 \pm 0.02$ . On remarque alors d'abord un accord légèrement meilleur avec l'exposant  $\beta$  attendu pour la classe CDP. Afin de confirmer ce rapprochement, nous conduisons la même analyse d'échelle de taille finie. Les résultats obtenus pour le meilleur redimensionnement sont présentés figure 4.11-(a)-(c). Les exposants  $\nu_\perp$ ,  $\zeta$  et  $\gamma'$  ont alors des valeurs estimées toutes plus proches des valeurs attendues pour la classe CDP que dans le cas du modèle Picard-CP (voir tableau 4.1).

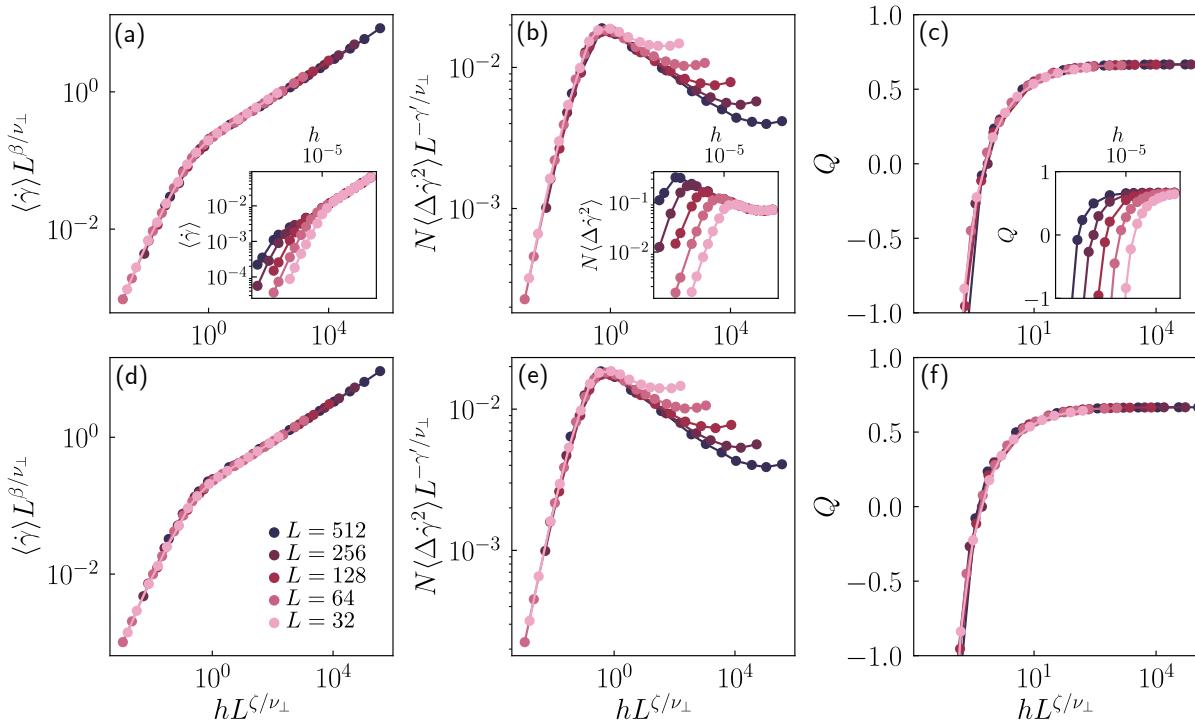


FIGURE 4.11 – Analyse d'échelle de taille finie dans le cas du modèle  $\text{FES}^\pm$ . Les redimensionnements de la valeur moyenne (a), de la variance (b) et du cumulant de Binder (c) sont représentés en figures principales et les données brutes en inset. Les figures (d), (e) et (f) montrent ces mêmes redimensionnement avec les exposants connus de la classe CDP.

Afin de confirmer que ce troisième modèle présente bien la criticalité de la percolation dirigée conservée, nous effectuons les redimensionnements des quantités avec les exposants critiques de cette classe. Les résultats sont exposés sur la figure 4.11-(d)-(f). Nous observons alors que les superpositions des courbes sont aussi convaincantes dans ce cas

que lors d'une estimation indépendante des exposants. Cela nous permet d'affirmer raisonnablement que ce modèle tombe donc bien dans la classe CDP. Cette analyse renforce alors l'idée que le modèle Picard-CP présente une criticalité proche mais différente du fait de sa symétrie additionnelle, le différenciant ainsi des modèles de depinning à courte portée. Nous proposons alors de considérer ce nouveau comportement critique comme représentant d'une nouvelle classe d'universalité que nous appellerons CDP-0 pour des raisons évidentes.

Une critique pouvant être apposée à cette conclusion est que le modèle Picard-CP peut être sujet à des corrections d'échelle [134]. Ainsi, plus proche du point critique, pour des plus grands systèmes, la spécificité des modes zéro s'effacerait pour laisser place à la criticalité CDP. Si cette objection ne peut jamais être vraiment réfutée, la présence de telles corrections n'a pas pu être mise en évidence sur les données présentées. De plus, un autre indice penchant en faveur de notre interprétation est la visualisation de la répartition de l'activité plastique. Sur la figure 4.12, nous comparons la répartition de plasticité dans le cas du modèle Picard-CP et dans le cas du modèle  $FES^\pm$ . Comme on peut le remarquer, il semblerait qu'à des échelles raisonnables les clusters d'activité présentent des différences. Notamment, la répartition d'activité dans le cas du modèle Picard-CP semble présenter des structures anisotropes, de compacité inférieure, suggérant un effet important des modes zéros. Il est bien sûr toujours possible qu'à plus grande échelle cette structure disparaîtse, mais cet indice s'ajoute au faisceau conduisant à considérer CDP-0 comme une nouvelle classe à part entière.

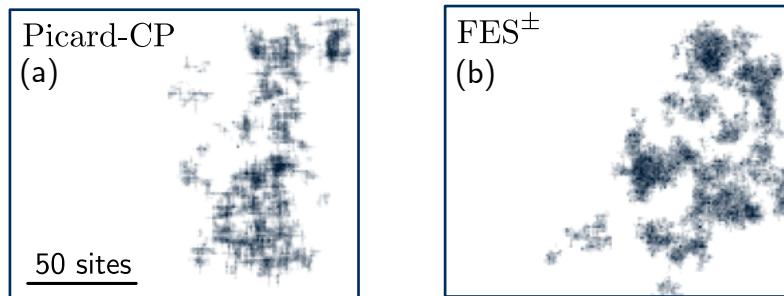


FIGURE 4.12 – Cartes d'activité plastique cumulée au cours d'une simulation pour le modèle Picard-CP (a) et le modèle  $FES^\pm$  (b). Les zones foncées correspondent aux zones de forte activité plastique.

### Une description continue différente

Un dernier argument en la faveur de l'existence d'une telle classe d'universalité se base sur une description en termes de théorie continue des champs. Dans le cas de la classe d'universalité CDP, la quantité conservée  $\rho$  suit une dynamique non diffusive dépendante de la répartition spatiale de l'activité  $A$  dans le système :  $\partial_t \rho = D \Delta A$  (voir chapitre 1). Dans notre système, le champ dynamique conservé est la contrainte  $\sigma$  tandis que l'activité peut être directement associée au taux de déformation plastique  $\partial_t \epsilon_{pl}$ . Une description de type CDP donnerait donc :

$$\partial_t \sigma(\mathbf{r}, t) = D \Delta A(\mathbf{r}, t) \quad (4.21)$$

où l'on a noté  $A(\mathbf{r}, t) = \partial_t \epsilon_{pl}(\mathbf{r}, t)$  pour alléger l'écriture. Cette forme d'évolution du champ de contrainte est en réalité très proche de la règle d'évolution implémentée dans les variations du modèle de Picard étudiées. On a en effet sur la grille discrète en deux dimensions :

$$\partial_t \sigma_{i,j} = \sum_{k,l} G_{k,l} A_{i-k,j-l} \quad (4.22)$$

où l'on a utilisé la notation discrète  $f_{i,j} = f(x = ia, y = ja)$  avec  $(i, j) \in \mathbb{N}^2$  et  $a$  le pas du réseau. On peut alors se demander comment cette équation se traduit dans le cas continu afin d'en inférer une équation de type CDP.

Nous introduisons dans ce but les densités continues de contrainte  $\sigma(x, y)$  et d'activité  $A(x, y)$  associées à leurs homologues discrets  $\sigma_{i,j}$  et  $A_{i,j}$  :

$$A_{i,j} = \left(\frac{a}{L}\right)^2 A(x = i\frac{a}{L}, y = j\frac{a}{L}), \quad \sigma_{i,j} = \left(\frac{a}{L}\right)^2 \sigma(x = i\frac{a}{L}, y = j\frac{a}{L}) \quad (4.23)$$

avec  $L$  la taille du système. Dans la limite  $(a/L) \rightarrow 0$ , les densités continues correspondent aux champs de la théorie dynamique. L'équation d'évolution du modèle peut alors se réécrire selon :

$$\partial_t \sigma(x, y) = \sum_{k,l} G_{k,l} A(x - k\frac{a}{L}, y - l\frac{a}{L}). \quad (4.24)$$

Les propagateurs des deux modèles considérés étant de relative courte portée, la somme se restreint aux petites valeurs des entiers  $k$  et  $l$ . Il est alors naturel de développer la densité continue d'activité autour de  $(x, y)$  :

$$A(x - k\frac{a}{L}, y - l\frac{a}{L}) = \sum_{n,m=0}^{\infty} (-1)^{n+m} \left(\frac{a}{L}\right)^{n+m} \frac{k^n l^m}{n! m!} \partial_x^n \partial_y^m A(x, y). \quad (4.25)$$

De plus, dans le cas du modèle Picard-CP, le propagateur  $G$  présente une symétrie  $C_4$  et des modes zéros. De ce fait, seuls les termes correspondant à des puissances  $n$  et  $m$  paires et strictement positives survivent à la convolution discrète. On obtient alors :

$$\partial_t \sigma(x, y) = \sum_{u,v=1}^{\infty} K_{u,v} \left(\frac{a}{L}\right)^{2(u+v)} \partial_x^{2u} \partial_y^{2v} A(x, y), \quad K_{u,v} = \sum_{k,l} G_{k,l} \frac{k^{2u} l^{2v}}{(2u)!(2v)!} \quad (4.26)$$

Pour obtenir une description de champ de type CDP, on s'intéresse à la limite continue de grande échelle où  $a/L \rightarrow 0$ . Dans ce cas, le terme dominant est le premier de la somme et on a alors :

$$\partial_t \sigma(x, y) = \left(\frac{a}{L}\right)^4 K \partial_x^2 \partial_y^2 A(x, y), \quad K \equiv K_{1,1} \quad (4.27)$$

En redimensionnant le temps selon  $t' = t(a/L)^4$ , nous obtenons donc finalement pour le modèle Picard-CP :

$$\partial_{t'}\sigma(x, y) = K\partial_x^2\partial_y^2A(x, y). \quad (4.28)$$

Dans le cas du modèle FES $^\pm$ , la contrainte des modes zéros est relâchée et donc les puissances  $n$  et  $m$  nulles survivent aussi à la convolution, à l'exception de  $(n = 0, m = 0)$  qui disparaît par moyenne nulle du propagateur. Dans ce cas la même procédure donne comme équation continue :

$$\partial_t\sigma(x, y) = \left(\frac{a}{L}\right)^2 K'\partial_x^2\partial_y^2A(x, y), \quad K' \equiv K_{1,0} = K_{0,1} \quad (4.29)$$

Et donc en redimensionnant le temps cette fois selon  $t'' = t(a/L)^2$ , nous obtenons :

$$\partial_{t''}\sigma(x, y) = K'\Delta A(x, y). \quad (4.30)$$

Si l'équation inférée du modèle FES $^\pm$  est bien la même que celle de la théorie CDP, celle inférée du modèle Picard-CP est fondamentalement différente. Cette différentiation originiaire des modes zéros est remarquable, mais comprendre comment elle pourrait modifier le comportement critique associé est une tâche difficile. Cela impliquerait l'utilisation d'outils théoriques que nous ne maîtrisons pas. Néanmoins, cela constitue un indice supplémentaire allant dans la direction de la caractérisation d'une nouvelle classe d'universalité.

L'analyse de ces deux modèles de courte portée permet donc de mettre un évidence l'importance des modes zéros et suggère donc une importance similaire si ce n'est plus grande dans le cas physique, en présence d'interactions à longue portée. Ceux-ci pourraient notamment permettre d'expliquer en partie la différence entre transition vers l'écoulement et depinning à longue portée.

### 4.3.3 Situer la transition vers l'écoulement

La modification brutale de la portée dans le modèle de Picard a permis de mettre en évidence des éléments intéressants. Afin de situer ce modèle ni courte portée ni champ moyen dans une image globale compréhensible, il est nécessaire de s'intéresser au comportement critique dans le cas de portées intermédiaires.

#### 4.3.3.1 Le modèle $\alpha$ -Picard

Pour ce faire, nous généralisons le modèle de Picard à une portée d'interaction arbitraire, i.e.  $G(\mathbf{r}) \sim 1/r^\alpha$ . Pour conserver les propriétés centrales du propagateur classique d'Eshelby (symétrie quadrupolaire, modes zéros) nous définissons cette continuité de propagateurs dans l'espace de Fourier selon :

$$\hat{G}(\mathbf{q}) = -b_\alpha \frac{q_x^2 q_y^2}{q^{6-\alpha}} \quad (4.31)$$

Dans l'espace réel, le calcul détaillé en [sous-sous-section 6.3.1.1](#) donne la forme suivante pour l'interaction :

$$G(r, \theta) = B_\alpha \frac{C_\alpha + \cos 4\theta}{r^\alpha}, \quad B_\alpha = b_\alpha \frac{\alpha \Gamma(\alpha/2 - 2)(\alpha - 2)(\alpha - 4)(2 + \alpha)}{\pi 2^{9-\alpha} \Gamma(3 - \alpha/2)}, \quad C_\alpha = \frac{(\alpha - 2)(4 - \alpha)}{\alpha(2 + \alpha)} \quad (4.32)$$

$b_\alpha$  étant choisi pour que  $G(0) \approx -1$ . Nous appelons ce modèle généralisé  $\alpha$ -Picard. Celui-ci coïncide alors avec le cas classique pour  $\alpha = 2$  ( $b_2 = 4$ ).

#### 4.3.3.2 Implémentation numérique et instabilités

En implémentant naïvement le modèle comme dans les cas précédents, les propagateurs de redistribution obtenus pour  $\alpha > 2$  présentent une très forte instabilité numérique (voir [figure 4.13-\(a\)](#)). En réalité, même si moindre, cette instabilité est déjà visible dans le cas  $\alpha = 2$  comme c'est le cas sur la [figure 4.13-\(b\)](#). Une méthode proposée pour remédier à cette instabilité numérique a été présentée dans [135]. Celle-ci consiste à passer par un raffinement de la discréttisation. En d'autres termes, l'interaction est calculée sur une grille deux fois plus grande, puis le résultat est moyenné afin de gommer l'instabilité (qui a une période de deux sites). Cette technique peu efficace fonctionne mais cache en fait un problème à la racine.

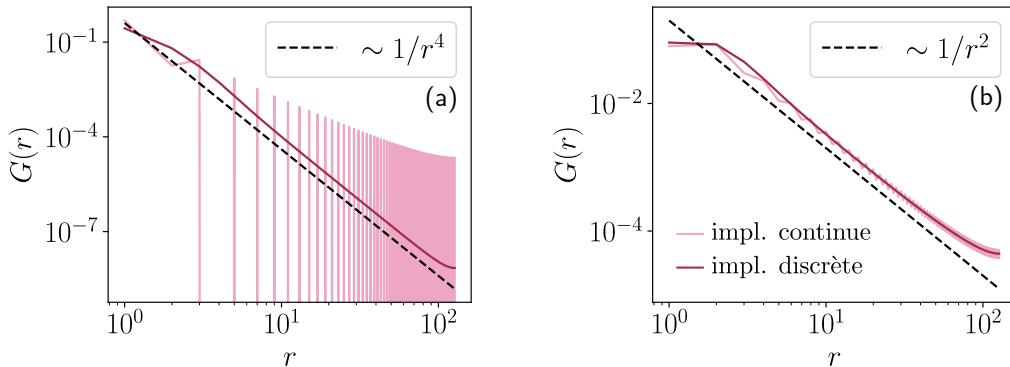


FIGURE 4.13 – Images des propagateurs de redistribution dans le modèle de Picard (a) et le modèle 4-Picard (b). Les figures montrent l'évolution du propagateur le long de la ligne  $y = 0$ .

L'instabilité numérique vient en réalité de l'implémentation du propagateur dans l'espace de Fourier qui est ici discret et non continu. Pour passer de la forme continue souhaitée à la forme discrète à implémenter, il faut en fait réinterpréter les nombres d'onde selon :

$$q_x^2 = 2 - 2 \cos^2 \left( \frac{2\pi}{L} n \right), \quad q_y^2 = 2 - 2 \cos^2 \left( \frac{2\pi}{L} m \right) \quad (4.33)$$

Cette méthode déjà présentée dans la littérature [68, 110] est indispensable pour obtenir des redistributions bien définies à plus courtes portées. Les corrections apportées par cette conversion sont représentées [figure 4.13](#), montrant ainsi que les instabilités peuvent être supprimées de la sorte. Les propagateurs du modèle généralisé seront donc implémentés de cette façon.

### 4.3.3.3 Comportement critique des modèles $\alpha$ -Picard

Nous étudions la généralisation du modèle pour  $\alpha = \{1, 1.5, 3, 4, 5\}$ . Pour chaque portée  $\alpha$ , le point critique et l'exposant  $\beta$  sont déterminés à contrainte imposée. Les données et les résultats issus de ces méthodes sont consignés à la [sous-sous-section 6.3.1.2](#). Il est à noter que la tendance précédemment évoquée est confirmée : plus l'exposant  $\beta$  mesuré est grand, plus la détermination du point critique est fastidieuse.

Sur la [figure 4.14-\(a\)](#), nous représentons l'évolution de  $\langle \dot{\gamma} \rangle$  en fonction de la distance au point critique  $\delta\Sigma$  en échelle logarithmique, pour les différentes portées  $\alpha$ . Nous remarquons alors que plus la portée de l'interaction augmente, plus l'exposant  $\beta$  augmente aussi (pente sur la représentation graphique). Par ailleurs en représentant l'évolution de la variance du taux de cisaillement, nous observons que l'on passe de fluctuations divergentes à l'approche du point critique pour les courtes portées à des fluctuations évanescantes pour les plus longues portées. Afin de mieux visualiser ces évolutions, nous traçons la courbe  $\beta = f(\alpha)$  sur la [figure 4.14-\(b\)](#). Nous remarquons alors une évolution continue de la criticalité allant de celle du modèle Picard-CP à une criticalité fortement convexe avec  $\beta \approx 2$ . Le cas physique  $\alpha = 2$  se situe alors sur cette continuité.

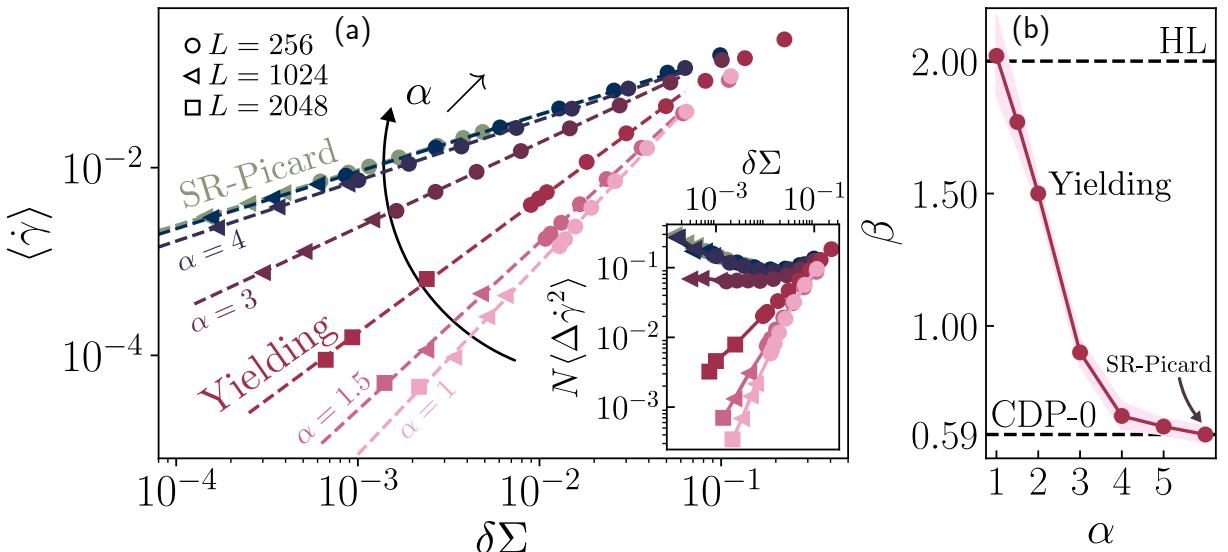


FIGURE 4.14 – (a) Courbes d'écoulement  $\langle \dot{\gamma} \rangle = f(\delta\Sigma)$  pour les modèles  $\alpha$ -Picard  $\alpha = \{5, 4, 3, 2, 1.5, 1\}$  et pour le modèle Picard-CP. (b) Évolution de l'exposant critique  $\beta$  avec l'exposant de portée d'interaction  $\alpha$ .

Plus précisément, nous observons d'abord une région entre  $\alpha = 6$  et  $\alpha = 4$  où l'exposant  $\beta$ , qui varie entre  $\beta \approx 0.59$  et  $\beta \approx 0.68$ , dépend faiblement de la portée. Puis, entre  $\alpha = 4$  et  $\alpha = 1$ , une région où  $\beta$  dépend fortement de  $\alpha$  se déploie. On retrouve alors un caractère concave de la transition pour  $\alpha \gtrsim 3$  et un caractère convexe pour  $\alpha \lesssim 3$ . Il est intéressant de noter que le point autour duquel la transition perd sa concavité semble être le même que celui pour lequel le comportement des fluctuations change ( $\gamma' = 0$ ). Ainsi, si l'évolution du comportement pour  $3 < \alpha < 4$  semble être sensiblement la même que dans le cas du depinning, en-dehors de celle-ci les comportements relevés sont très différents.

#### 4.3.3.4 Description continue

Ces deux régions, d'influence faible puis forte de  $\alpha$  sur  $\beta$ , peuvent être interprétées par un raisonnement analytique simple. Pour cela, nous allons essayer d'inférer, comme à la sous-sous-section 4.3.2.3, la bonne description continue à grande échelle de l'évolution du champ de contrainte en fonction de la portée  $\alpha$ . Pour ce faire, nous repartons de l'équation équation 4.26. Cette fois-ci, avec la forme à longue portée du propagateur que l'on notera  $G^{\text{LR}}$ , la somme dans l'expression de  $K_{u,v}^{\text{LR}}$  ne se restreint plus uniquement aux petites valeurs de  $k$  et  $l$ .

$$K_{u,v}^{\text{LR}} = \sum_{k,l} G_{k,l}^{\text{LR}} \frac{k^{2u} l^{2v}}{(2u)!(2v)!} \quad (4.34)$$

Nous cherchons donc d'abord à évaluer  $K_{u,v}^{\text{LR}}$  pour un propagateur décroissant comme  $1/r^\alpha$ . Pour ce faire, de la même manière que pour la contrainte et l'activité, nous définissons un équivalent continu du propagateur selon :

$$\mathcal{G}\left(\mathbf{r} = \left(k\frac{a}{L}, l\frac{a}{L}\right)\right) = \left(\frac{L}{a}\right)^\alpha G_{LR}(k, l) \quad (4.35)$$

Dans la limite de grande échelle  $a/L \rightarrow 0$ , la somme peut alors être approximée par l'intégrale de Riemann associée :

$$K_{u,v}^{\text{LR}} = \sum_{k,l=1}^{L/a} G_{k,l}^{\text{LR}}(k, l) k^{2u} l^{2v} \rightarrow \left(\frac{L}{a}\right)^{2(1+u+v)-\alpha} \int d\mathbf{r} B_\alpha \frac{C_\alpha + \cos 4\theta}{r^\alpha} x^{2u} y^{2v} \quad (4.36)$$

et donc en intégrant :

$$\begin{aligned} K_{u,v}^{\text{LR}} &= \left(\frac{L}{a}\right)^{2(1+u+v)-\alpha} \int_{-\pi}^{\pi} d\theta B_\alpha (C_\alpha + \cos 4\theta) \cos^2 \theta \sin^2 \theta \times \int_{a/L}^1 dr r^{1-\alpha+2(u+v)} \\ &= \left(\frac{L}{a}\right)^{2(1+u+v)-\alpha} \frac{\pi}{8} B_\alpha (2C_\alpha - 1) \int_{a/L}^1 dr r^{1-\alpha+2(u+v)} \\ &\sim \left[\left(\frac{L}{a}\right)^{2(1+u+v)-\alpha} - 1\right] \end{aligned} \quad (4.37)$$

Finalement, en ajoutant le facteur  $(a/L)^{2(u+v)}$  initialement présent dans l'équation 4.26, chaque terme du développement de l'activité en  $(u, v)$  se comporte comme  $\left(\frac{a}{L}\right)^{\alpha-2} - \left(\frac{a}{L}\right)^{2(u+v)}$ .

Pour  $\alpha \geq 6$ , l'évolution temporelle de la contrainte est donc dominée par le terme  $(u=1, v=1)$  qui évolue comme  $\left(\frac{a}{L}\right)^4$ . Nous arrivons donc à une description équivalente à celle du modèle Picard-CP :

$$\partial_{t'} \sigma(x, y) = \tilde{K} \partial_x^2 \partial_y^2 A(x, y). \quad (4.38)$$

Par contre pour  $\alpha < 6$ , tous les termes de la somme se comportent comme  $\left(\frac{a}{L}\right)^{2-\alpha}$ . Aucun ordre dominant du développement ne se détache et l'on doit donc considérer la somme dans son ensemble. L'évolution temporelle de la contrainte à grande échelle doit donc faire intervenir la convolution complète dans la limite continue et donc le raisonnement précédent ne tient plus.

Pour traiter ce cas et aller un peu plus loin, nous repartons de l'équation générale ([équation 4.24](#)). En utilisant les propriétés de symétrie du propagateur, nous pouvons ré-écrire astucieusement :

$$\begin{aligned} \partial_t \sigma(x, y) = & \sum_{k,l} G_{k,l} \left( A\left(x - k\frac{a}{L}, y - l\frac{a}{L}\right) - A(x, y) \right. \\ & \left. - \left(k\frac{a}{L}\right)^2 \partial_x^2 A(x, y) - \left(l\frac{a}{L}\right)^2 \partial_y^2 A(x, y) - kl\frac{a}{L} \partial_x \partial_y A(x, y) \right) \end{aligned} \quad (4.39)$$

puisqu'aucun des termes ajoutés ne survit à la convolution. Ceci est dû à la symétrie  $C_4$  et à la propriété de modes zéros du propagateur. En prenant la limite continue de grande échelle comme précédemment, on obtient alors :

$$\partial_t \sigma(\mathbf{r}) = \left(\frac{a}{L}\right)^{\alpha-2} \int_{\theta=-\pi}^{\pi} \int_{r=a/L}^1 d\mathbf{r}' \mathcal{G}(\mathbf{r}') \times \left( A(\mathbf{r} - \mathbf{r}') - A(\mathbf{r}) - \frac{1}{2} r'_i r'_j \partial_i \partial_j A(\mathbf{r}) \right) \quad (4.40)$$

Le propagateur de redistribution tombant comme  $\mathcal{G}(\mathbf{r}) \propto r^{-\alpha}$  et étant donné qu'à petits  $\mathbf{r}'$  on a :

$$A(\mathbf{r} - \mathbf{r}') - A(\mathbf{r}) - \frac{1}{2} r'_i r'_j \partial_i \partial_j A(\mathbf{r}) \sim \mathcal{O}(r'^4), \quad (4.41)$$

l'intégrale sur  $r'$  de l'équation [équation 4.40](#) converge à sa borne inférieure seulement si  $\alpha < 6$ . Dans ce cas l'évolution temporelle de la contrainte se comporte comme  $\left(\frac{a}{L}\right)^{\alpha-2}$ . Cependant pour  $\alpha > 6$ , l'intégrale diverge et la description perd sa validité. Dans ce cas, le comportement à grande échelle est celui déterminé précédemment et décrit par [l'équation 4.38](#).

### Comparaison avec le depinning

Pour comprendre l'influence des modes zéros sur cette description, nous pouvons mener la même étude sur un propagateur de type depinning à longue portée, i.e. de symétrie  $C_\infty$ , sans modes zéros. Sans ces derniers, la description comme interaction de courte portée est celle du modèle FES $^\pm$  présentée [équation 4.30](#). La somme de l'[équation 4.34](#) est alors dominée par un terme de courte portée se comportant comme  $\left(\frac{a}{L}\right)^2$  pour  $\alpha > 4$  cette fois. Dans ce cas, la description adéquate est celle de CDP.

Pour le cas  $\alpha < 4$ , la convolution complète doit être considérée car aucun terme du développement ne domine le comportement d'échelle. On a alors :

$$\left(\frac{a}{L}\right)^{\alpha-2} \int_{\theta=-\pi}^{\pi} \int_{r=a/L}^1 d\mathbf{r}' \mathcal{G}(\mathbf{r}') (A(\mathbf{r}-\mathbf{r}') - A(\mathbf{r})) \quad (4.42)$$

qui converge bien uniquement pour  $\alpha < 4$  puisque le terme  $\frac{1}{2}r'_i r'_j \partial_i \partial_j A(\mathbf{r})$  ne peut plus être ajouté librement cette fois dans la convolution. Dans ce cas, l'évolution temporelle de la contrainte se comporte alors comme  $\left(\frac{a}{L}\right)^2$ , exactement de la même manière qu'avec la présence de modes zéros.

#### 4.3.3.5 Paysage global

Ces comportements d'échelle suggèrent donc un paysage en trois régions distinctes :

- Une première région pour  $\alpha > 6$  dont la criticalité est dominée par les interactions à courte portée. La classe supposée décrire ce comportement est alors CDP-0, représentée par le modèle Picard-CP. Une proposition pour l'équation continue à grande échelle associée est :

$$\partial_t \sigma(x, y) = \tilde{K} \partial_x^2 \partial_y^2 A(x, y). \quad (4.43)$$

- Une seconde région  $4 < \alpha < 6$  où les interactions à longue portée démarrent leur influence sur le comportement critique. Cette région est spécifique à la présence de modes zéros. Nous la nommons LP-0. Une proposition pour l'équation continue à grande échelle associée est :

$$\partial_t \sigma = \int d\mathbf{s} \mathcal{G}_\alpha(\mathbf{s}) \left( (A(\mathbf{r}-\mathbf{s}) - A(\mathbf{r})) - \frac{s_\alpha s_\beta}{2} \partial_{\alpha\beta}^2 A(\mathbf{r}, t) \right) \quad (4.44)$$

- Une troisième région  $\alpha < 4$  où la portée de l'interaction maintient son influence sur le comportement critique mais dont la spécificité ne tient plus aux modes zéros. L'analyse d'échelle ne permet en effet pas de différencier de la région homologue associée au depinning à longue portée. Nous la nommons LP. Une proposition pour l'équation continue à grande échelle associée est :

$$\partial_t \sigma = \int d\mathbf{s} \mathcal{G}_\alpha(\mathbf{s}) (A(\mathbf{r}-\mathbf{s}) - A(\mathbf{r})) \quad (4.45)$$

Ce court raisonnement analytique nous permet donc de confirmer la tendance observée numériquement pour l'identification de la région LP-0, où le comportement critique dépend a priori uniquement légèrement de la portée. Toutefois, celui-ci ne permet pas de faire la différence entre une interaction de type depinning et les interactions avec modes zéros du modèle  $\alpha$ -Picard pour  $\alpha < 4$ . Or numériquement, il est clair que cette région est très différente dans les deux cas.

Dans le cas du depinning, la zone de longue portée (nommée Dep-LP sur la figure 4.15) où les exposants dépendent continûment de  $\alpha$  est située entre  $\alpha = 4$  et  $\alpha = 3$ . Ce comportement entre dans le cadre de référence LR-CDP. Pour  $\alpha < 3$ , le comportement critique devient celui du champ moyen avec  $\beta = 1$ .

Pour la transition vers l'écoulement, la zone  $3 < \alpha < 4$  montre une évolution similaire en fonction de  $\alpha$  avec  $\beta$  allant de  $\beta \approx 0.68$  à  $\beta \approx 0.95$ . Pour être conclusif quant à l'équivalence avec le depinning dans cette région, il faudrait étendre notre étude à des portées intermédiaires. Pour  $\alpha < 3$  cependant, le comportement critique ne semble pas avoir atteint celui du champ moyen puisque  $\beta$  continue d'augmenter jusqu'à  $\alpha = 1$ , pour lequel on mesure  $\beta \approx 2$ . Par ailleurs, le modèle de Hébraud-Lequeux, présent pour représenter les modèles élastoplastiques en champ moyen, montre une criticalité de type  $\beta = 2$ . Par analogie avec les comportements de longue portée canoniques, nous suggérons alors que pour  $\alpha < 1$ , le système admet un comportement champ moyen (nommé CM sur la figure 4.15). Cette conjecture pour la limite de champ moyen est partagée par l'étude de Lin et al [83] dont nous discuterons au chapitre suivant.

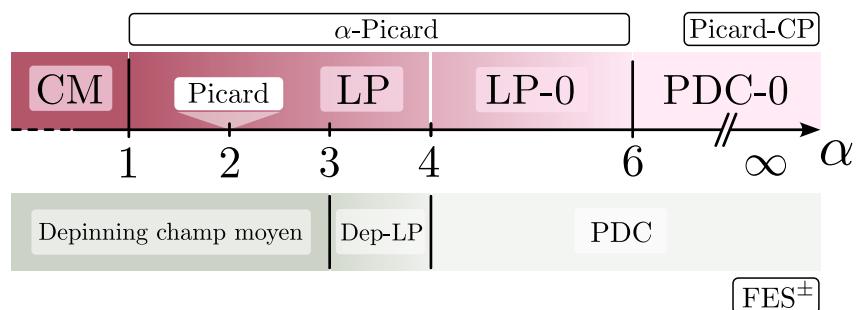


FIGURE 4.15 – Axe supérieur : classification du comportement à grande échelle des modèles d'écoulement en fonction de l'exposant de portée  $\alpha$ . Axe inférieur : représentation équivalente pour les modèles de depinning [136].

In fine, les éléments que nous apportons suggèrent de placer la criticalité des modèles  $\alpha$ -Picard sur un paysage décrit à la figure 4.15. La transition vers l'écoulement, représentée par le modèle de Picard, se situe donc dans une région de longue portée où le comportement critique dépend encore continûment de l'exposant  $\alpha$ . Cette localisation dans une image globale nous permet de mettre en évidence des ingrédients qui jouent un rôle clé dans le phénomène, notamment la présence de mode zéro. Par ailleurs, cette étude suggère que la transition vers l'écoulement en deux dimensions n'est pas un phénomène champ moyen malgré sa longue portée caractéristique. Enfin, la comparaison avec le depinning dont on rapproche souvent cette transition, montre des évolutions profondément différentes. En effet, la zone de longue portée dans le cas de la transition vers l'écoulement est bien plus large ( $1 < \alpha < 6$ ) que dans le cas du depinning ( $3 < \alpha < 4$ ) et la description équivalente à courte portée semble être issue d'une classe d'universalité différente. Si un point ressemblant au champ moyen du depinning semble pouvoir être atteint autour de  $\alpha \approx 3$ , un mécanisme dans la transition vers l'écoulement semble permettre de le dépasser pour faire apparaître un autre champ moyen de type Hébraud-Lequeux.

Il est alors intéressant de voir si les autres propriétés critiques du système suivent cette même évolution caractéristique.

### 4.3.4 Influence de la portée sur les corrélations de contrainte dans l'état stationnaire

Si notre étude statique s'est essentiellement concentrée sur des propriétés très globales du système, nous proposons dans cette partie de nous intéresser à une observable plus structurelle. Plus particulièrement, une propriété intéressante des systèmes analogue à la percolation dirigée conservée est celle d'hyperuniformité, définie au [chapitre 1](#).

#### 4.3.4.1 Hyperuniformité dans les modèles élastoplastiques

Dans les modèles de particules appartenant à la classe CDP, l'hyperuniformité se traduit par une évanescence du facteur de structure  $S(\mathbf{q})$  à petits nombres d'onde :

$$S(\mathbf{q}) \sim q^{\alpha_{\text{HU}}}, \quad 0 < \alpha_{\text{HU}} < 1 \quad (4.46)$$

Dans une théorie continue, le facteur de structure est défini via la densité particulaire  $\rho$  selon :

$$S(\mathbf{q}) = \hat{\rho}(\mathbf{q})\hat{\rho}(-\mathbf{q}) \quad (4.47)$$

Dans le cadre de la transition vers l'écoulement via l'approche élastoplastique, la notion de particules est absente. Il n'est donc pas évident de voir comment cette propriété pourrait se reporter dans ce cas. Une première approche naïve correspond alors à l'analogie opérée lors de l'établissement des équations continues [sous-sous-section 4.3.2.3](#). Dans les modèles élastoplastiques, le champ conservé est le champ de contrainte. Dans les modèles de particules, le champ conservé est la densité de particules. Dans les modèles élastoplastiques, l'activité induit une redistribution de la contrainte : le site actif relaxe sa contrainte et, en moyenne, en ajoute aux autres sites. Dans les modèles de particules, l'activité induit une redistribution de la masse : un site actif perd des particules qui viennent s'ajouter aux autres sites.

Il est alors naturel de penser que la contrainte  $\sigma$  dans le cas des modèles élastoplastiques joue le même rôle que la densité  $\rho$  dans les modèles de particules. Dans ce cas, nous pouvons supposer que pour un modèle élastoplastique tombant dans la classe CDP comme le modèle FES $^\pm$ , nous obtiendrions :

$$S_\sigma(\mathbf{q}) \equiv \hat{\sigma}(\mathbf{q})\hat{\sigma}(-\mathbf{q}) \sim q^{\alpha_{\text{HU, CDP}}} \quad (4.48)$$

$S_\sigma(\mathbf{q})$  n'étant alors rien d'autre que la transformée de Fourier de la fonction de corrélation connectée de contrainte :

$$C_{\sigma\sigma}(\mathbf{r}) = \langle \sigma(\mathbf{r}')\sigma(\mathbf{r}' - \mathbf{r}) \rangle_c \quad (4.49)$$

qui est un objet d'étude bien plus regardé par la communauté des matériaux amorphes [[137–139](#)].

On peut alors se demander si ce comportement évanescence de  $S_\sigma(\mathbf{q})$  à petits nombres d'onde se retrouve aussi dans les modèles élastoplastiques étudiés précédemment.

#### 4.3.4.2 Approche naïve et hydrodynamique fluctuante

Un raisonnement analytique simple permet de conforter l'intuition que les corrélations de contrainte suivent un comportement sans échelle proche de la transition. Celui-ci repose sur le calcul de la fonction  $S_\sigma(\mathbf{q})$  en interprétant la dynamique du système dans le cadre de l'hydrodynamique fluctuante [140].

Pour ce faire, nous considérons les équations de champ CDP modifiées selon :

$$\begin{aligned}\partial_t \sigma(\mathbf{r}, t) &= (\mathcal{G} * A)(\mathbf{r}, t) \\ \partial_t A(\mathbf{r}, t) &= (\kappa \sigma(\mathbf{r}, t) - \varsigma)A(\mathbf{r}, t) - \lambda A^2(\mathbf{r}, t) + D_A \Delta A(\mathbf{r}, t) + \chi \sqrt{A(\mathbf{r}, t)} \eta\end{aligned}\quad (4.50)$$

comme une première possible approximation de la théorie de champ associée à ces modèles. Suivant les méthodes classiques d'hydrodynamique fluctuante, nous linéarisons ces équations en décomposant les champs comme  $A(\mathbf{r}, t) = A_0 + \delta A(\mathbf{r}, t)$  et  $\sigma(\mathbf{r}, t) = \sigma_0 + \delta \sigma(\mathbf{r}, t)$  avec  $\langle \delta A(\mathbf{r}, t) \rangle = \langle \delta \sigma(\mathbf{r}, t) \rangle = 0$ . Après transformées de Fourier spatiale et temporelle des équations, nous obtenons :

$$\langle \delta \hat{\sigma}(\mathbf{q}, \omega) \delta \hat{\sigma}(\mathbf{q}', \omega') \rangle = \frac{\chi^2 A_0 \hat{\mathcal{G}}(\mathbf{q})^2 \delta(\omega + \omega') \delta(\mathbf{q} + \mathbf{q}')}{|\omega^2 + i\omega(\lambda A_0 + D_A q^2) + \kappa A_0 \hat{\mathcal{G}}(\mathbf{q})|^2}. \quad (4.51)$$

Nous intégrons ensuite sur les fréquences  $\omega$  en utilisant le théorème des résidus pour obtenir :

$$S_\sigma(\mathbf{q}) = -\frac{\chi^2 \hat{\mathcal{G}}(\mathbf{q})}{2\kappa(\lambda A_0 + D_A q^2)} \quad (4.52)$$

Dans la limite de grande échelle  $q \rightarrow 0$ , on attend donc :

$$S_\sigma(\mathbf{q}) \sim -\hat{\mathcal{G}}(\mathbf{q}) \quad (4.53)$$

si bien que les corrélations de contrainte sont à l'image du propagateur de redistribution. Ce comportement sur la répartition de contrainte est par ailleurs connu pour les matériaux amorphes au repos [139], où elle prend la forme du propagateur de Eshelby. Dans le cas du modèle  $\alpha$ -Picard, ce raisonnement simple suggère bien une propriété hyperuniforme à courte portée avec  $\hat{\mathcal{G}}(\mathbf{q}) \sim q^4$  dans le modèle Picard-CP, propriété probablement perdue dans le cas physique où l'on a  $\hat{\mathcal{G}}(\mathbf{q}) \sim q^0$  (voir [équation 4.9](#)).

#### 4.3.4.3 Approche par le depinning

Une approche plus rigoureuse permet de pressentir une forme d'hyperuniformité sur la contrainte. Celle-ci se base sur la ressemblance entre les modèles de type depinning et les modèles élastoplastiques. Dans le cas du depinning, il n'y a pas non plus de quantité physiquement évidente pour laquelle on pourrait supposer une propriété d'hyperuniformité. Toutefois, comme nous l'avons mentionné au [chapitre 1](#), le depinning a été mis en équivalence avec la classe CDP. Il est donc a priori possible de déterminer une quantité dans ce système suivant le même comportement que la densité dans les modèles de particules représentés par CDP.

En fournissant une compréhension plus simple de l'équivalence entre les deux phénomènes critiques, K. Wiese [51] a en effet pu faire un parallèle direct entre la densité  $\rho$  dans les modèles de particules et la position de l'interface  $u$  dans les modèles de depinning, qui est :

$$\rho(\mathbf{r}, t) \sim \Delta u(\mathbf{r}, t) + \rho_0 \quad (4.54)$$

dans le cas de courte portée, avec  $\rho_0$  la densité moyenne de particules. Le terme  $\Delta u(\mathbf{r}, t)$  ne représente alors rien d'autre que l'interaction élastique entre les différents points du système. Ainsi, l'équivalent du déplacement dans nos simulations élastoplastiques étant la déformation plastique  $\epsilon_{pl}(\mathbf{r}, t)$ , la quantité équivalente à  $\rho$  dans ce cas serait :

$$\rho(\mathbf{r}, t) \sim (\mathcal{G} * \epsilon_{pl})(\mathbf{r}, t) + \rho_0 \quad (4.55)$$

Donc d'après l'équation 4.8 de la dynamique intégrée on aurait :

$$\rho(\mathbf{r}, t) - \rho_0 \sim \sigma(\mathbf{r}, t) - \Sigma \quad (4.56)$$

ce qui confirme l'intuition initiale.

De cette équivalence, le travail [51] parvient à relier l'exposant d'hyperuniformité  $\alpha_{HU}$  du modèle Manna à l'exposant de rugosité  $\eta$  du depinning avec la relation d'échelle :

$$\alpha_{HU} = 4 - D - 2\eta \quad (4.57)$$

que l'on peut généraliser dans notre cas pour une portée arbitraire  $\alpha$  du propagateur :

$$\alpha_{HU} = 2\alpha - 3D - 2\eta \quad (4.58)$$

Le cas des modèles élastoplastiques est alors très intéressant puisque ceux-ci constituent des modèles dans lequel les deux exposants à la fois ont un sens physique intéressant : répartition de la contrainte pour  $\alpha_{HU}$  et rugosité de l'interface pour  $\eta$ .

#### 4.3.4.4 Résultats numériques

##### Méthode

Afin de sonder les propriétés de répartition de contrainte dans les modèles étudiés, nous nous plaçons, pour chaque modèle, dans un état stationnaire du système proche du point critique ( $\delta\Sigma \ll 1$ ). La fonction  $S_\sigma(\mathbf{q})$  est alors calculée en tout point de l'espace réciproque en prenant la transformée de Fourier du champ de contrainte discret  $\{\sigma_i\}$  après lui avoir soustrait sa valeur moyenne  $\Sigma$ .

Afin d'obtenir une estimation propre de ce pseudo-facteur de structure et ce sur une large gamme de  $\mathbf{q}$ , il est nécessaire de ne pas limiter le calcul à une unique configuration. Pour ce faire, nous réalisons pour une même mesure une centaine de simulations issues de conditions initiales différentes. La mesure finale est alors la moyenne de chaque mesure individuelle. Afin de sonder des valeurs de  $\mathbf{q}$  suffisamment petites, nous choisissons de nous placer à une taille de système suffisamment grande, ici  $L = 1024$ .

### Confirmation de l'analogie via le modèle FES $^\pm$

Nous appliquons tout d'abord cette méthode de mesure au cas du modèle FES $^\pm$ , duquel on attend une criticalité de type CDP, et donc celle du depinning. Pour ce faire, nous nous plaçons à une distance  $\delta\Sigma = 1.5 \times 10^{-4}$  du point critique. Celle-ci constitue la plus petite distance permettant d'atteindre l'état stationnaire en une itération de simulation.

Les résultats obtenus sont alors présentés à la figure 4.16-(a). La carte des valeurs du pseudo-facteur de structure indique bien une évanescence à petits nombres d'onde. Sa structure est par ailleurs légèrement anisotrope, ceci étant probablement dû aux conditions périodiques appliquées. Afin de quantifier plus précisément cette propriété, nous regardons l'évolution de  $S_\sigma(\mathbf{q})$  sur la ligne  $q_x = 0$ . L'évolution obtenue est alors représentée figure 4.16-(b).

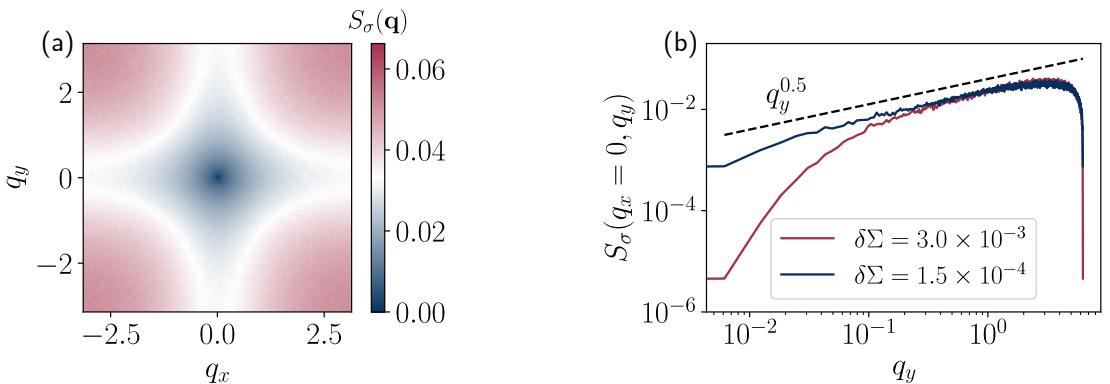


FIGURE 4.16 – Évolution du pseudo-facteur de structure dans le modèle FES $^\pm$ . (a) carte de valeurs du pseudo-facteur de structure dans l'espace réciproque discret. (b) Évolution du pseudo-facteur de structure le long de la ligne  $q_x = 0$ .

Nous observons alors effectivement une évanescence en loi de puissance à petits  $q_y$ , qui semble alors parfaitement compatible avec l'exposant d'hyperuniformité associé à la classe CDP,  $\alpha_{\text{CDP}} = 0.5$ . En effectuant la même mesure légèrement plus loin du point critique pour  $\delta\Sigma = 3.0 \times 10^{-3}$ , un comportement similaire est observé, seulement sur une plage plus restreinte de nombres d'onde. Cela suggère donc qu'au point critique on a bien  $S_\sigma(\mathbf{q}) \sim q^{0.5}$  pour tout  $q \ll 1$ , confirmant ainsi les parallèles entre densité et contrainte présentés précédemment.

Nous pouvons par ailleurs mesurer les corrélations de déplacement dans le matériau afin d'évaluer la rugosité de l'interface. En effet, si l'on note de la même manière  $S_{\epsilon_{\text{pl}}}(\mathbf{q})$  le spectre du déplacement plastique on a alors :

$$S_{\epsilon_{\text{pl}}}(\mathbf{q}) \sim q^{-D-2\eta} \quad (4.59)$$

par définition de l'exposant de rugosité. En appliquant la même méthode que précédemment, nous obtenons les résultats présentés à la figure 4.17. Nous mesurons alors

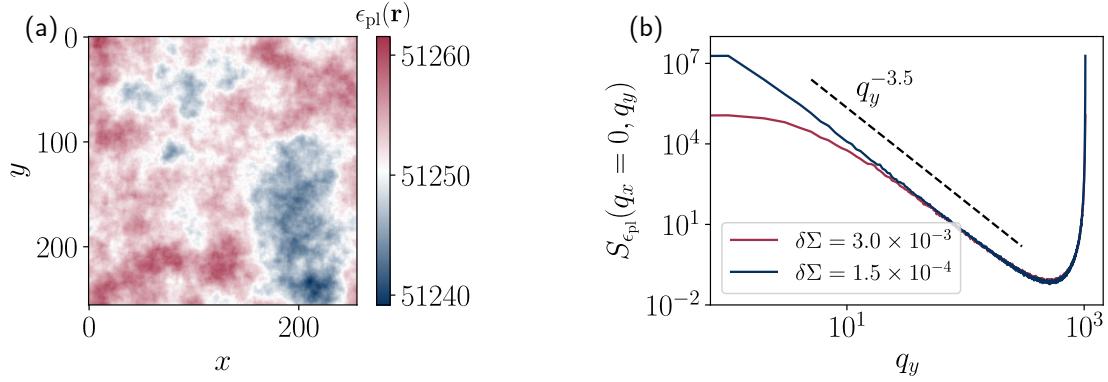


FIGURE 4.17 – Évolution du spectre de déplacement  $S_{\epsilon_{pl}}(\mathbf{q})$  dans le modèle  $\text{FES}^{\pm}$ . (a) carte de valeurs dans l'espace réciproque discret. (b) Évolution le long de la ligne  $q_x = 0$ .

$D + 2\eta \approx 3.5$  soit  $\eta \approx 0.75$ , qui est bien la valeur attendue dans le cas du depinning à courte portée en deux dimensions [141]. Ces mesures de structure semblent donc confirmer l'appartenance du modèle  $\text{FES}^{\pm}$  à la classe CDP. Notons par ailleurs que ces mesures d'hyperuniformité sont bien plus évidentes que dans le cas des modèles de particules. Ceci peut potentiellement s'expliquer par le fait d'une redistribution continue et non discrète dans le cas des modèles élastoplastiques.

### Hyperuniformité dans le modèle $\alpha$ -Picard

Pour comprendre comment cette propriété d'hyperuniformité se compare dans le cas des modèles d'écoulement, nous effectuons la même analyse sur les généralisations du modèle de Picard. Dans le cas du modèle Picard-CP, les résultats obtenus sont présentés à la figure 4.18.

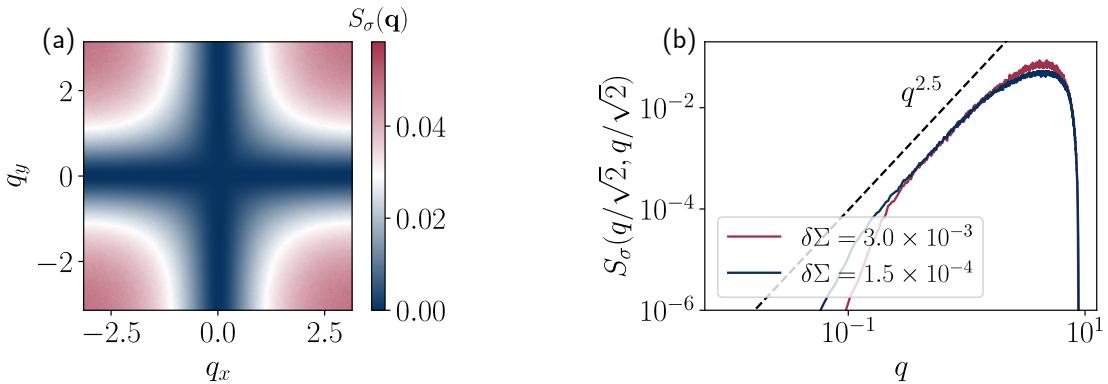


FIGURE 4.18 – Évolution du pseudo-facteur de structure dans le modèle Picard-CP. (a) carte de valeurs du pseudo-facteur de structure dans l'espace réciproque discret. (b) Évolution du pseudo-facteur de structure le long de la diagonale ( $q_x = \frac{q}{\sqrt{2}}, q_y = \frac{q}{\sqrt{2}}$ ).

La carte de valeurs de  $S_\sigma(\mathbf{q})$  montre alors une anisotropie frappante dont les axes de symétrie sont ceux associés aux modes zéros ( $q_x = 0$  et  $q_y = 0$ ). Le pseudo-facteur de structure prend alors des valeurs proches de 0 sur ces axes. Cette propriété d'anisotropie découle en fait trivialement de l'[équation 4.8](#) car dans l'espace de Fourier le champ de contrainte est une multiplication du propagateur et du champ de déplacement. Il semble donc compliqué de réduire cette analyse à un problème monodimensionnel, i.e. en regardant l'évolution de  $S_\sigma(\mathbf{q})$  sur une ligne, puisque chaque choix de direction produira vraisemblablement une évolution différente.

Afin de pouvoir pousser l'analyse tout de même plus loin, nous choisissons de nous intéresser à la direction "orthogonale" à ces axes et donc considérer la diagonale ( $q_x = q/\sqrt{2}, q_y = q/\sqrt{2}$ ). L'évolution le long de cette ligne est représentée [figure 4.18-\(b\)](#). Nous observons alors toujours une évanescence de  $S_\sigma(\mathbf{q})$  mais cette fois-ci bien plus abrupte avec  $\alpha_{HU} \approx 2.5$ . Cette mesure constitue alors un nouvel indice rejoignant la ligne qui suggère de séparer les comportements critiques du modèle Picard-CP et de la classe CDP.

Si l'hyperuniformité semble être fortement affectée par les modes zéros à courte portée, il nous semble intéressant d'observer comment la longue portée, elle, joue un rôle dans cette structure de contraintes. Notamment, si dans le cas classique ces corrélations suivent toujours une loi d'échelle évanescente. Nous réalisons donc ces mêmes mesures pour les modèles  $\alpha$ -Picard avec  $\alpha \geq 2$ . Le pseudo-facteur de structure montre alors une symétrie similaire à celle du modèle Picard-CP, symétrie héritée à nouveau de celle du propagateur. Nous représentons les évolutions du pseudo-facteur de structure sur la ligne diagonale pour les différentes portées  $\alpha$  sur la [figure 4.19](#). Les valeurs estimées des exposants sont alors reportées dans le [tableau 4.2](#).

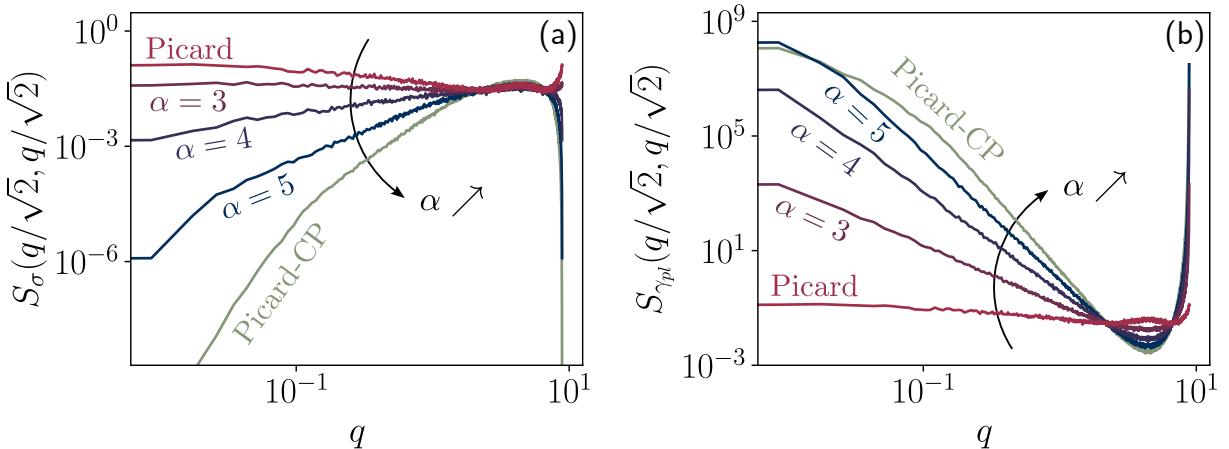


FIGURE 4.19 – Évolution des spectres  $S_\sigma(\mathbf{q})$  (a) et  $S_{epl}(\mathbf{q})$  (b) pour les généralisations du modèle de Picard le long de la diagonale ( $q_x = \frac{q}{\sqrt{2}}, q_y = \frac{q}{\sqrt{2}}$ ).

Nous remarquons alors une évolution a priori continue de l'hyperuniformité de contrainte, avec un caractère évanescient de  $S_\sigma(\mathbf{q})$  perdu autour du point  $\alpha = 3$ . Pour le cas classique du modèle de Picard, il semble donc que la contrainte ne présente pas d'hyperuniformité, comme cela était suggéré par l'approche d'hydrodynamique fluctuante.

$\alpha$	$\alpha_{HU}$	$\eta$
FES $^\pm$	0.5	0.75
Picard-CP	2.5	1.75
5	1.5	1.25
4	0.5	0.75
3	0	0
2 (Picard)	0	-1

TABLE 4.2 – Exposants d’hyperuniformité déterminés dans les modèles  $\alpha$ -Picard, Picard-CP et FES $^\pm$

Si l’on regarde en parallèle l’évolution de  $S_{\epsilon_{pl}}(\mathbf{q})$ , nous observons la tendance inverse. L’exposant de rugosité apparent augmente à mesure que la portée de redistribution diminue. Il passe de  $\eta \approx -1$  pour le modèle de Picard<sup>2</sup> à  $\eta \approx 1.75$  pour le modèle Picard-CP. L’interface perd donc sa rugosité dans le cas classique. Il est par ailleurs intéressant de noter que les modèles Picard-CP et le modèle 5-Picard ont sont décrits par des exposants différents et différents du modèle FES $^\pm$ , suggérant bien une différence marquée par la présence des modes zéros pour  $\alpha > 4$ . De plus pour  $\alpha = 4$ , nous obtenons les exposants de la classe CDP, suggérant le début d’une zone similaire entre les modèles type depinning et type transition vers l’écoulement (nommée LP dans la section précédente).

Cette évolution conjointe de  $\alpha$  et  $\eta$  est bien compatible avec la relation équation 4.58, qui n’est autre qu’une traduction de la règle d’évolution de la contrainte. Plus la répartition de contrainte est hyperuniforme, plus l’interface est rugueuse.

Cette analyse structurelle permet donc d’appuyer le paysage présenté à la section précédente, notamment en confortant une différence entre la classe CDP et la classe CDP-0. Qui plus est, elle permet de clarifier la notion d’hyperuniformité dans les modèles élastoplastiques et son lien direct avec la rugosité de l’interface. Si le comportement champ moyen du depinning est retrouvé autour du point  $\alpha \approx 3$ , celui-ci est encore une fois dépassé pour des plus grandes portées. Nous rappelons que ce point était aussi celui autour duquel la convexité de la transition et le comportement des fluctuations s’inversaient.

## 4.4 Caractérisation dynamique et avalanches

Une dernière façon de caractériser la transition vers l’écoulement par comparaison à la transition de depinning est du point de vue dynamique. C'est-à-dire en analysant les événements avalancheux qui la composent. Dans le cas de la transition vers l’écoulement, même si peu abordée sous le prisme des phénomènes critiques, les avalanches ont été l’objet d’études exhaustives, aussi bien expérimentalement que numériquement [67, 142–146].

2. La valeur négative trouvée ici est simplement extraite de l’étude du spectre. Son interprétation physique en tant qu’exposant de rugosité est peut-être discutable.

## 4.4.1 Avalanches de plasticité

Dans les systèmes de particules étudiés lors des chapitres précédents, les avalanches correspondent à des événements corrélés d'activité proches du point critique, et donc sans échelle. Dans le cas de la transition vers l'écoulement, les avalanches correspondent de manière tout à fait analogue à des événements d'activité proches du point critique, l'activité étant ici assimilée à la plasticité.

### 4.4.1.1 Phénoménologie

#### Dynamique à l'approche du point critique

Reprenons ici le système modèle étudié jusqu'à présent, d'un matériau soumis à un cisaillement simple. Dans le cas où le taux de cisaillement  $\dot{\gamma}$  est imposé, après une période transitoire, la contrainte  $\Sigma$  portée par le matériau fluctue autour de sa valeur moyenne. Pour des forçages relativement grands, cette évolution autour de la valeur moyenne se fait de manière continue (voir [figure 4.20-\(a1\)](#)). Mais à mesure que  $\dot{\gamma}$  tend vers 0, la dynamique du système devient intermittente [8] : la contrainte portée par le système alterne des phases d'augmentation constante et de décroissance brutale. L'évolution de  $\Sigma$  au cours du temps prend alors la forme décrite à la [figure 4.20-\(a2\)](#), analogue à des dents de scie. Ces sauts brutaux dans la contrainte globale portée par le système correspondent aux avalanches de plasticité dans le matériau. En effet, à mesure que  $\dot{\gamma} \rightarrow 0$ , le système s'approche naturellement de son point critique, donnant lieu à des événements de plasticité de plus en plus corrélés, et sans échelle.

#### Observables d'intérêt

De la même manière que dans le cas des systèmes de particules, on peut caractériser ces événements dynamiques par leur taille  $S$  et leur durée  $T$ . Dans le cas des avalanches de plasticité, on définit communément la taille  $S$  d'une avalanche via la chute de contrainte  $\Delta\Sigma$  associée selon :

$$S = \Delta\Sigma \times L^D \quad (4.60)$$

avec  $L^D$  le volume du système afin de rendre cette quantité extensive. D'autre part, la durée d'une avalanche correspond simplement à la durée sur laquelle a lieu cette chute brutale de contrainte.

Ces deux quantités  $S$  et  $T$  suivent alors des distributions de probabilité en loi de puissance :

$$P(S) \sim S^{-\tau} f\left(\frac{S}{S_c}\right), \quad P(T) \sim T^{-\tau'} g\left(\frac{T}{T_c}\right) \quad (4.61)$$

avec  $\tau$  et  $\tau'$  les exposants d'avalanche,  $f$  et  $g$  des fonctions à décroissance rapide, et  $S_c$  et  $T_c$  les cut-offs de taille et de durée du système. Tracées sur une échelle logarithmique, ces distributions de probabilités prennent alors la forme donnée à la [figure 4.20-\(b\)-\(c\)](#).

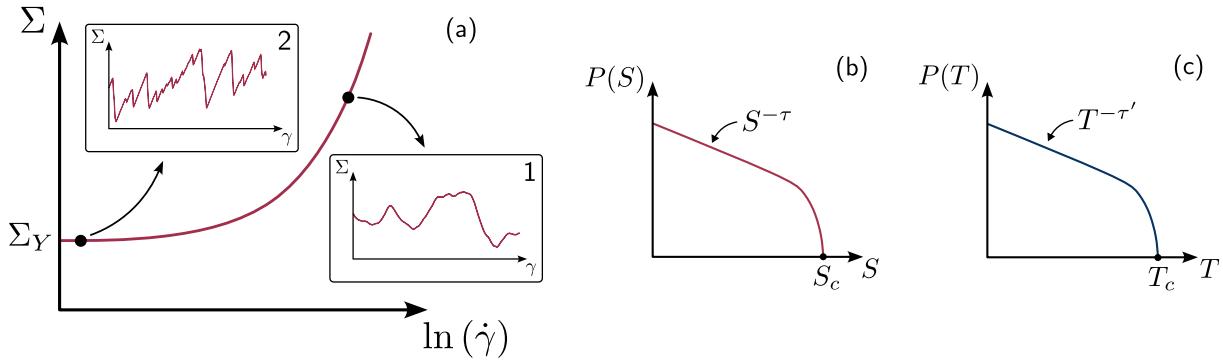


FIGURE 4.20 – Phénoménologie des avalanches de plasticité dans l’écoulement des matériaux amorphes. (a) Évolution de la contrainte avec la déformation globale à différentes distances du point critique. (b)-(c) Formes schématiques des distribution de probabilité de tailles et de durées d’avalanche.

#### 4.4.1.2 L’approche quasistatique comme cadre de référence

Afin d’observer les avalanches de la manière la mieux définie possible, il faut se placer au plus proche du point critique, i.e.  $\dot{\gamma} = 0$ . Une méthode alors naturelle est d’utiliser un protocole quasistatique. La méthode quasistatique revient à utiliser un forçage dont l’échelle caractéristique de temps est très grande devant tout autre temps caractéristique (durée des avalanches, temps de réarrangement, ...). Elle permet alors une séparation d’échelle entre le phénomène de forçage (cisaillement) et de relaxation (avalanches). En pratique, partant d’un état initial élastique en tout point, le système est forcé infinitement lentement jusqu’à ce que le premier réarrangement plastique ait lieu. Le forçage est alors suspendu et on laisse le système relaxer par une suite de réarrangements plastiques : ce sont les avalanches. L’avalanche se poursuit alors jusqu’à ce que le système retourne à un état élastique en tout point, et l’on opère un nouveau forçage jusqu’au déclenchement de la prochaine avalanche. L’évolution de la contrainte portée par le système en fonction de sa déformation prend alors la forme définie figure 4.21.

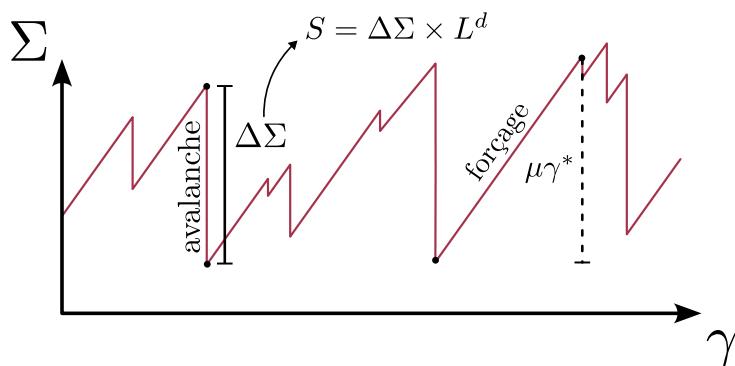


FIGURE 4.21 – Évolution schématique de la contrainte avec la déformation globale dans un protocole quasistatique.

Étant dans ce cas à la valeur critique du paramètre  $\dot{\gamma} = 0^+$ , les cut-offs sur la distribution des tailles et des durées d’avalanche dépendent uniquement de la taille  $L$  du système étudié

selon :

$$S_c \sim L^{d_f}, \quad T_c \sim L^z \quad (4.62)$$

avec  $d_f$  la dimension fractale et  $z$  l'exposant dynamique. Plus  $d_f$  est grand, plus les avalanches sont compactes.

En pratique, ce protocole quasistatique n'est pas rigoureusement applicable en laboratoire. Le compromis à faire est alors de trouver un forçage  $\gamma$  suffisamment faible pour opérer la séparation d'échelle tout en le gardant suffisamment grand pour limiter la durée totale de l'expérience. Dans certaines approches théoriques ou numériques, il est cependant possible de réduire le temps nécessaire aux phases de forçage lent, rendant ainsi ce protocole idéal pour la mesure des avalanches.

#### 4.4.1.3 Résultats dans les différents cadre d'étude

D'un point de vue analytique, comme nous l'avons mentionné à la [sous-sous-section 4.1.3.1](#), la non-positivité du propagateur de redistribution d'Eshelby rend la résolution théorique du problème difficile. Une approche de théorie des champs ne permet donc pas de décrire les avalanches de plasticité dans le cadre de la transition vers l'écoulement. Toutefois, la phénoménologie de ces avalanches étant parfaitement similaire à celle observée dans le cas du depinning, il est usuel d'utiliser les prédictions associées à ce deuxième phénomène comme base de comparaison.

Dans le cas du depinning, les méthodes du groupe de renormalisation sont capables de prédire l'existence d'avalanches et les distributions de probabilité associées [34]. Notamment, ces méthodes permettent la prédiction des valeurs des exposants critiques comme  $\tau$ . Dans la limite de champ moyen, la théorie prédit un exposant pour les tailles d'avalanches  $\tau = 3/2$  [38].

Du côté expérimental, les avalanches de plasticité ont été mesurées dans de nombreux systèmes, à de nombreuses échelles et sous différentes conditions. Ces réalisations cherchent alors rapprocher ou différencier ces avalanches de celles du depinning et notamment des prédictions de champ moyen. Elles ont par exemple été mesurées dans des mousses cisaillées [143], donnant un exposant  $\tau \approx 0.8$ , dans des verres métalliques [142] donnant cette fois  $\tau \approx 1.4 - 1.5$  ou encore dans un milieu granulaire [147] amenant cette fois un comportement compatible avec l'attendu de champ moyen. Dans la plupart des cas, les expériences donnent lieu à des distributions d'avalanches s'étendant sur très peu de décades. Par ailleurs, cette grande variabilité des propriétés statistiques mesurées vient probablement de la précision nécessaire à ces mesures et de la difficulté d'étudier un système parfaitement contrôlé [7]. Afin de qualifier l'universalité de ces avalanches il est alors plus simple de passer par une approche numérique.

Via les approches de type dynamique moléculaire notamment, il est facilement possible de mettre en oeuvre un protocole de cisaillement quasistatique. Par exemple, dans [148], les auteurices ont cisaillé des verres métalliques CuZrAl et CuZr préparés de différentes manières. Sous forçage quasistatique, les tailles d'avalanches suivent une loi de puissance

avec  $\tau \approx 1.16$ . Dans [144], les auteurs ont étudié les avalanches sous cisaillement quasistatique d'un autre verre, et ce pour différents régimes inertIELS. En deux ou trois dimensions, l'étude révèle un exposant  $\tau \approx 1.2 - 1.3$  et donc diffère aussi du cadre champ moyen. Néanmoins, dans le travail [145], les auteurices ont souligné l'importance d'une analyse attentive des distributions d'avalanches. En effet, ces dernières pouvant présenter des bosses au niveau de leur cut-off, la mesure de l'exposant  $\tau$  peut s'en trouver grandement affectée si ignorées. Par une analyse attentive, les auteurices ont alors déduit de leurs résultats une compatibilité avec  $\tau = 3/2$ . Le problème est que ces simulations font intervenir de très nombreux degrés de liberté et sont donc très coûteuses numériquement. Elles ne permettent donc pas de simuler des systèmes de grande taille  $L$  et d'obtenir des distributions précises sur de larges gammes de tailles  $S$ . Pour dépasser ces limites, les modèles mésoscopiques comme les modèles élastoplastiques sont donc des outils de choix.

## Modèles élastoplastiques

Par les simplifications adoptées, l'étude des avalanches dans les modèles élastoplastiques se révèle très efficace. Ainsi, il est tout à fait envisageable d'étudier ces phénomènes dans des systèmes de grande taille. De plus, il est possible dans ce cas d'implémenter exactement le protocole quasistatique de manière astucieuse. En effet, la distance au seuil microscopique local  $\sigma_Y$  étant connue à chaque instant et pour chaque site, il est possible de contourner la phase de forçage infiniment lente par l'ajout direct d'un chargement élastique  $\mu\gamma^*$  uniforme sur tous les sites, de telle manière que le site le plus proche de sa contrainte seuil devienne plastique :

$$\mu\gamma^* = \min(\sigma_{Y,i} - \sigma_i) \quad (4.63)$$

Il est ainsi possible de passer de la fin d'une avalanche au début de la suivante en un unique pas de temps [64]. Cette implémentation, résumée à la figure 4.21 et que nous appellerons AQS pour *athermal quasistatic*, permet de produire des statistiques riches pour les observables  $S$  et  $T$  dans les différents modèles élastoplastiques.

En utilisant une dynamique extrême proche de l'AQS, Talamali et. al [146] ont alors mesuré des avalanches distribuées selon  $\tau \approx 1.25$ , marquant un désaccord avec la théorie champ moyen. Par la suite, Lin et. al [64], Liu et. al [67] et Ferrero et. al [68] ont déterminé précisément les distributions de tailles dans le cadre de l'AQS pour mesurer respectivement  $\tau \approx 1.2$ ,  $\tau \approx 1.28$  et  $\tau \approx 1.33$  en 2D. Ces études s'appuyant toutes sur des modèles différents, un consensus scientifique s'est créé autour d'une valeur universelle  $\tau \approx 1.25 - 1.35$ , marquant une différence avec les avalanches de depinning en champ moyen. Ce consensus se renforce alors par l'extension des mesures à de nouveaux protocoles de déformation [64, 130]. Dans [130] notamment, les avalanches obtenues sous un grand nombre de déformations différentes donnent toutes  $\tau \approx 1.28$ .

Par ailleurs, avec ce protocole d'AQS et les protocoles apparentés, la dimension fractale  $d_f$  associée aux avalanches prend elle aussi une valeur avec de faibles variations, autour de  $d_f \approx 1$  [64, 67, 68]. Ce résultat est central, puisqu'il met en évidence des avalanches de plasticité peu compactes, presque linéaires, à l'image des cartes de plasticité discutées à la figure 4.12 et des bandes de cisaillement observées dans les mêmes systèmes [133]. Ces

événements contrastent alors avec ceux du depinning pour lesquels on mesure une plus grande compacité avec  $d_f \geq D$  [34, 149]. En effet, on a dans le cas du depinning un lien direct entre dimension fractale et exposant de rugosité :  $d_f = D + \eta$ , avec  $\eta = 0$  la valeur limite minimale en champ moyen<sup>3</sup>.

Ces résultats semblent assez robustes et placent les avalanches comme un descripteur possible de criticalité et d'universalité. Toutefois, comme nous l'avons relevé précédemment, la qualification d'un comportement critique peut se jouer sur une détermination très précise des exposants. Afin que notre étude soit conclusive il faut donc prêter une grande attention à nos méthodes et leurs implications, notamment si l'on s'éloigne des protocoles de référence.

### 4.4.2 Avalanches en contrainte imposée

L'analyse que nous faisons de la transition vers l'écoulement se place dans le cadre des transitions de phase absorbantes. Le paramètre de contrôle naturel à fixer est donc la contrainte globale. Afin de préserver notre cadre et de décrire les événements proches du point critique sous la même dynamique, nous choisissons d'étudier les avalanches dans le système à contrainte imposée. Cela contraste avec la plupart des résultats précédemment exposés puisque l'approche quasistatique se fait naturellement à taux de cisaillement imposé.

Cette approche que nous proposons, en plus d'avoir une motivation conceptuelle majeure dans notre cas, peut trouver un intérêt pour la modélisation des systèmes réels. En effet, dans certains cas de dynamique avalancheuse, le paramètre imposé adapté est la contrainte plutôt que le taux de cisaillement, et parfois même un possible mélange des deux.

#### 4.4.2.1 Un problème d'états absorbants

##### Dynamique proche du point critique en taille finie

Pour étudier les avalanches qui composent la dynamique, il est nécessaire de se placer au plus proche du point critique  $\Sigma = \Sigma_c$ . Comme nous l'avons vu précédemment, lorsque que nous imposons au système une contrainte  $\Sigma < \Sigma_c$ , il finit par tomber dans un état absorbant où le matériau est élastique en tout point (i.e. tous les sites sont dans l'état  $n_i = 0$ ). Nous appellerons un tel état un état élastique. La dynamique étant piégée dans cet état élastique, il est impossible de sonder statistiquement les événements constituant l'état stationnaire en-dessous du point critique, et donc les avalanches. Pour un système de taille finie, ce problème s'étend même aux cas  $\Sigma \gtrsim \Sigma_c$ . En effet, par ses fluctuations, le système peut atteindre un état élastique au cours de la dynamique et donc y rester piégé éternellement (voir l'exemple de simulation sur la figure 4.22-(a)).

3. Dans le cas des avalanches mesurées avec le protocole AQS, cette relation semble toujours vérifiée si l'on se base sur les mesures de l'exposant de rugosité dans le modèle de Picard (voir [sous-sous-section 4.3.4.4](#))

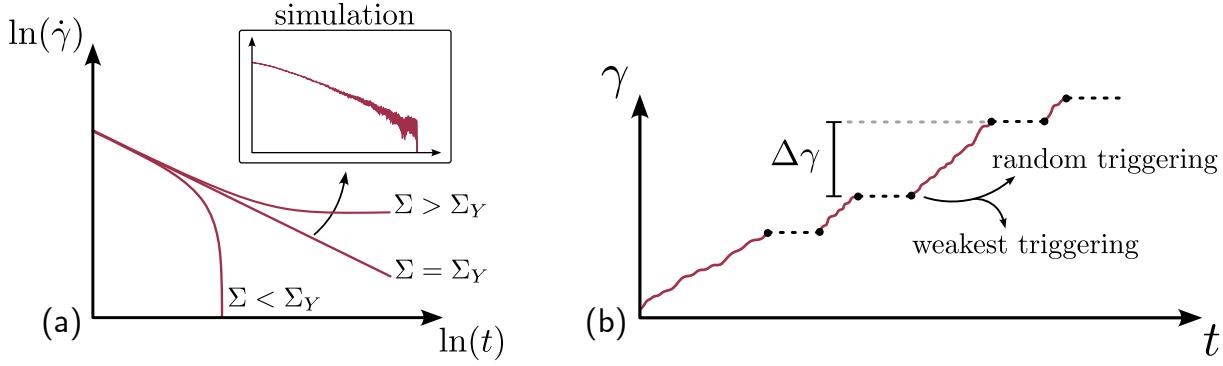


FIGURE 4.22 – Problème posé par l'étude des avalanches à contrainte imposée (a) et résolution par la mise en place de protocoles de réactivation (b).

## Redéfinition des avalanches

Afin de pouvoir étudier les événements proches de la transition à contrainte imposée, il est donc nécessaire de réactiver le système à chaque fois qu'il tombe dans un état élastique. Nous définissons alors les avalanches de plasticité comme les événements d'activité ayant lieu entre deux réactivations du système. Cette redéfinition reste proche de celle présentée précédemment puisque dans le cas quasistatique, une avalanche correspond aussi à un événement entre deux états élastiques, seulement générés différemment.

Il faut cependant réadapter la définition de certaines observables associées comme la taille  $S$  de ces avalanches. En effet, dans ce cas, la contrainte ne varie pas au cours de l'avalanche et la définition  $S = \Delta\Sigma \times L^D$  devient obsolète. Cependant, lors de ces avalanches, la déformation globale du système  $\gamma$  augmente de manière analogue. En notant  $\Delta\gamma$  la différence de déformation entre le début et la fin d'une avalanche, nous proposons de caractériser la taille d'une avalanche par  $S = \Delta\gamma \times L^D$ . Pour éviter toute confusion dans la suite de cette étude, nous noterons  $S_\Sigma$  la taille des avalanches à taux de cisaillement imposé et  $S_\gamma$  celle des avalanches à contrainte imposée.

Un problème majeur cependant est qu'au contraire du cas quasistatique, la réactivation des états élastiques en contrainte imposée n'a pas de forme naturelle. Dans le cas quasistatique, l'état élastique généré après une avalanche est réactivé en effectuant un forçage uniforme sur le système qui augmente sa contrainte globale (quantité  $\mu\gamma^*$  sur la figure 4.21). La contrainte devant être conservée pendant la simulation, cette méthode ne peut pas être appliquée ici.

Il existe alors plusieurs méthodes possibles pour réactiver le système tout en conservant sa contrainte globale. La question est donc de savoir si toutes ces méthodes sont équivalentes et laquelle semble la plus adaptée pour mener notre étude dynamique de la transition. Si des protocoles d’avalanches à contrainte imposée ont déjà été mis en oeuvre, notamment dans les travaux cités précédemment [64, 130], l’influence spécifique du protocole a été mise de côté. Cela laisse à penser que tous seraient équivalents, qu’ils soient à contrainte ou déformation imposée. Notre question pratique se révèle donc d’une seconde utilité : préciser cette zone d’ombre de la littérature.

#### 4.4.2.2 Importance du choix d'un protocole

Dans cette sous-section, nous reprenons les résultats publiés dans [**Article avalanches**]. La publication complète est présentée dans la [sous-section 6.3.2](#) mais ne sera pas complètement discutée ici afin de ne se concentrer que sur les informations essentielles pour notre propos.

#### Protocoles étudiés

Afin de déterminer l'importance du protocole de réactivation dans l'analyse des avalanches à contrainte imposée, nous en étudions deux : le random triggering protocol (RTP) et le weakest triggering protocol (WTP).

Dans le cadre du RTP, le système est soumis à sa contrainte critique  $\Sigma = \Sigma_c$  déterminée dans la [sous-sous-section 4.3.1.1](#). À chaque fois que le système tombe dans un état élastique, nous le réactivons en rendant plastique un site au hasard. Ceci se fait alors en agissant directement sur la variable  $n_i$  et donc sans modification du champ de contrainte  $\{\sigma_i\}$ . Nous notons que ce protocole ressemble fortement à un protocole déjà mentionné dans la littérature [64].

Le WTP ressemble alors fortement à ce premier protocole. Simplement, cette fois ce n'est pas un site aléatoire qui est rendu plastique mais nous choisissons spécifiquement le site le plus proche de sa contrainte seuil, i.e. avec la valeur minimale de  $\sigma_Y - \sigma_i$ . En ce sens, cette réactivation ressemble au protocole AQS. En effet, après un forçage uniforme du système c'est le site le plus proche de son seuil qui devient plastique en premier. De la même façon, un protocole analogue à celui-ci a déjà été décrit dans un précédent travail [64].

Enfin, afin d'avoir un point de comparaison, nous étudions en parallèle le protocole classique de l'AQS. Pour caractériser précisément les avalanches pour chacun de ces protocoles, nous les simulons pour générer dans l'état stationnaire<sup>4</sup> environ  $5 \times 10^5$  avalanches dans un système de taille  $L = 512$ .

#### Comparaisons statistiques

Les distributions de tailles d'avalanche obtenues pour ces trois protocoles sont présentées à la [figure 4.23](#). Comme on peut le remarquer, les distributions prennent alors des formes très différentes selon le protocole. Si les résultats pour l'AQS sont retrouvés avec  $\tau \approx 1.35$ , dans le cadre du RTP l'exposant estimé semble être légèrement plus grand avec  $\tau \approx 1.5$ . Il montre aussi une forme de cut-off différente, faisant apparaître une bosse aux grandes tailles. Par ailleurs, le WTP présente des avalanches largement distribuées mais pas selon une loi de puissance claire, rendant de ce fait impossible l'estimation de  $\tau$ . Nous remarquons par ailleurs que les cut-offs dans le cas des protocoles à contrainte imposée sont bien plus grands que celui dans le cas de l'AQS. Cette première analyse montre donc clairement que les protocoles de génération d'avalanches influent fortement sur les

<sup>4</sup>. L'état stationnaire est considéré atteint lorsque les propriétés statistiques des avalanches sont elles aussi stationnaires

événements générés. Il est donc très important de comparer des approches équivalentes pour conclure sur une comparaison des avalanches dans différents systèmes.

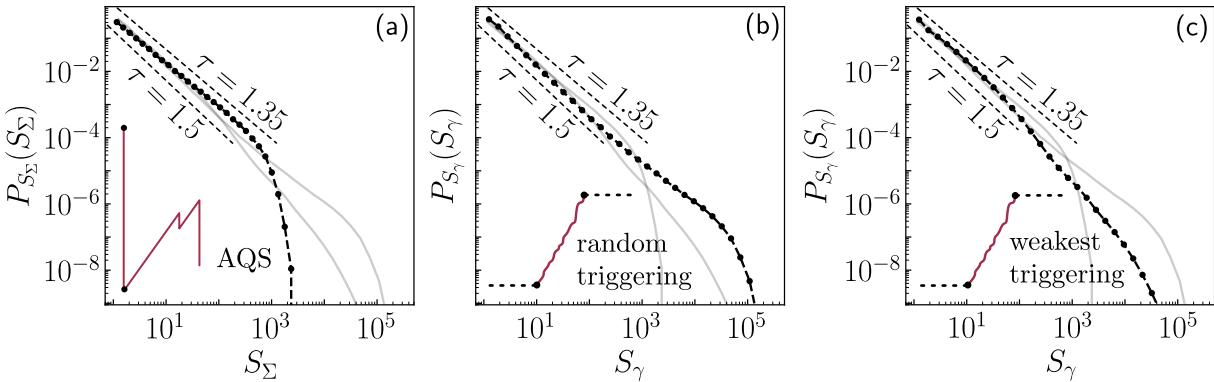


FIGURE 4.23 – Distributions des tailles d’avalanche pour les trois différents protocoles étudiés : (a) AQS, (b) RTP, (c) WTP. Les avalanches sont générées dans un système de taille  $L = 512$ .

Pour comparer plus précisément ces protocoles, nous menons une analyse de taille finie sur les distributions de tailles et de durées d’avalanche qu’ils produisent. D’après les lois d’échelles présentées à l’équation 4.61, en mesurant ces distributions pour différentes tailles de système et en opérant le redimensionnement suivant :

$$S \rightarrow \frac{S}{L^{d_f}}, \quad P(S) \rightarrow \frac{P(S)}{L^{-d_f\tau}}, \quad S \rightarrow \frac{T}{L^z}, \quad P(T) \rightarrow \frac{P(T)}{L^{-z\tau'}} \quad (4.64)$$

les distributions pour différentes tailles se superposent sur une même courbe maîtresse. Ainsi, cela constitue une méthode graphique précise et efficace pour la détermination des exposants  $(\tau, \tau', d_f, z)$ . En suivant cette méthode pour les protocoles AQS et RTP, nous obtenons les résultats présentés à la figure 4.24.

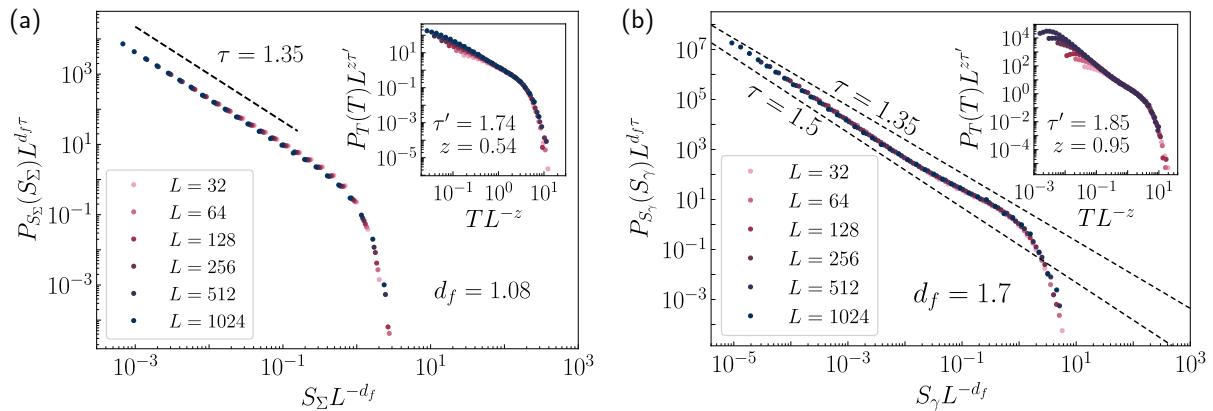


FIGURE 4.24 – Analyse d’échelle de taille finie des distributions de tailles (figures principales) et de durées (insets) d’avalanches pour les protocoles AQS (a) et RTP (b).

La première chose à noter est que la superposition des courbes est remarquable dans les deux cas. La différence d’exposant d’avalanche  $\tau$  est par ailleurs bien confirmée entre

ces deux protocoles avec  $\tau = 1.35$  pour l’AQS et  $\tau = 1.5$  pour le RTP. D’autre part, nous retrouvons approximativement pour l’AQS les valeurs attendues pour la dimension fractale  $d_f \approx 1.1$  et l’exposant dynamique  $z \approx 0.55$  [64, 67]. Pour le RTP cependant, ces exposants de structure sont très différents avec  $d_f \approx 1.7$  et  $z \approx 0.95$ . Ces mesures identifient alors des événements plus longs et surtout plus compacts dans le cas du RTP, bien que l’on ait toujours  $d_f < D$ . D’autre part, dans le cas du WTP, un tel redimensionnement n’est pas réalisable de manière satisfaisante.

Cette caractérisation plus précise confirme alors une différence de nature fondamentale entre les évènements générés par différents protocoles.

#### 4.4.2.3 Le protocole RTP comme protocole naturel

S’il donne lieu à des résultats très différents de l’AQS, le protocole RTP semble tout de même être un protocole à contrainte imposé cohérent et solide. Il est par ailleurs possible de rationaliser les différences mesurées entre ces deux protocoles [**Article avalanches**]. Nous montrons enfin à la [sous-section 6.3.2](#) qu’il répond aux mêmes lois d’échelle que le protocole classique de l’AQS. Ces éléments font donc du RTP un candidat de choix pour l’analyse dynamique de la transition vers l’écoulement à contrainte imposée, de la même façon que l’AQS l’est dans le cas du taux de cisaillement imposé.

Ce choix maintenant évident est en fait plus naturel qu’il n’y paraît. En effet, dans la [sous-sous-section 4.3.1.2](#), nous avons déjà défini le champ d’activation  $h$  comme un équivalent du forçage élastique à contrainte imposée. Or de la même manière que l’AQS correspond à la limite  $\dot{\gamma} \rightarrow 0$ , le RTP correspond à la limite  $h \rightarrow 0$ . Ainsi, même si son interprétation physique est moins directe, le protocole RTP correspond bien en quelque sorte à une limite critique du processus avalancheux en contrainte imposée. C’est donc ce protocole que nous allons utiliser pour caractériser les avalanches dans les généralisations du modèle de Picard présentées précédemment.

### 4.4.3 Influence de la portée sur les avalanches en contrainte imposée

De la même manière que la portée d’interaction modifie les exposants critiques ([sous-sous-section 4.3.3.3](#)) et les propriétés d’hyperuniformité ([sous-sous-section 4.3.4.4](#)), nous proposons d’évaluer son influence sur les propriétés d’avalanches. Notamment, nous déterminons comment évoluent les différents exposants caractérisant ces phénomènes avec la portée  $\alpha$ , afin de voir si les propriétés dynamiques suivent une évolution similaire à celle des autres propriétés critiques.

#### 4.4.3.1 Avalanches dans le modèle $\alpha$ -Picard

##### Méthode

Afin d’étudier les avalanches à contrainte imposée dans le modèle  $\alpha$ -Picard, nous génerons des avalanches en suivant le protocole RTP pour différentes tailles de système et ce pour  $\alpha = \{2, 3, 4, 5\}$ . Nous déterminons alors les différents exposants caractéristiques

par une analyse d'échelle en taille finie comme dans le cas du modèle de Picard (voir sous-sous-section 4.4.2.2).

En plus de la taille et de la durée des avalanches, nous caractérisons leur étendue spatiale  $A$ . Celle-ci correspond en fait à la surface, exprimée en nombre de sites, sur laquelle a pris part l'avalanche. De la même manière que pour les deux autres observables, nous postulons que cette quantité est distribuée selon :

$$P(A) \sim A^{-\tau''} h\left(\frac{A}{A_c}\right), \quad A_c \sim L^\chi \quad (4.65)$$

avec  $h$  une fonction à décroissance rapide et  $A_c$  le cut-off associé. Ce cette façon,  $\chi = D = 2$  signifie que les avalanches occupent au maximum toute la surface du système. Cette quantité permet alors d'offrir une nouvelle caractérisation des avalanches, utile à l'interprétation des résultats qui suit.

### Évolution des exposants

Les redimensionnements effectués pour obtenir la meilleure estimation des exposants sont présentés à la figure 4.25 dans le cas du modèle 3-Picard. Ces mêmes figures sont reportées en annexe pour les autres modèles et nous reportons les exposants déterminés dans le tableau 4.3. Globalement la superposition des courbes est très convaincante dans chacun des cas et pour toutes les distributions. Cela valide alors notre approche à tout  $\alpha$ , notamment l'ansatz de l'équation 4.65. Notons par ailleurs que ces résultats sont des résultats préliminaires non publiés qui nécessitent encore quelques améliorations. Néanmoins, leur état actuel permet d'effectuer certaines observations.

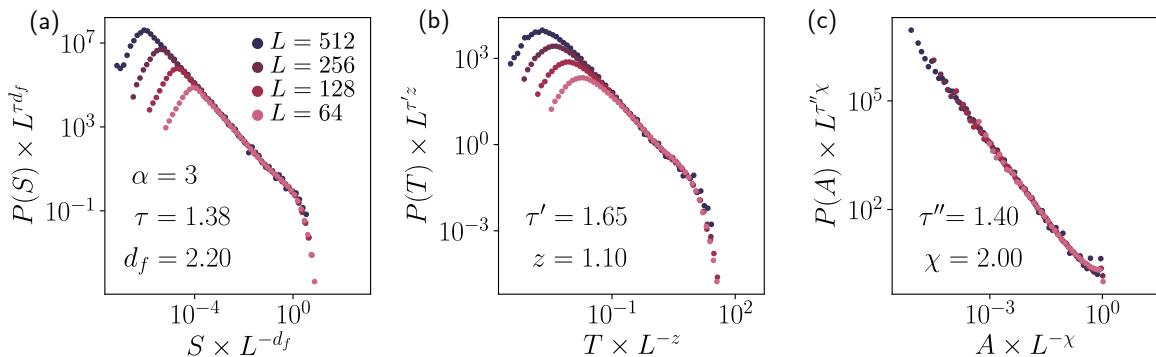


FIGURE 4.25 – Distributions de tailles (a), de durées (b) et de surfaces (c) d'avalanche redimensionnées dans le modèle 3-Picard. Les exposants permettant cette superposition sont reportés dans le tableau 4.3

Nous remarquons d'abord que les exposants  $\tau$ ,  $\tau'$  et  $\tau''$  caractérisant les lois de puissance ont tous tendance à augmenter à mesure que la portée de l'interaction augmente. Par exemple, on passe de  $\tau \approx 1.3$  pour le modèle 5-Picard à  $\tau \approx 1.5$  pour le modèle de Picard. Même si ces tendances sont légères, cela signifie que les avalanches sont de moins en moins largement distribuées à mesure qu' $\alpha$  diminue.

$\alpha$	$\tau$	$\tau'$	$\tau''$	$d_f$	$z$	$\chi$
5	1.3	1.5	1.35	2.8	1.55	2
4	1.3	1.47	1.37	2.8	1.55	2
3	1.38	1.65	1.4	2.2	1.1	2
2 (Picard)	1.50	1.85	1.48	1.7	0.95	1.75

TABLE 4.3 – Exposants d’avalanches déterminés dans les modèles  $\alpha$ -Picard

Par ailleurs, tous les exposants semblent être sensiblement les mêmes pour  $\alpha = 4$  et  $\alpha = 5$ . Cette observation suggère alors que la région LP-0 identifiée précédemment ne correspond qu’à une variation des exposants critiques statiques, laissant les exposants d’avalanche inchangés sur toute la région. Nous remarquons de plus que cette criticalité est exactement la même que celle de la classe CDP d’après les résultats de la section 3.5, avec  $d_f \approx 2.8$  et  $z \approx 1.5$ . À des portées relativement courtes, les modes zéros ne semblent donc pas influencer significativement les avalanches.

Enfin le point le plus intéressant vient de l’évolution de la dimension fractale avec  $\alpha$ , qui passe de  $d_f \approx 2.8$  pour  $\alpha = 5$  à  $d_f \approx 1.7$  pour le modèle de Picard. Nous rappelons par ailleurs que, comme dans le cas des suspensions au ??, cet exposant est à comparer à  $D+1$  pour juger de la compacité des avalanches. On passe donc d’avalanches très compactes à courte portée à des avalanches peu compactes à longue portée dans le modèle de Picard. Une manière plus significative de mettre en évidence ce changement est de regarder la projection de l’avalanche sur l’espace de dimension  $D$ . Dans ce cas là, la quantité d’intérêt est  $A$ , dont le cut-off est caractérisé par l’exposant  $\chi$ . Celui-ci passe alors subitement d’une valeur  $\chi = D = 2$  à  $\chi < 2$  lorsque l’on passe de  $\alpha = 3$  à  $\alpha = 2$ . De plus, pour  $\alpha = 2$  nous mesurons  $d_f \approx \chi$ . En d’autres termes, autour de  $\alpha = 3$  la compacité des avalanches change de telle manière qu’elles n’occupent plus, au maximum, la totalité du système. Les avalanches deviennent alors spatialement fractales. Parallèlement, l’exposant dynamique opère un changement significatif autour de  $\alpha = 3$  où l’on passe de  $z > 1$  à  $z < 1$ .

Comme dans le cas des propriétés critiques statiques et d’hyperuniformité, les avalanches de plasticité ressemblent donc à celles du depinning jusqu’au point  $\alpha = 3$ , qui marque la limite champ moyen de ce dernier. Toutefois, dans le cas de la transition vers l’écoulement, ce point n’est pas une limite puisqu’il est dépassé par l’évolution des exposant pour  $\alpha < 3$ . Dans cette zone de démarcation, la structure des avalanches est alors drastiquement différente avec  $d_f < D$  et  $z < 1$ , propriétés déjà établies par les études précédentes. Cette étude permet alors de faire émerger ces propriétés d’une évolution globale du modèle avec la portée d’interaction  $\alpha$ .

#### 4.4.3.2 Aparté sur les avalanches écrantées

Si le modèle  $\alpha$ -Picard est essentiel pour comprendre les propriétés critiques du cas classique, il ne porte pas vraiment de réalité physique. Dans le chapitre 1, nous avons mis en avant une interaction similaire à l’interaction d’Eshelby mais qui, sous écrantage, voit sa portée modifiée. Notamment, elle décroît dans sa partie écrantée comme  $1/r^4$ , cas étudié ici à contrainte imposée. Un modèle étudiant précisément cette interaction écrantée a été

implémenté et ses avalanches sous cisaillement quasistatiques ont été étudiées. L'étude reléguée à la [sous-sous-section 6.3.3.2](#) montre alors que le système perd sa criticalité dans la zone écrantée. Ceci vient du fait d'une relaxation globale de la contrainte portée uniquement par le site plastique, alors que celle-ci est portée uniformément par tout le système dans le cas du modèle de Picard à taux de cisaillement imposé.

Ainsi, au-delà de la longueur d'écrantage, les avalanches de plasticité disparaissent et ne prennent donc pas la forme de celles du modèle 4-Picard. Cette observation, bien qu'annexe, montre alors que la portée d'interaction n'est pas la seule variable pouvant agir sur les propriétés statistiques des avalanches. Dans des situations physiques réelles, tous les aspects de la dynamique doivent donc être soumis à la plus grande attention pour expliquer ces phénomènes.

## 4.5 Conclusion

En conclusion, par l'implémentation d'un modèle élastoplastique, nous avons caractérisé la transition vers l'écoulement des matériaux amorphes athermiques en opposition à la transition de depinning. La première phase de caractérisation nous a permis de déterminer les exposants critiques associés à cette transition. Celle-ci a alors permis de mettre en évidence son caractère convexe ( $\beta > 1$ ) et le caractère exotique des fluctuations critiques qui se dissipent à l'approche de la transition ( $\gamma' < 0$ ).

Par l'étude de variations sur ce modèle, nous avons mis en évidence deux ingrédients clés faisant la spécificité de cette transition. Tout d'abord, la présence d'une symétrie particulière dans le propagateur de redistribution appelée modes zéros modifie le comportement critique du système, et ce même à courte portée. Enfin, la longue portée inscrite dans ce même propagateur place la transition dans une zone non triviale dont la forme a été esquissée. Celle-ci sépare une classe de courte portée distincte de la percolation dirigée conservée, appelée CDP-0, d'une zone de champ moyen représentée par le modèle de Hébraud-Lequeux. Si ce comportement est plutôt classique, sa spécificité réside dans le fait que la zone de longue portée s'étend sur une gamme de portées  $\alpha$  différente du cas du depinning. De plus, si les exposants critiques sont relativement similaires au cas du depinning pour  $\alpha > 3$ , à partir de  $\alpha = 3$  le comportement critique dépasse la limite de champ moyen CDP jusqu'à  $\alpha < 1$ .

Cette observation générale se retrouve alors dans l'évolution des autres propriétés critiques du système. L'hyperuniformité de la répartition de contrainte est perdue conjointement à la rugosité de l'interface pour  $\alpha \lesssim 3$  alors qu'elles présentent des caractéristiques similaires au depinning pour  $\alpha \gtrsim 3$ . D'autre part, les propriétés des avalanches suivent la même tendance. Si des avalanches compactes sont observées pour  $\alpha \gtrsim 3$ , pour  $\alpha \lesssim 3$  les événements observés sont marqués par une faible compacité avec  $d_f < D$ , caractéristique de la transition vers l'écoulement.

Si ces comportements étaient déjà partiellement observés, cette étude permet de mettre en lumière ce point  $\alpha \approx 3$  autour duquel le phénomène critique change drastiquement de

paradigme par tous ses aspects. Dans la zone de démarcation, passé ce point, la transition semble totalement échapper au cadre de référence LR-CDP. Une toute nouvelle théorie semble alors nécessaire pour la description de la transition vers l'écoulement, différente de toutes les théories de champs connues.



# Chapitre 5

## Discussion

### 5.1 Comparaison des transitions étudiées

#### 5.1.1 Des mécanismes et des transitions similaires

##### 5.1.1.1 Bruit interne et bord absorbant

Faire une analogie des deux systèmes : bruit interne qui amène à une activation. Le contraster avec le cas des modèles de particules LR et le depinning : ici les interactions peuvent approcher comme éloigner de l'activité. Si on pouvait comprendre effectivement le depinning comme un transport, ce n'est pas le cas du yielding, ou du moins pas complètement.

Rapprocher aussi le  $P(x)$  de la fonction de corrélation de paire.

##### 5.1.1.2 Un cadre champ moyen partagé

- Renforcer l'analogie via les modèles champ moyen. Permet aussi de rappeler que dans HL il y a un drift et pas dans les particules (sert pour après)

#### 5.1.2 Une tentative de description commune

##### 5.1.2.1 Une évolution comparable

La plupart des exposants critiques évoluent de la même façon, de CDP à un mean-field convexe. Les exposants d'avalanche évoluent exactement de la même façon aussi. Les changements principaux se font tous aux abords d'un point singulier.

##### 5.1.2.2 Complexité en dimension finie

Section basée sur une figure récapitulative à la fin en terme d'axes  $\alpha$  et de zones, qui compare yielding (qui a advection + diffusion + modes zéros) et suspensions (qui a juste diffusion)

### Des évolutions décalées (zone concave)

Rappel, replacer aussi LR-CDP. Expliquer le décalage du départ de l'augmentation de  $\beta$  entre yielding et suspensions par la présence d'advection dans le yielding. Permet de revenir sur les différences dans l'hyperuniformité entre yielding et suspensions.

### Une histoire de corrélations (zone convexe)

Réconciliation du yielding avec LHL :

- Rappeler les études de Lin et Wyart
- Proposer une explication via les corrélations fortes du propagateur (modes zéros), soutenue par notre modèle EPM discret décorrélé pour lequel on retrouve  $\beta = 1$  à la portée du yielding.
- Parler de la théorie de Ferrero et Jagla qui mesurent l'exposant de Hurst.

#### 5.1.3 De nouvelles interrogations

Question un peu ouvertes, juste des connexions que j'aimerais mentionner pour pas les oublier

- suggérer que avalanches après chargement et avalanches à densité fixée c'est pas évident que ça sera pareil dans les suspensions.
- Remarques sur  $\beta = 1$  qui correspond à  $d_f = D$  et autre.

## 5.2 Equations de champ pour les transitions convexes

### 5.2.1 Motivations et difficultés

Motivation principale c'est pouvoir faire du RG dessus. Difficulté principale c'est qu'on a du mal à voir comment ce mécanisme de diffusion peut-être mis sous cette forme. Comment traduire le bruit vers le bord ?

### 5.2.2 Cadre de travail

Le plus intuitif à tester ça reste de partir des équations LR-CDP. Citer Dornic, mettre l'implémentation en annexe.

### 5.2.3 Tests

partie concise mais pour expliquer notre démarche

#### 5.2.3.1 Théories motivées par le yielding

Exemple d'équations, résultats, difficultés techniques/conceptuels

### 5.2.3.2 Théories motivées par les suspensions

Exemple d'équations, résultats, difficultés techniques/conceptuels

### 5.2.3.3 Approche "intuitive"

Test avec une non-linéarité non-analytique. Test, résultat. Expliquer avec le calcul à la Munoz en annexe.

La conclusion c'est que c'est pas évident.

## 5.3 Notes random

Je prends des notes ici sur les trucs qui me viennent pendant que je rédige les autres chapitres :

- Peut-on toujours dire que les champs conservés sont non-diffusifs ? On sait qu'au niveau théorie de champ ça change bcp de choses que le champ soit diffusif ou non, même si niveau champ moyen ça change rien.. Peut-être que ça vaut le coup d'au moins le mentionner.
- Une différence entre le yielding et les suspensions est que pour les suspensions on démarre l'influence du bruit à partir de de la courte portée. Dans le cas du yielding, le bruit commence à avoir une influence (théorie type LHL) à partir du champ moyen type depinning. C'est notamment sûrement pour ça qu'on n'a pas les mêmes évolutions de l'HU.
- Comparer yielding et depinning pour  $\beta < 1$  serait intéressant, en plus d'être numériquement pas si exigeant.
- si on a bien un scénario du type LR-CDP puis LHL pour le yielding, c'est assez fou que l'évolution soit aussi continue... (après peut-on vraiment voir deux régimes avec si peu de points)
- Même si numériquement ça fonctionne pas du tout, la coïncidence entre  $d = d_f$  et  $\beta$  qui devient plus grand que 1 ou gamma prime plus petit que 0 peut se voir en utilisant le scaling de Lin et Wyart.
- Vu qu'on a attribué la dépendance en protocole au  $P(x)$  selon Jagla, est-ce qu'elle disparaît à courte portée ? Oui.
- A priori si la relation  $d_f = D + \eta$  est valable pour l'AQS on aura aussi un changement de  $d_f$  avec des avalanches type AQS.
- Yielding et suspensions sont différents par le fait que le yielding fait aussi de la redistribution de masse à LP.
- Dans la littérature on dit que pour Manna les avalanches c'est pareil à densité imposée qu'en SOC. Est-ce que c'est vrai aussi en LP canonique ? Probablement vérifiable. Probablement pas vrai en LP médiée ! Dans ce cas là, notre résultats sur les avalanches EPM peut avoir un impact plus grand que celui escompté au départ.

## 5.4 Points de discussion (mais pas à mettre dans la discussion)

- Janseen et al. disent que  $\sigma_c$  est en fait légèrement différent de 2 dans DP, pourquoi ça ne pourrait pas être le cas dans CDP ? Il y a une justification du côté du depinning ? Oui d'après Kay mais j'ai pas compris ce qu'il a dit.

# Conclusion



# Bibliographie

- [1] E. C. Eckstein, D. G. Bailey, and A. H. Shapiro, “Self-diffusion of particles in shear flow of a suspension,” *Journal of Fluid Mechanics*, vol. 79, pp. 191–208, Jan. 1977.
- [2] V. Breedveld, D. van den Ende, R. Jongschaap, and J. Mellema, “Shear-induced diffusion and rheology of noncolloidal suspensions : Time scales and particle displacements,” *The Journal of Chemical Physics*, vol. 114, pp. 5923–5936, Apr. 2001.
- [3] G. Drazer, J. Koplik, B. Khusid, and A. Acrivos, “Microstructure and velocity fluctuations in sheared suspensions,” *Journal of Fluid Mechanics*, vol. 511, pp. 237–263, July 2004.
- [4] S. Maeguchi, K. Ienaga, and S. Okuma, “Critical behavior of density-driven and shear-driven reversible–irreversible transitions in cyclically sheared vortices,” *Scientific Reports*, vol. 11, p. 19280, Sept. 2021. Number : 1 Publisher : Nature Publishing Group.
- [5] D. J. Pine, J. P. Gollub, J. F. Brady, and A. M. Leshansky, “Chaos and threshold for irreversibility in sheared suspensions,” *Nature*, vol. 438, pp. 997–1000, Dec. 2005. Number : 7070 Publisher : Nature Publishing Group.
- [6] L. Corté, P. M. Chaikin, J. P. Gollub, and D. J. Pine, “Random organization in periodically driven systems,” *Nature Physics*, vol. 4, pp. 420–424, May 2008. Publisher : Nature Publishing Group.
- [7] D. Bonn, M. M. Denn, L. Berthier, T. Divoux, and S. Manneville, “Yield stress materials in soft condensed matter,” *Reviews of Modern Physics*, vol. 89, p. 035005, Aug. 2017. Publisher : American Physical Society.
- [8] A. Nicolas, E. E. Ferrero, K. Martens, and J.-L. Barrat, “Deformation and flow of amorphous solids : Insights from elastoplastic models,” *Reviews of Modern Physics*, vol. 90, p. 045006, Dec. 2018. Publisher : American Physical Society.
- [9] B. Dollet and C. Raufaste, “Rheology of aqueous foams,” *Comptes Rendus Physique*, vol. 15, pp. 731–747, Oct. 2014.
- [10] P. C. F. Møller, A. Fall, and D. Bonn, “Origin of apparent viscosity in yield stress fluids below yielding,” *Europhysics Letters*, vol. 87, p. 38004, Aug. 2009.
- [11] H. M. Princen and A. D. Kiss, “Rheology of foams and highly concentrated emulsions : III. Static shear modulus,” *Journal of Colloid and Interface Science*, vol. 112, pp. 427–437, Aug. 1986.

- [12] A.-L. Biance, S. Cohen-Addad, and R. Höhler, “Topological transition dynamics in a strained bubble cluster,” *Soft Matter*, vol. 5, pp. 4672–4679, Nov. 2009. Publisher : The Royal Society of Chemistry.
- [13] G. Picard, A. Ajdari, F. Lequeux, and L. Bocquet, “Elastic consequences of a single plastic event : a step towards the microscopic modeling of the flow of yield stress fluids,” *The European Physical Journal E*, vol. 15, pp. 371–381, Dec. 2004. arXiv :cond-mat/0403647.
- [14] R. Mari, E. Bertin, and C. Nardini, “Absorbing phase transitions in systems with mediated interactions,” *Physical Review E*, vol. 105, p. L032602, Mar. 2022. Publisher : American Physical Society.
- [15] H. Xie, F. Yin, T. Yu, J.-T. Wang, and C. Liang, “Mechanism for direct graphite-to-diamond phase transition,” *Scientific Reports*, vol. 4, p. 5930, Aug. 2014. Publisher : Nature Publishing Group.
- [16] N. Theodorakopoulos, T. Dauxois, and M. Peyrard, “Order of the Phase Transition in Models of DNA Thermal Denaturation,” *Physical Review Letters*, vol. 85, pp. 6–9, July 2000. Publisher : American Physical Society.
- [17] D. J. Bishop, “Study of the superfluid transition in two-dimensional  $\text{He}$  films,” *Physical Review B*, vol. 22, no. 11, pp. 5171–5185, 1980.
- [18] M. Kardar, *Statistical Physics of Fields*. Cambridge : Cambridge University Press, 2007.
- [19] S. Lubeck, “Universal scaling behavior of non-equilibrium phase transitions,” *International Journal of Modern Physics B*, vol. 18, pp. 3977–4118, Dec. 2004. arXiv :cond-mat/0501259.
- [20] H. Hinrichsen, “Non-equilibrium critical phenomena and phase transitions into absorbing states,” *Advances in Physics*, vol. 49, pp. 815–958, Nov. 2000. Publisher : Taylor & Francis \_eprint : <https://doi.org/10.1080/00018730050198152>.
- [21] R. Dickman, “Nonequilibrium phase transitions in epidemics and sandpiles,” *Physica A : Statistical Mechanics and its Applications*, vol. 306, pp. 90–97, Apr. 2002.
- [22] E. V. Albano, “Spreading analysis and finite-size scaling study of the critical behavior of a forest fire model with immune trees,” *Physica A : Statistical Mechanics and its Applications*, vol. 216, pp. 213–226, June 1995.
- [23] H. K. Janssen, “On the nonequilibrium phase transition in reaction-diffusion systems with an absorbing stationary state,” *Zeitschrift für Physik B Condensed Matter*, vol. 42, pp. 151–154, June 1981.
- [24] P. Grassberger, “On phase transitions in Schlögl’s second model,” *Zeitschrift für Physik B Condensed Matter*, vol. 47, pp. 365–374, Dec. 1982. Publisher : Springer ADS Bibcode : 1982ZPhyB..47..365G.
- [25] M. Rossi, R. Pastor-Satorras, and A. Vespignani, “Universality Class of Absorbing Phase Transitions with a Conserved Field,” *Physical Review Letters*, vol. 85, pp. 1803–1806, Aug. 2000. Publisher : American Physical Society.

- [26] S. S. Manna, “Two-state model of self-organized criticality,” *Journal of Physics A : Mathematical and General*, vol. 24, p. L363, Apr. 1991.
- [27] E. Tjhung and L. Berthier, “Criticality and correlated dynamics at the irreversibility transition in periodically driven colloidal suspensions,” *Journal of Statistical Mechanics : Theory and Experiment*, vol. 2016, p. 033501, Mar. 2016. Publisher : IOP Publishing and SISSA.
- [28] F. van Wijland, K. Oerding, and H. J. Hilhorst, “Wilson renormalization of a reaction–diffusion process,” *Physica A : Statistical Mechanics and its Applications*, vol. 251, pp. 179–201, Mar. 1998.
- [29] R. Pastor-Satorras and A. Vespignani, “Reaction-diffusion system with self-organized critical behavior,” *The European Physical Journal B - Condensed Matter and Complex Systems*, vol. 19, pp. 583–587, Feb. 2001.
- [30] R. Pastor-Satorras and A. Vespignani, “Field theory of absorbing phase transitions with a nondiffusive conserved field,” *Physical Review E*, vol. 62, pp. R5875–R5878, Nov. 2000. Publisher : American Physical Society.
- [31] F. van Wijland, “Universality Class of Nonequilibrium Phase Transitions with Infinitely Many Absorbing States,” *Physical Review Letters*, vol. 89, p. 190602, Oct. 2002. Publisher : American Physical Society.
- [32] P. Le Doussal and K. J. Wiese, “Exact Mapping of the Stochastic Field Theory for Manna Sandpiles to Interfaces in Random Media,” *Physical Review Letters*, vol. 114, p. 110601, Mar. 2015. Publisher : American Physical Society.
- [33] D. S. Fisher, “Collective transport in random media : from superconductors to earthquakes,” *Physics Reports*, vol. 301, pp. 113–150, July 1998.
- [34] K. J. Wiese, “Theory and experiments for disordered elastic manifolds, depinning, avalanches, and sandpiles,” *Reports on Progress in Physics*, vol. 85, p. 086502, Aug. 2022. Publisher : IOP Publishing.
- [35] O. Narayan, “Threshold critical dynamics of driven interfaces in random media,” *Physical Review B*, vol. 48, no. 10, pp. 7030–7042, 1993.
- [36] A. Rosso, P. Le Doussal, and K. J. Wiese, “Avalanche-size distribution at the depinning transition : A numerical test of the theory,” *Physical Review B*, vol. 80, p. 144204, Oct. 2009. Publisher : American Physical Society.
- [37] P. Le Doussal, A. A. Middleton, and K. J. Wiese, “Statistics of static avalanches in a random pinning landscape,” *Physical Review E*, vol. 79, p. 050101, May 2009. Publisher : American Physical Society.
- [38] P. Le Doussal, “Size distributions of shocks and static avalanches from the functional renormalization group,” *Physical Review E*, vol. 79, no. 5, 2009.
- [39] C. Le Priol, *Long-range interactions in the avalanches of elastic interfaces*. These de doctorat, Université Paris sciences et lettres, Nov. 2020.
- [40] P. Bak, C. Tang, and K. Wiesenfeld, “Self-organized criticality,” *Physical Review A*, vol. 38, pp. 364–374, July 1988. Publisher : American Physical Society.
- [41] D. L. Turcotte, “Self-organized criticality,” *Reports on Progress in Physics*, vol. 62, p. 1377, Oct. 1999.

- [42] J. F. Joanny and P. G. de Gennes, “A model for contact angle hysteresis,” *The Journal of Chemical Physics*, vol. 81, pp. 552–562, July 1984.
- [43] A. Rosso, *Dépiégeage de variétés élastiques en milieu aléatoire*. thesis, Paris 6, Jan. 2002.
- [44] S. Moulinet, C. Guthmann, and E. Rolley, “Roughness and dynamics of a contact line of a viscous fluid on a disordered substrate,” *The European Physical Journal E*, vol. 8, pp. 437–443, July 2002. Company : Springer Distributor : Springer Institution : Springer Label : Springer Number : 4 Publisher : EDP Sciences.
- [45] P. Le Doussal, K. J. Wiese, S. Moulinet, and E. Rolley, “Height fluctuations of a contact line : A direct measurement of the renormalized disorder correlator,” *Europhysics Letters*, vol. 87, p. 56001, Sept. 2009.
- [46] J. Schmittbuhl and K. J. Måløy, “Direct Observation of a Self-Affine Crack Propagation,” *Physical Review Letters*, vol. 78, pp. 3888–3891, May 1997. Publisher : American Physical Society.
- [47] A. Delaplace, J. Schmittbuhl, and K. J. Måløy, “High resolution description of a crack front in a heterogeneous Plexiglas block,” *Physical Review E*, vol. 60, pp. 1337–1343, Aug. 1999. Publisher : American Physical Society.
- [48] S. Santucci, M. Grob, R. Toussaint, J. Schmittbuhl, A. Hansen, and K. J. Maløy, “Fracture roughness scaling : A case study on planar cracks,” *Europhysics Letters*, vol. 92, p. 44001, Nov. 2010.
- [49] C. Le Priol, J. Chopin, P. Le Doussal, L. Ponson, and A. Rosso, “Universal Scaling of the Velocity Field in Crack Front Propagation,” *Physical Review Letters*, vol. 124, p. 065501, Feb. 2020. Publisher : American Physical Society.
- [50] T. Nattermann, S. Stepanow, L.-H. Tang, and H. Leschhorn, “Dynamics of interface depinning in a disordered medium,” *Journal de Physique II*, vol. 2, pp. 1483–1488, Aug. 1992. Publisher : EDP Sciences.
- [51] K. J. Wiese, “Hyperuniformity in the Manna Model, Conserved Directed Percolation and Depinning,” *Physical Review Letters*, vol. 133, p. 067103, Aug. 2024. Publisher : American Physical Society.
- [52] S. Lübeck, “Moment analysis of the probability distribution of different sandpile models,” *Physical Review E*, vol. 61, no. 1, pp. 204–209, 2000.
- [53] R. Dickman, M. A. Muñoz, A. Vespignani, and S. Zapperi, “Paths to self-organized criticality,” *Brazilian Journal of Physics*, vol. 30, pp. 27–41, Mar. 2000. Publisher : Sociedade Brasileira de Física.
- [54] M. A. Muñoz, R. Dickman, A. Vespignani, and S. Zapperi, “Avalanche and spreading exponents in systems with absorbing states,” *Physical Review E*, vol. 59, pp. 6175–6179, May 1999. Publisher : American Physical Society.
- [55] E. Tjhung and L. Berthier, “Hyperuniform Density Fluctuations and Diverging Dynamic Correlations in Periodically Driven Colloidal Suspensions,” *Physical Review Letters*, vol. 114, p. 148301, Apr. 2015. Publisher : American Physical Society.
- [56] D. Hexner and D. Levine, “Hyperuniformity of Critical Absorbing States,” *Physical Review Letters*, vol. 114, p. 110602, Mar. 2015. Publisher : American Physical Society.

- [57] J. H. Weijs, R. Jeanneret, R. Dreyfus, and D. Bartolo, “Emergent Hyperuniformity in Periodically Driven Emulsions,” *Physical Review Letters*, vol. 115, p. 108301, Sept. 2015. Publisher : American Physical Society.
- [58] S. Kim and S. J. Karrila, *Microhydrodynamics : Principles and Selected Applications*. Butterworth-Heinemann Series in Chemical Engineering, Boston : Butterworth-Heinemann, 1991.
- [59] H. Diamant, “Hydrodynamic interaction in confined geometries,” *Journal of the Physical Society of Japan*, vol. 78, p. 041002, Apr. 2009. arXiv :0812.4971 [cond-mat, physics :physics].
- [60] *Physique et outils mathématiques ; méthodes et exemples - Angel Alastuey, Marc Magro, Pierre Pujol - Edp Sciences - Grand format - Librairie Gallimard Paris*.
- [61] M. Lisicki, “Four approaches to hydrodynamic Green’s functions – the Oseen tensors,” Dec. 2013. arXiv :1312.6231 [physics].
- [62] B. Metzger, “Irreversibility and chaos : Role of long-range hydrodynamic interactions in sheared suspensions,” *Physical Review E*, vol. 82, no. 5, 2010.
- [63] N. K. Agrawal, Z. Ge, M. Trulsson, O. Tammisola, and L. Brandt, “Dense Suspensions in Rotary Shear,” Nov. 2024. arXiv :2411.13463 [cond-mat].
- [64] J. Lin, E. Lerner, A. Rosso, and M. Wyart, “Scaling description of the yielding transition in soft amorphous solids at zero temperature,” *Proceedings of the National Academy of Sciences*, vol. 111, pp. 14382–14387, Oct. 2014. arXiv :1403.6735 [cond-mat].
- [65] E. E. Ferrero and E. A. Jagla, “Elastic interfaces on disordered substrates : From mean-field depinning to yielding,” *Physical Review Letters*, vol. 123, p. 218002, Nov. 2019. arXiv :1905.08771 [cond-mat].
- [66] B. Tyukodi, S. Patinet, S. Roux, and D. Vandembroucq, “From depinning transition to plastic yielding of amorphous media : A soft-modes perspective,” *Physical Review E*, vol. 93, p. 063005, June 2016.
- [67] C. Liu, E. E. Ferrero, F. Puosi, J.-L. Barrat, and K. Martens, “Driving rate dependence of avalanche statistics and shapes at the yielding transition,” *Physical Review Letters*, vol. 116, p. 065501, Feb. 2016. arXiv :1506.08161 [cond-mat].
- [68] E. E. Ferrero and E. A. Jagla, “Criticality in elastoplastic models of amorphous solids with stress-dependent yielding rates,” *Soft Matter*, vol. 15, no. 44, pp. 9041–9055, 2019.
- [69] G. Picard, A. Ajdari, F. Lequeux, and L. Bocquet, “Slow flows of yield stress fluids : complex spatio-temporal behaviour within a simple elasto-plastic model,” *Physical Review E : Statistical, Nonlinear, and Soft Matter Physics*, vol. 71, p. 010501, 2005.
- [70] M. L. Goff, *Flow and dynamics of driven and active amorphous materials : a multi-scale modeling approach*. phdthesis, Université Grenoble Alpes [2020-....], Mar. 2021.
- [71] J. D. Eshelby and R. E. Peierls, “The determination of the elastic field of an ellipsoidal inclusion, and related problems,” *Proceedings of the Royal Society of London. Series A. Mathematical and Physical Sciences*, vol. 241, pp. 376–396, Jan. 1997. Publisher : Royal Society.

- [72] K. W. Desmond and E. R. Weeks, "Measurement of Stress Redistribution in Flowing Emulsions," *Physical Review Letters*, vol. 115, p. 098302, Aug. 2015. Publisher : American Physical Society.
- [73] F. Schott, B. Dollet, S. Santucci, C. M. Schlepütz, C. Claudet, S. Gstöhl, C. Raufaste, and R. Mokso, "Multiscale stress dynamics in sheared liquid foams revealed by tomo-rheoscopy," Nov. 2024.
- [74] K. E. Jensen, D. A. Weitz, and F. Spaepen, "Local shear transformations in deformed and quiescent hard-sphere colloidal glasses," *Physical Review E*, vol. 90, p. 042305, Oct. 2014. Publisher : American Physical Society.
- [75] A. Kabla, "Local Stress Relaxation and Shear Banding in a Dry Foam under Shear," *Physical Review Letters*, vol. 90, no. 25, 2003.
- [76] C. E. Maloney, "Amorphous systems in athermal, quasistatic shear," *Physical Review E*, vol. 74, no. 1, 2006.
- [77] A. Tanguy, F. Leonforte, and J. L. Barrat, "Plastic response of a 2D Lennard-Jones amorphous solid : Detailed analysis of the local rearrangements at very slow strain rate," *The European Physical Journal E*, vol. 20, pp. 355–364, July 2006.
- [78] H. Hinrichsen, "Non-equilibrium Phase Transitions with Long-Range Interactions," *Journal of Statistical Mechanics : Theory and Experiment*, vol. 2007, pp. P07006–P07006, July 2007. arXiv :cond-mat/0702169.
- [79] M. E. Fisher, "Critical Exponents for Long-Range Interactions," *Physical Review Letters*, vol. 29, no. 14, pp. 917–920, 1972.
- [80] A. Chessa, H. E. Stanley, A. Vespignani, and S. Zapperi, "Universality in sandpiles," *Physical Review E*, vol. 59, pp. R12–R15, Jan. 1999. Publisher : American Physical Society.
- [81] A. Chessa, A. Vespignani, and S. Zapperi, "Critical exponents in stochastic sandpile models," *Computer Physics Communications*, vol. 121-122, pp. 299–302, Sept. 1999.
- [82] A. Rosso, "Depinning of elastic manifolds," *Physical Review E*, vol. 67, no. 2, 2003.
- [83] J. Lin and M. Wyart, "Mean-Field Description of Plastic Flow in Amorphous Solids," *Physical Review X*, vol. 6, p. 011005, Jan. 2016. Publisher : American Physical Society.
- [84] H. Hinrichsen and M. Howard, "A model for anomalous directed percolation," *The European Physical Journal B - Condensed Matter and Complex Systems*, vol. 7, pp. 635–643, Feb. 1999.
- [85] T. B. dos Santos, C. I. N. Sampaio Filho, N. A. M. Araújo, C. L. N. Oliveira, and A. A. Moreira, "Crossover from mean-field to 2d $\times$ 2d Directed Percolation in the contact process," *Physica A : Statistical Mechanics and its Applications*, vol. 512, pp. 352–358, Dec. 2018.
- [86] A. Tanguy, M. Gounelle, and S. Roux, "From individual to collective pinning : Effect of long-range elastic interactions," *Physical Review E*, vol. 58, pp. 1577–1590, Aug. 1998.
- [87] A. Rosso, "Roughness at the depinning threshold for a long-range elastic string," *Physical Review E*, vol. 65, no. 2, 2002.

- [88] S. Ramanathan, “Onset of propagation of planar cracks in heterogeneous media,” *Physical Review B*, vol. 58, no. 10, pp. 6026–6046, 1998.
- [89] P. Le Doussal, “Two-loop functional renormalization group theory of the depinning transition,” *Physical Review B*, vol. 66, no. 17, 2002.
- [90] B. Zhao, “Interface pinning of immiscible gravity-exchange flows in porous media,” *Physical Review E*, vol. 87, no. 2, 2013.
- [91] M. J. Alava, “Disorder-induced roughening in the three-dimensional Ising model,” *Physical Review B*, vol. 54, no. 21, pp. 14990–14993, 1996.
- [92] H. Sanhedrai and S. Havlin, “Epidemics on evolving networks with varying degrees,” *New Journal of Physics*, vol. 24, p. 053002, May 2022. Publisher : IOP Publishing.
- [93] M. P. S. Mota, G. A. Alves, A. Macedo-Filho, and T. F. A. Alves, “Critical behavior of SIS model on two-dimensional quasiperiodic tilings,” *Physica A : Statistical Mechanics and its Applications*, vol. 510, pp. 577–586, Nov. 2018.
- [94] B. Nettuno, D. Toffenetti, C. Metzl, L. Weigand, F. Raßhofer, R. Swiderski, and E. Frey, “The role of mobility in epidemics near criticality,” *Journal of Physics A : Mathematical and Theoretical*, vol. 57, p. 405002, Sept. 2024. Publisher : IOP Publishing.
- [95] NVIDIA, P. Vingelmann, and F. H. Fitzek, “Cuda, release : 10.2.89,” 2020.
- [96] L. Devroye, “General Principles in Random Variate Generation,” in *Non-Uniform Random Variate Generation* (L. Devroye, ed.), pp. 27–82, New York, NY : Springer, 1986.
- [97] M. P. Allen and D. J. Tildesley, *Computer Simulation of Liquids*. Oxford University Press, Aug. 2017. Google-Books-ID : WFExDwAAQBAJ.
- [98] S. Torquato, “Local density fluctuations, hyperuniformity, and order metrics,” *Physical Review E*, vol. 68, no. 4, 2003.
- [99] Y. Lei and R. Ni, “Non-equilibrium dynamic hyperuniform states,” *Journal of Physics : Condensed Matter*, vol. 37, p. 023004, Oct. 2024. Publisher : IOP Publishing.
- [100] S. Bub Lee, “Hyperuniformity and absorbing phase transition in continuous media with a conserved field,” *Journal of Statistical Mechanics : Theory and Experiment*, vol. 2019, p. 053201, May 2019. Publisher : IOP Publishing and SISSA.
- [101] D. Hexner and D. Levine, “Noise, Diffusion, and Hyperuniformity,” *Physical Review Letters*, vol. 118, p. 020601, Jan. 2017. Publisher : American Physical Society.
- [102] D. Hexner, P. M. Chaikin, and D. Levine, “Enhanced hyperuniformity from random reorganization,” *Proceedings of the National Academy of Sciences*, vol. 114, pp. 4294–4299, Apr. 2017. Publisher : Proceedings of the National Academy of Sciences.
- [103] Z. Ma, “Hyperuniformity of generalized random organization models,” *Physical Review E*, vol. 99, no. 2, 2019.
- [104] K. Wiese, T. Jocteur, R. Mari, and E. Bertin, “Hyperuniformity in the manna model for long-range toppling,” à paraître.
- [105] “Conversations privées avec k. wiese.”

- [106] Z. Ge and G. J. Elfring, “Rheology of periodically sheared suspensions undergoing reversible-irreversible transition,” *Physical Review E*, vol. 106, p. 054616, Nov. 2022.
- [107] J. S. Guasto, A. S. Ross, and J. P. Gollub, “Hydrodynamic irreversibility in particle suspensions with nonuniform strain,” *Physical Review E*, vol. 81, p. 061401, June 2010. Publisher : American Physical Society.
- [108] S. Farhadi and P. E. Arratia, “Shear-induced reversibility of 2D colloidal suspensions in the presence of minimal thermal noise,” *Soft Matter*, vol. 13, pp. 4278–4284, June 2017. Publisher : The Royal Society of Chemistry.
- [109] M. Abramowitz and I. A. Stegun, eds., *Handbook of Mathematical Functions : with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables*. New York, NY : Dover Publications, 0009-revised edition ed., June 1965.
- [110] S. Rossi, G. Birolì, M. Ozawa, G. Tarjus, and F. Zamponi, “Finite-Disorder Critical Point in the Yielding Transition of Elastoplastic Models,” *Physical Review Letters*, vol. 129, p. 228002, Nov. 2022. Publisher : American Physical Society.
- [111] J. W. Cooley and J. W. Tukey, “An algorithm for the machine calculation of complex Fourier series,” *Mathematics of Computation*, vol. 19, no. 90, pp. 297–301, 1965.
- [112] P. Hebraud and F. Lequeux, “Mode-Coupling Theory for the Pasty Rheology of Soft Glassy Materials,” *Physical Review Letters*, vol. 81, pp. 2934–2937, Oct. 1998. Publisher : American Physical Society.
- [113] J. Lin and M. Wyart, “Microscopic processes controlling the Herschel-Bulkley exponent,” *Physical Review E*, vol. 97, p. 012603, Jan. 2018.
- [114] S. Lübeck, “Universal finite-size scaling behavior and universal dynamical scaling behavior of absorbing phase transitions with a conserved field,” *Physical Review E*, vol. 68, no. 5, 2003.
- [115] A. Vespignani, R. Dickman, M. A. Muñoz, and S. Zapperi, “Absorbing-state phase transitions in fixed-energy sandpiles,” *Physical Review E*, vol. 62, pp. 4564–4582, Oct. 2000. Publisher : American Physical Society.
- [116] W. H. Herschel and R. Bulkley, “Konsistenzmessungen von Gummi-Benzollösungen,” *Kolloid-Zeitschrift*, vol. 39, pp. 291–300, Aug. 1926.
- [117] G. Katgert, A. Latka, M. E. Möbius, and M. van Hecke, “Flow in linearly sheared two-dimensional foams : From bubble to bulk scale,” *Physical Review E*, vol. 79, p. 066318, June 2009. Publisher : American Physical Society.
- [118] L. Becu, S. Manneville, and A. Colin, “Yielding and Flow in Adhesive and Non-adhesive Concentrated Emulsions,” *Physical Review Letters*, vol. 96, p. 138302, Apr. 2006. Publisher : American Physical Society.
- [119] P. Jop, V. Mansard, P. Chaudhuri, L. Bocquet, and A. Colin, “Microscale Rheology of a Soft Glassy Material Close to Yielding,” *Physical Review Letters*, vol. 108, p. 148301, Apr. 2012. Publisher : American Physical Society.
- [120] G. Ovarlez, L. Tocquer, F. Bertrand, and P. Coussot, “Rheopexy and tunable yield stress of carbon black suspensions,” *Soft Matter*, vol. 9, pp. 5540–5549, May 2013. Publisher : The Royal Society of Chemistry.
- [121] R. Besseling, E. R. Weeks, A. B. Schofield, and W. C. K. Poon, “Three-Dimensional Imaging of Colloidal Glasses under Steady Shear,” *Physical Review Letters*, vol. 99, p. 028301, July 2007. Publisher : American Physical Society.

- [122] V. Delbecq, P. Carrez, and P. Cordier, “Rheological properties of Mg<sub>2</sub>SiO<sub>4</sub> glass : A molecular dynamics study,” *Journal of Non-Crystalline Solids*, vol. 619, p. 122572, Nov. 2023.
- [123] C. Fusco, T. Albaret, and A. Tanguy, “Rheological properties vs. local dynamics in model disordered materials at low temperature,” *The European Physical Journal E*, vol. 37, pp. 1–9, May 2014. Company : Springer Distributor : Springer Institution : Springer Label : Springer Number : 5 Publisher : Springer Berlin Heidelberg.
- [124] P. Hebraud and F. Lequeux, “Mode-Coupling Theory for the Pasty Rheology of Soft Glassy Materials,” *Physical Review Letters*, vol. 81, pp. 2934–2937, Oct. 1998.
- [125] J. Olivier, *Fluides vitreux, sutures crano-faciale, diffusion réactive : quelques contributions à l'étude de ces systèmes multi-échelles ou singuliers*. phdthesis, Universite de Grenoble, July 2011.
- [126] E. Bertin, “Stochastic resetting of a population of random walks with resetting-rate-dependent diffusivity,” *Journal of Physics A : Mathematical and Theoretical*, vol. 55, p. 384007, Aug. 2022. Publisher : IOP Publishing.
- [127] E. Agoritsas, E. Bertin, K. Martens, and J.-L. Barrat, “On the relevance of disorder in athermal amorphous materials under shear,” *The European Physical Journal E*, vol. 38, p. 71, July 2015.
- [128] J.-P. Bouchaud, S. Gualdi, M. Tarzia, and F. Zamponi, “Spontaneous instabilities and stick-slip motion in a generalized Hebraud–Lequeux model,” *Soft Matter*, vol. 12, pp. 1230–1237, Jan. 2016. Publisher : The Royal Society of Chemistry.
- [129] D. Pan, A. Inoue, T. Sakurai, and M. W. Chen, “Experimental characterization of shear transformation zones for plastic flow of bulk metallic glasses,” *Proceedings of the National Academy of Sciences*, vol. 105, pp. 14769–14772, Sept. 2008. Publisher : Proceedings of the National Academy of Sciences.
- [130] Z. Budrikis, D. F. Castellanos, S. Sandfeld, M. Zaiser, and S. Zapperi, “Universal features of amorphous plasticity,” *Nature Communications*, vol. 8, p. 15928, July 2017. Number : 1 Publisher : Nature Publishing Group.
- [131] C. Liu, *Critical dynamics at the yielding transition and creep behavior of amorphous systems : mesoscopic modeling*. phdthesis, Universite Grenoble Alpes, Nov. 2016.
- [132] K. Binder, “Finite size scaling analysis of ising model block distribution functions,” *Zeitschrift für Physik B Condensed Matter*, vol. 43, pp. 119–140, June 1981.
- [133] K. Martens, L. Bocquet, and J.-L. Barrat, “Spontaneous formation of permanent shear bands in a mesoscopic model of flowing disordered matter,” *Soft Matter*, vol. 8, pp. 4197–4205, Mar. 2012. Publisher : The Royal Society of Chemistry.
- [134] H. Nishimori, G. Ortiz, H. Nishimori, and G. Ortiz, *Elements of Phase Transitions and Critical Phenomena*. Oxford Graduate Texts, Oxford, New York : Oxford University Press, Oct. 2015.
- [135] A. Nicolas, *Ecoulements des solides amorphes : modelisation elastoplastique et theorie de couplage de modes*. These de doctorat, Grenoble, Oct. 2014.
- [136] X. Cao, S. Bouzat, A. B. Kolton, and A. Rosso, “Localization of soft modes at the depinning transition,” *Physical Review E*, vol. 97, p. 022118, Feb. 2018. Publisher : American Physical Society.

- [137] S. Chowdhury, S. Abraham, T. Hudson, and P. Harrowell, “Long range stress correlations in the inherent structures of liquids at rest,” *The Journal of Chemical Physics*, vol. 144, p. 124508, Mar. 2016.
- [138] M. Maier, A. Zippelius, and M. Fuchs, “Emergence of Long-Ranged Stress Correlations at the Liquid to Glass Transition,” *Physical Review Letters*, vol. 119, p. 265701, Dec. 2017. Publisher : American Physical Society.
- [139] E. Lerner, “Simple argument for emergent anisotropic stress correlations in disordered solids,” *The Journal of Chemical Physics*, vol. 153, p. 216101, Dec. 2020.
- [140] P. M. Chaikin and T. C. Lubensky, *Principles of Condensed Matter Physics*. Cambridge : Cambridge University Press, 1995.
- [141] M. N. Semeikin and K. J. Wiese, “Roughness and critical force for depinning at 3-loop order,” *Physical Review B*, vol. 109, p. 134203, Apr. 2024. Publisher : American Physical Society.
- [142] B. A. Sun, H. B. Yu, W. Jiao, H. Y. Bai, D. Q. Zhao, and W. H. Wang, “Plasticity of Ductile Metallic Glasses : A Self-Organized Critical State,” *Physical Review Letters*, vol. 105, p. 035501, July 2010. Publisher : American Physical Society.
- [143] J. Lauridsen, M. Twardos, and M. Dennin, “Shear-Induced Stress Relaxation in a Two-Dimensional Wet Foam,” *Physical Review Letters*, vol. 89, p. 098303, Aug. 2002. Publisher : American Physical Society.
- [144] K. M. Salerno, “Effect of inertia on sheared disordered solids : Critical scaling of avalanches in two and three dimensions,” *Physical Review E*, vol. 88, no. 6, 2013.
- [145] N. Oyama, H. Mizuno, and A. Ikeda, “Unified view of avalanche criticality in sheared glasses,” *Physical Review E*, vol. 104, p. 015002, July 2021. Publisher : American Physical Society.
- [146] M. Talamali, V. Petäjä, D. Vandembroucq, and S. Roux, “Avalanches, precursors, and finite-size fluctuations in a mesoscopic model of amorphous plasticity,” *Physical Review E*, vol. 84, p. 016115, July 2011. Publisher : American Physical Society.
- [147] D. V. Denisov, K. A. Lörincz, J. T. Uhl, K. A. Dahmen, and P. Schall, “Universality of slip avalanches in flowing granular matter,” *Nature Communications*, vol. 7, p. 10641, Feb. 2016. Publisher : Nature Publishing Group.
- [148] T. Mäkinen, A. D. S. Parmar, S. Bonfanti, and M. J. Alava, “Avalanches in Cu-Zr-Al metallic glasses,” *Physical Review E*, vol. 111, p. 014107, Jan. 2025. Publisher : American Physical Society.
- [149] C. Le Priol, “Spatial Clustering of Depinning Avalanches in Presence of Long-Range Interactions,” *Physical Review Letters*, vol. 126, no. 2, 2021.

# Annexe

## 6.1 Transport à longue portée

### 6.1.1 Mesures d'hyperuniformité dans le modèle LR-Manna

## 6.2 Transition de réversibilité

### 6.2.1 Transformée de Fourier des propagateurs

### 6.2.2 Test de l'approximation scalaire

### 6.2.3 Résolution numérique du modèle $\mu$ -Hébraud-Lequeux

### 6.2.4 Fonctions de corrélation de paire

#### 6.2.4.1 $\alpha$ -ROM en 2D avec sauts infinis des particules actives

#### 6.2.4.2 $\alpha$ -ROM en 2D avec sauts infinis des particules actives

### 6.2.5 Avalanches dans le modèle $\alpha$ -ROM

## 6.3 Transition vers l'écoulement

### 6.3.1 Modèles $\alpha$ -Picard

#### 6.3.1.1 Transformée de Fourier inverse du propagateur

We start from the general result :

$$\mathcal{F}\left(\frac{1}{r^\alpha}\right) = \frac{\pi^{\alpha-d/2} \Gamma((d-\alpha)/2)}{\Gamma(\alpha/2)} \times \frac{1}{|k|^{d-\alpha}} \quad (6.1)$$

with  $d$  the dimension of space ( $k$  is directly the frequency not the pulsation). This result holds if  $0 < \alpha < d$  in the sense of functions but can be extended to any  $\alpha$  in the sense of distributions. This can be rewritten as :

$$\mathcal{F}^{-1} \left( \frac{1}{|k|^\beta} \right) = \frac{\Gamma \left( 1 - \frac{\beta}{2} \right)}{\pi^{1-\beta} \Gamma \left( \frac{\beta}{2} \right)} \times \frac{1}{r^{2-\beta}} \quad (6.2)$$

Then we have :

$$\begin{aligned} (2\pi)^4 \mathcal{F}^{-1} \left( \frac{k_x^2 k_y^2}{|k|^\beta} \right) &= \partial_x^2 \partial_y^2 \mathcal{F}^{-1} \left( \frac{1}{|k|^\beta} \right) \\ &= \frac{\Gamma \left( 1 - \frac{\beta}{2} \right)}{\pi^{1-\beta} \Gamma \left( \frac{\beta}{2} \right)} \partial_x^2 \partial_y^2 \left( \frac{1}{r^{2-\beta}} \right) \end{aligned} \quad (6.3)$$

Computing the derivatives we get :

$$\partial_x^2 \partial_y^2 \left( \frac{1}{r^{2-\beta}} \right) = \frac{1}{r^{10-\beta}} (8 - 6\beta + \beta^2) \times (x^4(\beta - 5) + y^4(\beta - 5) + x^2y^2(38 - 12\beta + \beta^2)) \quad (6.4)$$

using  $r^2 = x^2 + y^2$  and  $(x, y) = (r \cos \theta, r \sin \theta)$  we can simplify this expression :

$$\partial_x^2 \partial_y^2 \left( \frac{1}{r^{2-\beta}} \right) = \frac{1}{r^{6-\beta}} (8 - 6\beta + \beta^2) \times (\beta - 5 + \cos^2 \theta \sin^2 \theta (48 - 14\beta + \beta^2)) \quad (6.5)$$

and using  $\cos^2 \theta \sin^2 \theta = \frac{1}{8}(1 - \cos 4\theta)$  we get :

$$\partial_x^2 \partial_y^2 \left( \frac{1}{r^{2-\beta}} \right) = \frac{1}{8r^{6-\beta}} (8 - 6\beta + \beta^2) \times ((8 - 6\beta + \beta^2) - \cos 4\theta (48 - 14\beta + \beta^2)) \quad (6.6)$$

so factorizing we finally get :

$$(2\pi)^4 \mathcal{F}^{-1} \left( \frac{k_x^2 k_y^2}{|k|^\beta} \right) = \frac{\Gamma \left( 1 - \frac{\beta}{2} \right)}{\pi^{1-\beta} \Gamma \left( \frac{\beta}{2} \right)} \times \frac{(\beta - 4)(\beta - 2)}{8r^{6-\beta}} ((\beta - 4)(\beta - 2) - \cos 4\theta (\beta - 8)(\beta - 6)) \quad (6.7)$$

**Developing around  $\beta = 4$**

Non-negative integers (zero included) being poles of the function  $\Gamma$ ,  $\beta = 4$  must be taken as a limit. For that we use :

$$\Gamma(-n + \epsilon) = \frac{(-1)^n}{n!} \left( \frac{1}{\epsilon} + \mathcal{O}(1) \right) \quad (6.8)$$

then we have for  $\beta = 4 + \epsilon$  :

$$(2\pi)^4 \mathcal{F}^{-1} \left( \frac{k_x^2 k_y^2}{|k|^{4+\epsilon}} \right) = \frac{2/\epsilon}{\pi^{-3-\epsilon/2} \Gamma \left( 2 + \frac{\epsilon}{2} \right)} \times \frac{(\epsilon + 2)\epsilon}{8r^{2-\epsilon}} ((\epsilon + 2)\epsilon - \cos 4\theta (\epsilon - 2)(\epsilon - 4)) \quad (6.9)$$

which tends to :

$$\mathcal{F}^{-1} \left( \frac{-4q_x^2 q_y^2}{|q|^4} \right) = \frac{\cos 4\theta}{\pi r^2} \quad (6.10)$$

### 6.3.1.2 Détermination des points critiques

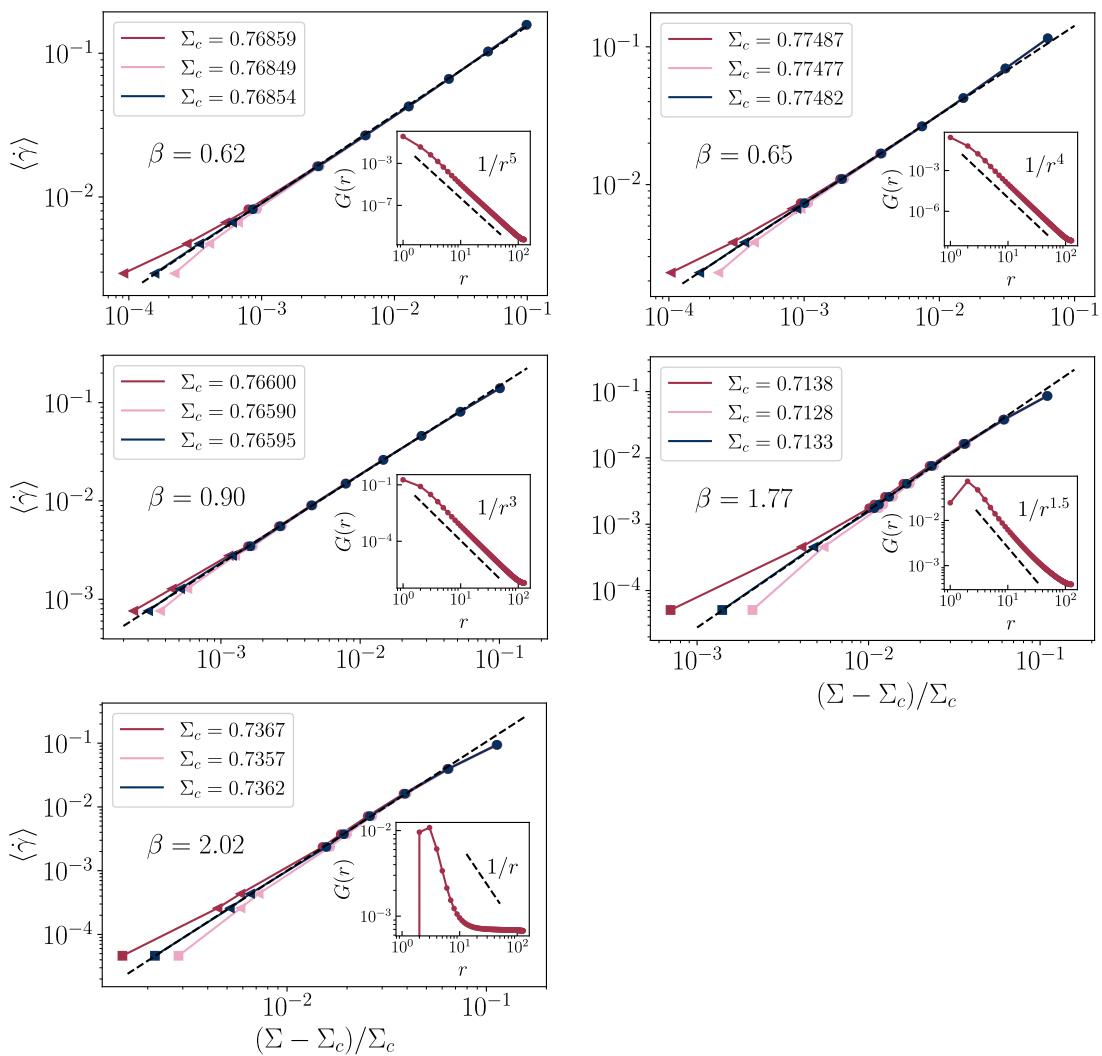


FIGURE 6.5

### 6.3.1.3 Avalanches

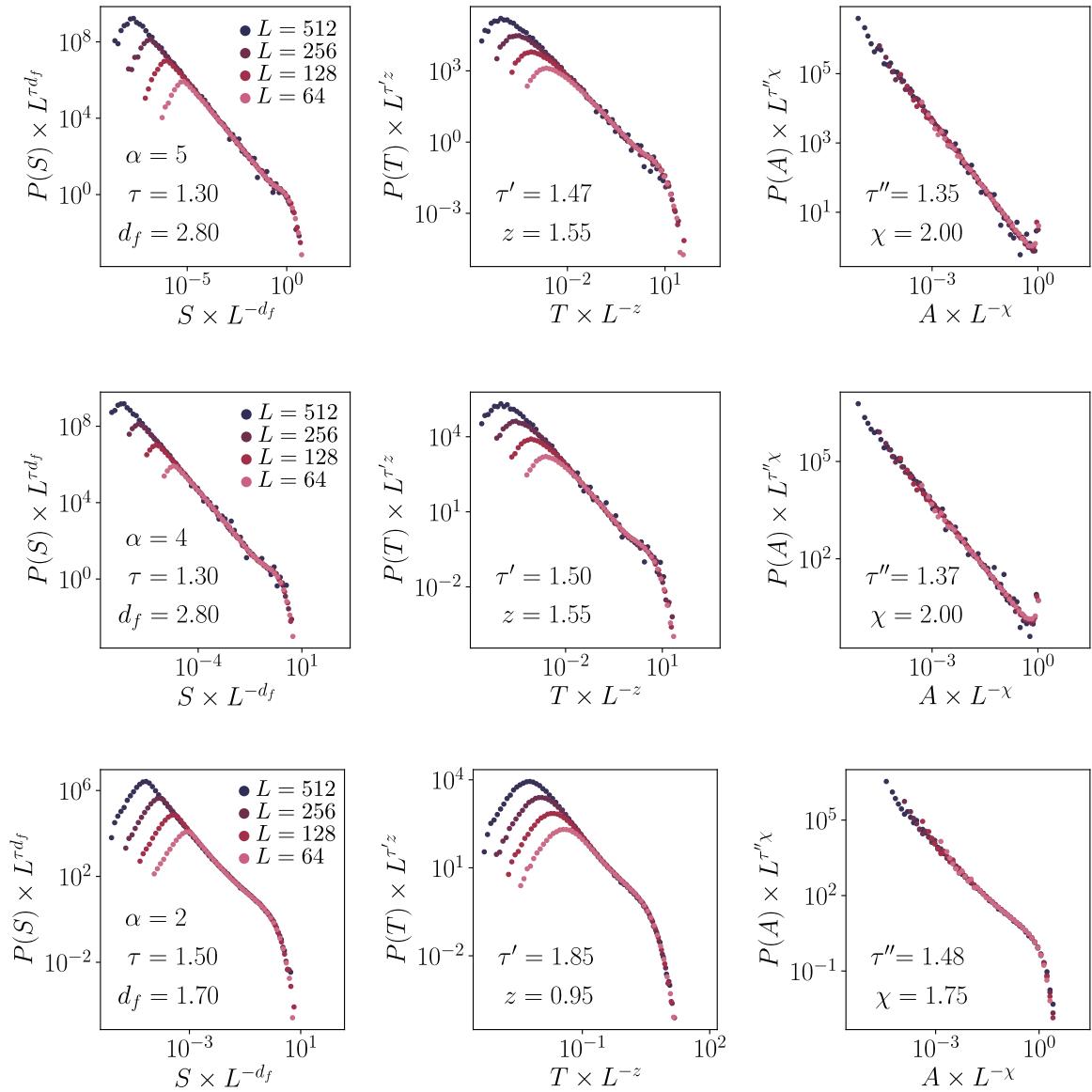


FIGURE 6.6 – Distributions de tailles (a), de durées (b) et de surfaces (c) d’avalanche redimensionnées dans le modèle  $\alpha$ -Picard pour  $\alpha \in \{5, 4, 2\}$ .

### 6.3.2 Dépendance en protocole des avalanches à contrainte imposée dans les modèles élastoplastiques

## Protocol dependence for avalanches under constant stress in elastoplastic models

Tristan Jocteur , Eric Bertin , Romain Mari , and Kirsten Martens

*Univ. Grenoble-Alpes, CNRS, LIPhy, 38000 Grenoble, France*



(Received 9 September 2024; accepted 5 December 2024; published 3 February 2025)

Close to the yielding transition, amorphous solids exhibit a jerky dynamics characterized by plastic avalanches. The statistics of these avalanches have been measured experimentally and numerically using a variety of different triggering protocols, assuming that all of them were equivalent for this purpose. In particular, two main classes of protocols have been studied, deformation under controlled strain or under controlled stress. In this work, we investigate different protocols to generate plasticity avalanches and conduct two-dimensional simulations of an elastoplastic model to examine the protocol dependence of avalanche statistics in yield-stress fluids. We demonstrate that when stress is controlled, the value and even the existence of the exponent governing the probability distribution function of avalanche sizes strongly depend on the protocol chosen to initiate avalanches. This confirms in finite dimension a scenario presented in a previous mean-field analysis. We identify a consistent stress-controlled protocol whose associated avalanches differ from the quasi-static ones in their fractal dimension and dynamical exponent. Remarkably, this protocol also seems to satisfy the scaling relations among exponents previously proposed. Our results underscore the necessity for a cautious interpretation of avalanche universality within elastoplastic models, and more generally within systems where several control parameters exist.

DOI: [10.1103/PhysRevE.111.024101](https://doi.org/10.1103/PhysRevE.111.024101)

### I. INTRODUCTION

In both nature and technical applications, one frequently encounters the phenomenon of intermittent dynamics characterized by scale-free event statistics. Avalanches involve strongly correlated dynamics of complex geometrical objects across scales ranging from atomic to tectonic. Examples include avalanches in magnetic materials [1], superconductors [2], glasses [3], irreversible rearrangements in soft matter systems [4], critical dynamics of imbibition fronts [5] and crack growth [6], and the mechanical responses of granular and porous media [7], wood [8], and geological flows like snow avalanches [9], landslides, and earthquakes [10].

Operating near criticality can be beneficial in certain natural systems, as seen in avalanche dynamics within neural networks [11] and the collective movement of fish schools [12]. However, intermittent dynamics can also pose significant challenges, such as catastrophic events in form of earthquakes or undesired phenomena in engineering applications, such as brittle failure due to plastic avalanches or stick-slip motion of frictional surfaces.

Understanding the complex, nonlinear spatio-temporal responses of these systems and their connections across different scales is essential for accurate physical predictions and the development of reliable geophysical and engineering models. In some cases the scale-free dynamics can be associated with out-of-equilibrium phase transitions, such as the depinning transition [13] and the yielding transition [14]. Key questions in this field revolve around understanding the emergence of universality [15] and the potential for defining various universality classes [14,16,17], which has initiated considerable debate in recent years [18].

While the detailed study of nonuniversal features in avalanche dynamics has not been extensively covered, our work aims to address this gap. Previous studies have explored

the effects of inertia [19,20] and transient dynamics [21], but research on the impact of different protocols for triggering avalanches remains limited.

The theoretical work by Pérez-Reche *et al.* [22] on a random soft spin model demonstrates the possible difference between avalanches occurring in strain- versus stress-controlled protocols. Such a difference has been experienced also in experiments on martensitic materials by Vives *et al.* [23]. Jagla further pointed out that, within a mean-field model for elastoplastic dynamics associated with the yielding transition, one expects an additional dependence on the way avalanches are triggered [24].

In this manuscript we investigate the protocol dependence of avalanche dynamics within a spatially resolved elastoplastic description of the yielding transition. This allows us not only to test existing mean-field predictions, but also to establish a more comprehensive understanding of the spatial complexity made apparent in the fractal dimension of the avalanches occurring under various protocols.

Our manuscript is organized as follows. In Sec. II we introduce the two-dimensional elastoplastic model used for simulations with strain- or stress-controlled dynamics. For stress-imposed dynamics we describe further three different protocols employed to trigger avalanches. We then provide in Sec. III a first comparison of the distributions of avalanche sizes measured numerically for different protocols. In Sec. IV we examine the impact of the avalanche-triggering mechanism and of the choice of control parameter on avalanche size distributions. Then, Sec. V focuses on finite-size effects and on the associated scaling relations. We determine via a finite-size scaling analysis the fractal dimension and dynamical exponents. This section also discusses the validity of a hyperscaling relation between exponents for stress-controlled avalanches.

By systematically studying the impact of different protocols on avalanche dynamics, this work emphasizes the importance of the control parameter and the associated protocol choices in determining avalanche statistics, and provides guiding principles on how to interpret avalanche statistics in the many cases where the “control” parameter is not a matter of choice (e.g., in earthquake dynamics).

## II. MODEL AND AVALANCHE-TRIGGERING PROTOCOLS

### A. Elastoplastic model

To investigate the role of protocols on avalanches distributions in amorphous solids, we perform numerical simulations of an elastoplastic model [25]. The material is spatially discretized in an ensemble of interacting mesoscopic elements, each of them representing a set of a few constitutive elements (bubbles, drops, particles, etc). A mesoscopic element  $i$  can be in two different states, elastic ( $n_i = 0$ ) or plastic ( $n_i = 1$ ). It bears a local strain  $\epsilon_i = \epsilon_i^{\text{pl}} + \epsilon_i^{\text{el}}$ , which is decomposed into a plastic strain  $\epsilon_i^{\text{pl}}$  and an elastic strain  $\epsilon_i^{\text{el}}$ , and an elastic stress  $\sigma_i = \mu \epsilon_i^{\text{el}}$ . When in an elastic state, the plastic strain remains constant and therefore the accumulated strain is purely elastic. Once the local stress overcomes some local threshold  $\sigma_Y$ , an element can turn plastic, according to some model-specific rules. When in a plastic state, the local stress relaxes and is redistributed to other elements in the material via elastic interactions. In turn, plastic elements switch back to the elastic state, again according to some model-specific rule. An elastoplastic model is then defined by the rules coupling the evolution of the three local variables ( $n_i, \sigma_i, \epsilon_{pl,i}$ ). Elastoplastic models show avalanches because of the stress redistribution occurring when an element is plastic, which can in turn induce plasticity in other elements.

To demonstrate the dependence of the different triggering protocols, we choose to implement the two-dimensional Picard model [26], one of the simplest elasto-plastic models in the literature.  $N = L^2$  elements are positioned on a square lattice with main axis  $e_x$  and  $e_y$ , and are subject to a simple shear in the direction along  $e_x$ . The stress and strain are scalar and correspond to the  $xy$  components of the stress and strain tensors, respectively. On each site, they evolve according to

$$\partial_t \sigma_i = \sum_j G_{ij} \partial_t \epsilon_j^{\text{pl}} + \mu \dot{\gamma}, \quad \partial_t \epsilon_i^{\text{pl}} = n_i \sigma_i, \quad (1)$$

with  $\dot{\gamma}$  the global strain rate. The kernel  $G_{ij}$  is the discretized version of the Eshelby kernel  $\mathcal{G}(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$  [27,28], which represents the far-field effect of a plastic deformation located in  $\mathbf{r}'$  on the stress in position  $\mathbf{r}$  in a linear elastic medium

$$\mathcal{G}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = \frac{\cos(4\Delta\theta)}{\pi |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2}, \quad (2)$$

with the angle  $\Delta\theta$  defined as  $(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \cdot e_x = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'| \cos \Delta\theta$ . Separately, transitions between elastic and plastic states are governed by

$$\begin{aligned} n_i : 0 &\xrightarrow{\tau} 1, & |\sigma_i| > \sigma_Y \\ n_i : 0 &\xleftarrow{\tau} 1, & \forall \sigma_i, \end{aligned} \quad (3)$$

with  $\tau^{-1}$  the probability rate.

In practice, the time evolution is computed via an Euler method and the convolution is performed using a FFT-based algorithm, in which the discretized kernel is defined as

$$\hat{G}_q = -4 \frac{q_x^2 q_y^2}{q^4} \quad (4)$$

for  $\mathbf{q} \neq 0$  and  $\hat{G}_0 = -1$ .

In its original version, the Picard model was designed to perform simulations at a constant strain rate  $\dot{\gamma}$ . In this case, the term  $\mu \dot{\gamma}$  in Eq. (1) is constant. It is nevertheless possible to switch the control parameter, setting the global stress  $\Sigma = \frac{1}{N} \sum_i \sigma_i$  as a constant and letting  $\dot{\gamma}$  evolve accordingly [29], following  $\dot{\gamma} = \frac{1}{N} \sum_i \partial_t \epsilon_i^{\text{pl}}$ . This model then enables us to access the macroscopic behavior of the system in imposed strain or imposed stress dynamics.

This model recovers the yield-stress-fluid phenomenology [25]. When the strain rate  $\dot{\gamma}$  is controlled, steady-state flow follows a Herschel-Bulkley flow curve  $\Sigma = \Sigma_Y + K \dot{\gamma}^n$  for small values of  $\dot{\gamma}$ , with  $K$  and  $n$  constants and  $\Sigma_Y$  the macroscopic yield stress, as shown in Fig. 1. When the stress  $\Sigma$  is controlled, steady-state flow is only possible for  $\Sigma > \Sigma_Y$ , in which case it follows the same flow curve. For  $\Sigma < \Sigma_Y$  the deformation stops after a finite strain and the system remains in an elastic mechanical equilibrium.

In this work, we restrict ourselves to the case  $\Sigma > 0$  and deal with avalanches under controlled stress at  $\Sigma = \Sigma_Y$ . In order to determine precisely  $\Sigma_Y$ , we perform simulations at a constant strain rate to build the flow curve  $\dot{\gamma} = f(\Sigma)$ . The yield stress  $\Sigma_Y$  is determined as the value for which  $\log \dot{\gamma}$  is a linear function of  $\log[\Sigma - \Sigma_Y]$  for small  $\dot{\gamma}$ , which corresponds to the algebraic scaling  $\dot{\gamma} \sim (\Sigma - \Sigma_Y)^{1/n}$ .

### B. Avalanches in strain-controlled protocols

In a strain-controlled protocol, as  $\dot{\gamma} \rightarrow 0$ , the dynamics becomes jerky. The system jumps regularly from one elastic state (i.e., a state where all elements are elastic) to the next via bursts of plasticity. Looking at the evolution of the global stress as a function of the global strain, this corresponds to a succession of elastic loading phases and sudden drops of the global stress (see Fig. 1). These bursts of plasticity in the system are strain-controlled avalanches.

The standard protocol to study this phenomenon is the athermal quasi-static protocol (AQS), described in Fig. 2(a), which corresponds to the dynamics in equations Eqs. (1) and (3) in the  $\dot{\gamma} \rightarrow 0$  limit. Starting from an elastic state, the system is strained until a site reaches its yield value. This site then turns plastic, strain is stopped and plasticity propagates in the system at  $\dot{\gamma} = 0$  such that, through an avalanche process, the system falls back into a new elastic state. The system is then strained again until a new avalanche gets triggered and so on. The process is repeated to get statistics about those relaxation events.

Avalanches are mainly characterized by their size  $S$  and their duration  $T$ . In a system of size  $L$ , the size of an avalanche is defined as the global stress drop due to the plastic activity multiplied by the volume of the system  $S_\Sigma = \Delta \Sigma \times L^d$ . The duration of the avalanche simply corresponds to the time between the start and the end of it. In an infinite-size system

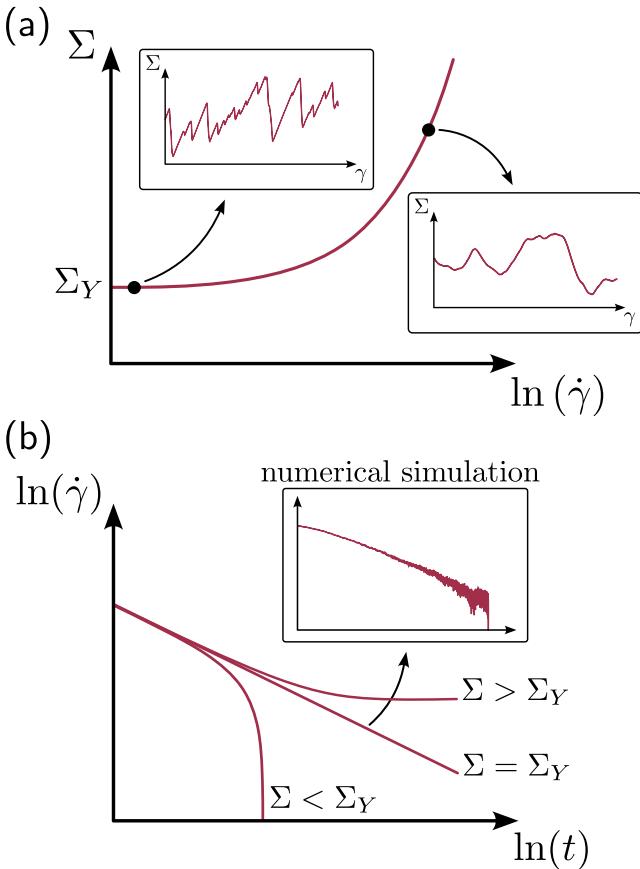


FIG. 1. (a) Flow curve of the model, showing a Herschel-Bulkley behavior. In insets, actual numerical simulations of the dynamics under controlled strain rate  $\dot{\gamma}$ , at small and large values of  $\dot{\gamma}$ , revealing a jerky dynamics with avalanches for  $\dot{\gamma} \rightarrow 0$ . (b) Schematic expected strain rate versus time under imposed constant stress  $\Sigma$  around the yield value  $\Sigma_Y$ , showing arrest of the dynamics for  $\Sigma < \Sigma_Y$ , eventual steady flow for  $\Sigma > \Sigma_Y$ , and power-law decay for  $\Sigma = \Sigma_Y$ . In inset, actual numerical simulations at  $\Sigma = \Sigma_Y$ , showing that in practice the power-law decay is interrupted after a finite time at which the dynamics stops in an elastic state.

those two quantities are expected to show probability density functions  $P_{S_\Sigma}(S_\Sigma)$  and  $P_T(T)$  decaying as power laws. These power-law scalings define the avalanche exponents  $\tau$  and  $\tau'$  as  $P_{S_\Sigma}(S_\Sigma) \sim S_\Sigma^{-\tau}$  and  $P_T(T) \sim T^{-\tau'}$ . However, in a finite-size system of size  $L$ , these power laws are only valid up to some cutoff  $S_c$  and  $T_c$  scaling algebraically with  $L$  as  $S_c \sim L^{d_f}$  and  $T_c \sim L^z$ , which defines the fractal dimension  $d_f$  and the dynamical exponent  $z$ . Distributions of avalanche size and of avalanche duration for all system sizes  $L$  are expected to follow scaling behaviors  $L^{\tau d_f} P_{S_\Sigma}(S_\Sigma) = f_{S_\Sigma}(S_\Sigma L^{-d_f})$  and  $L^{\tau' z} P_T(T) = f_T(T L^{-z})$ .

### C. Avalanches in stress-controlled protocols

If one imposes a stress  $\Sigma$  such that  $\Sigma \leq \Sigma_Y$ , the system stops flowing after a finite strain and get stuck in an elastic equilibrium that acts like an absorbing state [17], effectively preventing any measurement of the avalanche statistics by lack of proper sampling. For finite-size systems, this problem

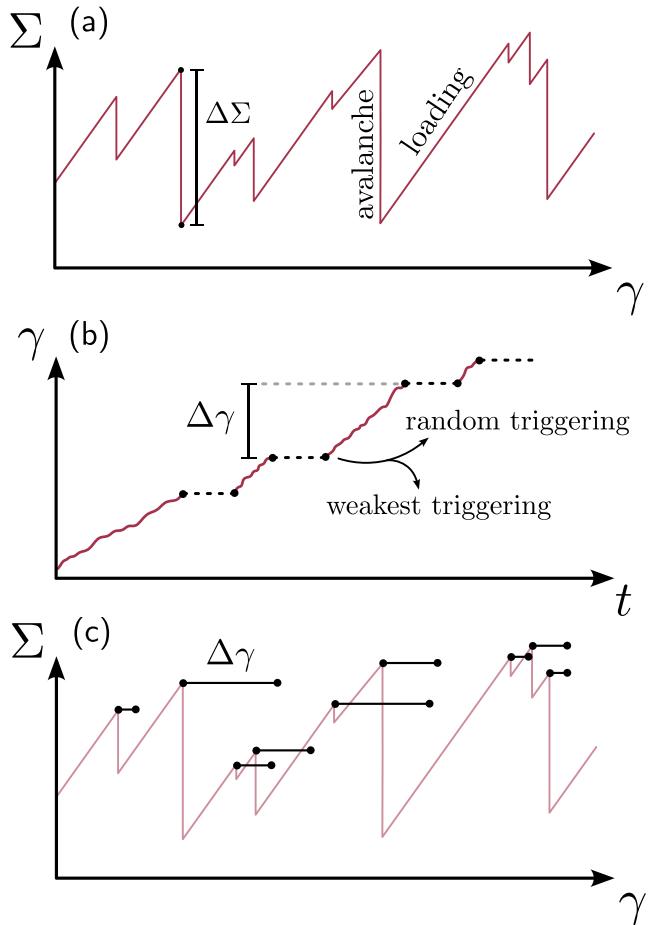


FIG. 2. Graphical representation of the different avalanche triggering protocols studied. Black dots represent the starting points and the ending points of avalanches. (a) Stress versus strain in the strain-controlled athermal quasi-static (AQS) dynamics. Avalanches are triggered by elastic loading until a site yields, and the avalanche size is measured via the subsequent stress drop  $\Delta\Sigma$ . (b) Strain versus time in the stress-controlled protocols weakest triggering (the site closest to yield is turned plastic) and random triggering (a random site is turned plastic). The avalanche size is proportional to the strain  $\Delta\gamma$  until the system jams again. (c) Uniform loading protocol. Avalanche starting points are shared with the AQS protocol (red stress versus strain curve). Avalanche size is also proportional to  $\Delta\gamma$  until the system jams again.

is exacerbated, as due to fluctuations the dynamics can be stuck into an elastic state even for  $\Sigma \gtrsim \Sigma_Y$  (see Fig. 1).

In order to probe the dynamical behavior and sample the avalanche statistics near the yield point, one has to reactivate the dynamics every time the system gets stuck in an elastic state [14]. An avalanche is then defined as the plastic activity between two successive reactivations, as sketched in Fig. 2(b). The avalanche size is the accumulated strain during the avalanche multiplied by the volume of the system,  $S_\gamma = \Delta\gamma \times L^d$ .

There are several ways to reactivate the system, defining different protocols to generate stress-controlled avalanches. It is then legitimate to wonder whether this arbitrary choice of

protocol may have an impact on the produced avalanches and the statistical observables that characterize them.

#### D. Definition of the protocols

We study two different stress-controlled protocols, defined by the reactivation mechanism: The random triggering protocol and the weakest triggering protocol. Both of them are studied at the critical stress  $\Sigma = \Sigma_Y$ . The avalanche statistics produced by these two protocols is studied in the steady state, after many reactivations are performed. As shown below, each reactivation mechanism gives a different statistics of visited elastic states. To disentangle the effect of controlling the stress during the avalanche from the effect of exploring statistically different elastic states, we also study a last protocol, the uniform loading protocol, which uses starting states sampled from AQS dynamics, but performs avalanches under imposed stress.

##### 1. Random triggering protocol

The first stress-controlled protocol we study is the random triggering protocol. Every time the system falls into an elastic state, the system is reactivated by setting a random site, chosen with uniform probability, as plastic ( $n_i = 1$ ) without changing the stress anywhere in the system. Experimentally, this protocol could be realized with local damage in the sample, as is performed in [30]. Note that this protocol is similar to the one used in the numerical study reported in [14]. The only difference is that in our case activation is made by a direct change on the state variable  $n_i$ , while in [14] it is made by giving randomly localized stress kicks to the system.

##### 2. Weakest triggering protocol

The second stress-controlled protocol is the weakest triggering one. In this protocol, a single site  $i$  ( $n_i = 1$ ) is activated as in the random triggering protocol, but now the activated site is the one closest to local yield, i.e., with the smallest value of  $\sigma_Y - \sigma_i$ . Here again, it resembles one of the numerical protocols proposed in [14] where the weakest site would be activated, only not by setting  $n_i = 1$  but by giving it a stress kick.

##### 3. Uniform loading protocol

In the last protocol, denoted as uniform loading protocol, the dynamics is not triggered from the elastic state reached after the previous avalanche. We first generate a long AQS simulation that contains many avalanches. We then record the starting configuration of each AQS avalanche, which corresponds to the point where one site (i.e., the marginal site) is at  $\sigma_i = \sigma_Y$ . Among these, we select the ones for which  $\Sigma < \Sigma_Y$ . For each of these configurations, the avalanche starts from the marginal site and evolves under a constant stress dynamics, as sketched in Fig. 2(c), until the system reaches again a purely elastic state, which is guaranteed by our choice of states with  $\Sigma < \Sigma_Y$ .

Because they come from an AQS dynamics, starting configurations are all at a slightly different stress below  $\Sigma_Y$ , nonetheless the stress is always close to  $\Sigma_Y$  (for  $L = 512$ , we get  $\Sigma \gtrsim 0.995 \Sigma_Y$ ). This protocol differs from the one

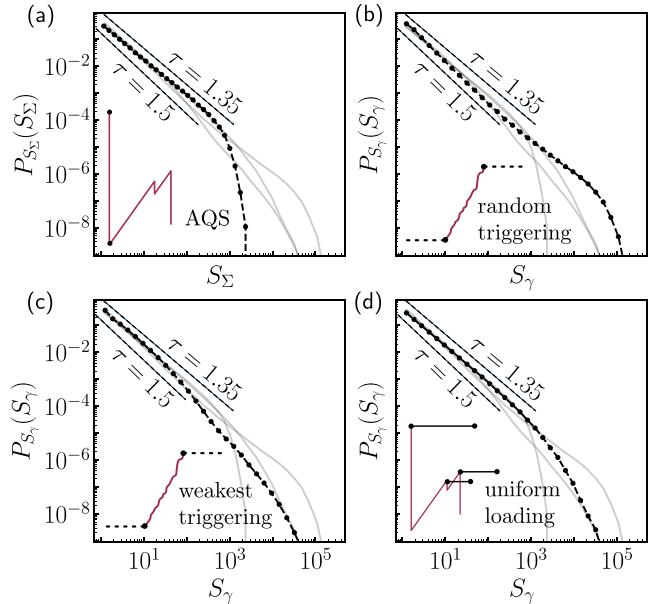


FIG. 3. Size distributions of the avalanches for a system size  $L = 512$  within the four different protocols. (a) AQS protocol. (b) Random triggering protocol. (c) Weakest triggering protocol. (d) Uniform loading protocol. In each panel, the three other protocols are shown in transparency and the power laws  $P_{S_X}(S_X) \sim S_X^{-\tau}$  with  $\tau = 1.35$  and  $\tau = 1.5$  are represented with black dashed lines for direct comparison.

studied in [31] as the elastic states we reach after an avalanche are not used again to trigger further avalanches, in contrast to [31] where the system is elastically loaded to trigger the next avalanche, leading to states of strictly increasing stresses, and eventually to runaway avalanches and permanent flow.

### III. AVALANCHE STATISTICS FOR DIFFERENT PROTOCOLS

For each of our four protocols (AQS, random triggering, weakest triggering, and uniform loading), we generate about  $5 \times 10^5$  avalanches to build the avalanche statistics. In this section we compare these avalanche statistics, highlighting clear qualitative differences in between protocols. To this end we show the avalanche size distributions for every protocol in each of the four panels of Fig. 3, only visually highlighting one of them in each panel. A detailed characterization for each of the protocols, performed by finite-size scaling (when it is possible), is deferred until Sec. V.

As expected, for the AQS protocol (Fig. 3(a)) we observe power-law-distributed event sizes with an avalanche exponent  $\tau \approx 1.35$  (later confirmed by finite-size scaling in Appendix A), in agreement with several previous studies of the AQS protocol in different elastoplastic models [14,16,32]. The power law is observed up to some cutoff  $S_c(L)$  past which the distribution roughly decays exponentially.

The uniform loading protocol (Fig. 3(d)) produces a very similar size distribution to the one of the AQS protocol as it is also power-law-distributed with a similar exponent  $\tau$ .

Our analysis suggests that the control parameter, whether strain or stress, exerts a minimal impact on avalanche

properties. This influence is notably less pronounced than that of the nature of the activated elastic states, indicating a secondary role for the control parameter in modulating avalanche dynamics. Nevertheless, the tail of the distribution significantly differs from that obtained with the AQS protocol. The cutoff is significantly larger than the one of the AQS protocol, similarly to the ones obtained in the other stress-controlled protocols, as shown below.

In the random triggering protocol (Fig. 3(b)), avalanche sizes are still distributed according to a clear power law but with a significantly larger exponent  $\tau$  that appears close to 1.5 (which we will confirm in Sec. V), in agreement with the theoretical mean-field prediction  $\tau = 3/2$  [33]. This variation underscores the sensitivity of avalanche dynamics to the chosen protocol, highlighting the importance of the initial triggering mechanism. Note that this result contradicts earlier numerical observations [14], for which the random triggering protocol was reported to give the same exponent  $\tau$  as the AQS dynamics, smaller than our observed value.

Just like for uniform loading, the cutoff value is larger than the one found for the AQS protocol by roughly two orders of magnitude. Furthermore, the shape of the distribution deviates from a pure power law for large avalanche sizes, the cutoff being preceded by a characteristic bump showing an excess of avalanches with respect to the power-law expectation. Such bumps have been observed for other protocols in the literature [31,34,35]. In depinning models, they are predicted by the renormalization group analysis [36] and have been shown to derive from an asymmetry in the interface height distribution [37]. This bump may affect the measure of the  $\tau$  exponent, leading to the determination of an effective exponent smaller than the actual one, as argued in [35]. As shown below, finite-size scaling alleviates much of this difficulty, and considerably narrows the uncertainty of our reported value of  $\tau$ .

Finally, the weakest triggering protocol (Fig. 3(c)) gives vastly different avalanche statistics. Avalanche sizes are broadly distributed but not according to a power law. Instead, the distribution shows two successive bumps, as also visible in the data of [14] (Fig. S4 therein). The cutoff for similar system sizes is, however, of the same order of magnitude as the one of the random triggering protocol.

These results demonstrate that the reactivation protocol when studying avalanches under controlled stress has a major impact on the measured avalanche statistics. Avalanche statistics under controlled stress is therefore not strictly a system property, and one needs to be explicit as to which protocol is used to generate avalanches. In the following, we try to infer broad relations between generic features of reactivation protocols and resulting avalanche statistics.

#### IV. PROTOCOL FEATURES THAT CONTROL THE AVALANCHES SIZE STATISTICS

##### A. The triggering mechanism controls the avalanche exponent $\tau$

The AQS and uniform loading protocols have the same measured value for the avalanche exponent,  $\tau \approx 1.35$ . These two protocols differ by their control parameter, but share the same triggering mechanism, which suggest that the latter

controls the value of  $\tau$ . Indeed, changing the triggering mechanism affects the exponent value, as the random triggering protocol yields  $\tau \approx 1.5$  and the weakest triggering protocol shows no exponent at all.

This is consistent with mean-field arguments, which suggest that the exponent characterizing the size distribution of avalanches is controlled by the way elastic configurations are activated, either by the activation of one random site (as the random triggering protocol) or the uniform loading of all sites (as the AQS protocol) [24]. In these cases, the mean-field problem can be mapped onto a random walk first-passage problem and yield exact analytical results [24]. For random triggering, an exponent  $\tau = 1.5$  is predicted. By contrast, for uniform loading, in mean-field there is no true power law in the avalanche distribution, but nonetheless on restricted ranges of avalanche size one can approximate the distribution with a size-dependent apparent exponent. For avalanches involving between 1 and  $\approx 10^5$  sites like the ones we present here, an apparent exponent  $\tau_{\text{eff}}$  between 1.1 and 1.2 is found in the mean-field model (Fig. 2 in [24]). Our results show that the qualitative mean-field expectation of a smaller (effective) exponent when avalanches are triggered by elastic loading rather than random activation still holds in finite dimension.

However, the mean-field scenario [24] does not quantitatively match several of our numerical observations. First, the mean-field  $\tau_{\text{eff}} \approx 1.1 - 1.2$  for the uniform loading protocol is significantly below our measured value  $\tau \approx 1.35$ . Second, the mean-field calculations predict a bump in the distribution for large avalanches in the case of the uniform loading, and no bump for random activation, which is the opposite of our observations.

Overall, these results suggest that the avalanche exponent is not controlled by the dynamical rules that apply during avalanches but rather that it strongly depends on the way avalanches are initiated. Loaded elastic states show smaller exponents than locally triggered ones. However, if dynamical rules do not seem to affect the exponent, they still have an impact on the avalanche distribution. Looking at Fig. 3, it is clear that all stress-controlled protocols show much larger cutoffs than the one of the AQS protocol.

##### B. The control parameter controls the cutoff size

A major difference between stress-controlled and strain-controlled dynamics is that during a strain-controlled avalanche the total stress drops, effectively making the avalanche more likely to stop early. Thus, starting from the same state, we would expect the avalanche in a stress-controlled protocol to be larger and last longer than in a strain-controlled protocol. This is indeed confirmed by our observations in Fig. 3, which shows that the cutoff size is smaller for the AQS protocol.

Under AQS dynamics, if the starting point of an avalanche is at a relatively high stress, it may take several successive avalanches and elastic loadings to find again an elastic state at the same stress. It is thus tempting to sketch avalanches under controlled stress as concatenations of successive AQS-like avalanches that occur between two states whose stress matches the imposed one, covering a strain  $\Delta\Gamma$ , as illustrated in the inset of Fig. 4.

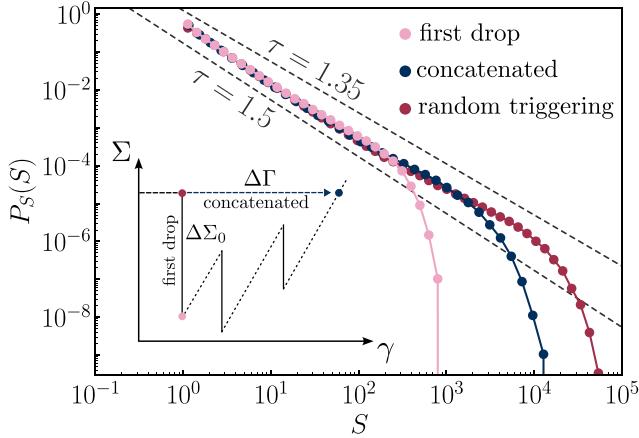


FIG. 4. Size distributions of avalanches in the concatenation procedure for a system size  $L = 256$ . Inset: schematic of the concatenation procedure. First drop corresponds to the first strain-controlled avalanche (between the first red dot and the blue dot in the schematic). Concatenated avalanches correspond to the sum of AQS avalanches required to recover the initial global stress  $\Sigma_Y$ .

To investigate this idea, we run an AQS dynamics from the starting configurations of every avalanche obtained with the random triggering protocol. These configurations are all initially at  $\Sigma = \Sigma_Y$  by construction. During the AQS dynamics, their stress drops during avalanches and increases during elastic loading phases, until it reaches  $\Sigma_Y$  again, at which point we stop the simulation and record the strain  $\Delta\Gamma$  since the start of the AQS dynamics.

In Fig. 4, we display in dark blue the obtained distribution of  $S_\Gamma = \Delta\Gamma L^d$ , alongside the distribution of avalanche sizes measured in the original random triggering protocol. To better highlight the effect of the concatenation on the statistics of avalanches, we also show the distribution of the first stress drop size  $P_{S_{\Sigma_0}}(S_{\Sigma_0})$ , with  $S_{\Sigma_0} = \Delta\Sigma_0 L^d$ , during the AQS dynamics (pink curve): if each avalanche in the random triggering protocol corresponded to a single AQS avalanche followed by a single elastic loading to get back to a stress  $\Sigma_Y$ ,  $P_{S_\gamma}(S_\gamma)$  would be indistinguishable from  $P_{S_{\Sigma_0}}(S_{\Sigma_0})$  (and  $P_{S_\Gamma}(S_\Gamma)$  for that matter). We see that this is the case for small avalanches (we checked that this is not only true statistically, but that pairs of small avalanches under random triggering and AQS sharing the same starting point are indeed very similar). However, large stress-controlled avalanches are clearly not associated with single AQS avalanches.

The distribution of intermediate size avalanches under random triggering is better approximated by the distribution of concatenated AQS avalanches, showing that some large stress-controlled avalanches seem to be reasonably well approximated by concatenation of AQS avalanches. However, there remains a clear discrepancy between  $P_{S_\gamma}(S_\gamma)$  and  $P_{S_\Gamma}(S_\Gamma)$  for the largest avalanches, that interestingly correspond to avalanches in the already noted excess bump.

Massive avalanches under stress-controlled conditions are therefore more than bare successions of AQS-like avalanches. This indicates that the finite strain rate during stress-controlled avalanches can no longer be neglected for these avalanches. Large avalanches transiently lead to large strain rates in the

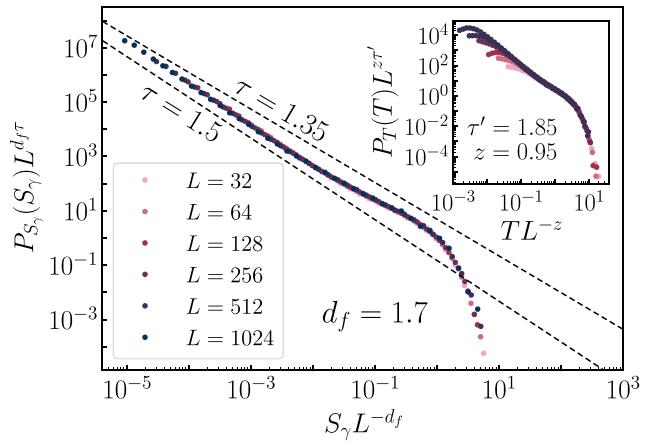


FIG. 5. Finite-size scaling of the avalanche size distributions in the random triggering protocol for system sizes  $L \in [32, 64, 128, 256, 512, 1024]$ . The best collapse determines the best estimate for the fractal dimension  $d_f \approx 1.7$ . Inset: Finite-size scaling of the avalanche duration distributions in the random triggering protocol for the same system sizes. The best collapse determines the best estimate for the dynamical exponent  $z \approx 0.95$ .

system, moving the system trajectory away from the one followed by the AQS dynamics. In particular, under finite strain rates sites become plastic at stresses larger than  $\sigma_Y$  as elastic loading persists before the stochastic triggering of plasticity, causing plastic sites to redistribute larger stresses than they would in a similar configuration under AQS. This larger redistribution in turn fuels more plastic triggering, eventually leading to larger avalanches, which is compatible with our observation of a larger cutoff value for  $P_{S_\gamma}(S_\gamma)$  than for  $P_{S_\Gamma}(S_\Gamma)$  in Fig. 4.

## V. FINITE-SIZE SCALING AND SCALING RELATIONS

### 1. Fractal dimension and dynamical exponents

We now turn to the fractal dimension  $d_f$  of avalanches and dynamical exponent  $z$ , which we evaluate using a finite-size scaling analysis. We first confirm the results reported in the literature for the AQS protocol, that is  $L^{\tau d_f} P_{S_\Sigma}(S_\Sigma)$  plotted as a function of  $S_\Sigma L^{-d_f}$  and  $L^{\tau' z} P_T(T)$  plotted as a function of  $T L^{-z}$  respectively show a data collapse onto a master curve for  $d_f \approx 1.1$  and  $z \approx 0.54$  [16] (see Fig. 7 in Appendix A).

Remarkably, we can achieve a similar collapse for avalanches obtained with the random triggering protocol, as displayed in Fig. 5. Using distributions for system sizes ranging from  $L = 32$  to  $L = 1024$ , the best collapse of the curves is obtained for  $\tau \approx 1.5$ ,  $d_f \approx 1.7$ ,  $\tau' \approx 1.85$  and  $z \approx 0.95$ . The fractal dimension obtained in this case is then much larger than the one measured for the AQS protocol.

This is consistent with the picture that, at least for intermediate-size events, stress-controlled avalanches are close to a concatenation of AQS-like avalanches. Indeed, successive AQS avalanches are known to be spatially correlated and to cluster along the flow and flow gradient directions [38]. To confirm this hypothesis, we perform the same finite-size scaling for the distributions of concatenated AQS avalanches, and also find  $d_f \approx 1.5$  (see Fig. 10 in Appendix A), in contrast

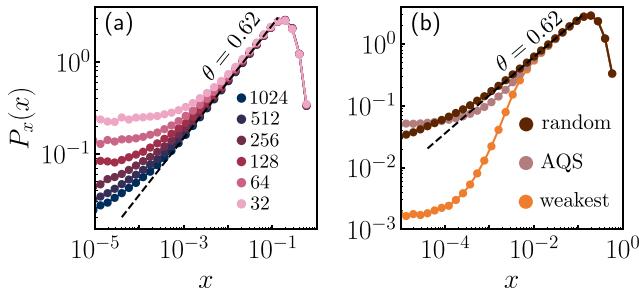


FIG. 6. (a) Distributions of local distance to threshold in the elastic states of the random triggering protocol for system sizes  $L \in [32, 64, 128, 256, 512, 1024]$ . The dotted black line indicates the universal power law determined with an exponent  $\theta \approx 0.62$ . (b) Distributions of local distance to threshold in the elastic states of different protocols for a system size  $L = 512$ . The weakest triggering protocol shows a clear depletion at low  $x$  compared to the other protocols.

to the  $d_f \approx 1.1$  for individual AQS avalanches (which we also observe for the distribution of first stress drops  $P_{\Delta\Sigma_0}(\Delta\Sigma_0)$ ).

Finally, despite the fact that for the weakest triggering protocol the distributions of avalanche size and duration do not show well-defined power laws, their cutoffs still scale as a power law of the system size, as shown in Fig. 8. This allows us to determine effective exponents  $d_f \approx 1.4$  and  $z \approx 0.75$  for this protocol, which lie in between the values obtained for AQS and those obtained with random triggering.

## 2. Relation to the pseudo-gap exponent

Scaling relations relating the avalanche behavior of amorphous systems to their structure or flowing properties have been proposed in the past and seem to be satisfied in the case of the AQS protocol [14,16]. One of them relates exponents  $\tau$  and  $d_f$  with the pseudo-gap exponent in the distribution of distance to the local yield  $\sigma_Y$ . Defining for each site the distance to local yield  $x_i = \sigma_Y - \sigma_i$ , for  $\Sigma = \Sigma_Y$  one expects at small  $x$  a power-law behavior for the distribution  $P_x(x) \sim x^\theta$ , with  $\theta$  the pseudo-gap exponent [39,40].

Under AQS protocol, stationarity imposes that [14]

$$\tau = 2 - \frac{\theta}{\theta + 1} \frac{d}{d_f}. \quad (5)$$

One may wonder whether this scaling relation is also valid beyond the AQS protocol, and in particular for the random triggering protocol, which shows a scaling behavior, albeit with different exponent values from the ones observed in AQS. We construct the distribution  $P_x(x)$  for the random triggering protocol by sampling the elastic states obtained between two avalanches. Statistics are here obtained for a total of approximately  $2 \times 10^{10}$  individual  $x$  values. In Fig. 6(a), we show  $P_x(x)$  for several system sizes. For each size, we observe a power law with an exponent  $\theta \approx 0.62$  for  $x$  in an intermediate range between a small  $x$  plateau and a large  $x$  peak. The larger the system size, the broader the power-law range at the lower end, which supports the claim that  $\theta \approx 0.62$  is the infinite-size-limit exponent. Using this measurement of  $\theta$  along with  $d_f$  and  $\tau$  measured by finite-size scaling

(see above), we find  $\tau d_f / [2d_f - \theta d / (\theta + 1)] \approx 0.97$ , which shows that the scaling relation is still valid to a good accuracy for the random triggering protocol.

The weakest triggering protocol shows no scaling behavior in the avalanche size distribution, and therefore the scaling relation is not applicable in this case. Nonetheless, it is interesting to look at the distribution  $P_x(x)$  for this protocol, as shown in Fig. 6(b) and compare it to the one obtained for the AQS and random triggering protocols with the same system size. Interestingly we find that there still is an intermediate range of  $x$  for which we observe the pseudo-gap behavior, with the same  $\theta \approx 0.62$ , but this range is much narrower for weakest triggering than for AQS or random triggering. For small  $x$  values, the distribution is severely depleted in the case of weakest triggering. The size dependence of  $P_x(x)$  reveals that the pseudo-gap behavior widens with larger system sizes (see Appendix B), but the size dependence is comparatively weak with respect to AQS and random triggering. This slow emergence of a scaling behavior of  $P_x(x)$  suggests that the absence of power law in the avalanche distribution might be a finite-size effect that persists up to unusually large system sizes. Unfortunately, we cannot explore significantly larger system sizes in order to clarify if the weakest triggering protocol actually follows a scaling behavior in the large system size limit.

## 3. Relation to the flow exponent

An additional scaling relation can be derived between the yielding critical exponents and the avalanche exponents  $z$  and  $d_f$ . In the flowing phase for  $\dot{\gamma} > 0$  small, the strain rate  $\dot{\gamma}$  and stress  $\Sigma$  are related via  $\dot{\gamma} \sim (\Sigma - \Sigma_Y)^\beta$  with  $\beta = 1/n$ , and the correlation length scales as  $\xi \sim (\Sigma - \Sigma_Y)^{-\nu}$ . Based on the idea that in the critical regime the mean strain rate is controlled by avalanches of typical extension  $\xi$ , characterized by their size  $S_\xi \sim \xi^{d_f}$  and their duration  $T_\xi \sim \xi^z$ , we get

$$\dot{\gamma} \sim \frac{S_\xi}{T_\xi \xi^d} \sim \xi^{d_f - z - d}. \quad (6)$$

Eliminating the distance  $\Sigma - \Sigma_Y$  to the yielding point in the definition of  $\beta$  and  $\nu$  we can get the following scaling relation

$$\beta = \nu(d - d_f + z). \quad (7)$$

This scaling relation has been verified earlier in the case of the AQS protocol [14]. To test equation Eq. (7) on the random triggering protocol, we use the measured values of  $d_f$  and  $z$ . On the other hand,  $\nu$  has recently been measured in this model, revealing  $\nu = 1.13$  [17]. The exponent  $\beta$  predicted by the scaling relation of Eq. (7) is then  $\beta \approx 1.41$ , which should be compared to the measured value of  $\beta \approx 1.5$  in this model. For the AQS protocol on the other hand we get through the same procedure a predicted exponent of  $\beta \approx 1.63$ . Thus both protocols are in relatively good agreement with the scaling prediction even though the strain-controlled protocol tends to overestimate it while the stress-controlled protocol tends to underestimate it.

TABLE I. Measured exponents in studied protocols.  $\emptyset$ : no convincing exponent determined;—: not measured; \*: incomplete finite-size collapse.

Protocol	Control variable	Elastic states	Activation	$\tau$	$\tau'$	$d_f$	$z$	$\theta$
AQS	Strain	Self-generated	Uniform loading	1.35	1.74	1.1	0.54	0.62
Random triggering	Stress	Self-generated	$n_i = 1, i \text{ random}$	1.5	1.85	1.7	0.95	0.62
Weakest triggering	Stress	Self-generated	$n_i = 1, i = \operatorname{argmin}\{\sigma\}$	$\emptyset$	$\emptyset$	1.4*	0.75*	0.62
Uniform loading	Stress	AQS	Uniform loading	1.35	—	—	—	0.62

## VI. CONCLUSION

In this study, we examine the protocol dependence of avalanche dynamics in an elastoplastic model, for protocols which are commonly used in the experimental and numerical literature. Our results highlight significant differences in avalanche statistics based on the statistical properties of the elastic states prior to the stress drop events, on the external driving protocol and on the specific protocols employed to trigger local plastic events. A short overview of these results is compiled in Table I.

Consistently with former results in the literature, we find that the athermal quasi-static (AQS) protocol yields avalanches following a power-law distribution with an exponent  $\tau \approx 1.35$ . For stress imposed dynamics and a uniform loading protocol our model produces similar power-law distributed avalanche sizes with  $\tau \approx 1.35$ . The tail of the distribution shows a larger cutoff compared to AQS, indicating a broader distribution with avalanches of larger sizes. However, the random triggering protocol yields a different exponent  $\tau \approx 1.5$ , closer to the mean-field prediction  $\tau = 3/2$ . The distribution has a characteristic bump before the cutoff, differing significantly in shape from the AQS protocol.

When triggering the weakest site instead, the size distribution no longer follows a well-defined power law and rather displays two successive bumps. This suggests a unique behavior compared to other protocols. Yet the distribution of the distance to local yield suggests that a power-law scaling may be recovered, but only for much larger system sizes than for AQS and random triggering.

We showed that the exponent  $\tau$  is primarily controlled by the way avalanches are triggered rather than the dynamical rules during avalanches. Protocols with uniform loading tend to display smaller exponents than those with local triggering.

A feature that depends strongly on dynamical rules is the cutoff size of the avalanche distributions. Stress-controlled protocols generally exhibit larger cutoffs compared to strain-controlled protocols. We interpret this phenomenon with an argument based on the concatenation of AQS avalanches.

In agreement with earlier research [14,16], our findings confirm that the AQS protocol exhibits a fractal dimension of approximately 1.1 and a dynamical exponent of about 0.54. Conversely, the random triggering protocol reveals larger values, with  $d_f \approx 1.7$  and  $z \approx 0.95$ , indicating that stress-controlled avalanches are not only more spatially compact but also persist for longer durations compared to their AQS counterparts.

Despite the change of exponent values from one protocol to the other, we verified that the predicted scaling relation  $\tau = 2 - \frac{\theta}{\theta+1} \frac{d}{d_f}$  still holds for both AQS and random triggering

protocols. For the random triggering protocol, the measured exponent  $\theta \approx 0.62$  is consistent with the predicted  $\tau \approx 1.55$ . Also the scaling relation  $\beta = v(d - d_f + z)$  is reasonably satisfied by our model results, indicating a good agreement with theoretical predictions [14].

The two-dimensional model considered here gives results that go beyond former mean-field studies [24]. Although we confirm some mean-field features to be valid in finite dimension, such as a change of avalanche exponents when going from uniform loading to random triggering, specific features like the appearance of a bump in the distribution crucially depend on the low dimensionality of the model. Moreover, we are able to describe in detail the complex spatial properties of avalanches that are encoded in the fractal dimension and can be used to test general scaling relations.

We believe our work may help to conceptually better understand the differences which may occur in the measurements of avalanche dynamics depending on the protocol employed. Care has to be taken when talking about universality under stress-imposed conditions, where the choice of avalanche-triggering protocol has a significant impact on avalanche statistics.

Finally, we would like to mention a promising route to test our results in an experimental setup. There are practical ways to implement our triggering protocols, even in the case of the random triggering protocol. It has recently been shown experimentally that it is possible to randomly induce plastic events in a glass using X-ray irradiation [41]. This technique may be used to randomly trigger plastic avalanches in a glass under imposed stress conditions, to compare with other driving protocols.

In other systems displaying avalanches it is often possible to either control strain or stress, such as in granular materials [42] or in simulations of the depinning dynamics of elastic manifolds in disordered environments, either with a force-controlled or a velocity-controlled protocol [36]. We believe that our results will have an impact on the study of a large variety of systems displaying avalanche dynamics studied in hard and soft condensed matter physics, materials science, solid mechanics, geology and in seemingly distinct fields like neuroscience, biological systems and active matter.

## ACKNOWLEDGMENTS

This project was provided with computer and storage resources by GENCI at IDRIS thanks to the Grant 2023-AD010914551 on the supercomputer Jean Zay's V100 and A100 partitions. Some of the computations presented in this paper were performed using the GRICAD infrastructure [43], which is supported by Grenoble research communities. T.J.

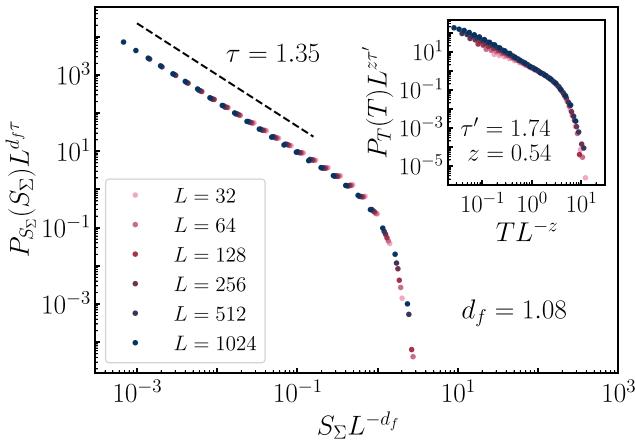


FIG. 7. Finite-size scaling of the distribution of AQS avalanche size and duration for several system sizes  $L$ .

acknowledges funding from the French Ministry of Higher Education and Research.

#### APPENDIX A: FINITE-SIZE SCALING OF AVALANCHES WITH SEVERAL PROTOCOLS

In this Appendix we show the results of the finite-size scaling of avalanches in the AQS and weakest triggering

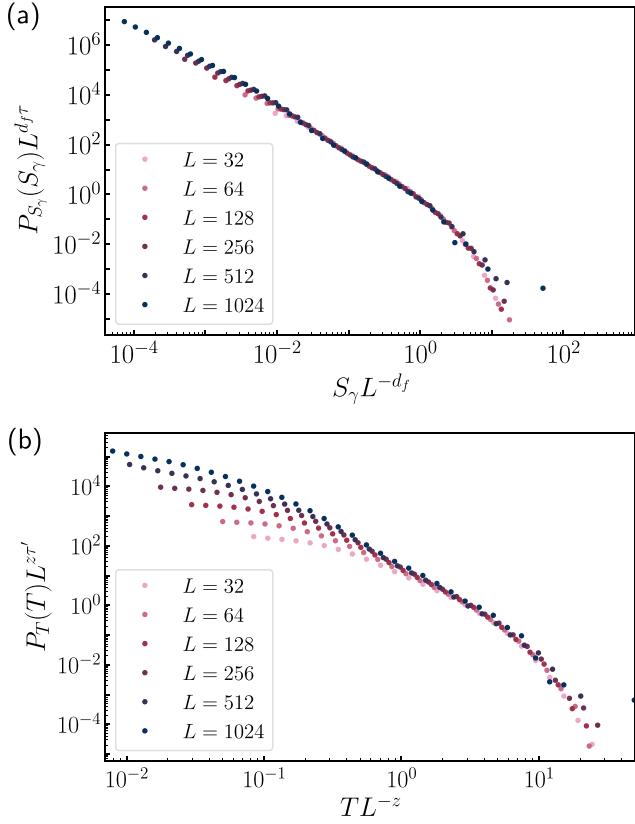


FIG. 8. Finite-size scaling of the distribution of avalanche size (a) and duration (b) with the weakest triggering protocol for several system sizes  $L$ . Trial exponents for this rescaling are  $\tau = 1.75$ ,  $d_f = 1.4$ ,  $\tau' = 2.6$  and  $z = 0.75$ .

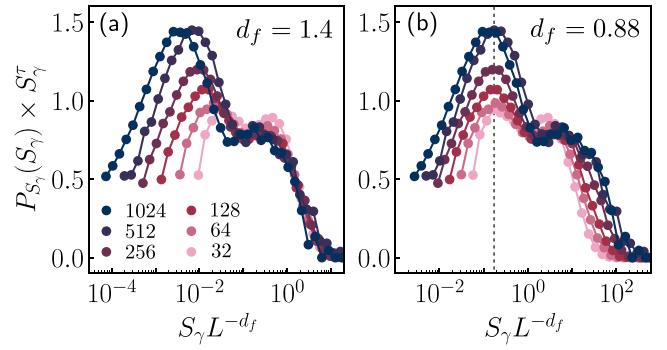


FIG. 9. Compensated rescaling of the distribution of avalanche size  $P_{S_\gamma}(S_\gamma) S_\gamma^\tau$  (with  $\tau = 1.75$ ) versus  $S_\gamma L^{-d_f}$  within the weakest triggering protocol for several system sizes  $L$ . In panel (a)  $d_f = 1.4$  is chosen to collapse best the curves in the cutoff region while in panel (b)  $d_f = 0.88$  is chosen so that the maxima of the first bump share the same associated rescaled size.

protocols. For AQS, the best collapse of  $L^{d_f \tau} P_{S_\Sigma}(S_\Sigma)$  versus  $S_\Sigma L^{-d_f}$  is obtained for a fractal dimension  $d_f \approx 1.08$ , using  $\tau = 1.35$  (see Fig. 7). The best collapse for  $L^{z \tau'} P_T(T)$  versus  $T L^{-z}$  is obtained for  $z \approx 0.54$  and  $\tau' \approx 1.74$  (inset of Fig. 7). While the values of  $\tau$ ,  $d_f$ , and  $z$  are close to the ones determined in previous works [14,16], the value of  $\tau'$  is slightly larger than the value 1.4 measured in [16] and 1.6 measured in [14], which suggests that it could be a model-dependent feature.

For the weakest triggering protocol, we do not find a satisfying collapse, neither for  $P_{\Delta\Gamma}(\Delta\Gamma)$  nor for  $P_T(T)$ , as represented in the rescaling trial in Fig. 8. This is due to the absence of a clear power law in these distributions, in particular  $P_{\Delta\Gamma}(\Delta\Gamma)$  instead shows two bumps for small and large avalanches. Nonetheless, looking for exponents to get the best possible collapse of the curves in the cutoff region, we do find a good collapse for large avalanches with  $d_f = 1.4$  and  $z = 0.75$ , of course at the cost of having a strong size-dependence for small avalanches. This is high-

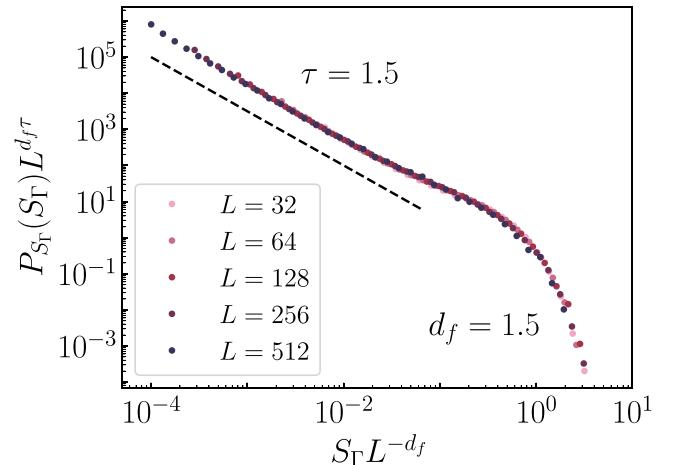


FIG. 10. Finite-size scaling of the size distribution of concatenations of avalanches obtained by AQS starting from elastic states sampled by the random triggering protocol for several system sizes  $L$ .

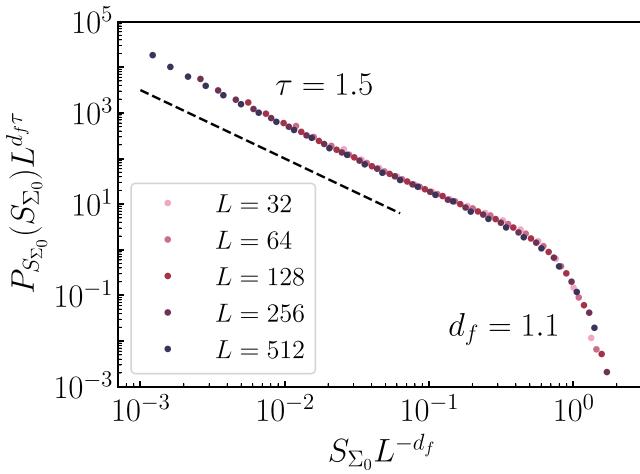


FIG. 11. Finite-size scaling of the distribution of first avalanche sizes obtained by AQS starting from elastic states sampled by the random triggering protocol for several system sizes  $L$ .

lighted in the compensated plot in panel (a) of Fig. 9. By contrast, we cannot find a rescaling that collapses the curves in the region around the bump corresponding to smaller avalanches. It is nonetheless possible to align the maxima of the bumps such that they share the same associated rescaled size with a rescaling defined this time by  $d_f \approx 0.88$  (see panel (b) of Fig. 9). This smaller fractal dimension suggests smaller avalanches are less compact than the bigger ones.

We also perform the same analysis for the distribution of concatenated AQS avalanches, as discussed in Sec. IV B. Remarkably, we do find a collapse, as shown in Fig. 10, with  $d_f \approx 1.5$  and  $\tau \approx 1.5$ . Therefore concatenated avalanches still follow a critical scaling, albeit with different exponents from single avalanches in the AQS protocol.

In Fig. 11, we confirm the importance of the triggering mechanism via the way it controls the statistics of visited elastic states, by performing the finite-size scaling analysis on the distribution of first avalanches when we apply the AQS dynamics on elastic states sampled with the random triggering protocol. Here again, a remarkable collapse is obtained. Looking at the exponents, we find  $d_f \approx 1.1$  (like usual AQS

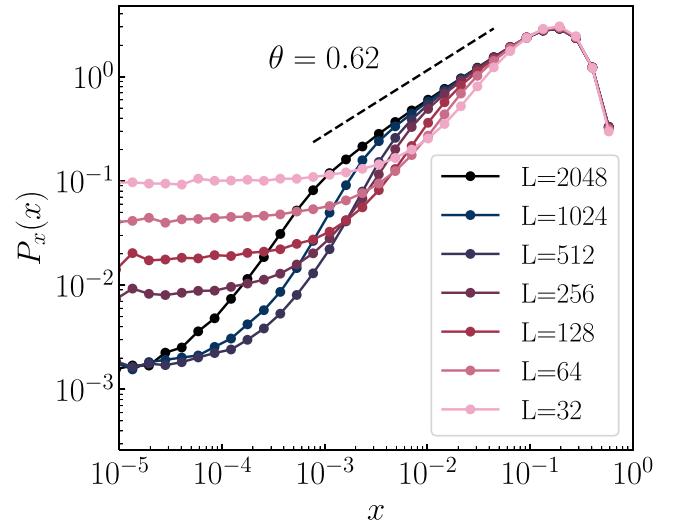


FIG. 12. Distributions of the distance to threshold in the elastic states of the weakest triggering protocol for system sizes  $L \in [32, 64, 128, 256, 512, 1024, 2048]$ .

avalanches) and  $\tau = 1.5$  (unlike usual AQS avalanches). This shows that the elastic states sampled by the random triggering protocol are statistically different from the ones sampled by AQS, leading to different  $\tau$  exponents.

## APPENDIX B: PSEUDO-GAP DISTRIBUTION IN THE WEAKEST TRIGGERING PROTOCOL

In this Appendix we report the size dependence of the distribution  $P_x(x)$  of distance  $x$  to local yield, for elastic states sampled using the weakest triggering protocol. As shown in Fig. 12, this distribution only shows a pseudo-gap  $P_x(x) \sim x^\theta$  for the largest sizes  $L$  that we are able to investigate numerically. This stands in contrast to the AQS and random triggering protocols, for which the pseudo-gap is clearly visible even for reasonable sizes. Nonetheless, it appears in Fig. 12 that the intermediate range of  $x$  for which the scaling holds is widening, even if slowly, when increasing system size. This suggests that in the large system size limit the pseudo-gap would actually be observed, with  $\theta \approx 0.62$ , the same value as for the AQS and the random triggering protocol.

- 
- [1] L. Laurson, G. Durin, and S. Zapperi, *Phys. Rev. B* **89**, 104402 (2014).
- [2] V. B. Verma, A. E. Lita, M. J. Stevens, R. P. Mirin, and S. W. Nam, *Appl. Phys. Lett.* **108**, 131108 (2016).
- [3] J. Antonaglia, W. J. Wright, X. Gu, R. R. Byer, T. C. Hufnagel, M. LeBlanc, J. T. Uhl, and K. A. Dahmen, *Phys. Rev. Lett.* **112**, 155501 (2014).
- [4] I. Cantat and R. Delannay, *Eur. Phys. J. E* **18**, 55 (2005).
- [5] X. Clotet, S. Santucci, and J. Ortín, *Phys. Rev. E* **93**, 012150 (2016).
- [6] R. Kokkonieniemi, A. Miksic, M. Ovaska, L. Laurson, and M. J. Alava, *J. Stat. Mech.* (2017) 073401.
- [7] I. G. Main, F. Kun, and A. F. Bell, Crackling noise in digital and real rocks—implications for forecasting catastrophic failure in porous granular media, in *Avalanches in Functional Materials and Geophysics* (Springer International Publishing, Cham, 2017), pp. 77–97.
- [8] T. Mäkinen, A. Miksic, M. Ovaska, and M. J. Alava, *Phys. Rev. Lett.* **115**, 055501 (2015).
- [9] A. van Herwijnen, M. Heck, and J. Schweizer, *Cold Regions Sci. Technol.* **132**, 68 (2016).
- [10] L. de Arcangelis, C. Godano, J. R. Grasso, and E. Lippiello, *Phys. Rep.* **628**, 1 (2016).
- [11] L. de Arcangelis and H. J. Herrmann, *Front. Physiol.* **3**, 62 (2012).

- [12] A. Puy, E. Gimeno, D. March-Pons, M. C. Miguel, and R. Pastor-Satorras, *Phys. Rev. Res.* **6**, 033270 (2024).
- [13] A. B. Kolton, A. Rosso, T. Gihamchi, and W. Krauth, *Phys. Rev. Lett.* **97**, 057001 (2006).
- [14] J. Lin, E. Lerner, A. Rosso, and M. Wyart, *Proc. Natl. Acad. Sci. USA* **111**, 14382 (2014).
- [15] D. V. Denisov, K. A. Lörincz, J. T. Uhl, K. A. Dahmen, and P. Schall, *Nat. Commun.* **7**, 10641 (2016).
- [16] C. Liu, E. E. Ferrero, F. Puosi, J.-L. Barrat, and K. Martens, *Phys. Rev. Lett.* **116**, 065501 (2016).
- [17] T. Jocqueur, S. Figueiredo, K. Martens, E. Bertin, and R. Mari, *Phys. Rev. Lett.* **132**, 268203 (2024).
- [18] P. D. Ispánovity, L. Laurson, M. Zaiser, I. Groma, S. Zapperi, and M. J. Alava, *Phys. Rev. Lett.* **112**, 235501 (2014).
- [19] K. M. Salerno and M. O. Robbins, *Phys. Rev. E* **88**, 062206 (2013).
- [20] K. Karimi, E. E. Ferrero, and J.-L. Barrat, *Phys. Rev. E* **95**, 013003 (2017).
- [21] P. Leishangthem, A. D. S. Parmar, and S. Sastry, *Nat. Commun.* **8**, 14653 (2017).
- [22] F.-J. Pérez-Reche, L. Truskinovsky, and G. Zanzotto, *Phys. Rev. Lett.* **101**, 230601 (2008).
- [23] E. Vives, D. Soto-Parra, L. Mañosa, R. Romero, and A. Planes, *Phys. Rev. B* **80**, 180101 (2009).
- [24] E. A. Jagla, *Phys. Rev. E* **92**, 042135 (2015).
- [25] A. Nicolas, E. E. Ferrero, K. Martens, and J.-L. Barrat, *Rev. Mod. Phys.* **90**, 045006 (2018).
- [26] G. Picard, A. Ajdari, F. Lequeux, and L. Bocquet, *Phys. Rev. E* **71**, 010501 (2005).
- [27] J. D. Eshelby, *Proc. R. Soc. London A* **241**, 376 (1957).
- [28] G. Picard, A. Ajdari, F. Lequeux, and L. Bocquet, *Eur. Phys. J. E* **15**, 371 (2004).
- [29] C. Liu, E. E. Ferrero, K. Martens, and J.-L. Barrat, *Soft Matter* **14**, 8306 (2018).
- [30] F. Dallari, A. Martinelli, F. Caporaletti, M. Sprung, G. Baldi, and G. Monaco, *Proc. Natl. Acad. Sci. USA* **120**, e2213182120 (2023).
- [31] Z. Budrikis, D. F. Castellanos, S. Sandfeld, M. Zaiser, and S. Zapperi, *Nat. Commun.* **8**, 15928 (2017).
- [32] E. E. Ferrero and E. A. Jagla, *Soft Matter* **15**, 9041 (2019).
- [33] K. A. Dahmen, Y. Ben-Zion, and J. T. Uhl, *Nat. Phys.* **7**, 554 (2011).
- [34] S. Sandfeld, Z. Budrikis, S. Zapperi, and D. F. Castellanos, *J. Stat. Mech.* (2015) P02011.
- [35] N. Oyama, H. Mizuno, and A. Ikeda, *Phys. Rev. E* **104**, 015002 (2021).
- [36] A. Rosso, P. Le Doussal, and K. J. Wiese, *Phys. Rev. B* **80**, 144204 (2009).
- [37] L. Laurson, *Phys. Rev. Lett.* **133**, 207102 (2024).
- [38] K. Martens, L. Bocquet, and J.-L. Barrat, *Phys. Rev. Lett.* **106**, 156001 (2011).
- [39] S. Karmakar, E. Lerner, and I. Procaccia, *Phys. Rev. E* **82**, 055103 (2010).
- [40] J. Lin, A. Saade, E. Lerner, A. Rosso, and M. Wyart, *Europhys. Lett.* **105**, 26003 (2014).
- [41] A. Martinelli, F. Caporaletti, F. Dallari, M. Sprung, F. Westermeier, G. Baldi, and G. Monaco, *Phys. Rev. X* **13**, 041031 (2023).
- [42] D. Houdoux, A. Amon, D. Marsan, J. Weiss, and J. Crassous, *Commun. Earth Environ.* **2**, 90 (2021).
- [43] <https://gricad.univ-grenoble-alpes.fr>

### 6.3.3 Modèle de Picard écranté

#### 6.3.3.1 Transformée de Fourier inverse du propagateur

The screened Eshelby in Fourier space can be written :

$$\mathcal{G}_\lambda(\mathbf{q}) = -4 \frac{q_x^2 q_y^2}{q^2(q^2 + \lambda^2)} - \frac{\lambda^2}{\lambda^2 + q^2} \quad (6.11)$$

from this we get the asymptotic forms :

$$\mathcal{G}_\lambda(\mathbf{q}) \xrightarrow{\lambda \ll q} -4 \frac{q_x^2 q_y^2}{q^4} \quad (6.12)$$

$$\mathcal{G}_\lambda(\mathbf{q}) \xrightarrow{\lambda \gg q} -4 \frac{q_x^2 q_y^2}{\lambda^2 q^2} - 1 \quad (6.13)$$

which correspond in real space to :

$$\mathcal{G}_\lambda(\mathbf{r}) \xrightarrow{\lambda \ll q} \sim \frac{\cos 4\theta}{r^2} \quad (6.14)$$

$$\mathcal{G}_\lambda(\mathbf{r}) \xrightarrow{\lambda \gg q} \sim \frac{\cos 4\theta}{r^4} \quad (6.15)$$

To get the full expression of the screened propagator in real space we decompose the first term so that we get :

$$\mathcal{G}_\lambda(\mathbf{q}) = -4 \frac{q_x^2 q_y^2}{\lambda^2 q^2} + 4 \frac{q_x^2 q_y^2}{\lambda^2(\lambda^2 + q^2)} - \frac{\lambda^2}{\lambda^2 + q^2} \quad (6.16)$$

and so :

$$\mathcal{G}(r, \theta) = \frac{12}{\pi \lambda^2} \frac{\cos 4\theta}{r^4} - \frac{\lambda^2}{2\pi} K_0(\lambda r) + \frac{2}{\pi \lambda^2} \partial_x^2 \partial_y^2 K_0(\lambda r) \quad (6.17)$$

and after some algebra :

$$\mathcal{G}(r, \theta) = \frac{12}{\pi \lambda^2} \frac{\cos 4\theta}{r^4} - \frac{1}{32\pi \lambda r^3} \sum_{n=0}^4 K_n(\lambda r) \left( P_n^{(0)}(\lambda r) + P_n^{(1)}(\lambda r) \cos 4\theta \right) \quad (6.18)$$

with :

$$\begin{aligned} P_0^{(0)}(X) &= X(4 + 13X^2), & P_0^{(1)}(X) &= 3X(20 + X^2) \\ P_1^{(0)}(X) &= 8 + 12X^2, & P_1^{(1)}(X) &= 120 + 36X^2 \\ P_2^{(0)}(X) &= 4X(1 - X^2), & P_2^{(1)}(X) &= 60X^3 \\ P_3^{(0)}(X) &= 4X^2, & P_3^{(1)}(X) &= 12X^2 \\ P_4^{(0)}(X) &= -X^3, & P_4^{(1)}(X) &= X^3 \end{aligned} \quad (6.19)$$

The correct asymptotic forms should be recovered (but this still has to be verified).

From the asymptotical forms, it can be understood that criticality is lost for high screening since in this case the relaxation at the center dominates everything.

### 6.3.3.2 Avalanches

Le modèle de Picard écranté ne conservant pas la contrainte globale du système, il n'est pas possible de générer des avalanches selon le protocole RTP. Toutefois, l'approche quasistatique de l'AQS est tout à fait réalisable. Pour différentes tailles de systèmes  $L$  et différents écrantages  $\lambda$ , nous mesurons les distributions de tailles d'avalanche avec le protocole AQS dans ce modèle. Les résultats sont présentés à la figure ??.

Pour le plus faible écrantage ( $\lambda = 10^{-3}$ ), nous retrouvons des distributions en loi de puissance avec  $\tau \approx 1.35$  comme dans le cas du modèle de Picard ( $\lambda = 0$ ). Par contre, à mesure que  $\lambda$  augmente, ces lois de puissance sont soumises à un cut-off de plus en plus faible. De ce fait, à  $\lambda = 1$  la criticalité avalancheuse est perdue à toutes les tailles. Cette diminution du cut-off ne dépendant pas de la taille du système, cela suggère qu'il est uniquement contrôlé par la longueur d'écrantage  $\xi \sim 1/\sqrt{\lambda}$ . En d'autres termes, il n'y aurait des avalanches qu'en dessous de la longueur d'écrantage. Au-delà, le système perd sa criticalité. Etant donné qu'en dessous de  $\xi$  le propagateur prend la forme de celui d'Eshleby, il est raisonnable de penser que les avalanches ont la même structure que celle dans le modèle de Picard dans la zone non-écrantée. Pour valider cette hypothèse, nous redimensionnons les distributions obtenues pour les systèmes de plus grande taille selon :

$$P(S) \rightarrow \frac{P(S)}{\xi^{-\tau_{\text{eff}} d_{f,\text{eff}}}}, \quad S \rightarrow \frac{S}{\xi^{d_{f,\text{eff}}}} \quad (6.20)$$

La meilleure superposition des courbes est alors représentée à la figure ?? pour  $d_{f,\text{eff}} \approx 0.9$  et  $\tau_{\text{eff}} \approx 1.36$ . La valeur des exposants déterminée ainsi étant très porche de celles déterminées dans le cas du modèle de Picard avec un redimensionnement par  $L$ , cela conforte notre hypothèse. Ainsi, l'écrantage sur une longueur  $\xi$  n'aurait comme effet que de supprimer la criticalité du système au-delà de cette échelle de longueur.

Ainsi, même si au-delà de  $\xi$  la redistribution de la contrainte décroît comme  $1/r^4$ , la criticalité du système observée n'est pas celle du modèle 4-Picard. Des mesures annexes suggèrent que cette perte de criticalité est due à la forme de la relaxation globale dans le cas du modèle de Picard écranté, qui est concentrée sur le site actif.



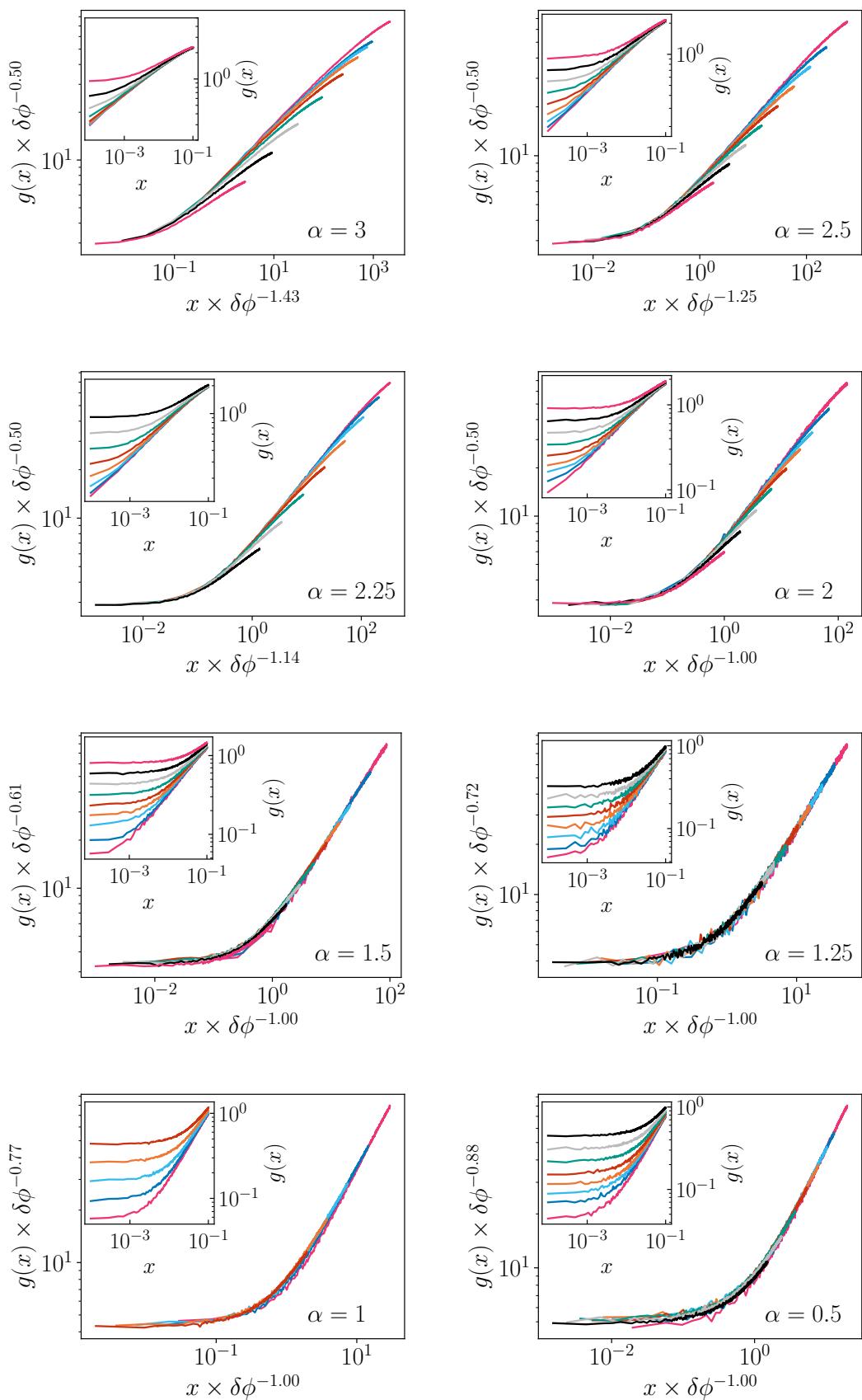


FIGURE 6.1

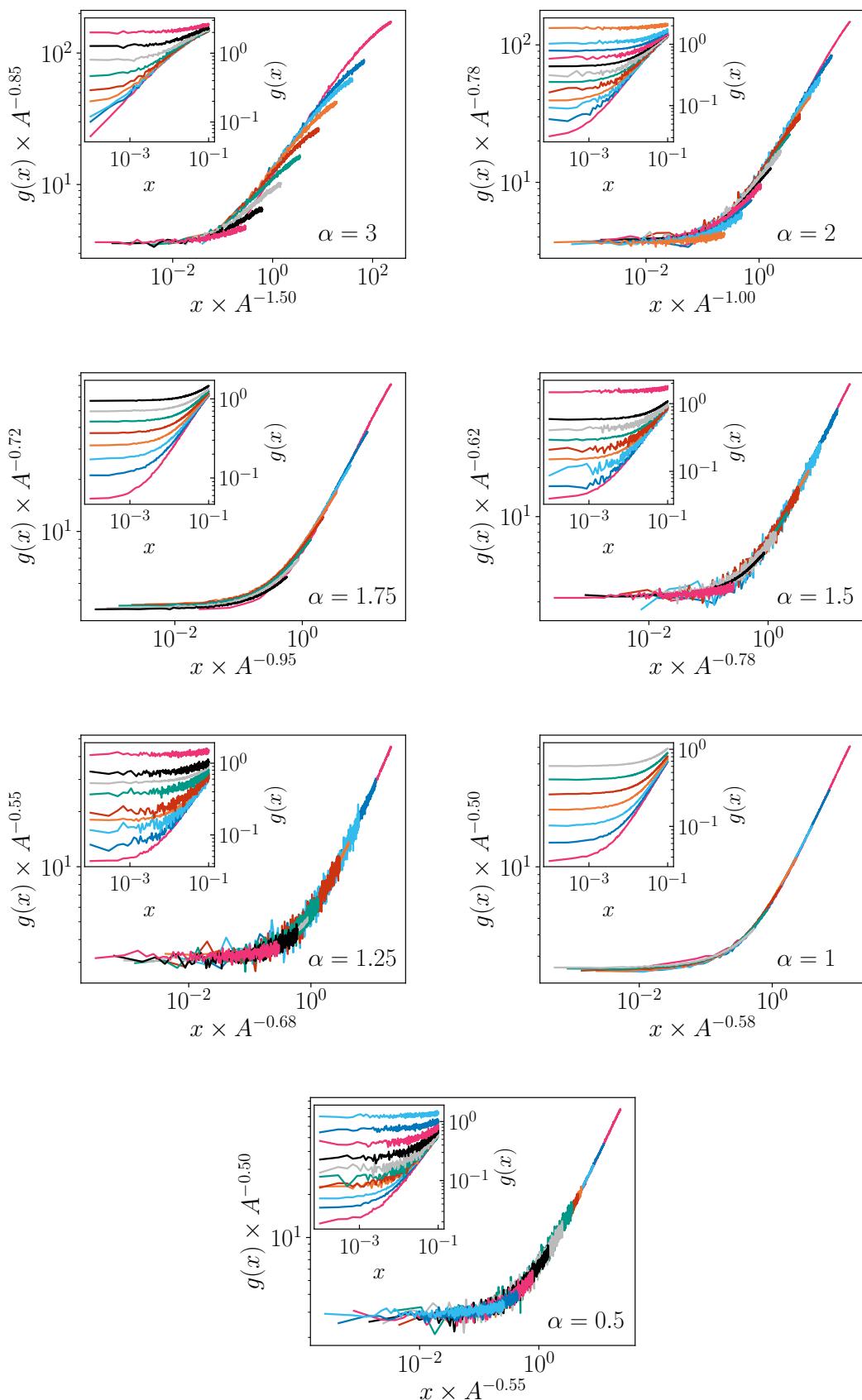


FIGURE 6.2

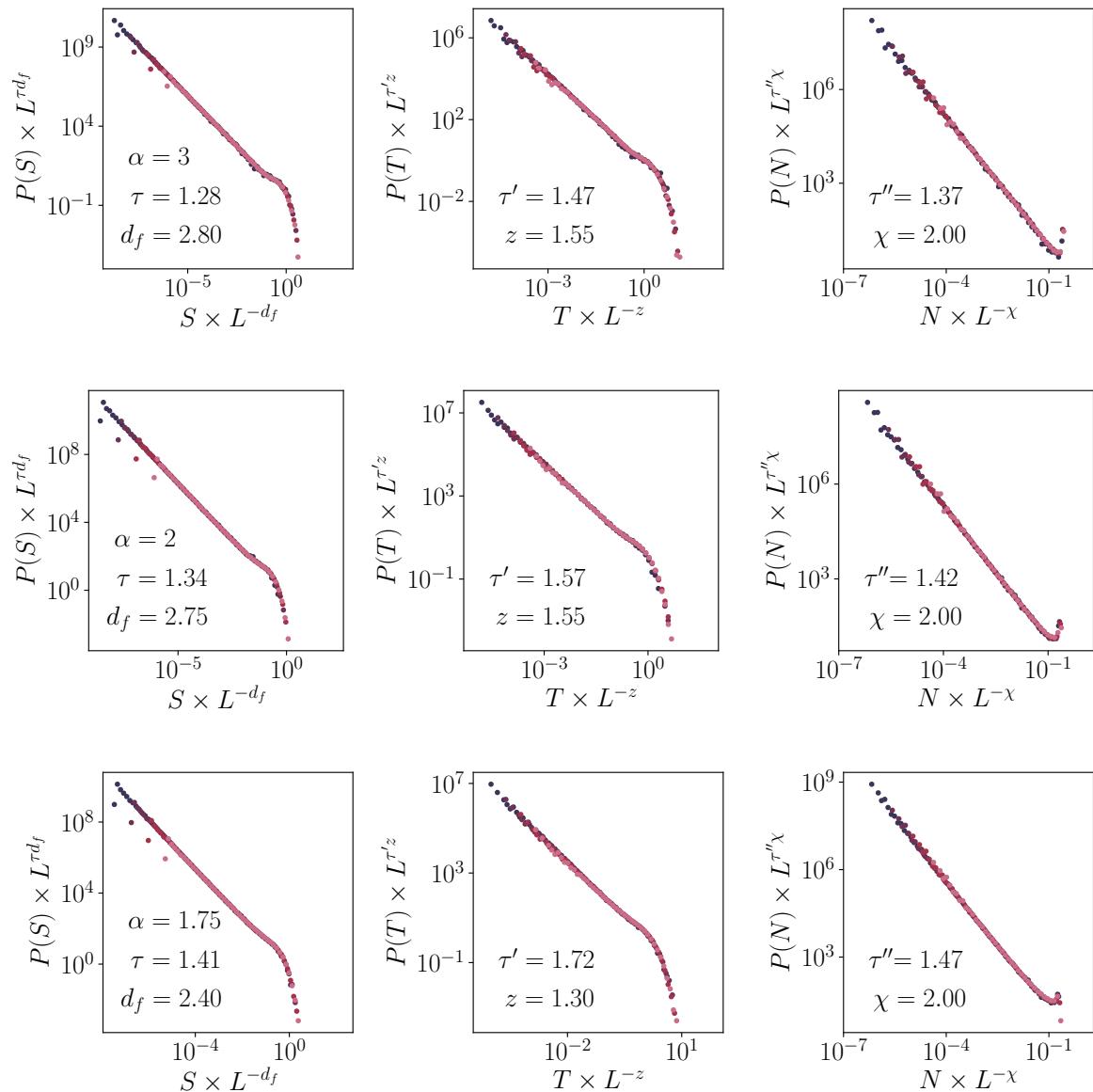


FIGURE 6.3

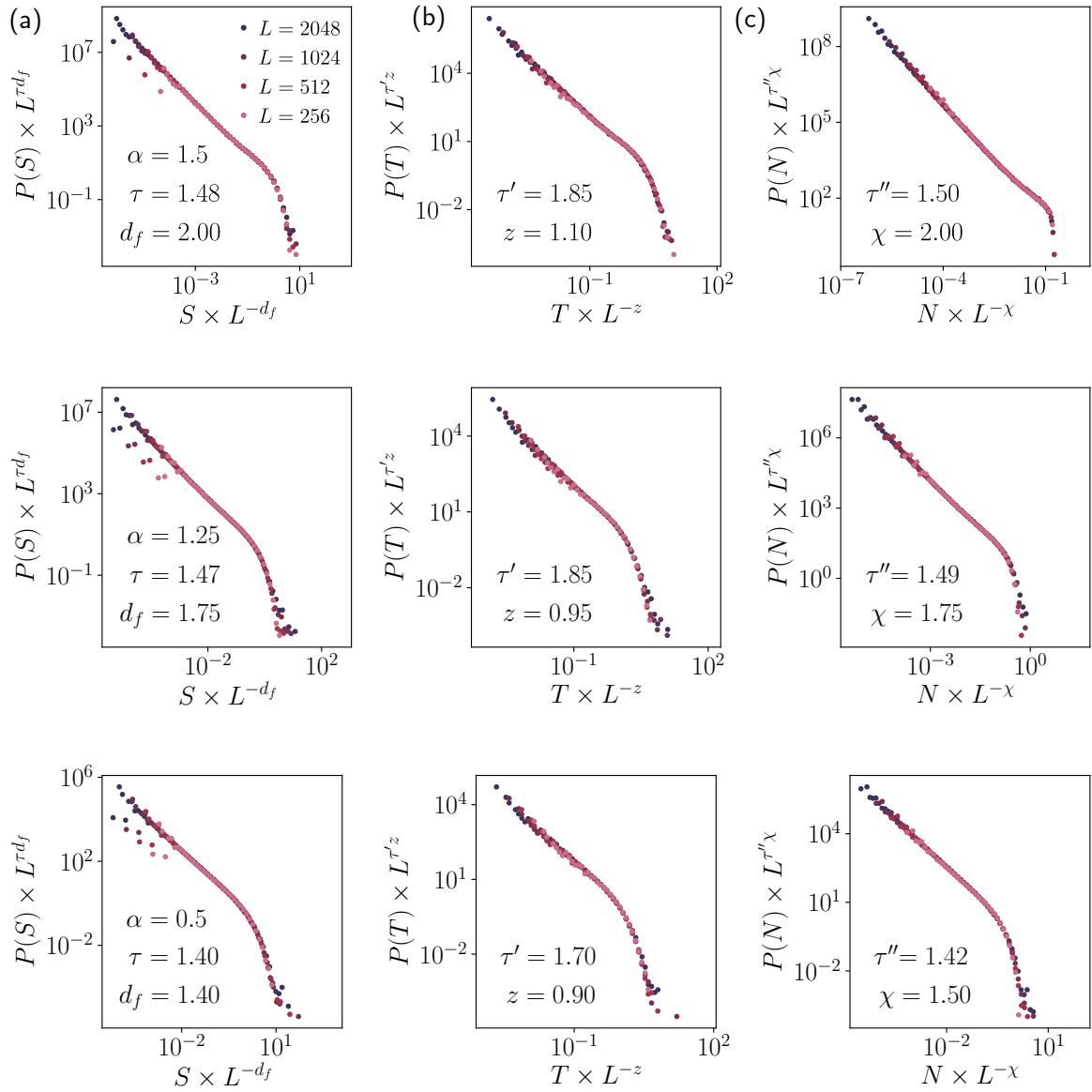


FIGURE 6.4

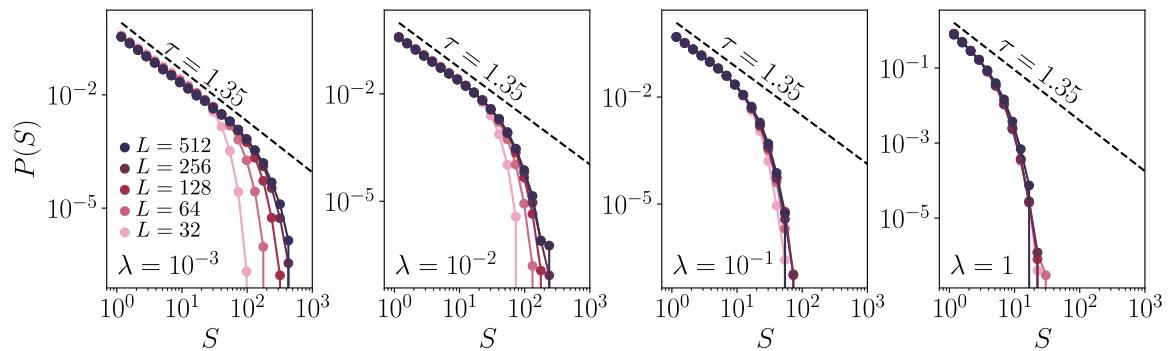


FIGURE 6.7 – Distributions de tailles d’avalanche quasistatiques dans le modèle de Picard écranté pour différentes valeurs de l’écrantage  $\lambda$

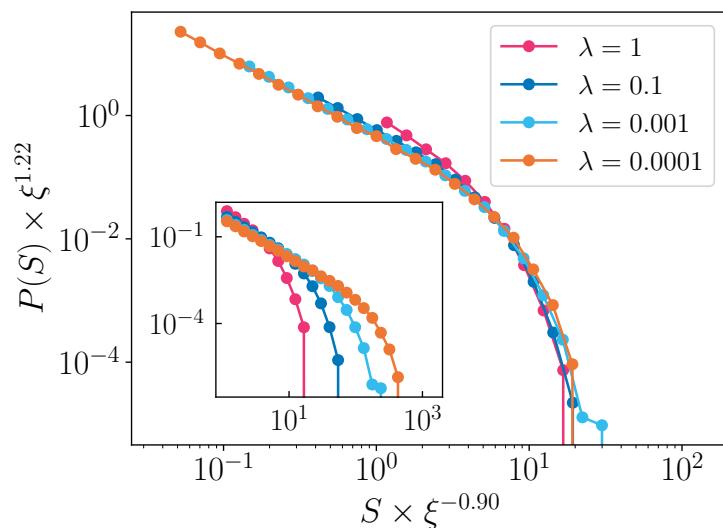


FIGURE 6.8 – Redimensionnement des distributions de tailles d’avalanche via la longueur d’écantage  $\xi$  dans le modèle de Picard écranté. En inset, les données avant redimensionnement. La taille du système est  $L = 512$ .