

## Matériels généraux

### A.1 Conventions

Dans tout cet ouvrage, nous définissons la transformée de Fourier d'une fonction  $f(\mathbf{r})$  dans l'espace continu selon la convention :

$$\hat{f}(\mathbf{q}) = \int d\mathbf{r} f(\mathbf{r}) e^{-i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}} \quad (\text{A.1})$$

et de manière réciproque :

$$f(\mathbf{r}) = \frac{1}{(2\pi)^D} \int d\mathbf{q} \hat{f}(\mathbf{q}) e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}} \quad (\text{A.2})$$

avec  $D$  la dimension de l'espace. Nous utilisons aussi parfois par ailleurs la notation  $\mathcal{F}[\cdot]$  à la place de la notation  $\hat{\cdot}$  pour des soucis de lisibilité.

Dans le cas de grandeurs discrètes définies sur un réseau, nous utiliserons aussi la notation  $\hat{\cdot}$  pour désigner la transformée de Fourier discrète associée. Celle-ci est alors définie selon les conventions choisies par le module cuFFT de CUDA [87]. Pour un réseau 1D de taille  $L$  dans l'espace réel défini par les positions  $x_n = n$  (réseau de pas 1) on a :

$$\hat{f}(q_m = \frac{2\pi}{L}m) = \sum_n f(x_n) e^{-iq_m x_n} \quad (\text{A.3})$$

### A.2 Implémentation discrète des propagateurs

Comme nous l'avons relevé dans le [chapitre 4](#), l'implémentation des propagateurs d'interaction dans l'espace de Fourier discret doit être réalisée d'une certaine manière afin d'obtenir, dans l'espace réel discret, une évolution bien définie (i.e. ne présentant pas d'instabilités numériques, voir [sous-sous-section 4.3.3.2](#)). Pour ce faire, entre la forme continue  $\hat{G}(\mathbf{q})$  du propagateur dans l'espace de Fourier et la forme discrète associée  $\hat{G}(\mathbf{q}_n)$ , une conversion est à réaliser pour l'équivalence entre le nombre d'onde continu  $\mathbf{q}$  et le nombre d'onde discret  $\mathbf{q}_n$ .

Une manière de comprendre cette conversion est de considérer l'exemple simple du propagateur représenté par l'opérateur laplacien  $\nabla^2$  en 1D. Dans l'espace continu, on a :

$$\nabla^2 f(x) \xrightarrow{\mathcal{F}} -q^2 \hat{f}(q) \quad (\text{A.4})$$

Dans l'espace discret représenté par le réseau de positions  $\{x_n = n\}$ , l'opérateur laplacien est calculé par une méthode de différences finies selon :

$$\nabla^2 f(x_n) \equiv f(x_{n+1}) + f(x_{n-1}) - 2f(x_n) \quad (\text{A.5})$$

En appliquant la transformée de Fourier discrète donnée par l'équation A.3, on obtient :

$$\nabla^2 f(x_n) \xrightarrow{\mathcal{F}} [2 \cos(q_n) - 2] \hat{f}(q_n) \quad (\text{A.6})$$

Ainsi, pour retrouver l'équivalence entre forme continue et forme discrète dans l'espace de Fourier, la conversion  $q^2 \rightarrow 2(1 - \cos(q_n))$  est nécessaire. C'est donc selon ce raisonnement que les propagateurs d'interaction sont implémentés numériquement dans les chapitre 3 et chapitre 4.

# Annexe B

## Annexes au chapitre 1

### B.1 Réalisations expérimentales de la transition de dépiégeage

Dans cette section, nous présentons deux réalisations de la transition de dépiégeage en matière molle.

#### Dynamique de mouillage à la ligne triple

En condition de mouillage non-total, lorsque l'on dépose une goutte sur un substrat solide, il se forme trois interfaces : une entre le liquide et le solide, une entre le solide et le gaz et une entre le liquide et le gaz. La ligne reliant ces trois interfaces est appelée ligne triple. Cette ligne est soumise à différentes forces : une force de pesanteur, favorisant l'étalement de la goutte, une force de tension de surface, favorisant la minimisation des interfaces, et, dans le cas d'un solide rugueux, non-homogène, une force d'attraction exercée par les asperités. On reconnaît là tous les ingrédients nécessaires au phénomène de la transition de dépiégeage [39, 144, 145] : la pesanteur joue le rôle de force extérieure, la tension de surface la force de rappel élastique et l'interaction avec le solide la force de piégeage.

Dans cette optique, des expériences ont été mises en place pour reproduire la transition de dépiégeage dans le cadre du mouillage [146, 147]. Par exemple, dans [146], un substrat solide de verre chromé est retiré d'un bain liquide d'un mélange eau-glycérol à vitesse constante. Ce protocole correspond alors au phénomène de dépiégeage avec vitesse imposée de l'interface (et non la force extérieure). Via une capture optique du système, les auteurs ont pu analyser le mouvement de l'interface au cours du temps et sa structure, révélant une rugosité non-triviale, caractéristique du phénomène.

#### Propagation d'une fracture

La propagation des fractures dans les solides désordonnés représente un autre exemple de la transition de dépiégeage. Dans l'exemple présenté à la figure B.1-(b), un matériau est fracturé selon un mode I de fracture [39], i.e. en tirant une plaque perpendiculairement

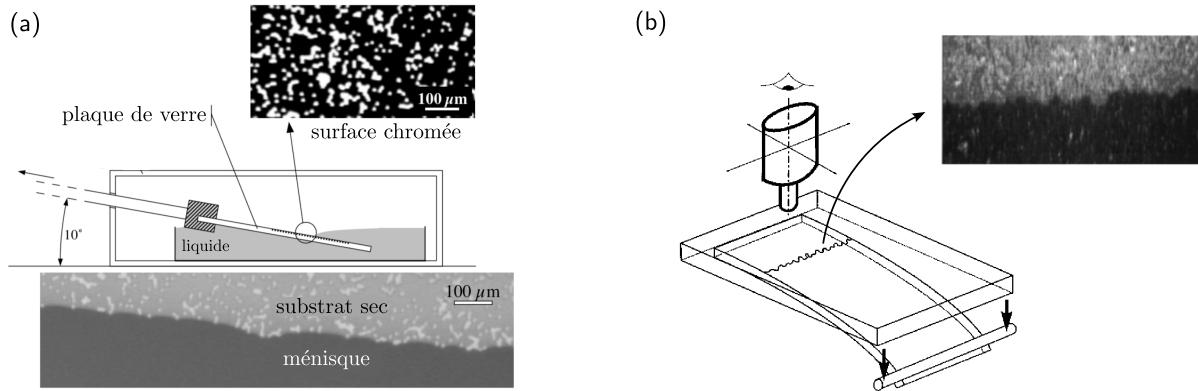


FIGURE B.1 – Illustrations des dispositifs expérimentaux permettant l’observation de la transition de depinning dans des conditions réelles. (a) Expérience (et figure) tirée de [146] sur la propagation d’une ligne de mouillage. (b) Expérience (et figure) tirée de [148] sur la propagation d’un front de fracture solide dans un bloc de plexiglas.

à la direction de propagation du front de fracture. Dans ce cadre, la limite entre les deux morceaux du solide peut être associée à une interface soumise au phénomène de dépiégeage. On y retrouve en effet tous les ingrédients nécessaires à cette transition : une force de rappel élastique exercée via l’élasticité du solide en volume, une force extérieure via la traction de la plaque inférieure, et une force de piégeage aléatoire directement associée à la structure amorphe du solide.

Comme pour le phénomène de mouillage, des expériences réelles ont permis d’étudier la propagation de ce front [148–151]. Dans ce cas, l’analyse de la dynamique de l’interface et de sa rugosité a permis de confirmer sa compréhension dans le cadre de la théorie de la transition de dépiégeage.

## B.2 Propagateur de Eshelby

Dans cette sous-section, nous présentons en détail le calcul du propagateur d’Eshelby dont la forme a été introduite à la [sous-sous-section 1.4.2.3](#).

Afin de comprendre comment la contrainte est redistribuée dans le milieu au cours d’un réarrangement plastique dans le cadre de la transition vers l’écoulement, nous présentons la résolution de ce problème, déjà abordée à de nombreuses reprises dans la littérature, dans le cadre de la théorie de l’élasticité linéaire. Le problème initial est alors le suivant : comment est modifié le champ de contrainte local  $\sigma$  sous forçage suite à une déformation plastique locale  $\epsilon^{pl}$  ?

Pour répondre à cette question, nous reprenons les calculs des travaux [13, 152]. Considérons un milieu continu élastique infini, isotrope et incompressible dans lequel nous définissons un champ de déplacement  $u_i(\mathbf{r}) = u_i^{el}(\mathbf{r}) + u_i^{pl}(\mathbf{r})$ , décomposable en une composante élastique et une composante plastique. À ce champ est associé un tenseur de déformation  $\epsilon_{ij}$  défini comme :

$$\epsilon_{ij}(\mathbf{r}) = \epsilon_{ij}^{\text{él}}(\mathbf{r}) + \epsilon_{ij}^{\text{pl}}(\mathbf{r}) = \frac{1}{2} (\partial_i u_j^{\text{él}}(\mathbf{r}) + \partial_j u_i^{\text{él}}(\mathbf{r})) + \frac{1}{2} (\partial_i u_j^{\text{pl}}(\mathbf{r}) + \partial_j u_i^{\text{pl}}(\mathbf{r})) \quad (\text{B.1})$$

et un tenseur des contraintes  $\sigma_{ij}$  défini via la condition d'incompressibilité comme :

$$\sigma_{ij}(\mathbf{r}) = 2\mu\epsilon_{ij}^{\text{él}}(\mathbf{r}) = 2\mu\epsilon_{ij}(\mathbf{r}) - 2\mu\epsilon_{ij}^{\text{pl}}(\mathbf{r}) \quad (\text{B.2})$$

Dans le cas de notre étude, il est d'usage de décomposer les champs dans le milieu en une partie de réponse purement élastique au forçage extérieur ( $\sigma^0, u^0$ ) et une partie de réponse à la déformation plastique ( $\sigma^1, u^1$ ), donnant alors avec ces notations :

$$\epsilon_{ij}^{\text{él}} = \epsilon_{ij}^{\text{él},0} + \epsilon_{ij}^{\text{él},1}, \quad \epsilon_{ij}^{\text{pl}} = \epsilon_{ij}^{\text{pl},1}, \quad \sigma_{ij} = \sigma_{ij}^0 + \sigma_{ij}^1 \quad (\text{B.3})$$

L'effet non-trivial de la déformation plastique est alors encodé dans les équations :

$$\begin{cases} -\partial_i P^1(\mathbf{r}) + \partial_j \sigma_{ij}^1(\mathbf{r}) = 0 \\ \partial_k u_k^1(\mathbf{r}) = 0 \end{cases} \quad (\text{B.4})$$

la première équation correspondant à la condition d'équilibre mécanique et la seconde à l'incompressibilité du matériau. L'objectif est alors de déterminer  $\sigma_{ij}^1$  en fonction de  $\epsilon_{ij}^{\text{pl},1}$  à partir de ces équations. Dans la suite, nous omettrons les notations <sup>1</sup> et ( $\mathbf{r}$ ) pour alléger l'écriture.

En utilisant l'équation B.1 et l'équation B.2, nous pouvons ré-exprimer la condition d'équilibre mécanique comme suit :

$$-\partial_i P + \mu \partial_j \partial_j u_i = 2\mu \partial_j \epsilon_{ij}^{\text{pl}} \quad (\text{B.5})$$

En passant dans l'espace de Fourier, avec les conventions exposées dans la section A.1, on obtient grâce à la condition d'incompressibilité :

$$\hat{P} = -2\mu \frac{q_i q_j}{q^2} \hat{\epsilon}_{ij}^{\text{pl}} \quad (\text{B.6})$$

soit :

$$\hat{u}_i = \left( q_j \hat{\epsilon}_{ij}^{\text{pl}} - q_i \frac{q_\alpha q_\beta}{q^2} \hat{\epsilon}_{\alpha\beta}^{\text{pl}} \right) \frac{2i}{q^2} \quad (\text{B.7})$$

En se rapportant à la définition du tenseur des contraintes dans l'espace de Fourier on a alors finalement :

$$\begin{aligned} \hat{\sigma}_{ij} &= 2\mu \hat{G}_{ijkl} \hat{\epsilon}_{kl}^{\text{pl}} \\ \hat{G}_{ijkl} &= \frac{q_i q_l \delta_{kj} + q_j q_l \delta_{ki}}{q^2} - 2 \frac{q_i q_j q_k q_l}{q^4} - \delta_{ki} \delta_{jl} \end{aligned} \quad (\text{B.8})$$

Afin d'obtenir une expression finale du champ de contrainte suite au réarrangement plastique, nous faisons l'hypothèse que celui-ci possède la même symétrie que le forçage, que nous prenons comme un cisaillement simple dans la direction  $\hat{\mathbf{e}}_x$ . Sous cette hypothèse, on a alors en deux dimensions  $\hat{\epsilon}_{xy}^{\text{pl}} = \hat{\epsilon}_{yx}^{\text{pl}} = \hat{\epsilon}^{\text{pl}} \neq 0$  et  $\hat{\epsilon}_{xx}^{\text{pl}} = \hat{\epsilon}_{yy}^{\text{pl}} = 0$ . L'équation B.8 nous permet alors d'obtenir l'expression :

$$\hat{\sigma}_{xy} = 2\mu\hat{G}\epsilon^{\text{pl}}, \quad \hat{G}(\mathbf{q}) = -4\frac{q_x^2 q_y^2}{q^4} \quad (\text{B.9})$$

qui relie directement la perturbation du champ de contrainte au réarrangement plastique. Des expressions similaires peuvent être obtenues pour les composantes  $\sigma_{xx}$  et  $\sigma_{yy}$  du tenseur des contraintes. En espace réel, cette relation devient :

$$\sigma_{xy}(\mathbf{r}) = \int d\mathbf{r}' G(\mathbf{r} - \mathbf{r}')\epsilon^{\text{pl}}(\mathbf{r}'), \quad G(\mathbf{r}) = \frac{\cos(4\theta)}{\pi r^2} \quad (\text{B.10})$$

On appelle alors le propagateur  $G$  propagateur d'Eshelby. Celui-ci correspond à la redistribution de contrainte de cisaillement induite par un réarrangement plastique infiniment localisé (de la forme  $\epsilon^{\text{pl}}(\mathbf{r}) = \epsilon_0\delta(\mathbf{r})$ ) ou de manière équivalente à celle induite en champ lointain par un évènement d'extension finie.

## B.3 Propagateurs hydrodynamiques

Dans cette partie, nous développons le raisonnement dont les conclusions ont été exposées à la [sous-sous-section 1.4.1.3](#). Nous proposons donc de montrer que l'interaction hydrodynamique entre deux particule immersées dans un fluide est génériquement à longue portée. En commençant par dériver sa forme dans le cas idéal, nous montrerons comment un raisonnement basé sur des principes simples de conservation permet d'appliquer cette analyse à toute une zoologie de systèmes, confirmant l'omniprésence de la longue portée dans les dispositifs expérimentaux et donc, a fortiori, dans la transition de réversibilité.

### Hydrodynamique en milieu infini

Dans le cas de la transition de réversibilité, lorsqu'une particule interagit irréversiblement avec une autre particule au cours d'un cycle, elle quitte son orbite initiale en appliquant une certaine force sur le fluide. Cette force va alors modifier l'écoulement du fluide via les lois régissant sa dynamique et donc affecter le mouvement des particules environnantes. La question est de savoir comment. Pour y répondre, nous nous concentrerons sur un problème générique à deux particules : une particule 1 située en  $\mathbf{r}$  exerce une force  $\mathbf{F}^1(\mathbf{r})$  sur le fluide et induit un écoulement qui entraîne le déplacement d'une particule 2 située en  $\mathbf{r}'$  à la vitesse  $\mathbf{v}^2$ . En considérant le fluide suspendant comme incompressible et dans la limite de bas Reynolds, son écoulement suit une dynamique régie par les équations de Stokes :

$$\begin{aligned} -\partial_i P + \eta \partial_j \partial_j v_i + f_i &= 0 \\ \partial_j v_j &= 0 \end{aligned} \quad (\text{B.11})$$

avec  $\mathbf{v}(\mathbf{r})$  le champ de vitesse eulérien du fluide,  $P(\mathbf{r})$  le champ de pression,  $\eta$  la viscosité dynamique et  $\mathbf{f}(\mathbf{r})$  le champ de force extérieur. Dans la limite de champ lointain, i.e. à grande distance des particules, celles-ci peuvent être assimilées à des objets ponctuels. Dans cette approximation, nous pouvons décrire la force exercée par la particule 1 sur le fluide comme infiniment localisée  $\mathbf{F}^1(\mathbf{r}) = \mathbf{F}^1\delta(\mathbf{r})$  et la vitesse de la particule 2 comme correspondant à celle du fluide en ce point  $\mathbf{v}^2 = \mathbf{v}(\mathbf{r}')$  [51]. La résolution de ce problème revient donc à résoudre les équations de Stokes pour obtenir le champ de vitesse du fluide en  $\mathbf{r}'$  sous l'action du champ de force extérieur  $\mathbf{f}(\mathbf{r}) = \mathbf{F}^1\delta(\mathbf{r})$ . En d'autres termes, cela revient à calculer la fonction de Green associée aux équations de Stokes [153].

La résolution de ce problème bien connu (voir [154] par exemple) permet de définir le tenseur d'Oseen  $G_{ij}$ , reliant  $\mathbf{F}^1$  à  $\mathbf{v}(\mathbf{r}')$  par la relation linéaire :

$$v_i(\mathbf{r}') = G_{ij}(\mathbf{r} - \mathbf{r}')F_j^1, \quad G_{ij}(\mathbf{r}) = \frac{1}{8\pi\eta r} \left( \delta_{ij} + \frac{r_i r_j}{r^2} \right) \quad (\text{B.12})$$

définissant ainsi une interaction hydrodynamique entre les deux particules, décroissant comme  $\sim 1/r$  dans un milieu tridimensionnel infini.

Ce résultat calculatoire peut aussi se comprendre plus intuitivement, comme l'explique très clairement l'étude [51]. Dans la suite de cette partie, nous présentons le raisonnement de l'auteur. En fait, les équations de Stokes dérivent de deux lois de conservation fondamentales : celle de la quantité de mouvement et celle de la masse. Lorsqu'une particule applique une force locale sur le fluide, celle-ci se comporte comme une source de quantité de mouvement. Pour que cette dernière soit conservée, le flux local de quantité de mouvement émanant de la particule doit décroître comme  $\sim 1/r^2$  en 3D. Or ce flux local de quantité de mouvement n'étant autre que le tenseur des contraintes  $\sigma$  associé au fluide, cette conservation implique directement  $\sigma \sim 1/r^2$ . La partie associée au cisaillement de ce tenseur étant  $\sigma_{cis} \sim \eta \nabla \mathbf{v}$  on a donc  $\mathbf{v} \sim 1/\eta r$ . De plus, par des considérations de symétrie, la partie adimensionnelle du propagateur hydrodynamique prend nécessairement la forme  $\delta_{ij} + C \frac{r_i r_j}{r^2}$ . On retrouve donc finalement, basé sur ces arguments simples :

$$G_{ij} \sim \frac{1}{\eta r} \left( \delta_{ij} + C \frac{r_i r_j}{r^2} \right) \quad (\text{B.13})$$

avec  $C$  une constante qui peut être déterminée par conservation de la masse (en imposant  $\partial_i G_{ij} = 0$ ) pour donner  $C = 1$ .

En plus de ce premier effet, nous pouvons identifier une autre source de modification de l'écoulement. Celle-ci vient de la conservation de la masse de fluide. En fait, lors de son déplacement, la particule 1 modifie la répartition de masse dans le fluide. Celle-ci peut alors être vue, en plus d'une source de quantité de mouvement, comme un dipôle de source de matière (avec création de masse à l'avant du mouvement et suppression de masse à l'arrière). En 3D, un tel dipôle génère une vitesse d'écoulement décroissant comme  $\sim 1/r^3$ , générant ainsi un terme additionnel à l'équation B.13 en  $\sim 1/r^3$ . Cependant, à grande distance, cette contribution est négligeable devant celle décroissant comme  $\sim 1/r$ . On retrouve donc bien en champ lointain le tenseur d'Oseen.

Ce résultat basé sur les deux principes de conservation sont très généraux et permettent facilement d'étendre leur validité à d'autre situations. Notamment, dans une suspension de plus de deux particules, la forme de l'interaction en champ lointain ne sera pas modifiée puisque dans ce cas on a toujours conservation de la quantité de mouvement et de la masse [51]. A priori, dans un système assimilé à un milieu infini, les interactions hydrodynamiques entre les particules lors d'un cycle de cisaillement sont donc bien à longue portée. Toutefois une telle approximation de milieu infini est parfois non valable dans les dispositifs expérimentaux réalisant la transition de réversibilité. Dans ces cas là, le raisonnement doit être adapté.

### Hydrodynamique en milieux complexes

Un premier exemple vient des systèmes quasi-2D. Lorsque le fluide suspendant est confiné entre deux plaques rigides, espacées d'une faible distance  $\lambda$ , les frottements avec le solide constituent une perte de quantité de mouvement dans la direction orthogonale aux plaques. Dans ce cas, le flux local de quantité de mouvement généré par la particule 1 décroît exponentiellement avec la distance au-delà de cette distance typique de confinement  $r > \lambda$ . Toutefois, dans une telle configuration, la masse du fluide est toujours conservée. Le déplacement de la particule 1 peut toujours être vu comme un dipôle de source de matière mais prenant cette fois place dans un milieu 2D. La vitesse de l'écoulement associé décroît alors comme  $\sim 1/r^2$ , amenant à un propagateur hydrodynamique de la forme :

$$G_{ij} \sim \frac{1}{\eta r^2} \left( \delta_{ij} - 2 \frac{r_i r_j}{r^2} \right) \quad (\text{B.14})$$

Ainsi, sous confinement, les interactions médiées par le fluide restent à longue portée.

Un autre système envisageable est celui d'un fluide contenu dans un film suspendu (i.e. entouré de gaz par exemple, comme dans une bulle de savon). Dans ce cas, la quantité de mouvement et la masse sont conservées mais l'écoulement prend place dans un milieu 2D. La conservation de la quantité de mouvement implique donc cette fois un flux local évoluant comme  $\sim 1/r$  et donc une vitesse d'écoulement se comportant comme  $\sim \ln(r)$ , soit des interactions d'une portée extrêmement grande.

Enfin une dernière situation envisageable, bien que peut-être moins pertinente dans le cas de la transition de réversibilité, est celle d'un écoulement dans un milieu poreux. Dans ce cas, la quantité de mouvement n'est pas conservée, comme dans le cas du confinement entre deux plaques, mais cette fois la conservation de la masse prend place dans un espace 3D. Dans ce cas, le raisonnement de conservation nous amène à un propagateur hydrodynamique décroissant comme  $\sim 1/r^3$ .

De manière toute à fait générale, le fluide suspendant permet donc de médier des interactions entre les particules, représentée par un propagateur hydrodynamique de la forme :

$$G_{ij} \sim \frac{1}{r^\gamma} \left( \delta_{ij} - 2 \frac{r_i r_j}{r^2} \right) \quad (\text{B.15})$$

avec  $\gamma$  un entier pouvant prendre différentes valeurs en fonction du dispositif spécifique étudié. Via a minima la conservation de la masse, ces interactions présentent donc toujours la particularité d'être à longue portée.

Dans une modélisation plus spécifique de la transition de réversibilité, les interactions irréversibles de contact entre deux particules peuvent être vues comme des dipôles de force sur le fluide. Les résultats présentés précédemment sont alors modifiés selon  $\gamma \rightarrow \gamma + 1$ . Par exemple, en milieu 3D infini, nous nous attendons à ce qu'un évènement affecte les autres particules du système via une interaction décroissant comme  $\sim 1/r^2$ .



## Annexes au chapitre 2

### C.1 Mesures d'hyperuniformité dans le modèle LR-Manna

Dans cette section, nous présentons les résultats obtenus dans le cadre de l'étude de l'hyperuniformité dans les modèles LR-Manna. Plus précisément, nous présentons sur les figures suivantes les redimensionnements obtenus de la même façon que dans le cas  $\alpha = 4$  représenté par la [figure 2.15](#) mais pour d'autres valeurs de la portée du transport.

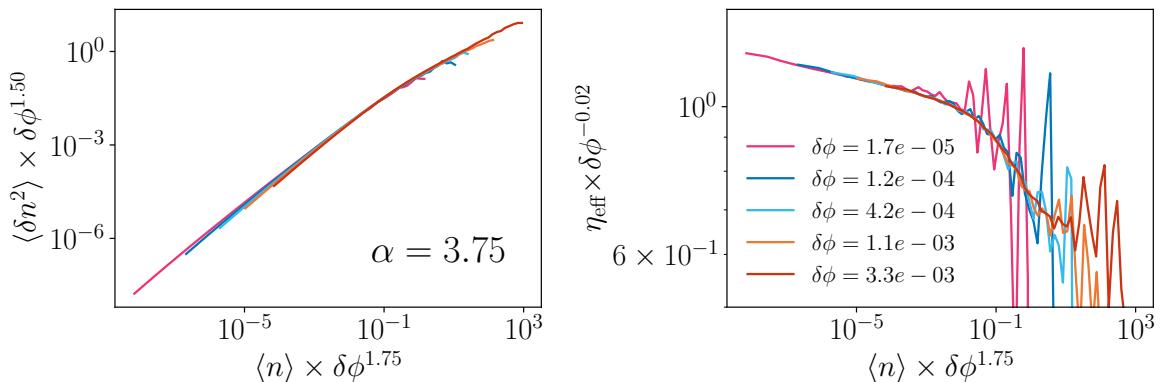
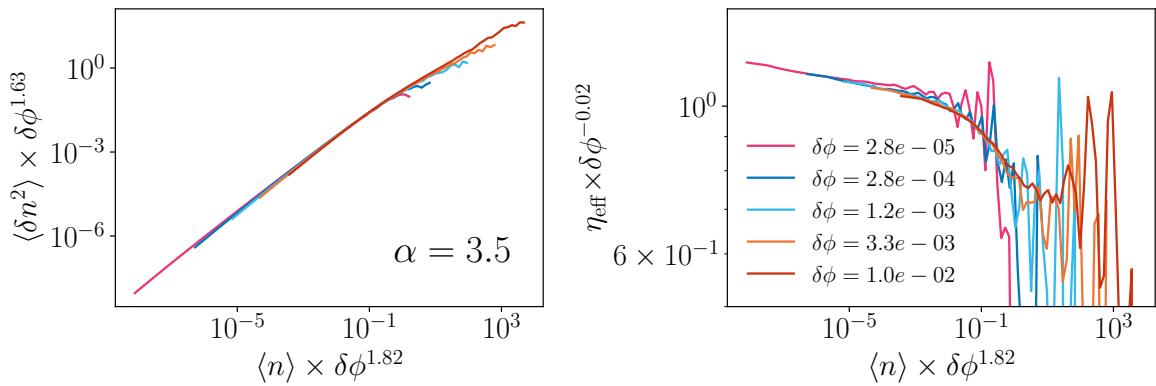
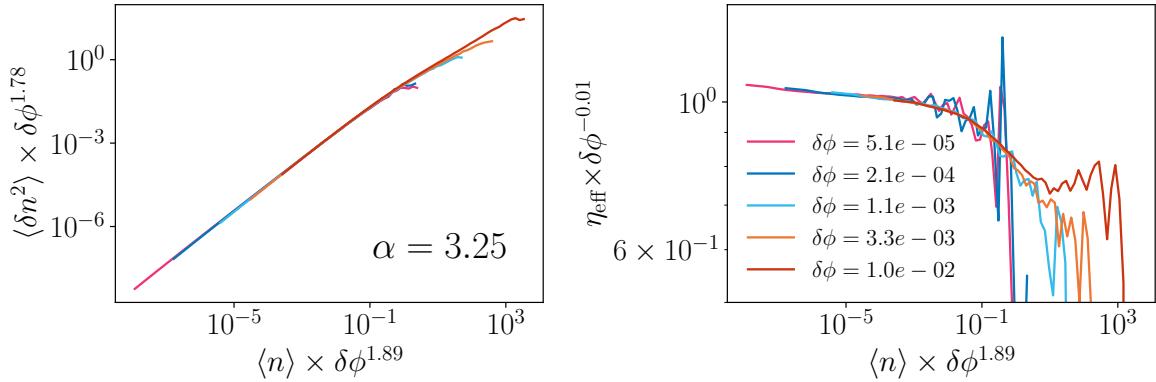
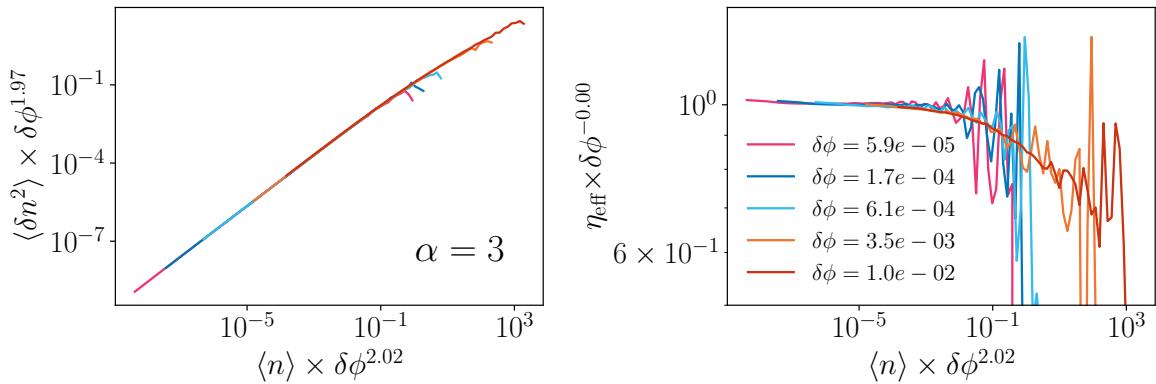


FIGURE C.1 – Idem que la [figure 2.15](#), seulement pour  $\alpha = 3.75$


 FIGURE C.2 – Idem que la figure 2.15, seulement pour  $\alpha = 3.5$ 

 FIGURE C.3 – Idem que la figure 2.15, seulement pour  $\alpha = 3.25$ 

 FIGURE C.4 – Idem que la figure 2.15, seulement pour  $\alpha = 3$

Annexe **D**

## Annexes au chapitre 3

### D.1 Transformée de Fourier des propagateurs

Dans cette sous-section, nous présentons le calcul dans l'espace continu de la transformée de Fourier des propagateurs  $\mathcal{G}^2$  utilisés dans le  $\alpha$ -ROM et donnés par :

$$\mathcal{G}^2(\mathbf{r}) = \frac{c}{\left(1 + \left(\frac{r}{D_p}\right)^2\right)^\alpha}, \quad c > 0 \quad (\text{D.1})$$

Nous prenons alors  $D_p = 1$  (comme dans nos simulations numériques) et notons  $f(\mathbf{r}) = \mathcal{G}^2(\mathbf{r})$  pour alléger l'écriture.

Nous commençons par utiliser le lien entre transformée de Fourier d'une fonction radiale et transformée de Hankel [155] permettant d'obtenir <sup>1</sup> :

$$\hat{f}(\mathbf{q}) = q^{\frac{2-D}{2}} (2\pi)^{\frac{D}{2}} \int dr J_{\frac{D-2}{2}}(qr) r^{\frac{D-2}{2}} f(\mathbf{r}) r \quad (\text{D.2})$$

qui dans notre cas amène à :

$$\hat{f}(\mathbf{q}) = cq^{\frac{2-D}{2}} (2\pi)^{\frac{D}{2}} \int dr J_{\frac{D-2}{2}}(qr) \frac{r^{\frac{D}{2}}}{(1+r^2)^\alpha} \quad (\text{D.3})$$

Puis nous utilisons le résultat suivant concernant les fonctions de Bessel [156] :

$$\int_0^\infty \frac{J_\nu(bx)x^{\nu+1}}{(x^2+a^2)^{\mu+1}} dx = \frac{a^{\nu-\mu}b^\mu}{2^\mu \Gamma(\mu+1)} K_{\nu-\mu}(ab), \quad -1 < \nu < 2\mu + \frac{3}{2} \quad (\text{D.4})$$

Par identification des deux équations on arrive alors directement à :

$$\hat{f}(\mathbf{q}) = cq^{\frac{2-D}{2}} (2\pi)^{\frac{D}{2}} \frac{q^{\alpha-1}}{2^{\alpha-1} \Gamma(\alpha)} K_{\frac{D-2}{2}-(\alpha-1)}(q) \quad (\text{D.5})$$

soit en simplifiant et en utilisant  $K_\nu(q) = K_{-\nu}(q)$  :

---

1. Il suffit, à partir de la définition de la transformée de Fourier, de faire l'intégrale sur la variable angulaire  $\theta$  qui permet d'obtenir la fonction de Bessel de première espèce.

$$\hat{f}(\mathbf{q}) = \frac{(2\pi)^{\frac{D}{2}}}{2^{\alpha-1}\Gamma(\alpha)} q^{\alpha-\frac{D}{2}} K_{\alpha-\frac{D}{2}}(q), \quad \alpha > \frac{D-1}{4} \quad (\text{D.6})$$

ce qui nous permet bien de retrouver les expressions données au [chapitre 3](#) pour  $D = 2$  et  $D = 3$ .

## D.2 Résolution numérique du modèle $\mu$ -Hébraud-Lequeux

Afin d'étudier le comportement critique du modèle  $\mu$ -Hébraud-Lequeux dans le cadre de la modélisation champ moyen du  $\alpha$ -ROM, nous proposons une méthode d'intégration numérique indirecte de l'[équation 3.35](#). Dans le cas du modèle original de Hébraud-Lequeux, il est possible de résoudre les équations associées via une dynamique de population [118]. Dans cette partie, nous proposons de transposer cette méthode de résolution à l'intégration des équations du modèle  $\mu$ -Hébraud-Lequeux. En fait, l'équation suivante :

$$\begin{aligned} \partial_t P(\mathbf{r}, t) &= -a\Gamma(t)|\nabla|^\mu P(\mathbf{r}, t) - \frac{1}{\tau}\Theta(|\mathbf{r}| > R)P(\mathbf{r}, t) + \delta(\mathbf{r})\Gamma(t) \\ \Gamma(t) &= \frac{1}{\tau} \int_{|\mathbf{r}| > R} d\mathbf{r} P(\mathbf{r}, t) \end{aligned} \quad (\text{D.7})$$

peut être vue comme une [équation de Fokker-Planck](#). Suivant cette idée, nous pouvons associer à ce modèle une [dynamique de Langevin](#) simple sur la variable  $\mathbf{r}$  qui permet, statistiquement, de reconstruire le comportement de la distribution  $P$ .

En pratique, nous considérons donc  $N$  particules dont les positions  $\mathbf{r}_i$  évoluent dans un espace de dimension  $D$ , présentant [une barrière](#) en  $|\mathbf{r}| = R$ . La dynamique du mouvement des particules se fait en temps continu, discréteisé selon un pas de temps  $\Delta t$ . À chaque pas de temps  $t_i$ , chaque particule effectue un saut distribué selon une loi de Lévy stable  $S_\mu(0, c, 0)$  définie par sa fonction caractéristique :

$$\phi(k) = \exp(-|ck|^\mu) \quad (\text{D.8})$$

modélisant le terme en dérivée fractionnaire dans l'équation sur  $P$  [68, 157]. Par équivalence des deux descriptions, la constante  $c$  est alors définie selon<sup>2</sup> :

$$c = (s\Gamma(t)\Delta t)^{1/\mu} \quad (\text{D.9})$$

la constante  $s$  dans la vision dynamique de population jouant un rôle similaire à la constante  $a$  dans l'équation d'évolution de la distribution. Il est théoriquement possible de relier  $a$  à  $s$  mais ce n'est pas nécessaire dans notre cas puisque nous nous intéressons simplement au comportement critique associé. Lorsqu'une particule est au-delà de la barrière, celle-ci est remise à l'origine du repère selon un taux  $1/\tau$ , représentant alors les deux derniers termes du membre de droite dans l'équation de Fokker-Planck.

2. TODO : expliquer la réflexion derrière vite fait

Dans ce modèle, les particules n’interagissent pas directement entre elles, mais indirectement via la distribution de sauts qui dépend de l’activité dans le système  $\tau\Gamma(t)$ . Celle-ci est calculée à chaque pas de temps comme la proportion de particules au-delà de la barrière située en  $|\mathbf{r}| = R$ . Nous représentons à la figure D.1 La dynamique d’une de ces particules en 2D pour différentes valeurs de  $\mu$ .

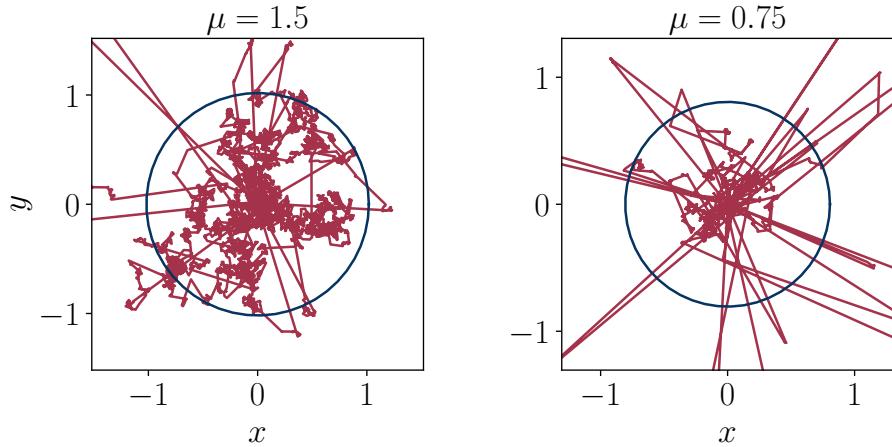


FIGURE D.1 – Trajectoire d’une particule dans la résolution numérique des équations du modèle  $\mu$ -Hébraud-Lequeux via une dynamique de population pour  $\mu = 1.5$  (panel de gauche) et  $\mu = 0.75$  (panel de droite). Ces deux trajectoires correspondent à un état stationnaire de la dynamique de population avec une distance au point critique  $\delta R = \frac{R_c - R}{R_c} \approx 10^{-1}$

En simulant le mouvement de ces particules, nous pouvons remonter à la forme instantanée de la distribution  $P(\mathbf{r}, t)$  prise alors comme la distribution des positions des différentes particules. Pour déterminer le comportement critique de cette transition, nous mesurons la valeur de l’activité moyenne  $\Gamma$  dans l’état stationnaire pour différentes valeurs de  $R$  afin d’identifier l’exposant  $\beta$  définissant la relation :

$$\Gamma \sim (R - R_c)^\beta \quad (\text{D.10})$$

Les résultats présentés à la figure 3.12 ont été obtenus pour les valeurs des paramètres  $s = 1$ ,  $\Delta t = 10^{-2}$ ,  $\tau = 1$  et  $N \sim 10^7$ . Dans le cas  $\mu = 2$  où la loi stable devient une loi normale, nous vérifions que nous retrouvons les résultats attendus soit  $\beta = 2$  et  $R_c = \sqrt{2a}$ , et la distribution stationnaire prédite via la résolution analytique (rendue possible dans ce cas). Cela suggère la validité de notre approche.

## Détails d’implémentation

L’algorithme présenté a été implémenté en langage C++/CUDA pour fonctionner sur cartes graphiques. Les détails d’implémentation peuvent être retrouvés sur [lien github](#). Les nombres aléatoires distribués selon des lois stables, utilisés pour générer les sauts des particules, ont été générés via la méthode Chambers-Mallows-Stuck [158, 159].

## D.3 Fonctions de corrélation de paire

### D.3.1 $\alpha$ -ROM en 2D avec sauts infinis des particules actives

Dans cette partie, nous présentons les résultats obtenus concernant les mesures de fonctions de corrélation de paire entre particules passives dans le  $\alpha$ -ROM en 2D avec sauts infinis des particules actives. Sur les figures suivantes, nous présentons les meilleurs redimensionnements obtenus pour chaque portée  $\alpha$ , donnant lieu aux valeurs de l'exposant de pseudo-gap  $\theta$  répertoriées sur la [figure 3.14-\(b\)](#).

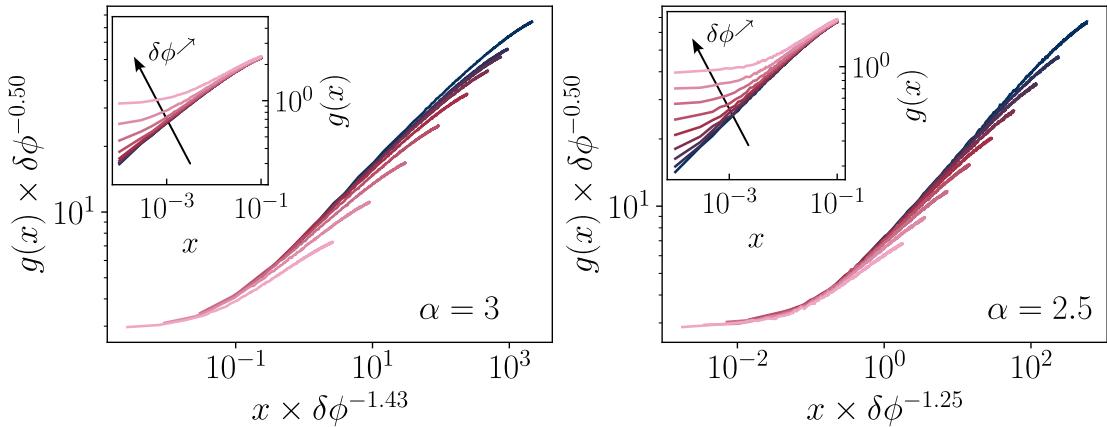


FIGURE D.2 – Idem que pour la [figure 3.15](#) pour  $\alpha = 3$  (gauche) et  $\alpha = 2.5$  (droite)

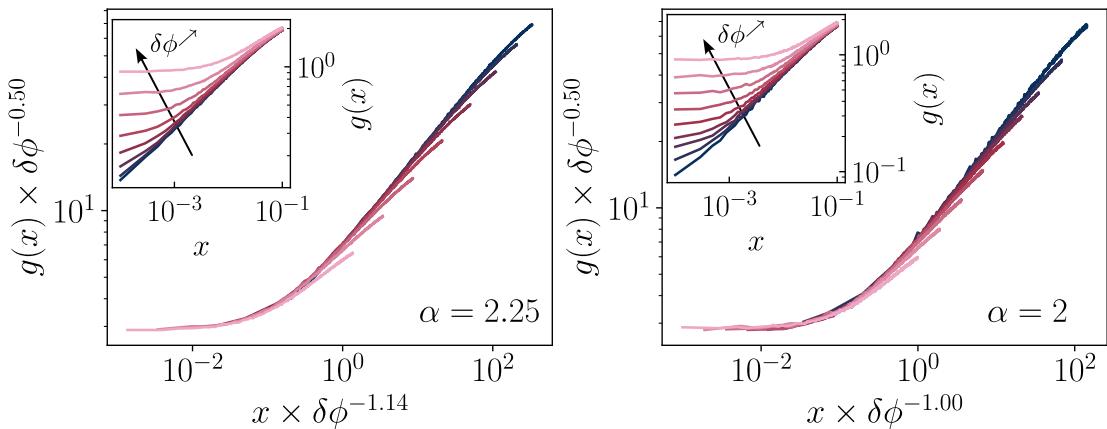
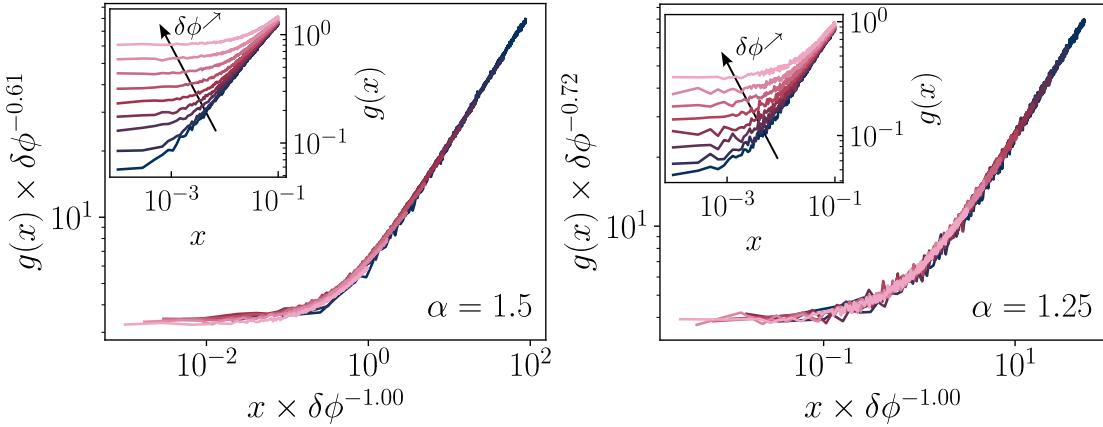
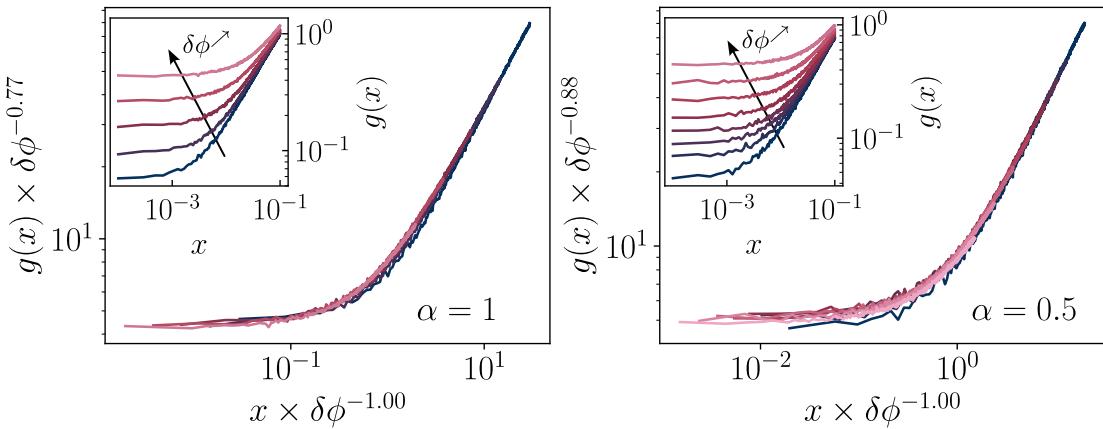


FIGURE D.3 – Idem que pour la [figure 3.15](#) pour  $\alpha = 2.25$  (gauche) et  $\alpha = 2$  (droite)


 FIGURE D.4 – Idem que pour la figure 3.15 pour  $\alpha = 1.5$  (gauche) et  $\alpha = 1.25$  (droite)

 FIGURE D.5 – Idem que pour la figure 3.15 pour  $\alpha = 1$  (gauche) et  $\alpha = 0.5$  (droite)

### D.3.2 $\alpha$ -ROM en 2D avec sauts finis des particules actives

Dans cette partie, nous présentons les résultats obtenus concernant les mesures de fonctions de corrélation de paire entre particules passives dans le  $\alpha$ -ROM en 2D avec sauts finis des particules actives. Sur les figures suivantes, nous présentons les meilleurs redimensionnements obtenus pour chaque portée  $\alpha$ , donnant lieu aux valeurs de l'exposant de pseudo-gap  $\theta$  répertoriées sur la figure 3.19.

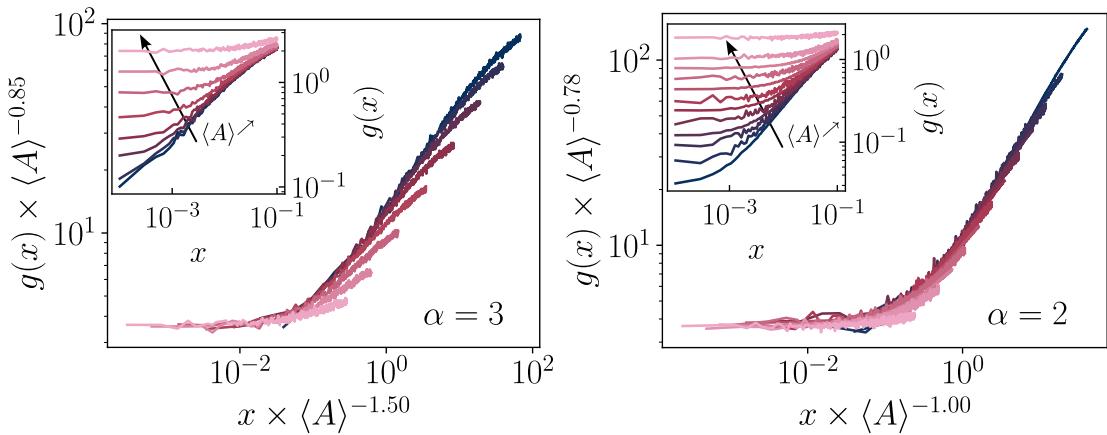


FIGURE D.6 – Idem que pour la [figure 3.18](#) pour  $\alpha = 3$  (gauche) et  $\alpha = 2$  (droite)

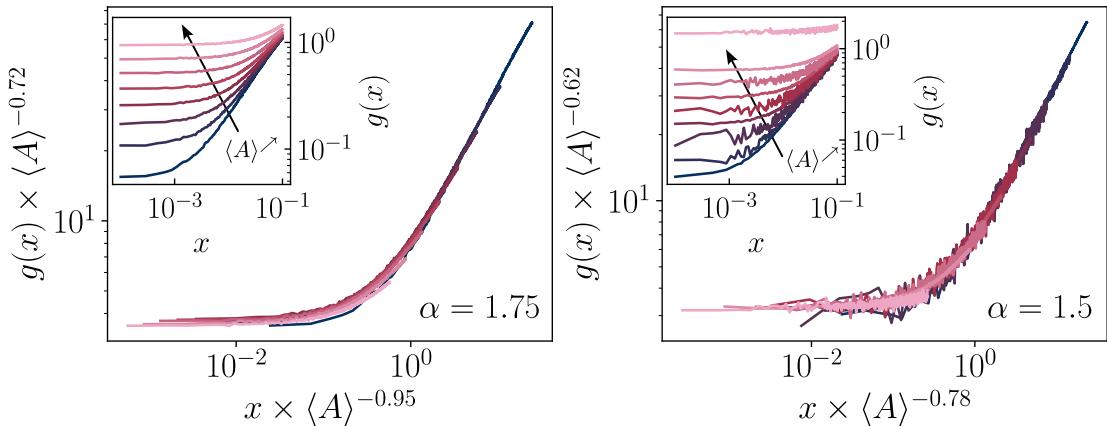


FIGURE D.7 – Idem que pour la [figure 3.18](#) pour  $\alpha = 1.75$  (gauche) et  $\alpha = 1.5$  (droite)

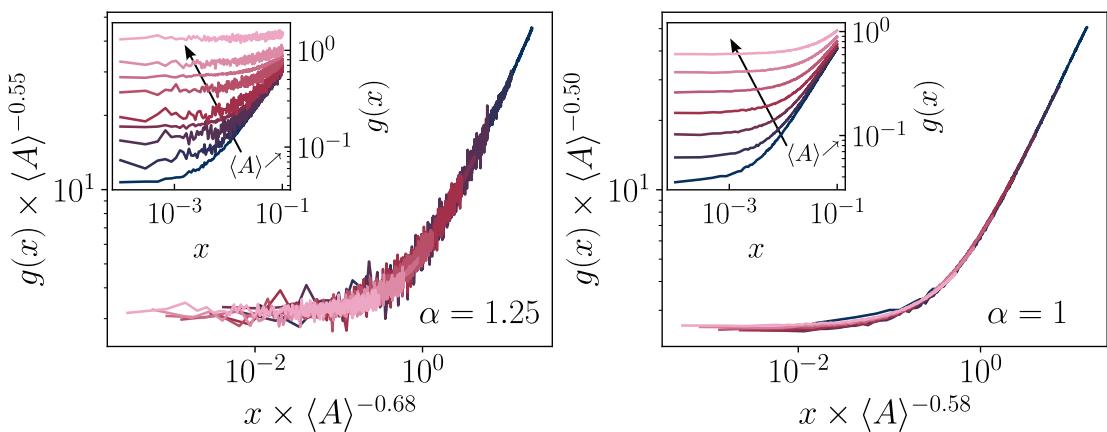


FIGURE D.8 – Idem que pour la [figure 3.18](#) pour  $\alpha = 1.25$  (gauche) et  $\alpha = 1$  (droite)

## D.4 Avalanches dans le modèle $\alpha$ -ROM

Dans cette partie, nous présentons les résultats obtenus concernant les mesures de distributions d'avalanches dans le  $\alpha$ -ROM en 2D avec sauts finis des particules actives. Sur les figures suivantes, nous présentons les meilleurs redimensionnements obtenus pour chaque portée  $\alpha$  et chaque distribution de taille  $S$ , de durée  $T$  et surface  $N$ , donnant lieu aux valeurs des différents exposants répertoriés dans le [tableau 3.2](#).

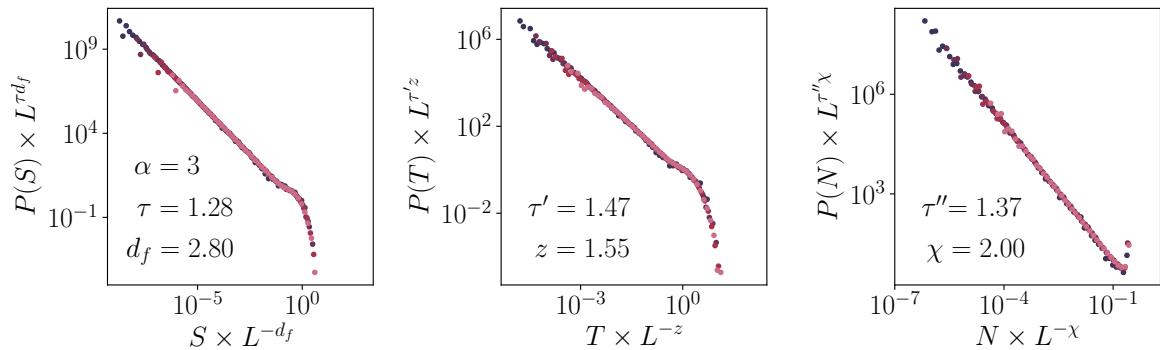


FIGURE D.9 – Idem que la [figure 3.22](#), seulement pour  $\alpha = 3$

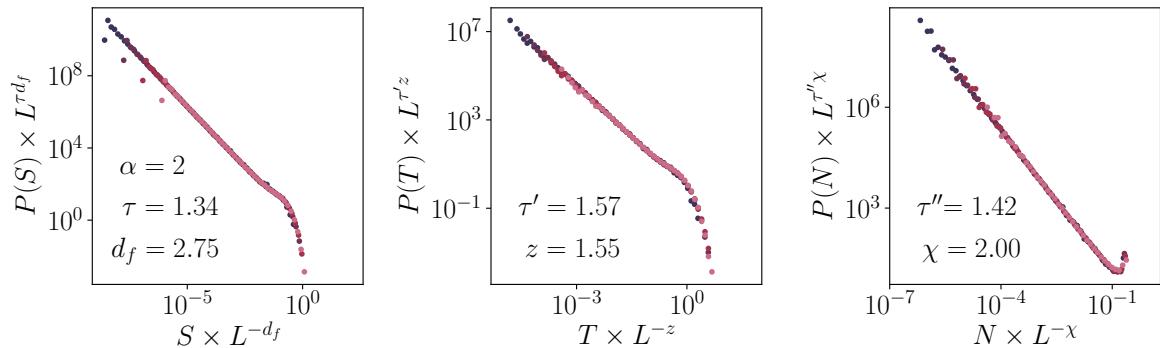


FIGURE D.10 – Idem que la [figure 3.22](#), seulement pour  $\alpha = 2$

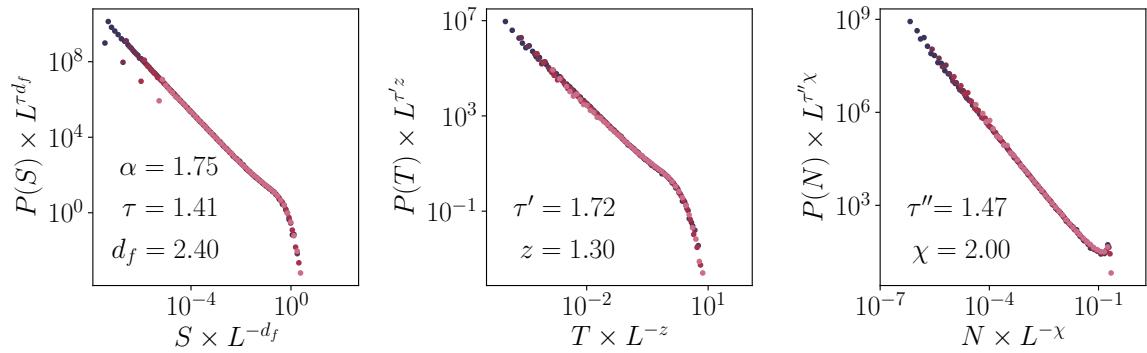


FIGURE D.11 – Idem que la [figure 3.22](#), seulement pour  $\alpha = 1.75$

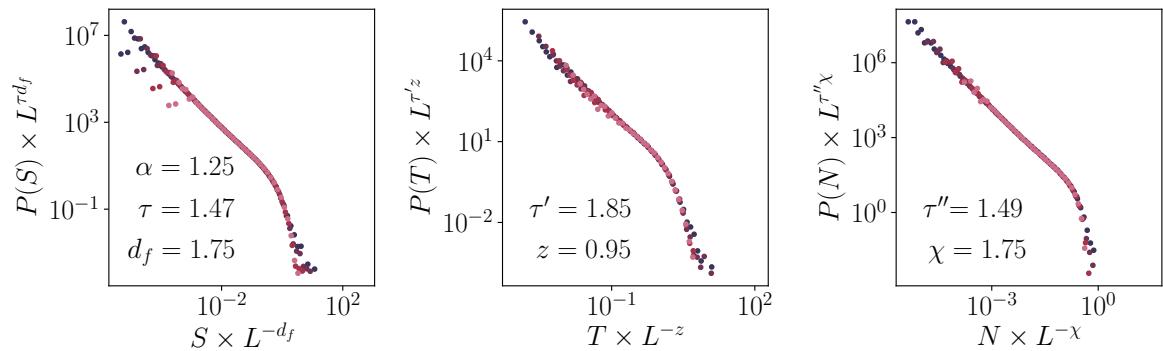


FIGURE D.12 – Idem que la [figure 3.22](#), seulement pour  $\alpha = 1.25$

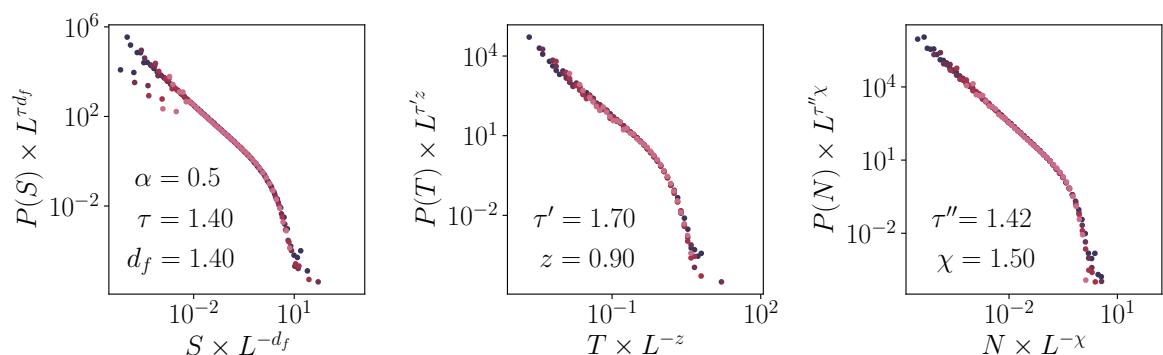


FIGURE D.13 – Idem que la [figure 3.22](#), seulement pour  $\alpha = 0.5$

Annexe **E**

## Annexes au chapitre 4

### E.1 Modèles $\alpha$ -Picard

#### E.1.1 Transformée de Fourier inverse du propagateur

Dans cette partie, nous faisons le lien entre les formes spectrales des propagateurs dans les modèles  $\alpha$ -Picard présentées au [chapitre 4](#) et leur forme dans l'espace réel. Pour ce faire, nous cherchons la transformée de Fourier inverse en 2D en espace continu de la fonction :

$$f(\mathbf{q}) = \frac{q_x^2 q_y^2}{q^{6-\alpha}} \quad (\text{E.1})$$

et nous notons  $\beta = 6 - \alpha$  pour simplifier les notations dans le calcul qui suit.

Nous commençons par partir du résultat général :

$$\mathcal{F}\left(\frac{1}{r^\alpha}\right) = \frac{\pi^{\alpha-d/2} \Gamma((d-\alpha)/2)}{\Gamma(\alpha/2)} \times \frac{1}{|k|^{d-\alpha}} \quad (\text{E.2})$$

avec  $\mathbf{q} = 2\pi\mathbf{k}$  et  $d$  la dimension de l'espace. Ce résultat est valable pour  $0 < \alpha < d$  dans le sens des fonctions mais peut être étendu à tout  $\alpha$  au sens des distributions. De manière équivalente nous avons donc :

$$\mathcal{F}^{-1}\left(\frac{1}{|k|^\beta}\right) = \frac{\Gamma\left(1 - \frac{\beta}{2}\right)}{\pi^{1-\beta} \Gamma\left(\frac{\beta}{2}\right)} \times \frac{1}{r^{2-\beta}} \quad \text{➡} \quad (\text{E.3})$$

et donc :

$$\begin{aligned} (2\pi)^4 \mathcal{F}^{-1}\left(\frac{k_x^2 k_y^2}{|k|^\beta}\right) &= \partial_x^2 \partial_y^2 \mathcal{F}^{-1}\left(\frac{1}{|k|^\beta}\right) \\ &= \frac{\Gamma\left(1 - \frac{\beta}{2}\right)}{\pi^{1-\beta} \Gamma\left(\frac{\beta}{2}\right)} \partial_x^2 \partial_y^2 \left(\frac{1}{r^{2-\beta}}\right) \end{aligned} \quad (\text{E.4})$$

Le calcul des dérivées donne :

$$\partial_x^2 \partial_y^2 \left( \frac{1}{r^{2-\beta}} \right) = \frac{1}{r^{10-\beta}} (8 - 6\beta + \beta^2) \times (x^4(\beta - 5) + y^4(\beta - 5) + x^2y^2(38 - 12\beta + \beta^2)) \quad (\text{E.5})$$

et nous pouvons simplifier cette expression en utilisant  $r^2 = x^2 + y^2$  et  $(x, y) = (r \cos \theta, r \sin \theta)$  selon :

$$\partial_x^2 \partial_y^2 \left( \frac{1}{r^{2-\beta}} \right) = \frac{1}{r^{6-\beta}} (8 - 6\beta + \beta^2) \times (\beta - 5 + \cos^2 \theta \sin^2 \theta (48 - 14\beta + \beta^2)) \quad (\text{E.6})$$

puis en utilisant la relation trigonométrique  $\cos^2 \theta \sin^2 \theta = \frac{1}{8}(1 - \cos 4\theta)$  on a :

$$\partial_x^2 \partial_y^2 \left( \frac{1}{r^{2-\beta}} \right) = \frac{1}{8r^{6-\beta}} (8 - 6\beta + \beta^2) \times ((8 - 6\beta + \beta^2) - \cos 4\theta (48 - 14\beta + \beta^2)) \quad (\text{E.7})$$

et donc en factorisant on a finalement :

$$(2\pi)^4 \mathcal{F}^{-1} \left( \frac{k_x^2 k_y^2}{|k|^\beta} \right) = \frac{\Gamma(1 - \frac{\beta}{2})}{\pi^{1-\beta} \Gamma(\frac{\beta}{2})} \times \frac{(\beta - 4)(\beta - 2)}{8r^{6-\beta}} ((\beta - 4)(\beta - 2) - \cos 4\theta (\beta - 8)(\beta - 6)) \quad (\text{E.8})$$

soit :

$$\mathcal{F}^{-1} \left( \frac{q_x^2 q_y^2}{|q|^\beta} \right) = \frac{\Gamma(1 - \frac{\beta}{2})}{\pi^{2\beta} \Gamma(\frac{\beta}{2})} \times \frac{(\beta - 4)(\beta - 2)}{8r^{6-\beta}} ((\beta - 4)(\beta - 2) - \cos 4\theta (\beta - 8)(\beta - 6)) \quad (\text{E.9})$$

ce qui permet de retrouver la forme donnée à l'équation 4.33.

### Développement autour de $\beta = 4/\alpha = 2$

Les entiers négatifs (zéro inclus) sont des pôles de la fonction  $\Gamma$ . Le cas  $\beta = 4$  correspondant au propagateur d'Eshelby doit être pris comme une limite. Pour ce faire, nous utilisons le développement :

$$\Gamma(-n + \epsilon) = \frac{(-1)^n}{n!} \left( \frac{1}{\epsilon} + \mathcal{O}(1) \right) \quad (\text{E.10})$$

qui nous permet donc d'obtenir pour  $\beta = 4 + \epsilon$  :

$$(2\pi)^4 \mathcal{F}^{-1} \left( \frac{k_x^2 k_y^2}{|k|^{4+\epsilon}} \right) = \frac{2/\epsilon}{\pi^{-3-\epsilon/2} \Gamma(2 + \frac{\epsilon}{2})} \times \frac{(\epsilon + 2)\epsilon}{8r^{2-\epsilon}} ((\epsilon + 2)\epsilon - \cos 4\theta (\epsilon - 2)(\epsilon - 4)) \quad (\text{E.11})$$

qui permet d'arriver dans la limite  $\epsilon \rightarrow 0$  à :

$$\mathcal{F}^{-1} \left( \frac{-4q_x^2 q_y^2}{|q|^4} \right) = \frac{\cos 4\theta}{\pi r^2} \quad (\text{E.12})$$

### E.1.2 Détermination des points critiques

Dans cette partie, nous présentons simplement sur la figure E.1 les données ayant permis la détermination des contraintes critiques  $\Sigma_c$  et de l'exposant  $\beta$  pour chaque déclinaison du modèle  $\alpha$ -Picard. La détermination est réalisée à contrainte imposée, de la même manière que pour les modèles d'écoulement de courte portée Picard-CP et FES $^\pm$ .

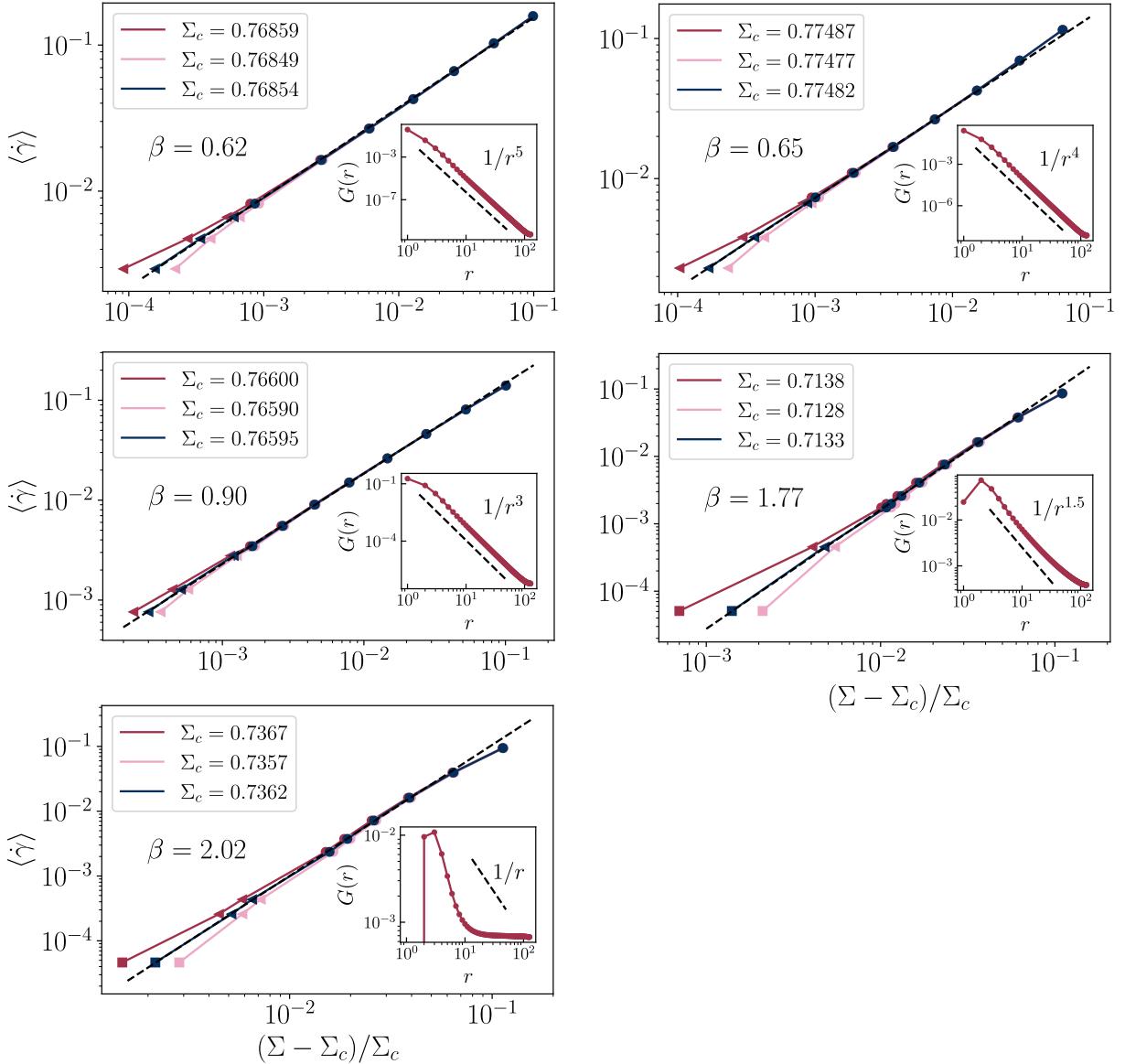


FIGURE E.1 – Détermination de la contrainte critique  $\Sigma_c$  et de l'exposant  $\beta$  pour les modèles  $\alpha$ -Picard avec  $\alpha \in \{5, 4, 3, 1.5, 1\}$ . En encart, la forme du propagateur dans l'espace réel implémenté de la façon présentée à la sous-section 4.3.3

### E.1.3 Avalanches

Dans cette partie, nous présentons à la figure E.2 les données utilisées pour la caractérisation des avalanches à contrainte imposée dans les modèles  $\alpha$ -Picard pour les portées non présentées au chapitre 4. Le protocole utilisé est celui présenté à la sous-

sous-section 4.4.3.1 et nous présentons à la figure E.2 les meilleurs redimensionnements obtenus pour les portées  $\alpha \in \{5, 4, 2\}$ .

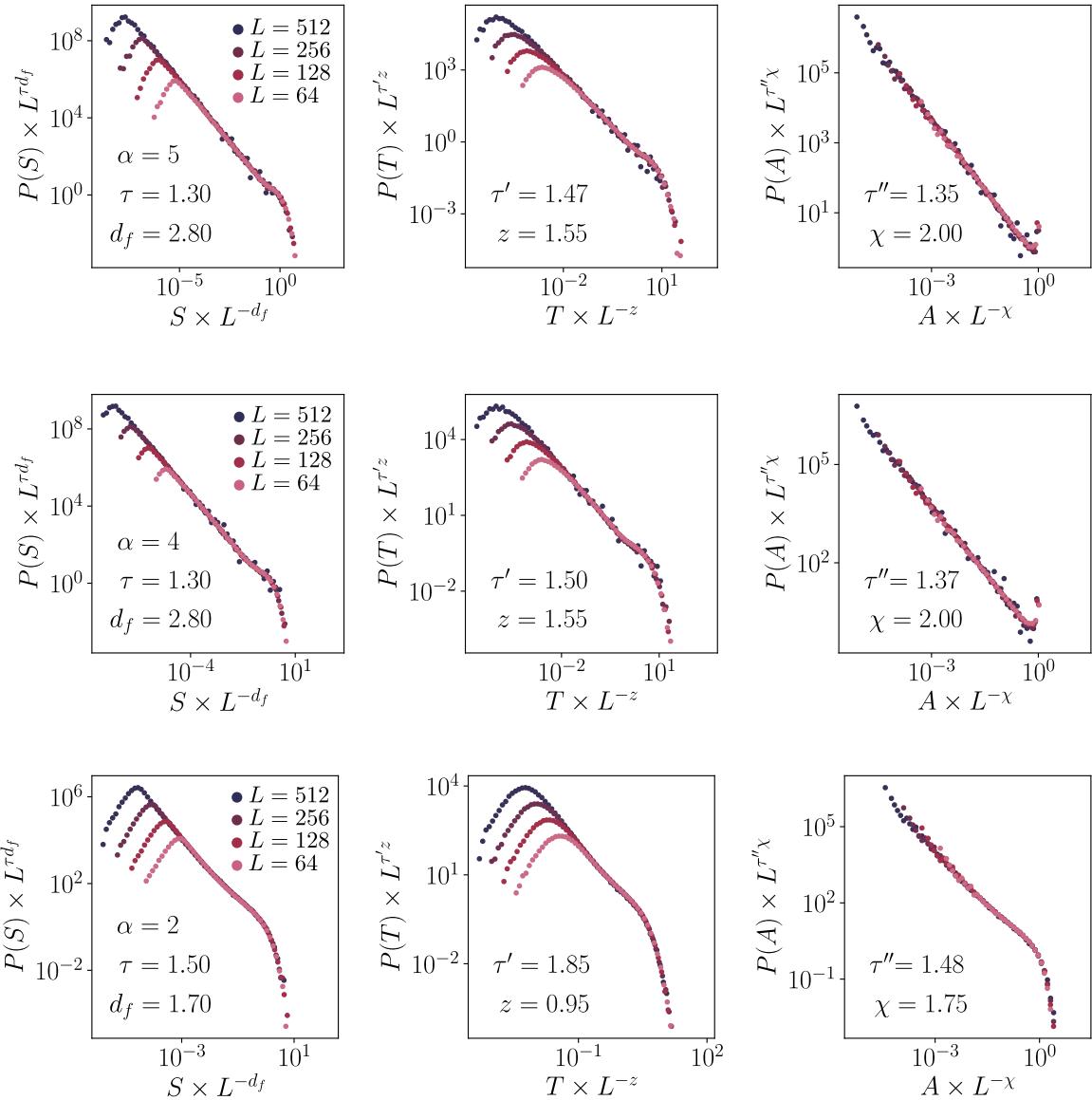


FIGURE E.2 – Distributions de tailles  $S$ , de durées  $T$  et de surfaces  $A$  d’avalanche redimensionnées dans le modèle  $\alpha$ -Picard pour  $\alpha \in \{5, 4, 2\}$ .

## E.2 Dépendance en protocole des avalanches à contrainte imposée dans les modèles élastoplastiques

## Protocol dependence for avalanches under constant stress in elastoplastic models

Tristan Jocteur , Eric Bertin , Romain Mari , and Kirsten Martens

*Univ. Grenoble-Alpes, CNRS, LIPhy, 38000 Grenoble, France*



(Received 9 September 2024; accepted 5 December 2024; published 3 February 2025)

Close to the yielding transition, amorphous solids exhibit a jerky dynamics characterized by plastic avalanches. The statistics of these avalanches have been measured experimentally and numerically using a variety of different triggering protocols, assuming that all of them were equivalent for this purpose. In particular, two main classes of protocols have been studied, deformation under controlled strain or under controlled stress. In this work, we investigate different protocols to generate plasticity avalanches and conduct two-dimensional simulations of an elastoplastic model to examine the protocol dependence of avalanche statistics in yield-stress fluids. We demonstrate that when stress is controlled, the value and even the existence of the exponent governing the probability distribution function of avalanche sizes strongly depend on the protocol chosen to initiate avalanches. This confirms in finite dimension a scenario presented in a previous mean-field analysis. We identify a consistent stress-controlled protocol whose associated avalanches differ from the quasi-static ones in their fractal dimension and dynamical exponent. Remarkably, this protocol also seems to satisfy the scaling relations among exponents previously proposed. Our results underscore the necessity for a cautious interpretation of avalanche universality within elastoplastic models, and more generally within systems where several control parameters exist.

DOI: [10.1103/PhysRevE.111.024101](https://doi.org/10.1103/PhysRevE.111.024101)

### I. INTRODUCTION

In both nature and technical applications, one frequently encounters the phenomenon of intermittent dynamics characterized by scale-free event statistics. Avalanches involve strongly correlated dynamics of complex geometrical objects across scales ranging from atomic to tectonic. Examples include avalanches in magnetic materials [1], superconductors [2], glasses [3], irreversible rearrangements in soft matter systems [4], critical dynamics of imbibition fronts [5] and crack growth [6], and the mechanical responses of granular and porous media [7], wood [8], and geological flows like snow avalanches [9], landslides, and earthquakes [10].

Operating near criticality can be beneficial in certain natural systems, as seen in avalanche dynamics within neural networks [11] and the collective movement of fish schools [12]. However, intermittent dynamics can also pose significant challenges, such as catastrophic events in form of earthquakes or undesired phenomena in engineering applications, such as brittle failure due to plastic avalanches or stick-slip motion of frictional surfaces.

Understanding the complex, nonlinear spatio-temporal responses of these systems and their connections across different scales is essential for accurate physical predictions and the development of reliable geophysical and engineering models. In some cases the scale-free dynamics can be associated with out-of-equilibrium phase transitions, such as the depinning transition [13] and the yielding transition [14]. Key questions in this field revolve around understanding the emergence of universality [15] and the potential for defining various universality classes [14,16,17], which has initiated considerable debate in recent years [18].

While the detailed study of nonuniversal features in avalanche dynamics has not been extensively covered, our work aims to address this gap. Previous studies have explored

the effects of inertia [19,20] and transient dynamics [21], but research on the impact of different protocols for triggering avalanches remains limited.

The theoretical work by Pérez-Reche *et al.* [22] on a random soft spin model demonstrates the possible difference between avalanches occurring in strain- versus stress-controlled protocols. Such a difference has been experienced also in experiments on martensitic materials by Vives *et al.* [23]. Jagla further pointed out that, within a mean-field model for elastoplastic dynamics associated with the yielding transition, one expects an additional dependence on the way avalanches are triggered [24].

In this manuscript we investigate the protocol dependence of avalanche dynamics within a spatially resolved elastoplastic description of the yielding transition. This allows us not only to test existing mean-field predictions, but also to establish a more comprehensive understanding of the spatial complexity made apparent in the fractal dimension of the avalanches occurring under various protocols.

Our manuscript is organized as follows. In Sec. II we introduce the two-dimensional elastoplastic model used for simulations with strain- or stress-controlled dynamics. For stress-imposed dynamics we describe further three different protocols employed to trigger avalanches. We then provide in Sec. III a first comparison of the distributions of avalanche sizes measured numerically for different protocols. In Sec. IV we examine the impact of the avalanche-triggering mechanism and of the choice of control parameter on avalanche size distributions. Then, Sec. V focuses on finite-size effects and on the associated scaling relations. We determine via a finite-size scaling analysis the fractal dimension and dynamical exponents. This section also discusses the validity of a hyperscaling relation between exponents for stress-controlled avalanches.

By systematically studying the impact of different protocols on avalanche dynamics, this work emphasizes the importance of the control parameter and the associated protocol choices in determining avalanche statistics, and provides guiding principles on how to interpret avalanche statistics in the many cases where the “control” parameter is not a matter of choice (e.g., in earthquake dynamics).

## II. MODEL AND AVALANCHE-TRIGGERING PROTOCOLS

### A. Elastoplastic model

To investigate the role of protocols on avalanches distributions in amorphous solids, we perform numerical simulations of an elastoplastic model [25]. The material is spatially discretized in an ensemble of interacting mesoscopic elements, each of them representing a set of a few constitutive elements (bubbles, drops, particles, etc). A mesoscopic element  $i$  can be in two different states, elastic ( $n_i = 0$ ) or plastic ( $n_i = 1$ ). It bears a local strain  $\epsilon_i = \epsilon_i^{\text{pl}} + \epsilon_i^{\text{el}}$ , which is decomposed into a plastic strain  $\epsilon_i^{\text{pl}}$  and an elastic strain  $\epsilon_i^{\text{el}}$ , and an elastic stress  $\sigma_i = \mu \epsilon_i^{\text{el}}$ . When in an elastic state, the plastic strain remains constant and therefore the accumulated strain is purely elastic. Once the local stress overcomes some local threshold  $\sigma_Y$ , an element can turn plastic, according to some model-specific rules. When in a plastic state, the local stress relaxes and is redistributed to other elements in the material via elastic interactions. In turn, plastic elements switch back to the elastic state, again according to some model-specific rule. An elastoplastic model is then defined by the rules coupling the evolution of the three local variables ( $n_i, \sigma_i, \epsilon_{pl,i}$ ). Elastoplastic models show avalanches because of the stress redistribution occurring when an element is plastic, which can in turn induce plasticity in other elements.

To demonstrate the dependence of the different triggering protocols, we choose to implement the two-dimensional Picard model [26], one of the simplest elasto-plastic models in the literature.  $N = L^2$  elements are positioned on a square lattice with main axis  $e_x$  and  $e_y$ , and are subject to a simple shear in the direction along  $e_x$ . The stress and strain are scalar and correspond to the  $xy$  components of the stress and strain tensors, respectively. On each site, they evolve according to

$$\partial_t \sigma_i = \sum_j G_{ij} \partial_t \epsilon_j^{\text{pl}} + \mu \dot{\gamma}, \quad \partial_t \epsilon_i^{\text{pl}} = n_i \sigma_i, \quad (1)$$

with  $\dot{\gamma}$  the global strain rate. The kernel  $G_{ij}$  is the discretized version of the Eshelby kernel  $\mathcal{G}(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$  [27,28], which represents the far-field effect of a plastic deformation located in  $\mathbf{r}'$  on the stress in position  $\mathbf{r}$  in a linear elastic medium

$$\mathcal{G}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = \frac{\cos(4\Delta\theta)}{\pi |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2}, \quad (2)$$

with the angle  $\Delta\theta$  defined as  $(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \cdot e_x = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'| \cos \Delta\theta$ . Separately, transitions between elastic and plastic states are governed by

$$\begin{aligned} n_i : 0 &\xrightarrow{\tau} 1, & |\sigma_i| > \sigma_Y \\ n_i : 0 &\xleftarrow{\tau} 1, & \forall \sigma_i, \end{aligned} \quad (3)$$

with  $\tau^{-1}$  the probability rate.

In practice, the time evolution is computed via an Euler method and the convolution is performed using a FFT-based algorithm, in which the discretized kernel is defined as

$$\hat{G}_q = -4 \frac{q_x^2 q_y^2}{q^4} \quad (4)$$

for  $\mathbf{q} \neq 0$  and  $\hat{G}_0 = -1$ .

In its original version, the Picard model was designed to perform simulations at a constant strain rate  $\dot{\gamma}$ . In this case, the term  $\mu \dot{\gamma}$  in Eq. (1) is constant. It is nevertheless possible to switch the control parameter, setting the global stress  $\Sigma = \frac{1}{N} \sum_i \sigma_i$  as a constant and letting  $\dot{\gamma}$  evolve accordingly [29], following  $\dot{\gamma} = \frac{1}{N} \sum_i \partial_t \epsilon_i^{\text{pl}}$ . This model then enables us to access the macroscopic behavior of the system in imposed strain or imposed stress dynamics.

This model recovers the yield-stress-fluid phenomenology [25]. When the strain rate  $\dot{\gamma}$  is controlled, steady-state flow follows a Herschel-Bulkley flow curve  $\Sigma = \Sigma_Y + K \dot{\gamma}^n$  for small values of  $\dot{\gamma}$ , with  $K$  and  $n$  constants and  $\Sigma_Y$  the macroscopic yield stress, as shown in Fig. 1. When the stress  $\Sigma$  is controlled, steady-state flow is only possible for  $\Sigma > \Sigma_Y$ , in which case it follows the same flow curve. For  $\Sigma < \Sigma_Y$  the deformation stops after a finite strain and the system remains in an elastic mechanical equilibrium.

In this work, we restrict ourselves to the case  $\Sigma > 0$  and deal with avalanches under controlled stress at  $\Sigma = \Sigma_Y$ . In order to determine precisely  $\Sigma_Y$ , we perform simulations at a constant strain rate to build the flow curve  $\dot{\gamma} = f(\Sigma)$ . The yield stress  $\Sigma_Y$  is determined as the value for which  $\log \dot{\gamma}$  is a linear function of  $\log[\Sigma - \Sigma_Y]$  for small  $\dot{\gamma}$ , which corresponds to the algebraic scaling  $\dot{\gamma} \sim (\Sigma - \Sigma_Y)^{1/n}$ .

### B. Avalanches in strain-controlled protocols

In a strain-controlled protocol, as  $\dot{\gamma} \rightarrow 0$ , the dynamics becomes jerky. The system jumps regularly from one elastic state (i.e., a state where all elements are elastic) to the next via bursts of plasticity. Looking at the evolution of the global stress as a function of the global strain, this corresponds to a succession of elastic loading phases and sudden drops of the global stress (see Fig. 1). These bursts of plasticity in the system are strain-controlled avalanches.

The standard protocol to study this phenomenon is the athermal quasi-static protocol (AQS), described in Fig. 2(a), which corresponds to the dynamics in equations Eqs. (1) and (3) in the  $\dot{\gamma} \rightarrow 0$  limit. Starting from an elastic state, the system is strained until a site reaches its yield value. This site then turns plastic, strain is stopped and plasticity propagates in the system at  $\dot{\gamma} = 0$  such that, through an avalanche process, the system falls back into a new elastic state. The system is then strained again until a new avalanche gets triggered and so on. The process is repeated to get statistics about those relaxation events.

Avalanches are mainly characterized by their size  $S$  and their duration  $T$ . In a system of size  $L$ , the size of an avalanche is defined as the global stress drop due to the plastic activity multiplied by the volume of the system  $S_\Sigma = \Delta \Sigma \times L^d$ . The duration of the avalanche simply corresponds to the time between the start and the end of it. In an infinite-size system

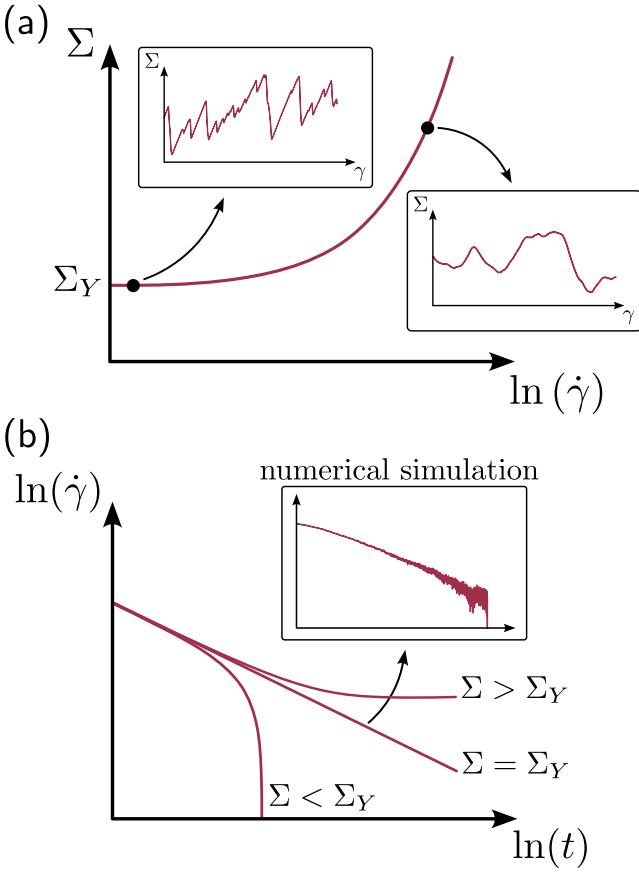


FIG. 1. (a) Flow curve of the model, showing a Herschel-Bulkley behavior. In insets, actual numerical simulations of the dynamics under controlled strain rate  $\dot{\gamma}$ , at small and large values of  $\dot{\gamma}$ , revealing a jerky dynamics with avalanches for  $\dot{\gamma} \rightarrow 0$ . (b) Schematic expected strain rate versus time under imposed constant stress  $\Sigma$  around the yield value  $\Sigma_Y$ , showing arrest of the dynamics for  $\Sigma < \Sigma_Y$ , eventual steady flow for  $\Sigma > \Sigma_Y$ , and power-law decay for  $\Sigma = \Sigma_Y$ . In inset, actual numerical simulations at  $\Sigma = \Sigma_Y$ , showing that in practice the power-law decay is interrupted after a finite time at which the dynamics stops in an elastic state.

those two quantities are expected to show probability density functions  $P_{S_\Sigma}(S_\Sigma)$  and  $P_T(T)$  decaying as power laws. These power-law scalings define the avalanche exponents  $\tau$  and  $\tau'$  as  $P_{S_\Sigma}(S_\Sigma) \sim S_\Sigma^{-\tau}$  and  $P_T(T) \sim T^{-\tau'}$ . However, in a finite-size system of size  $L$ , these power laws are only valid up to some cutoff  $S_c$  and  $T_c$  scaling algebraically with  $L$  as  $S_c \sim L^{d_f}$  and  $T_c \sim L^z$ , which defines the fractal dimension  $d_f$  and the dynamical exponent  $z$ . Distributions of avalanche size and of avalanche duration for all system sizes  $L$  are expected to follow scaling behaviors  $L^{\tau d_f} P_{S_\Sigma}(S_\Sigma) = f_{S_\Sigma}(S_\Sigma L^{-d_f})$  and  $L^{\tau' z} P_T(T) = f_T(T L^{-z})$ .

### C. Avalanches in stress-controlled protocols

If one imposes a stress  $\Sigma$  such that  $\Sigma \leq \Sigma_Y$ , the system stops flowing after a finite strain and get stuck in an elastic equilibrium that acts like an absorbing state [17], effectively preventing any measurement of the avalanche statistics by lack of proper sampling. For finite-size systems, this problem

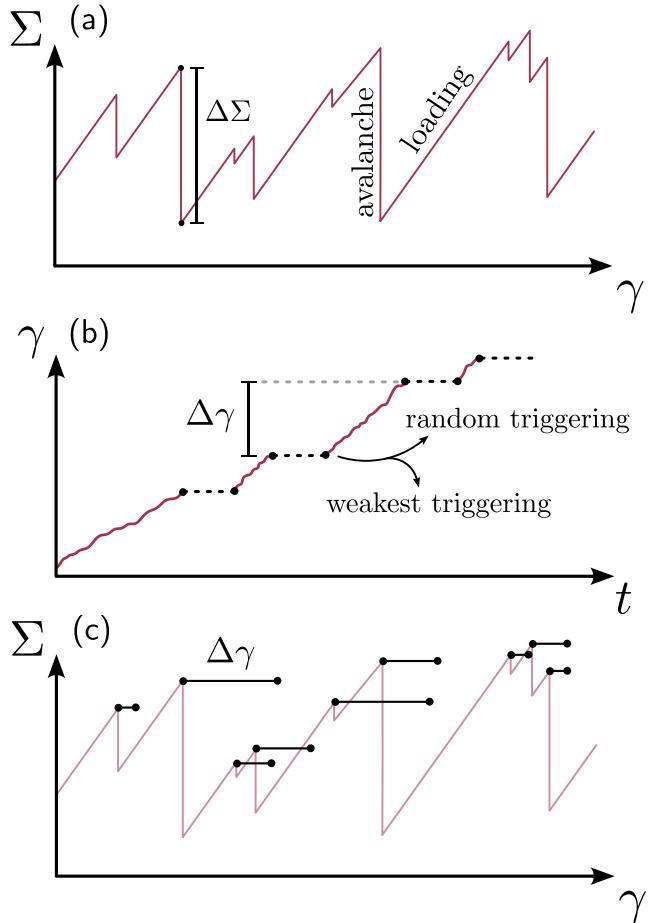


FIG. 2. Graphical representation of the different avalanche triggering protocols studied. Black dots represent the starting points and the ending points of avalanches. (a) Stress versus strain in the strain-controlled athermal quasi-static (AQS) dynamics. Avalanches are triggered by elastic loading until a site yields, and the avalanche size is measured via the subsequent stress drop  $\Delta\Sigma$ . (b) Strain versus time in the stress-controlled protocols weakest triggering (the site closest to yield is turned plastic) and random triggering (a random site is turned plastic). The avalanche size is proportional to the strain  $\Delta\gamma$  until the system jams again. (c) Uniform loading protocol. Avalanche starting points are shared with the AQS protocol (red stress versus strain curve). Avalanche size is also proportional to  $\Delta\gamma$  until the system jams again.

is exacerbated, as due to fluctuations the dynamics can be stuck into an elastic state even for  $\Sigma \gtrsim \Sigma_Y$  (see Fig. 1).

In order to probe the dynamical behavior and sample the avalanche statistics near the yield point, one has to reactivate the dynamics every time the system gets stuck in an elastic state [14]. An avalanche is then defined as the plastic activity between two successive reactivations, as sketched in Fig. 2(b). The avalanche size is the accumulated strain during the avalanche multiplied by the volume of the system,  $S_\gamma = \Delta\gamma \times L^d$ .

There are several ways to reactivate the system, defining different protocols to generate stress-controlled avalanches. It is then legitimate to wonder whether this arbitrary choice of

protocol may have an impact on the produced avalanches and the statistical observables that characterize them.

#### D. Definition of the protocols

We study two different stress-controlled protocols, defined by the reactivation mechanism: The random triggering protocol and the weakest triggering protocol. Both of them are studied at the critical stress  $\Sigma = \Sigma_Y$ . The avalanche statistics produced by these two protocols is studied in the steady state, after many reactivations are performed. As shown below, each reactivation mechanism gives a different statistics of visited elastic states. To disentangle the effect of controlling the stress during the avalanche from the effect of exploring statistically different elastic states, we also study a last protocol, the uniform loading protocol, which uses starting states sampled from AQS dynamics, but performs avalanches under imposed stress.

##### 1. Random triggering protocol

The first stress-controlled protocol we study is the random triggering protocol. Every time the system falls into an elastic state, the system is reactivated by setting a random site, chosen with uniform probability, as plastic ( $n_i = 1$ ) without changing the stress anywhere in the system. Experimentally, this protocol could be realized with local damage in the sample, as is performed in [30]. Note that this protocol is similar to the one used in the numerical study reported in [14]. The only difference is that in our case activation is made by a direct change on the state variable  $n_i$ , while in [14] it is made by giving randomly localized stress kicks to the system.

##### 2. Weakest triggering protocol

The second stress-controlled protocol is the weakest triggering one. In this protocol, a single site  $i$  ( $n_i = 1$ ) is activated as in the random triggering protocol, but now the activated site is the one closest to local yield, i.e., with the smallest value of  $\sigma_Y - \sigma_i$ . Here again, it resembles one of the numerical protocols proposed in [14] where the weakest site would be activated, only not by setting  $n_i = 1$  but by giving it a stress kick.

##### 3. Uniform loading protocol

In the last protocol, denoted as uniform loading protocol, the dynamics is not triggered from the elastic state reached after the previous avalanche. We first generate a long AQS simulation that contains many avalanches. We then record the starting configuration of each AQS avalanche, which corresponds to the point where one site (i.e., the marginal site) is at  $\sigma_i = \sigma_Y$ . Among these, we select the ones for which  $\Sigma < \Sigma_Y$ . For each of these configurations, the avalanche starts from the marginal site and evolves under a constant stress dynamics, as sketched in Fig. 2(c), until the system reaches again a purely elastic state, which is guaranteed by our choice of states with  $\Sigma < \Sigma_Y$ .

Because they come from an AQS dynamics, starting configurations are all at a slightly different stress below  $\Sigma_Y$ , nonetheless the stress is always close to  $\Sigma_Y$  (for  $L = 512$ , we get  $\Sigma \gtrsim 0.995 \Sigma_Y$ ). This protocol differs from the one

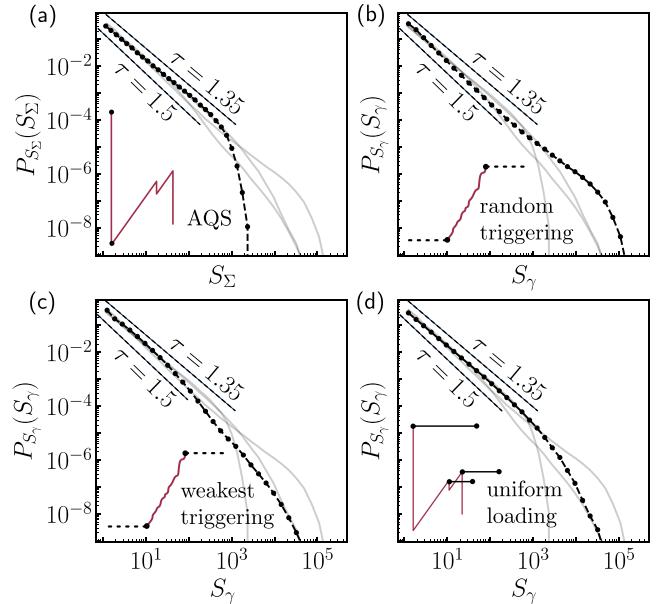


FIG. 3. Size distributions of the avalanches for a system size  $L = 512$  within the four different protocols. (a) AQS protocol. (b) Random triggering protocol. (c) Weakest triggering protocol. (d) Uniform loading protocol. In each panel, the three other protocols are shown in transparency and the power laws  $P_{S_X}(S_X) \sim S_X^{-\tau}$  with  $\tau = 1.35$  and  $\tau = 1.5$  are represented with black dashed lines for direct comparison.

studied in [31] as the elastic states we reach after an avalanche are not used again to trigger further avalanches, in contrast to [31] where the system is elastically loaded to trigger the next avalanche, leading to states of strictly increasing stresses, and eventually to runaway avalanches and permanent flow.

### III. AVALANCHE STATISTICS FOR DIFFERENT PROTOCOLS

For each of our four protocols (AQS, random triggering, weakest triggering, and uniform loading), we generate about  $5 \times 10^5$  avalanches to build the avalanche statistics. In this section we compare these avalanche statistics, highlighting clear qualitative differences in between protocols. To this end we show the avalanche size distributions for every protocol in each of the four panels of Fig. 3, only visually highlighting one of them in each panel. A detailed characterization for each of the protocols, performed by finite-size scaling (when it is possible), is deferred until Sec. V.

As expected, for the AQS protocol (Fig. 3(a)) we observe power-law-distributed event sizes with an avalanche exponent  $\tau \approx 1.35$  (later confirmed by finite-size scaling in Appendix A), in agreement with several previous studies of the AQS protocol in different elastoplastic models [14,16,32]. The power law is observed up to some cutoff  $S_c(L)$  past which the distribution roughly decays exponentially.

The uniform loading protocol (Fig. 3(d)) produces a very similar size distribution to the one of the AQS protocol as it is also power-law-distributed with a similar exponent  $\tau$ .

Our analysis suggests that the control parameter, whether strain or stress, exerts a minimal impact on avalanche

properties. This influence is notably less pronounced than that of the nature of the activated elastic states, indicating a secondary role for the control parameter in modulating avalanche dynamics. Nevertheless, the tail of the distribution significantly differs from that obtained with the AQS protocol. The cutoff is significantly larger than the one of the AQS protocol, similarly to the ones obtained in the other stress-controlled protocols, as shown below.

In the random triggering protocol (Fig. 3(b)), avalanche sizes are still distributed according to a clear power law but with a significantly larger exponent  $\tau$  that appears close to 1.5 (which we will confirm in Sec. V), in agreement with the theoretical mean-field prediction  $\tau = 3/2$  [33]. This variation underscores the sensitivity of avalanche dynamics to the chosen protocol, highlighting the importance of the initial triggering mechanism. Note that this result contradicts earlier numerical observations [14], for which the random triggering protocol was reported to give the same exponent  $\tau$  as the AQS dynamics, smaller than our observed value.

Just like for uniform loading, the cutoff value is larger than the one found for the AQS protocol by roughly two orders of magnitude. Furthermore, the shape of the distribution deviates from a pure power law for large avalanche sizes, the cutoff being preceded by a characteristic bump showing an excess of avalanches with respect to the power-law expectation. Such bumps have been observed for other protocols in the literature [31,34,35]. In depinning models, they are predicted by the renormalization group analysis [36] and have been shown to derive from an asymmetry in the interface height distribution [37]. This bump may affect the measure of the  $\tau$  exponent, leading to the determination of an effective exponent smaller than the actual one, as argued in [35]. As shown below, finite-size scaling alleviates much of this difficulty, and considerably narrows the uncertainty of our reported value of  $\tau$ .

Finally, the weakest triggering protocol (Fig. 3(c)) gives vastly different avalanche statistics. Avalanche sizes are broadly distributed but not according to a power law. Instead, the distribution shows two successive bumps, as also visible in the data of [14] (Fig. S4 therein). The cutoff for similar system sizes is, however, of the same order of magnitude as the one of the random triggering protocol.

These results demonstrate that the reactivation protocol when studying avalanches under controlled stress has a major impact on the measured avalanche statistics. Avalanche statistics under controlled stress is therefore not strictly a system property, and one needs to be explicit as to which protocol is used to generate avalanches. In the following, we try to infer broad relations between generic features of reactivation protocols and resulting avalanche statistics.

#### IV. PROTOCOL FEATURES THAT CONTROL THE AVALANCHES SIZE STATISTICS

##### A. The triggering mechanism controls the avalanche exponent $\tau$

The AQS and uniform loading protocols have the same measured value for the avalanche exponent,  $\tau \approx 1.35$ . These two protocols differ by their control parameter, but share the same triggering mechanism, which suggest that the latter

controls the value of  $\tau$ . Indeed, changing the triggering mechanism affects the exponent value, as the random triggering protocol yields  $\tau \approx 1.5$  and the weakest triggering protocol shows no exponent at all.

This is consistent with mean-field arguments, which suggest that the exponent characterizing the size distribution of avalanches is controlled by the way elastic configurations are activated, either by the activation of one random site (as the random triggering protocol) or the uniform loading of all sites (as the AQS protocol) [24]. In these cases, the mean-field problem can be mapped onto a random walk first-passage problem and yield exact analytical results [24]. For random triggering, an exponent  $\tau = 1.5$  is predicted. By contrast, for uniform loading, in mean-field there is no true power law in the avalanche distribution, but nonetheless on restricted ranges of avalanche size one can approximate the distribution with a size-dependent apparent exponent. For avalanches involving between 1 and  $\approx 10^5$  sites like the ones we present here, an apparent exponent  $\tau_{\text{eff}}$  between 1.1 and 1.2 is found in the mean-field model (Fig. 2 in [24]). Our results show that the qualitative mean-field expectation of a smaller (effective) exponent when avalanches are triggered by elastic loading rather than random activation still holds in finite dimension.

However, the mean-field scenario [24] does not quantitatively match several of our numerical observations. First, the mean-field  $\tau_{\text{eff}} \approx 1.1 - 1.2$  for the uniform loading protocol is significantly below our measured value  $\tau \approx 1.35$ . Second, the mean-field calculations predict a bump in the distribution for large avalanches in the case of the uniform loading, and no bump for random activation, which is the opposite of our observations.

Overall, these results suggest that the avalanche exponent is not controlled by the dynamical rules that apply during avalanches but rather that it strongly depends on the way avalanches are initiated. Loaded elastic states show smaller exponents than locally triggered ones. However, if dynamical rules do not seem to affect the exponent, they still have an impact on the avalanche distribution. Looking at Fig. 3, it is clear that all stress-controlled protocols show much larger cutoffs than the one of the AQS protocol.

##### B. The control parameter controls the cutoff size

A major difference between stress-controlled and strain-controlled dynamics is that during a strain-controlled avalanche the total stress drops, effectively making the avalanche more likely to stop early. Thus, starting from the same state, we would expect the avalanche in a stress-controlled protocol to be larger and last longer than in a strain-controlled protocol. This is indeed confirmed by our observations in Fig. 3, which shows that the cutoff size is smaller for the AQS protocol.

Under AQS dynamics, if the starting point of an avalanche is at a relatively high stress, it may take several successive avalanches and elastic loadings to find again an elastic state at the same stress. It is thus tempting to sketch avalanches under controlled stress as concatenations of successive AQS-like avalanches that occur between two states whose stress matches the imposed one, covering a strain  $\Delta\Gamma$ , as illustrated in the inset of Fig. 4.

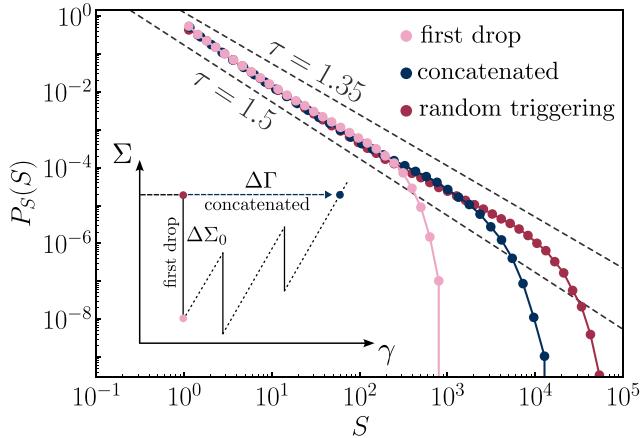


FIG. 4. Size distributions of avalanches in the concatenation procedure for a system size  $L = 256$ . Inset: schematic of the concatenation procedure. First drop corresponds to the first strain-controlled avalanche (between the first red dot and the blue dot in the schematic). Concatenated avalanches correspond to the sum of AQS avalanches required to recover the initial global stress  $\Sigma_Y$ .

To investigate this idea, we run an AQS dynamics from the starting configurations of every avalanche obtained with the random triggering protocol. These configurations are all initially at  $\Sigma = \Sigma_Y$  by construction. During the AQS dynamics, their stress drops during avalanches and increases during elastic loading phases, until it reaches  $\Sigma_Y$  again, at which point we stop the simulation and record the strain  $\Delta\Gamma$  since the start of the AQS dynamics.

In Fig. 4, we display in dark blue the obtained distribution of  $S_\Gamma = \Delta\Gamma L^d$ , alongside the distribution of avalanche sizes measured in the original random triggering protocol. To better highlight the effect of the concatenation on the statistics of avalanches, we also show the distribution of the first stress drop size  $P_{S_{\Sigma_0}}(S_{\Sigma_0})$ , with  $S_{\Sigma_0} = \Delta\Sigma_0 L^d$ , during the AQS dynamics (pink curve): if each avalanche in the random triggering protocol corresponded to a single AQS avalanche followed by a single elastic loading to get back to a stress  $\Sigma_Y$ ,  $P_{S_\gamma}(S_\gamma)$  would be indistinguishable from  $P_{S_{\Sigma_0}}(S_{\Sigma_0})$  (and  $P_{S_\Gamma}(S_\Gamma)$  for that matter). We see that this is the case for small avalanches (we checked that this is not only true statistically, but that pairs of small avalanches under random triggering and AQS sharing the same starting point are indeed very similar). However, large stress-controlled avalanches are clearly not associated with single AQS avalanches.

The distribution of intermediate size avalanches under random triggering is better approximated by the distribution of concatenated AQS avalanches, showing that some large stress-controlled avalanches seem to be reasonably well approximated by concatenation of AQS avalanches. However, there remains a clear discrepancy between  $P_{S_\gamma}(S_\gamma)$  and  $P_{S_\Gamma}(S_\Gamma)$  for the largest avalanches, that interestingly correspond to avalanches in the already noted excess bump.

Massive avalanches under stress-controlled conditions are therefore more than bare successions of AQS-like avalanches. This indicates that the finite strain rate during stress-controlled avalanches can no longer be neglected for these avalanches. Large avalanches transiently lead to large strain rates in the

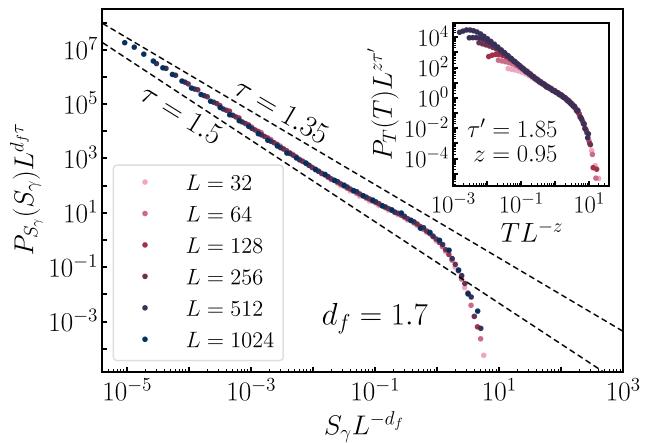


FIG. 5. Finite-size scaling of the avalanche size distributions in the random triggering protocol for system sizes  $L \in [32, 64, 128, 256, 512, 1024]$ . The best collapse determines the best estimate for the fractal dimension  $d_f \approx 1.7$ . Inset: Finite-size scaling of the avalanche duration distributions in the random triggering protocol for the same system sizes. The best collapse determines the best estimate for the dynamical exponent  $z \approx 0.95$ .

system, moving the system trajectory away from the one followed by the AQS dynamics. In particular, under finite strain rates sites become plastic at stresses larger than  $\sigma_Y$  as elastic loading persists before the stochastic triggering of plasticity, causing plastic sites to redistribute larger stresses than they would in a similar configuration under AQS. This larger redistribution in turn fuels more plastic triggering, eventually leading to larger avalanches, which is compatible with our observation of a larger cutoff value for  $P_{S_\gamma}(S_\gamma)$  than for  $P_{S_\Gamma}(S_\Gamma)$  in Fig. 4.

## V. FINITE-SIZE SCALING AND SCALING RELATIONS

### 1. Fractal dimension and dynamical exponents

We now turn to the fractal dimension  $d_f$  of avalanches and dynamical exponent  $z$ , which we evaluate using a finite-size scaling analysis. We first confirm the results reported in the literature for the AQS protocol, that is  $L^{\tau d_f} P_{S_\Sigma}(S_\Sigma)$  plotted as a function of  $S_\Sigma L^{-d_f}$  and  $L^{\tau' z} P_T(T)$  plotted as a function of  $T L^{-z}$  respectively show a data collapse onto a master curve for  $d_f \approx 1.1$  and  $z \approx 0.54$  [16] (see Fig. 7 in Appendix A).

Remarkably, we can achieve a similar collapse for avalanches obtained with the random triggering protocol, as displayed in Fig. 5. Using distributions for system sizes ranging from  $L = 32$  to  $L = 1024$ , the best collapse of the curves is obtained for  $\tau \approx 1.5$ ,  $d_f \approx 1.7$ ,  $\tau' \approx 1.85$  and  $z \approx 0.95$ . The fractal dimension obtained in this case is then much larger than the one measured for the AQS protocol.

This is consistent with the picture that, at least for intermediate-size events, stress-controlled avalanches are close to a concatenation of AQS-like avalanches. Indeed, successive AQS avalanches are known to be spatially correlated and to cluster along the flow and flow gradient directions [38]. To confirm this hypothesis, we perform the same finite-size scaling for the distributions of concatenated AQS avalanches, and also find  $d_f \approx 1.5$  (see Fig. 10 in Appendix A), in contrast

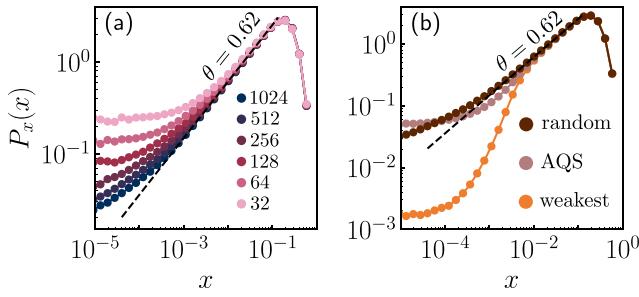


FIG. 6. (a) Distributions of local distance to threshold in the elastic states of the random triggering protocol for system sizes  $L \in [32, 64, 128, 256, 512, 1024]$ . The dotted black line indicates the universal power law determined with an exponent  $\theta \approx 0.62$ . (b) Distributions of local distance to threshold in the elastic states of different protocols for a system size  $L = 512$ . The weakest triggering protocol shows a clear depletion at low  $x$  compared to the other protocols.

to the  $d_f \approx 1.1$  for individual AQS avalanches (which we also observe for the distribution of first stress drops  $P_{\Delta\Sigma_0}(\Delta\Sigma_0)$ ).

Finally, despite the fact that for the weakest triggering protocol the distributions of avalanche size and duration do not show well-defined power laws, their cutoffs still scale as a power law of the system size, as shown in Fig. 8. This allows us to determine effective exponents  $d_f \approx 1.4$  and  $z \approx 0.75$  for this protocol, which lie in between the values obtained for AQS and those obtained with random triggering.

## 2. Relation to the pseudo-gap exponent

Scaling relations relating the avalanche behavior of amorphous systems to their structure or flowing properties have been proposed in the past and seem to be satisfied in the case of the AQS protocol [14,16]. One of them relates exponents  $\tau$  and  $d_f$  with the pseudo-gap exponent in the distribution of distance to the local yield  $\sigma_Y$ . Defining for each site the distance to local yield  $x_i = \sigma_Y - \sigma_i$ , for  $\Sigma = \Sigma_Y$  one expects at small  $x$  a power-law behavior for the distribution  $P_x(x) \sim x^\theta$ , with  $\theta$  the pseudo-gap exponent [39,40].

Under AQS protocol, stationarity imposes that [14]

$$\tau = 2 - \frac{\theta}{\theta + 1} \frac{d}{d_f}. \quad (5)$$

One may wonder whether this scaling relation is also valid beyond the AQS protocol, and in particular for the random triggering protocol, which shows a scaling behavior, albeit with different exponent values from the ones observed in AQS. We construct the distribution  $P_x(x)$  for the random triggering protocol by sampling the elastic states obtained between two avalanches. Statistics are here obtained for a total of approximately  $2 \times 10^{10}$  individual  $x$  values. In Fig. 6(a), we show  $P_x(x)$  for several system sizes. For each size, we observe a power law with an exponent  $\theta \approx 0.62$  for  $x$  in an intermediate range between a small  $x$  plateau and a large  $x$  peak. The larger the system size, the broader the power-law range at the lower end, which supports the claim that  $\theta \approx 0.62$  is the infinite-size-limit exponent. Using this measurement of  $\theta$  along with  $d_f$  and  $\tau$  measured by finite-size scaling

(see above), we find  $\tau d_f / [2d_f - \theta d / (\theta + 1)] \approx 0.97$ , which shows that the scaling relation is still valid to a good accuracy for the random triggering protocol.

The weakest triggering protocol shows no scaling behavior in the avalanche size distribution, and therefore the scaling relation is not applicable in this case. Nonetheless, it is interesting to look at the distribution  $P_x(x)$  for this protocol, as shown in Fig. 6(b) and compare it to the one obtained for the AQS and random triggering protocols with the same system size. Interestingly we find that there still is an intermediate range of  $x$  for which we observe the pseudo-gap behavior, with the same  $\theta \approx 0.62$ , but this range is much narrower for weakest triggering than for AQS or random triggering. For small  $x$  values, the distribution is severely depleted in the case of weakest triggering. The size dependence of  $P_x(x)$  reveals that the pseudo-gap behavior widens with larger system sizes (see Appendix B), but the size dependence is comparatively weak with respect to AQS and random triggering. This slow emergence of a scaling behavior of  $P_x(x)$  suggests that the absence of power law in the avalanche distribution might be a finite-size effect that persists up to unusually large system sizes. Unfortunately, we cannot explore significantly larger system sizes in order to clarify if the weakest triggering protocol actually follows a scaling behavior in the large system size limit.

## 3. Relation to the flow exponent

An additional scaling relation can be derived between the yielding critical exponents and the avalanche exponents  $z$  and  $d_f$ . In the flowing phase for  $\dot{\gamma} > 0$  small, the strain rate  $\dot{\gamma}$  and stress  $\Sigma$  are related via  $\dot{\gamma} \sim (\Sigma - \Sigma_Y)^\beta$  with  $\beta = 1/\nu$ , and the correlation length scales as  $\xi \sim (\Sigma - \Sigma_Y)^{-\nu}$ . Based on the idea that in the critical regime the mean strain rate is controlled by avalanches of typical extension  $\xi$ , characterized by their size  $S_\xi \sim \xi^{d_f}$  and their duration  $T_\xi \sim \xi^z$ , we get

$$\dot{\gamma} \sim \frac{S_\xi}{T_\xi \xi^d} \sim \xi^{d_f - z - d}. \quad (6)$$

Eliminating the distance  $\Sigma - \Sigma_Y$  to the yielding point in the definition of  $\beta$  and  $\nu$  we can get the following scaling relation

$$\beta = \nu(d - d_f + z). \quad (7)$$

This scaling relation has been verified earlier in the case of the AQS protocol [14]. To test equation Eq. (7) on the random triggering protocol, we use the measured values of  $d_f$  and  $z$ . On the other hand,  $\nu$  has recently been measured in this model, revealing  $\nu = 1.13$  [17]. The exponent  $\beta$  predicted by the scaling relation of Eq. (7) is then  $\beta \approx 1.41$ , which should be compared to the measured value of  $\beta \approx 1.5$  in this model. For the AQS protocol on the other hand we get through the same procedure a predicted exponent of  $\beta \approx 1.63$ . Thus both protocols are in relatively good agreement with the scaling prediction even though the strain-controlled protocol tends to overestimate it while the stress-controlled protocol tends to underestimate it.

TABLE I. Measured exponents in studied protocols.  $\emptyset$ : no convincing exponent determined;—: not measured; \*: incomplete finite-size collapse.

Protocol	Control variable	Elastic states	Activation	$\tau$	$\tau'$	$d_f$	$z$	$\theta$
AQS	Strain	Self-generated	Uniform loading	1.35	1.74	1.1	0.54	0.62
Random triggering	Stress	Self-generated	$n_i = 1, i \text{ random}$	1.5	1.85	1.7	0.95	0.62
Weakest triggering	Stress	Self-generated	$n_i = 1, i = \operatorname{argmin}\{\sigma\}$	$\emptyset$	$\emptyset$	1.4*	0.75*	0.62
Uniform loading	Stress	AQS	Uniform loading	1.35	—	—	—	0.62

## VI. CONCLUSION

In this study, we examine the protocol dependence of avalanche dynamics in an elastoplastic model, for protocols which are commonly used in the experimental and numerical literature. Our results highlight significant differences in avalanche statistics based on the statistical properties of the elastic states prior to the stress drop events, on the external driving protocol and on the specific protocols employed to trigger local plastic events. A short overview of these results is compiled in Table I.

Consistently with former results in the literature, we find that the athermal quasi-static (AQS) protocol yields avalanches following a power-law distribution with an exponent  $\tau \approx 1.35$ . For stress imposed dynamics and a uniform loading protocol our model produces similar power-law distributed avalanche sizes with  $\tau \approx 1.35$ . The tail of the distribution shows a larger cutoff compared to AQS, indicating a broader distribution with avalanches of larger sizes. However, the random triggering protocol yields a different exponent  $\tau \approx 1.5$ , closer to the mean-field prediction  $\tau = 3/2$ . The distribution has a characteristic bump before the cutoff, differing significantly in shape from the AQS protocol.

When triggering the weakest site instead, the size distribution no longer follows a well-defined power law and rather displays two successive bumps. This suggests a unique behavior compared to other protocols. Yet the distribution of the distance to local yield suggests that a power-law scaling may be recovered, but only for much larger system sizes than for AQS and random triggering.

We showed that the exponent  $\tau$  is primarily controlled by the way avalanches are triggered rather than the dynamical rules during avalanches. Protocols with uniform loading tend to display smaller exponents than those with local triggering.

A feature that depends strongly on dynamical rules is the cutoff size of the avalanche distributions. Stress-controlled protocols generally exhibit larger cutoffs compared to strain-controlled protocols. We interpret this phenomenon with an argument based on the concatenation of AQS avalanches.

In agreement with earlier research [14,16], our findings confirm that the AQS protocol exhibits a fractal dimension of approximately 1.1 and a dynamical exponent of about 0.54. Conversely, the random triggering protocol reveals larger values, with  $d_f \approx 1.7$  and  $z \approx 0.95$ , indicating that stress-controlled avalanches are not only more spatially compact but also persist for longer durations compared to their AQS counterparts.

Despite the change of exponent values from one protocol to the other, we verified that the predicted scaling relation  $\tau = 2 - \frac{\theta}{\theta+1} \frac{d}{d_f}$  still holds for both AQS and random triggering

protocols. For the random triggering protocol, the measured exponent  $\theta \approx 0.62$  is consistent with the predicted  $\tau \approx 1.55$ . Also the scaling relation  $\beta = v(d - d_f + z)$  is reasonably satisfied by our model results, indicating a good agreement with theoretical predictions [14].

The two-dimensional model considered here gives results that go beyond former mean-field studies [24]. Although we confirm some mean-field features to be valid in finite dimension, such as a change of avalanche exponents when going from uniform loading to random triggering, specific features like the appearance of a bump in the distribution crucially depend on the low dimensionality of the model. Moreover, we are able to describe in detail the complex spatial properties of avalanches that are encoded in the fractal dimension and can be used to test general scaling relations.

We believe our work may help to conceptually better understand the differences which may occur in the measurements of avalanche dynamics depending on the protocol employed. Care has to be taken when talking about universality under stress-imposed conditions, where the choice of avalanche-triggering protocol has a significant impact on avalanche statistics.

Finally, we would like to mention a promising route to test our results in an experimental setup. There are practical ways to implement our triggering protocols, even in the case of the random triggering protocol. It has recently been shown experimentally that it is possible to randomly induce plastic events in a glass using X-ray irradiation [41]. This technique may be used to randomly trigger plastic avalanches in a glass under imposed stress conditions, to compare with other driving protocols.

In other systems displaying avalanches it is often possible to either control strain or stress, such as in granular materials [42] or in simulations of the depinning dynamics of elastic manifolds in disordered environments, either with a force-controlled or a velocity-controlled protocol [36]. We believe that our results will have an impact on the study of a large variety of systems displaying avalanche dynamics studied in hard and soft condensed matter physics, materials science, solid mechanics, geology and in seemingly distinct fields like neuroscience, biological systems and active matter.

## ACKNOWLEDGMENTS

This project was provided with computer and storage resources by GENCI at IDRIS thanks to the Grant 2023-AD010914551 on the supercomputer Jean Zay's V100 and A100 partitions. Some of the computations presented in this paper were performed using the GRICAD infrastructure [43], which is supported by Grenoble research communities. T.J.

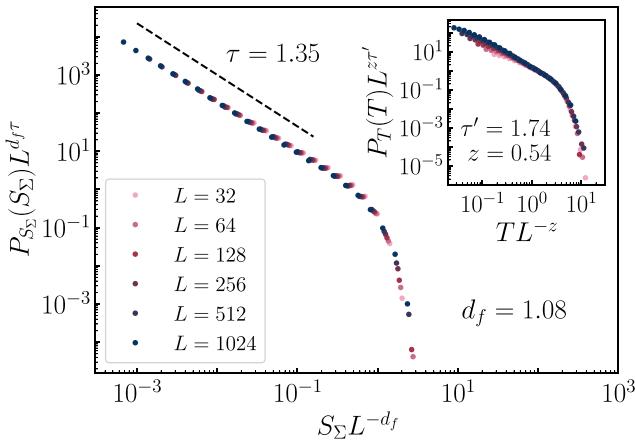


FIG. 7. Finite-size scaling of the distribution of AQS avalanche size and duration for several system sizes  $L$ .

acknowledges funding from the French Ministry of Higher Education and Research.

#### APPENDIX A: FINITE-SIZE SCALING OF AVALANCHES WITH SEVERAL PROTOCOLS

In this Appendix we show the results of the finite-size scaling of avalanches in the AQS and weakest triggering

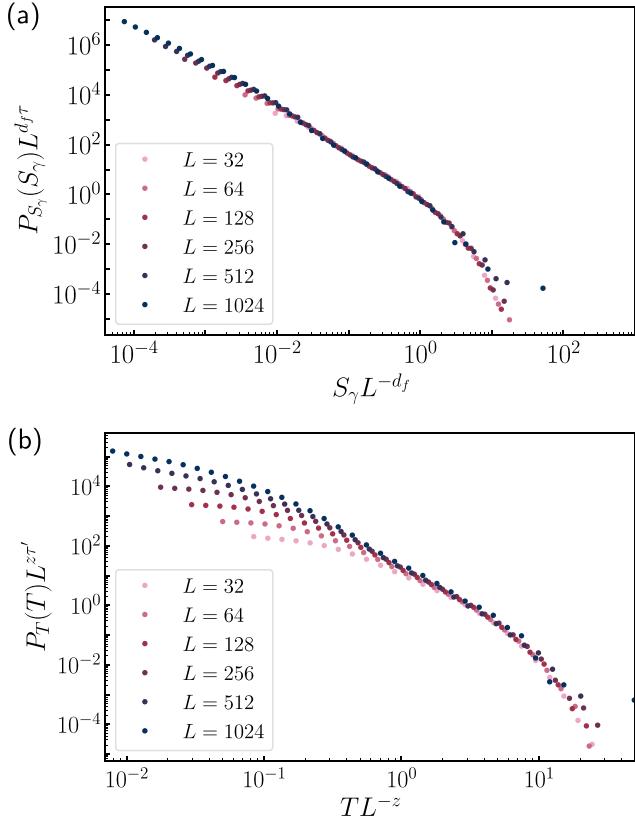


FIG. 8. Finite-size scaling of the distribution of avalanche size (a) and duration (b) with the weakest triggering protocol for several system sizes  $L$ . Trial exponents for this rescaling are  $\tau = 1.75$ ,  $d_f = 1.4$ ,  $\tau' = 2.6$  and  $z = 0.75$ .

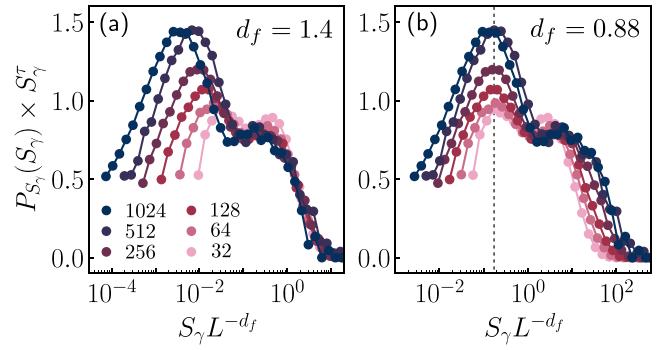


FIG. 9. Compensated rescaling of the distribution of avalanche size  $P_{S_\gamma}(S_\gamma) S_\gamma^\tau$  (with  $\tau = 1.75$ ) versus  $S_\gamma L^{-d_f}$  within the weakest triggering protocol for several system sizes  $L$ . In panel (a)  $d_f = 1.4$  is chosen to collapse best the curves in the cutoff region while in panel (b)  $d_f = 0.88$  is chosen so that the maxima of the first bump share the same associated rescaled size.

protocols. For AQS, the best collapse of  $L^{d_f \tau} P_{S_\Sigma}(S_\Sigma)$  versus  $S_\Sigma L^{-d_f}$  is obtained for a fractal dimension  $d_f \approx 1.08$ , using  $\tau = 1.35$  (see Fig. 7). The best collapse for  $L^{z \tau'} P_T(T)$  versus  $T L^{-z}$  is obtained for  $z \approx 0.54$  and  $\tau' \approx 1.74$  (inset of Fig. 7). While the values of  $\tau$ ,  $d_f$ , and  $z$  are close to the ones determined in previous works [14,16], the value of  $\tau'$  is slightly larger than the value 1.4 measured in [16] and 1.6 measured in [14], which suggests that it could be a model-dependent feature.

For the weakest triggering protocol, we do not find a satisfying collapse, neither for  $P_{\Delta\Gamma}(\Delta\Gamma)$  nor for  $P_T(T)$ , as represented in the rescaling trial in Fig. 8. This is due to the absence of a clear power law in these distributions, in particular  $P_{\Delta\Gamma}(\Delta\Gamma)$  instead shows two bumps for small and large avalanches. Nonetheless, looking for exponents to get the best possible collapse of the curves in the cutoff region, we do find a good collapse for large avalanches with  $d_f = 1.4$  and  $z = 0.75$ , of course at the cost of having a strong size-dependence for small avalanches. This is high-

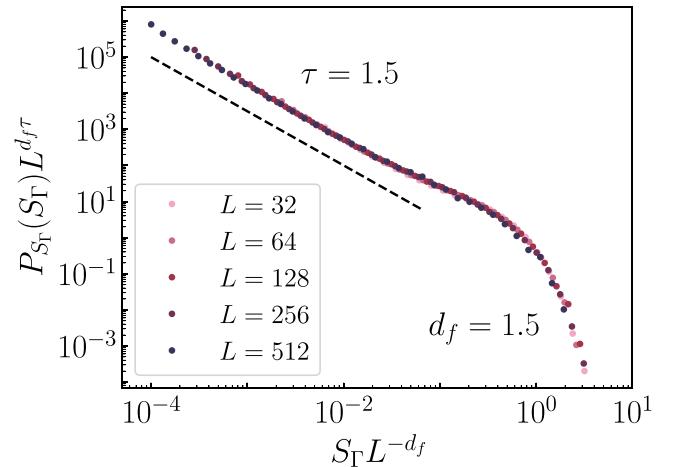


FIG. 10. Finite-size scaling of the size distribution of concatenations of avalanches obtained by AQS starting from elastic states sampled by the random triggering protocol for several system sizes  $L$ .

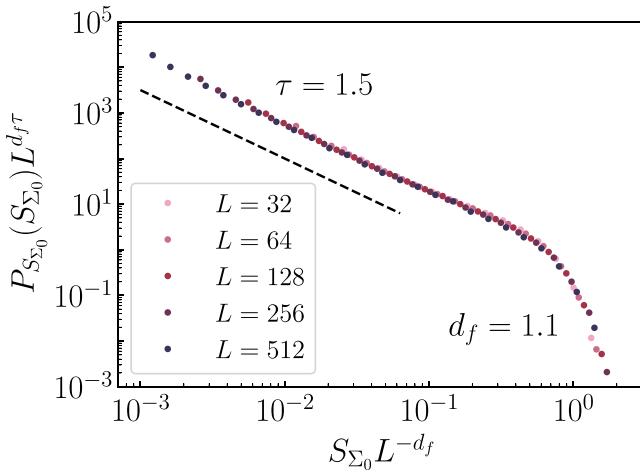


FIG. 11. Finite-size scaling of the distribution of first avalanche sizes obtained by AQS starting from elastic states sampled by the random triggering protocol for several system sizes  $L$ .

lighted in the compensated plot in panel (a) of Fig. 9. By contrast, we cannot find a rescaling that collapses the curves in the region around the bump corresponding to smaller avalanches. It is nonetheless possible to align the maxima of the bumps such that they share the same associated rescaled size with a rescaling defined this time by  $d_f \approx 0.88$  (see panel (b) of Fig. 9). This smaller fractal dimension suggests smaller avalanches are less compact than the bigger ones.

We also perform the same analysis for the distribution of concatenated AQS avalanches, as discussed in Sec. IV B. Remarkably, we do find a collapse, as shown in Fig. 10, with  $d_f \approx 1.5$  and  $\tau \approx 1.5$ . Therefore concatenated avalanches still follow a critical scaling, albeit with different exponents from single avalanches in the AQS protocol.

In Fig. 11, we confirm the importance of the triggering mechanism via the way it controls the statistics of visited elastic states, by performing the finite-size scaling analysis on the distribution of first avalanches when we apply the AQS dynamics on elastic states sampled with the random triggering protocol. Here again, a remarkable collapse is obtained. Looking at the exponents, we find  $d_f \approx 1.1$  (like usual AQS

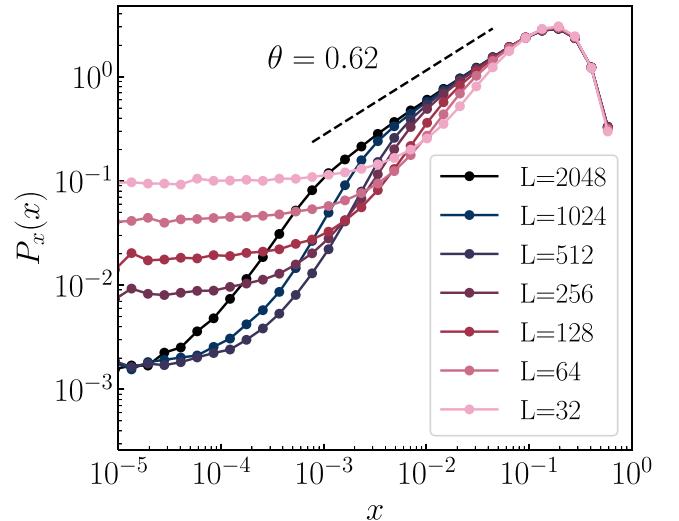


FIG. 12. Distributions of the distance to threshold in the elastic states of the weakest triggering protocol for system sizes  $L \in [32, 64, 128, 256, 512, 1024, 2048]$ .

avalanches) and  $\tau = 1.5$  (unlike usual AQS avalanches). This shows that the elastic states sampled by the random triggering protocol are statistically different from the ones sampled by AQS, leading to different  $\tau$  exponents.

## APPENDIX B: PSEUDO-GAP DISTRIBUTION IN THE WEAKEST TRIGGERING PROTOCOL

In this Appendix we report the size dependence of the distribution  $P_x(x)$  of distance  $x$  to local yield, for elastic states sampled using the weakest triggering protocol. As shown in Fig. 12, this distribution only shows a pseudo-gap  $P_x(x) \sim x^\theta$  for the largest sizes  $L$  that we are able to investigate numerically. This stands in contrast to the AQS and random triggering protocols, for which the pseudo-gap is clearly visible even for reasonable sizes. Nonetheless, it appears in Fig. 12 that the intermediate range of  $x$  for which the scaling holds is widening, even if slowly, when increasing system size. This suggests that in the large system size limit the pseudo-gap would actually be observed, with  $\theta \approx 0.62$ , the same value as for the AQS and the random triggering protocol.

- 
- [1] L. Laurson, G. Durin, and S. Zapperi, *Phys. Rev. B* **89**, 104402 (2014).
  - [2] V. B. Verma, A. E. Lita, M. J. Stevens, R. P. Mirin, and S. W. Nam, *Appl. Phys. Lett.* **108**, 131108 (2016).
  - [3] J. Antonaglia, W. J. Wright, X. Gu, R. R. Byer, T. C. Hufnagel, M. LeBlanc, J. T. Uhl, and K. A. Dahmen, *Phys. Rev. Lett.* **112**, 155501 (2014).
  - [4] I. Cantat and R. Delannay, *Eur. Phys. J. E* **18**, 55 (2005).
  - [5] X. Clotet, S. Santucci, and J. Ortín, *Phys. Rev. E* **93**, 012150 (2016).
  - [6] R. Kokkonieniemi, A. Miksic, M. Ovaska, L. Laurson, and M. J. Alava, *J. Stat. Mech.* (2017) 073401.
  - [7] I. G. Main, F. Kun, and A. F. Bell, Crackling noise in digital and real rocks—implications for forecasting catastrophic failure in porous granular media, in *Avalanches in Functional Materials and Geophysics* (Springer International Publishing, Cham, 2017), pp. 77–97.
  - [8] T. Mäkinen, A. Miksic, M. Ovaska, and M. J. Alava, *Phys. Rev. Lett.* **115**, 055501 (2015).
  - [9] A. van Herwijnen, M. Heck, and J. Schweizer, *Cold Regions Sci. Technol.* **132**, 68 (2016).
  - [10] L. de Arcangelis, C. Godano, J. R. Grasso, and E. Lippiello, *Phys. Rep.* **628**, 1 (2016).
  - [11] L. de Arcangelis and H. J. Herrmann, *Front. Physiol.* **3**, 62 (2012).

- [12] A. Puy, E. Gimeno, D. March-Pons, M. C. Miguel, and R. Pastor-Satorras, *Phys. Rev. Res.* **6**, 033270 (2024).
- [13] A. B. Kolton, A. Rosso, T. Gihamarchi, and W. Krauth, *Phys. Rev. Lett.* **97**, 057001 (2006).
- [14] J. Lin, E. Lerner, A. Rosso, and M. Wyart, *Proc. Natl. Acad. Sci. USA* **111**, 14382 (2014).
- [15] D. V. Denisov, K. A. Lörincz, J. T. Uhl, K. A. Dahmen, and P. Schall, *Nat. Commun.* **7**, 10641 (2016).
- [16] C. Liu, E. E. Ferrero, F. Puosi, J.-L. Barrat, and K. Martens, *Phys. Rev. Lett.* **116**, 065501 (2016).
- [17] T. Jocqueur, S. Figueiredo, K. Martens, E. Bertin, and R. Mari, *Phys. Rev. Lett.* **132**, 268203 (2024).
- [18] P. D. Ispánovity, L. Laurson, M. Zaiser, I. Groma, S. Zapperi, and M. J. Alava, *Phys. Rev. Lett.* **112**, 235501 (2014).
- [19] K. M. Salerno and M. O. Robbins, *Phys. Rev. E* **88**, 062206 (2013).
- [20] K. Karimi, E. E. Ferrero, and J.-L. Barrat, *Phys. Rev. E* **95**, 013003 (2017).
- [21] P. Leishangthem, A. D. S. Parmar, and S. Sastry, *Nat. Commun.* **8**, 14653 (2017).
- [22] F.-J. Pérez-Reche, L. Truskinovsky, and G. Zanzotto, *Phys. Rev. Lett.* **101**, 230601 (2008).
- [23] E. Vives, D. Soto-Parra, L. Mañosa, R. Romero, and A. Planes, *Phys. Rev. B* **80**, 180101 (2009).
- [24] E. A. Jagla, *Phys. Rev. E* **92**, 042135 (2015).
- [25] A. Nicolas, E. E. Ferrero, K. Martens, and J.-L. Barrat, *Rev. Mod. Phys.* **90**, 045006 (2018).
- [26] G. Picard, A. Ajdari, F. Lequeux, and L. Bocquet, *Phys. Rev. E* **71**, 010501 (2005).
- [27] J. D. Eshelby, *Proc. R. Soc. London A* **241**, 376 (1957).
- [28] G. Picard, A. Ajdari, F. Lequeux, and L. Bocquet, *Eur. Phys. J. E* **15**, 371 (2004).
- [29] C. Liu, E. E. Ferrero, K. Martens, and J.-L. Barrat, *Soft Matter* **14**, 8306 (2018).
- [30] F. Dallari, A. Martinelli, F. Caporaletti, M. Sprung, G. Baldi, and G. Monaco, *Proc. Natl. Acad. Sci. USA* **120**, e2213182120 (2023).
- [31] Z. Budrikis, D. F. Castellanos, S. Sandfeld, M. Zaiser, and S. Zapperi, *Nat. Commun.* **8**, 15928 (2017).
- [32] E. E. Ferrero and E. A. Jagla, *Soft Matter* **15**, 9041 (2019).
- [33] K. A. Dahmen, Y. Ben-Zion, and J. T. Uhl, *Nat. Phys.* **7**, 554 (2011).
- [34] S. Sandfeld, Z. Budrikis, S. Zapperi, and D. F. Castellanos, *J. Stat. Mech.* (2015) P02011.
- [35] N. Oyama, H. Mizuno, and A. Ikeda, *Phys. Rev. E* **104**, 015002 (2021).
- [36] A. Rosso, P. Le Doussal, and K. J. Wiese, *Phys. Rev. B* **80**, 144204 (2009).
- [37] L. Laurson, *Phys. Rev. Lett.* **133**, 207102 (2024).
- [38] K. Martens, L. Bocquet, and J.-L. Barrat, *Phys. Rev. Lett.* **106**, 156001 (2011).
- [39] S. Karmakar, E. Lerner, and I. Procaccia, *Phys. Rev. E* **82**, 055103 (2010).
- [40] J. Lin, A. Saade, E. Lerner, A. Rosso, and M. Wyart, *Europhys. Lett.* **105**, 26003 (2014).
- [41] A. Martinelli, F. Caporaletti, F. Dallari, M. Sprung, F. Westermeier, G. Baldi, and G. Monaco, *Phys. Rev. X* **13**, 041031 (2023).
- [42] D. Houdoux, A. Amon, D. Marsan, J. Weiss, and J. Crassous, *Commun. Earth Environ.* **2**, 90 (2021).
- [43] <https://gricad.univ-grenoble-alpes.fr>

## E.3 Modèle de Picard confiné

Dans cette partie nous présentons une très brève étude de la transition vers l'écoulement dans un dispositif quasi-2D représentant un confinement entre deux plaques rigides. Pour ce faire, nous commençons par exposer la modification du propagateur de redistribution de la contrainte locale dans ce cas. Puis, via son analyse dans le cadre du modèle de Picard, nous montrons que cette nouvelle forme de l'interaction, toujours à longue portée, induit une perte de criticalité au-delà d'une certaine longueur d'écrantage définie par le confinement.

### E.3.1 Confinement et interaction d'Eshelby

De la même façon que dans le cas des suspensions, les dispositifs expérimentaux étudiés dans le cas de la transition vers l'écoulement peuvent agir significativement sur la portée des interactions. Si le cas de l'interaction d'Eshelby est le plus plébiscité dans la communauté des matériaux amorphes, nous pouvons imaginer une variation de la modification de contrainte induite par un réarrangement plastique dans un dispositif différent. En effet, si l'on considère un écoulement quasi-2D dans le plan  $(\hat{\mathbf{e}}_x, \hat{\mathbf{e}}_y)$  entre deux plaques rigides parallèles aux plans de côte  $z$  constante, alors les frottements entre le fluide à seuil s'écoulant et les plaques vont induire une dissipation modifiant la redistribution de contrainte suite à un évènement plastique.

Pour le comprendre, nous proposons modéliser ces frottements par un terme de dissipation proportionnel à la défomation du fluide de la même manière que dans le cas de l'étude des écoulements en milieux poreux [160]. En reprenant le cadre décrit à la section B.2, la condition d'équilibre mécanique dans l'espace 2D effectif devient :

$$-\partial_i P^1(\mathbf{r}) + \partial_j \sigma_{ij}^1(\mathbf{r}) - \mu \lambda^2 u_i^1 = 0 \quad (\text{E.13})$$

avec  $\lambda$  un coefficient retranchant l'intensité de la dissipation et définissant une longueur d'écrantage selon  $\xi \sim 1/\lambda$ . Par une résolution similaire à celle présentée dans la section B.2, ce cas de figure nous amène à un propagateur dans l'espace réciproque dont la forme est la suivante :

$$\hat{G}_\lambda(\mathbf{q}) = -4 \frac{q_x^2 q_y^2}{q^2(q^2 + \lambda^2)} - \frac{\lambda^2}{\lambda^2 + q^2} \quad (\text{E.14})$$

et dont on peut déterminer les formes asymptotiques en se basant sur la forme dans l'espace réel des propagateurs des modèles  $\alpha$ -Picard :

$$\begin{aligned} \hat{G}_\lambda(\mathbf{q}) &\xrightarrow[q \gg \lambda]{} -4 \frac{q_x^2 q_y^2}{q^4} \Rightarrow G_\lambda(\mathbf{r}) \xrightarrow[r \ll \xi]{} \sim \frac{\cos 4\theta}{r^2} \\ \hat{G}_\lambda(\mathbf{q}) &\xrightarrow[q \ll \lambda]{} -4 \frac{q_x^2 q_y^2}{\lambda^2 q^2} - 1 \Rightarrow G_\lambda(\mathbf{r}) \xrightarrow[r \gg \xi]{} \sim \frac{\cos 4\theta}{r^4} \end{aligned} \quad (\text{E.15})$$

Ainsi, dans l'espace réel, en dehors de la relaxation globale imposée par le terme de dissipation, la redistribution du système confiné est la même que celle dans le problème original à petite distance  $r \ll \xi$ , décroissant comme  $\sim 1/r^2$ , mais, au-delà de la longueur

d'écrantage, celle-ci décroît significativement plus vite, comme  $\sim 1/r^4$ . Ainsi, comme dans le cas des suspensions, le confinement ne supprime pas le caractère de longue portée de l'interaction mais change son évolution algébrique.

### Transformée de Fourier inverse du propagateur

Pour obtenir l'expression complète du propagateur en espace réel, nous pouvons décomposer le premier terme de l'[équation E.14](#) de la manière suivante :

$$\hat{G}_\lambda(\mathbf{q}) = -4 \frac{q_x^2 q_y^2}{\lambda^2 q^2} + 4 \frac{q_x^2 q_y^2}{\lambda^2 (\lambda^2 + q^2)} - \frac{\lambda^2}{\lambda^2 + q^2} \quad (\text{E.16})$$

pour obtenir dans l'espace réel :

$$G(r, \theta) = \frac{12}{\pi \lambda^2} \frac{\cos 4\theta}{r^4} - \frac{\lambda^2}{2\pi} K_0(\lambda r) + \frac{2}{\pi \lambda^2} \partial_x^2 \partial_y^2 K_0(\lambda r) \quad (\text{E.17})$$

En calculant les dérivées associées au troisième terme du membre de droite, nous obtenons donc :

$$G(r, \theta) = \frac{12}{\pi \lambda^2} \frac{\cos 4\theta}{r^4} - \frac{1}{32\pi \lambda r^3} \sum_{n=0}^4 K_n(\lambda r) \left( P_n^{(0)}(\lambda r) + P_n^{(1)}(\lambda r) \cos 4\theta \right) \quad (\text{E.18})$$

avec :

$$\begin{aligned} P_0^{(0)}(X) &= X(4 + 13X^2), & P_0^{(1)}(X) &= 3X(20 + X^2) \\ P_1^{(0)}(X) &= 8 + 12X^2, & P_1^{(1)}(X) &= 120 + 36X^2 \\ P_2^{(0)}(X) &= 4X(1 - X^2), & P_2^{(1)}(X) &= 60X^3 \\ P_3^{(0)}(X) &= 4X^2, & P_3^{(1)}(X) &= 12X^2 \\ P_4^{(0)}(X) &= -X^3, & P_4^{(1)}(X) &= X^3 \end{aligned} \quad (\text{E.19})$$

### E.3.2 Etude des avalanches dans le modèle $\lambda$ -Picard

Pour étudier la transition vers l'écoulement dans un dispositif confiné quasi-2D, nous implémentons la forme du propagateur donnée par l'[équation E.14](#) dans le modèle de Picard de la même façon que dans le cas du modèle  $\alpha$ -Picard. Ce modèle dépend d'un paramètre continu  $\lambda$  et nous le baptisons alors modèle  $\lambda$ -Picard. Via cette implémentation, nous obtenons les formes de décroissance du propagateur représentées à la [figure E.3](#) et compatibles avec les comportements asymptotiques en  $\sim 1/r^2$  et en  $\sim 1/r^4$ .

Le modèle de Picard confiné ne conservant pas la contrainte globale du système, il n'est pas possible de générer des avalanches selon le protocole de contrainte imposée RTP (voir [section 4.4](#)). Toutefois, l'approche quasistatique de l'AQS est tout à fait réalisable. Pour différentes tailles de systèmes  $L$  et différents écrangements  $\lambda$ , nous mesurons donc les distributions de tailles d'avalanche avec le protocole AQS dans ce modèle. Les résultats sont présentés à la [figure E.4](#).

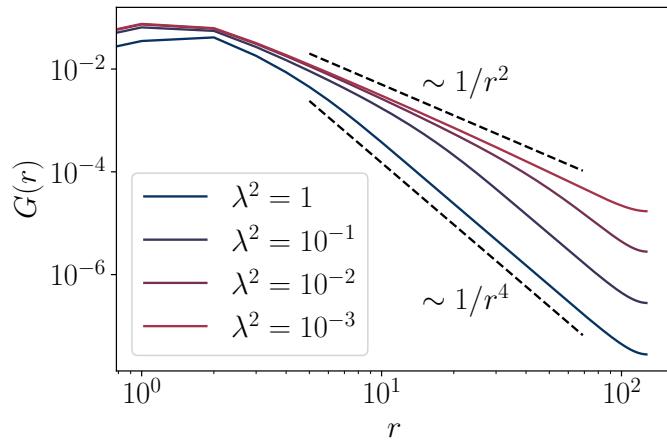


FIGURE E.3 – Images des propagateurs de redistribution dans le modèle  $\lambda$ -Picard. La figure montre l'évolution du propagateur le long de la ligne  $y = 0$  pour différentes valeurs d'écrantage  $\lambda$ .

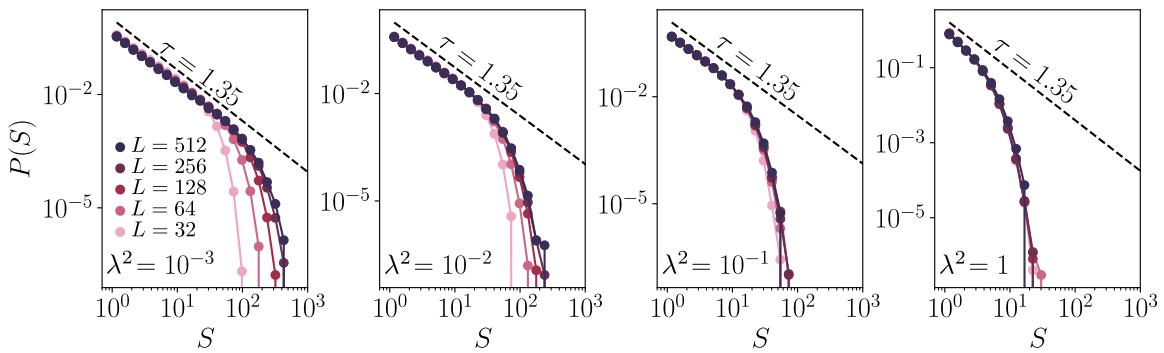


FIGURE E.4 – Distributions de tailles d'avalanches quasistatiques dans le modèle de Picard écranté pour différentes valeurs de l'écrantage  $\lambda$

Pour le plus faible écrantage ( $\lambda^2 = 10^{-3}$ ), nous retrouvons des distributions en loi de puissance avec  $\tau \approx 1.35$  comme dans le cas du modèle de Picard ( $\lambda = 0$ ). Par contre, à mesure que  $\lambda$  augmente, ces lois de puissance montrent un cut-off  $S_c(\lambda)$  diminuant peu à peu. De ce fait, à  $\lambda = 1$  la criticalité avalancheuse est perdue à toutes les tailles. Cette diminution du cut-off ne dépendant pas de la taille du système, cela suggère qu'il est uniquement contrôlé par la longueur d'écrantage  $\xi \sim 1/\lambda$ . En d'autres termes, il n'y aurait des avalanches qu'en dessous de la longueur d'écrantage. Au-delà, le système perd sa criticalité. Etant donné qu'en dessous de  $\xi$  le propagateur prend la forme de celui du propagateur d'Eshelby, il est raisonnable de penser que les avalanches ont la même structure que celles dans le modèle de Picard dans la zone non-écrantée. Pour valider cette hypothèse, nous redimensionnons les distributions obtenues pour les systèmes de plus grande taille ( $L = 512$ ) selon :

$$P(S) \rightarrow \frac{P(S)}{\xi^{-\tau_{\text{eff}} d_f, \text{eff}}}, \quad S \rightarrow \frac{S}{\xi^{d_f, \text{eff}}}, \quad \xi = \frac{1}{\lambda} \quad (\text{E.20})$$

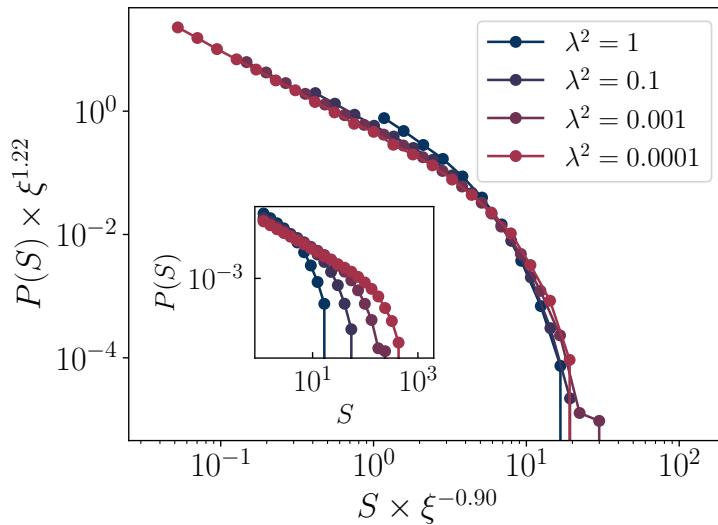


FIGURE E.5 – Redimensionnement des distributions de tailles d’avalanche via la longueur d’écrantage  $\xi$  dans le modèle de Picard écranté. En encart, les données avant redimensionnement. La taille du système est  $L = 512$ .

La meilleure superposition des courbes est alors représentée à la figure E.5 pour  $d_{f,\text{eff}} \approx 0.9$  et  $\tau_{\text{eff}} \approx 1.36$ . Les valeurs des exposants déterminées ainsi étant proches de celles déterminées dans le cas du modèle de Picard avec un redimensionnement par  $L$ , cela conforte notre hypothèse. Ainsi, l’écrantage sur une longueur  $\xi$  n’aurait comme effet que de supprimer la criticalité du système au-delà de cette échelle de longueur.

Ainsi, même si au-delà de  $\xi$  la redistribution de la contrainte décroît comme  $1/r^4$ , la criticalité du système observée n’est pas celle du modèle  $\alpha$ -Picard avec  $\alpha = 4$ . Des mesures annexes suggèrent que cette perte de criticalité est due à la forme de la relaxation globale dans le cas du modèle de Picard écranté, qui est concentrée sur le site actif et non répartie uniformément sur tous les sites constituant le système (terme  $-1$  dans l’équation E.15).



## Annexes au chapitre 5

### F.1 Modèle élastoplastique décorrélé

Dans cette partie, nous présentons le modèle élastoplastique que nous avons implémenté pour déterminer l'influence de la structure spatiale du propagateur dans le modèle de Picard (voir [chapitre 5](#)).

Nous considérons un modèle élastoplastique analogue au modèle de Picard mais dont l'influence d'un réarrangement plastique est isotrope. En fait, ce modèle présente exactement la même philosophie que celle portée par la modélisation dans le  $\alpha$ -ROM : l'influence d'un évènement d'activité sur les agents du système est prise en compte de manière statistique (voir [sous-section 3.2.3](#)). Afin de mettre en place cette dynamique, elle est, comme dans le cas du  $\alpha$ -ROM, discrétisée en pas de temps indivisibles. Dans le  $\alpha$ -ROM, un pas de temps représente le déplacement des particules actives. Dans ce modèle élastoplastique, le pas de temps représente la relaxation d'un site plastique. La dynamique est donc intrinsèquement discrète dans le temps, à la différence du modèle de Picard qui reposait sur des règles d'évolution continue dans le temps (voir [l'équation 4.5](#)) 

En pratique, nous considérons, comme dans le cas du modèle de Picard,  $N = L \times L$  sites élastoplastiques, indexé par un entier  $i$ , disposés sur un réseau carré bipériodique. À chaque site est affecté une contrainte locale  $\sigma_i$ , une contrainte seuil  $\sigma_Y$  et un état  $n_i$ . À chaque pas de temps  $t_n$  de la dynamique, l'algorithme suivi est le suivant :

1. Tous les sites avec  $\sigma_i > \sigma_Y$  sont considérés comme actifs  $n_i = 1$ .
2. Chaque site reçoit un **kick** de contrainte aléatoire et de taille typique  $\delta\sigma_i$ , défini comme la convolution  $\sqrt{\sum_{j \neq i} G_{ij}^2} A_j$  avec  $G_{ij}^2$  le propagateur défini de la même façon que le propagateur dans le  $\alpha$ -ROM, i.e. isotrope et décroissant comme  $\sim 1/r^{2\alpha}$  (voir [sous-section 3.2.3](#)).
3. La contrainte des sites actifs est relaxée vers une valeur  $\sigma_0 < \sigma_Y$ .
4. Chaque site reçoit un ajout de contrainte  $\delta\Sigma$  permettant de conserver la contrainte globale  $\Sigma = \frac{1}{N} \sum_i \sigma_i$ .

Ce schéma numérique est alors à mi-chemin entre les modèles  $\alpha$ -ROM et  $\alpha$ -Picard. En regard de l'analyse proposée au [chapitre 5](#), l'étape 2 représente le processus de création

d'activité par diffusion et l'étape 4 représente le processus de création d'activité par transport de la quantité conservée (qui prend ici un aspect champ moyen). L'implémentation détaillée peut-être retrouvée sur : [Lien github](#)

Avec ce modèle, nous pouvons mesurer l'activité moyenne  $\langle A \rangle = \langle \frac{1}{N} \sum_i n_i \rangle$  dans l'état stationnaire pour différentes contraintes globales  $\Sigma$ . En déterminant la contrainte critique  $\Sigma_c$  séparant la phase active de la phase absorbante, nous pouvons alors déterminer l'exposant critique  $\beta$  défini comme  $\langle A \rangle \sim (\Sigma - \Sigma_c)^\beta$  et son évolution avec la portée  $\alpha$ . Les méthodes utilisées sont les mêmes que dans le cas de la détermination de l'exposant  $\beta$  pour les modèles  $\alpha$ -Picard. Des résultats préliminaires concernant ces déterminations sont présentés à la [figure 5.3](#).

## F.2 Équations de champ pour les transitions convexes

### F.2.1 Motivations et difficultés

Pour intégrer toute la complexité d'un phénomène critique dans une théorie simple, l'approche naturelle est celle des théories de champs. Via les méthodes du groupe de renormalisation, connaître la théorie de champ associée à un phénomène permet, en principe, d'en caractériser la criticalité. Un exemple édifiant est celui de la transition de dépiégeage (et en définitive de la classe CDP) dont le traitement analytique a permis de nombreux progrès sur la compréhension du phénomène. Pour aller au-delà des descriptions champ moyen proposées par les modèles de type  $\mu$ -HL, il est donc naturel de vouloir déterminer une théorie de champ associée aux transitions convexes faisant intervenir une dynamique de bruit interne.

Cette motivation n'est en réalité pas nouvelle, autant du point de vue de la transition vers l'écoulement que du point de vue de la transition de réversibilité. En effet, du fait de sa proximité avec la transition de dépiégeage, certaines études ont cherché à établir une théorie continue homologue dans le cas de la transition vers l'écoulement [54, 161]. Les équations proposées sont alors directement tirées des règles dynamiques des modèles élastoplastiques. Le problème est que celles-ci font intervenir la notion d'un seuil local, inadaptée à une approche macroscopique à grande échelle. Par ailleurs, l'introduction de l'interaction d'Eshelby dans une théorie continue sans seuil comme l'équation de quenched-Edward-Wilkinson pose problème, puisque la non-positivité du propagateur rend la procédure de renormalisation habituelle impossible [94]. Une description continue adéquate manque donc toujours à la transition vers l'écoulement.

Du côté de la transition de réversibilité, l'étude menée par Mari et al. [14] avait mené à la suggestion d'une théorie de champ expliquant la convexité de la transition. Les auteurs ont proposé une traduction du mécanisme de création d'activité par diffusion comme une modification du terme non-linéaire en  $\sim A^2$  dans l'équation CDP sur le champ d'activité en un terme en  $\sim A^{3/2}$ . Dans une approche champ moyen naïve, cela permet effectivement d'obtenir un exposant  $\beta = 2$  et donc une transition convexe. Toutefois, si cette théorie était

appuyée sur des arguments microscopiques, elle n'a jamais été testée afin de comprendre si cette convexité est effectivement retrouvée en dimension finie.

Il existe une tension entre cette recherche classique d'une théorie continue pour les transitions convexes et le cadre de champ moyen adapté que nous avons présenté précédemment avec les modèles de type Hébraud-Lequeux. En effet, il n'est pas évident de voir comment l'approche intrinsèquement microscopique ou mésoscopique sur la quantité conservée peut être traduite dans un langage de théorie de champ.

Dans cette section, nous présentons des résultats préliminaires obtenus sur cet axe de réflexion. Plus précisément nous essayons d'inférer des équations de champ adéquates pour reproduire la convexité de ces transitions, en se basant sur les théories de champ des classes CDP et LR-CDP. Pour tester ces équations, nous ne les étudions pas analytiquement mais plutôt numériquement en les intégrant directement. Ainsi, il est possible d'étudier les criticalités qu'elles décrivent de la même façon que les modèles microscopiques déjà considérés tout au long de cet ouvrage.

## F.2.2 Cadre de travail

Établir une théorie de champ n'est de façon générale pas quelque chose d'évident, et encore moins lorsque l'on n'est pas spécialiste du domaine. Dans le cas des classes DP et CDP, les théories continues associées sont dérivées, plus ou moins directement, des processus de réaction-diffusion mentionnés dans le [chapitre 1](#). Dans notre cas, il est difficile d'imaginer un tel processus représentant l'effet du bruit interne sur la dynamique. Les systèmes que nous avons étudiés ressemblant par de nombreux aspects aux modèles appartenant à la classe CDP, nous proposons de partir de la théorie continue la décrivant et d'en proposer des modifications. Pour rappel, celle-ci est représentée par les deux équations couplées suivantes :

$$\begin{aligned}\partial_t A(\mathbf{r}, t) &= (\omega\rho(\mathbf{r}, t) - r)A(\mathbf{r}, t) - uA^2(\mathbf{r}, t) + \kappa\nabla^2 A(\mathbf{r}, t) + \sigma\sqrt{A(\mathbf{r}, t)}\eta(\mathbf{r}, t) \\ \partial_t \rho(\mathbf{r}, t) &= \kappa\nabla^2 A(\mathbf{r}, t)\end{aligned}\quad \text{(F.1)}$$

avec  $A(\mathbf{r}, t)$  le champ d'activité et  $\rho(\mathbf{r}, t)$  le champ conservé.

En principe, intégrer numériquement ces équations n'est pas chose simple, et ce pour une raison principale : dû à la présence du bruit dans l'équation sur l'activité, sans précaution particulière celle-ci peut devenir négative, ce qui est totalement proscrit. En théorie, les équations préservent la positivité de l'activité, mais en pratique, via un schéma d'intégration avec un pas de temps  $\Delta t$  fini, celle-ci n'est pas assurée. Pour résoudre ce problème, nous utilisons un algorithme d'intégration proposé précédemment par Dornic et al. [162], permettant d'introduire le bruit multiplicatif tout en préservant la positivité de l'activité. Simplement, nous l'implémentons de manière parallélisée via le langage CUDA afin de gagner en efficacité. De manière schématique (voir [162] pour plus de détails), cette méthode permet de décomposer l'intégration en une intégration déterministe réalisée via les

méthodes habituelles<sup>1</sup>, et une intégration du terme stochastique via la résolution analytique de l'équation constituée par les termes restants. De ce fait, le bruit multiplicatif ne peut pas mener à une activité négative.

### F.2.3 Vérification de la méthode d'intégration numérique

Avant de tester de nouvelles théories de champs pour modéliser les transitions de réversibilité et d'écoulement, nous vérifions le bon fonctionnement de notre schéma numérique en intégrant les équations associées à la classe CDP.

Pour ce faire, nous intégrons numériquement l'équation F.1 pour différentes valeurs du paramètre  $r$ , la valeur des autres paramètres étant gardée constante. Nous observons alors effectivement une transition de phase absorbante dont le point critique représenté par la valeur  $r_c$  sépare une phase active, dans laquelle la valeur moyenne de l'activité  $\langle A \rangle$  est positive dans l'état stationnaire, d'une phase absorbante où le système tombe à temps longs dans l'état  $A(\mathbf{r}, t) = 0$ .

En déterminant la valeur du paramètre critique  $r_c$  et de l'exposant de convexité  $\beta$  avec la méthode présentée au chapitre 2, nous obtenons les résultats présentés sur la figure F.1. Nous mesurons alors  $\beta = 0.64 \pm 0.02$ , soit une valeur en parfait accord avec celle attendue pour la classe CDP  $\beta = 0.639 \pm 0.009$  [19]. Nous considérons cette mesure comme une preuve suffisante du bon fonctionnement de notre algorithme implémenté.

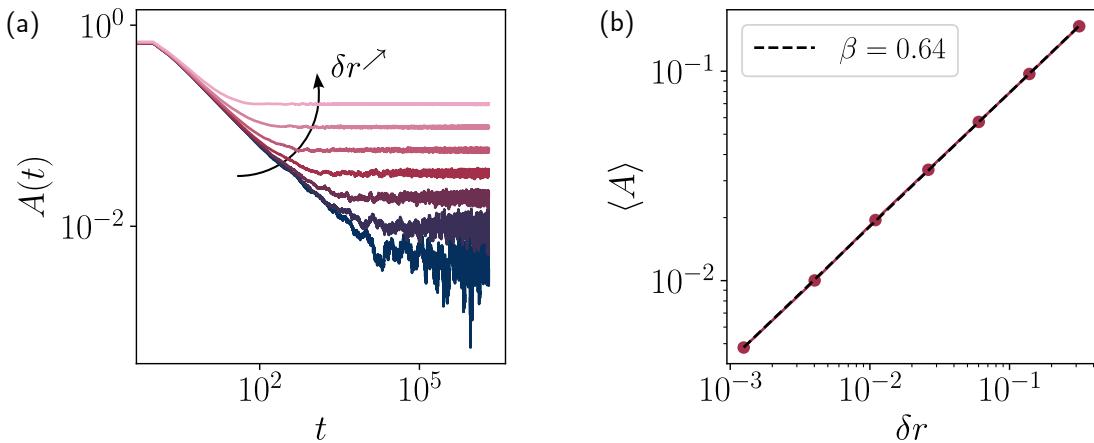


FIGURE F.1 – Intégration numérique des équations de champs CDP. (a) Evolution de l'activité dans le système  $A$  en fonction du temps  $t$  pour différentes distances au point critique  $\delta r = \frac{r-r_c}{r_c}$ . (b) Détermination de l'exposant  $\beta$ . Nous mesurons  $r_c \approx -0.14418$  pour les valeurs de paramètres  $\omega = 1$ ,  $u = 1$ ,  $\kappa = 0.25$ ,  $\sigma = 1.4$  et une valeur moyenne du champ conservé  $\bar{\sigma} = 1$ .

### F.2.4 Enjeux pratiques

Dans cette sous-section, nous mettons en évidence les difficultés pratiques concernant l'établissement de nouvelles théories de champ pour les transitions convexes en prenant l'exemple représentatif de la transition vers l'écoulement.

1. Dans notre cas, nous utilisons une méthode d'Euler ou une méthode de Runge-Kutta d'ordre 4.

Par équivalence avec la transition de dépiégeage, une théorie de champ intuitive pour la transition vers l'écoulement reviendrait à remplacer les termes en  $\nabla^2 A$  dans l'[équation F.1](#) par des convolutions avec le propagateur élastique de type Eshelby  $\mathcal{G} * A$ . Si cette formulation est en théorie valable pour l'équation sur la quantité conservée, elle pose un problème de principe dans le cas de l'équation sur l'activité. En effet, le propagateur associé présentant des parties négatives, cela signifie qu'une zone inactive caractérisée par  $A = 0$  est susceptible de se voir attribuer une activité négative sous l'effet de cette interaction non-locale. Une solution intuitive à ce problème serait alors d'ajouter une partie locale à ce terme d'interaction afin qu'il prenne la forme  $A \times (\mathcal{G} * A)$ , assurant de ce fait que l'activité d'une zone inactive ne puisse pas être diminuée. Toutefois cela pose un second problème : dans ce cadre, une zone inactive ne peut pas être activée à distance (puisque le terme d'interaction à longue portée associé est nul), ce qui constitue un aspect essentiel du mécanisme de création de l'activité que l'on cherche à modéliser.

La dynamique de bruit interne semblant devoir faire intervenir des interactions à longue portée de signe alterné (i.e. capables de favoriser comme de défavoriser la création d'activité), cette difficulté se retrouve dans toutes les théories intuitives que l'on peut proposer pour les différentes transitions. Les équations de champ que nous avons envisagées permettent donc toutes de répondre à ces deux critères :

- faire intervenir des interactions capables de créer de l'activité dans des zones inactives à longue portée
- faire intervenir des interactions inhibitrices de l'activité à longue portée préservant la positivité de l'activité en tout point.

### F.2.5 Résultats préliminaires

Dans cette section, nous présentons des théories que nous avons envisagées dans le cadre de la modélisation des transitions de réversibilité et d'écoulement. Les résultats préliminaires que nous avons obtenus montrent que les formulations intuitives des équations de champ pour modéliser les transitions convexes sont inadéquates. Plus particulièrement, nous montrons qu'avec des interactions associées à longue portée, celles-ci ne permettent pas de dépasser le paradigme  $\beta \approx 1$ . Afin de ne pas tomber dans l'écueil de présenter exhaustivement toutes nos tentatives non fructueuses, nous proposons dans cette sous-section de présenter simplement trois théories motivées par les modèles microscopiques que nous avons étudiés dans cet ouvrage.

#### Exemple de théorie motivée par le modèle de Picard

Dans le cadre de la modélisation continue du modèle de Picard, une théorie envisageable est celle représentée par les équations suivantes :

$$\begin{aligned} \partial_t A(\mathbf{r}, t) &= (\omega \rho(\mathbf{r}, t) - r) A(\mathbf{r}, t) - u A^2(\mathbf{r}, t) + \kappa (\mathcal{G}^+ * A)(\mathbf{r}, t) + \kappa (\mathcal{G} * A)(\mathbf{r}, t) A(\mathbf{r}, t) \\ &\quad + \sigma \sqrt{A(\mathbf{r}, t)} \eta(\mathbf{r}, t) \\ \partial_t \rho(\mathbf{r}, t) &= \kappa_\sigma (\mathcal{G} * A)(\mathbf{r}, t) \end{aligned} \tag{F.2}$$

avec  $\mathcal{G}$  le propagateur d’Eshelby et  $\mathcal{G}^+$  sa partie positive définie selon :

$$\mathcal{G}^+(\mathbf{r}) = \mathcal{G}(\mathbf{r})\Theta(\mathcal{G}(\mathbf{r})) \quad (\text{F.3})$$

avec  $\Theta$  la fonction de Heaviside. Sous cette formulation, les deux critères énoncés précédemment sont respectés : le terme en  $\sim \mathcal{G}^+ * A$  permet une création à distance d’activité dans les zones inactives et le terme en  $A \times (\mathcal{G} * A)$  permet une inhibition de l’activité à distance tout en préservant sa positivité.

En variant la valeur du paramètre  $r$ , l’intégration numérique de ces équations révèle bien la présence d’une transition de phase absorbante. Pour  $r > r_c$ , le système se stabilise à temps long dans un état stationnaire caractérisé par  $\langle A \rangle > 0$  alors que pour  $r < r_c$  il finit par tomber dans un état absorbant caractérisé par  $A = 0$ . Toutefois, en analysant l’évolution de l’activité en fonction de la distance au point critique  $\delta r$ , nous remarquons que cette transition semble caractérisée trivialement par  $\beta \approx 1$ , comme cela est illustré à la figure F.2. D’après ces résultats préliminaires, cette formulation ne semble donc pas permettre de retranscrire la convexité de la transition et donc le processus de bruit interne inhérent à la dynamique modélisée.

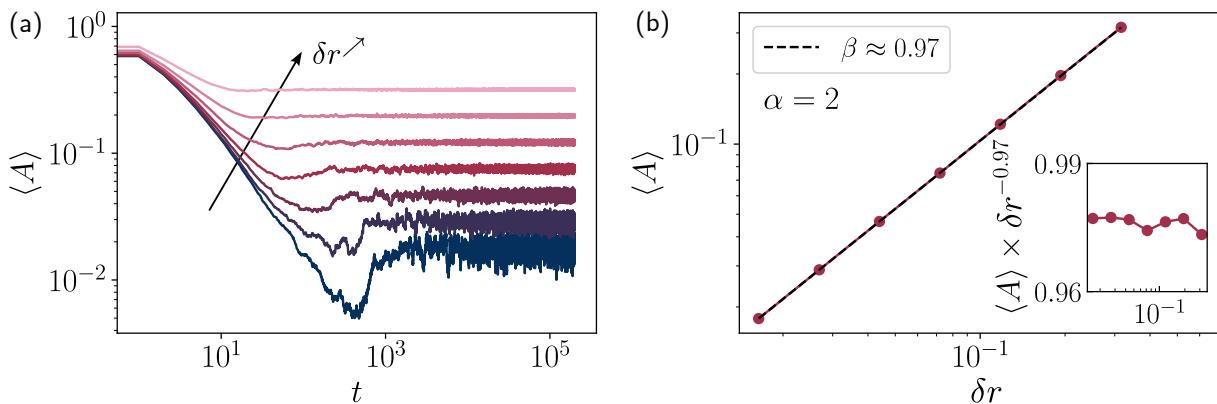


FIGURE F.2 – Intégration numérique de l’équation F.2 dans un système 2D de taille  $L = 512$  avec comme valeur des paramètres :  $\omega = 1$ ,  $u = 1$ ,  $\kappa = 0.25$ ,  $\kappa_\sigma = 0.25$ ,  $\sigma = 1$  et une valeur moyenne du champ conservé  $\bar{\rho} = 1$ . Le paramètre  $r$  est varié dans l’ensemble  $\{0.5214, 0.6153, 0.6726, 0.7076, 0.7290, 0.7420, 0.7500, 0.7549\}$ . (a) Evolution de la valeur moyenne du champ d’activité en fonction du temps pour des différentes valeurs du paramètre  $r$ . (b) Evolution de la valeur moyenne de l’activité dans l’état stationnaire en fonction de la distance au point critique  $\delta r$ . Nous estimons ici  $r_c \approx 0.7625$ .

### Exemple de théorie motivée par le modèle $\alpha$ -ROM

Dans l’étude menée par Mari et al. [14] sur le 0-ROM, les auteurs ont proposé une théorie continue dérivée de celle de CDP en y introduisant un terme de création d’activité dû à la diffusion des particules passives. Dans le cadre d’interactions spatialisées comme nous avons considéré dans le cas du  $\alpha$ -ROM, nous pouvons imaginer une généralisation de cette théorie prenant la forme suivante<sup>2</sup> :

2. Cette forme est modélisée par le raisonnement présenté dans [14].

$$\begin{aligned}\partial_t A(\mathbf{r}, t) &= (\omega \rho(\mathbf{r}, t) - r) A(\mathbf{r}, t) - u A^2(\mathbf{r}, t) + \kappa \Delta A(\mathbf{r}, t) \\ &\quad + \kappa (G^2 * A)(\mathbf{r}, t) \left(1 - \gamma \sqrt{(G^2 * A)(\mathbf{r}, t)}\right) \rho(\mathbf{r}, t) + \sigma \sqrt{A(\mathbf{r}, t)} \eta(\mathbf{r}, t) \quad (\text{F.4}) \\ \partial_t \rho(\mathbf{r}, t) &= \kappa_\sigma \Delta A(\mathbf{r}, t)\end{aligned}$$

avec  $G^2(\mathbf{r})$  un propagateur positif décroissant comme  $\sim 1/r^{2\alpha}$  à grande distance. En pratique, nous considérons le même propagateur que dans les modèles  $\alpha$ -ROM et conservons son implémentation décrite au [chapitre 3](#).

Afin de voir si cette formulation permet de reproduire la convexité de la transition, nous intégrons ces équations stochastiques pour différentes valeurs de  $r$ . Nous retrouvons alors une transition de phase absorbante dont la caractérisation préliminaire est présentée sur la [figure F.3](#). Via une analyse similaire au cas précédent, nous déterminons  $\beta \approx 1.09$  pour  $\alpha = 0.5$ , la valeur  $\beta = 1$  étant comprise dans les incertitudes de détermination. À cette valeur de la portée, nous sommes dans la limite de portée infinie du  $\alpha$ -ROM caractérisée précédemment par  $\beta \approx 1.85$ . Ce résultat  $\beta \approx 1$  suggère donc que cette théorie continue ne permet pas non plus d'expliquer la convexité de la transition dans le modèle de particules.

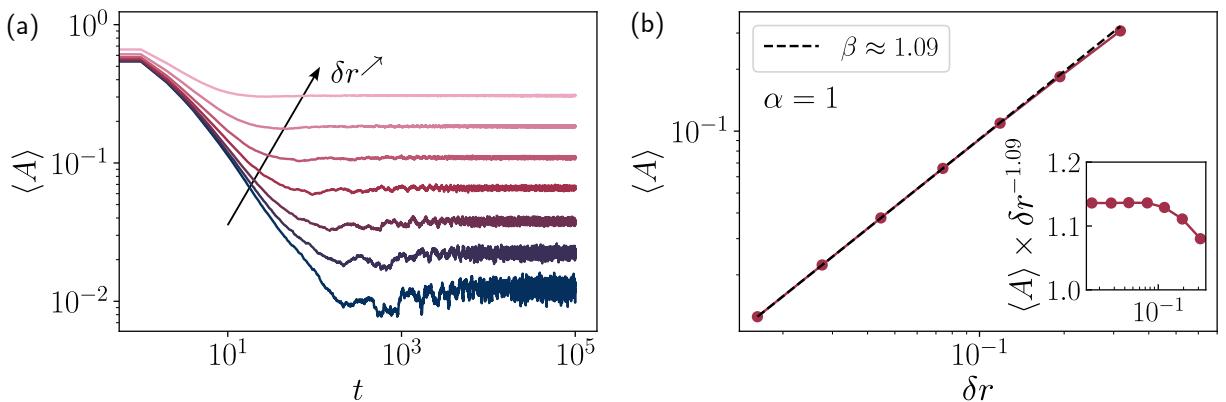


FIGURE F.3 – Intégration numérique de l'[équation F.4](#) dans un système 2D de taille  $L = 1024$  avec comme valeur des paramètres :  $\omega = 0.04$ ,  $u = 1$ ,  $\kappa = 0.25$ ,  $\kappa_\sigma = 0.01$ ,  $\sigma = 1$ ,  $\gamma = 0.1$  et une valeur moyenne du champ conservé  $\bar{\rho} = 25$ . Le paramètre  $r$  est varié dans l'ensemble  $\{0.602, 0.711, 0.777, 0.816, 0.842, 0.857, 0.867, 0.872\}$ . (a) Evolution de la valeur moyenne du champ d'activité en fonction du temps pour des différentes valeurs du paramètre  $r$ . (b) Evolution de la valeur moyenne de l'activité dans l'état stationnaire en fonction de la distance au point critique  $\delta r$ . Nous estimons ici  $r_c \approx 0.8813$ .

### Approche naïve via l'attendu champ moyen

Face aux difficultés posées par la prise en compte d'interactions à longue portée non-monotones, nous pouvons imaginer une autre voie vers la convexité via la modification des termes locaux de la théorie de champ CDP. C'est notamment l'idée déjà proposée par Mari et al. [14] qui considère les équations de champ suivantes dans le cas d'une interaction champ moyen ( $\alpha = 0$ ) :

$$\begin{aligned}\partial_t A(\mathbf{r}, t) &= (\omega \rho(\mathbf{r}, t) - r)A(\mathbf{r}, t) - uA^{3/2}(\mathbf{r}, t) + \kappa\Delta A(\mathbf{r}, t) + \sigma\sqrt{A(\mathbf{r}, t)}\eta(\mathbf{r}, t) \\ \partial_t \rho(\mathbf{r}, t) &= \kappa\Delta A(\mathbf{r}, t)\end{aligned}\quad (\text{F.5})$$

Dans une approche habituelle de la théorie de champ moyen qui équivaut à négliger les termes de bruit et d'interaction, cette théorie amène en effet à un exposant  $\beta^{\text{MF}} = 2$ .

Pour comprendre si cette formulation permet effectivement de retrouver une transition convexe caractérisée par  $\beta > 1$ , nous intégrons l'équation F.5 dans sa forme champ moyen. Pour ce faire, le terme d'interaction local  $\Delta A$  est remplacé par  $\bar{A} - A$  avec  $\bar{A}$  la valeur moyenne spatiale instantanée du champ d'activation. Toujours en faisant varier le paramètre  $r$ , nous observons une transition de phase absorbante mais dont la criticalité semble être encore caractérisée par  $\beta \approx 1$ , comme nous le représentons à la figure F.4. Bien que ces résultats restent préliminaires, cette étude présente une approche du point critique raisonnable qui suggère que la transition n'est effectivement pas convexe dans la limite de très longue portée.

Même si cela peut apparaître surprenant, dans la partie suivante, nous montrons que ce résultat est en fait rationalisable d'un point de vue analytique. Comme des études précédentes l'ont montré, les théories de champ faisant intervenir des bruits multiplicatifs ne possèdent pas des propriétés champ moyen dérivables trivialement [163, 164]. À la place, un autre traitement du champ moyen doit être opéré. Celui-ci mène alors à un exposant  $\beta^{\text{MF}} = 1$  quel que soit le degré de non-linéarité choisi dans une théorie présentant un terme de bruit multiplicatif en  $\sim \sqrt{A(\mathbf{r}, t)}$ .

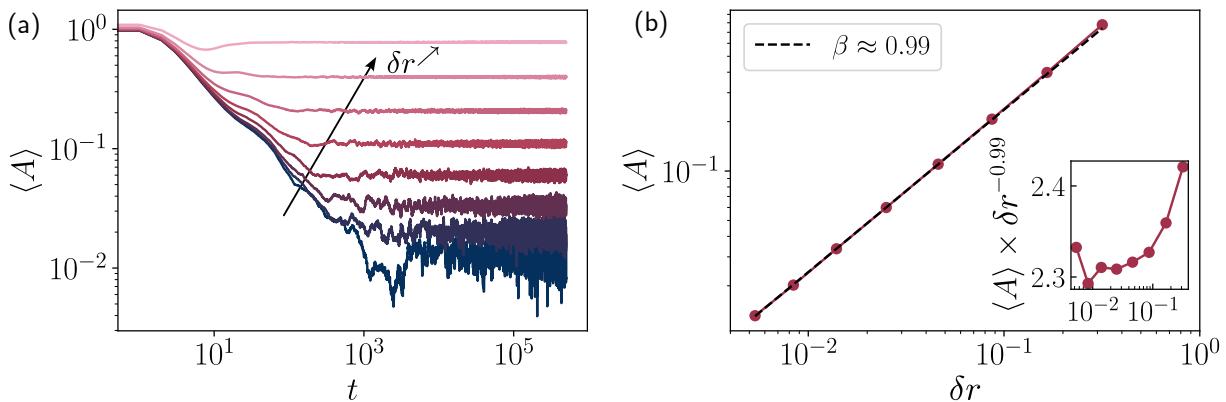


FIGURE F.4 – Intégration numérique de l'équation F.5 dans un système 2D de taille  $L = 1024$  avec comme valeur des paramètres :  $\omega = 1$ ,  $u = 0.5$ ,  $\kappa = 0.25$ ,  $\kappa_\sigma = 0.01$ ,  $\sigma = 1$ ,  $\gamma = 0.1$  et une valeur moyenne du champ conservé  $\bar{\rho} = 1$ . Le paramètre  $r$  est varié dans l'ensemble  $\{0.2462, 0.3010, 0.3295, 0.3442, 0.3518, 0.3558, 0.3578, 0.3589\}$ . (a) Evolution de la valeur moyenne du champ d'activité en fonction du temps pour des différentes valeurs du paramètre  $r$ . (b) Evolution de la valeur moyenne de l'activité dans l'état stationnaire en fonction de la distance au point critique  $\delta r$ . Nous estimons ici  $r_c \approx 0.36083$ .

### F.2.6 Champ moyen des transitions avec bruit multiplicatif

Dans cette partie, nous expliquons pourquoi les théories de champ faisant intervenir un bruit multiplicatif ne peuvent pas être associées à un comportement champ moyen via la méthode habituelle. D'habitude, pour déterminer l'exposant  $\beta$  dans la limite champ moyen, il est d'usage de simplifier les équations de champs associées en supprimant les termes de dépendances spatiales et de bruit. Si l'on prend l'exemple de la théorie DP, celle-ci devient dans ce cas (voir [équation 1.15](#)) :

$$\frac{dA}{dt} = rA(t) - uA^2(t) \quad (\text{F.6})$$

dont on tire de la solution stationnaire  $\beta^{\text{CM}} = 1$ .

#### Principe de l'approche

Dans le cadre général d'une équation de champ représentée par un bruit multiplicatif, cette méthode ne tient plus, comme l'ont montré les travaux de Munoz et al. [164, 164]. Dans ces études, les auteurs se sont concentrés sur la théorie de champ suivante :

$$\partial_t A(\mathbf{r}, t) = rA(\mathbf{r}, t) - uA^{p+1}(\mathbf{r}, t) + \kappa\nabla^2 A(\mathbf{r}, t) + \sigma A(\mathbf{r}, t)\eta(\mathbf{r}, t) \quad (\text{F.7})$$

représentant la classe *multiplicative noise* (MN). Au lieu de déterminer l'exposant  $\beta^{\text{CM}}$  via la méthode habituelle qui ne permettait pas l'accord avec les résultats numériques, Munoz et al. ont proposé de rendre cette équation 0-dimensionnelle en considérant un système discret de  $N$  sites dans la limite de couplage total. Dans ce cas, l'opérateur laplacien pour un site  $i$  devient :

$$\nabla^2 A_i = \frac{1}{N-1} \sum_{j \neq i} (A_j - A_i) = \mathcal{A} - A_i \quad (\text{F.8})$$

avec  $\mathcal{A}$  la valeur moyenne spatiale de l'activité. Dans la limite de couplage total où tous les sites sont équivalents, on a donc, en abandonnant la notation indicelle :

$$\partial_t A = (r - \kappa)A - uA^{p+1} + \kappa\mathcal{A} + \sigma A\eta \quad (\text{F.9})$$

Nous pouvons alors associer à cette équation de Langevin une équation de Fokker-Planck stationnaire au sens de Ito :

$$0 = -\partial_A \left( [(r - \kappa)A - b\phi^{p+1} + \kappa\mathcal{A}] P(A) \right) + \frac{\sigma^2}{2} \partial_A^2 \left( A^2 P(A) \right) \quad (\text{F.10})$$

dont on peut dériver la solution analytique :

$$P(A) = A^{-2-2(\kappa-r)/\sigma^2} \exp \left( -\frac{2u}{p\sigma^2} A^p - \frac{2\mathcal{A}\kappa}{\sigma^2} \frac{1}{A} \right) \quad (\text{F.11})$$

Afin de déterminer le comportement critique associé à l'équation F.9, il suffit alors de développer la relation d'auto-cohérence :

$$\mathcal{A} = \langle A \rangle = \frac{\int_0^\infty dA AP(A)}{\int_0^\infty dA P(A)} \quad (\text{F.12})$$

pour déterminer l'exposant  $\beta^{\text{CM}}$  tel que  $\langle A \rangle \sim r^{\beta^{\text{CM}}}$ . Le calcul développé dans [164, 164] amènent alors à :

$$\beta = \max \left\{ \frac{1}{p}, \frac{\sigma^2}{2\kappa} \right\} \quad (\text{F.13})$$

qui ne permet de retrouver la prédition naïve  $\beta^{\text{CM}} = 1/p$  que dans un régime de faible bruit  $\sigma^2 < 2\kappa/p$ .

### Application au cas de la théorie DP généralisée

Dans cette partie, nous proposons de suivre cette approche dans le cas des équations de champ associées à la classe DP avec un degré de non-linéarité arbitraire, i.e. avec un terme de bruit en  $\sim \sqrt{A}$  et non en  $\sim A$  comme dans le cas de la classe MN :

$$\partial_t A(\mathbf{r}, t) = rA(\mathbf{r}, t) - uA^{p+1}(\mathbf{r}, t) + \kappa \nabla^2 A(\mathbf{r}, t) + \sigma \sqrt{A(\mathbf{r}, t)} \eta(\mathbf{r}, t) \quad (\text{F.14})$$

En suivant le même raisonnement, nous obtenons la distribution stationnaire de l'activité :

$$P(A) = A^{-1+2\kappa\mathcal{A}/\sigma^2} \exp \left( \frac{2(r-\kappa)}{\sigma^2} A - \frac{2u}{(p+1)\sigma^2} A^{p+1} \right) \quad (\text{F.15})$$

et la relation d'auto-cohérence :

$$\mathcal{A} = \frac{\int_0^\infty dA A^{2\kappa\mathcal{A}/\sigma^2} \exp \left( -2\frac{(\kappa-r)}{\sigma^2} A - \frac{2u}{(p+1)\sigma^2} A^{p+1} \right)}{\int_0^\infty dA A^{-1+2\kappa\mathcal{A}/\sigma^2} \exp \left( -2\frac{(\kappa-r)}{\sigma^2} A - \frac{2u}{(p+1)\sigma^2} A^{p+1} \right)} \quad (\text{F.16})$$

La difficulté réside dans le fait que le dénominateur du membre de droite diverge. Toutefois, en menant une intégration par partie nous pouvons obtenir la relation suivante :

$$\frac{f(\mathcal{A} + p\sigma^2/2\kappa, r)}{f(\mathcal{A}, r)} = \frac{r}{u}, \quad f(\mathcal{A}, r) = \int_0^\infty dA A^{2\kappa\mathcal{A}/\sigma^2} \exp \left( -2\frac{(\kappa-r)}{\sigma^2} A - \frac{2u}{(p+1)\sigma^2} A^{p+1} \right) \quad (\text{F.17})$$

qui est a priori cette fois bien définie. Nous définissons alors le paramètre critique  $r_c$  selon la relation :

$$r_c = u \frac{f(p\sigma^2/2\kappa, r_c)}{f(0, r_c)} \quad (\text{F.18})$$

En considérant que la fonction  $f$  se comporte bien, on peut la développer en série pour obtenir :

$$\mathcal{A} = \frac{1 - r_c \left( \frac{\partial_r f(\frac{p\sigma^2}{2\kappa}, r_c)}{f(\frac{p\sigma^2}{2\kappa}, r_c)} - \frac{\partial_r f(0, r_c)}{f(0, r_c)} \right)}{r_c \left( \frac{\partial_{\mathcal{A}} f(\frac{p\sigma^2}{2\kappa}, r_c)}{f(\frac{p\sigma^2}{2\kappa}, r_c)} - \frac{\partial_{\mathcal{A}} f(0, r_c)}{f(0, r_c)} \right)} \epsilon, \quad \epsilon = \frac{r - r_c}{r_c} \quad (\text{F.19})$$

ce qui suggère que l'on a  $\beta^{\text{CM}} = 1$  peu importe le degré de non-linéarité  $p$  de l'équation de champ.

### Résolution numérique

Pour contrôler nos calculs et les hypothèses faites, nous résolvons numériquement l'équation d'auto-cohérence équation F.17 pour obtenir  $\mathcal{A} = f(r)$  avec le logiciel Mathematica. Sur la figure figure F.5 nous présentons les résultats obtenus pour la détermination de l'exposant  $\beta$  pour différents degrés de non-linéarité  $p$ . Comme nous pouvons le remarquer, la mesure  $\beta^{\text{CM}} = 1$  semble être retrouvée peu importe la valeur de  $p$ .

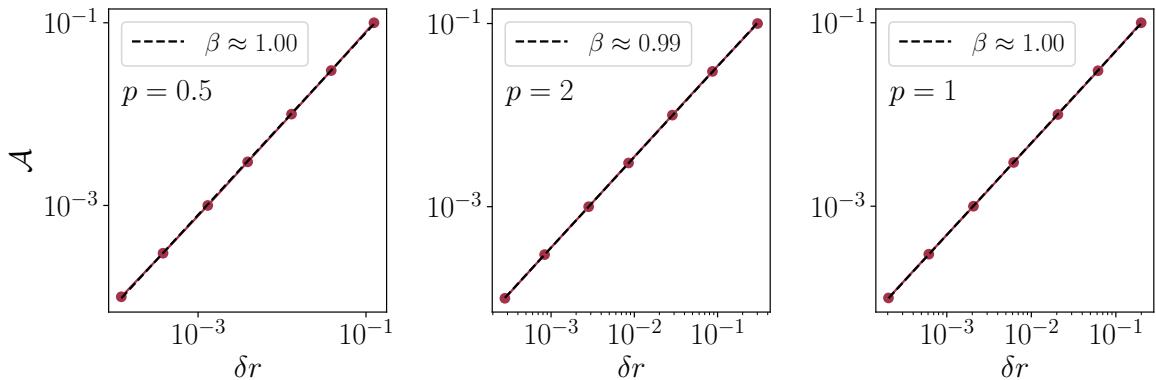


FIGURE F.5 – Détermination de l'exposant  $\beta$  via la résolution numérique de l'équation F.17 pour différentes valeurs du degré de non-linéarité  $p$ .

Ainsi, ce raisonnement, peut-être discutable d'un point de vue technique, semble montrer qu'en effet, le degré de non-linéarité dans l'équation de champ ne permet pas de modifier la valeur de l'exposant  $\beta$  dans la limite de champ moyen. Cela permet de proposer une explication aux résultats suprenants de la figure F.2.5. En effet, les classes CDP et DP étant représentées par les mêmes champs moyens, nous nous attendons à ce que ces résultats se transposent aux équations de champs associées à la classe CDP.

### F.2.7 Conclusion de la section

En conclusion, il ne semble pas aisément de mettre en évidence des équations de champ permettant de produire une transition de phase absorbante convexe. Que ce soit via l'introduction d'interactions à longue portée de signe alterné, l'introduction d'une non-analyticité dans le terme non-local ou la modification du degré de non-linéarité du terme non-linéaire local, le comportement critique dans la limite de longue portée semble être

toujours limité à  $\beta = 1$ . Les tests d'intégration que nous avons présenté ici sont les représentants de nombreux autres essais pointant vers le même résultat.

Ces difficultés suggèrent que le cadre représenté par les équations de type CDP/LR-CDP n'est pas le bon point de départ. Pour poursuivre dans cette direction, il faudrait donc considérer des modifications plus profondes de ces théories afin d'appréhender plus justement le mécanisme de diffusion vers une barrière, qui est l'élément central de ces transitions. Nous pourrions imaginer que cette modélisation passe par la considération d'une nouvelle forme de bruit non-locale, celle d'une dynamique d'un champ complémentaire représentant la distance au bord absorbant ou encore celle d'une complexification de l'équation sur la dynamique du champ conservé. Notons par ailleurs que la modification de la forme du bruit dans l'équation sur l'activité ou l'ajout d'un bruit dans la dynamique du champ conservé ne sont pas des éléments directs à implémenter et nécessitent la modification de tout notre schéma numérique. Une telle investigation gagnerait donc à être sérieusement motivée par des arguments émergents des dynamiques microscopiques.

La différence de formulation entre ces théories de champs et les modèle à la Hébraud-Lequeux pourrait être un indice de ces potentielles profondes modifications. Une autre piste d'ouverture pourrait donc être d'essayer de réaliser une équivalence entre ces modèles et une équation de champ triviale dans la limite de champ moyen. À ce stade de notre recherche, nous n'avons toutefois pas encore pu explorer cette pistes de manière pertinente.

