

## THÈSE

Pour obtenir le grade de

### DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ GRENOBLE ALPES

École doctorale : PHYS - Physique

Spécialité : Physique Théorique

Unité de recherche : Laboratoire Interdisciplinaire de Physique

### Criticalité des transitions absorbantes en matière molle en présence d'interactions médiées à longue portée

### Criticality of absorbing phase transitions in soft matter with long-range mediated interactions

Présentée par :

### Tristan JOCTEUR MONROZIER FABRE

Direction de thèse :

**Eric BERTIN**

DIRECTEUR DE RECHERCHE, CNRS DELEGATION ALPES

**Romain MARI**

Directeur de thèse

Co-encadrant de thèse

Rapporteurs :

**Alberto ROSSO**

DIRECTEUR DE RECHERCHE, CNRS DELEGATION ILE DE FRANCE GIF SUR YVETTE

**Frédéric VAN WIJLAND**

PROFESSEUR DES UNIVERSITES, Université Paris Cité

Thèse soutenue publiquement le **20 juin 2025**, devant le jury composé de :

**Alberto ROSSO,**

DIRECTEUR DE RECHERCHE, CNRS DELEGATION ILE DE FRANCE  
GIF SUR YVETTE

Rapporteur

**Frédéric VAN WIJLAND,**

PROFESSEUR DES UNIVERSITES, Université Paris Cité

Rapporteur

**Laura FOINI,**

CHARGEÉE DE RECHERCHE, CEA Paris-Saclay

Examinateur

**Léonie CANET,**

PROFESSEURE DES UNIVERSITES, Université Grenoble Alpes

Examinateur

**Pierre LE DOUSSAL,**

DIRECTEUR DE RECHERCHE, CNRS DELEGATION PARIS CENTRE

Examinateur

**Stéphane SANTUCCI,**

DIRECTEUR DE RECHERCHE, CNRS DELEGATION RHÔNE  
AUVERGNE

Examinateur



# Table des matières

<b>1 Criticalité absorbante et interactions à longue portée en matière molle</b>	<b>5</b>
1.1 Écoulement des fluides à seuil et cisaillement cyclique des suspensions . . . . .	5
1.1.1 Transition de réversibilité dans les suspensions cisaillées cycliquement . . . . .	6
1.1.2 Transition vers l'écoulement des fluides à seuil . . . . .	7
1.1.3 Des similarités non-conventionnelles . . . . .	8
1.2 Transitions de phases absorbante . . . . .	9
1.2.1 Phénomènes critiques à l'équilibre . . . . .	10
1.2.2 Transitions de phase absorbante . . . . .	14
1.3 Percolation dirigée conservée . . . . .	19
1.3.1 Conditions d'appartenance . . . . .	19
1.3.2 Modèles représentatifs . . . . .	20
1.3.3 Comportement critique . . . . .	22
1.3.4 Classe CDP et transition de dépiégeage . . . . .	23
1.3.5 Avalanches . . . . .	26
1.3.6 Hyperuniformité . . . . .	27
1.3.7 Conclusion de la section . . . . .	29
1.4 Comprendre les transitions de réversibilité et d'écoulement comme des transitions de phase absorbante . . . . .	29
1.4.1 Transition de réversibilité . . . . .	29
1.4.2 Transition vers l'écoulement . . . . .	32
1.5 Atypicité des transitions étudiées . . . . .	37
1.5.1 Incompatibilité avec le cadre générique de la longue portée . . . . .	37
1.5.2 Des interactions à longue portée de nature différente . . . . .	39
1.6 Problématisation . . . . .	41
1.6.1 Questions guidant ce travail . . . . .	41
1.6.2 Déroulé du manuscrit . . . . .	43
<b>2 Transport à longue portée dans la classe CDP</b>	<b>45</b>
2.1 Longue portée et comportement critique . . . . .	46
2.1.1 Phénoménologie . . . . .	46
2.1.2 Formulation théorique dans la classe CDP . . . . .	47
2.1.3 Prédictions . . . . .	49
2.2 Motivations pour une caractérisation numérique . . . . .	50
2.2.1 Motivation principale : un point manquant dans la littérature . . . . .	51
2.2.2 Motivation secondaire : un cadre d'intérêt pour la modélisation de systèmes réels . . . . .	51
2.3 Modèles . . . . .	52
2.3.1 LR-Manna . . . . .	52
2.3.2 LR-ROM . . . . .	54
2.3.3 Détails d'implémentation . . . . .	54

2.4	Méthodes de caractérisation du comportement critique . . . . .	56
2.4.1	Détermination des exposants critiques . . . . .	56
2.4.2	Caractérisation de l'hyperuniformité . . . . .	59
2.5	Exposants critiques . . . . .	62
2.5.1	Exposants statiques . . . . .	62
2.5.2	Exposant dynamique . . . . .	64
2.6	Hyperuniformité . . . . .	65
2.6.1	Hyperuniformité dans le LR-ROM . . . . .	66
2.6.2	Difficultés dans les mesures d'hyperuniformité . . . . .	67
2.6.3	Hyperuniformité dans le modèle LR-Manna . . . . .	70
2.7	Conclusion de chapitre . . . . .	74
<b>3</b>	<b>Transition de réversibilité dans les suspensions cisaillées cycliquement</b>	<b>77</b>
3.1	Importance de la spatialisation des interactions . . . . .	78
3.2	Méthode . . . . .	79
3.2.1	Le ROM comme modèle de dynamique stroboscopique . . . . .	79
3.2.2	Modélisation des interactions médiées . . . . .	81
3.2.3	Implémentation numérique . . . . .	84
3.3	Comportement critique . . . . .	87
3.3.1	Détermination du point critique . . . . .	87
3.3.2	Évolution des exposants critiques . . . . .	88
3.3.3	Hyperuniformité . . . . .	95
3.3.4	Retour sur les cas physiques . . . . .	97
3.4	Interprétation . . . . .	98
3.4.1	Un cadre de description champ moyen . . . . .	99
3.4.2	Interprétation champ moyen du mécanisme de diffusion dans le $\alpha$ -ROM	107
3.4.3	Disqualification complète du cadre LR-CDP . . . . .	116
3.4.4	Conclusion de la section . . . . .	118
3.5	Avalanches . . . . .	118
3.5.1	Avalanches à densité fixée . . . . .	118
3.5.2	Évolution des exposants . . . . .	120
3.6	Conclusion . . . . .	122
<b>4</b>	<b>Transition vers l'écoulement des matériaux amorphes</b>	<b>125</b>
4.1	Étudier la transition vers l'écoulement des matériaux amorphes . . . . .	126
4.1.1	Expérimentalement . . . . .	126
4.1.2	Numériquement . . . . .	127
4.1.3	Théoriquement . . . . .	127
4.2	Les modèles élastoplastiques comme outils privilégiés . . . . .	129
4.2.1	Principe d'un modèle élastoplastique . . . . .	129
4.2.2	Le modèle de Picard . . . . .	130
4.2.3	Implémentation numérique . . . . .	131
4.2.4	Changement du paramètre de contrôle . . . . .	133
4.3	Comportement critique . . . . .	133
4.3.1	Transition vers l'écoulement en milieu élastique . . . . .	133
4.3.2	De l'importance de la longue portée - Modèles d'écoulement à courte portée	139
4.3.3	Situer la transition vers l'écoulement . . . . .	147
4.3.4	Influence de la portée sur les corrélations de contrainte dans l'état stationnaire . . . . .	153

## TABLE DES MATIÈRES

---

4.4	Caractérisation dynamique et avalanches . . . . .	160
4.4.1	Avalanches de plasticité . . . . .	160
4.4.2	Avalanches en contrainte imposée . . . . .	165
4.4.3	Influence de la portée sur les avalanches en contrainte imposée . . . . .	169
4.5	Conclusion . . . . .	172
<b>5</b>	<b>Discussion</b>	<b>175</b>
5.1	Comparaison des transitions étudiées . . . . .	175
5.1.1	Similarités globales . . . . .	175
5.1.2	Différences en dimension finie . . . . .	182
5.1.3	Conclusion de la section . . . . .	187
5.2	Équations de champ pour les transitions convexes . . . . .	187
5.2.1	Motivations et difficultés . . . . .	187
5.2.2	Cadre de travail . . . . .	188
5.2.3	Enjeux pratiques . . . . .	189
5.2.4	Résultats préliminaires . . . . .	190
5.2.5	Conclusion de la section . . . . .	193
<b>Conclusion</b>		<b>195</b>
<b>Bibliographie</b>		<b>197</b>
<b>Annexe</b>		<b>209</b>
6.1	Matériels généraux . . . . .	209
6.1.1	Conventions . . . . .	209
6.1.2	Implémentation discrète des propagateurs . . . . .	209
6.1.3	Réalisation expérimentale de la transition de dépiégeage . . . . .	209
6.1.4	Propagateur de Eshelby . . . . .	211
6.1.5	Propagateurs hydrodynamiques . . . . .	212
6.2	Transport à longue portée . . . . .	215
6.2.1	Mesures d'hyperuniformité dans le modèle LR-Manna . . . . .	215
6.3	Transition de réversibilité . . . . .	217
6.3.1	Transformée de Fourier des propagateurs . . . . .	217
6.3.2	Test de l'approximation scalaire . . . . .	217
6.3.3	Résolution numérique du modèle $\mu$ -Hébraud-Lequeux . . . . .	217
6.3.4	Modèle $\alpha$ -ROM avec sauts infinis en dimension supérieure . . . . .	218
6.3.5	Fonctions de corrélation de paire . . . . .	218
6.3.6	Avalanches dans le modèle $\alpha$ -ROM . . . . .	218
6.4	Transition vers l'écoulement . . . . .	218
6.4.1	Modèles $\alpha$ -Picard . . . . .	218
6.4.2	Dépendance en protocole des avalanches à contrainte imposée dans les modèles élastoplastiques . . . . .	222
6.4.3	Modèle de Picard écranté . . . . .	234
6.4.4	Modèle élastoplastique décorrélé . . . . .	236
6.5	Théories continues pour les transitions convexes . . . . .	237
6.5.1	Intégration des équations stochastiques avec bruit multiplicatif . . . . .	237
6.5.2	Théorie continue inspirée du $\alpha$ -ROM . . . . .	237
6.5.3	Approches de champ moyen en présence d'un bruit multiplicatif . . . . .	237

## TODO :

- Intégrer la taille du système quelque part dans la définition de la variance.
- Attention aux notations fractionnaires  $\alpha - \sigma$  pour les portées.
- Attention aux attendus LR-CDP qu'on aura pas présenté dans l'intro
- Harmoniser la taille des figures, c'est giga moche comme ça.
- Changer le code couleur tout pourri
- Et si en fait on pouvait voir les transitions comme celles associées à un champ conservé diffusif?
- Faire le lien entre 6-Picard et SRP.

## Résumé

Des fractures solides aux écoulements des milieux granulaires, en passant par le déplacement des interfaces liquides en milieu poreux, de nombreux phénomènes hors d'équilibre en matière molle peuvent être interprétés comme des transitions de phase absorbantes. Celles-ci séparent une phase active, dans laquelle la dynamique du système persiste à temps long, d'une phase absorbante dans laquelle la dynamique se retrouve bloquée au bout d'un temps fini. Les régions où la dynamique prend place sont considérées comme actives, comme dans le cas des zones plastiques lors de l'écoulement des matériaux amorphes. Il en résulte un champ d'activité (à ne pas confondre avec la notion d'activité en matière active, qui renvoie à des forces hors d'équilibre) dont la dynamique permet de caractériser la transition de phase absorbante considérée, donnant lieu à un comportement critique spatio-temporel.

De la même manière qu'à l'équilibre, cette caractérisation en tant que phénomènes critiques met en évidence des comportements communs représentés par des classes d'universalité. Dans ce cas, l'influence des interactions à longue portée sur le comportement critique est comprise dans un cadre théorique clair lorsque celles-ci correspondent à un transport de matière à longue portée. Toutefois, dans le cas d'interactions médiées par le milieu (par exemple le fluide dans lequel des particules sont immergées), dont la longue portée émerge des lois de conservation sous-jacentes dans un contexte de matière molle, le transport de matière est remplacé par une propagation à longue portée d'un signal, par exemple un bruit mécanique. L'impact de la longue portée sur la criticalité de la

## TABLE DES MATIÈRES

---

transition de phase absorbante peut alors s'avérer surprenant, s'extrayant du cadre de compréhension canonique associé au transport de matière. C'est notamment le cas pour la transition de réversibilité dans les suspensions cisaillées cycliquement, et pour la transition vers l'écoulement des matériaux amorphes. À travers l'étude spécifique de ces deux transitions initialement proches de la classe de la percolation dirigée conservée, ce travail numérique et théorique vise à mieux comprendre l'impact de ce type d'interactions à longue portée sur le comportement critique.

Dans une première partie, nous caractérisons quantitativement le cadre canonique du transport à longue portée en deux dimensions, correspondant à un transport de particules à longue portée. Par l'étude généralisée de modèles emblématiques de la percolation dirigée conservée, nous déterminons les exposants critiques statiques, dynamiques et d'hyperuniformité associés et leurs évolutions avec la portée. Cette étude sert alors de base de comparaison pour l'analyse des transitions sur lesquelles se concentre notre intérêt.

Dans une seconde partie, nous caractérisons la transition de réversibilité dans les suspensions et la transition vers l'écoulement des matériaux amorphes, qui font toutes deux intervenir des interactions médiées à longue portée. Par une modélisation numérique simple, nous montrons que celles-ci peuvent exposer un comportement singulier, montrant une évolution convexe du paramètre d'ordre et des fluctuations qui s'annulent à l'approche du point critique. L'analyse d'autres propriétés, comme l'hyperuniformité à la transition et la dynamique d'avalanches proche du point critique, montre que ce comportement et son évolution avec la portée marquent un clair désaccord avec le cadre canonique.

Nous proposons finalement un parallèle entre ces deux transitions au comportement critique inhabituel. Notamment, nous établissons un cadre de description commun en champ moyen permettant d'appréhender leurs spécificités en dimension finie. Cette démarche ouvre alors la voie à une compréhension plus générale des transitions de phase absorbantes en présence d'interactions médiées à longue portée, dont nous discutons les difficultés.

## Abstract

From crack front propagation to the flow of granular materials, through moving liquid interfaces in porous materials, many soft matter out-of-equilibrium phenomena can be considered as absorbing phase transitions. These transitions separate an active phase, in which the dynamics continue indefinitely, from an absorbing phase, in which the dynamics become trapped at a finite time. Regions where these dynamics occur are considered active, similar to plastic regions in the flow of amorphous materials. This defines an activity field (not to be confused with activity in active matter, which stems from non-reciprocal interactions), whose dynamics characterize the associated absorbing phase transition, giving rise to a spatiotemporal critical behavior.

As in equilibrium systems, these critical behaviors are gathered into universality classes. In this context, the influence of long-range interactions on criticality is well understood

within a clear theoretical framework when they are associated with long-range transport. However, in the case of mediated interactions through the embedding medium (e.g. the fluid in which particles evolve), whose long-range character naturally emerges from underlying conservation laws in soft matter, the transport of matter is replaced by the long-range propagation of a signal, such as mechanical noise. The impact of the range of interaction on the transition's criticality can, in this case, be unexpectedly different, marking a clear discrepancy with the canonical framework associated with the transport of matter. This is observed in the reversible-irreversible transition of cyclically sheared suspensions and in the yielding transition of amorphous materials. In this work, we study these two transitions, initially close to the conserved directed percolation class, to better understand the role of this kind of long-range interactions in the critical behavior.

First, we quantitatively characterize the canonical framework in two dimensions, corresponding to the long-range transport of particles. By studying emblematic models of the conserved directed percolation class, we determine the associated critical static, dynamic, and hyperuniform exponents and their evolution with the range of transport. This serves as a basis for comparison with the transitions of interest that we focus on in the following sections.

Second, we characterize the reversible-irreversible transition in suspensions and the yielding transition, both involving long-range mediated interactions. Using simple numerical models, we show that these transitions can exhibit singular behavior, with a convex evolution of the order parameter and vanishing fluctuations as the critical point is approached. The study of other properties, such as hyperuniformity and avalanche dynamics, reveals that this critical behavior and its evolution with the range of interaction show a strong discrepancy with the canonical framework.

Finally, we draw a parallel between these two unusual transitions. In particular, we propose a mean-field framework capable of capturing their specificities in finite dimensions. This paves the way for a broader understanding of absorbing phase transitions in the presence of mediated long-range interactions, for which we also discuss the challenges.



# Chapitre 1

## Criticalité absorbante et interactions à longue portée en matière molle

Dans cette thèse, nous présentons l'étude comparée de deux phénomènes de matière molle : la transition de réversibilité dans les suspensions cisaillées cycliquement et la transition vers l'écoulement des fluides à seuil. Le but de ce chapitre est d'introduire ces deux phénomènes que rien ne rassemble au premier regard et d'en proposer une vision unificatrice dans un cadre d'étude bien délimité.

Pour ce faire, nous commencerons par présenter succinctement la phénoménologie de ces transitions, mettant en évidence un comportement singulier et des mécanismes communs. Cette première familiarisation nous amènera alors naturellement à un cadre commun pour l'étude de ces deux phénomènes : celui des transitions de phase absorbante. Nous proposerons alors de prendre un peu de recul en présentant la phénoménologie globale de ces transitions, analogue à celle des phénomènes critiques d'équilibre. Après une description complète de la classe d'universalité de la percolation dirigée conservée, nous montrerons en quoi la transition de réversibilité et la transition vers l'écoulement en représentent des bons candidats. En accord avec les études précédentes de ces deux systèmes, nous montrerons que leur comportement critique s'éloigne fortement de cet attendu théorique et en proposerons une explication via la nature fondamentalement différente des interactions à longue portée présentes dans ces systèmes. Enfin, nous formulerons les problématiques relatives à ce comportement singulier qui guideront notre étude tout au long de cet ouvrage.

### 1.1 Écoulement des fluides à seuil et cisaillement cyclique des suspensions

Dans cette section, nous présentons succinctement et successivement la transition de réversibilité dans les suspensions cisaillées cycliquement et la transition vers l'écoulement des fluides à seuil. Le rapprochement des deux phénoménologies associées nous permettra alors de comprendre en quoi l'étude comparée de ces deux systèmes représente un objet riche et intéressant.

### 1.1.1 Transition de réversibilité dans les suspensions cisaillées cycliquement

Certains systèmes en matière molle présentent un phénomène intrigant sous l'action d'un cisaillement cyclique. Sous une amplitude de déformation relativement faible, ceux-ci finissent par opérer une dynamique réversible à temps long, laissant le système inchangé d'un cycle de déformation à l'autre. Toutefois, si cette amplitude devient suffisamment grande, le système est soumis à des changements irréversibles en permanence, menant à une évolution constante de sa structure au fil des cycles [1–3]. Nous appellerons transition de réversibilité le passage d'une phase à l'autre de ce système.

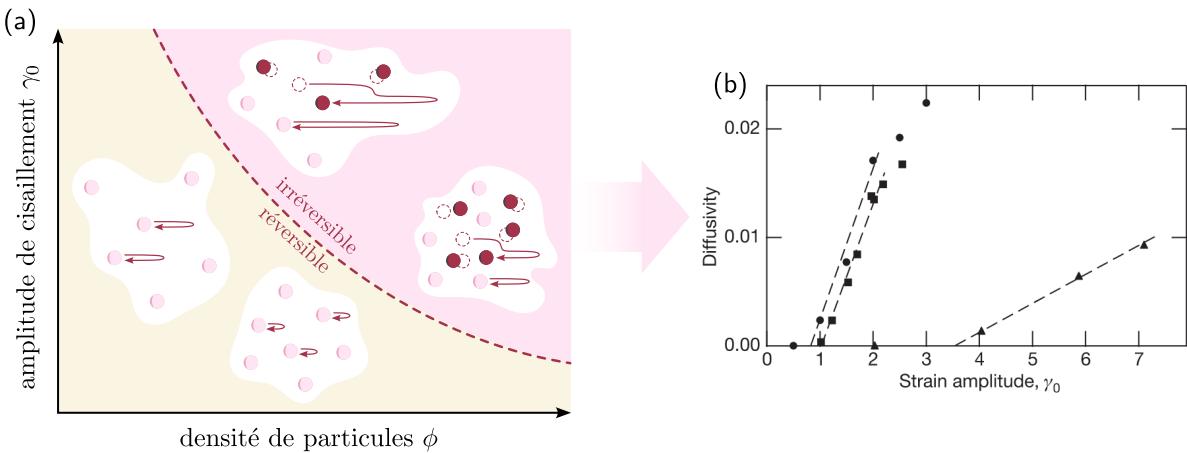


FIGURE 1.1 – (a) Diagramme de phase de la transition de réversibilité inspiré de [4]. Les particules rouges montrent une dynamique irréversible. (b) Évolution du coefficient de diffusion stroboscopique en fonction de l'amplitude de cisaillement dans les expériences de Pine et al. [5]

La transition de réversibilité peut être illustrée parfaitement par les expériences menées par Pine et al. [5], dans lesquelles une suspension peu dense est cisaillée dans un écoulement de Couette cylindrique. En suivant l'évolution de la position des particules du système d'un cycle à l'autre, les auteurs ont pu observer deux comportements distincts. Pour une amplitude de cisaillement suffisamment faible  $\gamma_0 < \gamma_{0,c}$ , les particules conservent la même position d'un cycle à l'autre. Cependant pour  $\gamma_0 > \gamma_{0,c}$ , les particules se déplacent entre le début et la fin d'un cycle. En étudiant la dynamique stroboscopique du système, i.e. à chaque début de cycle, la suspension est donc immobile pour  $\gamma_0 < \gamma_{0,c}$  et elle diffuse pour  $\gamma_0 > \gamma_{0,c}$ . Il est alors possible de visualiser cette transition en représentant l'évolution du coefficient de diffusion stroboscopique  $D_0$  associé en fonction de l'amplitude de cisaillement  $\gamma_0$ , comme sur la figure 1.1-(b).

L'origine de cette diffusion stroboscopique à l'échelle macroscopique est attribuée à des interactions microscopiques irréversibles entre les particules, comme illustré sur la figure 1.1-(a). Lorsque les particules sont suffisamment éloignées au cours du cisaillement, leur dynamique est uniquement régie par les équations de Stokes, qui ont la propriété d'être réversibles dans le temps. D'un cycle à l'autre, la dynamique est donc identique. Toutefois, lorsque celles-ci sont suffisamment rapprochées par le cisaillement (ou proches

initialement du fait d'une forte densité), elles interagissent entre elles au cours du cycle via des interactions locales irréversibles (contacts), induisant de ce fait une évolution d'un cycle à l'autre. C'est la succession de ces interactions irréversibles qui induit une diffusion stroboscopique sous grande amplitude de cisaillement [6].

### 1.1.2 Transition vers l'écoulement des fluides à seuil

Le second phénomène auquel nous nous intéressons est l'écoulement des fluides à seuil. Les fluides à seuil représentent des objets peuplant notre quotidien à différentes échelles. Nous les retrouvons à l'état naturel par l'écume marine ou les argiles mais aussi par les matériaux d'origine anthropique comme le dentifrice ou la mayonnaise. Leur particularité vient de leurs propriétés rhéologiques, bien plus complexes que celles des fluides newtoniens comme l'eau ou le miel.

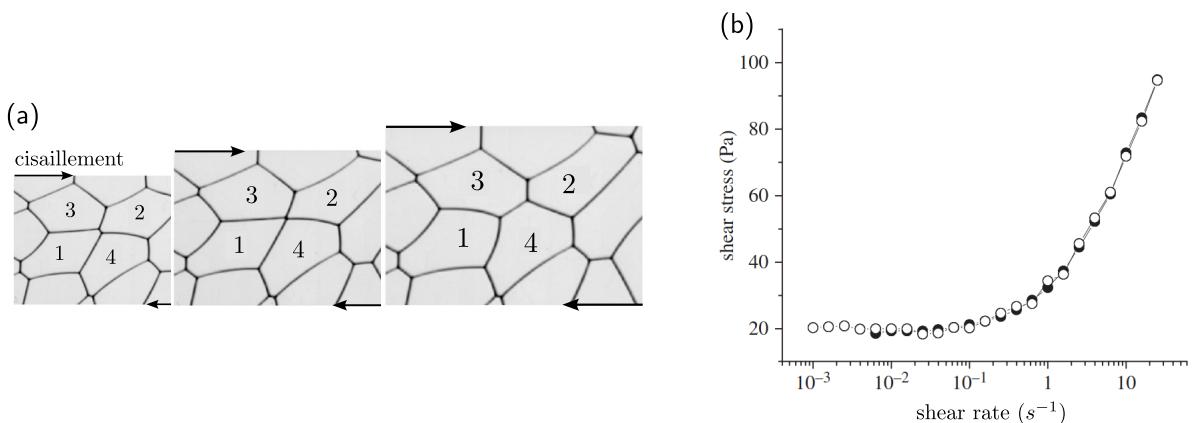


FIGURE 1.2 – (a) Image tirée de [7] d'un réarrangement plastique dans une mousse : les bulles voisines changent leur contact afin de minimiser la contrainte supportée. (b) Evolution du taux de cisaillement en fonction de la contrainte appliquée. Données tirées de [8]

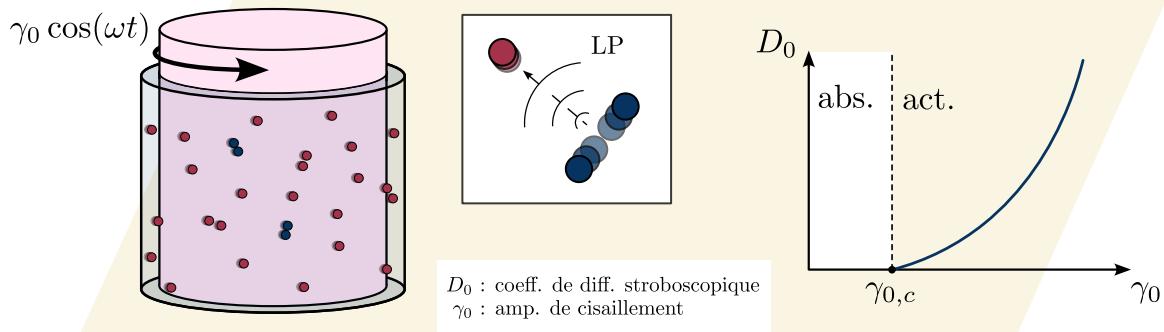
Si l'on considère le cas du cisaillement simple d'un tel fluide, celui-ci possède la spécificité de ne s'écouler que si la contrainte de cisaillement  $\Sigma$  appliquée est supérieure à une certaine contrainte seuil  $\Sigma_c$  propre au matériau [9, 10]. Un exemple édifiant est celui du dentifrice, qui ne s'écoule de son tube que lorsqu'on le presse suffisamment.

En-deçà de la contrainte seuil, après un éventuel régime transitoire, le matériau répond élastiquement à la sollicitation à l'échelle locale comme globale, définissant un taux de cisaillement nul  $\dot{\gamma} = 0$  dans l'état stationnaire. En revanche, au-delà de cette contrainte seuil, l'état stationnaire du système est caractérisé par la présence continue de réarrangement plastiques locaux (voir figure 1.2-(a)) [11–13]. Pour  $\Sigma > \Sigma_c$  la succession de ces événements résulte alors en un écoulement global et donc un taux de cisaillement moyen non-nul  $\dot{\gamma} > 0$ . Il est ainsi possible de visualiser cette transition en représentant l'évolution du taux de cisaillement moyen en fonction de la contrainte appliquée, comme sur l'exemple de la figure 1.2-(b).

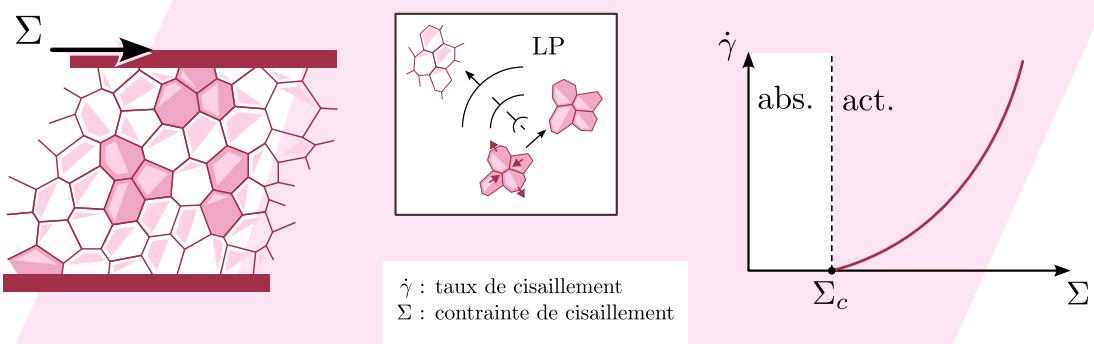
### 1.1.3 Des similarités non-conventionnelles

Ces phénomènes ont en première apparence très peu de points communs. Toutefois, il existe entre eux des similitudes très fortes, illustrées sur la [figure 1.3](#). Tout d'abord, comme la lectrice l'aura peut-être déjà remarqué, ceux-ci séparent dans chacun des systèmes concernés deux états : un état actif et un état arrêté. Dans le cas de la transition vers l'écoulement l'état actif correspond à un état fluide tandis que dans la transition de réversibilité il correspond à un état diffusant. Par ailleurs, dans les deux cas, ces états actifs sont composés par une succession d'événements locaux. Dans le cas de la transition vers l'écoulement ceux-ci sont représentés par les réarrangements plastiques alors que dans le cas de la transition de réversibilité ce sont les interactions de contact irréversibles.

#### Transition de réversibilité



#### Transition vers l'écoulement



**FIGURE 1.3** – Illustration schématique du parallèle existant entre la transition de réversibilité dans les suspensions cisaillées cycliquement et la transition vers l'écoulement des matériaux amorphes. LP signifie *longue portée*, abs. signifie *absorbant* et act. signifie *actif*.

De plus, un autre point commun que l'on mettra en évidence dans la suite de ce chapitre est la présence de longue portée. En effet, si dans chacun de ces systèmes la phase active est représentée par des mouvements locaux, il y a de fortes raisons de penser que ceux-ci affectent la dynamique globale via des interactions à longue portée. Dans le cas de la transition de réversibilité dans les suspensions, les particules sont immergées dans un

fluide visqueux. Celui-ci est alors capable de propager l'irréversibilité locale à grande distance selon les lois de l'hydrodynamique, affectant de ce fait la dynamique des particules n'interagissant pas directement avec les autres. Dans le cas de la transition vers l'écoulement, les réarrangements plastiques se font dans une matrice élastique. Cette situation largement étudiée montre que ces évènements locaux induisent des interactions à longue portée dans le matériau, susceptibles d'induire d'autres évènements à grande distance. Dans cette optique, la transition vers l'écoulement et la transition de réversibilité peuvent donc être toutes les deux comprises comme des **transitions de phase absorbante en présence d'interactions à longue portée**.

Enfin, une similarité plus remarquable motive réellement l'étude conjointe de ces deux phénomènes. Celle-ci se rapporte à leur manière d'approcher la phase absorbante. D'une part, dans le cas de la transition vers l'écoulement, les expériences en laboratoire comme les modélisations numériques ont permis de caractériser l'évolution du taux de cisaillement avec la contrainte, montrant une évolution convexe de la courbe descriptive  $\dot{\gamma} = f(\Sigma)$ . D'autre part, dans le cas de la transition de réversibilité, une modélisation numérique simple faisant intervenir les interactions à longue portée a de la même façon montré une évolution convexe du coefficient de diffusion stroboscopique avec le paramètre de transition [14]. Ce point commun se révèle alors très **surprenante** puisque, comme nous le montrerons dans la suite, le cadre théorique pressenti pour ces transitions avec interactions à longue portée ne permet pas d'expliquer une telle convexité, atypique dans le domaine des phénomènes critiques.

Dans ce chapitre, nous proposons de préciser les similitudes entre ces deux phénomènes et de développer cette confrontation théorique afin de pouvoir finalement la problématiser. Pour ce faire, nous commencerons par introduire la notion de transition de phase absorbante dans la théorie des phénomènes critiques. Nous décrirons ensuite la classe d'universalité de la percolation dirigée conservée, a priori la plus à même de décrire ces deux phénomènes. Puis, par sa généralisation à longue portée, nous montrerons en quoi la convexité observée dans ces deux transitions les exclue de ce cadre. Enfin, nous soulignerons les ingrédients physiques précis qui suggèrent la compréhension de la spécificité de ces phénomènes via une approche commune.

## 1.2 Transitions de phases absorbante

Dans cette section, nous présentons dans un premier temps la phénoménologie des phénomènes critiques à l'équilibre. La présentation des théories et des concepts sous-jacents à ces phénomènes largement étudiés nous permettra de mieux appréhender la seconde partie de cette section. Dans celle-ci, nous introduirons par analogie la notion de transition de phase absorbante et les spécificités qui lui sont associées. Cette partie nous permettra alors de constituer une première boîte à outils incontournable pour l'étude des transitions de réversibilité et d'écoulement.

### 1.2.1 Phénomènes critiques à l'équilibre

#### 1.2.1.1 Phénoménologie d'une transition de phase

La plupart des systèmes physiques existent sous plusieurs états possibles. Par exemple, nous connaissons l'eau, indispensable à la vie sur Terre, sous différentes formes. Elle peut se faire vapeur dans l'atmosphère, liquide dans les rivières ou bien encore solide sur les glaciers. Ces différents états possibles, appelés plus généralement phases du systèmes, présentent des domaines de stabilité qui dépendent de paramètres extérieurs. Par exemple, dans le cas de l'eau, la phase stable dépend de la température et de la pression dans l'environnement considéré. En variant ces paramètres, il est possible de passer d'un domaine de stabilité à un autre, i.e. de passer d'une phase à une autre : c'est ce que l'on appelle une transition de phase.

Si dans nos esprits la notion de changement d'état s'attache spontanément aux changements structurels classiques de la matière (évaporation, fusion, ...), celle-ci recouvre en fait quelque chose de bien plus général. On pourra par exemple penser à la formation du diamant [15], la dénaturation de l'ADN [16] ou encore la transition superfluide de l'hélium [17]. Un autre exemple, pris en cas d'école, est la transition ferromagnétique-paramagnétique des métaux, qui sépare un état magnétique d'un état non magnétique du matériau en fonction de la température considérée [18]. De manière tout à fait générale, une transition de phase est définie comme une transformation abrupte amenant un système d'une phase à une autre sous la variation d'un paramètre de contrôle. En-dessous d'une certaine valeur du paramètre de contrôle, le système est dominé par l'une des phases, tandis qu'au-dessus de cette valeur, le système est dominé par l'autre phase.

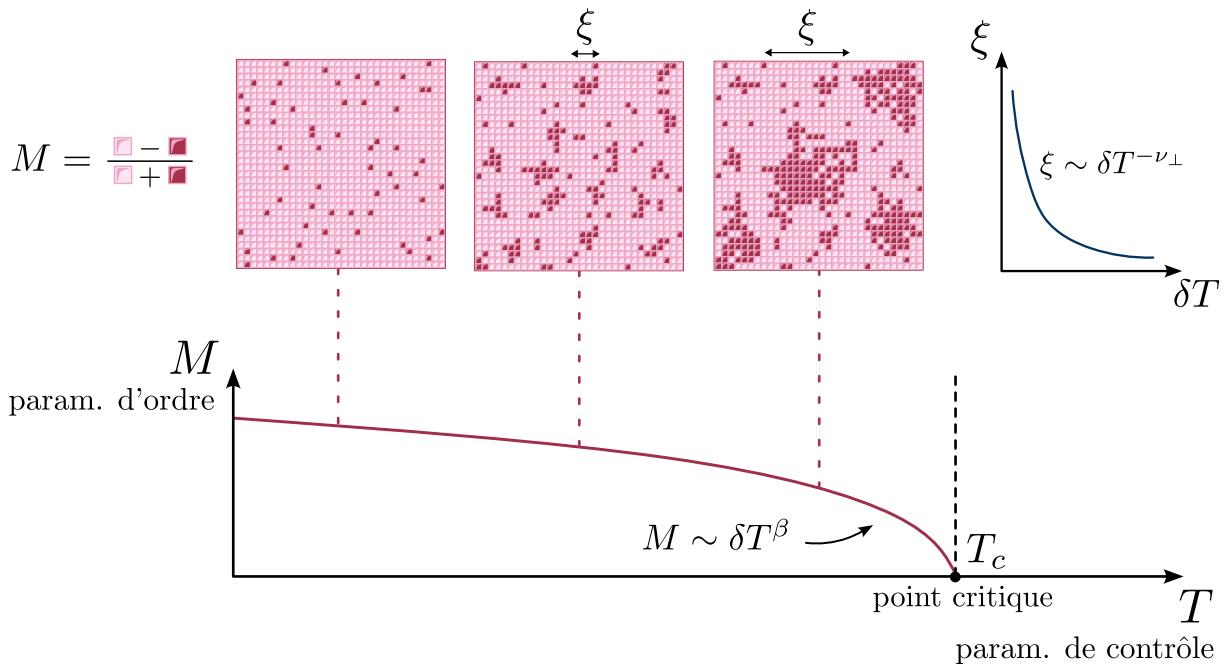


FIGURE 1.4 – Illustration de la phénoménologie générale d'une transition de phase via l'exemple de la transition ferromagnétique-paramagnétique

Pour conceptualiser le problème, il est d'usage de définir une grandeur, appelée paramètre d'ordre, qui prend des valeurs distinctement différentes dans chacune des phases. La transition se traduit alors par un changement abrupt du paramètre d'ordre autour de la valeur critique du paramètre de contrôle. Dans le cadre de la transition ferromagnétique-paramagnétique, le paramètre d'ordre du système est son aimantation  $M$  et le paramètre de contrôle est sa température  $T$ , dont la valeur critique est la température de Curie  $T_c$ . Lorsque le matériau est porté à une température  $T > T_c$ , la phase dominante est la phase paramagnétique, caractérisée par  $M = 0$ , et lorsque celui-ci est refroidi à  $T < T_c$  la phase dominante est la phase ferromagnétique, caractérisée par  $M \neq 0$  (voir [figure 1.4](#)). Le domaine d'étude des phénomènes critiques consiste alors à comprendre l'évolution du système et des quantité le caractérisant proche de ce point de transition. Dans la suite de cette sous-section, pour plus de clarté, nous conserverons les notations associées à la transition ferromagnétique-paramagnétique pour développer les concepts associés aux phénomènes critiques.

### 1.2.1.2 Hypothèse de scaling

Afin d'opérer des changements macroscopiques aussi drastiques au cours d'une légère modification du paramètre de contrôle, les entités microscopiques constituant le système doivent coopérer largement proche de la transition. C'est en effet ce que l'on observe : à mesure que l'on s'approche de la transition, la longueur de corrélation  $\xi$  associée au système augmente, comme schématisé à la [figure 1.4](#). Au point de transition, aussi appelé point critique, celle-ci diverge.

En accord avec ces observations, l'hypothèse de scaling généralisée est une hypothèse fondatrice de l'étude des phénomènes critiques qui permet de comprendre leur phénoménologie [18]. Celle-ci repose sur le fait que, dans le régime critique (i.e. suffisamment proche de la transition), la longueur de corrélation est la seule échelle de longueur pertinente pour décrire le système. En d'autres termes, tous les détails microscopiques du système en-dessous de l'échelle de longueur représentée par  $\xi$  sont d'intérêt négligeable. De plus, cette hypothèse suppose que cette longueur de corrélation est une fonction homogène de la distance au point critique :

$$\xi = \lambda^{\nu_{\perp}} \tilde{\xi}(\lambda \delta T), \quad \delta T = \frac{T_c - T}{T_c}, \quad \lambda > 0 \quad (1.1)$$

Le propre d'une fonction homogène étant que l'[équation 1.1](#) est valide pour tout  $\lambda$ , en prenant  $\lambda = 1/\delta T$  nous obtenons :

$$\xi = \delta T^{-\nu_{\perp}} \tilde{\xi}(1) \quad (1.2)$$

Cela retranscrit alors bien le fait que la longueur de corrélation diverge algébriquement avec la distance au point critique.

Cette hypothèse implique un résultat important. Considérons un système de taille  $L^D$  que l'on subdivise en un ensemble de sous-compartiments de dimension  $\xi^D$ , comme représenté à la [figure 1.5](#). Par définition de la longueur de corrélation, chacun de ces sous-compartiments peut être considéré comme indépendant. Chacun de ceux-ci, au nombre de

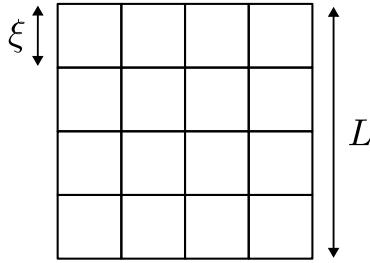


FIGURE 1.5 – Découpage schématique d'un système de dimension  $L^D$  en une collections de sous-systèmes de dimension  $\xi^D$

$\left(\frac{L}{\xi}\right)^D$  contribue à l'énergie libre  $f$  du système par la même quantité. En d'autres termes, la partie singulière (associée à la transition) de  $f$  se comporte comme  $\xi^{-D}$ . C'est donc aussi une fonction homogène :

$$f = \lambda^{y_f} \tilde{f}(\lambda\delta T), \quad \lambda > 0 \quad (1.3)$$

et dont l'exposants caractéristique est relié au précédent par la relation  $y_f = -\nu_{\perp} D$ , génériquement appelée relation d'échelle.

La force de la théorie d'échelle vient alors du point suivant. Les dérivées ou transformées de Legendre d'une fonction homogène sont elles-mêmes des fonctions homogènes. Par ailleurs, celles de l'énergie libre (ou autre potentiel thermodynamique considéré en fonction du système) correspondent à différentes grandeurs physiques d'intérêt. Cela signifie donc que sous cette hypothèse, dans le régime critique, la plupart des quantités décrivant le système sont des fonctions homogènes dont les exposants associés sont liés par des lois d'échelle. Proche du point critique, les observables telles que  $\xi$  évoluent donc sans échelle caractéristique, selon des lois de puissance définissant ce qu'on appelle des exposants critiques. Notamment, via le temps de corrélation  $\tau$  et la valeur moyenne du paramètre d'ordre  $\langle M \rangle$ , nous définissons, en plus de  $\nu_{\perp}$ , les exposants critiques  $\beta$  et  $\nu_{\parallel}$  selon :

$$\begin{aligned} \langle M \rangle &= \lambda^{-\beta} \tilde{M}(\lambda\delta T) \Rightarrow \langle M \rangle \sim \delta T^{\beta} \\ \tau &= \lambda^{\nu_{\parallel}} \tilde{\tau}(\lambda\delta T) \Rightarrow \tau \sim \delta T^{-\nu_{\parallel}} \end{aligned} \quad (1.4)$$

L'hypothèse de scaling ainsi que les relations d'échelle qui en découlent ont été testées expérimentalement de manière exhaustive, plaçant alors la théorie d'échelle comme le pilier de l'étude des phénomènes critiques.

### 1.2.1.3 Universalité

#### Principe

Un aspect essentiel de ce cadre d'étude est de considérer que les détails microscopiques des systèmes situés à des échelles inférieures à  $\xi$  ne sont pas pertinents pour en décrire la physique. Dans le régime critique où la longueur de corrélation diverge, ceci motive le fait que le comportement d'une transition peut être déterminé simplement par des considérations globales : c'est le principe d'universalité. L'étude des transitions de phase à l'équilibre

a renforcé ce principe d'universalité en montrant que des transitions de nature physique complètement différente partageaient le même comportement critique. Il a alors été possible d'élaborer une catégorisation des phénomènes critiques, les regroupant en classes d'universalité définies uniquement par deux aspects simples : la dimension de l'espace et les symétries du paramètre d'ordre [18]. Par exemple, la transition ferromagnétique-paramagnétique des matériaux avec un seul axe privilégié d'aimantation appartient à la classe d'universalité d'Ising au même titre que la transition liquide-gaz ou celle de démixtion des liquides [19]. En pratique, cette catégorisation passe par la mesure des exposants critiques, dont chaque ensemble caractérise une unique classe d'universalité.

### Théorie continue

Le fait qu'un comportement critique dépende uniquement de critères très généraux motive l'étude de ces phénomènes via des modélisations continues simples sous-forme d'équations de champ. Par exemple, celle associée à la classe d'Ising peut être modélisée par l'équation de champ de Langevin suivante :

$$\partial_t \phi(\mathbf{r}, t) = -r\phi(\mathbf{r}, t) + u\phi^3(\mathbf{r}, t) + \kappa\nabla^2\phi(\mathbf{r}, t) + \sigma\eta(\mathbf{r}, t) \quad (1.5)$$

avec  $\eta$  représentant les fluctuations par un bruit gaussien défini selon :

$$\langle \eta(\mathbf{r}, t) \rangle = 0, \quad \langle \eta(\mathbf{r}, t)\eta(\mathbf{r}', t') \rangle = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')\delta(t - t') \quad (1.6)$$

$\phi$  représentant une version gros grains locale du paramètre d'ordre et  $r$  la distance au point critique. Cette théorie continue est connue sous le nom de théorie  $\phi^4$  [18].

Dans la limite où les fluctuations de la dynamique sont négligeables, la criticalité décrite par cette équation peut être appréhendée dans son approximation de champ moyen :

$$\partial_t \phi = -r\phi + u\phi^3 \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \phi = \left(\frac{r}{u}\right)^{\frac{1}{2}} \quad (1.7)$$

menant donc à  $\beta^{\text{CM}} = \frac{1}{2}$ . Cependant cette approximation n'est valable que dans certains cas.

Dans l'idée que les détails microscopiques ne sont pas pertinents dans le régime critique, nous pouvons redimensionner les distances dans cette équation selon  $\mathbf{r} \rightarrow b\mathbf{r}$  avec  $b > 1$ . Sous cette transformation, d'après la théorie d'échelle, les différentes quantités de l'équation sont transformées selon :

$$\mathbf{r} \rightarrow b\mathbf{r}, \quad t \rightarrow b^{\nu_{\parallel}/\nu_{\perp}}t, \quad \phi \rightarrow b^{-\beta/\nu_{\perp}}\phi \quad (1.8)$$

si bien que ce redimensionnement revient à obtenir une équation équivalente à l'équation 1.6 avec un redimensionnement des constantes selon :

$$r \rightarrow b^{\nu_{\parallel}/\nu_{\perp}}r, \quad u \rightarrow b^{\nu_{\parallel}/\nu_{\perp}-2\beta/\nu_{\perp}}u, \quad \kappa \rightarrow b^{\nu_{\parallel}/\nu_{\perp}-2}\kappa, \quad \sigma \rightarrow b^{\nu_{\parallel}/2\nu_{\perp}+\beta/\nu_{\perp}-D/2}\sigma \quad (1.9)$$

À grande échelle ( $b \rightarrow \infty$ ), les fluctuations sont donc négligeables seulement pour  $D > (2\beta + \nu_{\parallel})/\nu_{\perp}$ . Par ailleurs, dans ce cas champ moyen, l'invariance d'échelle du système



au point critique ( $r = 0$ ) impose la valeur des exposants  $\nu_{\parallel}^{\text{CM}} = 1$  et  $\nu_{\perp}^{\text{CM}} = \frac{1}{2}$ . Ce raisonnement définit donc une dimension critique supérieure du système  $D_c = 4$  au-delà de laquelle la criticalité décrite par l'équation [équation 1.6](#) est triviale<sup>1</sup>.

En-dessous de cette dimension critique ( $D < D_c$ ), on ne peut plus négliger les fluctuations dans le système : c'est là que toute la complexité des comportements critiques entre en jeu. Pour étudier le comportement de la théorie de champ à grande échelle dans ce cas, des outils théoriques ont été mis en place. Ceux-ci font intervenir le formalisme associé au groupe de renormalisation. Grâce à ces techniques, il est possible de prédire les valeurs des exposants critiques associés à une théorie de champ à basse dimension, et donc prédire la criticalité de toute une catégorie de systèmes.

En conclusion, les phénomènes critiques à l'équilibre sont caractérisés par des évolutions algébriques des quantités physiques. Ces évolutions sont décrites par différents exposants critiques, reliés par des relations d'échelle. Différentes transitions de phase peuvent être regroupées en une classe d'universalité, décrite par un ensemble de valeurs des exposants critiques. Pour étudier l'universalité de ces classes, il est d'usage de faire appel aux théories de champ continues associées, dont la résolution fait intervenir des outils complexes en-dessous de la dimension critique supérieure.

## 1.2.2 Transitions de phase absorbante

Après avoir rappelé les bases de la théorie des phénomènes critiques à l'équilibre, nous proposons dans cette sous-section de décrire la phénoménologie propre aux transitions de phase absorbante. Ces phénomènes hors d'équilibre concernent plus spécifiquement notre étude puisque nous verrons que la transition de réversibilité et d'écoulement en sont des représentants. Pour ce faire, nous en proposerons une définition, que nous compléterons ensuite par quelques exemples. Puis, nous présenterons les exposants critiques pertinents pour caractériser ces transitions et la classe d'universalité principale associée.

### 1.2.2.1 Définition

Les transitions de phase absorbante prennent place dans des systèmes présentant des états absorbants. Ceux-ci correspondent à des états accessibles à la dynamique du système mais dans lesquels celle-ci se retrouve piégée à jamais [19]. Dans une telle transition, le paramètre de contrôle que l'on notera d'abord génériquement  $p$  permet de séparer une phase active d'une phase absorbée par sa valeur critique  $p_c$ . Dans la phase active  $p > p_c$ , la dynamique du système à temps long est caractérisée par une valeur moyenne finie du paramètre d'ordre  $A$ , appelé génériquement activité. Dans la phase absorbante  $p < p_c$ , le système tombe dans un état absorbant au bout d'un temps fini, caractérisé par une activité nulle  $A = 0$ .

1. Nous réutiliserons ce raisonnement générique pour caractériser les propriétés chams moyen d'autres théories dans la suite de cet ouvrage.

La notion d'activité dans ce cadre ne tisse pas de liens avec celle de l'activité dans le contexte de la matière active. Dans une transition de phase absorbante, l'activité correspond plutôt à un état des agents microscopiques qui peut prendre différentes formes selon les systèmes spécifiques considérés.



### 1.2.2.2 Exemples

Sous le point de vue adéquat, de nombreux systèmes peuvent être compris comme des transitions de phase absorbante. Un exemple incontournable à l'aune de notre époque est celui des épidémies, dans lequel un agent pathogène (virus, bactérie, ...) se propage au sein d'une population [19–21]. Au premier ordre, on peut modéliser ce système comme à la [figure 1.6](#). La population peut alors contenir deux types d'individus : des individus malades, susceptibles de transmettre la maladie à un taux  $\lambda$  et de s'en rétablir à un taux  $\gamma$ , et des individus sains, susceptibles d'être infectés. En fonction de la transmissibilité du virus  $\lambda$  et de la capacité de guérison de la population  $\gamma$ , le système peut connaître deux sorts à temps long : pour  $\lambda/\gamma$  suffisamment grand, l'épidémie persistera à temps long alors que pour  $\lambda/\gamma$  suffisamment petit, tous les individus finiront par devenir sains. Un tel état est alors un état absorbant puisque dès lors que l'agent pathogène n'a plus de vecteur, il ne peut plus se propager. Dans ce système, on retrouve donc une transition de phase absorbante de paramètre de contrôle  $p = \lambda/\gamma$  et dont l'activité correspond à la proportion de personnes infectées dans la population.

Un autre exemple pouvant présenter une dynamique tout à fait similaire est celui des feux de forêt [22] (voir [figure 1.6](#)). De la même manière, nous pouvons modéliser ce système au premier ordre par une population d'arbres existant sous deux états possibles : des arbres en feu susceptibles de provoquer l'embrasement d'autres à un taux  $\lambda$  et de s'éteindre à un taux  $\gamma$ , et des arbres sains, seulement susceptibles de prendre feu. Ici encore, selon la valeur du paramètre  $p = \lambda/\gamma$ , l'état du système à temps long peut prendre deux formes : incendié pour  $p > p_c$  et éteint pour  $p < p_c$ . La forêt sans aucun arbre en feu correspond alors à un état absorbant du système, puisqu'une fois dans cet état, le feu ne peut plus se propager. Dans ce système l'activité correspond à la proportion d'arbres en feu dans la forêt.

De manière générale, de nombreux systèmes peuvent être compris comme des transitions de phase absorbante s'ils sont observés sous le bon angle. Comme le montre les exemples précédents, les ingrédients principaux nécessaires à cette dynamique sont une activité microscopique susceptible de se propager comme de s'atténuer et l'existence d'un état bloqué de la dynamique globale.

### 1.2.2.3 Exposants critiques

Les transitions de phase absorbante sont des phénomènes hautement hors d'équilibre puisque la présence d'états absorbants implique, par définition, la violation du principe de bilan détaillé. Toutefois, il se trouve que la phénoménologie observée de ces transitions ressemble fortement à celle de leurs homologues d'équilibre. Notamment, nous y retrouvons la notion d'homogénéité, d'exposants critiques et d'universalité. Concernant les exposants critiques associés aux transitions de phase absorbante, ceux-ci peuvent être catégorisés

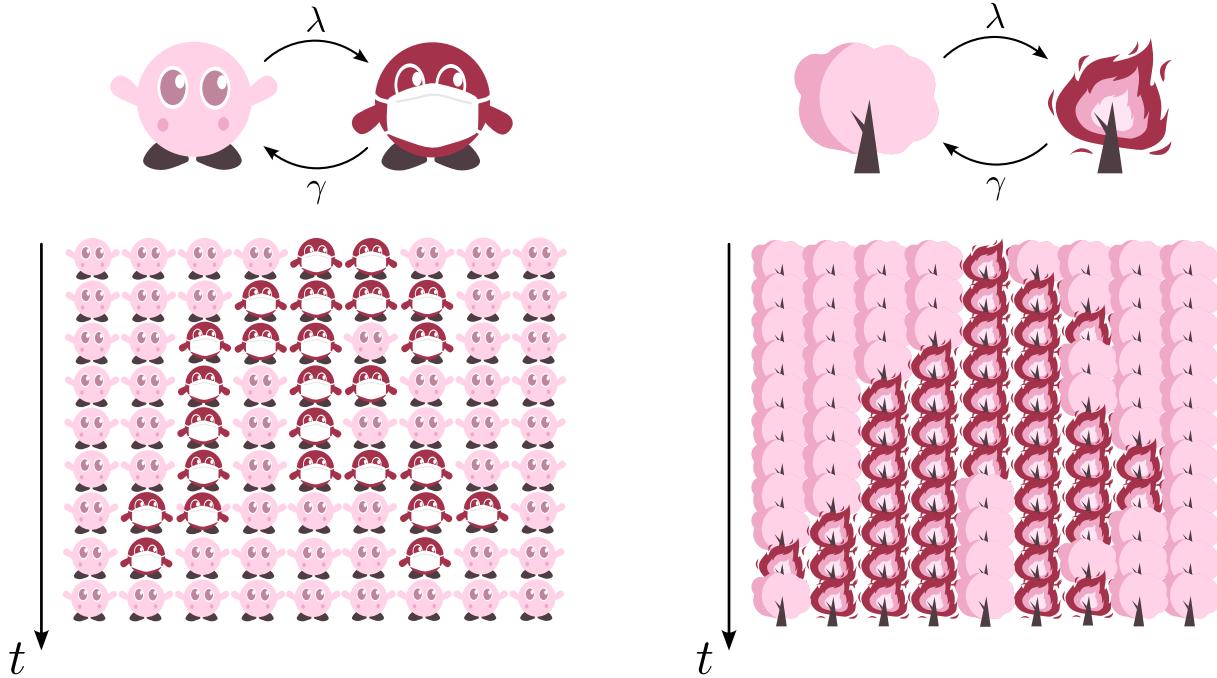


FIGURE 1.6 – Exemples de phénomènes présentant des transitions de phase absorbante : la propagation des épidémies et des feux de forêts.

en deux types : ceux reliés à l'état stationnaire de l'activité dans le système, que l'on appellera statiques, et ceux reliés à l'état transitoire, que l'on appellera dynamiques.

Du côté des exposants statiques, nous retrouvons naturellement l'exposant  $\beta$  reliant la valeur moyenne de l'activité dans l'état stationnaire à la distance au point critique et l'exposant  $\nu_\perp$  caractérisant la divergence de la longueur de corrélation  $\xi$  :

$$\langle A \rangle \sim \delta p^\beta, \quad \xi \sim \delta p^{-\nu_\perp}, \quad \delta p = \frac{p - p_c}{p_c} \quad (1.10)$$

De plus, nous nous intéresserons aussi dans ce travail à l'évolution des fluctuations du paramètre d'ordre dans l'état stationnaire. Pour un système de taille  $L^D$ , avec  $D$  la dimension du système, nous les caractérisons via la variance  $\langle \delta A^2 \rangle = L^D \times (\langle A^2 \rangle - \langle A \rangle^2)$  dont l'évolution est alors dictée par l'exposant  $\gamma'$  :

$$\langle \delta A^2 \rangle \sim \delta p^{-\gamma'} \quad (1.11)$$

Le signe apposé à la définition de cet exposant vient du fait qu'en général les fluctuations du paramètre d'ordre divergent à l'approche du point critique, signe d'une dynamique de plus en plus corrélée. En-dessous de la dimension critique  $D_c$ , les exposants  $\beta$ ,  $\gamma'$  et  $\nu_\perp$  sont liés par une relation d'échelle :

$$2\beta + \gamma' = \nu_\perp D \quad (1.12)$$

appelée relation d'hyperscaling [19]. Nous ferons appel à cette relation d'échelle à plusieurs reprises dans les différents chapitres de ce manuscrit.

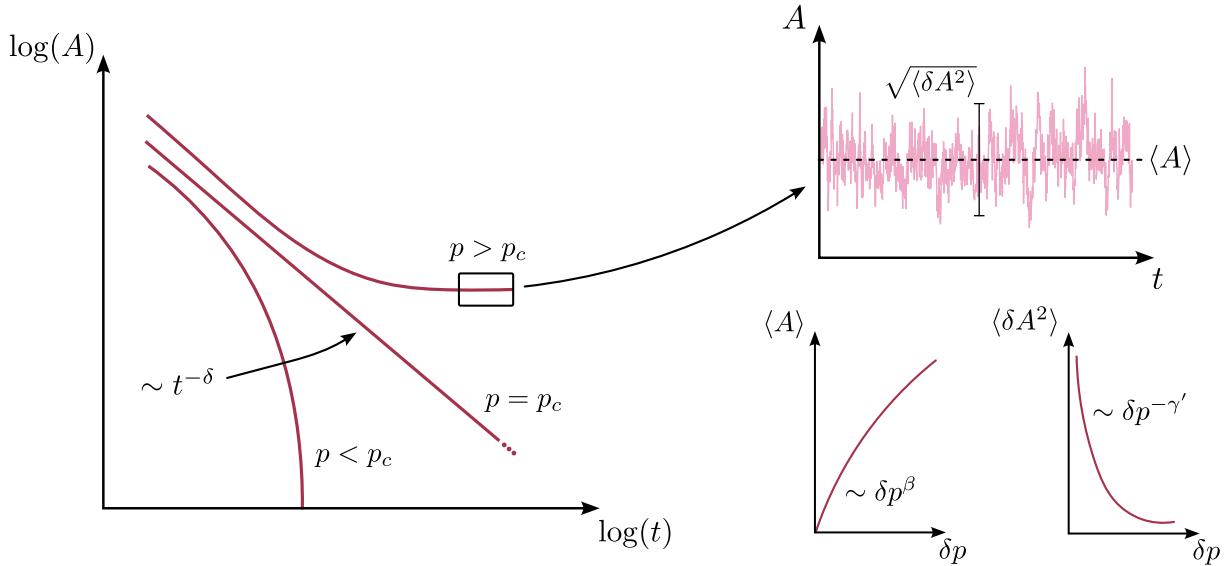


FIGURE 1.7 – Phénoménologie et définition des différents exposants critiques pertinents dans le cadre des transitions de phase absorbante.

Du point de vue dynamique, il existe deux façons principales de caractériser une transition de phase absorbante [19]. La première est de partir d'un état initial avec une zone localisée d'activité, comme c'est le cas sur la figure 1.6, et d'étudier la propagation de l'activité dans le système. Une autre possibilité, que nous favoriserons par la suite, est de caractériser la relaxation du système à partir d'un état aléatoire. Dans ce cas, au point critique, la valeur instantanée de l'activité dans le système décroît à temps long de manière algébrique, définissant l'exposant dynamique  $\delta$  :

$$A(t) \sim t^{-\delta} \quad (1.13)$$

Les exposants  $\beta$ ,  $\gamma'$  et  $\delta$  ainsi définis et illustrés sur la figure 1.7 permettent de caractériser une transition de phase absorbante sous différents aspects et de manière unique.

#### 1.2.2.4 Classes d'universalité

Comme à l'équilibre, un grand nombre de transitions de phase absorbante se regroupent sous forme de classes d'universalité représentées par des valeurs communes des exposants critiques. Dans ce cas hors d'équilibre, la classe d'universalité la plus importante, de manière analogue à la classe d'Ising, est celle de la percolation dirigée (DP) [19, 20].

Sa dénomination vient de la transition géométrique bien connue qui la représente. Dans le cas de la transition de percolation isotrope, rappelée à la figure 1.8-(a), deux sites voisins d'un réseau de  $D$  dimensions sont reliés avec une probabilité  $p$ . Une valeur critique  $p_c$  de cette probabilité sépare alors statistiquement deux états du système : pour  $p < p_c$  les clusters formés par les liens sont de taille finie tandis que pour  $p > p_c$  ceux-ci s'étendent dans tout le système : on dit qu'ils percolent. La percolation dirigée est représentée par le même phénomène, simplement dans ce cas les liaisons entre sites ne peuvent se faire que dans une direction privilégiée (voir figure 1.8-(a)). Dans ce cas, les issues possibles

en fonction de la valeur du paramètre  $p$  sont représentées graphiquement en 2D sur la [figure 1.8-\(b\)](#). Nous pouvons alors remarquer de fortes similarités entre la [figure 1.8-\(b\)](#) et la [figure 1.6](#). En fait, comme le lecteur l'aura sûrement déjà compris, les processus absorbants simples présentés précédemment sont équivalents à un phénomène de percolation dirigée, mais dont le temps équivaut à une dimension, soit en  $D + 1$  dimensions. Une valeur finie de l'activité à temps long dans ces processus correspond alors à la percolation du système tandis que la tombée dans un état absorbant représente la phase non percolante. Cette équivalence fait que tous ces systèmes sont caractérisés par le même comportement critique : celui de la classe DP.

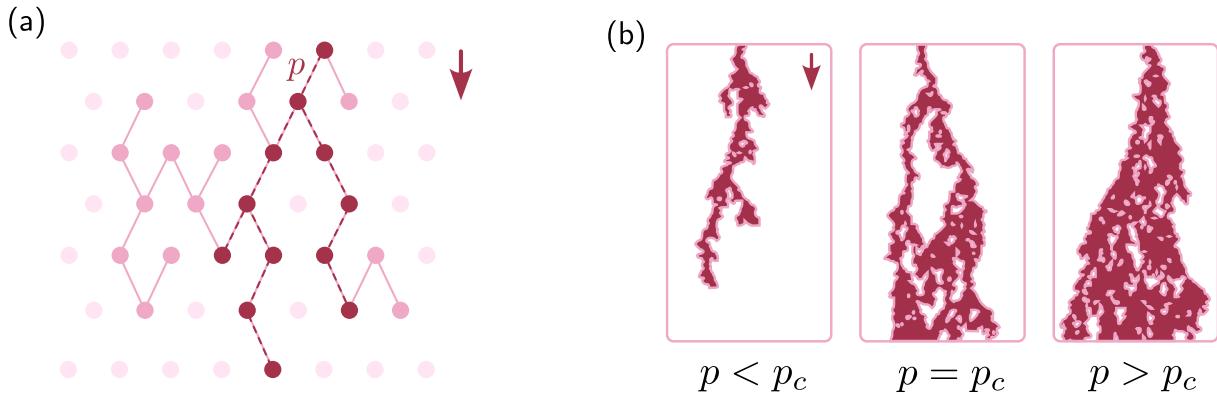


FIGURE 1.8 – Transition de percolation et de percolation dirigée en 2D. (a) règles associées à la percolation isotrope (lien roses) et à la percolation dirigée (liens rouges) dont la direction privilégiée est donnée par la flèche. (b) états du système en fonction de la valeur du paramètre de liaison  $p$ . Pour  $p \geq p_c$  le système percole.

Beaucoup d'autres systèmes avec des dynamiques plus complexes ont été caractérisés comme appartenant à la classe DP. Cette ubiquité a motivé une conjecture simple d'appartenance formulée par Janssen et Grassberger [23, 24] : les systèmes présentant une transition de phase absorbante continue vers un unique état absorbant, faisant intervenir des interactions à courte portée et aucune symétrie particulière, appartiennent à la classe DP.

D'un point de vue des processus plus abstraits de réaction-diffusion, les modèles appartenant à la classe DP peuvent être modélisés par deux processus, un de création et un d'annihilation :

$$A \xrightarrow{\lambda} 2A, \quad A \xrightarrow{\gamma} \emptyset \quad (1.14)$$

avec  $A$  une espèce représentant les agents actifs, diffusant avec un coefficient de diffusion  $D_A$ . Via cette approche il est possible d'associer, comme pour la classe d'Ising, une théorie de champ à la classe DP :

$$\partial_t A(\mathbf{r}, t) = rA(\mathbf{r}, t) - uA^2(\mathbf{r}, t) + \kappa \nabla^2 A(\mathbf{r}, t) + \sigma \sqrt{A(\mathbf{r}, t)} \eta(\mathbf{r}, t) \quad (1.15)$$

avec la particularité de faire intervenir un bruit multiplicatif (i.e. dépendant de  $A$ ) qui permet de préserver l'existence d'un état absorbant (pour  $A = 0$ , il n'y a plus de fluctuations). Sa forme en  $\sim \sqrt{A}$  vient de la stochasticité des réactions, dont la variance

est proportionnelle au nombre d'agents microscopiques. Par une approche d'échelle identique à celle présentée dans le cadre de la théorie de champ de la classe d'Ising, il est possible de déterminer la valeur champ moyen des exposants critiques en-dessous de la dimension critique supérieure  $D_c = 4$ . Celles-ci sont reportées dans le [tableau 1.1](#). Via des mesures numériques sur des modèles, ou des approches analytiques sur la théorie de champ, la classe DP a aussi été caractérisée précisément en dimension finie. Notamment, nous reportons la valeur des exposants critiques associés en 2D dans le [tableau 1.1](#).

Classe	$\beta$	$\gamma'$	$\delta$	$\nu_\perp$
DP (en 2D)	0.58	0.30	0.45	0.73
CDP (en 2D)	0.64	0.37	0.42	0.80
DP/CDP champ moyen	1	0	1	0.5

TABLE 1.1 – Valeurs des exposants critiques associés aux classe d'universalité DP et CDP, en 2D et en champ moyen [19]

Si DP est la classe la plus répandue et la plus caractérisée aussi bien numériquement qu'analytiquement, il existe d'autres classes, cousins de cette première, correspondant à l'ajout d'ingrédients supplémentaires dans les modèles. Notamment, celle d'intérêt pour ce travail est celle de la percolation dirigée conservée (CDP), puisqu'elle représente une dynamique très proche de celles mises en place dans la transition de réversibilité et dans la transition vers l'écoulement.

## 1.3 Percolation dirigée conservée

Dans cette section, nous présentons la classe d'universalité CDP de manière exhaustive puisque, comme nous le verrons, elle représente un premier cadre de compréhension des transitions de réversibilité et d'écoulement. De ce fait, cette partie nous permet d'introduire différents concepts comme les dynamiques d'avalanche ou la notion d'hyperuniformité qui nous seront utiles pour caractériser ces transitions d'intérêt. Pour ce faire, nous commencerons tout d'abord par donner les conditions d'appartenance à la classe CDP et les modèles minimaux qu'elle représente. Ensuite, nous introduirons la transition de dépiégeage comme représentante incontournable de cette classe en présentant la riche phénoménologie qui lui est associée. Par correspondance, nous montrerons alors comment la physique de la transition de dépiégeage se retrouve dans les autres modèles théoriques de type CDP. Cela nous permettra de montrer toute la complexité présente dans cette classe d'universalité que l'on retrouvera en partie lors de l'étude des transitions de réversibilité et d'écoulement.

### 1.3.1 Conditions d'appartenance

La classe CDP se démarque de la classe DP par la présence d'un couplage de la dynamique de l'activité à une quantité conservée et d'un nombre infini d'états absorbants. À la façon de la conjecture proposée dans le cas de la classe DP, Rossi et al. [25] en ont définie

une dans le cadre de la classe CDP : tout système stochastique présentant un nombre infini d'états absorbants dans lequel l'activité est couplée à un champ conservé non-diffusif appartient à la classe CDP. À cette conjecture s'ajoute implicitement la condition d'interactions uniquement locales, comme formulé dans la conjecture de Grassberger pour la classe DP [24].

Pour comprendre les éléments de cette distinction, il est plus simple de passer directement par la présentation de modèles appartenant à cette classe d'universalité.

### 1.3.2 Modèles représentatifs

#### 1.3.2.1 Modèle Manna

Le modèle Manna [26] est un modèle emblématique de la classe CDP, si bien qu'il lui en donne parfois le nom (classe d'universalité Manna) [19]. Dans ce modèle,  $N$  particules sont disposées sur  $L^D$  sites d'un réseau  $D$ -dimensionnel, chacun de ces sites pouvant accueillir un nombre arbitraire  $n$  de particules. De manière générale, ces particules peuvent aussi bien représenter des grains de sable que des paquets d'énergie. La règle dynamique d'un pas de temps à l'autre de l'évolution est alors la suivante : chaque site du réseau accueillant plus de  $m$  particules les redistribue aléatoirement aux sites voisins (voir figure 1.9). Ces sites redistribuant la masse qu'ils supportent sont considérés comme actifs.

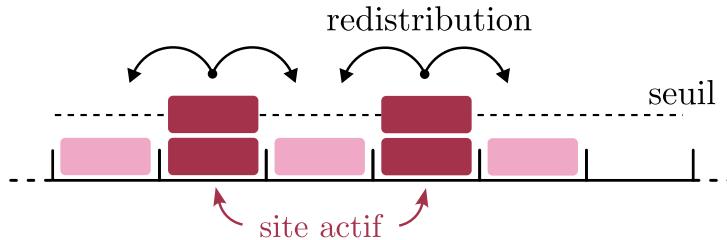


FIGURE 1.9 – Représentation schématique de la dynamique du modèle Manna en 1D. Ici le seuil est fixé à  $m = 2$ .

Sous cette action, les sites sur lesquels a été redistribuée la masse sont susceptibles de dépasser le seuil local  $m$  et de devenir actifs à leur tour, menant à une propagation de l'activité dans le système. Ce système présente alors une transition de phase absorbante bien étudiée, dont la densité d'agents  $\phi = N/L^D$  est le paramètre de contrôle et dont l'activité  $A$  correspond à la proportion de sites actifs du réseau. Pour  $\phi > \phi_c$ , le système évolue d'un pas de temps à l'autre à travers des configurations avec toujours un excès de particules sur certains sites et donc des redistributions de masse ( $A > 0$ ). Cependant, pour  $\phi < \phi_c$ , le système finit par tomber à temps long dans un état où tous les sites sont inactifs et donc d'activité nulle  $A = 0$ . Un tel état est un état absorbant puisque dès lors qu'aucune redistribution n'a lieu, aucun site ne peut devenir actif.

Dans les modèles épidémiques et de feux de forêts présentés précédemment, il existe un unique état absorbant (toute la population est guérie ou toute la forêt est éteinte). Dans le modèle Manna, il en existe plusieurs. En effet, tout état où tous les sites vérifient

$n < m$  sont des états absorbants de la dynamique. Dans la limite thermodynamique  $L \rightarrow \infty$ , il y en a une infinité. Cela remplit donc la première condition de la conjecture de Rossi et al. [25]. Par ailleurs, la dynamique d'activité des sites du réseau est couplée à la dynamique des  $N$  particules, dont le nombre est conservé à chaque instant. Ces  $N$  particules constituent un champ de densité  $\rho(\mathbf{r}, t)$  de valeur intégrale constante (donc dit conservé) et évoluant uniquement sous l'action de l'activité (donc dit non-diffusif). Cela remplit donc la seconde condition de la conjecture, faisant du modèle Manna un représentant de la classe CDP.

### 1.3.2.2 Random Organization model

Un second modèle respectant la conjecture de Rossi et al. [25] et appartenant à la classe CDP est le Random Organization Model (ROM) [6, 27]. Le ROM est très proche du modèle Manna dans son principe et sa dynamique, à la différence que celle-ci a lieu dans un espace continu.

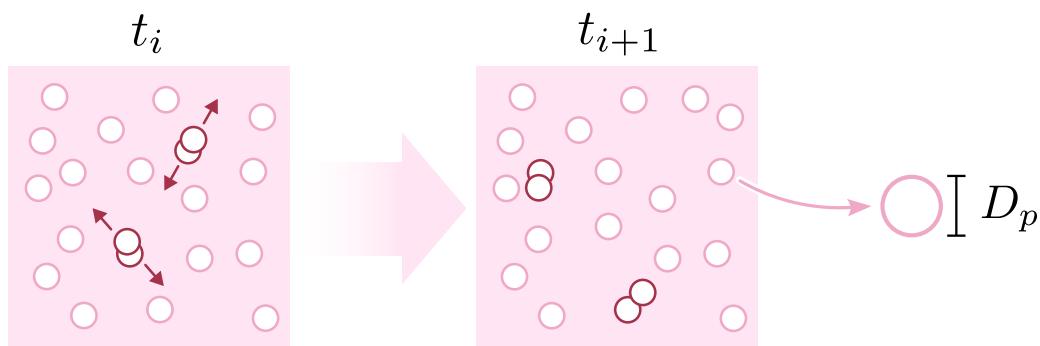


FIGURE 1.10 – Représentation schématique de la dynamique du ROM en 2D.

Dans le cadre de ce modèle,  $N$  particules sphériques de diamètre  $D_p$  sont positionnées dans un espace de  $D$  dimensions et d'extension spatiale  $L$ . Chacune de ces  $N$  particules peut alors prendre deux états à chaque pas de temps : si la particule se recouvre avec une autre particule elle est active, sinon elle est passive. Lorsqu'une particule est active, celle-ci est soumise à un déplacement d'amplitude aléatoire, modifiant sa position dans l'espace continu. Ce déplacement représente alors la possibilité d'un recouvrement avec une nouvelle particule, menant à une potentielle propagation de l'activité dans le système. Cette dynamique présente une transition de phase absorbante dont le paramètre d'ordre est la fraction volumique  $\phi$  de particules dans le système et dont l'activité  $A$  correspond à la proportion de particules actives. Pour  $\phi > \phi_c$ , le système traverse des configurations où il existe toujours au moins un recouvrement entre particules ( $A > 0$ ). Cependant, pour  $\phi < \phi_c$ , le système finit par tomber dans une configuration où toutes les particules sont suffisamment éloignées pour qu'aucunes ne se recouvrent ( $A = 0$ ). Une telle configuration est un état absorbant puisque sans le déplacement d'une particule active, aucune particule passive ne peut le devenir.

Comme dans le cas du modèle Manna, le ROM possède un nombre infini d'états absorbants. En effet, chaque ensemble de position des particules  $\{\mathbf{r}_i\}_{i < N}$  vérifiant  $|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j| < D_p$

pour tout  $i \neq j$  est un état absorbant. Les positions étant continues, il y en a une infinité (et pas seulement dans la limite thermodynamique). Le ROM vérifie donc la première condition de la conjecture de Rossi et al. [25]. Par ailleurs, de la même manière que dans le modèle Manna, ce modèle fait intervenir la dynamique non-diffusive de  $N$  particules dont le nombre est conservé à chaque instant, vérifiant de ce fait la seconde condition de la conjecture. La seule différence ici est que l'activité est aussi représentée par les particules (actives) et non l'espace (comme c'est le cas dans le modèle Manna via la notion de sites actifs). Ce modèle est donc aussi un représentant de la classe CDP.

Par définition d'une classe d'universalité le modèle Manna et le ROM sont donc caractérisés par la même théorie sous-jacente, associée à un ensemble cohérent d'exposants critiques.

### 1.3.3 Comportement critique

Du point de vue des processus de réaction-diffusion, les modèles appartenant à la classe CDP peuvent être ramenés à un processus à deux espèces [28–30] (contrairement à la classe DP qui n'en fait intervenir qu'une) :



avec l'espèce  $A$  diffusant avec un coefficient de diffusion  $D_A$  et l'espèce  $B$  diffusant avec un coefficient de diffusion  $D_B$ . Ces deux processus conservent alors le nombre total  $N = N_A + N_B$  de particules, comme c'est le cas dans le modèle Manna et le ROM. Via ce formalisme, il est possible de définir une théorie de champ décrivant cette dynamique proche de celle de DP [31, 32] :

$$\begin{aligned} \partial_t A(\mathbf{r}, t) &= (\omega\rho(\mathbf{r}, t) - r)A(\mathbf{r}, t) - uA^2(\mathbf{r}, t) + \kappa\nabla^2 A(\mathbf{r}, t) + \sigma\sqrt{A(\mathbf{r}, t)}\eta(\mathbf{r}, t) \\ \partial_t \rho(\mathbf{r}, t) &= \kappa\nabla^2 A(\mathbf{r}, t) \end{aligned} \quad (1.17)$$

avec  $\rho(\mathbf{r}, t)$  le champ conservé.

Via une analyse d'échelle similaire au cas DP, il est possible de montrer que la classe CDP admet des exposants de champ moyen identiques en-dessous de la même dimension critique supérieure  $D_c = 4$  [19, 32]. Ainsi, en champ moyen, les classes DP et CDP sont équivalentes. Pour  $D < D_c$  cependant, les mesures numériques sur les différents modèles représentant la classe CDP ont permis de la séparer de son homologue DP. En 2D, la valeur des exposants déterminés pour cette classe est reportée dans le tableau 1.1.

Comme on peut le remarquer, les exposants critiques caractérisant les deux transitions sont en fait très similaires, avec un écart relatif de seulement quelques pourcents. Cette grande proximité a rendu compliquée la séparation de ces deux classes, qui a alors été un sujet de débats. Toutefois, les techniques numériques actuelles et des arguments analytiques basés sur les techniques du groupe de renormalisation permettent aujourd'hui d'affirmer que ces deux criticalités sont bien distinctes.

### 1.3.4 Classe CDP et transition de dépiégeage

En dehors des modèles de particules comme le modèle Manna ou le ROM, la classe CDP possède une forte représentation, notamment en matière molle, via la **transition de dépiégeage**. Dans cette sous-section, nous proposons de présenter succinctement la transition de dépiégeage. Pour ce faire, nous en donnerons d'abord une image générale dans le cadre théorique des variétés élastiques. Cela nous permettra d'en décrire la phénoménologie associée, notamment via la rugosité de l'interface et la dynamique d'avalanches. Nous ferons ensuite le parallèle entre transition de dépiégeage et la classe CDP en expliquant l'équivalence récemment mise en évidence entre ces deux objets.

#### 1.3.4.1 Phénoménologie de la transition de dépiégeage

##### Une transition de phase absorbante

Dans un cadre général, la transition de dépiégeage concerne le mouvement d'une variété élastique de  $D$  dimensions dans un milieu désordonné de  $D + n$  dimensions [33]. Au cours de celui-ci, deux phénomènes entrent en jeu. D'une part, l'élasticité de la variété tend à rapprocher localement chacun de ses points. D'autre part, le milieu désordonné agit sur chaque point de la variété en les piégeant localement, plus ou moins fortement. L'exemple le plus parlant est celui-ci d'une ligne élastique ( $D = 1$ ) se déplaçant sur une interface rugueuse ( $n = 1$ ), comme représenté à la figure 1.11-(a).

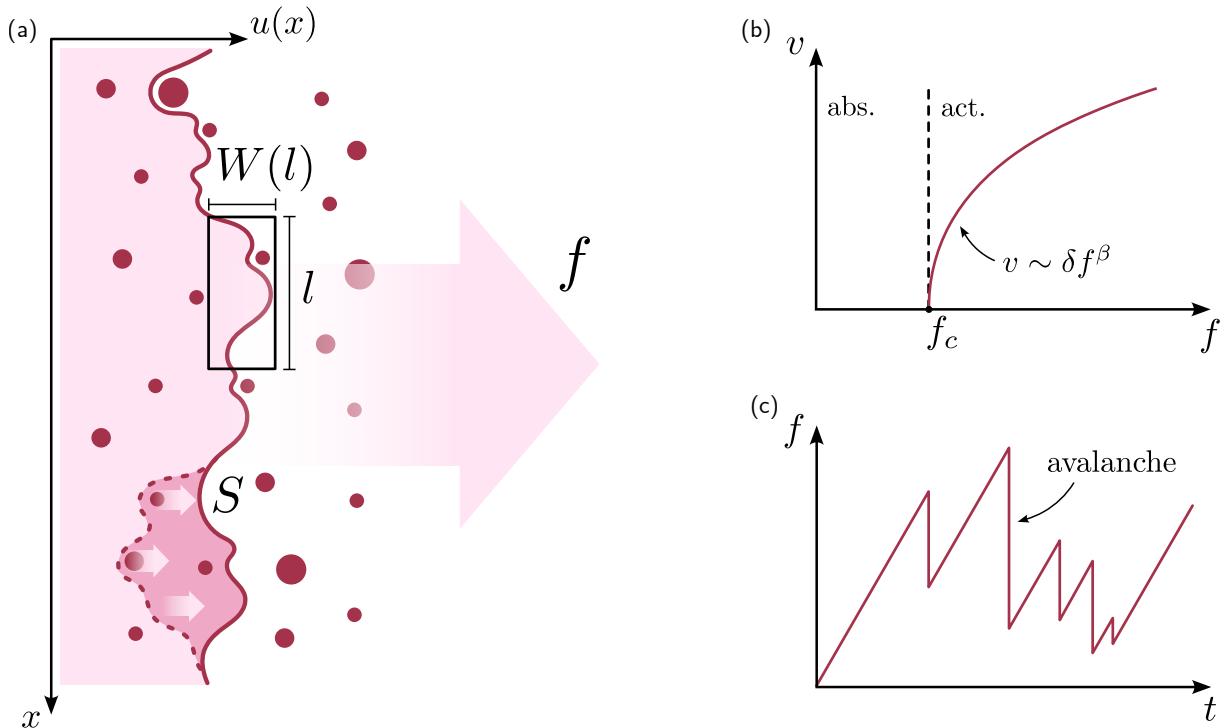


FIGURE 1.11 – (a) Représentation schématique de la dynamique à l'œuvre dans la transition de dépiégeage en 1D, i.e. dans le cas d'une ligne élastique. Les disques rouges représentent le substrat désordonné. (b) Evolution de la vitesse moyenne de l'interface en fonction de la force appliquée (c) Dynamique d'avalanche dans le cadre d'un processus de forçage-dissipation. Chaque chute de force globale représente une avalanche dans la ligne élastique.

Sous l'action d'une force extérieure  $f$ , matérialisée par une densité de force uniforme le long de la ligne, celle-ci peut se dépiéger localement de l'interaction avec le substrat et se déplacer jusqu'au prochain point de piégeage. Ce déplacement induit une nouvelle configuration de la ligne et modifie alors la force élastique à laquelle sont soumis les autres points. Si l'addition de cette nouvelle force élastique locale et de la force extérieure est suffisamment grande, un autre point de la ligne peut se dépiéger et avancer. Cela constitue un mécanisme de propagation du dépiégeage. Il y a alors deux cas possibles en regard du comportement global de la ligne. Pour une force extérieure suffisamment grande  $f > f_c$ , le système se dépiège localement en permanence, amenant dans l'état stationnaire à une vitesse moyenne de déplacement de l'interface non-nulle  $v > 0$ . Cependant, pour une force extérieure trop faible  $f < f_c$ , le système finit par tomber dans un état totalement piégé : localement l'addition de la force extérieure et de la force élastique ne permet pas de contrer la force de piégeage exercée par le substrat.

Cette transition, entre un état mobile et un état piégé, est ce qu'on appelle la transition de dépiégeage. Comme la lectrice l'aura sûrement déjà compris, cette transition peut être abordée comme une transition de phase absorbante dont le paramètre de contrôle est la force extérieure  $f$  et dont l'activité correspond à la vitesse de l'interface  $v$  (localement, un point de l'interface est actif s'il se déplace).

Dans la suite de cette partie, nous présentons deux caractéristiques incontournables de la criticalité associée à la transition de dépiégeage : la rugosité de l'interface et la dynamique d'avalanches.

## Rugosité

La compétition complexe entre force de rappel élastique qui tend à aplatisir l'interface et force de piégeage qui tend à déformer l'interface rend la structure de cette dernière non-triviale : proche de la transition, elle acquiert une certaine rugosité [33, 34]. La rugosité d'une interface est définie via la largeur  $W$  balayée par une portion d'extension  $l$  de cette interface (voir [figure 1.11-\(a\)](#)). Proche de la transition,  $W$  varie algébriquement avec  $l$  selon :

$$W(l) \sim l^\eta \quad (1.18)$$

$\eta$  définissant l'exposant de rugosité, un exposant universel au même titre qu'un autre exposant critique. En définissant  $u(x)$  la position de l'interface, cette évolution algébrique se retrouve de manière équivalente dans les fluctuations de cette position. En effet, on a directement :

$$W^2(l) = \overline{\langle (u(\mathbf{r}) - \langle u(\mathbf{r}) \rangle)^2 \rangle} \sim l^{2\eta} \quad (1.19)$$

où  $\langle \cdot \rangle$  désigne la moyenne spatiale sur la portion d'extension  $l$  et  $\overline{\cdot}$  la moyenne sur les réalisations du désordre. Dans l'espace de Fourier, cette propriété se retrouve dans le facteur de structure  $S$  :

$$S(\mathbf{q}) = \overline{\hat{u}(\mathbf{q}) \hat{u}(-\mathbf{q})} \sim q^{-(D+2\eta)} \quad (1.20)$$

## Avalanches

En partant d'une configuration piégée de la ligne élastique et en augmentant lentement la force extérieure  $f$  tout en gardant  $f < f_c$ , la ligne finit par se dépiéger localement, et une portion de celle-ci se déplace avant de se retrouver bloquée à nouveau. Ce saut d'un état absorbant à un autre est ce qu'on appelle une avalanche. Ces objets sont définis par leur taille  $S$ , correspondant au déplacement moyen de la ligne lors de l'évènement, et leur durée  $T$ . Proche du point critique  $f = f_c$ , ces caractéristiques sont distribuées algébriquement selon [34–38] :

$$P_S(S) \sim S^{-\tau} g_S \left( \frac{S}{S_c} \right), \quad P_T(T) \sim T^{-\tau'} g_S \left( \frac{T}{T_c} \right) \quad (1.21)$$

avec  $g_S(x)$  et  $g_T(x)$  constantes pour  $x \ll 1$  et à décroissance rapide pour  $x > 1$ ,  $\tau$  et  $\tau'$  définissant des exposants d'avalanche universels. Ces deux quantités peuvent être reliées à l'extension spatiale  $l$  de l'avalanche par deux nouveaux exposants critiques :

$$S \sim l^{d_f}, \quad T \sim l^z \quad (1.22)$$

avec  $d_f$  la dimension fractale des avalanches et  $z$  l'exposant dynamique. Ces deux exposants sont reliés à deux autres exposants présentés précédemment par les relations d'échelle :

$$d_f = D + \eta, \quad z = \frac{\nu_{\parallel}}{\nu_{\perp}} \quad (1.23)$$

Pour  $f > f_c$ , la dynamique se prolonge indéfiniment et il est donc complexe de séparer les différentes avalanches. Pour analyser les avalanches au-dessus de la force critique il est alors d'usage de procéder d'une manière un peu différente : en plus du mécanisme de forçage, un mécanisme de dissipation est ajouté. Cette fois, en parallèle de l'augmentation constante de  $f$ , la force extérieure suit une diminution instantanément proportionnelle à l'activité globale dans le système [34, 39]. Lorsque l'augmentation de  $f$  est suffisamment lente, une séparation d'échelle se crée entre le forçage et la relaxation du système d'un état piégé à un autre. Les événements de relaxation ainsi désignés sont associés aux avalanches au-dessus du seuil (voir figure 1.11-(c)). De la même façon, il est possible d'en caractériser la statistique via la taille et la durée des événements. Sous ces conditions, le système évolue naturellement vers le point critique  $f = f_c$ . On parle alors de criticalité auto-organisée (SOC) [19, 40, 41]. Dans ce cadre, les cut-offs des distributions ne dépendent que de l'extension spatiale  $L$  du système selon :

$$S_c \sim L^{d_f}, \quad T_c \sim L^z \quad (1.24)$$

### 1.3.4.2 Mapping avec la classe CDP

L'intérêt de présenter la transition de dépiégeage dans le cadre de notre travail est que toute la richesse de ce phénomène longuement étudié se retrouve dans les modèles appartenant à la classe CDP. En effet, nous montrons dans cette partie que la transition de dépiégeage peut être directement mise en équivalence avec l'universalité de la percolation dirigée conservée.

La transition de dépiégeage peut être modélisée simplement par une équation du mouvement continu sur la ligne. Dans le cas où l'élasticité de la ligne est à courte portée, celle-ci prend la forme suivante [33, 34] :

$$\partial_t u(x, t) = (\nabla^2 - m^2)u(x, t) + F(x, u(x, t)) + f(x, t), \quad F(x, u) = -\partial_u V(x, u) \quad (1.25)$$

avec  $u$  la position de l'interface,  $f$  la force extérieure et  $F$  la force aléatoire de piégeage, dérivant d'un potentiel  $V$ . Dans la limite  $m = 0$ , celle-ci correspond à l'équation de quenched-Edward-Wilkinson [42]. Le terme  $\nabla^2 u(x, t)$  représente la force élastique de courte portée le long de la ligne. De manière générale, nous pouvons écrire ce terme via la formulation  $(G * u)(x, t)$  désignant la convolution du champ de déplacement avec un propagateur de redistribution élastique  $G$ . Ceci peut s'avérer utile dans le cas de la généralisation aux interactions à longue portée, discutées dans la suite de cet ouvrage.

Par cette formulation, il a été possible de faire une équivalence entre l'[équation 1.25](#) et l'[équation 1.17](#), associant alors directement la transition de dépiégeage à la classe d'universalité CDP [32, 43]. Dans ce cadre, le champ d'activité  $A$  correspond naturellement au champ de vitesse de l'interface  $\partial_t u$ . La correspondance moins évidente que montre cette équivalence est celle entre la densité de particules  $\rho(x, t)$  dans la théorie CDP et la force de rappel élastique dans le cadre théorique du dépiégeage :

$$\rho(x, t) - \rho_0 \sim \nabla^2 u(x, t) \quad (1.26)$$

où  $\rho_0$  représente la densité moyenne de particules. Cette correspondance permet de faire un lien entre les deux mécanismes de propagation de l'activité. Dans un modèle de particules comme le modèle Manna, l'activité induit une redistribution de la masse (représentée par  $\rho(x, t)$ ), susceptible de générer de l'activité par surcharge de nouveaux sites. De manière équivalente, dans le cas du dépiégeage, l'activité induit une redistribution de la force élastique susceptible de générer de l'activité par traction suffisante de nouveaux points de la ligne.

L'étude de la transition de dépiégeage via sa théorie continue a été réalisée de manière extensive, numériquement mais aussi analytiquement via la mise en place d'outils du groupe de renormalisation fonctionnel. Cette équivalence permet alors de transposer tous les résultats obtenus à la théorie CDP, comme la valeur des exposants critiques associés. De plus, ce mapping permet de faire le lien entre les différentes propriétés de la transition de dépiégeage et celles des modèles de particules, notamment celles de rugosité et de dynamique d'avalanches. Dans la suite de cette section, nous proposons d'expliquer l'équivalent de ces propriétés dans les modèles de particules puisque ces notions nous seront utiles dans la suite de cette ouvrage.

### 1.3.5 Avalanches

De la même manière que dans la transition de dépiégeage, il est possible d'observer des avalanches dans les modèles de particules appartenant à la classe CDP [44, 45]. La façon la plus courante de les étudier est, comme dans le cas du dépiégeage, d'ajouter au

modèle une composante de forçage et de dissipation [19]. Prenons l'exemple du modèle Manna. Dans ce cas, le forçage correspond à l'augmentation progressive de la densité de particules, via l'ajout aléatoire à un taux  $\kappa$  de particules dans le système. La dissipation correspond, elle, à une disparition des particules sur les sites actifs à un taux  $\tau$ . Dans la limite  $\kappa/\tau \ll 1$ , la séparation d'échelle entre le forçage et la dissipation fait place à un phénomène d'avalanche : le système saute d'un état inactif à un autre, via des impulsions d'activité. Via ce processus, le système oscille naturellement autour de sa densité critique  $\phi_c$ .

De la même manière que dans la transition de dépiégeage, ces avalanches peuvent être caractérisées via leur taille et leur durée et les exposants critiques  $\tau$ ,  $\tau'$ ,  $d_f$  et  $z$  qu'elles définissent. Ces deux transitions étant équivalentes, elles partagent les mêmes valeurs de ces exposants. Dans le cas des modèles de particules, la taille d'une avalanche correspond à la quantité d'activations générées lors de la relaxation  $S = \int_0^T dt A(t)$ .

Dans le cadre de la classe CDP, il est possible de relier les exposants d'avalanches aux exposants critiques dynamiques [19, 46], reliant sans équivoque la dynamique critique à densité imposée à celle sous le mécanisme de forçage-dissipation. Ainsi, l'étude des avalanches revient à étudier la dynamique de la transition d'un point de vue différent de celui présenté à la [sous-sous-section 1.2.2.3](#).

### 1.3.6 Hyperuniformité

#### Fluctuations de position, fluctuations de densité

La rugosité est une propriété propre aux interfaces. Il n'est donc pas direct de voir comment son aspect critique se transpose aux modèles de particules. En fait, l'équivalence soulignée dans l'[équation 1.26](#) reliant la densité de particules  $\rho$  à la position de l'interface  $u$  permet de faire le lien entre fluctuations de position et fluctuations de densité :

$$\overline{(\langle \rho(\mathbf{r}) - \langle \rho(\mathbf{r}) \rangle \rangle)^2} \rightarrow \overline{((\nabla^2 u(\mathbf{r}) - \langle \nabla^2 u(\mathbf{r}) \rangle)^2)} \sim l^{2(\eta-2)} \quad (1.27)$$

avec  $l$  l'extension spatiale du domaine considéré pour la mesure des fluctuations. Un exposant de rugosité  $\eta$  non trivial implique donc des fluctuations de densité non **triviale** dans les modèles de particules appartenant à la classe CDP. Dans une certaine limite, cette propriété correspond à une hyperuniformité de la répartition de masse dans le système. Pour le comprendre, nous introduisons **brèvement** ce qu'est l'hyperuniformité dans un cadre général.

#### Répartition de masse et hyperuniformité

La répartition d'un ensemble de points dans l'espace peut prendre différentes formes, associées à différents types de corrélations. Celle-ci peut aller de la structure cristalline infiniment corrélée au cas aléatoire totalement décorrélé. Une manière de quantifier cela est d'étudier comment évoluent les fluctuations de densité à différentes échelles du système.

Dans le cas d'une répartition poissonienne totalement décorrélée (voir figure 1.12-(b)), la variance  $\langle \delta n^2 \rangle$  du nombre de particule  $n$  dans un échantillon évolue proportionnellement à son extension spatiale  $l^D$ . Considérant des répartitions uniformes, on a par ailleurs  $\langle n \rangle \sim l^D$ . Ainsi dans ce cas décorrélé on a :

$$\langle \delta n^2 \rangle_l \sim \langle n \rangle_l \quad (1.28)$$

Dans le cas d'un ordre parfaitement cristallin (voir figure 1.12-(a)), la variance  $\langle \delta n^2 \rangle$  évolue proportionnellement au périmètre de la zone considérée<sup>2</sup>, lui-même évoluant comme  $l^{D-1}$ . Ainsi, on aura :

$$\langle \delta n^2 \rangle_l \sim \langle n \rangle_l^{1-1/D} \quad (1.29)$$

Une évolution non-linéaire de  $\langle \delta n^2 \rangle$  avec  $\langle n \rangle$  indique la présence de corrélations de la répartition de la densité dans le système. Si le cas cristallin est le plus extrême, il existe un continuum de répartitions caractérisées par  $\langle \delta n^2 \rangle_l \sim \langle n \rangle_l^\sigma$ , indiquant la présence de corrélations intermédiaires. Dès lors que  $\langle \delta n^2 \rangle$  croît moins rapidement que  $\langle n \rangle$  (i.e.  $\sigma < 1$ ), on qualifie cette répartition d'hyperuniforme.

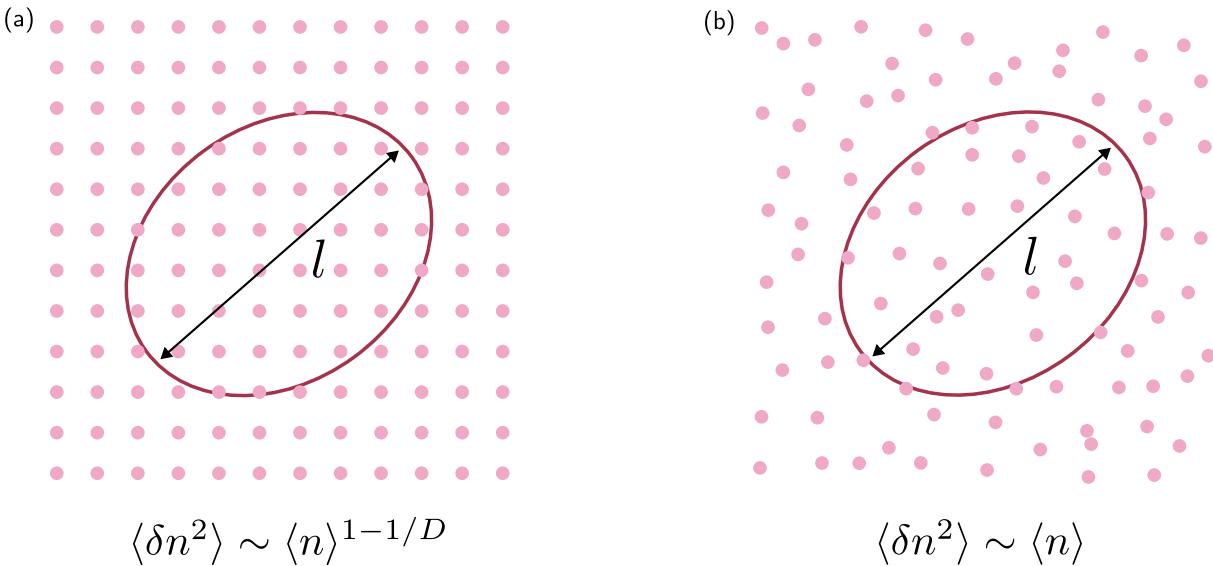


FIGURE 1.12 – Répartitions de masse dans le cas cristallin (a) et dans le cas poissonien (b), amenant à des lois d'échelle différentes entre  $\langle \delta n^2 \rangle$  et  $\langle n \rangle$

### Hyperuniformité dans les modèles de particules appartenant à la classe CDP

Dans un modèle de particules, il est possible d'associer trivialement les fluctuations de nombre de points/particules aux fluctuations de densité. Ainsi, via l'équation 1.27, les exposants  $\sigma$  et  $\eta$  sont en fait directement liés par la relation d'échelle :

$$\sigma = 2 + \frac{2\eta - 4}{D} \quad (1.30)$$

2. Ceci est valable tant que la forme du domaine n'est pas spécifiquement reliée au motif cristallin.

## 1.4. Comprendre les transitions de réversibilité et d'écoulement comme des transitions de phase absorbante

---

Un exposant d'hyperuniformité  $\eta < 1$  dans le modèle de dépiégeage correspond donc de manière équivalente à une répartition hyperuniforme de la masse dans les modèles de particules. Cette équivalence est validée par les mesures effectuées sur les modèles numériques. Par exemple, dans le cas du ROM en 2D, il a été mesuré  $\sigma \approx 0.775$  [47–49].

### 1.3.7 Conclusion de la section

En conclusion, la classe d'universalité CDP prétend à représenter tous les modèles présentant une transition de phase absorbante avec une infinité d'états absorbants et impliquant la dynamique d'un champ conservé. Cette classe tire deux représentations principales : les modèles de particules comme le modèle Manna ou le ROM et les modèles de dépiégeage. Les phénomènes apparentés à cette classe présentent une phénoménologie riche, caractérisée par des propriétés hyperuniformes et une dynamique d'avalanche critique. Via l'étude combiné des modèles de particules et de la transition de dépiégeage, le cadre CDP représente un objet d'étude bien balisé, regroupant prédictions théoriques et mesures numériques dans différentes dimensions. L'intérêt d'avoir présenté cette classe exhaustivement est qu'elle présente en fait un cadre de description proche des transitions qui motivent ce travail : la transition de réversibilité dans les suspensions cisaillées cycliquement et la transition vers l'écoulement des fluides à seuil. Les aspects spécifiques de la dynamique associée (avalanches, hyperuniformité, ...) se retrouveront donc dans notre étude de ces phénomènes.

## 1.4 Comprendre les transitions de réversibilité et d'écoulement comme des transitions de phase absorbante

Dans cette section, nous revenons sur les deux objets d'intérêt de notre travail : la transition de réversibilité dans les suspensions cisaillées cycliquement et la transition vers l'écoulement des fluides à seuil. Pour chacune d'elle, nous explicitons la dynamique sous-jacente à ces transitions et expliquons en quoi celle-ci correspond à celle d'une transition de phase absorbante. Puis, en se basant sur la conjecture de Rossi et al. [25], nous montrons que ces deux systèmes sont proches de ceux représentés par la classe CDP, seulement avec la présence additionnelle d'interactions à longue portée.

### 1.4.1 Transition de réversibilité

Dans la première partie de l'introduction, nous avions présenté la transition de réversibilité dans les suspensions cisaillées cycliquement comme séparant un état réversible, stroboscopiquement arrêté, d'un état irréversible, stroboscopiquement diffusif. Pour comprendre comment ce phénomène peut être appréhendé dans le cadre des transitions de phase absorbante, il est nécessaire de remarquer comment cette diffusion stroboscopique prend place.

### 1.4.1.1 La diffusion comme une succession d'interactions irréversibles

Dans la limite de bas Reynolds, les équations de Stokes qui gouvernent la dynamique de ce système sont réversibles dans le temps [50]. En d'autres termes, si lors de la première moitié d'un cycle une particule n'est déplacée que par les mouvements réversibles du fluide, alors lors de la seconde moitié de ce cycle, elle reviendra à sa place initiale. Toutefois, si au cours de cette première moitié de cycle la particule interagit irréversiblement avec une autre particule à courte portée, cette irréversibilité laissera une trace lors du mouvement retour du fluide. Dans ce cas, la particule ne revient pas à sa position d'origine. Dès lors, une dynamique collective se met en place : une particule qui a changé de position entre le début et la fin d'un cycle va suivre une nouvelle trajectoire, perturbant alors possiblement celle d'une autre particule par une interaction de contact irréversible. De ce fait, cette nouvelle particule change d'orbite et peut perturber l'orbite d'une autre particule à son tour. Ce faisant, ce mécanisme permet une propagation de l'irréversibilité dans le système, d'autant plus efficace que les orbites sont développées et donc l'amplitude de cisaillement globale grande.

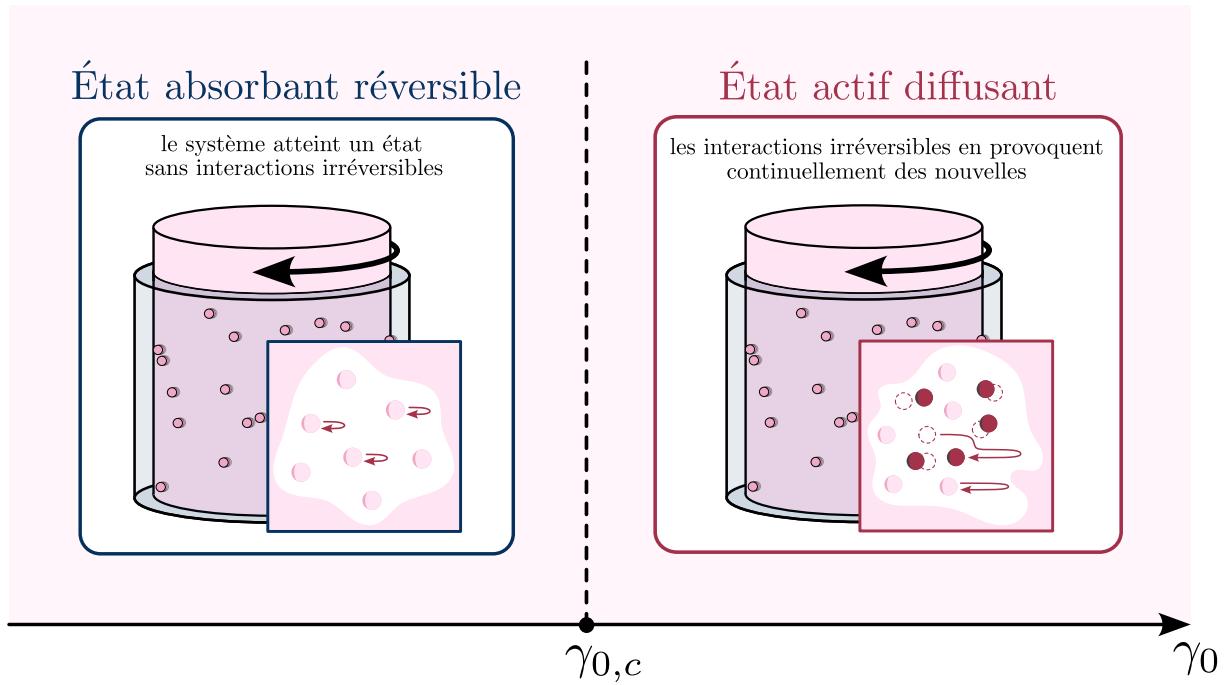


FIGURE 1.13 – Interprétation de la dynamique de la transition de réversibilité comme celle d'une transition de phase absorbante.

Il y a alors deux possibilités. Dans le premier cas, l'amplitude de cisaillement est suffisamment grande ( $\gamma_0 > \gamma_{0,c}$ ) et la propagation des interactions irréversibles perdure à temps long dans le système, amenant à un coefficient de diffusion stroboscopique non-nul  $D_0 > 0$ . Dans le second cas, l'amplitude de cisaillement globale est trop faible ( $\gamma_0 < \gamma_{0,c}$ ) et le système finit par tomber dans un état réversible où chaque particule suit une orbite stable isolée, amenant à un état stroboscopiquement arrêté  $D_0 = 0$ .

## 1.4. Comprendre les transitions de réversibilité et d'écoulement comme des transitions de phase absorbante

---

Comme illustré à la [figure 1.14](#), la transition de réversibilité peut donc être comprise comme une transition de phase absorbante dont le paramètre de contrôle est l'amplitude de cisaillement  $\gamma_0$  et le paramètre d'ordre le coefficient de diffusion stroboscopique  $D_0$ . Dans ce système, l'activité est donc directement associée aux déplacements irréversibles des particules, susceptibles de disparaître (via le repositionnement sur une nouvelle orbite stable) ou de se propager (via le repositionnement sur une orbite recoupant une orbite stable), de la même manière que l'activité dans les modèles présentés précédemment. De plus, l'état arrêté dans lequel toutes les particules sont sur une orbite stable est bien un état absorbant puisque la déstabilisation de l'orbite d'une particule ne peut se faire que par l'intersection avec une autre orbite. Ainsi, si toutes les orbites sont stables, elles le resteront pour toujours. Nous pouvons alors définir les mêmes exposants critiques que dans n'importe quelle autre transition de phase absorbante :

$$D_0 \sim \delta\gamma_0^\beta, \quad \langle \delta D_0^2 \rangle \sim \delta\gamma_0^{-\gamma'}, \quad \xi \sim \delta\gamma_0^{-\nu_\perp}, \quad \delta\gamma_0 = \frac{\gamma_0 - \gamma_{0,c}}{\gamma_{0,c}} \quad (1.31)$$

L'enjeu est alors de connaître la valeur de ces exposants caractérisant cette criticalité.

### 1.4.1.2 Similitudes avec la classe CDP

La classe d'universalité pressentie au premier abord pour la transition de réversibilité est la classe CDP. En effet, nous retrouvons ici un couplage de la propagation de l'activité à celle de la dynamique d'un champ conservé. De fait, les particules, vecteurs de cette propagation dans l'espace, constituent un champ de densité qui, par conservation du nombre de particules (système fermé) est lui-même conservé. De plus, ce système possède un nombre infini d'états absorbants. En effet, tout ensemble d'orbite stable, et il en existe une infinité en espace continu, est un état absorbant. Ainsi, les deux principaux critères de la conjecture de Rossi et al [25] sont respectés. On pourrait donc s'attendre à ce que l'universalité CDP représente cette transition.

Afin d'étudier la criticalité de ce système, une approche de modélisation numérique simple a été développée. Celle-ci se concentre uniquement sur la dynamique stroboscopique du système. Dans ce cadre, comme nous l'expliquerons plus en détail dans le [chapitre 3](#), le modèle numérique adéquat pour caractériser la transition correspond au ROM que nous avons présenté dans la section précédente. De ce fait, sous cet angle de modélisation, la transition de réversibilité appartient à la classe CDP. Ainsi, en 2D, elle est caractérisée par les exposants critiques  $\beta \approx 0.64$  et  $\gamma' \approx 0.37$ .

Toutefois, de notre point de vue, un mécanisme essentiel est perdu dans la simplification de cette modélisation : seules les interactions irréversibles de contact sont prises en compte dans la dynamique du système. Or, dans un système réel, les particules n'interagissent pas seulement par contact direct mais aussi indirectement via le fluide suspendant. Cette simplification est tout sauf anodine puisque, comme nous le discutons dans la partie suivante, la forme pressentie de ces interactions hydrodynamiques est à longue portée. Ceci suggère alors que leur prise en compte est susceptible de modifier significativement la criticalité du système.

### 1.4.1.3 Interactions visqueuses médiées par le fluide

Dans cette partie nous expliquons brièvement pourquoi nous pensons que le fluide suspendant permet la médiation d'interactions à longue portée entre les particules dans le cadre de la transition de réversibilité, quelque soit le dispositif expérimental considéré. Le raisonnement détaillé est présenté à la [sous-section 6.1.5](#), nous en présentons simplement ici les conclusions générales dans un souci de concision. Dans le cas de la transition de réversibilité, lorsqu'une particule interagi irréversiblement avec une autre particule au cours d'un cycle, elle quitte son orbite initiale en appliquant une certaine force sur le fluide. Cette force va alors modifier l'écoulement du fluide via les lois régissant sa dynamique et donc affecter le mouvement des particules environnantes. En milieu infini, dans la limite de champ lointain, la force  $\mathbf{F}^1$  appliquée en  $\mathbf{r}$  par une particule 1 ayant interagi irréversiblement induit une vitesse  $\mathbf{v}^2$  sur une particule 2 située en  $\mathbf{r}'$  via la relation linéaire :

$$v_i(\mathbf{r}') = G_{ij}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') F_j^1, \quad G_{ij}(\mathbf{r}) = \frac{1}{8\pi\eta r} \left( \delta_{ij} + \frac{r_i r_j}{r^2} \right) \quad (1.32)$$

avec  $G_{ij}$  le tenseur d'Oseen, fonction de Green des équations de Stokes. Cela définit donc une interaction hydrodynamique entre les deux particules décroissant comme  $\sim 1/r$  dans le milieu tridimensionnel infini, modélisation adéquate pour décrire le cisaillement de suspensions dans des dispositifs peu confinés.

En fait, en se basant sur les principes de conservation de la quantité de mouvement et/ou de la masse dans le système, nous pouvons montrer que dans la grande majorité des dispositifs expérimentaux pertinents pour l'étude de la transition, la forme de l'interaction reste la même, décrite par :

$$G_{ij}^\alpha(\mathbf{r}) \sim \frac{1}{r^\alpha} \left( \delta_{ij} + C \frac{r_i r_j}{r^2} \right) \quad (1.33)$$

avec  $\alpha$  un entier dépendant du dispositif [51]. Par exemple dans le cas d'un confinement quasi-2D entre deux plaques rigides nous obtenons  $\alpha = 2$ .

De manière toute à fait générale, le fluide suspendant permet donc de médier des interactions à longue portée entre les particules. Cette caractéristique n'est pas anodine puisque la conjecture de Rossi et al. [25] quant à l'appartenance à la classe CDP suppose implicitement la présence d'interactions à courte portée seulement. La présence d'interactions médiées par le fluide, a priori inévitable, constitue donc un mécanisme de la transition de réversibilité susceptible de rendre sa criticalité différente de celle de la classe CDP. Ce que nous montrons dans la partie suivante est que c'est aussi le cas de la transition vers l'écoulement.

### 1.4.2 Transition vers l'écoulement

En première partie de ce chapitre, nous avons présenté la transition vers l'écoulement des fluides à seuil comme séparant un état **coulant** d'un état élastique. Pour comprendre plus spécifiquement comment celle-ci peut être appréhendée comme une transition de phase

## 1.4. Comprendre les transitions de réversibilité et d'écoulement comme des transitions de phase absorbante

---

absorbante, il est important de comprendre comment l'écoulement prend place dans la phase active.

### 1.4.2.1 L'écoulement comme une succession de réarrangement

Prenons l'exemple d'un matériau amorphe, comme une mousse, soumis à un cisaillement simple. Lorsque l'on applique une certaine contrainte de cisaillement  $\Sigma$  à ce système, celle-ci se voit supportée par les différentes régions du matériau sous-forme de contrainte locale  $\sigma$ . Dans la limite où cette contrainte locale est suffisamment faible, la région associée la supporte en opérant une déformation élastique. Cependant, dès lors que cette contrainte locale dépasse un certain seuil  $\sigma_c$ , propre à chaque région, la région associée se déforme plastiquement et irréversiblement. Cette déformation plastique permet alors de relaxer la trop forte contrainte locale et, par conservation de la contrainte appliquée, de la redistribuer aux autres régions du matériau [10].

Dans le cas des mousses, les réarrangements plastiques permettant la relaxation de la contrainte locale prennent une forme bien spécifique : les événements dits T1 [11]. Au cours d'un tel évènement, un groupe de quatre bulles (correspondant à une région locale précédemment mentionnée) opère un changement topologique par changement de voisins. Ce processus géométrique de relaxation local de la contrainte est illustré à la figure 1.2-(a) via les images tirées de [7]. Ce type de réarrangement plastique caractéristique est retrouvé dans l'écoulement d'autres systèmes amorphes comme les émulsions ou les verres métalliques, seulement impliquant un plus grand nombre d'entités microscopiques [10].

En redistribuant la contrainte locale relaxée, une région se réarrangeant plastiquement est capable d'induire le dépassement du seuil de contrainte local dans une autre région du matériau. Celle-ci va alors à son tour se réarranger plastiquement, redistribuer son surplus de contrainte locale et déclencher de nouveaux évènements dans le système. Mises à la suite les unes des autres, ces déformations plastiques locales créent alors un écoulement plastique macroscopique global via une dynamique collective.

Il y a alors deux possibilités. Dans le premier cas, la contrainte globale appliquée au système  $\Sigma$  est trop faible ( $\Sigma < \Sigma_c$ ) et le système finit par tomber dans un état où toutes les régions du matériaux sont capables de soutenir la contrainte locale élastiquement ( $\sigma < \sigma_c$ ). Le matériau ne coule donc pas, on observe un taux de cisaillement nul  $\dot{\gamma} = 0$ . Dans le second cas, la contrainte globale est suffisamment grande ( $\Sigma > \Sigma_c$ ) pour que, à temps long, le système soit toujours traversé par des réarrangement plastiques locaux. Dans l'état stationnaire, le matériau s'écoule et on mesure un taux de cisaillement non-nul  $\dot{\gamma} > 0$ . Il est important de noter que la dynamique collective complexe à l'œuvre fait que la contrainte seuil globale  $\Sigma_c$  ne peut pas être trivialement déduite des contraintes seuil locales  $\sigma_c$ .

Comme illustré à la figure 1.14, la transition vers l'écoulement peut donc être comprise comme une transition de phase absorbante dont le paramètre de contrôle est la contrainte de cisaillement  $\Sigma$  et le paramètre d'ordre le taux de cisaillement  $\dot{\gamma}$ . Dans ce système, l'activité est donc directement associée à la déformation plastique locale du matériau

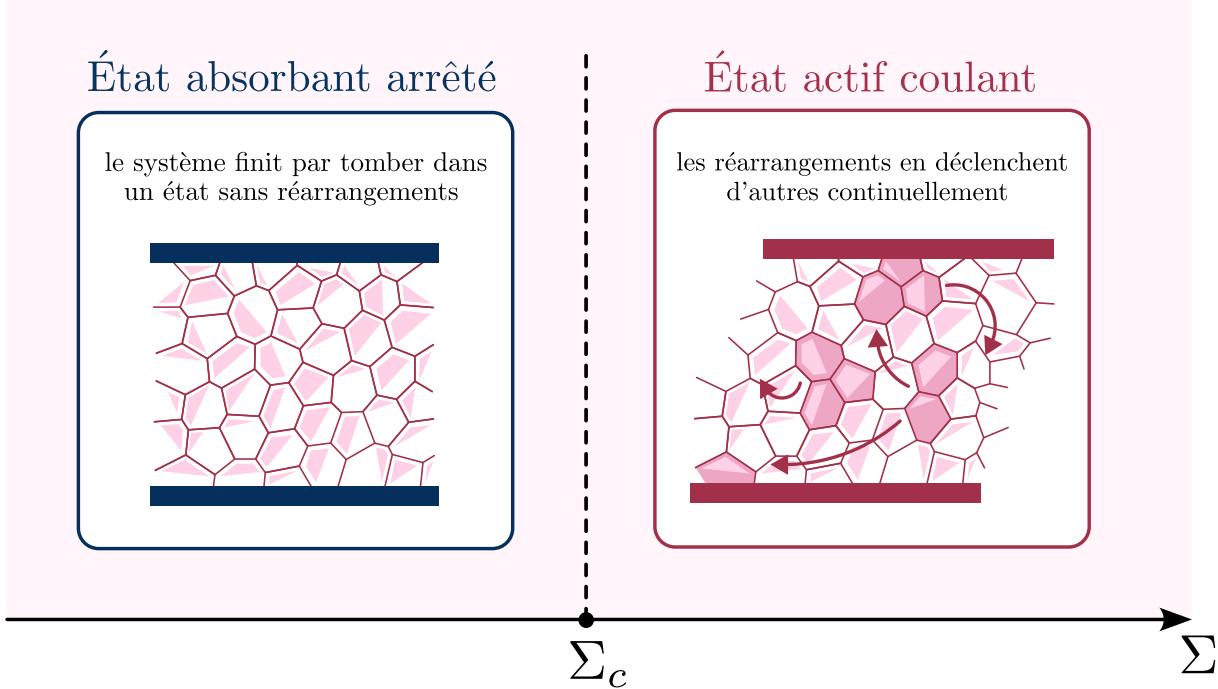


FIGURE 1.14 – Interprétation de la dynamique de l’écoulement des fluides à seuil comme celle d’une transition de phase absorbante.

qui est susceptible de s'estomper (via la relaxation de la contrainte locale) comme de se propager (via la redistribution de contrainte), de la même façon que dans les modèles précédemment évoqués dans ce chapitre. Par ailleurs, l'état arrêté représenté par  $\dot{\gamma} = 0$  est bien un état absorbant de la dynamique puisque, à  $\Sigma$  fixée, un réarrangement plastique ne peut être provoqué que par la redistribution de contrainte engendrée par un réarrangement précédent. De cette façon, on peut définir les mêmes exposants critiques que dans le cadre de n'importe quelle autre transition de phase absorbante :

$$\dot{\gamma} \sim \delta\Sigma^\beta, \quad \langle \Delta\dot{\gamma}^2 \rangle \sim \delta\Sigma^{-\gamma'}, \quad \xi \sim \delta\Sigma^{-\nu_\perp}, \quad \delta\Sigma = \frac{\Sigma - \Sigma_c}{\Sigma_c} \quad (1.34)$$

Il ne va pas sans remarquer que la phénoménologie décrite de la transition vers l’écoulement ressemble fortement à celle de la transition de dépiégeage. On peut en effet faire une analogie directe entre la contrainte globale de cisaillement  $\Sigma$  et la force extérieure  $f$  de la transition de dépiégeage, et entre le taux de cisaillement  $\dot{\gamma}$  et la vitesse de l’interface  $v$  dans la transition de dépiégeage. D’ailleurs, plusieurs études se sont concentrées sur la comparaison de ces deux phénomènes [52–54]. Dans cette optique, on pourrait s’attendre naturellement à ce que la transition vers l’écoulement soit aussi représentée par la classe CDP.

#### 1.4.2.2 Similitudes avec la classe CDP

La transition vers l’écoulement semble en effet réunir la plupart des conditions pour l’appartenance à l’universalité CDP. De fait, celle-ci présente une dynamique d’activité couplée à celle d’un champ conservé non-diffusif : le champ de contrainte locale. Par

## 1.4. Comprendre les transitions de réversibilité et d'écoulement comme des transitions de phase absorbante

ailleurs, cette transition possède une infinité d'états absorbants. En effet, n'importe quel état du système possédant un champ de contrainte local vérifiant  $\sigma < \sigma_c$  en tout point du matériau est un état absorbant. Les deux critères de la conjecture de Rossi et al. [25] sont donc bien vérifiés.

Cependant, comme pour la transition de réversibilité, la transition vers l'écoulement fait intervenir des interactions à longue portée, contredisant la condition de courte portée implicitement inscrite dans la conjecture de Rossi et al [25]. En effet, nous montrons dans la partie suivante que le milieu élastique dans lequel prennent place les réarrangements plastiques permet de redistribuer la contrainte relaxée à longue portée.

### 1.4.2.3 Interactions élastiques médiées par le solide

L'effet d'un réarrangement plastique sur le milieu peut être compris dans le cadre de l'élasticité linéaire. Dans cette partie, nous présentons les conclusions du raisonnement mené à la [sous-section 6.1.4](#), permettant de déterminer la modification de contrainte induite par un réarrangement plastique dans le système. Dans un matériau élastique isotrope et incompressible de module de cisaillement  $\mu$ , une déformation plastique représentée par le tenseur  $\epsilon_{ij}(\mathbf{r})$  entraîne une modification du tenseur des contraintes  $\sigma_{ij}(\mathbf{r})$  décrite par la relation linéaire :

$$\sigma_{ij}(\mathbf{r}) = \int d\mathbf{r}' G_{ijkl}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \epsilon_{kl}^{\text{pl}}(\mathbf{r}') \quad (1.35)$$

avec  $G$  un propagateur dont la forme générale est donnée en annexe.

Afin d'obtenir une expression de la modification du champ de contrainte suite à un réarrangement plastique, nous faisons l'hypothèse que celui-ci possède la même symétrie que le forçage, que nous prenons comme un cisaillement simple dans la direction  $\hat{\mathbf{e}}_x$ . En considérant l'événement comme ayant lieu en  $\mathbf{r}' = 0$ , on a alors en 2D :  $\epsilon_{xy}^{\text{pl}}(\mathbf{r}') = \epsilon_{yx}^{\text{pl}}(\mathbf{r}') = \epsilon^{\text{pl}} \delta(\mathbf{r}')$  et  $\epsilon_{xx}^{\text{pl}}(\mathbf{r}') = \epsilon_{yy}^{\text{pl}}(\mathbf{r}') = 0$ . Via cette modélisation, la modification de la contrainte locale de cisaillement<sup>3</sup> dans le matériau est donnée par :

$$\sigma_{xy}(\mathbf{r}) = \sigma_{yx}(\mathbf{r}) = 2\mu G(\mathbf{r}) \epsilon^{\text{pl}}, \quad G(\mathbf{r}) = \frac{\cos(4\theta)}{\pi r^2} \quad (1.36)$$

On appelle alors le propagateur  $G$  propagateur d'Eshelby<sup>4</sup>, dont la forme correspond à la modification de contrainte à l'issue d'un unique réarrangement plastique localisé. La redistribution de contrainte opérée lors d'un tel événement est donc effectivement à longue portée, décroissant comme  $\sim 1/r^2$  en 2D.

### Forme et observations expérimentales

Sur la [figure 1.15-\(a\)](#), nous représentons la redistribution de la contrainte de cisaillement locale suite à un réarrangement plastique. Comme on peut le remarquer, en plus d'être à

3. Des expressions similaires peuvent être obtenues pour les composantes  $\sigma_{xx}$  et  $\sigma_{yy}$  du tenseur des contraintes. Toutefois, on se concentrera ici seulement sur la contrainte locale de cisaillement  $\sigma_{xy}$ .

4. Sa dénomination revient à la personne l'ayant calculé en premier [55].

longue portée, la redistribution est fortement anisotrope. Plus particulièrement, le signe de celle-ci dépend de la direction considérée : la redistribution est positive dans les directions principales du cisaillement  $\hat{\mathbf{e}}_x$  et  $\hat{\mathbf{e}}_y$  et négative dans les directions intermédiaires. En d'autres termes, un réarrangement plastique d'une région dans le milieu élastique déstabilise aussi bien qu'il ne stabilise les autres régions. Par ce mécanisme, la plasticité dans le milieu favorise donc la propagation de l'activité en même temps qu'elle l'inhibe (une redistribution de contrainte négative défavorise le déclenchement d'un nouveau réarrangement plastique).

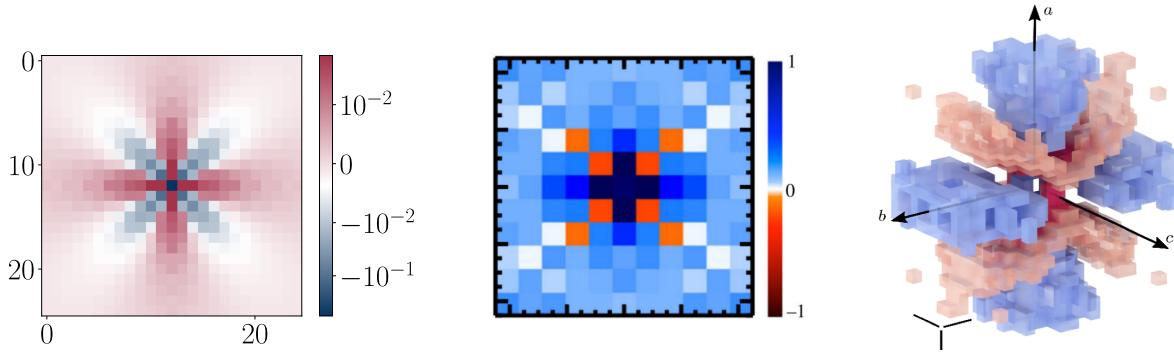


FIGURE 1.15 – Anisotropie de la redistribution de contrainte après un réarrangement plastique (les unités spécifiques n'ont pas d'importance). (a) représentation en 2D du propagateur d'Eshelby défini par l'équation 6.24. (b) Redistribution de contrainte suite à un réarrangement plastique mesurée dans [56]. (c) Idem dans [57], les zones rouges représentent des redistributions positives et les zones bleues des redistributions négatives.

La redistribution de la contrainte suite à un tel événement a été mesurée en conditions réelles dans différents systèmes, confirmant la forme prédite par la théorie continue [56–58]. Par exemple, dans [57], les auteurs ont mesuré la redistribution de contrainte dans une mousse après un événement T1 et ont pu mettre en évidence la forme quadrupolaire caractéristique du propagateur d'Eshelby. D'autre part, via des simulations de dynamique moléculaire, la topologie et la portée de l'interaction d'Eshelby s'est aussi vue confirmée dans différents systèmes [59–61]. Cette forme simple de l'interaction permet alors d'en-coder le mécanisme d'écoulement des fluides à seuil dans des modèles mésoscopiques que nous présenterons au chapitre 4.

De la même façon que dans le cas des suspensions, les dispositifs expérimentaux étudiés peuvent agir significativement sur la portée des interactions. Si l'on considère par exemple un écoulement quasi-2D entre deux plaques rigides, celui-ci implique une redistribution de contrainte suite à un événement plastique décroissant comme  $\sim 1/r^4$  à grande distance (voir sous-section 6.4.3). Ainsi, comme dans le cas des suspensions, le caractère de longue portée des interactions médiées est génériquement présent.

In fine, il semble donc aussi que la transition vers l'écoulement des fluides à seuil peut être comprise dans le cadre CDP avec la présence additionnelle d'interactions à longue portée.

## 1.5 Atypicité des transitions étudiées

D'après les éléments soulevés dans la section précédente, les transitions de réversibilité et d'écoulement semblent correspondre au cadre de description CDP en présence d'interactions à longue portée. Dans le cadre d'étude des transitions de phase continues, l'influence des interactions à longue portée sur le comportement critique peut être compris dans un cadre générique. Dans cette section, nous montrons via des mesures pré-existantes que les transitions que nous proposons d'étudier dans cet ouvrage ne peuvent en fait pas être rapportées à ce cadre. Nous proposons alors une explication à cette divergence via la nature des interactions qu'elles mettent en place. Celles-ci définissent en effet un mécanisme de propagation de l'activité original, échappant au cadre théorique habituel.

### 1.5.1 Incompatibilité avec le cadre générique de la longue portée

#### 1.5.1.1 Attendu générique de l'influence d'interactions à longue portée

Dans un système présentant des interactions à longue portée, décroissant comme  $\sim 1/r^\alpha$ , tous les agents microscopiques sont liés. Ce lien est d'autant plus fort que la portée de l'interaction est grande (i.e.  $\alpha$  petit). Dans la limite où cette portée est infinie, tous les agents interagissent de manière équivalente entre eux, détruisant ainsi la notion d'espace dans le système. De ce fait, son comportement équivaut à celui du champ moyen associé. À l'opposé de ce spectre, dans la limite où cette portée est infinitiment faible, l'interaction non-locale n'est significative que dans le voisinage direct de chaque agent. Ainsi, ce cas se rapporte à la présence d'interactions locales uniquement.

Cette phénoménologie trouve écho dans les phénomènes critiques. Lorsque l'on généralise l'interaction locale sous-jacente d'un phénomène critique au cas de longue portée, décrit par un exposant  $\alpha$ , le comportement critique présente deux cas limites. Dans la limite de grande portée, le comportement critique retrouvé est celui du champ moyen, décrit par des exposants critiques triviaux. À l'inverse, dans la limite de courte portée, les exposants critiques décrivant le système prennent leur valeur non-triviale de dimension finie. Dans un système présentant des interactions carcatérisées par un exposant  $\alpha$  arbitraire, on s'attendra donc à trouver une criticalité encadrée par son équivalent de courte portée et le champ moyen associé.



Par exemple, dans le cas de nos deux transitions d'intérêt, la classe a priori adéquate pour décrire le comportement à courte portée est la classe CDP. Ainsi, avec la présence additionnelle d'interactions à longue portée, on peut s'attendre à mesurer des exposants critiques compris entre ceux données par la criticalité CDP en dimension finie et ceux donnés par la criticalité CDP en champ moyen. D'après les valeurs connues de ces deux limites que nous avons répertoriées au tableau 1.1, on s'attendrait par exemple à mesurer en 2D un exposant  $\beta$  encadré comme  $0.64 < \beta < 1$  ou un exposant  $\gamma'$  encadré comme  $0 < \gamma' < 0.37$ .

Dans la partie suivante, nous montrons que les mesures réalisées précédemment sur des systèmes représentant ces transitions contredisent cette attente naturelle.

### 1.5.1.2 Contradiction des transitions de réversibilité et d'écoulement

#### Transition de réversibilité

Dans une étude menée par Mari et al [14], les auteurs ont proposé de pallier à l'absence des interactions hydrodynamiques dans les simulations numériques stroboscopiques pré-existantes. Pour ce faire, en reprenant le cadre de modélisation offert par le ROM, les auteurs ont explicitement intégré l'effet de ces interactions en les représentant par une diffusion effective des particules. Celle-ci est décrite par un coefficient de diffusion proportionnel au nombre de particules actives (i.e. subissant une interaction de contact irréversible à un instant  $t$ ) dans le système. Cela équivaut alors en quelques sortes à considérer les interactions médiées dans une approche de champ moyen, c'est-à-dire de portée infinie<sup>5</sup> ( $\alpha = 0$ ).

Ce faisant, les auteurs ont étudié le comportement critique du système en 2D et mesuré les exposants critiques  $\beta$  et  $\gamma'$  associés, trouvant les valeurs :

$$\beta \approx 1.85 \quad \gamma' \approx -1.2 \quad (1.37)$$

Ces valeurs sont alors en total contradiction avec l'effet attendu des interactions à longue portée sur la classe CDP, puisqu'elles ne sont pas encadrées par les limites de champ moyen et de courte portée associées. Notamment, elles décrivent une évolution convexe du paramètre d'ordre avec la distance au point critique ( $\beta > 1$ ), là où la criticalité CDP généralisée au cas d'interactions à longue portée décrit une évolution concave, voire linéaire ( $\beta = 1$ ). Même si l'implémentation de ces interactions peut être discutée (dans un système réel, nous avons montré que leur portée était caractérisée par  $\alpha > 0$ ), leur intégration dans le modèle semble exclure la transition de l'attendu générique.

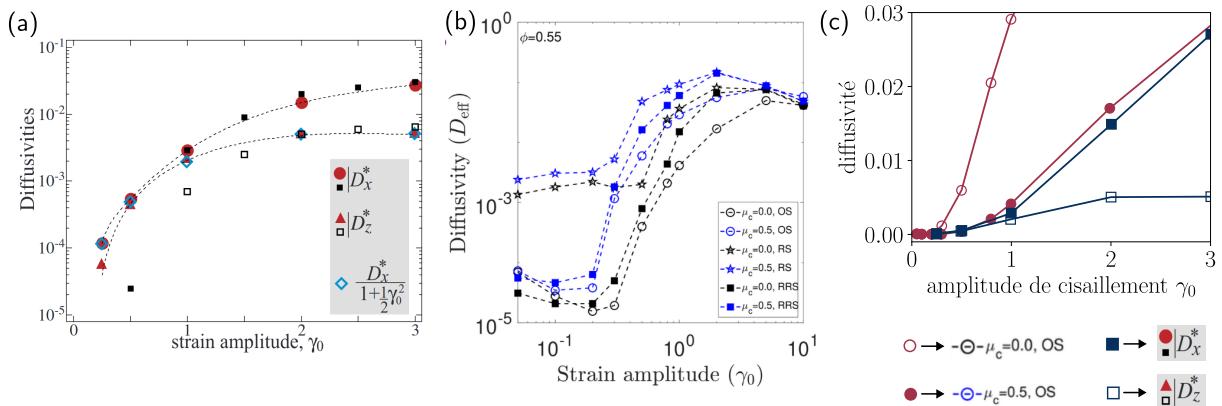


FIGURE 1.16 – Caractérisation de la transition de réversibilité dans les suspensions cisaillées cycliquement dans des études de dynamiques moléculaires. Évolution de la diffusivité stroboscopique avec l'amplitude de cisaillement dans l'étude [62] (a) et [63] (b). (c) Représentation lin-lin de certaines courbes tirées de (a) et (b), la légende spécifie lesquelles.

5. La philosophie derrière cette modélisation sera présentée plus en détail au chapitre 3.

Si l'on regarde du côté des expériences (voir [figure 1.1-\(b\)](#)) ou des simulations plus réalistes de dynamique moléculaire, les mesures proposées sur ces systèmes ne semblent par ailleurs pas vraiment contredire cette observation. En effet, sur la [figure 1.16-\(c\)](#) où nous avons reproduit les résultats des études [62, 63], il n'apparaît pas clairement que l'évolution du paramètre d'ordre soit concave et semble même convexe.

Ces éléments suggèrent alors que la transition de réversibilité pourrait ne pas être appréhendée via l'extension à longue portée de la classe CDP. Dans la sous-section suivante, nous montrons qu'il en est de même pour la transition vers l'écoulement.

### Transition vers l'écoulement

La criticalité de la transition vers l'écoulement a été déjà étudiée via des modèles mésoscopique numériques en deux dimensions que nous présenterons au [chapitre 4](#) [52, 64–66]. Dans les travaux associés, l'exposant  $\beta$  a été mesuré à plusieurs reprises comme  $\beta \approx 1.5$ , montrant ainsi à nouveau une évolution convexe du paramètre d'ordre avec la distance au point critique.

Ces mesures sont en accord qualitatif avec de nombreuses expériences réalisées sur les fluides à seuil. Dans ce domaine d'étude, il est d'usage de modéliser la courbe d'écoulement  $\dot{\gamma} = f(\Sigma)$  du système par la loi d'Herschel-Bulkley :

$$\Sigma = \Sigma_c + k\dot{\gamma}^n, \quad k > 0 \quad (1.38)$$

avec  $n$  l'exposant d'Hershel-Bulkley, directement associé à l'exposant  $\beta$  des phénomènes critiques via  $n = 1/\beta$ . De nombreux travaux, menés sur de nombreux systèmes amorphes, ont déterminé des exposants  $n < 1$  soit  $\beta > 1$ , soit une transition vers l'écoulement convexe, comme dans le cas des modèles mésoscopiques [10].

Ces éléments suggèrent donc que la transition vers l'écoulement, comme la transition de réversibilité, ne correspond pas à l'attente naturelle de l'extension à longue portée de la classe CDP. De ce point de vue, ces deux transitions présentent un point commun très fort, qui motive leur étude simultanée. Cette étude est en fait d'autant plus intéressante qu'un indice apparent semble par ailleurs rapprocher ces deux transitions tout en les éloignant de l'attendu naturel contredit : dans ces deux systèmes, les interactions à longue portée induisent un mécanisme de propagation de l'activité original.

## 1.5.2 Des interactions à longue portée de nature différente

### 1.5.2.1 La longue portée comme transport dans le cadre d'interprétation générique

En fait, comme nous le détaillerons dans le [chapitre 2](#), dans le cadre générique d'évolution de la criticalité CDP avec les interactions à longue portée, celles-ci sont représentées par un transport.

Dans le cadre des modèles de particules comme le modèle Manna ou le ROM, cela revient à considérer que les particules actives font des sauts  $\mathbf{r}'$  distribués selon  $P(\mathbf{r}') \sim 1/|\mathbf{r}'|^\alpha$ , et non plus uniquement dans leur voisinage direct. Dans cette approche, les interactions à longue portée représentent donc un transport de masse.

Dans le cas de la transition de dépiégeage, nous avons associé la redistribution de masse à la redistribution de force élastique. Ainsi, l'extension à longue portée de ce phénomène correspond dans ce cas à des interactions élastiques à longue portée. Le propagateur qui redistribue cette force élastique est alors le pendant direct de la distribution de probabilité des sauts dans les modèles de particules. On peut donc voir dans la transition de dépiégeage à longue portée un transport de la force élastique à longue portée. C'est en fait un cas d'étude qui a concentré de nombreux travaux car beaucoup de problèmes de dépiégeage présentent de l'élasticité à longue portée.

Ce que nous allons expliciter dans cette sous-section, c'est que les interactions à longue portée médiées par le milieu dans les transitions de réversibilité et d'écoulement ne peuvent pas vraiment être comprises comme un transport, ou en tous cas pas complètement.

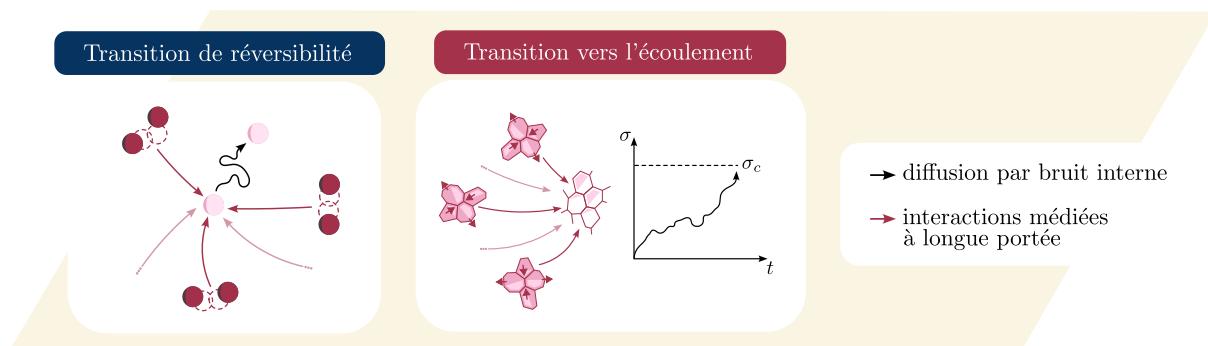


FIGURE 1.17 – Nouveaux mécanismes de création d'activité induits par les interactions à longue portée dans la transition de réversibilité et la transition vers l'écoulement. **TODO : Grossir écritures**

### 1.5.2.2 La longue portée comme source de diffusion dans les transitions de réversibilité et d'écoulement

#### Transition de réversibilité

Dans le cas de la transition de réversibilité, les interactions hydrodynamiques provoquent des petits déplacements des particules dans tout le milieu suite à un événement irréversible. Ainsi, ce n'est pas la particule à l'origine de l'interaction irréversible qui est transportée à longue portée, mais plutôt l'influence de l'activité sur les particules qui est à longue portée. Dans ce cas, la longue portée ne prend pas la forme d'un transport mais plutôt d'un bruit interne : chaque particule est soumise à des petits déplacements induits à longue portée par l'activité dans le système. Un nouveau mécanisme potentiel de création d'activité prend place : via l'influence de ce bruit interne, l'orbite stable associée à une particule passive peut se déformer progressivement jusqu'à rencontrer une autre orbite stable et ainsi créer un événement irréversible. En d'autres termes, la création d'activité

peut être approchée par une sorte de diffusion (et non plus par un déplacement fini issu d'un évènement irréversible précédent).

## Transition vers l'écoulement

Comme nous l'avons mentionné à la [sous-section 1.4.2](#), la transition vers l'écoulement est très proche de celle du dépiégeage. De la même façon que l'on peut voir la redistribution de force élastique dans le dépiégeage comme un transport, on peut appréhender une partie de la redistribution de contrainte dans la transition vers l'écoulement comme un transport. Lors du réarrangement plastique d'une région, la contrainte locale de celle-ci est relaxée et transmise aux autres régions du matériau. Toutefois, l'effet complet de la redistribution ne peut pas être appréhendé comme tel. En effet, comme nous l'avons mentionné à la [sous-section 1.4.2](#), le propagateur d'Eshelby est de signe alterné. Ainsi, à la différence du propagateur élastique associé au dépiégeage qui est toujours positif, il ne peut pas être le pendant direct de la distribution de probabilité associée au transport de masse dans les modèles de particules. À la place, la propriété de signe alterné montre qu'une partie de l'interaction peut être comprise comme un bruit mécanique, qui peut autant stabiliser que déstabiliser une région du matériau. Cette interprétation n'est d'ailleurs pas nouvelle dans le cadre de cette transition [65, 67]. Ainsi, en plus du mécanisme de transport qui tend à déstabiliser globalement le matériau, un mécanisme de diffusion des contraintes locales vers les contraintes seuils locales prend place (voir [figure 1.17](#)). De la même manière que dans la transition de réversibilité, on a donc un mécanisme de diffusion vers la création d'activité.

Finalement, dans ces deux transitions présentant un comportement critique [non-conventionnel](#), nous retrouvons un mécanisme de diffusion vers la création d'activité issu des interactions à longue portée. Nous pensons alors que c'est ce mécanisme qui permet d'expliquer les spécificités associées à la transition de réversibilité dans les suspensions cisaillées cycliquement et à la transition vers l'écoulement des fluides à seuil, en contradiction avec l'attente naturelle de l'effet d'interactions à longue portée sur un phénomène critique. À partir de ce point plusieurs questions se posent 

# 1.6 Problématisation

## 1.6.1 Questions guidant ce travail

### Quelle criticalité caractérise les transitions de réversibilité et d'écoulement ?

Le premier axe de recherche autour duquel s'articule ce travail correspond à la caractérisation des deux transitions. Nous nous demanderons notamment quelles sont les valeurs prises par les exposants critiques dans le cas d'interactions à longue portée réalistes, i.e. réalisables en conditions expérimentales. Plusieurs questions concernant cette caractérisation découlent de l'étude menée par Mari et al. [14] sur la transition de réversibilité avec portée infinie des interactions médiées par le milieu.

Nous nous demanderons d'abord si les spécificités non conventionnelles révélées par cette étude sont toujours présentes dans un système présentant une transition de réversibilité avec des interactions à portée finie ( $\alpha > 0$ ). Notamment, nous chercherons à savoir si la transition reste dans ce cas convexe ( $\beta > 1$ ) et avec des fluctuations qui s'annulent à l'approche du point critique ( $\gamma' < 0$ ). Par ailleurs, dans cette étude de portée infinie, la double non-conventionnalité  $\beta > \frac{1}{2}$  et  $\gamma' < 0$  avait été rationalisée par la relation d'hyperscaling  $2\beta + \gamma' = \nu_\perp D$ , qui justifie une valeur anormalement faible de  $\gamma'$  par une valeur anormalement grande de  $\beta$ . Les caractérisations précédentes de la transition vers l'écoulement révélant un exposant  $\beta > 1$ , nous nous demanderons alors si, vue comme une transition de phase absorbante, celle-ci présente aussi des fluctuations d'activité qui s'annulent à l'approche du point critique.

Mari et al. ont par ailleurs montré que la propriété d'hyperuniformité était effacée par l'ajout des interactions hydrodynamiques de portée infinie. Nous nous demanderons alors si cette perte d'hyperuniformité est aussi retrouvée dans les cas de portées réalistes de l'interaction. Par analogie, nous transposerons cette question dans le cas de la transition vers l'écoulement : le système présente-t-il une forme d'hyperuniformité en présence des interactions élastiques d'Eshelby à longue portée ?

Enfin, nous nous demanderons, sans attendu préalable, la forme prise par les dynamiques d'avalanches proche du point critique dans ces deux systèmes.

### Quelle est l'influence de la portée des interactions médiées sur la criticalité de ces systèmes ?

Dans le chapitre 2, nous présenterons plus en détail le cadre générique d'appréhension des interactions à longue portée dans un système appartenant à la classe CDP. Celui-ci montre en fait une évolution de la criticalité bien définie en fonction de la valeur de  $\alpha$ .

Or, nous avons montré que les transitions de réversibilité et d'écoulement ne semblent pas pouvoir être décrite dans ce cadre. Dès lors, le rôle de la longue portée des interactions dans ces systèmes n'est pas évident. Nous chercherons à comprendre de manière systématique l'influence de la portée sur les différents aspects de la criticalité de ces systèmes, i.e. à déterminer comment évoluent chacun des exposants critiques caractérisant l'état stationnaire du système, son hyperuniformité et sa dynamique d'avalanche en fonction de l'exposant de portée  $\alpha$ .

Nous chercherons alors à comparer ces évolutions avec celles initialement attendues, afin de comprendre dans quelle mesure cette nature différente des interactions rend le cadre d'appréhension usuel inadéquat.

### Peut-on comprendre ces systèmes similaires dans un cadre de description commun ?

Le troisième axe d'étude consiste à comprendre la transition de réversibilité et d'écoulement dans un cadre commun. Notamment nous nous interrogerons sur la possibilité d'une

description champ moyen permettant de rendre compte des observations faites sur les dynamiques en dimension finie, via la prise en compte du nouveau mécanisme de création proposé par les interactions médiées à longue portée. La mise en place de ce cadre pourrait alors aider à mettre en évidence les similarités et les différences éventuelles entre ces deux phénomènes. Aussi, nous nous interrogerons sur la possibilité d'une description continue, à la manière des équations de champ dans la théorie CDP et son extension à longue portée, pour décrire la dynamique de ces systèmes en toutes dimensions.

### 1.6.2 Déroulé du manuscrit

Pour répondre à toutes les questions révélées par ce chapitre, nous organiserons ce manuscrit comme suit :

Dans le [chapitre 2](#), nous caractériserons quantitativement le cadre générique d'appréhension de la longue portée en 2D pour pouvoir mener convenablement, par contraste, l'étude des transitions de réversibilité et d'écoulement dans les chapitres suivants. Pour ce faire, nous généraliserons les modèles Manna et ROM dans le cas d'un transport à longue portée et caractériserons l'évolution des exposants critiques et des propriétés d'hyperuniformité en fonction de la portée de la redistribution de masse.

Dans le [chapitre 3](#), nous nous concentrerons sur la transition de réversibilité dans les suspensions cisailées cycliquement. En généralisant le modèle numérique initialement proposé par Mari et al. [14], nous étudierons la criticalité du système associé à différentes portées des interactions hydrodynamiques. Cette caractérisation se fera via la détermination des exposants critiques et l'étude des propriétés d'hyperuniformité et des statistiques d'avalanches. Ensuite, nous proposerons un modèle champ moyen permettant de rendre compte des spécificités de la transition via la compréhension du mécanisme de diffusion induit par les interactions médiées à longue portée. Nous comparerons enfin les prédictions de ce modèle avec les résultats obtenus en dimension finie afin de mettre en évidence les sources de complexité dans la dynamique réelle.

Dans le [chapitre 4](#), nous nous concentrerons sur la transition vers l'écoulement des fluides à seuil. Nous proposerons tout d'abord une étude détaillée de la transition en présence d'interactions élastiques d'Eshelby, via l'utilisation d'un modèle mésoscopique numérique. Ensuite, nous mettrons en évidence deux ingrédients susceptibles d'expliquer les spécificités de la criticalité associée : celui déjà évoqué concernant la nature spécifique des interactions à longue portée, et une symétrie particulière retrouvée dans le propagateur de redistribution. Puis, nous procéderons à une généralisation de notre modèle pour étudier différentes portées d'interactions afin de comprendre l'influence de ces dernières sur le comportement critique. Encore une fois, cette caractérisation portera sur l'évolution des exposants critiques, des propriétés d'hyperuniformité et de la dynamique d'avalanches.

Enfin, dans un dernier chapitre, nous mettrons face à face les résultats obtenus dans les deux chapitres précédents. Cela nous permettra de tisser une analogie directe entre la transition de réversibilité dans les suspensions cisailées cycliquement et la transition vers l'écoulement des fluides à seuil. Nous discuterons alors de l'[application](#) du cadre théorique

présenté au [chapitre 3](#) dans le cadre de la transition de réversibilité à la transition vers l'écoulement. Cette analyse permettra de marquer les points communs et les différences entre les deux systèmes et d'en fournir une image compréhensive globale, montrant l'utilité d'une telle étude comparée. Pour terminer cette discussion, nous présenterons finalement les pistes explorées du point de vue d'une modélisation systématique de ces systèmes, via la formulation d'équations de champ. Les résultats préliminaires obtenus ouvriront la voie sur de nouvelles pistes de réflexion pour la continuation de ce projet.

# Chapitre 2

## Transport à longue portée dans la classe CDP

Dans le chapitre précédent, nous avons présenté la percolation dirigée conservée comme une classe d'universalité recouvrant potentiellement un grand nombre de transitions de phase absorbante. Un système appartenant à cette classe est décrit par un ensemble de comportements et d'exposants critiques caractéristiques de la criticalité associée. Par exemple, en notant  $\langle A \rangle$  l'activité moyenne dans le système,  $\langle \delta A^2 \rangle$  ses fluctuations,  $\xi$  la longueur de corrélation et  $\epsilon$  la distance au point critique, les exposants  $\beta$ ,  $\gamma'$  et  $\nu_\perp$  permettent de définir les évolutions suivantes proche de la transition :

$$\langle A \rangle \sim \epsilon^\beta, \quad \langle \delta A^2 \rangle \sim \epsilon^{-\gamma'}, \quad \xi \sim \epsilon^{-\nu_\perp} \quad (2.1)$$

Ces exposants sont connus exactement dans l'approximation de champ moyen avec  $\beta^{\text{CM}} = 1$ ,  $\gamma'^{\text{MF}} = 0$ ,  $\nu_\perp^{\text{CM}} = \frac{1}{2}$ . En dimension finie  $D < 4$  et en présence d'interactions à courte portée uniquement, les exposants critiques ont été mesurés numériquement [19] et calculés analytiquement via les méthodes du groupe de renormalisation fonctionnel appliquées à la transition de dépiégeage.

Comme nous l'avons mentionné au [chapitre 1](#), la présence d'interactions à longue portée dans les modèles représentant des phénomènes critiques permet en général de passer du comportement critique de dimension finie au comportement critique de champ moyen de la classe d'universalité associée. Dans ce chapitre, nous proposons de définir plus précisément ce cadre générique associé à l'universalité CDP. L'établissement de ce cadre est un objet central dans notre travail puisqu'il nous permettra, par contraste, d'interpréter le comportement atypique des transitions de réversibilité et d'écoulement dans les chapitres suivants.

Pour ce faire, nous commencerons par identifier ce cadre, que nous baptisons LR-CDP pour *long-range conserved directed percolation*, d'un point de vue théorique. S'appuyant sur des résultats pré-existants, cette première analyse permettra de définir l'évolution du comportement critique attendue avec la portée des interactions. Nous verrons par ailleurs que, dans ce cadre naturel d'extension de la théorie CDP, les interactions à longue portée représentent un transport. Afin de disposer d'un socle de comparaison solide, nous préciserons dans un second temps ce cadre théorique via une approche numérique. Cette caractérisation se fera via l'étude des modèles Manna et ROM et leur extension au cadre

LR-CDP en 2D, dimension dans laquelle nous étudierons les transitions de réversibilité et d'écoulement par la suite. Cette analyse sera menée via la détermination des exposants critiques statiques et dynamiques associés et l'évolution des propriétés d'hyperuniformité avec la portée du transport.

## 2.1 Longue portée et comportement critique

Dans cette section, nous présentons le cadre générique de compréhension des interactions à longue portée dans le cas de la criticalité CDP. Après avoir explicité la phénoménologie globale induite par la présence de ce type d'interactions, nous présenterons l'extension naturelle de la théorie CDP via la modification des équations de champ associées. Celle-ci nous permettra alors de déterminer un comportement qualitatif attendu quant à l'évolution de chaque exposant critique avec l'exposant de portée  $\alpha$ , soutenu par des calculs analytiques pré-existants.

### 2.1.1 Phénoménologie

Dans de nombreux systèmes de physique statistique faisant intervenir des transitions de phase, les interactions entre agents prennent un caractère non-local. Dans la plupart de ces cas, cette non-localité peut-être représentée par des interactions décroissant algébriquement avec la distance  $r$  séparant les agents, soit comme  $\sim 1/r^\alpha$  avec  $\alpha > 0$ . On peut par exemple penser aux interactions de Coulomb entre deux charges ou aux interactions gravitationnelles entre deux masses qui décroissent comme  $\sim 1/r$  en trois dimensions, soit  $\alpha = 1$ .

Comme nous l'avons vu précédemment, dans la limite  $\alpha \rightarrow 0$  un système adopte naturellement le comportement critique équivalent au champ moyen de la classe d'universalité associée. À l'inverse, dans la limite  $\alpha \rightarrow \infty$ , ce système adopte le comportement critique de la classe en dimension finie. En fait, dans le cas général, ces deux comportement limites ne prennent pas uniquement place pour des formes asymptotiques de la portée d'interaction. À la place, il est possible d'identifier deux bornes  $\alpha^+$  et  $\alpha^-$  définissant deux zones. Dans toute la gamme d'exposants  $\alpha > \alpha^+$ , le système présente son comportement critique de courte portée, associé au cas faisant intervenir des interactions locales uniquement. De la même façon, dans toute la gamme d'exposants  $\alpha < \alpha^-$ , le comportement critique mesuré est celui du champ moyen associé.

Dans le cas d'une portée intermédiaire  $\alpha^- < \alpha < \alpha^+$ , plusieurs scénario sont intuitivement possibles. En fait, ce que l'on observe et rationalise c'est qu'entre ces deux bornes, le comportement critique évolue continûment avec la portée. Chaque exposant critique prend une valeur unique dépendant uniquement de la portée  $\alpha$ , reliant une valeur de courte portée pour  $\alpha = \alpha^+$  à une valeur de champ moyen pour  $\alpha = \alpha^-$ , comme représenté à la [figure 2.1](#). Ainsi, il est possible de définir une infinité continue de classes d'universalité associées à celle de courte portée.

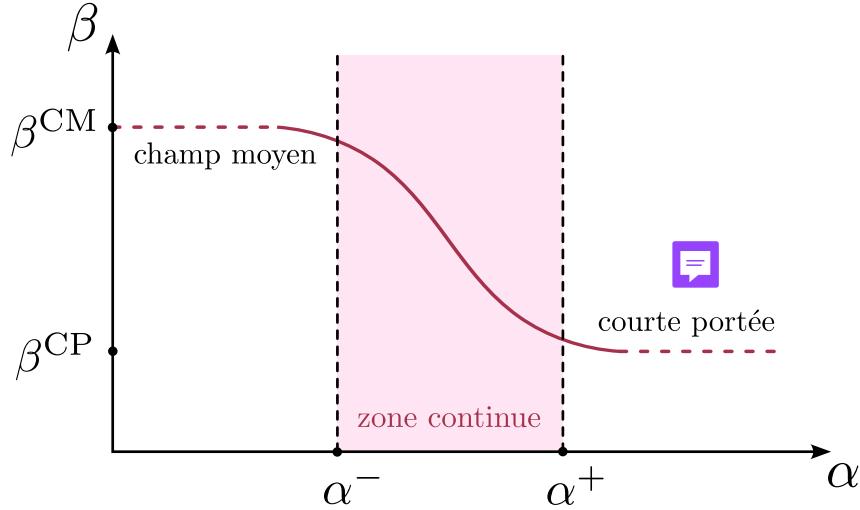


FIGURE 2.1 – Évolution générique de l'exposant  $\beta$  avec la portée d'interaction.  $\beta^{CP}$  est l'exposant attendu dans un modèle avec interactions locales et  $\beta^{CM}$  est l'exposant attendu dans le cas champ moyen. Cette évolution générique est retrouvée pour les autres exposants critiques.

Cette phénoménologie étant tout à fait général, retrouvée aussi bien dans les cas d'équilibre que dans les cas hors d'équilibre, nous cherchons à la préciser dans le cas de la classe d'universalité CDP.

### 2.1.2 Formulation théorique dans la classe CDP

#### Équations de champ et transport de masse

Il est possible de comprendre la phénoménologie liée à l'ajout d'interactions à longue portée via les théories continues associées aux phénomènes critiques. Généralement, dans le cas de la présence d'interactions à longues portées, les équations de champ sont modifiées par l'ajout de termes d'interactions généralisés. Là où les interactions locales sont représentées par l'opérateur laplacien  $\nabla^2$ , représenté par un terme en  $\sim -q^2$  dans l'espace réciproque, les interactions non-locales sont représentées par l'opérateur de dérivée fractionnaire  $|\nabla|^{\alpha-D}$ , représenté par un terme en  $\sim q^{\alpha-D}$  dans l'espace réciproque [68]. Dans le cas de la théorie de champ CDP, les équations généralisées prennent donc la forme :

$$\begin{aligned} \partial_t A(\mathbf{r}, t) &= (\omega\rho(\mathbf{r}, t) - r)A(\mathbf{r}, t) - uA^2(\mathbf{r}, t) + \kappa\nabla^2 A(\mathbf{r}, t) - \kappa_\alpha |\nabla|^{\alpha-D} A(\mathbf{r}, t) + \sigma\sqrt{A(\mathbf{r}, t)}\eta(\mathbf{r}, t) \\ \partial_t \rho(\mathbf{r}, t) &= \kappa\nabla^2 A(\mathbf{r}, t) - \kappa_\alpha |\nabla|^{\alpha-D} A(\mathbf{r}, t) \end{aligned} \quad (2.2)$$

avec :

$$|\nabla|^{\alpha-D} A(\mathbf{r}, t) \propto \int d\mathbf{r}' \frac{A(\mathbf{r} + \mathbf{r}') - A(\mathbf{r})}{|\mathbf{r}'|^\alpha} \quad (2.3)$$

On appellera cette théorie LR-CDP pour *long-range conserved directed percolation*. Il est à noter que ce type de cadre théorique n'est pas propre à cette classe, on le retrouve génériquement pour les autres théories comme la théorie  $\phi^4$  ou la théorie DP [68, 69].

Dans le cadre de la théorie CDP, cette modification continue peut donc se comprendre directement comme une modification des modalités de redistribution. Là où le laplacien signifiait une redistribution des particules (ou de la force élastique dans le cas de la transition de dépiégeage) dans le voisinage proche, le laplacien fractionnaire modélise une redistribution à longue portée, caractérisée par l'exposant  $\alpha$ . Dans le cadre théorique LR-CDP, la longue portée se comprend donc comme un transport de masse. Dans le cas des modèles de particules, il se traduit comme une distribution  $P(\mathbf{r}') \sim 1/|\mathbf{r}'|^\alpha$  des sauts  $\mathbf{r}'$  des particules actives. Dans le cas de la transition de dépiégeage, il se matérialise via le propagateur de redistribution élastique  $G(\mathbf{r}) \sim 1/|\mathbf{r}|^\alpha$ . Pour ces raisons, nous préfèrerons parler de transport à longue portée plus que d'interactions à longue portée dans le cadre LR-CDP.

### Zone continue d'évolution des exposants

Pour déterminer les bornes  $\alpha^+$  et  $\alpha^-$  dans le cadre de la théorie LR-CDP, nous pouvons raisonner sur des arguments d'échelle.

Par définition, la borne de courte portée  $\alpha^+$  résulte d'une compétition entre le terme d'interaction local en  $\nabla^2 A$  et le terme d'interaction à longue portée en  $|\nabla|^{\alpha-D} A$ . Pour comparer l'importance de ces deux termes, il est plus simple de raisonner dans l'espace réciproque. Dans ce cas, l'interaction locale est représentée par un terme en  $\sim q^2$  tandis que l'interaction non-locale par un terme en  $\sim q^{\alpha-D}$ . À grande échelle ( $q \rightarrow 0$ ), le terme local prédomine donc dans la limite  $\alpha > D+2$  alors que le terme non-local l'emporte pour  $\alpha < D+2$ . Ainsi, on a  $\alpha^+ = D+2$ . Dans le cas qui nous intéresse, en deux dimensions, nous nous attendons donc à ce que l'interaction à longue portée affecte le comportement critique seulement pour  $\alpha < 4$ . En-deçà de cette portée, on retrouve le comportement habituel de la classe CDP en 2D.

Pour identifier la borne  $\alpha^-$ , nous pouvons mener une analyse d'échelle sur l'équation 2.2 pour déterminer la dimension critique supérieure associée, de la même manière que dans la théorie  $\phi^4$  ou DP à courte portée<sup>1</sup> (voir sous-sous-section 1.2.1.3). En gardant en mémoire que le terme d'interaction pertinent dans ce cas est le terme non-local, nous trouvons simplement :

$$D_c = 2(\alpha - D), \quad \nu_{\parallel}^{\text{CM}} = \beta^{\text{CM}} = 1, \quad \nu_{\perp}^{\text{CM}} = \frac{1}{\alpha - D} \quad (2.4)$$

Par définition on a  $\alpha = \alpha^-$  lorsque  $D_c = D$ , puisque l'on arrive dans ces deux cas à la validité de l'approximation champ moyen. Finalement on a donc ici  $\alpha^- = 3D/2$ . Ainsi, en 2D on a  $\alpha^- = 3$ . Un point important à remarquer est que dans la limite de champ moyen, l'exposant  $\nu_{\perp}$  dépend encore continûment de la portée. Si l'on s'attend à retrouver  $\nu_{\perp} = 1$  pour  $\alpha = \alpha^-$ , pour  $\alpha < \alpha^-$  nous nous attendons à  $\nu_{\perp} > 1$ .

In fine, dans le cadre de la théorie LR-CDP, nous attendons une évolution continue des exposants critiques pour des portées  $3 < \alpha < 4$  en 2D. Pour  $\alpha > 4$ , nous nous attendons à retrouver le comportement de courte portée de la classe CDP en 2D et pour  $\alpha < 3$ , celui

1. est-ce qu'on peut vraiment ignorer le champ conservé dans ce genre d'analyse ?

de la classe triviale champ moyen associée à CDP. Ces bornes  $\alpha^+ = D + 2$  et  $\alpha^- = 3D/2$  déterminées par simple analyse dimensionnelle sont en fait connues depuis longtemps dans le cadre de la théorie du dépiégeage à longue portée.

### 2.1.3 Prédictions

#### 2.1.3.1 Prédictions issues des cas limites

Pour connaître qualitativement le comportement critique attendu dans le cadre de la théorie LR-CDP, il suffit donc de connaître le comportement critique de la classe CDP et celui du champ moyen associé. Dans cette partie, nous proposons un bref aperçu des évolutions prévues par cette théorie sur les différents exposants en se concentrant sur le cas bidimensionnel.

#### Exposants critiques

Pour la classe CDP en 2D, nous avons notamment  $\beta \approx 0.64$  et  $\gamma' = 0.37$  alors que dans le cas champ moyen nous avons  $\beta = 1$  et  $\gamma' = 0$ . Ainsi, en augmentant progressivement la portée de l'interaction dans le système, nous nous attendons à retrouver une évolution de l'activité avec la distance au point critique de moins en moins concave, pour finalement atteindre une évolution linéaire. De la même manière, nous nous attendons à observer des fluctuations de l'activité qui divergent de moins en moins fortement à l'approche du point critique, jusqu'à atteindre une constance totale.

#### Avalanches

Pour ce qui est du phénomène dynamique d'avalanches, on a pour la classe CDP en 2D  $\tau \approx 1.27$  et  $d_f \approx 2.75$  [19, 34, 70–72] alors qu'en champ moyen on a  $\tau = 1.5$  et  $d_f = D$ . Nous nous attendons alors qu'en augmentant la portée d'interaction dans un modèle s'inscrivant dans la théorie LR-CDP, les distributions de taille d'avalanche deviennent moins larges et les avalanches moins compactes.

#### Hyperuniformité

En ce qui concerne l'hyperuniformité, directement reliée à la rugosité dans la transition de dépiégeage, nous avons en 2D  $\eta \approx 0.5$  soit  $\sigma \approx 0.75$  alors qu'en champ moyen nous avons  $\eta = 0$  soit  $\sigma = 1$  [34]. Nous nous attendons donc qu'à mesure que  $\alpha$  diminue et se rapproche de  $\alpha = 3$ , les propriétés d'hyperuniformité dans le système se perdent.

#### 2.1.3.2 Prédictions analytiques spécifiques

Via les outils du groupe de renormalisation fonctionnel, il est possible de pousser les prédictions théoriques au-delà des comportements limites. Notamment, en travaillant sur la théorie continue associée à la transition de dépiégeage (voir sous-sous-section 1.3.4.2), des formes analytiques des exposants critiques ont pu être prédites dans le cas d'une portée  $\alpha$  et d'une dimension  $D$  arbitraires [34, 73].

Sur la figure 2.2-(a), nous représentons l'évolution obtenue de l'exposant de rugosité  $\eta$  via un calcul de renormalisation dans une approximation à deux boucles [73]. Celle-ci confirme bien l'attendu qualitatif d'une augmentation continue de cet exposant avec la portée  $\alpha$ , prenant place entre  $\alpha = 4$  et  $\alpha = 3$ . Dans l'extension de la théorie CDP à LR-CDP, la correspondance entre les propriétés de rugosité et d'hyperuniformité se retrouve dans une nouvelle relation d'échelle entre les exposants  $\eta$  et  $\sigma$ . En 2D, celle-ci prend la forme simple suivante :

$$\sigma = 4 - \alpha + \eta \quad (2.5)$$

dans la région  $3 < \alpha < 4$ . De manière équivalente, cette prédiction correspond donc aussi à une perte progressive de l'hyperuniformité dans les modèles de particules associés, représentée sur la figure 2.2-(b).

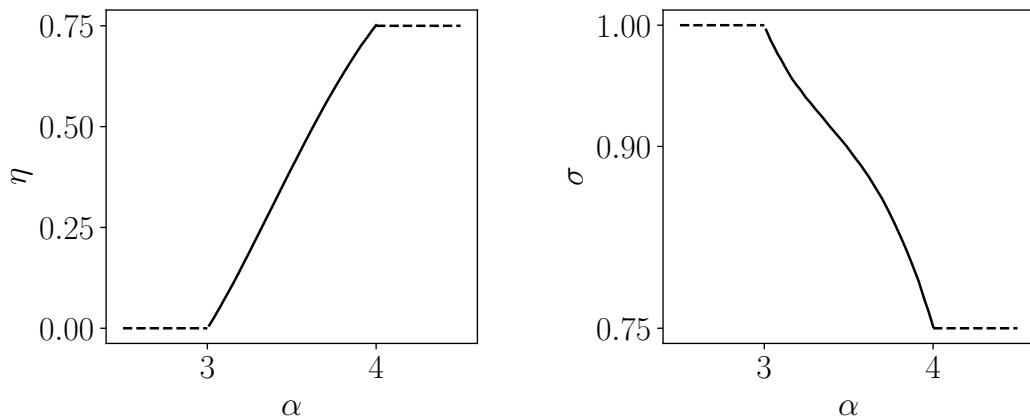


FIGURE 2.2 – Evolution de l'exposant de rugosité (a) et de l'exposant d'hyperuniformité (b) associé avec la portée d'interaction dans le cadre théorique LR-CDP. Ces résultats encore non publiés ont été produits par K. Wiese qui nous a octroyé une autorisation de représentation dans ce manuscrit.

Un calcul similaire peut être mené pour déterminer l'exposant dynamique  $z$  dans ce cadre. La transition de dépiégeage étant connue pour ne faire intervenir que deux exposants critiques indépendants, ces prédictions permettent en fait la caractérisation complète de la criticalité associée. En principe, les prédictions analytiques sont donc en mesure de déterminer complètement le cadre théorique LR-CDP. Toutefois, ces calculs restent soumis à des approximations et leur validation ne peut donc venir de mesures numériques sur des modèles associés.

## 2.2 Motivations pour une caractérisation numérique

Dans cette section, nous motivons un peu plus spécifiquement la caractérisation numérique du cadre théorique LR-CDP en deux dimensions.

### 2.2.1 Motivation principale : un point manquant dans la littérature

De nombreuses études se sont déjà intéressées à l'influence d'un transport à longue portée sur le comportement critique des transitions de phase absorbantes. Dans le cadre de la percolation dirigée, cette influence a notamment été caractérisée de manière exhaustive en 1D [68, 74] et en 2D [75] sur des modèles de particules. Dans le cadre de la percolation dirigée conservée, cadre d'intérêt pour ce travail, les seules études numériques caractérisant l'impact de ce type d'interactions à longue portée viennent de l'étude de la transition de dépiégeage. Cependant, cette dernière trouvant essentiellement des réalisations physiques en 1D avec le cas de la ligne élastique, ces études se sont concentrés jusque là uniquement sur le cas monodimensionnel [39, 76–78].

Dans ces travaux, les résultats numériques restent fidèles aux prédictions théoriques et confirment une évolution continue des exposants dans une gamme de portée déterminable par une analyse d'échelle. Toutefois, aucune étude à notre connaissance n'a été réalisée dans le cas d'un système appartenant à la classe CDP en 2D. Il manque alors à cette littérature un point de comparaison essentiel à notre étude dans les chapitres suivants. Par ailleurs cette caractérisation peut s'avérer utile en soi, simplement pour tester les prédictions analytiques présentées précédemment [79].

### 2.2.2 Motivation secondaire : un cadre d'intérêt pour la modélisation de systèmes réels

Bien que cela constitue notre motivation principale, la caractérisation de l'impact du transport à longue portée sur les systèmes de la classe CDP en 2D n'a pas seulement un intérêt théorique. En effet, certains modèles ou même certaines réalisations physiques correspondent vraisemblablement à cette situation. Cette étude peut alors permettre l'appréhension de leur criticalité plus spécifiquement.

Les réalisations physiques les plus évidentes de ce cadre sont celles associées à la transition de dépiégeage, de laquelle nous pouvons tirer deux exemples. Le premier est le mouvement de l'interface d'un fluide dans un milieu poreux par action de la gravité [80]. Dans ce cas, le mouvement de l'interface bidimensionnelle peut être sujet à des interactions à longue portée permises par le fluide en volume. Le second concerne le mouvement des parois des domaines magnétiques dans les milieux magnétiques tridimensionnels [81]. Dans ce cas, ce sont les interactions entre charges magnétiques qui induisent la longue portée.

Un autre type de réalisations envisageables concerne les modèles épidémiques. Ces modèles que nous avons déjà introduit comme présentant une transition de phase absorbante ont de bonnes raisons de faire intervenir un transport à longue portée. En effet, dans ce cadre, celui-ci représente la capacité des vecteurs, i.e. des personnes, à se déplacer : par exemple une personne infectée prenant le train est susceptible de contaminer une autre personne à des kilomètres. La plupart des modèles épidémiologiques sont plutôt enclins à

appartenir à la classe DP [82]. C'est notamment le cas du modèle SIS bien connu [83]. Toutefois, certains modèles plus complexes, faisant intervenir une diffusion locale des agents, peuvent présenter une criticalité différente, et dans une certaine limite, celle de la classe CDP [84]. Dans ce cas, l'ajout d'un transport à longue portée pourrait donc effectivement être compris dans le cadre LR-CDP.

L'avantage du principe d'universalité est que, pour caractériser le comportement de tous ces systèmes, il suffit d'en caractériser un seul appartenant à la même classe. En étudiant un modèle numérique appartenant au cadre théorique LR-CDP en 2D, nous proposons une caractérisation de tous ces autres systèmes hypothétiques appartenant à la même classe. Ainsi, si l'intérêt principal de cette caractérisation numérique reste de constituer une base de comparaison pour l'étude des transitions de réversibilité et d'écoulement, elle trouve aussi un intérêt dans la modélisation de systèmes réels.

## 2.3 Modèles

Pour étudier l'influence du transport à longue portée dans la classe CDP en 2D, nous nous concentrerons sur deux modèles emblématiques déjà présentés à la [sous-section 1.3.2](#) : le modèle Manna et le ROM. Dans cette section, nous présentons l'implémentation numérique de ces deux modèles et leur généralisation par l'ajout d'un transport à longue portée. Cette généralisation nous permettra alors d'étudier le comportement critique de ces modèles numériques à n'importe quelle portée de transport pour ainsi confronter et compléter la théorie LR-CDP en 2D.

### 2.3.1 LR-Manna

#### 2.3.1.1 Implémentation générale

Nous commençons par présenter notre implémentation du modèle Manna. Le modèle Manna est un modèle très simple, appelant de ce fait une implémentation facilitée. Dans nos simulations, nous considérons un réseau 2D bipériodique de  $N = L \times L$  sites, chacun indexé par un entier  $i$ , et positionné autour d'une position  $\mathbf{r}_i = na\hat{\mathbf{e}}_x + ma\hat{\mathbf{e}}_y$  avec  $(n, m) \in \mathbb{N}^2$ .  $a$  représente le pas du réseau. Sur l'ensemble de ces  $N$  sites sont disposés initialement et de manière aléatoire  $N_p$  particules.

À chaque pas de temps  $t_i$  de la dynamique, les  $n$  sites accueillant plus de  $m$  particules sont considérés comme actifs. Ceux-ci redistribuent alors l'entièreté de leur masse (i.e. leurs particules) aux sites directement voisins, et ce de manière aléatoire. La redistribution de masse de tous les sites actifs se fait de manière synchrone, i.e. sur le même pas de temps. À la fin de cette redistribution, un nouveau pas de temps est initié.

L'activité du système au pas de temps  $t_i$  est alors donnée par la proportion de sites actifs  $A(t_i) = n(t_i)/N$ . Par ailleurs, la densité de particules  $\phi$  correspond simplement au rapport  $\phi = N_p/N$  et peut donc prendre des valeurs plus ou moins grandes en fonction du seuil  $m$  choisi. Ce modèle présente alors une transition de phase absorbante séparant une phase active où l'activité  $A$  prend une valeur moyenne finie à temps long pour  $\phi > \phi_c$ ,

d'une phase absorbante où le système finit par tomber dans un état absorbant pour  $\phi < \phi_c$ . La valeur de la densité critique du système  $\phi_c$  dépend des détails microscopiques d'implémentation choisis. Elle ne peut donc pas a priori être reprise de travaux précédents.

### 2.3.1.2 Transport à longue portée

Dans le modèle Manna original, les particules sur les sites actifs font des sauts à courte portée. L'extension de cette dynamique au transport à longue portée y prend donc une forme évidente. Dans ce cas, les particules redistribuées ne le sont plus uniquement sur les sites voisins mais, à la place, celles-ci font des sauts  $\mathbf{r}$  largement distribués selon :

$$P(\mathbf{r}) \sim \frac{1}{r^\alpha} \quad (2.6)$$

Dans un espace de dimension  $D$ , cela revient donc à effectuer des sauts de taille  $\Delta$ ,  distribuée selon :

$$P_\Delta(\Delta) \sim \frac{1}{\Delta^{1+\alpha-D}} \quad (2.7)$$

Pour chaque particule sur un site actif, nous générerons donc un nombre aléatoire  $\Delta$  distribué de la sorte. Nous générerons ensuite une direction aléatoire  $\theta$  permettant de définir le déplacement  $\Delta_x = \Delta \cos \theta$  selon  $\hat{\mathbf{e}}_x$  et  $\Delta_y = \Delta \sin \theta$  selon  $\hat{\mathbf{e}}_y$ . Les deux réels  $\Delta_x$  et  $\Delta_y$  sont alors convertis en entiers pour représenter une distance en nombre de sites. Enfin, les conditions aux limites périodiques sont appliquées pour déterminer le site d'arrivée de la particule. La procédure est complète résumée sur la figure 2.3-(a).

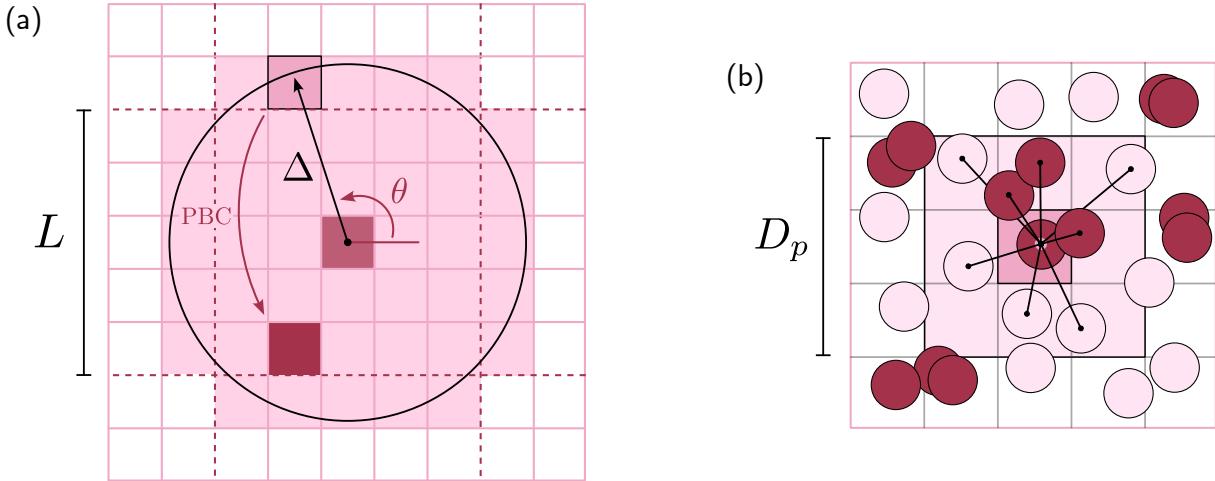


FIGURE 2.3 – Implémentation numérique des modèles LR-Manna et LR-ROM. (a) Procédure de saut à longue portée dans le modèle LR-Manna. PBC signifie *periodic boundary conditions*. (b) Méthode cell-list pour la détermination des recouvrements dans le LR-ROM. En 2D, seules 9 cellules ont besoin d'être sondées pour déterminer les contacts d'une particule.

Par cette implémentation numérique, il est possible d'étudier la transition de phase absorbante associée au modèle pour chaque portée  $\alpha$ . Dans la suite, nous appelons ce modèle généralisé LR-Manna.

### 2.3.2 LR-ROM

#### 2.3.2.1 Implémentation générale

Le second modèle que nous utilisons pour notre caractérisation numérique est le ROM. Ce modèle étant très proche du modèle Manna, son implémentation est très similaire. La différence principale qui les sépare vient du fait que la dynamique des particules a lieu dans ce cas en espace continu dans le ROM (par opposition au réseau de sites du modèle Manna).

Pour son implémentation,  $N_p$  particules de diamètre  $D_p$  sont disposées initialement aléatoirement sur un espace 2D bipériodique de volume  $L \times L$ . Au début de chaque pas de temps  $t_i$ , les particules se recouvrant avec une autre particule sont considérées comme actives. Chaque particule active effectue alors un déplacement de manière synchrone décomposé en deux déplacements aléatoires  $\Delta_x$  et  $\Delta_y$ , chacun de taille typique  $a_p$ . À l'issue de ce déplacement, un nouveau pas de temps est initié.

L'activité dans le ROM est définie comme la proportion de particules actives à un pas de temps donné et la densité  $\phi$  comme la fraction d'espace occupée par les particules. Celles-ci étant choisies sphériques, nous avons  $\phi = \frac{\pi D_p^2 N_p}{4L^2}$  en 2D. De la même façon que le modèle Manna, le ROM ainsi défini présente une transition de phase absorbante de paramètre d'ordre  $\phi$ .

#### 2.3.2.2 Transport à longue portée

Pour implémenter le transport à longue portée dans le ROM, nous utilisons exactement la même méthode que dans le cas du modèle Manna : à la place de faire des sauts finis de taille typique  $a_p$ , les particules actives font des sauts de taille  $\Delta$  largement distribuée selon l'équation 2.7. Dans ce cas, nous nommerons cette généralisation du modèle LR-ROM.

### 2.3.3 Détails d'implémentation

#### 2.3.3.1 Distributions de sauts

Pour générer les sauts à longue portée dans les deux modèles, nous utilisons une méthode d'inversion [85] permettant générer des nombres aléatoires distribués selon :

$$P_\Delta(\Delta) = \begin{cases} \Delta^{D-\alpha-1}, & \text{si } \Delta > a \\ 0, & \text{sinon} \end{cases} \quad (2.8)$$

le cut-off à petits  $\Delta$  étant nécessaire à l'intégrabilité de la distribution pour  $\alpha > D$ . En pratique, nous commençons par tirer un nombre réel  $x$  uniformément distribué dans  $[0, 1[$  grâce à des algorithmes pré-existants, puis  $\Delta$  est obtenu par la transformation :

$$\Delta = (1 - x)^{\frac{1}{D-\alpha}} \quad (2.9)$$

### 2.3.3.2 Méthode cell-list dans le ROM

Dans le ROM et le LR-ROM, la condition de recouvrement entre une particule située en  $\mathbf{r}$  et une particule située en  $\mathbf{r}'$  correspond à  $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| < D_p$ . Afin de déterminer si une particule est active au début d'un pas de temps, il est donc nécessaire de calculer sa distance à toutes les autres particules du système. En principe, ce calcul de distance admet une complexité d'ordre  $N_p^2$ , ce qui rend la recherche de recouvrement fastidieuse. Pour remédier à ce problème, nous utilisons une méthode dite cell-list [86] dont le principe est résumé à la figure 2.3-(b).

Le principe de cette méthode est de découper l'espace de volume  $L \times L$  en une collection de  $n \times n$  cellules de dimension  $\frac{L}{n} \times \frac{L}{n}$ . À chaque pas de temps, nous calculons à quelle cellule  $i$  appartient chacune des  $N_p$  particules. La portée de l'interaction de contact étant bornée par  $D_p$ , en choisissant  $\frac{L}{n} = D_p$ , seules les particules situées dans une cellule voisine<sup>2</sup> de la cellule  $i$  sont susceptibles de recouvrir les particules situées dans la cellule  $i$ . Ainsi, cela restreint le calcul de distance à un sous-ensemble du système, diminuant alors la complexité de l'opération à l'ordre  $N_p$ .

### 2.3.3.3 Parallélisation et implémentation GPU

Les schémas numériques associés aux deux modèles est relativement parallélisable. En effet, lors d'un pas de temps la mise à jour de la position des particules se fait de manière synchrone. De plus, lors de ce déplacement, aucun échange d'information n'est nécessaire entre les différents agents du système. Seules les conditions d'activité (recouvrement dans le ROM ou dépassement du seuil sur un site dans le modèle Manna), qui n'ont lieu qu'une fois par pas de temps, nécessitent un partage de la mémoire.

Afin d'en tirer parti, nous implementons donc ces deux modèles via le langage CUDA [87] afin de réaliser les simulations sur GPU (cartes graphiques). Par opposition aux CPU, les GPU sont dotés d'un bien plus grands nombres de coeurs, permettant ainsi un plus grand nombre d'opérations simultanées. Ces coeurs sont individuellement moins performants mais les opérations nécessaires à la réalisation de la dynamique Manna sont très peu onéreuses et donc particulièrement adaptées à ce type architecture.

### 2.3.3.4 Valeurs des paramètres

Dans le ROM, nous prendrons comme unité de longueur du système le diamètre des particules et considérerons donc  $D_p = 1$ . Dans le cas de sauts à courte portée, nous prendrons  $a_p = 1$

Dans le modèle Manna, nous prendrons comme unité de longueur du système le pas du réseau et donc  $a = 1$ .

---

2. Ici la notion de voisinage prend en compte les conditions aux limites périodiques

## 2.4 Méthodes de caractérisation du comportement critique

La caractérisation du comportement critique d'un système ou d'une classe d'universalité passe par la détermination de ses exposants. Dans cette section, nous présentons les méthodes utilisées pour la détermination spécifique des exposants critiques  $\beta$  et  $\gamma'$ , de l'exposant dynamique  $\delta$  et de l'exposant d'hyperuniformité  $\sigma$ , tous présentés au [chapitre 1](#). Ces méthodes nous permettront de caractériser les transitions dans le LR-ROM et le modèle LR-Manna pour chaque portée  $\alpha$  et seront ensuite réutilisées dans les chapitres suivants. De ce fait, nous nous attachons à les décrire de manière suffisamment précise.

### 2.4.1 Détermination des exposants critiques

#### 2.4.1.1 Détermination du point critique

La première étape essentielle à la caractérisation d'une transition de phase est la localisation de son point critique. Ici, cela correspond à la détermination de la densité critique  $\phi_c$ . Pour la mettre en œuvre, nous nous appuyons sur la loi d'évolution du paramètre d'ordre dans le régime critique :

$$\langle A \rangle \sim \delta\phi^\beta, \quad \delta\phi = \frac{\phi - \phi_c}{\phi_c} \quad (2.10)$$

D'après celle-ci, la fonction  $\langle A \rangle = f(\delta\phi)$  correspond à une droite de pente  $\beta$  dans une représentation logarithmique. Cela peut donc représenter une méthode graphique pour la détermination de  $\phi_c$  : la valeur recherchée est celle définissant la distance  $\delta\phi$  permettant d'obtenir la courbe la plus proche d'une droite à petits  $\delta\phi$ . Si nous sous-estimons  $\phi_c$ , alors cette fonction montrera une courbure concave en échelle logarithmique. À l'inverse, si nous sur-estimons  $\phi_c$ , celle-ci montrera une courbure convexe. De cette manière, il est possible d'encadrer graphiquement la valeur adéquate de  $\phi_c$  comme illustré à la [figure 2.4-\(a\)](#). En pratique, afin de mieux percevoir les variations de forme de la courbe, nous examinons aussi l'évolution compensée  $\langle A \rangle / \delta\phi^{\beta_t} = f(\delta\phi)$  par l'évolution attendue avec un exposant test  $\beta_t$  en échelle log-lin (voir [figure 2.4-\(b\)](#)). La méthode graphique d'encadrement associée est alors plus précise. Celle-ci permet alors de définir la densité critique  $\phi_c$  et l'exposant  $\beta$  comme les deux paramètres permettant d'obtenir une courbe constante à petits  $\delta\phi$ .

Cette mesure repose donc finalement sur la détermination de la courbe  $\langle A \rangle = f(\delta\phi)$  et donc sur les mesures précises de  $\langle A \rangle$  pour différentes densités  $\phi$ . Pour réaliser ces mesures, à une taille  $L$  de système donnée, nous laissons le système relaxer vers l'état stationnaire dans lequel nous mesurons la valeur moyenne de la variable instantanée  $A(t)$ . La détermination du régime stationnaire est effectuée graphiquement en représentant  $A(t)$  en échelle logarithmique (voir [figure 2.6](#)). Afin de déterminer  $\phi_c$ , nous devons sonder le comportement du système proche du point critique et donc proche de la phase absorbante. Le problème est que, dans un système fini de taille  $L$ , les fluctuations de la dynamique peuvent amener le système dans un état absorbant même pour  $\phi \gtrsim \phi_c$ , rendant alors la détermination de  $\langle A \rangle$  impossible. Les fluctuations critiques se comportant comme  $L^{-D}$ ,

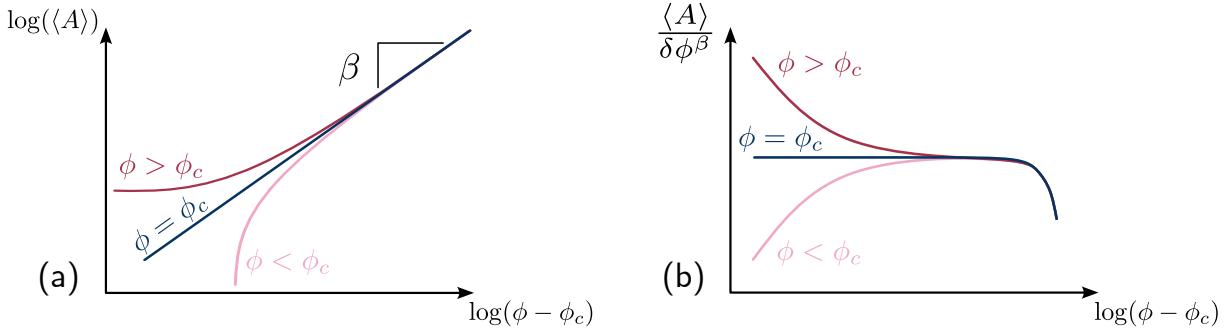


FIGURE 2.4 – Méthode de détermination de la densité critique (a) en échelle logarithmique et (b) en échelle log-lin via une représentation compensée.

il est possible de contourner cet obstacle en considérant des systèmes plus grands. La méthode que l'on choisit consiste alors à augmenter la taille  $L$  du système à mesure que l'on considère des densités  $\phi$  plus proches de  $\phi_c$  afin de ne jamais risquer de tomber dans un état absorbant. In fine, la courbe  $\langle A \rangle = f(\delta\phi)$  obtenue correspond donc à une concaténation de courbes obtenues pour différentes tailles  $L$  du système.

Ne pas se concentrer uniquement sur la plus grande taille  $L$  envisageable est un choix permettant de réduire l'effort numérique associé. En effet, plus un système est grand, plus la simulation de sa dynamique est longue. Cette méthode suppose cependant que toutes ces courbes sont bien équivalentes, i.e. que  $\phi_c$  est indépendant de  $L$ . En théorie  $\phi_c$  présente toujours une dépendance de taille finie, mais dans notre cas il est possible de s'en affranchir raisonnablement. En effet, statistiquement, si un système tombe dans l'état absorbant c'est parce que la longueur de corrélation  $\xi$  de la dynamique associée est devenue au moins comparable à la taille  $L$  de ce système. Or, par définition des effets de taille finie, la dépendance de  $\phi_c$  en  $L$  n'est visible que lorsque la dynamique "ressent" la taille du système, i.e.  $\xi \gtrsim L$ . Ainsi, en ne sondant que les états statistiquement non absorbés, nous pouvons considérer que  $\phi_c$  est indépendante de  $L$ . Cette hypothèse se confirme alors très bien avec nos mesures puisque celles faites à différentes tailles de système se recouvrent parfaitement, comme représenté sur la figure 2.5 dans le cas du modèle Manna. Toutefois, cela invite à ne pas sonder le système trop proche de sa limite d'absorption et de préférer systématiquement le passage à une taille supérieure.

#### 2.4.1.2 Détermination des exposants statiques

Une fois la densité critique  $\phi_c$  déterminée précisément pour un système, il est possible de mesurer les exposants critiques de la transition. L'exposant statique  $\beta$  est en fait déjà déterminé lors de la détermination de  $\phi_c$  via les méthodes graphiques présentées précédemment. Afin d'obtenir un ordre de grandeur de son incertitude, nous effectuons un ajustement de la courbe  $\langle A \rangle = f(\delta\phi)$  à petits  $\delta\phi$  en échelle logarithmique pour les deux valeurs extrêmales de l'encadrement de  $\phi_c$ .

Pour déterminer l'exposant des fluctuations critiques  $\gamma'$ , nous mesurons la variance de l'activité  $\langle \delta A^2 \rangle$  dans l'état stationnaire sur les mêmes courbes  $A(t)$  qui ont permis de mesurer  $\langle A \rangle$ . La densité critique ayant été précédemment déterminée, nous déterminons

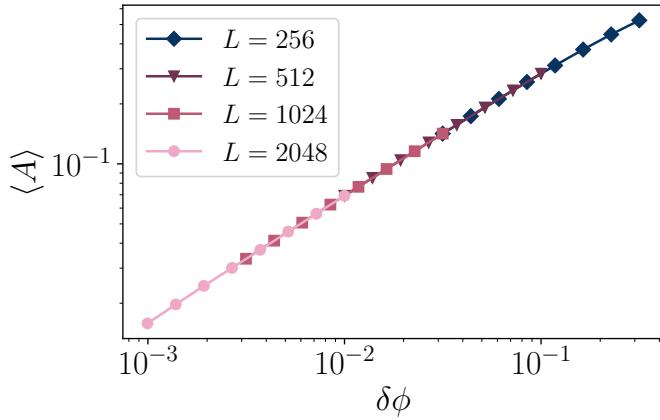


FIGURE 2.5 – Détermination de la courbe  $\langle A \rangle = f(\delta\phi)$  dans le ROM. La superposition des courbes pour différentes tailles de système dans leur domaine de non-absorption valide l'approche considérant  $\phi_c$  indépendante de  $L$ . Ici, on a  $\phi_c \approx 0.23520$

$\gamma'$  directement par ajustement de la courbe  $\langle A^2 \rangle = g(\delta\phi)$  en échelle logarithmique. La variance correspondant à un moment d'ordre supérieur par rapport à la moyenne, sa détermination précise est plus délicate. Ainsi, la détermination de  $\gamma'$  sera généralement entachée de plus grandes erreurs. Toutefois, étant donné que nous ne nous concentrerons essentiellement sur l'évolution de  $\gamma'$  avec la portée dans la suite de ce travail, nous nous satisferons d'une telle précision. Les incertitudes sur cette détermination sont associées à l'incertitude sur l'ajustement de la courbe en échelle logarithmique<sup>3</sup>.

#### 2.4.1.3 Détermination de l'exposant dynamique

Comme nous l'avons vu au chapitre 1, en partant d'une configuration initiale aléatoire, proche du point critique, le système relaxe vers l'état stationnaire de manière algébrique :

$$A(t) \sim t^{-\delta} \quad (2.11)$$

L'exposant  $\delta$  ainsi défini permet de caractériser la transition d'un point de vue dynamique. Une difficulté de sa détermination est que le régime de temps dans lequel le comportement de l'équation 2.11 est valable est situé entre un comportement non-universel à temps courts et une saturation à temps long du fait que  $\phi > \phi_c$ . Il n'est donc pas aisés de mesurer  $\delta$  par un simple ajustement sur une unique courbe.

Pour remédier à ce problème, nous utilisons une méthode de redimensionnement comme outil de détermination plus précis. Pour ce faire, nous nous appuyons sur le fait que, hors du régime de temps courts, l'activité dans le système prend la forme :

$$A(t, \delta\phi) \sim \langle A \rangle(\delta\phi) + t^{-\delta} \sim \delta\phi^\beta + t^{-\delta} \Rightarrow \frac{A(t)}{\delta\phi^\beta} \sim 1 + \left( \frac{t}{\delta\phi^{\beta/\delta}} \right)^{-\delta} \quad (2.12)$$

3. En pratique, nous constatons que les incertitudes sur  $\gamma'$  liées à la détermination de  $\phi_c$  (et donc la définition de  $\delta\phi$ ) sont négligeables devant l'incertitude de l'ajustement effectué à une valeur de  $\phi_c$  donnée.

par définition de l'exposant  $\beta$ . Ainsi, si nous redimensionnons  $A(t)$  par  $\delta\phi^\beta$  et  $t$  par  $\delta\phi^{\beta/\delta}$ , nous obtenons une évolution indépendante de la distance au point critique  $\delta\phi$ . En d'autres termes, si l'on mesure l'évolution  $\frac{A(t)}{\delta\phi^\beta} = f\left(\frac{t}{\delta\phi^{\beta/\delta}}\right)$  pour différentes densités  $\phi$ , les différentes évolutions se superposent graphiquement (voir figure 2.6).  $\beta$  et  $\phi_c$  étant précédemment mesurés,  $\delta$  est alors déterminé comme l'exposant qui permet la superposition de toutes les courbes sur une courbe maîtresse sous ce redimensionnement. L'incertitude de mesure sur cet exposant est alors donnée par la gamme d'exposants pour laquelle la superposition des courbes est jugée satisfaisante. Ce principe de mesure par redimensionnement très efficace sera utilisé à plusieurs reprises dans les chapitres suivants pour mesurer d'autres quantités.

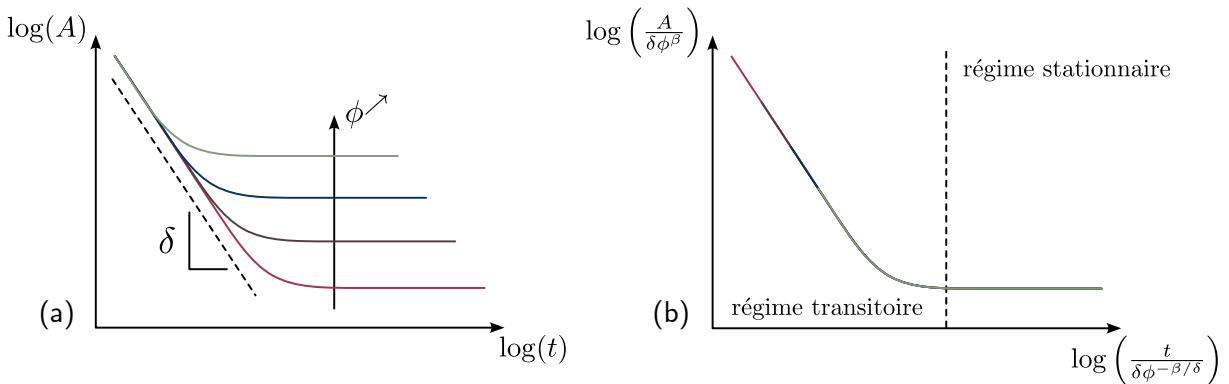


FIGURE 2.6 – Méthode de détermination de l'exposant dynamique  $\delta$ . (a) Évolution de l'activité dans le système en fonction du temps pour différentes densités  $\phi$ . (b) Redimensionnement du temps et de l'activité par la distance au point critique permettant la superposition des différentes courbes sur une courbe maîtresse.

## 2.4.2 Caractérisation de l'hyperuniformité

Dans cette dernière sous-section nous présentons les méthodes utilisées pour sonder les propriétés d'hyperuniformité dans nos modèles. Celles-ci reposant sur des propriétés de structure, nous ne pouvons pas nous limiter à une étude du comportement macroscopique pour déterminer l'exposant  $\sigma$ . Toutefois, la philosophie des mesures utilisées en pratique restent très similaires.

### 2.4.2.1 Mesure directe du facteur de structure

Comme nous l'avons évoqué au chapitre 1, les systèmes appartenant à la classe CDP exhibent des propriétés hyperuniformes. Proche de la transition, la répartition des particules dans l'espace présente des corrélations à longue portée. Une manière de les caractériser est de passer dans l'espace réciproque. En effet, dans de tels systèmes, cette propriété se traduit par une diminution du facteur de structure  $S(\mathbf{q})$  à petits  $q$  selon :

$$S(\mathbf{q}) \sim q^{\alpha_{HU}}, \quad 0 < \alpha < 1 \quad (2.13)$$

L'exposant  $\alpha_{HU}$  permet alors de caractériser la transition de phase au même titre qu'un autre exposant critique. Le cas limite  $\alpha_{HU} = 0$  représente une répartition totalement décorrélée à grande échelle.

Une manière de quantifier l'hyperuniformité caractéristique d'un comportement critique est donc de mesurer précisément le facteur de structure à petits  $q$  dans un état stationnaire proche du point critique afin d'en déduire une estimation de cet exposant  $\alpha_{\text{HU}}$ .

### 2.4.2.2 Méthode de box-counting

#### Définition

Une autre façon de procéder est de revenir à la définition initiale de l'hyperuniformité [88]. Comme nous l'avons présenté à la sous-section 1.3.6, dans un système hyperuniforme, la variance  $\langle \delta n^2 \rangle_l$  du nombre de particules contenues dans un sous-ensemble du système de volume  $l^D$  se comporte comme :

$$\langle \delta n^2 \rangle_l \sim \langle n \rangle_l^\sigma, \quad \sigma < 1 \quad (2.14)$$

$\sigma = 1$  représentant le cas trivial de l'absence de corrélations. Cette représentation de l'hyperuniformité est en fait directement liée à celle observée dans l'espace réciproque, les exposants  $\sigma$  et  $\alpha_{\text{HU}}$  étant reliés par la relation [48, 88, 89] :

$$\sigma = \begin{cases} 1 - \frac{\alpha_{\text{HU}}}{D}, & \text{si } 0 < \alpha_{\text{HU}} < 1 \\ 1 - \frac{1}{D}, & \text{si } \alpha_{\text{HU}} > 1 \end{cases} \quad (2.15)$$

Une méthode de qualification de l'hyperuniformité, que nous appelons méthode box-counting, consiste donc à mesurer  $\langle \delta n^2 \rangle_l$  et pour différentes tailles  $l$  de sous-ensembles dans des configurations de l'état stationnaire du système proche de son point critique. Ainsi, nous pouvons étudier son évolution en fonction de  $\langle n \rangle_l$  pour déterminer directement l'exposant  $\sigma$  associé.

Si la définition de l'hyperuniformité s'est construite autour de l'équation 2.14, plusieurs travaux s'intéressent aux fluctuations de densité locale  $\langle \delta \rho^2 \rangle_l$  au lieu du nombre de particules, et en fonction de l'extension  $l$  du sous-ensemble au lieu du nombre moyen de particules [48, 90]. Dans ce cas, on définit la loi d'échelle entre ces quantités par l'exposant  $\lambda$  selon :

$$\langle \delta \rho^2 \rangle_l \sim l^{-\lambda} \quad (2.16)$$

qui est alors directement relié à l'exposant  $\sigma$  par :

$$\sigma = 2 - \frac{\lambda}{D} \quad (2.17)$$

#### Implémentation

Dans ce chapitre, nous caractérisons l'hyperuniformité des modèles de sauts à longue portée via la méthode de box-counting. Pour ce faire, nous générerons des configurations par la dynamique stationnaire de systèmes proches du point critique. Chacune de ces configurations est alors analysée de la même façon.

Pour le modèle Manna comme pour le ROM, nous découpons l'espace cubique de surface  $L \times L$  en une collection compacte de sous-ensembles cubiques de taille  $l \times l$ . En comptant le nombre de particules présentes dans chacun de ces sous-ensembles, nous en déduisons la variance  $\langle \delta n^2 \rangle_l$  associée. Le nombre moyen de particules dans les sous-ensembles est directement donné par  $\langle n \rangle_l = \phi \times l^D$ . Si à petits  $\langle n \rangle_l$  l'évolution est satisfaisante avec une mesure unique, celle à grande échelle nécessite un certain effort numérique. La première raison évidente est le manque d'échantillonnage aux grandes échelles dans les configurations de taille finie : plus  $l$  est grand, moins il y a de sous-compartiments. La seconde raison est que les fluctuations à grande échelle sont associées à des temps de corrélation plus grands, ce qui implique une forte séparation temporelle entre deux configurations quasi-indépendantes dans l'état stationnaire. Afin d'obtenir une statistique raisonnable, chaque mesure associée à une densité  $\phi$  et une portée  $\alpha$  est donc moyennée dans le temps et sur différents états initiaux complètement décorrélés les uns des autres.

### Détermination par redimensionnement

En principe, la forme définie par l'équation 2.14 n'est valable qu'à des échelles de longueur  $l$  suffisamment grandes, soit  $\langle n \rangle_l \gg 1$ . Pour mesurer l'exposant  $\sigma$ , il est donc nécessaire de placer à grande échelle. Par ailleurs, pour sonder un état stationnaire, il est aussi nécessaire de placer à une distance finie  $\delta\phi > 0$  du point critique, sans quoi le système tombera dans un état absorbant. Cette distance finie du point critique définit alors une échelle de longueur  $l_c$ , ou de manière équivalente un cut-off  $\langle n \rangle_c$ , au-delà de laquelle l'évolution algébrique n'est plus valide. En fait, dans nos mesures, au-delà de cette échelle de longueur, la courbe  $\langle \delta n^2 \rangle = f(\langle n \rangle)$  présente un crossover non monotone vers l'évolution triviale  $\sigma = 1$ , aussi distinguable sur l'évolution du facteur de structure [48, 91, 92]. En pratique, au-delà de  $l_c$ , avant que l'exposant effectif local de la courbe  $\langle \delta n^2 \rangle = f(\langle n \rangle)$  ne rejoigne le cas décorrélé avec  $\sigma_{\text{eff}} = 1$ , il diminue ( $\sigma_{\text{eff}} < \sigma$ ). Cette diminution est visible sur les évolutions représentées à la figure 2.12 par exemple. L'évolution globale de  $\langle \delta n^2 \rangle$  à grands  $\langle n \rangle$  peut donc être modélisée par l'équation suivante :

$$\langle \delta n^2 \rangle \sim \langle n \rangle^\sigma g\left(\frac{\langle n \rangle}{\langle n \rangle_c}\right) \quad (2.18)$$

avec  $g$  une fonction initialement décroissante définissant la forme du crossover.

Du fait de la présence de deux crossovers, un de petite taille et un dû à la distance finie au point critique, il peut s'avérer difficile de mesurer l'exposant  $\sigma$  ou  $\lambda$  sur une unique courbe. Une méthode utilisée dans [48] consiste alors à étudier différentes courbes associées à différentes distances du point critique  $\delta\phi$ . En supposant que l'échelle de longueur définissant le cut-off se comporte comme la longueur de corrélation  $\xi \sim \delta\phi^{-\nu_\perp}$ , nous avons  $\langle n \rangle_c \sim \delta\phi^{-D\nu_\perp}$ . Ainsi, en redimensionnant  $\langle n \rangle$  par  $\delta\phi^{-D\nu_\perp}$  et  $\langle \delta n^2 \rangle$  par  $\delta\phi^{-\nu_\perp D\sigma}$ , les courbes obtenues pour différentes densités devraient se superposer sur une même courbe maîtresse. Cela définit alors une potentielle méthode graphique pour la mesure de  $\sigma$ , utilisant les effets de crossover à son avantage. Néanmoins, en pratique, cette méthode peut s'avérer coûteuse numériquement car elle suppose la détermination précise d'un ensemble de courbes à différentes densités  $\phi$ . C'est pourquoi, nous ne l'utiliserons que dans le cas d'une analyse plus poussée.

### 2.4.2.3 Des mesures complexes

Si l'hyperuniformité n'a jamais été mesurée des les modèles de transport à longue portée, celle-ci a fait l'objet de nombreuses études dans le cas de courte portée. Notamment, le ROM et le modèle Manna ont été caractérisés en ce sens à plusieurs reprises.

Les première études ont été menées par Hexner et Levine [48], Tjhung et Berthier [47] et Weijs et al [49]. Dans [47], les auteurs ont mesuré proche de la transition un exposant  $\alpha_{HU} \approx 0.45$  dans le cas du ROM en 2D. En parallèle, l'étude [48] s'est concentrée sur les propriétés de différents modèles appartenant à la classe CDP, dont le modèle Manna et le ROM. Dans le cas bidimensionnel, il a été déterminé  $\lambda \approx 2.45$  et  $\alpha_{HU} \approx 0.45$ , deux mesures cohérentes et indiquant  $\sigma \approx 0.775$ . Ces valeurs ont alors été confirmées dans [49] et comparées à une situation expérimentale. Par la suite, ces résultats furent retrouvés dans des généralisations de ces modèles [91, 93].

Les résultats précédents confortent l'idée que les exposants d'hyperuniformité sont universels, i.e. communs à tous les modèles de la classe CDP. Toutefois, une étude plus récente semble mettre en défaut cette idée. Dans [90], en utilisant des tailles de systèmes plus grandes que dans les études précédentes, les auteurs semblent relever une légère différence de l'ordre de 5% entre les exposants d'hyperuniformité du ROM et du modèle Manna en 2D, qualifiant alors l'hyperuniformité de "faiblement universelle" dans ces modèles. Dans [43], il a par ailleurs été montré que les mesures d'hyperuniformité peuvent être soumises à de forts effets de taille finie, affectant significativement les résultats des mesures. Sans nécessairement remettre en question l'universalité des propriétés hyperuniformes, ces études nous invitent donc à questionner nos méthodes et rester critique face aux mesures que nous présenterons.

## 2.5 Exposants critiques

Afin de préciser quantitativement l'évolution des exposants critiques dans le cadre LR-CDP en 2D, nous nous concentrons d'abord sur sa représentation par le modèle LR-ROM. Dans cette section, nous présentons les résultats obtenus quant à la caractérisation des exposants critiques associés à chaque portée de transport  $\alpha$ .

Dans la [section 2.1](#) nous avons vu que dans ce cadre nous attendions une évolution continue de la criticalité entre  $\alpha = 4$  et  $\alpha = 3$ . Pour  $\alpha \geq 4$  nous nous attendons à retrouver les valeurs des exposants reportées à la première ligne du [tableau 2.1](#). Pour  $\alpha \leq 3$ , nous nous attendons à retrouver les valeurs triviales des exposants associés au champ moyen. Pour cerner et caractériser précisément la zone d'évolution continue des exposants, nous nous attachons par la suite à caractériser les portées de transport dictées par  $\alpha \in \{6, 5, 4, 3.75, 3.5, 3.25, 3, 2.5\}$ .

### 2.5.1 Exposants statiques

En appliquant les méthodes décrites à la [sous-section 2.4.1](#), nous déterminons les densités critiques  $\phi_c$  des systèmes pour chacune des portées  $\alpha$ . Pour ce faire, nous utilisons des

tailles de systèmes allant jusqu'à  $L = 16384$ , correspondant à des nombres de particules allant jusqu'à  $N \approx 6 \times 10^7$ . Un exemple de détermination est représentée à la figure 2.7 dans le cas  $\alpha = 3.75$ . Les exposants  $\beta$  et  $\gamma'$  et leurs incertitudes sont alors mesurés, leurs valeurs sont reportées dans le tableau 2.1 et leurs évolutions sont représentées à la figure 2.9.

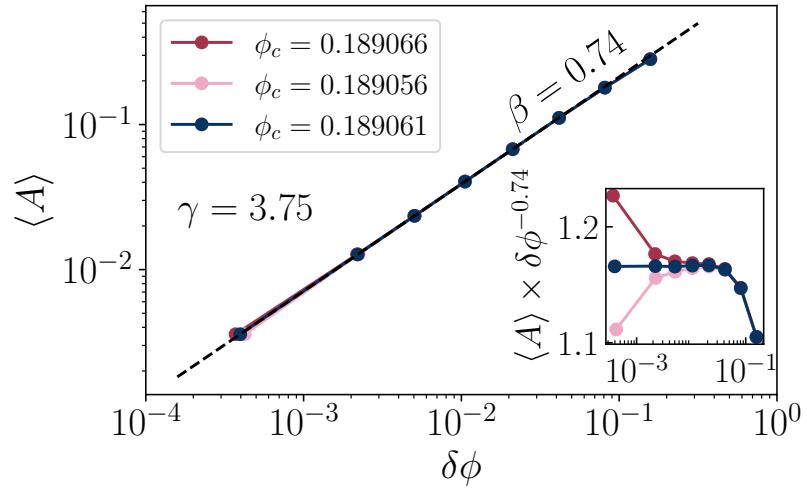


FIGURE 2.7 – Détermination de la densité critique dans le LR-ROM pour  $\alpha = 3.75$ . En encart, la représentation compensée permet de distinguer clairement  $\phi_c = 0.189061$  comme une meilleure estimation que  $\phi_c = 0.189056$  et  $\phi_c = 0.189066$ . **TODO : Diminuer la taille des polices.**

Dans la limite de courte portée, nous retrouvons le comportement critique associé à la classe CDP. Pour  $\alpha > 4$ , nous mesurons  $\beta \approx 0.63$  et  $\gamma' \approx 0.37$ , tous deux en accord avec  $\beta_{\text{CDP}}^{2D} \approx 0.64$  et  $\gamma_{\text{CDP}}^{2D} \approx 0.37$ . À l'opposé, dans la limite de longue portée, nous retrouvons les exposants associés au champ moyen de la classe CDP. Notamment, pour  $\alpha = 2.5$ , l'accord est exact dans la limite des incertitudes de détermination. L'évolution des exposants prend majoritairement place entre  $\alpha = 4$  et  $\alpha = 3$ , en accord avec le cadre théorique. Toutefois, nous notons un léger écart avec les valeurs attendues au niveau de ces bornes. Notamment, pour  $\alpha = 4$ , nous mesurons  $\beta \approx 0.69$  soit une valeur légèrement supérieure à celle associée à la courte portée. Nous discuterons de l'origine potentielle de cet écart dans la section suivante.

En pratique, la détermination de l'exposant  $\nu_\perp$  nécessite l'analyse des corrélations spatiales d'activité dans le système afin d'en déduire la longueur de corrélation  $\xi$  associée. Toutefois, il existe une relation d'échelle entre les exposants  $\beta$ ,  $\gamma'$  et  $\nu_\perp$ , présentée au chapitre 1 :

$$2\beta + \gamma' = \nu_\perp D \quad (2.19)$$

En supposant que celle-ci reste valable à n'importe quelle portée en-dessous de la dimension critique  $D_c = 2(\alpha - D)$ , nous pouvons tirer profit de cette relation pour dériver l'exposant  $\nu_\perp$  associé. En utilisant les valeurs mesurées de  $\beta$  et  $\gamma'$ , nous répertorions dans

le tableau 2.1 la valeur  $\nu_{\perp}^*$  déduite de cette relation. Comme nous l'avons mentionné à la section 2.1, la subtilité est que, en présence d'interactions à longue portée, la valeur champ moyen de cet exposant est donnée par  $\nu_{\perp} = 1/(\alpha - D)$ , et donc dépendante de  $\alpha$ . En gardant cela en mémoire, nous observons de la même façon que les valeurs de  $\nu_{\perp}^*$  suivent une évolution continue de la limite de courte portée avec  $\nu_{\perp} \approx 0.82$  pour  $\alpha > 4$  à la limite de champ moyen avec  $\nu_{\perp} \approx 1 = 1/(\alpha - D)$  pour  $\alpha = 3$ . Pour  $\alpha < 3$ , nous avons  $D > D_c$  et il n'est donc plus possible d'utiliser la relation d'échelle pour déterminer  $\nu_{\perp}$ .

### 2.5.2 Exposant dynamique

L'exposant dynamique  $\delta$  est ensuite déterminé pour chaque portée  $\alpha$  en suivant la méthode de redimensionnement précédemment présentée. Un exemple de détermination est présenté pour  $\alpha = 3.75$  à la figure 2.8. Les valeurs estimées sont reportées dans le tableau 2.1 et leur évolution est représentée à la figure 2.9.

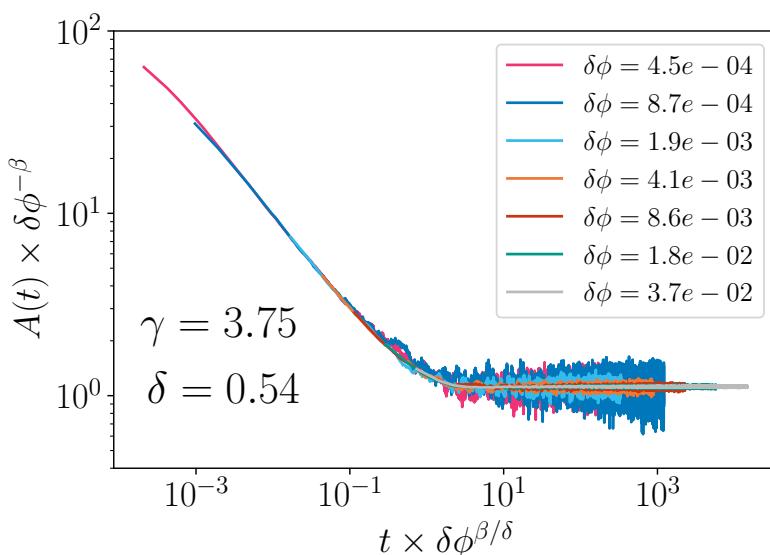


FIGURE 2.8 – Détermination de l'exposant dynamique  $\delta$  par redimensionnement dans le LR-ROM pour  $\alpha = 3.75$ .  
TODO : Redimensionnement police, code couleur et notation  $\gamma \rightarrow \alpha$

Comme dans le cas des exposants statiques, nous retrouvons les comportements limites de champ moyen  $\delta_{\text{CDP}}^{\text{CM}} = 1$  et de courte portée  $\delta_{\text{CDP}}^{2D} \approx 0.42$  dans la limite des petits et des grands  $\alpha$ . De la même façon, l'évolution significative de l'exposant a lieu dans la gamme  $3 < \alpha < 4$  bien que nous notions encore une fois un léger écart aux valeurs attendues au niveau de ces bornes.

Finalement, l'estimation des exposants critiques dans le modèle LR-ROM confirme l'inscription des interactions de transport à longue portée dans le cadre théorique LR-CDP présenté à la section 2.1. En augmentant la portée du transport de matière dans le système, la criticalité passe continûment de son équivalent de courte portée à son équivalent de champ moyen, gardant une évolution concave du paramètre d'ordre ( $\beta < 1$ )

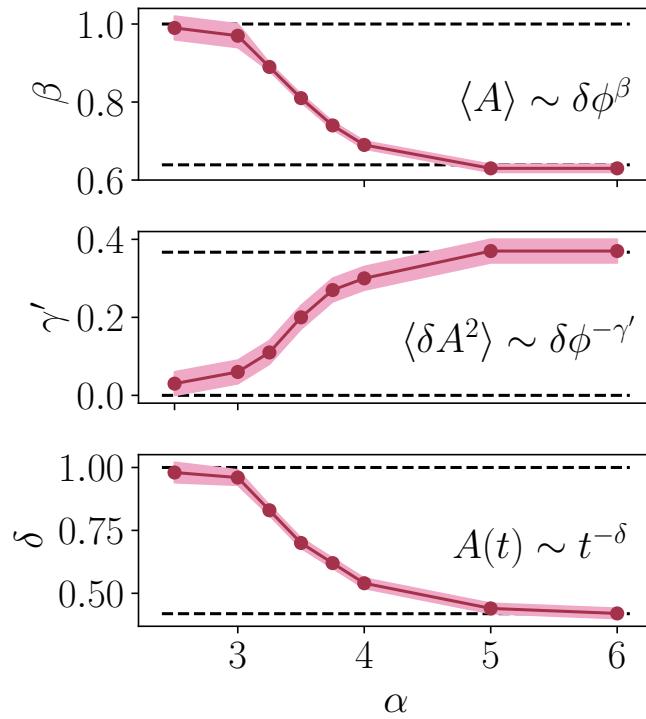


FIGURE 2.9 – Évolution des exposants critiques  $\beta$ ,  $\gamma'$  et  $\delta$  avec la portée dans les modèles LR-ROM. Les zones colorées en rose représentent les incertitudes de détermination.  
TODO : Diminuer la taille des polices

et une divergence des fluctuations à l'approche du point critique ( $\gamma' > 0$ ). Au premier ordre, cette évolution prend effectivement place dans la zone  $3D/2 < \alpha < D + 2$  soit  $3 < \alpha < 4$  dans le cas bidimensionnel.

## 2.6 Hyperuniformité

Dans cette dernière section, nous proposons de conclure la caractérisation quantitative du cadre théorique LR-CDP en 2D en nous intéressant à l'évolution de l'hyperuniformité. Dans la section 2.1, nous avons vu que dans ce cadre nous attendions une évolution continue de l'exposant d'hyperuniformité  $\sigma$  entre  $\alpha = 4$  et  $\alpha = 3$ . Dans la limite de courte portée  $\alpha \geq 4$ , la théorie développée par mapping avec le dépiégeage [43] prédit  $\sigma = 0.75$  tandis qu'elle prédit  $\sigma = 1$  à  $\alpha = 3$ . Entre ces deux limites, des calculs issus du groupe de renormalisation fonctionnel permettent de prédire l'évolution de l'exposant  $\sigma$  avec  $\alpha$ . Dans la suite de cette étude, nous proposons de confronter ces calculs théoriques via la caractérisation des propriétés hyperuniformes des modèles LR-ROM et LR-Manna pour différentes portées de transport  $\alpha$ . Ce travail, mené en collaboration étroite avec K. Wiese, est encore au stade préliminaire mais les premiers résultats associés soulèvent des points intéressants qu'il semble judicieux de faire figurer dans cette thèse, bien qu'ils n'en constituent pas l'objet principal. Notamment, nous montrons que les mesures d'hyperuniformité dans ces modèles se révèlent particulièrement exigeantes.

$\alpha$	$\beta$	$\gamma'$	$\delta$	$\nu_{\perp}^*$	$\nu_{\perp}^{\text{CM}}$
CDP [19]	0.64	0.37	0.42	0.80	0.50
6	0.63	0.37	0.42	0.82	0.50
5	0.63	0.37	0.44	0.82	0.50
4	0.69	0.30	0.54	0.84	0.50
3.75	0.74	0.27	0.62	0.88	0.57
3.5	0.81	0.20	0.70	0.91	0.67
3.25	0.89	0.11	0.83	0.95	0.80
3	0.98	0.06	0.96	1.01	1.00
2.5	0.99	0.03	0.98	-	2.00

TABLE 2.1 – Exposants critiques  $\beta$ ,  $\gamma'$  et  $\delta$  déterminés dans les modèles LR-ROM en 2D. La troisième colonne représente l'exposant  $\nu_{\perp}$  dérivé par la relation d'échelle (équation 2.19) et la quatrième l'exposant champ moyen associé à chaque portée  $\alpha$

### 2.6.1 Hyperuniformité dans le LR-ROM

En utilisant la méthode de box-counting présentée à la sous-section 2.4.2, nous commençons par caractériser les propriétés hyperuniformes des transitions du LR-ROM pour  $\alpha \in \{5, 4, 3.75, 3.5, 3.25, 3\}$ . Afin d'opérer une comparaison juste entre toutes ces portées, nous étudions chacune d'elle pour une distance similaire au point critique  $\delta\phi \approx 1 \times 10^{-3}$  et une taille de système  $L = 4096$ .

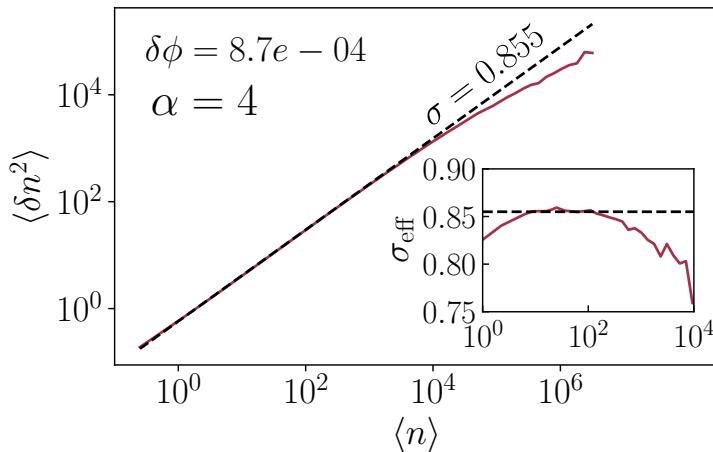


FIGURE 2.10 – Estimation de l'exposant d'hyperuniformité  $\sigma$  dans le LR-ROM pour  $\alpha = 4$ . En encart, l'exposant effectif local, déterminé comme la dérivée logarithmique de la courbe représentée en figure principale. **TODO : Harmoniser**

Nous présentons un exemple de mesure obtenue pour  $\alpha = 4$  à la figure 2.10. Une manière plus fine d'analyser ces résultats est de calculer la dérivée logarithmique de la courbe  $\langle \delta n^2 \rangle = f(\langle n \rangle)$ , afin d'obtenir une mesure de l'exposant effectif  $\sigma_{\text{eff}}$  dépendante de l'échelle de longueur considérée. Celle-ci est représentée dans l'encart de la même figure. Comme

nous l'avons mentionné précédemment, les propriétés universelles d'hyperuniformité sont valables entre deux crossovers : un de petite échelle (détails microscopiques non-universels) et un de grande échelle<sup>4</sup> (distance finie du point critique). Afin de déterminer  $\sigma$ , nous devons donc nous situer entre ces deux limites. Le choix que nous faisons pour l'estimation de  $\sigma$  est alors de retenir la valeur de l'exposant effectif dans la zone sur laquelle il varie très peu, i.e. entre la croissance à petite échelle et la décroissance à grande échelle. Dans l'exemple de la figure 2.10, celle-ci se situe entre  $\langle n \rangle \approx 10$  et  $\langle n \rangle \approx 1000$  (**TODO : question pour la remarque de Romain**) et donne  $\sigma \approx 0.855$ .

En appliquant la même procédure pour les différentes portées  $\alpha$ , nous obtenons l'évolution des exposants d'hyperuniformité présentée à la figure 2.11, mise en comparaison avec les résultats théoriques [73]. Nous remarquons alors que pour  $3.25 < \alpha < 3.75$  les mesures sont très proches de l'attendu théorique. Toutefois, il existe un fort désaccord entre théorie et simulations pour les plus courtes portées  $\alpha \geq 4$ . En effet, nous attendons dans cette zone un plateau à  $\sigma = 0.75$ . Or ici, pour  $\alpha \geq 4$ ,  $\sigma$  semble encore diminuer légèrement avec  $\alpha$  et prend des valeurs bien plus grandes que  $\sigma = 0.75$ . D'autre part, la valeur  $\sigma \approx 0.96$  pour  $\gamma = 3$  est aussi légèrement différente de l'attendu champ moyen  $\sigma = 1$ . Malgré cela, nous retrouvons bien la tendance générale d'une hyperuniformité progressivement perdue avec l'augmentation de la portée du transport. Dans la suite de cette section, nous proposons des explications aux désaccords entre les résultats préliminaires obtenus dans le cadre de la caractérisation du LR-ROM et la théorie issue des calculs du groupe de renormalisation fonctionnel.

## 2.6.2 Difficultés dans les mesures d'hyperuniformité

### 2.6.2.1 Importance de la conservation du centre de masse

Une première explication à ces différences vient du mouvement du centre de masse du système. En effet, dans la théorie de champ associée à CDP permettant d'effectuer les prédictions pour  $\sigma$  présentées précédemment, le centre de masse du système est une quantité conservée [94]. Or dans le LR-ROM, les sauts aléatoires des particules actives ne conservent ce centre de masse qu'en moyenne, leur direction étant complètement aléatoire. La rupture de cette symétrie fondamentale, directement reliée à la répartition des particules dans le système, pourrait donc affecter nos mesures de l'hyperuniformité et expliquer un désaccord avec les prédictions du cadre LR-CDP.

---

4. En théorie il existe une troisième limite à ces mesures, provenant de la taille finie du système. En fait pour une taille de sous-compartiment proche de la taille du système, même pour un système hyperuniforme à toutes les échelles de longueur, l'évolution  $\langle \delta n^2 \rangle = f(\langle n \rangle)$  opère une décroissance. Cela se reflète dans le fait que pour  $\langle n \rangle = N$  on a  $\langle \delta n^2 \rangle = 0$ . Dans le cas d'une distribution poissonnienne des positions cette décroissance est représentée par :

$$\langle \delta n^2 \rangle = \langle n \rangle \left( 1 - \frac{\langle n \rangle}{N} \right) \quad (2.20)$$

Si cette limite de grande échelle se retrouve bien dans nos données, celle-ci se situe toujours à des échelles bien plus grandes que celle définie par la distance finie au point critique. Ainsi, nous n'avons pas besoin de nous préoccuper de cet effet en pratique.

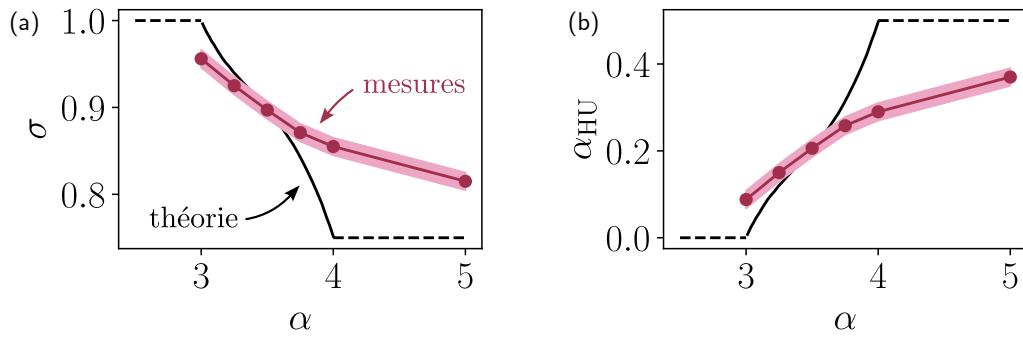


FIGURE 2.11 – (a) Évolution de l'exposant d'hyperuniformité  $\sigma$  avec la portée dans les modèles LR-ROM. La courbe noire représente les prédictions théoriques [34, 43, 73]. Les zones colorées rose représentent les incertitudes de détermination. (b) Déduction de l'évolution de l'exposant  $\alpha_{HU}$  se basant sur l'équation 2.15.

La façon la plus simple de le remarquer est de se placer dans le cas de la courte portée. Prenons le modèle Manna, appartenant à la classe CDP, et considérons deux de ses représentations. Dans la première représentation du modèle, l'implémentation est faite de la manière décrite à la sous-section 2.3.1, i.e. avec une redistribution aléatoire des particules sur les sites voisins. Celle-ci ne conserve donc pas le centre de masse du système. Dans la seconde représentation, lorsqu'un site est actif, il redistribue aléatoirement (i.e. dans une des deux directions du plan) une paire de particules sur deux sites voisins opposés, de manière à conserver le centre de masse du système à chaque instant. En effectuant alors des mesures sur ces deux représentations dans des configurations équivalentes avec  $L = 4096$  et  $\langle A \rangle \approx 2 \times 10^{-3}$ , nous obtenons les résultats présentés à la figure 2.12-(a)-(b).

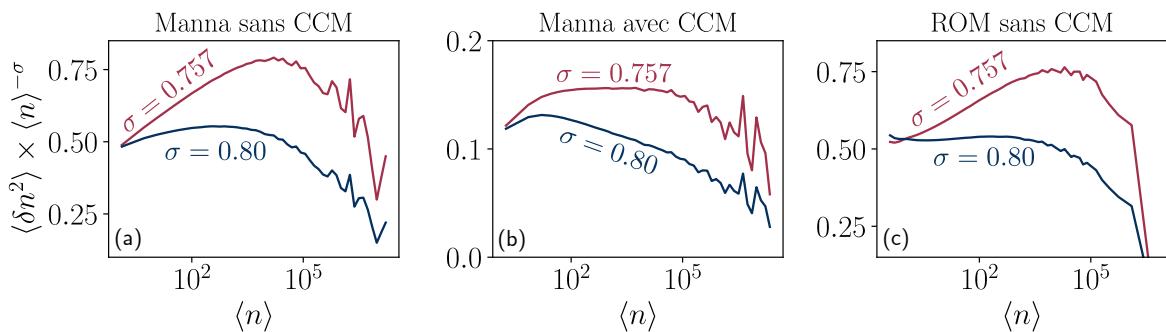


FIGURE 2.12 – Représentation compensée de l'évolution de  $\langle \delta n^2 \rangle$  avec  $\langle n \rangle$  par une loi de puissance test dans (a) le modèle Manna sans conservation de la position du centre de masse ( $\phi = 1.30628$ ), (b) le modèle Manna avec conservation de la position du centre de masse ( $\phi = 1.75895$ ) et (c) le ROM ( $\phi = 0.235248$ ). Les courbes rouges représentent la compensation par l'exposant test  $\sigma = 0.757$ , adéquate pour le modèle conservant la position du centre de masse, et les courbes bleues représentent la compensation par l'exposant test  $\sigma = 0.80$ , adéquat pour les modèles ne conservant pas la position du centre de masse.

En représentant l'évolution  $\langle \delta n^2 \rangle = f(\langle n \rangle)$  compensée par une loi test  $\langle n \rangle^\sigma$ <sup>5</sup>, ces mesures nous permettent d'estimer deux exposants distincts pour chacune des représentations :  $\sigma \approx 0.76$  dans le cas où le centre de masse est conservé et  $\sigma \approx 0.80$  dans le cas où il ne l'est pas. Dans le cas du ROM (donc avec des sauts courts) sans conservation du centre de masse, nous mesurons aussi dans ces mêmes conditions  $\sigma \approx 0.80$ , comme présenté à la figure 2.12-(c).

Ces résultats suggèrent donc que la conservation du centre de masse joue un rôle essentiel dans les propriétés hyperuniformes du système. Notamment lorsque celle-ci est bafouée, il semble que cela revient à surestimer l'exposant  $\sigma$  et donc diminuer l'hyperuniformité dans le système. Cela explique en partie pourquoi, dans le cas du LR-ROM, nous obtenons à  $\alpha = 4$  une mesure de  $\sigma \approx 0.86$  significativement plus grande que la valeur attendue  $\sigma = 0.75$ . Toutefois, cette valeur reste encore relativement éloignée de la valeur  $\sigma \approx 0.80$  obtenue ici dans la limite de courte portée. Une explication à cette différence subsistante pourrait venir de la taille finie des systèmes étudiés.

### 2.6.2.2 Effet de taille finie

Si la loi de distribution des sauts des particules actives est une loi de puissance parfaite grâce à notre méthode de génération, en pratique elle se retrouve modifiée par sa mise en place dans un système de taille finie. En effet, par application des conditions aux limites périodiques, tous les sauts de taille  $\Delta \gtrsim L$  se voient "repliés" dans l'espace périodique, changeant ainsi la distribution effective des sauts des particules actives. De plus, cette loi algébrique n'est définie que pour  $\Delta > 1$ , du fait de l'introduction d'une distance de saut minimale lors de l'implémentation numérique.

Dans les approches théoriques permettant la prédiction de l'exposant  $\sigma$ , l'interaction à longue portée est considérée dans l'espace réciproque [73]. Dans l'hypothétique système parfait et infini sur lequel se basent ces prédictions, la transformée de Fourier de la distribution de taille des sauts est définie par :

$$\hat{P}_\Delta(q) \sim 1 - |q|^{D-\alpha} \quad (2.21)$$

soit correspondant à la fonction caractéristique d'une loi stable  $S_{D-\alpha}$  dans la limite de petit  $q$ <sup>6</sup>. Une hypothèse est alors que dans nos simulations, dû à la taille finie du système et à l'introduction d'un cut-off, les distributions s'éloignent de cet attendu par l'addition de termes réguliers dans le développement de la fonction caractéristique :

$$\hat{P}_\Delta(q) \sim 1 - |q|^{D-\alpha} + q^2 + \dots \quad (2.22)$$

Dans ce cas, nous pouvons nous attendre à ce que lorsque  $\alpha \rightarrow D + 2$ , soit  $\alpha = 4$  dans notre cas, le premier terme régulier en  $q^2$  devienne sous-dominant par rapport au terme en  $|q|^{D-\alpha}$  et écarte significativement la distribution de celle utilisée dans la théorie<sup>7</sup>.



5. Cette méthode de mesure est similaire à celle de la dérivée logarithmique mais permet de travailler avec des signaux plus bruités

6. Dans le cas d'une loi stable  $S_{D-\alpha}$  on a en effet  $\hat{P}_\Delta(q) \sim \exp(-|q|^{D-\alpha})$

7. Après ça devrait l'écartez dans l'autre sens dans ce cas non ?

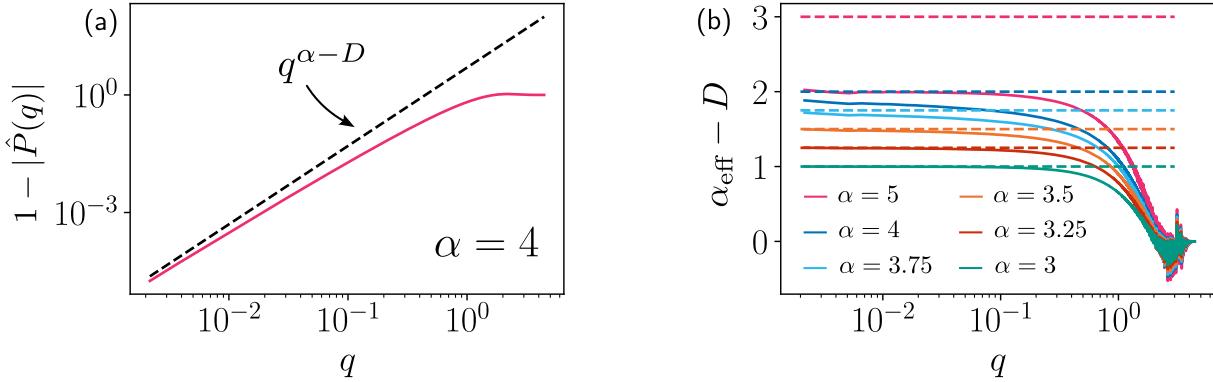


FIGURE 2.13 – (a) Évolution de la quantité  $1 - |\hat{P}_\Delta(q)|$  avec  $q$  pour le LR-ROM avec  $\alpha = 4$ . En pointillé noir, le cas idéal sur lequel se basent les prédictions théoriques. (b) Exposant effectif obtenu par dérivée logarithmique de la courbe représentée en (a) pour toutes les portées  $\alpha$ . En pointillés de même couleur, la valeur  $D - \alpha$  associée.  
TODO : Changer couleurs

Pour le vérifier, nous considérons le cas du LR-ROM pour  $L = 4096$ , dans lequel mesurons la distribution de probabilité  $P(\mathbf{r})$  d'effectuer un déplacement  $\mathbf{r}$  dans le système suite à un saut actif. En pratique nous en réalisons l'histogramme sur la grille introduite précédemment dans le cadre de la méthode cell-list. En prenant la transformée de Fourier discrète bidimensionnelle de cette distribution nous obtenons par une moyenne isotrope un équivalent de la distribution recherchée  $\hat{P}_\Delta(q)$ . Sur la figure 2.13, nous représentons  $1 - |\hat{P}_\Delta(q)|$  en fonction de  $q$  pour  $\alpha = 4$  et la dérivée logarithmique obtenue de ces courbes pour chaque  $\alpha$ , définissant alors un exposant effectif local  $\alpha_{\text{eff}}$ . Pour chacune de ces portées, nous représentons en pointillés l'hypothèse théorique d'un exposant  $\alpha - D$ .

Nous observons alors effectivement une déviation de l'idéal théorique, d'autant plus que  $\alpha$  se rapproche de  $\alpha = 4$ . De plus, pour  $\alpha = 5$ , nous obtenons un exposant effectif  $\alpha_{\text{eff}} \approx 2$ , signe de la prédominance du terme en  $q^2$  dans l'équation 2.22 proposée précédemment, justifiant de ce fait notre raisonnement. À la vue de ces observations, il est donc possible que les propriétés d'hyperuniformité du système soient effectivement affectées par les détails de l'implémentation des sauts à longue portée, et ce d'autant plus que  $\alpha$  est proche de  $\alpha = 4$ . Ceci, conjointement au fait de non conservation de la position du centre de masse, pourrait expliquer le désaccord avec la théorie des résultats préliminaires obtenus dans le cas du LR-ROM.

### 2.6.3 Hyperuniformité dans le modèle LR-Manna

#### 2.6.3.1 Résultats préliminaires

Pour aller un peu plus loin, nous proposons d'étudier l'hyperuniformité dans les modèles de transport à longue portée au plus proche possible des conditions d'applications des prédictions théoriques afin de les confronter directement. Pour ce faire, nous considérons le modèle LR-Manna dans sa version qui inclue la conservation de la position du centre de masse. Ce choix n'est pas anodin. Ce modèle étant plus simple que le LR-ROM, il est plus aisé dans ce cas de considérer des tailles de systèmes plus grandes, et ainsi se rapprocher de la limite théorique de système infini. Nous appliquons alors la méthode de box-counting

sur des systèmes allant jusqu'à des tailles  $L = 16384$  et des distances au point critique allant jusqu'à  $\delta\phi \approx 5 \times 10^{-5}$  pour chaque portée  $\alpha \in \{4, 3.75, 3.5, 3.25, 3\}$ . La figure 2.14 présente les résultats obtenus pour  $\alpha = 4$  pour toutes les densités considérées.

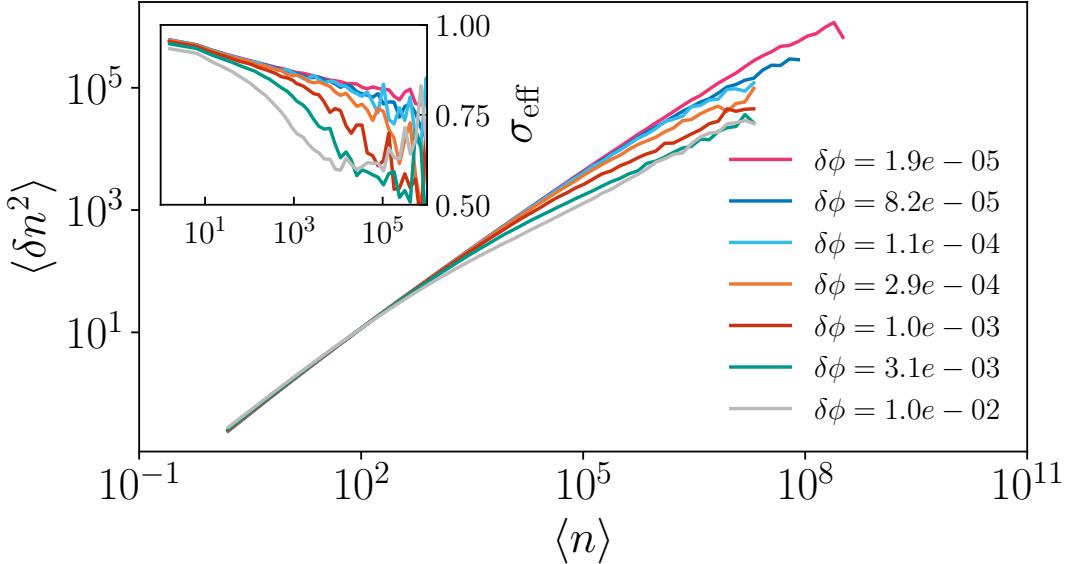


FIGURE 2.14 – Évolution de  $\langle \delta n^2 \rangle$  avec  $\langle n \rangle$  dans le cas du modèle LR-Manna avec conservation de la position du centre de masse pour  $\alpha = 4$  à différentes distances  $\delta\phi$  du point critique. En encart, l'évolution de l'exposant effectif mesuré par dérivation logarithmique des courbes en figure principale. **TODO : Diminuer la taille des polices**

Dans l'encart de cette figure, nous représentons l'exposant effectif local  $\sigma_{\text{eff}}$  obtenu par dérivation logarithmique des courbes en figure principale. De manière assez surprenante, celui-ci semble évoluer de manière significative avec l'échelle de longueur considérée. Plus précisément, cette dépendance avec  $\langle n \rangle$  semble être presque logarithmique, voire une loi de puissance de très faible exposant, jusqu'à un cut-off dépendant de la distance au point critique  $\delta\phi$ . Plus le système est proche du point critique, plus cette décroissance s'étend sur une large gamme d'échelles de longueur. Pour la distance la plus proche du point critique étudiée  $\delta\phi \approx 2 \times 10^{-5}$ , il semblerait que cette évolution commence tout juste à arriver à saturation à grande échelle (léger début d'infexion de la courbe) avant l'apparition du cut-off, suggérant le début d'une convergence vers la valeur asymptotique  $\sigma$  de la limite thermodynamique de grande échelle.

Cette analyse des données préliminaires ne permet donc pas la mesure d'un exposant unique dans la limite de grande échelle et suggère qu'une meilleure approche du point critique est nécessaire pour cela. Les modèles Manna et ROM étant dans la même classe d'universalité, nous pouvons considérer qu'il en est en fait de même pour les données présentées à la figure 2.11. Ceci expliquerait une partie du désaccord avec la prédition théorique, notamment le fait que pour  $\alpha = 4$ , nos mesures ne convergent pas vers celles obtenues à courte portée.

Dans le cadre du modèle LR-Manna, en prenant l'exemple de la portée  $\alpha = 4$  et en considérant qu'à taille de système infinie nous attendons  $\sigma = 0.75$ , l'analyse de ces données suggère que le régime algébrique est atteint, pour un système infini, pour  $\langle n \rangle^* \gg 2 \times 10^7$  soit  $l^* \gg 4 \times 10^3$ . Afin de le mesurer directement, il faut donc parvenir à sonder un état pour lequel la longueur de corrélation  $\xi$  associée est telle que  $\xi \gg l^*$ . Or, avec les ressources actuellement à notre disposition, nous pouvons difficilement envisager des tailles de systèmes  $L > 16384$  et donc atteindre une telle longueur de corrélation sans tomber dans un état absorbant.

Dans le cas des plus grandes portées  $\alpha < 4$ , l'analyse est parfois un peu moins défavorable (essentiellement pour le cas  $\alpha = 3$ ) mais conserve les mêmes conclusions. Dans la suite, en nous basant sur ces observations préliminaires, nous proposons une piste permettant une estimation de l'exposant d'hyperuniformité  $\sigma$  de la limite thermodynamique à chaque portée, ou à défaut une borne supérieure raisonnable de son encadrement.

### 2.6.3.2 Perspectives

Comme nous l'avons présenté précédemment, une manière de mesurer efficacement l'hyperuniformité dans un système est de procéder à une méthode de redimensionnement par la distance au point critique. En suivant [48], nous redimensionnons donc la dimension de la boîte de comptage  $l$  par  $\delta\phi^{-\nu_\perp^*}$ ,  $\nu_\perp^*$  étant l'exposant de corrélation spatiale dérivé précédemment de la relation d'hyperscaling. Cela revient alors à redimensionner  $\langle n \rangle_l$  par  $\delta\phi^{-D\nu_\perp^*} = \delta\phi^{-2\beta-\gamma'}$ . Parallèlement, nous redimensionnons  $\langle \delta n^2 \rangle$  par  $\delta\phi^a$  avec  $a$  un exposant test afin d'espérer une superposition des courbes sur une courbe maîtresse. Ce faisant, il n'est en pratique pas aisément de déterminer un critère de bonne superposition puisque cette dernière n'est possible que localement. Pour s'en apercevoir, un exemple de redimensionnement pour  $\alpha = 4$  est donné sur la figure 2.15-(a), dans lequel nous avons essayé de superposer la région à grand  $\langle n \rangle$ . Une méthode de cette nature ne semble donc pas pouvoir nous informer davantage.

Toutefois, si nous opérons la même procédure sur l'exposant effectif (i.e. la dérivée logarithmique de ces courbes), il est possible de superposer toutes ses évolutions sur une courbe maîtresse. Un exemple est donné dans le cas  $\alpha = 4$  sur la figure 2.15-(b) et le cas des autres portées est relégué à la sous-section 6.2.1. De cette façon, il est possible d'en déduire précisément l'évolution algébrique de  $\sigma_{\text{eff}}$  avec  $\langle n \rangle$ . Par ailleurs, nous remarquons que pour les distances  $\delta\phi$  les plus petites, les courbes semblent s'éloigner légèrement, en moyenne, de cette superposition<sup>8</sup>. Cet écart correspondrait alors au début de saturation vers l'exposant asymptotique déjà suggéré sur les données brutes. En d'autres termes, il semblerait que l'exposant effectif suive une évolution du type :

$$\sigma_{\text{eff}} = (\sigma + \langle n \rangle^{-x}) g\left(\frac{\langle n \rangle}{\langle n \rangle_c}\right), \quad \langle n \rangle_c \sim \delta\phi^{-D\nu_\perp} \quad (2.23)$$

avec  $g$  une fonction à décroissance rapide. En pratique nous mesurons un exposant  $x < 0.015$ , décroissant davantage avec l'augmentation de la portée de l'interaction et donc la

8. Cette observation reste discutable du fait du bruit présent sur ces données préliminaires

diminution de  $\alpha$ .  $\alpha = 4$  constitue donc le cas de plus forte dépendance de  $\sigma_{\text{eff}}$  avec  $\langle n \rangle$  même si celle-ci reste très ténue.

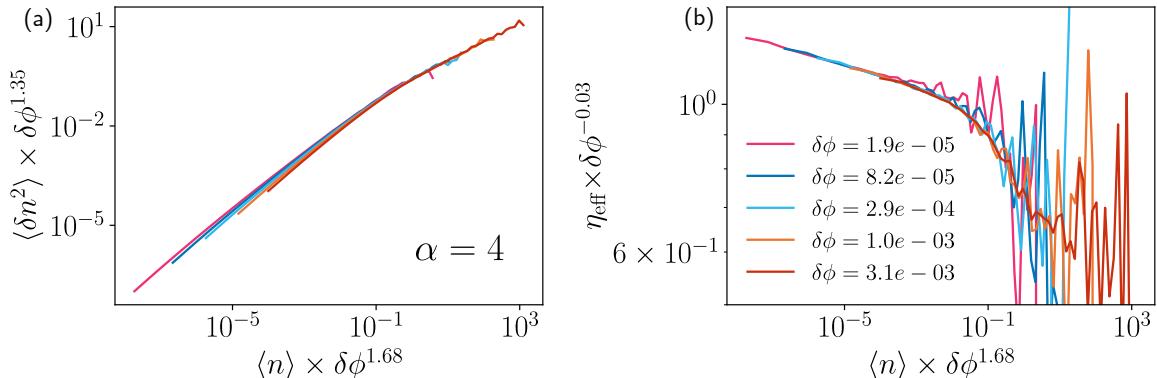


FIGURE 2.15 – Redimensionnement des mesures d’hyperuniformité dans le cas du modèle LR-Manna avec conservation de la position du centre de masse pour  $\alpha = 4$ . Le redimensionnement par la distance au point critique  $\delta\phi$  est appliquée sur (a) les données brutes et (b) l’exposant effectif obtenu par dérivée logarithmique.  
TODO : Changer couleurs

Cette méthode d’analyse, si elle ne nous permet pas de conclure sur la base de ces données préliminaires, présente un grand avantage : elle permet de déterminer sur une courbe  $\langle \delta n^2 \rangle = f(\langle n \rangle)$  donnée la zone affectée par la distance finie au point critique considérée (i.e. l’influence du cut-off). Elle permet donc, si la forme donnée à l’équation 2.23 est valide, de déterminer une borne supérieure sur l’encadrement de  $\sigma$ . En effet, dans ce cadre, tous les points sur la décroissance purement algébrique vérifient  $\sigma_{\text{eff}} > \sigma$ . Par ailleurs dans le cas le plus favorable  $\alpha = 3$  où la saturation vers l’exposant asymptotique semble être atteinte, nous pouvons estimer une valeur de  $\sigma$ , voire même une borne inférieure de l’encadrement. Ainsi, ces données préliminaires nous permettent de placer des indications de comparaison à la théorie sur la figure 2.16. L’affinage nécessaire de ces estimations exige cependant un effort ultérieur.

La détermination des propriétés hyperuniformes dans les modèles de sauts à longue portée exige donc de se placer à de très grandes échelles de longueur et donc des densités très proches du point critique. Il semble alors que c’est cette observation, plus que celle de la taille finie du système, ajoutée à celle concernant l’influence de la conservation du centre de masse, qui explique pourquoi nos mesures préliminaires dans le cadre du LR-ROM s’éloignent des prédictions théoriques.

En conclusion, cette étude préliminaire révèle que les mesures de l’hyperuniformité dans ces modèles semblent relever d’une tâche très exigeante. La caractérisation quantitative des exposants  $\sigma$  et leur évolution précise avec la portée  $\alpha$  n’étant pas essentielles au reste de notre propos, nous nous limiterons à cette détermination au premier ordre. Celle-ci décrit alors, comme prédit par la théorie, une perte progressive de l’hyperuniformité dans le système avec l’augmentation de la portée de  $\alpha = 4$  à  $\alpha = 3$ . Ces éléments nous suffiront



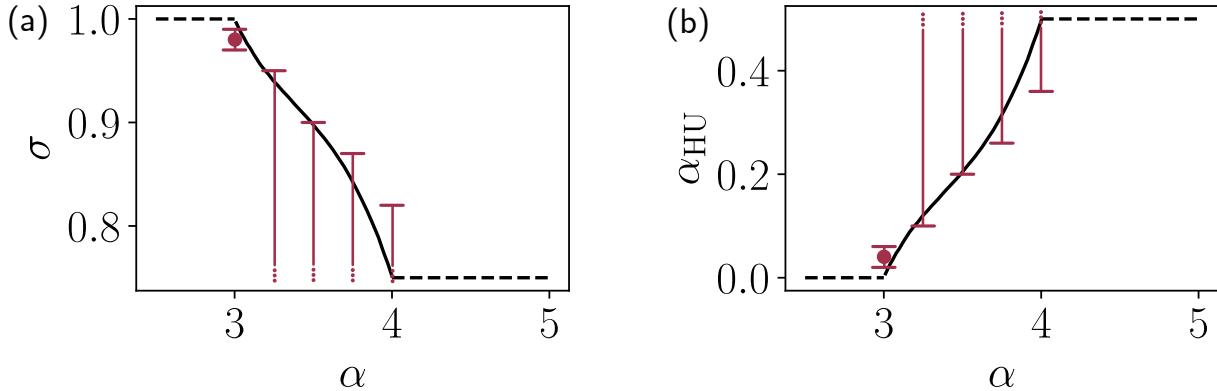


FIGURE 2.16 – (a) Estimation de l'exposant d'hyperuniformité  $\sigma$  dans le modèle LR-Manna avec conservation de la position du centre de masse pour les différentes portées  $\alpha$ . En pratique, il n'est possible d'encadrer et d'estimer la valeur de  $\sigma$  que pour  $\alpha = 3$ . Pour  $\alpha > 3$ , nous proposons tout de même une borne supérieure de l'encadrement de cet exposant. En trait noir, les prédictions issues du mapping sur la transition de dépiégeage [73]. (b) Déduction de l'évolution de l'exposant  $\alpha_{HU}$  se basant sur l'équation 2.15. **TODO : Diminuer la taille des polices**

à contraster les évolutions observées en présence d'interactions médiées à longue portée dans les transitions de réversibilité et d'écoulement.

### 2.6.3.3 Retour sur les exposants critiques

La nécessité de s'approcher extrêmement près du point critique pour observer la criticalité de la limite thermodynamique pourrait aussi avoir un impact sur la détermination des exposants critiques présentée à la section 2.5. Cela pourrait expliquer pourquoi dans le cas identifié comme le plus défavorable  $\alpha = 4$ , nous observons un écart à la limite de courte portée concernant les exposants  $\beta$ ,  $\gamma'$  et  $\delta$ .

Toutefois, cette dépendance n'est pas évidente dans ces cas. En effet, sous un choix adéquat de densité critique  $\phi_c$ , les différentes lois de puissance déterminées sont bien plus convaincantes que celles obtenues par la méthode de box-counting dans le cadre de la mesure de l'hyperuniformité. Nous pouvons supposer par ailleurs que la conservation ou non de la position du centre de masse joue un rôle moins important dans le cas des exposants liés à l'activité dans le système ( $\beta$ ,  $\gamma'$ ,  $\delta$ ) plutôt qu'à la répartition de la masse ( $\sigma$ ). Pour étudier ces hypothèses, il faudrait notamment sonder des états plus proches du point critique, requérant de fait une mobilisation de ressources numériques très importantes. Le but de ce travail étant essentiellement de caractériser une base de comparaison pour les études suivantes, nous nous limiterons aussi pour ces exposants à cette détermination de première ordre, tout de même relativement convaincante.

## 2.7 Conclusion de chapitre

Dans ce chapitre, nous avons défini le cadre théorique LR-CDP, représentant la présence d'un transport à longue portée dans la classe CDP. Par une analyse d'échelle et des

résultats pré-existants, nous avons prédit dans ce cadre l'évolution de la criticalité avec la portée des interactions  $\alpha$ . Notamment, en 2D, celle-ci prend place entre  $\alpha = 4$  et  $\alpha = 3$ .

Pour préciser ce cadre, nous avons ensuite étudié des modèles emblématiques de la classe CDP auxquels nous avons ajouté un mécanisme de transport à longue portée. En caractérisant les transitions de phase absorbante associées à chaque portée de transport, nous avons montré que les exposants critiques évoluent continûment avec la portée du transport, allant de leur équivalent de courte portée à leur équivalent de champ moyen. Au premier ordre, cette évolution se fait dans la gamme de portées effectivement prédite par la théorie LR-CDP.

Dans une seconde partie, nous avons présenté une étude préliminaire des propriétés d'hyperuniformité de ces systèmes et leur évolution avec la portée du transport. La détermination des exposants critiques dans ce cadre s'est alors révélée bien plus compliquée, révélant un écart avec les prédictions théoriques dont nous avons proposé deux explications complémentaires. La première vient de la conservation de la position du centre de masse qui est essentielle à la correspondance aux prédictions théoriques. La seconde vient d'un comportement pré-asymptotique s'étendant sur de très grandes plages d'échelles de longueur, rendant difficile l'estimation du comportement dans la limite thermodynamique.

En conclusion, cette étude nous a permis de préciser la zone flottante d'évolution des exposants critiques située entre  $\alpha = 3$  et  $\alpha = 4$  en deux dimensions. Grâce à cet ajout, nous disposons d'un cadre mieux défini pour décrire l'évolution de la criticalité des systèmes sous l'ajout d'un transport à longue portée. Dans la suite de cet ouvrage, nous nous servirons de cette base de comparaison afin de montrer que les interactions à longues portées, lorsqu'elles correspondent à des interactions médiées par le milieu non équivalentes à un transport, font évoluer la criticalité des systèmes d'une manière tout à fait différente.



# Chapitre 3

## Transition de réversibilité dans les suspensions cisaillées cycliquement

Dans le [chapitre 1](#) nous avons vu que, sous cisaillement cyclique, les suspensions peuvent être soumises à une transition de réversibilité. Celle-ci peut être interprétée comme une transition de phase absorbante [5, 6, 27, 95]. Le paramètre de contrôle de cette transition est alors l'amplitude de cisaillement appliquée  $\gamma_0$  et le paramètre d'ordre le coefficient de diffusion stroboscopique des particules  $D_0$ . Dans la phase absorbante, pour  $\gamma_0 < \gamma_{0,c}$ , les particules de la suspension suivent un mouvement réversible, caractérisé par  $D_0 = 0$ . Dans la phase active, pour  $\gamma_0 > \gamma_{0,c}$ , les interactions irréversibles entre particules induisent une diffusion stroboscopique des particules d'un cycle à l'autre, caractérisée par  $D_0 > 0$ . Proche de la transition ( $\gamma_0 \approx \gamma_{0,c}$ ),  $D_0$ , ses fluctuations  $\langle \delta D_0^2 \rangle$  et la longueur de corrélation associée au système suivent une évolution dictée par les exposants critiques  $\beta$ ,  $\gamma'$  et  $\nu_\perp$  :

$$D_0 \sim \delta\gamma_0^\beta, \quad \langle \delta D_0^2 \rangle \sim \delta\gamma_0^{-\gamma'}, \quad \xi \sim \delta\gamma_0^{-\nu_\perp}, \quad \delta\gamma_0 = \frac{\gamma_0 - \gamma_{0,c}}{\gamma_{0,c}} \quad (3.1)$$

Les modélisations simples de ce système [6, 27, 95] semblent placer ce phénomène critique dans la classe d'universalité CDP. Toutefois, en considérant les interactions entre les particules, médiées par le fluide suspendant, Mari et al. [14] ont proposé un modèle présentant une criticalité très différente. Alors que pour la classe CDP l'évolution du paramètre d'ordre est concave ( $\beta < 1$ ) et ses fluctuations divergentes ( $\gamma' > 0$ ), le modèle prenant en compte les interactions médiées définit une évolution convexe du paramètre d'ordre ( $\beta > 1$ ) et des fluctuations qui s'annulent au point critique ( $\gamma' < 0$ ).

Dans le [chapitre 2](#), nous avons vu que l'introduction de la longue portée sous forme de transport à longue portée dans un modèle appartenant à la classe CDP permettait de passer continûment de la criticalité de courte portée à celle de champ moyen. Cette évolution canonique suit un cadre théorique que nous avons appelé LR-CDP. Dans ce cas, nous avons sur toute cette gamme  $\beta \leq 1$  et  $\gamma' \geq 0$ . La criticalité exposée par le modèle prenant en compte les interactions médiées semble donc échapper à ce cadre.

Dans ce chapitre, nous proposons d'étudier plus en profondeur le modèle proposé par Mari et al. [14] afin de comprendre comment les interactions médiées à longue portée

induisent une criticalité différente de celle induite par le transport à longue portée. Pour ce faire, nous présenterons un modèle numérique capable de prendre en compte ces interactions de manière spatialisée dans le système. Nous étudierons alors le comportement critique associé à ce modèle et sa dépendance en portée de l'interaction d'un point de vue statique, dynamique et structurel. Nous proposerons enfin un cadre de description champ moyen pour interpréter les fortes différences de comportement critique observées entre ce modèle et le cadre de référence LR-CDP.

### 3.1 Importance de la spatialisation des interactions

#### Limite de l'approche champ moyen

Dans leur modèle initial, Mari et al. [14] ont implémenté les interactions à longue portée médiées par le fluide d'un point de vue champ moyen. Les détails de cette implémentation seront donnés dans la section suivante. Dans cette approche, chaque particule est soumise à une interaction médiée moyenne<sup>1</sup>, assimilée à une sorte de diffusion, qui dépend uniquement du nombre instantané de particules subissant une interaction de contact irréversible dans le système. En d'autres termes, peu importe la distance d'une particule à un évènement irréversible, l'impact de ce dernier sur elle reste le même. Via ce modèle en deux dimensions, les auteurs ont mené des analyses numériques permettant de déterminer précisément la valeur des exposants critiques associés au paramètre d'ordre :

$$\beta \approx 1.85, \quad \gamma' \approx -1.3 \quad (3.2)$$

Cette approche simplificatrice met alors en évidence un mécanisme, la diffusion des particules via les interactions médiées, permettant de sortir du cadre de description LR-CDP. En effet, nous rappelons que pour celui-ci nous avons en champ moyen  $\beta = 1$  et  $\gamma' = 0$ .

Toutefois, d'un point de vue de la modélisation d'un système réel, ce modèle présente des lacunes. Notamment, comme nous l'avons vu au [chapitre 1](#), les interactions médiées par un fluide visqueux sont en général fonction de la distance. Celles-ci sont représentées formellement par un propagateur hydrodynamique, présenté à la [sous-sous-section 1.4.1.3](#), qui décroît comme :

$$\mathcal{G}_{ij}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \sim \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^\alpha} \quad (3.3)$$

à grande distance  $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$  de la source de l'interaction. La question est alors de savoir si le comportement critique exotique exhibé par le modèle traitant les interactions médiées en champ moyen est effacé par une représentation spatialisée de celles-ci ou s'il persiste dans cette prise en compte plus proche de la réalité des interactions médiées.

#### Quelle portée étudier ?

La première question à nous poser pour mener notre étude est donc de savoir quelle est la portée  $\alpha$  pertinente pour modéliser un système réel. En fait, comme nous l'avons

---

1. au sens de moyenne spatiale

vu à la [sous-sous-section 1.4.1.3](#), cela dépend fortement du dispositif considéré. Dans le cadre de la transition de réversibilité des suspensions cisaillées cycliquement, nous pouvons imaginer par exemple deux conditions expérimentales simples.

La première concerne le cisaillement d'une suspension dans un écoulement de Couette, à la manière de Pine et al. [5]. Dans ce cas, à condition que l'écart entre les parois rigides cylindriques soit suffisamment grand devant le diamètre des particules, le propagateur hydrodynamique pertinent pour décrire le système est celui associé à un milieu infini en trois dimensions, pour lequel nous avons montré  $\alpha = 1$  (voir la [sous-sous-section 1.4.1.3](#) et la [sous-section 6.1.5](#)). En considérant que les interactions irréversibles de contact entre les paires de particules agissent comme un dipôle de force sur le fluide, la portée pertinente pour caractériser les interactions dans ce système 3D correspond donc à  $\alpha = 1 + 1 = 2$ .

La seconde concerne le [cisallement](#) d'une suspension dans un espace fortement confiné entre des plaques rigides, rendant le problème quasi-2D. La transition de réversibilité a déjà été étudiée dans un dispositif proche de ces conditions [96]. Dans ce cas là, nous avons vu que le propagateur hydrodynamique décroît comme  $\sim 1/r^2$  à grande distance dans le milieu bidimensionnel, soit  $\alpha = 2$  [51]. Selon la même hypothèse que les interactions irréversibles de contact entre les paires de particules correspondent à la forme dipolaire de l'interaction, la portée pertinente pour caractériser ce système 2D est donc  $\alpha = 3$ .

Nous pouvons imaginer encore d'autres dispositifs, comme par exemple un confinement quasi-2D sur une interface libre [97]. Ainsi, il ne semble pas y avoir une portée pertinente mais des portées pertinentes pour aborder le problème de la transition de réversibilité. Dans ce chapitre, nous proposons donc d'étudier un modèle mettant en jeu des interactions dont la portée  $\alpha$  peut être variée librement. Son étude nous permettra alors de mieux comprendre l'influence des interactions médiées et de leur portée sur la criticalité de la transition associée, replaçant ainsi l'étude de Mari et al. [14] dans une image plus globale et pertinente pour l'étude des systèmes réels.

## 3.2 Méthode

Dans cette section, nous présentons le modèle, dérivé du modèle étudié dans [14], que nous avons mis au point pour étudier la transition de réversibilité en présence d'interactions médiées à longue portée.

### 3.2.1 Le ROM comme modèle de dynamique stroboscopique

D'un point de vue numérique, la transition de réversibilité dans les suspensions cisaillées cycliquement peut être étudiée de différentes façons. Les approches les plus évidentes, i.e. les plus proches des expériences, sont celles de dynamique moléculaire. Dans les travaux de Ge et Elfring [95] par exemple, des suspensions de quelques 500 particules ont été étudiées et montrent effectivement une transition de réversibilité. Néanmoins, ces simulations comportant de nombreux degrés de liberté en-dehors de la position des particules (forme du potentiel d'interaction, modélisation du solvant, ...), il est difficile d'étendre ce type

d'étude à des systèmes plus grands. Cette condition est pourtant indispensable à l'étude des phénomènes critiques, puisque celle-ci n'est valable qu'à grande échelle. De plus d'un point de vue conceptuel, pour questionner les propriétés universelles de la transition, il est plus judicieux de considérer des modèles minimaux et ainsi plus généraux.

Pour remédier à ce problème, il est nécessaire de s'appuyer sur des modélisations simplificatrices, basées sur des aspects phénoménologiques essentiels du problème. Une approche possible, développée par Corte et al. [6], consiste à considérer la dynamique du système d'un point de vue stroboscopique. En d'autres termes, les cycles de cisaillement ne sont pas considérés dans leur ensemble mais seulement représentés par deux instants : leur début et leur fin (voir [figure 3.1](#)). Le postulat de modélisation est alors le suivant : lorsqu'au cours d'un cycle deux particules sont suffisamment rapprochées par le cisaillement, elles interagissent de manière irréversible. Cette interaction irréversible implique alors qu'entre le début et la fin du cycle, les particules ayant interagi ne se retrouvent pas exactement à la même position. L'irréversibilité des interactions que subissent les particules pouvant avoir des origines complexes [3], dans un but de simplification globale, l'approche stroboscopique considère ces interactions comme erratiques. En d'autres termes, d'un pas au suivant de la modélisation stroboscopique, les particules ayant interagi subissent un déplacement aléatoire de courte amplitude.

Le modèle simplifié recherché doit donc, à chaque pas de temps, déterminer la distance entre les particules en début de cycle. Celles suffisamment proches sont considérées comme interagissant durant le cycle et sont donc déplacées aléatoirement au prochain pas de temps, i.e. à l'issue de ce cycle. L'état réversible absorbant correspond dans ce cas à un état où toutes les particules de la suspension sont suffisamment éloignées pour ne pas interagir. L'état irréversible correspond au contraire à un état où, dans le régime stationnaire, il y a toujours des déplacements sur un pas de temps. Ce modèle correspond donc exactement au ROM, introduit et étudié dans les chapitres précédents, comme illustré à la [figure 3.1](#). En réalité cette correspondance n'est pas un total hasard puisque le ROM a justement été créé pour modéliser cette transition [6].

Toutefois, nous avons vu dans le [chapitre 1](#) que la transition de réversibilité était une transition de phase absorbante avec comme paramètre de contrôle l'amplitude de cisaillement  $\gamma_0$  et comme paramètre d'ordre le coefficient de diffusion stroboscopique  $D_0$ . Il n'est donc pas évident de transposer ces observables au ROM, pour lequel le paramètre de contrôle est la densité de particules  $\phi$  et le paramètre d'ordre l'activité  $A$ . En effet, dans le modèle stroboscopique, la notion de cisaillement est totalement perdue. Pourtant, il est possible de faire un parallèle entre ces deux approches. En fait, dans les expériences et simulations de la transition de réversibilité, l'amplitude de cisaillement critique  $\gamma_{0,c}$  est fonction de la densité de particules  $\phi$  dans le système. Par exemple dans les expériences de Pine et. al [5] et les simulations de Ge et al. [95], il a été observé que  $\gamma_{0,c} \sim \phi^{-D}$  comme le montrent les résultats présentés sur la [figure 3.2](#).

Il est donc possible en pratique de passer de l'état absorbant à l'état diffusif en gardant l'amplitude de cisaillement  $\gamma_0$  constante et en variant la densité de particule jusqu'à ce que celle-ci définisse  $\gamma_{0,c}(\phi) = \gamma_0$ . En d'autres termes, la densité de particules représente une autre variable que  $\gamma_0$  permettant de traverser la ligne de transition, représentée sur

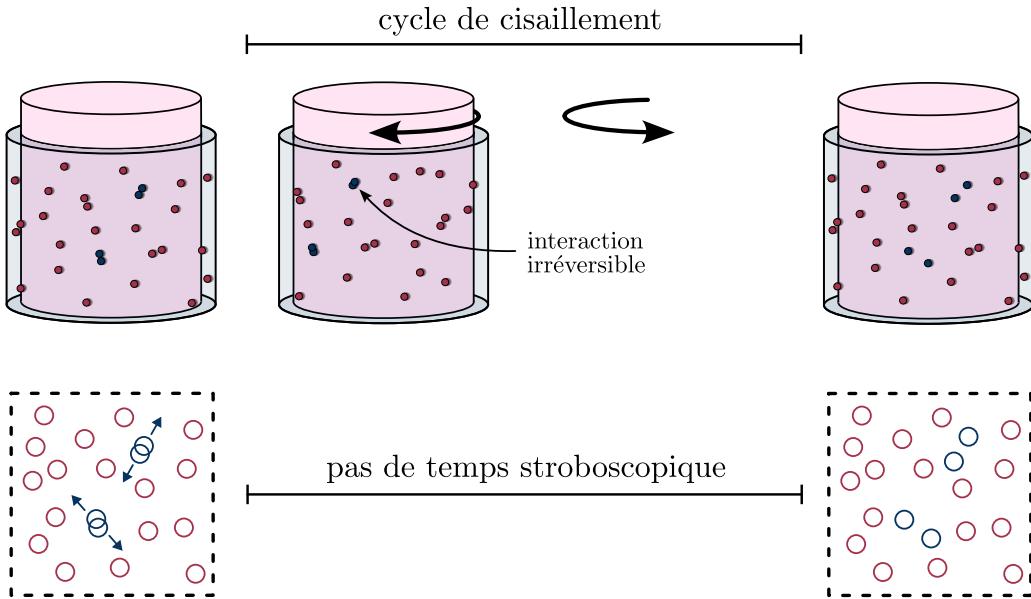


FIGURE 3.1 – Équivalence entre la vision dynamique et la vision stroboscopique dans les expériences de suspensions cisaillées cycliquement

la [figure 3.2](#). Ainsi, elle constitue aussi un paramètre de contrôle de cette transition expérimentale, ce qui permet donc de faire un lien direct avec la modélisation offerte par le ROM. De la même façon, le coefficient de diffusion stroboscopique du système réel est directement relié au nombre de particules interagissant irréversiblement. Ainsi, un paramètre d'ordre équivalent est bien l'activité dans le ROM. En d'autres termes, sous ce prisme, une particule active dans le ROM est une particule interagissant irréversiblement dans la vision dynamique. Par la correspondance  $\gamma_0 \rightarrow \phi$  et  $D_0 \rightarrow A$ , le ROM est donc le modèle numérique idéal pour simuler la transition de réversibilité dans les suspensions cisaillées cycliquement par sa simplicité.

Suivant ces lignes, comme nous l'avons évoqué au [chapitre 1](#), Tjhung et al. [27] ont utilisé cette équivalence pour justifier l'appartenance de cette transition à la classe CDP. Toutefois cette approche omet la présence attendue d'interactions hydrodynamiques entre les particules. Notre objectif est alors de comprendre comment ces interactions à longue portée peuvent affecter la criticalité du système. Or, si le ROM est un modèle efficace pour sonder la transition dans le cas d'interactions à courte portée, il ne permet pas en l'état de modéliser les interactions médiées par le fluide suspendant.

### 3.2.2 Modélisation des interactions médiées

Afin de conserver l'efficacité du modèle stroboscopique tout en y ajoutant la présence d'interactions médiées à longue portée, ces dernières doivent pouvoir être modélisées de manière simple et efficace. Le premier objectif de cette étude est donc de déterminer la modélisation adaptée.

En pratique, au cours d'un cycle de cisaillement, chaque particule suspendue dans le fluide interagit avec les autres particules via des interactions hydrodynamiques, dont la

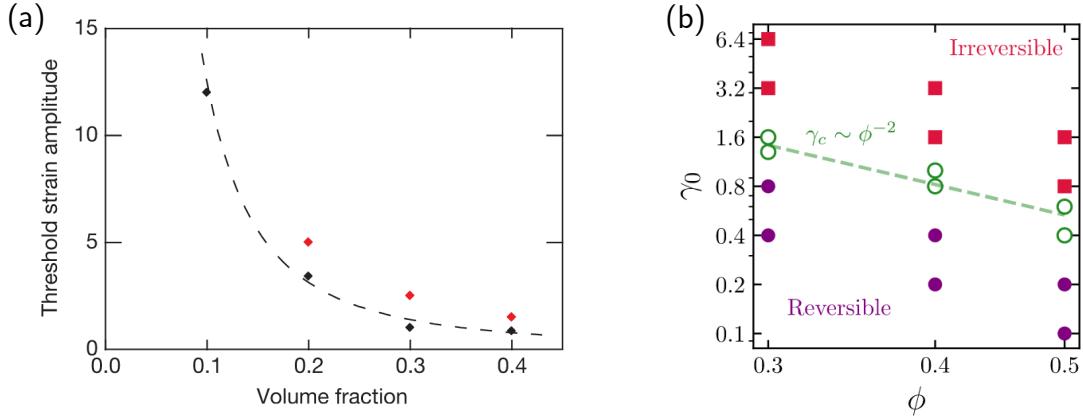


FIGURE 3.2 – Diagrammes de phase des transitions de réversibilité dans les expériences de Pine et al. [5] (a) et les simulations de Ge et al. [95] (b) montrant l'évolution de l'amplitude de cisaillement critique  $\gamma_{0,c}$  avec la densité de particules. Les lignes pointillées représentent la ligne de transition.

forme a été explicitée à la [sous-sous-section 1.4.1.3](#) et à la [sous-section 6.1.5](#). Celle-ci suppose un écoulement à bas Reynolds régi par les équations de Stokes et des particules ponctuelles sans inertie. Une particule interagissant irréversiblement en  $\mathbf{r}'$  et appliquant une force  $\mathbf{F}\delta(\mathbf{r}')$  sur le fluide induit une vitesse de déplacement  $\mathbf{v}^p(\mathbf{r})$  pour une particule située en  $\mathbf{r}$  selon<sup>2</sup> :

$$v_i^p(\mathbf{r}) = \mathcal{G}_{ij}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') F_j \quad (3.4)$$

avec  $\mathcal{G}_{ij}(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$  le propagateur hydrodynamique adéquat pour la modélisation du problème, décroissant comme  $1/|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^\alpha$  à grande échelle, avec  $\alpha$  dépendant de la géométrie considérée.

Au cours de la transition réelle, les déplacements irréversibles des particules et donc les forces qu'elles exercent lors d'un cycle prennent des formes complexes et ne sont a priori pas instantanés. Afin de modéliser simplement l'influence d'un tel événement, nous le considérons donc simplement dans l'approche stroboscopique. Nous considérons alors que chaque particule active située en  $\mathbf{r}'$  effectue un déplacement aléatoire  $\boldsymbol{\delta}^a(\mathbf{r}')$ , qui induit un déplacement  $\boldsymbol{\delta}^p(\mathbf{r})$  sur une particule située en  $\mathbf{r}$  selon :

$$\delta_i^p(\mathbf{r}) = \mathcal{G}_{ij}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \delta_j^a(\mathbf{r}') \quad (3.5)$$

avec le même propagateur hydrodynamique.

Cette modélisation implique une approche tensorielle de l'influence des particules actives sur les particules passives (par opposition à actives) dans le modèle stroboscopique : le déplacement d'une particule passive induit par une particule active dépend de la direction de déplacement de cette dernière. Pour simplifier davantage cette approche, nous nous appuyons sur le fait que, dans la phase active, dans la limite thermodynamique, chaque particule passive reçoit des interactions médiées de la part d'un grand nombre

2. Nous utilisons ici la convention d'Einstein pour la sommation sur les indices répétés.

particules actives. En notant  $\{\mathbf{r}'\}$  l'ensemble des positions des particules actives, on a alors :

$$\delta_i^p(\mathbf{r}) = \sum_{\mathbf{r}'} \mathcal{G}_{ij}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \delta_j^a(\mathbf{r}') \quad (3.6)$$

De ce fait, nous pouvons aborder cette interaction d'un point de vue statistique. Les déplacements des particules actives étant aléatoires et donc de moyenne nulle, on a de même  $\langle \delta_i^p(\mathbf{r}) \rangle = 0$  avec  $\langle \cdot \rangle$  représentant une moyenne sur les déplacements aléatoires des particules actives. En considérant les déplacements des particules actives décorrélés et d'amplitude typique  $\sigma$ , on a :

$$\begin{aligned} \langle \delta^p(\mathbf{r})^2 \rangle &= \sum_{\mathbf{r}'} \sum_{\mathbf{r}''} \mathcal{G}_{i\alpha}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \mathcal{G}_{i\beta}(\mathbf{r} - \mathbf{r}'') \langle \delta_\alpha^a(\mathbf{r}') \delta_\beta^a(\mathbf{r}'') \rangle \\ &= \sum_{\mathbf{r}'} \sum_{\mathbf{r}''} \mathcal{G}_{i\alpha}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \mathcal{G}_{i\beta}(\mathbf{r} - \mathbf{r}'') \sigma^2 \delta_{\mathbf{r}' \mathbf{r}''} \delta_{\alpha\beta} \\ &= \sigma^2 \sum_{\mathbf{r}'} \mathcal{G}_{i\alpha}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \mathcal{G}_{i\beta}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \delta_{\alpha\beta} \\ &= \sigma^2 \sum_{\mathbf{r}'} \mathcal{G}_{i\alpha}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \mathcal{G}_{i\alpha}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \end{aligned} \quad (3.7)$$

les sommes sur les indices de coordonnées  $i$  et  $\alpha$  étant implicites. Nous considérerons donc simplement dans notre modélisation statistique :

$$\langle \delta^p(\mathbf{r})^2 \rangle \sim \sigma^2 \sum_{\mathbf{r}'} \mathcal{G}^2(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \quad (3.8)$$

avec  $\mathcal{G}$  un propagateur scalaire effectif de l'interaction, que nous choisissons isotrope et décroissant comme  $1/r^\alpha$  de la même manière que le propagateur hydrodynamique tensoriel associé.

En pratique, Le propagateur scalaire effectif retenu pour la modélisation est de la forme spécifique suivante :

$$\mathcal{G}^2(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = \frac{c}{\left(1 + \left(\frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{D_p}\right)^2\right)^\alpha}, \quad c > 0 \quad (3.9)$$

avec  $D_p$  le diamètre des particules et  $c$  un paramètre représentant la borne supérieure de l'interaction. Cette formulation modélise alors bien une interaction entre particules actives et particules passives qui décroît comme  $1/r^\alpha$  en champ lointain. La régularisation en  $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| = 0$  permet par ailleurs de considérer sans difficulté des interactions pour lesquelles on a  $2\alpha > D$ , sans quoi cette forme ne serait plus intégrable. Pour  $2\alpha < D$ , la non-intégrabilité du propagateur en  $|\mathbf{r}| \rightarrow \infty$  et sa prise en compte dans le modèle sera discutée à la [sous-sous-section 3.2.3.2](#).

In fine, sous ce point de vue statistique, nous considérons que chaque particule passive effectue à chaque pas de temps stroboscopique un déplacement aléatoire gaussien de moyenne nulle et de variance donnée par l'[équation 3.8](#). Ces simplifications permettent alors de rendre la modélisation des interactions scalaire, ce qui permet d'alléger fortement l'implémentation numérique que nous détaillons dans la partie suivante.

### 3.2.3 Implémentation numérique

Pour l'implémentation numérique de ce modèle, nous reprenons les éléments de base du ROM, détaillé au chapitre 2. Les interactions médiées représentent alors simplement une composante additionnelle à ce modèle, à implémenter à chaque pas de temps.

#### 3.2.3.1 Calcul de l'influence des particules actives

Afin de simplifier le calcul numérique de la somme de l'équation 3.8, nous choisissons de considérer une version gros grains de l'activité dans le système. Pour ce faire, nous définissons un champ d'activité discret  $A(\mathbf{r}_i)$ , défini sur le réseau utilisé pour la méthode cell-list, introduite à la sous-section 2.3.3. Chaque case du réseau est alors définie autour d'une position  $\mathbf{r}_i = na\hat{\mathbf{e}}_x + ma\hat{\mathbf{e}}_y$  avec  $(n, m) \in \mathbb{N}^2$  et  $a$  le pas du réseau que l'on prend de nouveau égal à  $D_p = 1$ . À chaque pas de temps, après identification des particules actives, nous calculons ce champ d'activité sur la case du réseau centrée autour de  $\mathbf{r}_i$  comme le nombre de particules actives dans cette case (voir figure 3.3).  $A(\mathbf{r}_i)$  représente alors en quelque sorte une quantité d'activité locale.

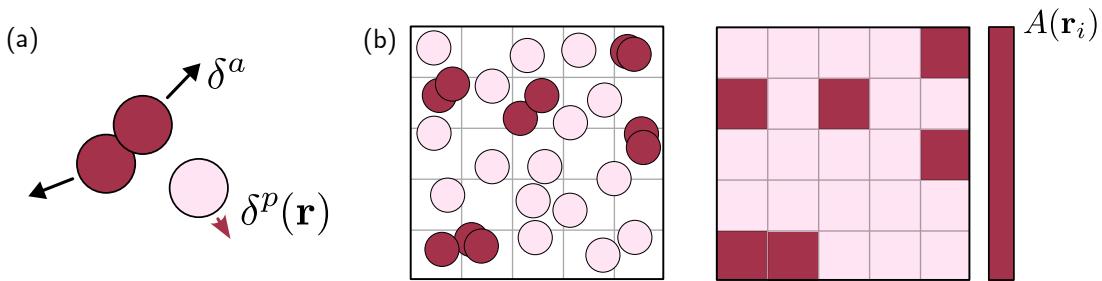


FIGURE 3.3 – Implémentation numérique du modèle  $\alpha$ -ROM. (a) Les particules actives (rouges) sont soumises à des déplacements aléatoires  $\delta^a$  indépendants de leur position. Les particules passives sont soumises à des déplacements aléatoires  $\delta^p$  dont l'amplitude typique dépend de leur distance à l'activité. (b) Méthode de détermination du champ d'activité discret  $A(\mathbf{r}_i)$ .

Pour déterminer la variance du déplacement des particules passives à chaque pas de temps, il suffit donc de calculer la convolution discrète suivante :

$$\langle \delta^p(\mathbf{r}_i)^2 \rangle = \sigma^2 \sum_j G^2(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) A(\mathbf{r}_j) \quad (3.10)$$

avec  $G^2$  la version discrétisée du propagateur  $\mathcal{G}^2$ . Cette convolution étant définie sur un réseau régulier, il est possible de la calculer efficacement en passant par l'espace de Fourier. En pratique, nous la calculons donc dans l'espace réciproque où elle devient le simple produit  $\hat{G}^2(\mathbf{q}_i)\hat{A}(\mathbf{q}_i)$ , avec  $\mathbf{q}_i = (\frac{2\pi}{L}n, \frac{2\pi}{L}m)$  et  $L$  la taille du système. La notation  $\hat{\cdot}$  définit alors ici la transformée de Fourier discrète sur ce réseau. Pour ce faire, nous définissons directement le propagateur hydrodynamique dans l'espace de Fourier. Dans le cas continu, le calcul relégué à la sous-section 6.3.1 donne en deux dimensions :

$$\hat{G}^2(\mathbf{q}) = \frac{2\pi c}{\Gamma(\alpha)} \left(\frac{q}{2}\right)^{\alpha-1} K_{\alpha-1}(q) \quad (3.11)$$

avec  $\Gamma$  la fonction Gamma d'Euler et  $K_{\alpha-1}$  la fonction de Bessel modifiée de seconde espèce d'ordre  $\alpha - 1$  [98]. On peut alors estimer la valeur de ce propagateur continu en  $\mathbf{q} = 0$  pour un milieu de taille finie en calculant sa valeur moyenne dans l'espace réel :

$$\hat{\mathcal{G}}^2(0) = \frac{\pi c}{\alpha - 1} \left( 1 - (1 + L^2)^{1-\alpha} \right) \xrightarrow[L \rightarrow \infty]{\alpha > 1} \frac{\pi c}{\alpha - 1} \quad (3.12)$$

Nous choisissons donc de définir le propagateur discret  $\hat{G}$  dans l'espace réciproque via l'expression :

$$\hat{\mathcal{G}}^2(\mathbf{q}_i) = \hat{\mathcal{G}}^2(\mathbf{q}_i), \quad q = \sqrt{\left( 2 - 2 \cos \left( \frac{2\pi}{L} n \right) \right) + \left( 2 - 2 \cos \left( \frac{2\pi}{L} m \right) \right)} \quad (3.13)$$

la conversion du nombre d'onde sous sa forme discrète étant essentielle pour définir proprement le propagateur dans l'espace réciproque discret [65, 99], comme nous l'expliquons dans la [sous-section 6.1.2](#).

Finalement, la valeur réelle de la convolution est obtenue en opérant une transformée de Fourier inverse discrète sur le produit. La forme alors obtenue par cette procédure pour  $\alpha \in \{3, 2, 1.5\}$  est présentée à la [figure 3.4-\(a\)](#). Cette méthode de calcul de la convolution étant parallélisable, elle nous permet de conserver l'architecture GPU utilisée pour les simulations précédentes. De plus, la méthode pseudo-spectrale permet de prendre en compte les conditions aux limites périodiques du système naturellement. Enfin, afin d'optimiser notre utilisation des fonctions de Fast Fourier Transform [100], nous privilégions les tailles de système de la forme  $L = 2^p$  avec  $p \in \mathbb{N}$ .

De cette manière, en plus des particules actives, les particules passives sont soumises à un déplacement dont la variance est donnée par l'[équation 3.10](#) à chaque pas de temps. Ce modèle représente alors une généralisation du modèle étudié par Mari et al. [14]. En effet, celui-ci correspond en fait exactement au cas  $\alpha = 0$  (et donc des interactions médiées indépendantes de la distance) qui correspond bien à une limite champ moyen de la prise en compte des interactions hydrodynamiques.

L'ajout de ce nouveau mécanisme de diffusion des particules passives conserve la présence d'une transition de phase absorbante analogue à celle du ROM et dont les propriétés critiques varient avec la portée de l'interaction  $\alpha$ . Nous appelons alors ce nouveau modèle  $\alpha$ -ROM, et, par analogie, celui de Mari et al. 0-ROM.

### 3.2.3.2 Non-intégrabilité du propagateur à longue portée

Si la régularisation du propagateur en  $r = 0$  permet de le rendre intégrable pour  $2\alpha > D$ , pour  $2\alpha < D$  c'est la limite  $r \rightarrow \infty$  qui pose problème. En effet, dans ce cas, la valeur moyenne du propagateur diverge comme  $L^{2-2\alpha}$  pour  $L$  grand. Si cette divergence n'est pas un problème en soi pour l'étude d'un système de taille finie, elle en représente un pour la comparaison des comportements critiques à différentes tailles. En effet, cette dépendance du propagateur en taille rend la densité critique  $\phi_c$  elle aussi fortement dépendante de  $L$  (voir [figure 3.4-\(b\)](#)). De ce fait, il n'est alors plus possible d'utiliser différentes tailles du

système pour sonder le comportement critique à une portée  $\alpha$  donnée, comme cela a été fait à la section 2.5 dans le cas des sauts à longue portée.

Afin de remédier à ce problème, nous choisissons de normaliser les propagateurs pour  $2\alpha < D$  par un facteur  $L^{2-2\alpha}$ , rendant de ce fait la valeur moyenne du propagateur indépendante de la taille du système. Par cette procédure, nous retrouvons alors pour  $\alpha = 0.5$  une densité critique indépendante de la taille du système à grande taille (voir figure 3.4-(c)). Toutefois pour  $\alpha = 1$ , pour lequel la divergence de la valeur moyenne du propagateur évolue logarithmiquement avec la taille, cette procédure de normalisation par un facteur  $\ln(L)$  n'est pas concluante. En effet, dans ce cas,  $\phi_c$  montre une forte dépendance avec la taille du système même après normalisation. Ceci peut être expliqué par le fait qu'une telle divergence logarithmique n'est valable qu'à des tailles de systèmes excessivement grandes. Ce cas restant néanmoins d'intérêt, nous conservons son étude mais nous nous limitons pour cela à une taille de système fixée.

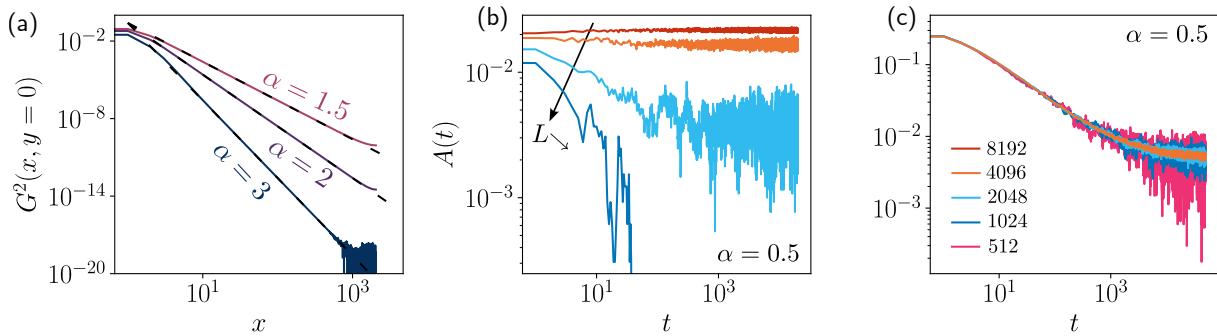


FIGURE 3.4 – Propagateurs d’interaction dans le modèle  $\alpha$ -ROM. (a) Évolution du propagateur effectif dans l’espace discret réel pour  $\alpha \in \{3, 2, 1.5\}$ . Les pointillés noirs représentent les lois de puissance  $1/r^{2\alpha}$ . (b) Évolution de l’activité vers l’état stationnaire à  $\phi = 0.00486859$  pour différentes tailles de système avec  $\alpha = 0.5$  dans le cas d’un propagateur non normalisé. La distinction des courbes montre un point critique nettement différent pour chaque taille. (c) Idem à  $\phi = 0.101117$  avec le propagateur normalisé.

### 3.2.3.3 Extension aux dimensions supérieures

Notre travail se focalise sur une étude de la transition en deux dimensions. Toutefois, certains cas physiques de cette transition ont lieu dans un espace de trois dimensions [5]. De plus, d’un point de vue purement théorique, il peut être intéressant de comprendre comment cette transition évolue avec le nombre de dimensions du système. Pour ces raisons, nous généralisons cette méthode de simulation numérique à  $n$  dimensions.

La complexité de cette implémentation réside alors essentiellement dans l’intégration des conditions aux limites périodiques. Dans le cas du calcul des interactions à longue portée, celles-ci sont directement prises en compte par la méthode pseudo-spectrale. Pour le calcul des interactions de contact cependant, la périodicité nécessite plus d’attention, mais reste généralisable grâce à un peu d’algèbre.

Afin de mesurer de manière annexe le comportement critique du  $\alpha$ -ROM en 3D, nous implémentons les interactions médiées de la même façon qu'en 2D. Seulement, cette fois, la forme spectrale continue du propagateur est<sup>3</sup> :

$$\hat{\mathcal{G}}(\mathbf{q}) = \frac{c\pi^{\frac{3}{2}} 2^{\frac{5}{2}-\alpha}}{\Gamma(\alpha)} q^{\alpha-\frac{3}{2}} K_{\alpha-\frac{3}{2}}(q) \quad (3.14)$$

Pour  $\alpha < \frac{3}{2}$ , nous opérons la même procédure de normalisation que pour le cas 2D mais seulement cette fois par le facteur  $L^{3-2\alpha}$ .

## Cconclusion de la section

Finalement le modèle ainsi implanté du  $\alpha$ -ROM nous permet d'étudier efficacement les transitions de phase absorbantes associées à chaque portée de l'interaction médiée  $\alpha$  en deux et trois dimensions. Grâce à cet outil, il est alors possible de comprendre comment l'on passe du cas limite de courte portée du ROM ( $\alpha \rightarrow \infty$ ), représenté par la classe CDP, au cas limite  $\alpha \rightarrow 0$ , représenté par une transition convexe et des fluctuations critiques évanescentes [14], totalement hors du cadre LR-CDP. Pour ce faire, nous caractérisons d'abord en 2D la gamme de portées suivante :  $\alpha \in \{0.5, 1, 1.25, 1.5, 1.75, 2, 3\}$ .

## 3.3 Comportement critique

Afin de déterminer l'évolution de la criticalité du système avec la portée d'interaction  $\alpha$ , nous commençons par déterminer le comportement critique statique des modèles  $\alpha$ -ROM. Pour ce faire, nous mesurons les exposants critiques  $\beta$  et  $\gamma'$ .

### 3.3.1 Détermination du point critique

Nous commençons tout d'abord par déterminer les densités critiques  $\phi_c$  associées à chaque transition. En utilisant des tailles de systèmes allant de  $L = 2048$  à  $L = 8192$ , nous mesurons l'activité moyenne  $\langle A \rangle$  dans l'état stationnaire pour différentes densités  $\phi$  et ce pour chaque portée  $\alpha$ . Pour le cas problématique  $\alpha = 1$  évoqué précédemment, le comportement critique est évalué pour la plus grande taille  $L = 8192$ . En estimant grossièrement la densité critique associée à chaque portée il est alors possible de tracer les courbes d'évolution du paramètre d'ordre, représentées à la figure 3.5-(a).

Nous remarquons que cette évolution passe effectivement d'une forme concave à grand  $\alpha$ , à une forme convexe à petit  $\alpha$ . Ce comportement qualitatif est donc en accord avec les limites de courte portée ( $\beta \approx 0.64$  [19]) et de portée infinie ( $\beta \approx 1.85$  [14]). Ainsi, comme dans le cas des sauts à longue portée, la criticalité semble évoluer continûment avec la portée de l'interaction.

3. Le calcul est relégué à la sous-section 6.3.1

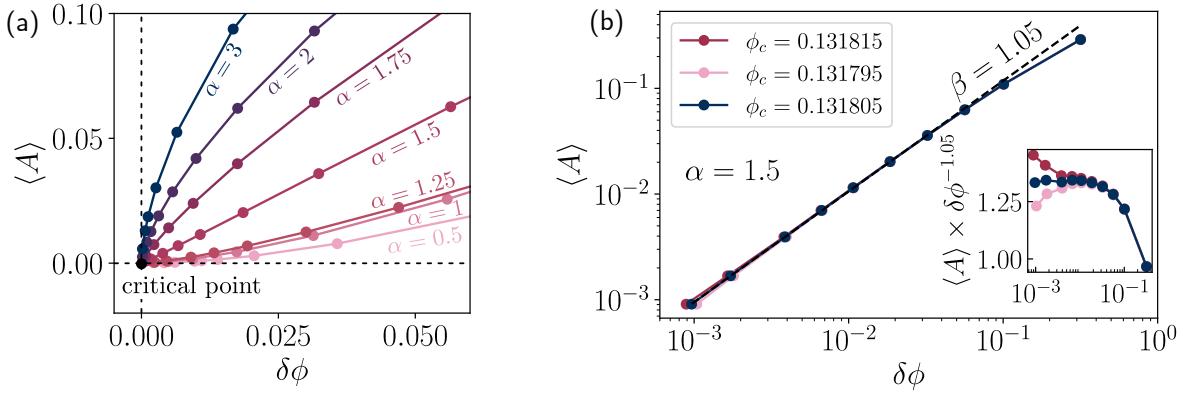


FIGURE 3.5 – (a) Évolution de l’activité moyenne dans l’état stationnaire avec la distance au point critique pour différentes portée  $\alpha$  des interactions médiées en 2D. (b) Exemple de détermination d’une densité critique  $\phi_c$  dans le cas  $\alpha = 1.5$  en 2D. Le choix  $\phi_c = 0.131805$  est significativement meilleur que  $\phi_c = 0.131815$  et  $\phi_c = 0.131795$ . En encart, la représentation compensée permet d’exacerber ces différences.

Afin d’évaluer plus quantitativement cette évolution, il nous faut mesurer précisément l’exposant  $\beta$  associé. Nous reprenons alors la méthode présentée à la section 2.4. Un exemple de détermination dans le cas du  $\alpha$ -ROM pour  $\alpha = 1.5$  est représenté à la figure 3.5-(b). Ces déterminations sont alors bien plus compliquées que dans le cas des sauts à longue portée et ce pour deux raisons principales. La première est que le régime stationnaire est bien plus long à atteindre en présence de la diffusion des particules passives. Notamment, la décroissance initiale de l’activité et la transition entre régime transitoire et régime stationnaire associés sont bien moins abruptes. Ainsi, pour une courbe de convexité équivalente (i.e.  $\beta$  équivalent), les simulations nécessitent plus de dix fois plus de pas de temps avant équilibration<sup>4</sup>. La seconde vient du fait que les transitions convexes sont plus difficiles à caractériser. En effet, pour une distance au point critique équivalente, celles-ci impliquent des valeurs d’activités bien plus faibles (puisque  $\langle A \rangle \sim \delta\phi^\beta$ ). Cela requiert alors des tailles de systèmes plus grandes et donc des simulations plus longues. Au final, l’équilibration de certains points aura nécessité plus de 800 heures de simulation continue sur des cartes graphiques de nouvelle génération<sup>5</sup>. En général, la caractérisation des transitions convexes amènera donc plus d’incertitudes.

### 3.3.2 Évolution des exposants critiques

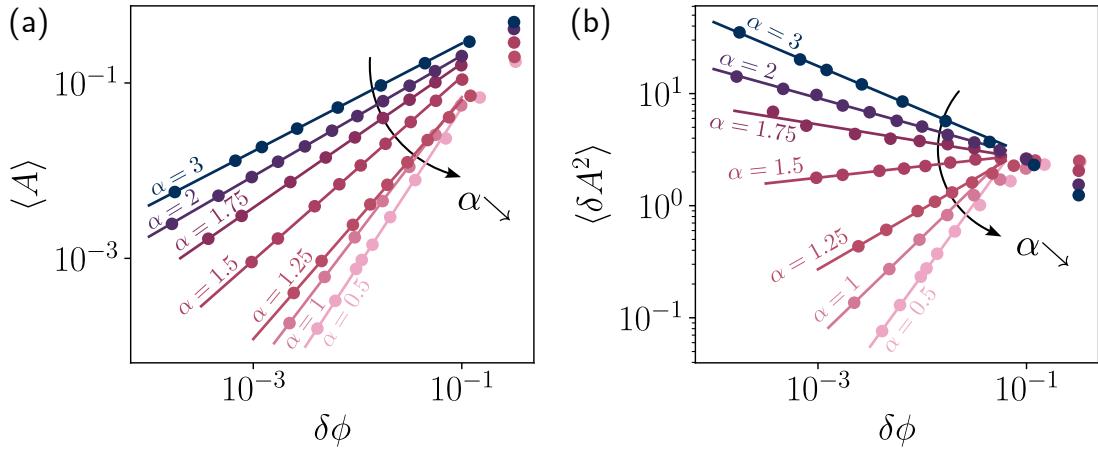
#### 3.3.2.1 Exposants statiques

Les densités critiques déterminées permettent de représenter les courbes  $\langle A \rangle = f(\delta\phi)$  en échelle logarithmique pour chaque  $\alpha$  sur la figure 3.6-(a). Les exposants  $\beta$  estimés par cette méthode sont reportés dans le tableau 3.1 et leur évolution est résumée sur la

4. De plus, les pas de temps du  $\alpha$ -ROM sont bien plus coûteux en termes de ressources numériques puisqu’ils font intervenir des calculs de FFT.

5. Les simulations présentées dans cet ouvrage ont été principalement réalisées sur des clusters de calcul GPU permettant un accès à des cartes graphiques NVIDIA V100 et A100

figure 3.7-(a).


 FIGURE 3.6 – (a) Évolution de la valeur moyenne de l'activité dans l'état stationnaire  $\langle A \rangle$  en fonction de la distance au point critique  $\delta\phi$  à différentes portées dans le  $\alpha$ -ROM en 2D. (b) Idem pour la variance  $\langle \delta A^2 \rangle$ 

Pour déterminer l'exposant  $\gamma'$ , comme dans le [chapitre 2](#), nous mesurons  $\langle \delta A^2 \rangle$  dans l'état stationnaire. La détermination de  $\phi_c$  étant déjà effectuée, l'exposant se mesure par un simple ajustement de la courbe en échelle logarithmique. L'évolution des fluctuations en fonction de la portée est alors représentée sur la [figure 3.6-\(b\)](#). Nous observons un passage de fluctuations divergentes à l'approche du point critique pour les courtes portées à des fluctuations qui s'annulent pour les longues portées. Cette observation est à nouveau en accord avec les comportements limites de courte portée (CDP) et de portée infinie (0-ROM). Les valeurs des exposants  $\gamma'$  sont reportées dans le [tableau 3.1](#) et leur évolution est résumée sur la [figure 3.7-\(a\)](#).

$\alpha$	$\beta$	$\gamma'$	$\delta$	$\nu_{\perp}^*$
CDP [19]	0.64	0.37	0.42	0.80
3	0.62	0.39	0.41	0.82
2	0.69	0.26	0.42	0.82
1.75	0.82	0.15	0.45	0.90
1.5	1.05	-0.10	0.49	1.00
1.25	1.37	-0.54	0.54	1.10
1	1.56	-0.90	0.62	1.11
0.5	1.82	-1.28	0.67	1.18
0 [14]	1.85	-1.2	-	1.3

(a)

$\alpha$	$\beta$	$\gamma'$	$\delta$	$\nu_{\perp}^*$
CDP [19]	0.84	0.15	0.75	0.59
3.5	0.84	0.16	0.74	0.61
3	0.85	0.11	0.74	0.60
2.5	0.95	-0.03	0.74	0.62
2	1.30	-0.44	0.76	0.72
1.75	1.49	-0.82	0.75	0.72

(b)

 TABLE 3.1 – Exposants critiques déterminés dans les modèles  $\alpha$ -ROM en 2D (a) et en 3D (b)

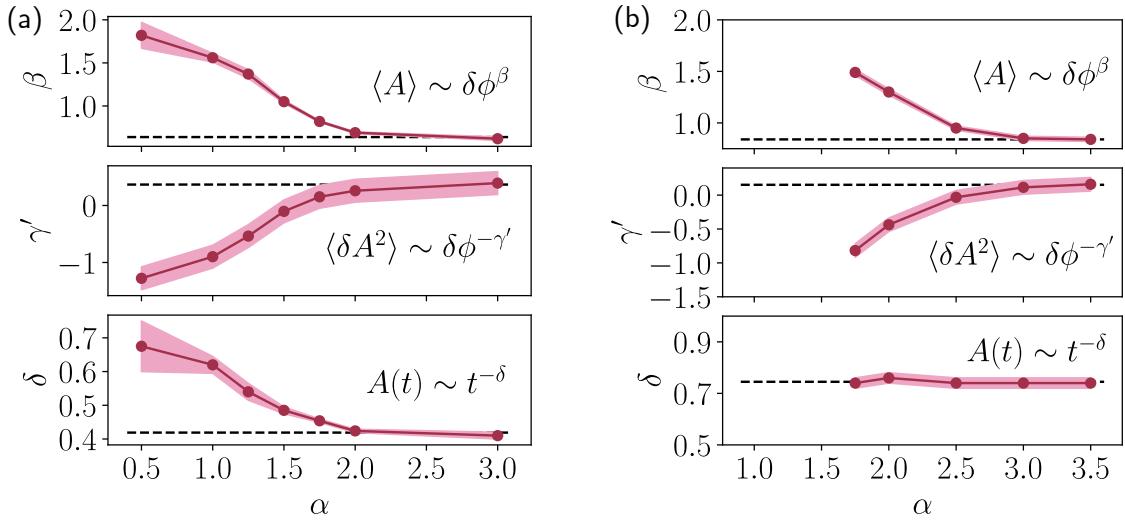


FIGURE 3.7 – Évolution des exposants critiques  $\beta$ ,  $\gamma'$  et  $\delta$  avec la portée dans le modèle  $\alpha$ -ROM en 2D (tableau de gauche) et en 3D (tableau de droite). Les zones colorées rose représentent les incertitudes de détermination.

### Zones d'évolution

À la lumière de la figure 3.7-(a), nous observons effectivement une évolution continue des deux exposants avec la portée. Notamment, l'évolution est significative entre  $\alpha \approx 2$  et  $\alpha \approx 1 - 0.5$ , au-delà de quoi elle semble arriver à saturation des deux côtés<sup>6</sup>. Par ailleurs les valeurs des exposants aux plus grands  $\alpha$  rejoignent celles de la classe CDP : pour  $\alpha = 3$ , l'accord est exact aux incertitudes de détermination près et pour  $\alpha = 2$  la différence est minime. Cela suggère donc de considérer  $\alpha \approx 2$  comme limite de courte portée de la transition. À l'opposé du spectre, les exposants déterminés pour  $\alpha = 0.5$  rejoignent aussi ceux déterminés dans le cas du 0-ROM. Cette observation suggère alors  $\alpha \approx 0.5$  comme la limite champ moyen de la transition.

### Comportement exotique et point singulier

La spécificité de la limite de portée infinie rend cette variation du comportement critique avec la portée physiquement significative. En effet, si la courbe décrivant l'évolution du paramètre d'ordre reste concave ( $\beta < 1$ ) pour  $\alpha \gtrsim 1.5$ , celle-ci change de convexité ( $\beta > 1$ ) pour  $\alpha \lesssim 1.5$ . C'est aussi autour de ce même point  $\alpha \approx 1.5$  que le comportement des fluctuations critiques s'inverse, passant de divergent à évanescence. Le comportement exotique du 0-ROM est donc retrouvé dans toute la gamme d'évolution  $\alpha \lesssim 1.5$ . Il est donc envisageable de l'observer dans des systèmes réels présentant des interactions hydrodynamiques spatialisées.

Dans le cas du 0-ROM, cette double spécificité  $\beta > 1$ ,  $\gamma' < 0$  peut être rationalisée dans le cadre de la relation d'hyperscaling [19] [14] :

6. Pour  $\alpha = 0.5$  la saturation se remarque par comparaison avec les valeurs obtenues pour  $\alpha = 0$  [14]

$$2\beta + \gamma' = \nu_{\perp} D \quad (3.15)$$

qui se retrouve vérifiée. Celle-ci permet en effet d'expliquer qu'une transition avec une valeur de  $\beta$  anormalement grande donne lieu à une valeur de  $\gamma'$  anormalement petite. Étant donné que cette relation est aussi vérifiée dans la limite de courte portée CDP, nous pouvons supposer qu'elle l'est en fait dans toute la zone d'évolution présentée par le  $\alpha$ -ROM. Ainsi, l'annulation des fluctuations critiques s'expliquerait par la convexité de la transition à toute portée  $\alpha \lesssim 1.5$ .

Par ailleurs, si nous allons au bout de notre hypothèse, la relation d'hyperscaling permet de dériver pour chaque  $\alpha$  un exposant de corrélation spatiale  $\nu_{\perp}^*$ <sup>7</sup>. Dans le tableau 3.1-(a), nous répertorions le résultat de cette dérivation. Cet exposant hypothétique  $\nu_{\perp}^*$  semble alors suivre une évolution continue avec la portée  $\alpha$  qui lie les deux limites de CDP et du 0-ROM.

Le point  $\alpha \approx 1.50$  se positionne donc à un changement drastique des propriétés de la transition. Remarquablement, ce point spécifique est décrit les exposants critiques  $\beta$  et  $\gamma'$  associés **champ moyen** de CDP. Une différence majeure est alors que, dans le cas des interactions actives-passives, au contraire du cas des sauts à longue portée étudié au chapitre 2, ce comportement n'est pas une limite mais il est effectivement dépassé pour des portées plus grandes.

### Une limite non triviale

En général, les champs moyens des théories critiques amènent à des valeurs **triviales** des exposants critiques ( $\beta_{\text{CDP}}^{\text{MF}} = 1$  par exemple). Or ici, la limite de portée infinie atteinte en  $\alpha = 0.5$ , tout comme le 0-ROM caractérisé par Mari et al. [14], est caractérisée par des exposants non-triviaux. Ces mesures peuvent alors suggérer que cette limite n'est en fait pas un équivalent champ moyen du système.

Cette observation n'est pas si surprenante car certains éléments de la dynamique restent non-triviaux à portée infinie. En effet, même lorsque les interactions actives-passives sont à longue portée, les particules actives effectuent des sauts de taille finie et dans un espace de dimension finie. De plus, les particules passives, elles aussi diffusent dans un espace de dimension finie. La dimension de l'espace étant inférieure à la dimension critique supérieure de CDP  $D_c = 4$ , il est probable que ces mécanismes éloignent le modèle du champ moyen, même si les interactions médiées sont sous leur forme extrémale. Nous pouvons cependant nous attendre à approcher ce champ moyen en augmentant la **dimension du système**<sup>8</sup>.

7. Nous utilisons la notation \* pour signifier que cette valeur est dérivée d'une relation d'échelle et non dérivée.

8. Nous reviendrons sur cette idée à la section 3.4

### 3.3.2.2 Exposant dynamique

Une autre possibilité pour caractériser la criticalité et son évolution avec la portée est d'étudier la transition d'un point de vue dynamique. Comme dans le cas du transport à longue portée, proche du point critique, le système relaxe vers l'état stationnaire de manière algébrique :

$$\langle A \rangle(t) \sim t^{-\delta} \quad (3.16)$$

$\delta$  définissant un exposant critique universel. Il peut être alors intéressant de comprendre comment celui-ci varie avec  $\alpha$  dans le cas du  $\alpha$ -ROM, et comment cette évolution se compare à l'évolution des exposants  $\beta$  et  $\gamma'$ .

Pour aborder cette question, nous reprenons la méthode de redimensionnement utilisée à la [sous-section 2.5.2](#). Pour chaque  $\alpha$ , nous déterminons alors l'exposant  $\delta$  associé en se basant sur les mesures précédentes de  $\beta$  et  $\phi_c$ . Un exemple de redimensionnement obtenu dans le cas du  $\alpha$ -ROM est représenté à la [figure 3.8](#) pour  $\alpha = 1.5$ . Les valeurs mesurées pour chaque portée sont reportées dans le [tableau 3.1](#) et leur évolution est représentée sur la [figure 3.7-\(a\)](#).

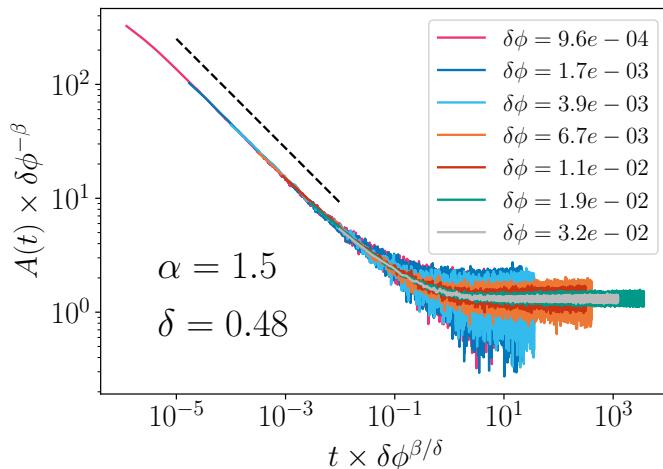


FIGURE 3.8 – Redimensionnement avec la distance au point critique  $\delta\phi$  des évolutions de l'activité moyenne  $\langle A \rangle$  avec le temps  $t$  dans le cadre du  $\alpha$ -ROM en 2D pour  $\alpha = 1.5$ . **TODO : moche, changer couleurs et mettre légende sur le pointillé**

Comme pour les exposants  $\beta$  et  $\gamma'$ , l'exposant dynamique  $\delta$  évolue de sa valeur CDP pour  $\alpha \gtrsim 2$  à une valeur de saturation pour  $\alpha \lesssim 1 - 0.5$ . Cela confirme donc la zone d'évolution continue précédemment déterminée.

Par ailleurs, dans la limite de longue portée  $\alpha = 0.5$ , nous mesurons  $\delta \approx 0.67$ . Cette valeur non-triviale conforte le fait que le système n'est pas dans sa limite champ moyen pour une portée infinie. Il est tout à fait envisageable que les sauts à courte portée des particules actives jouent un rôle dans la relaxation vers l'état stationnaire.

Enfin, si le point  $\alpha \approx 1.5$  correspondait aux propriétés critiques statiques du champ moyen de CDP avec  $\beta = 1$  et  $\gamma' = 0$ , ses propriétés dynamiques semblerent différer. En effet, pour  $\alpha = 1.5$  nous mesurons  $\delta \approx 0.49$ , qui est notablement inférieur à  $\delta_{\text{CDP}}^{\text{MF}} = 1$ .

De manière générale, l'évolution des propriétés de relaxation du système semblent donc suivre une évolution très similaire à celle des propriétés statiques.

### 3.3.2.3 Comparaison avec le cadre LR-CDP

Dans cette partie, nous proposons de comparer les évolutions mesurées dans le  $\alpha$ -ROM en 2D avec celles prédictes par le cadre LR-CDP, représentées par le LR-ROM au [chapitre 2](#). Pour rappel, dans le cadre LR-CDP représentant l'influence d'un transport de masse à longue portée, la criticalité du système évolue continûment dans la zone  $3D/2 < \alpha < D+2$  soit  $3 < \alpha < 4$  en 2D. Dans la limite de courte portée  $\alpha > 4$ , la criticalité retrouvée est celle de la classe CDP en 2D. Dans la limite de longue portée  $\alpha < 3$ , la criticalité retrouvée est celle de la classe CDP en champ moyen.

D'un point de vue purement qualitatif, les évolutions mesurées dans le  $\alpha$ -ROM en 2D sont en accord avec cette image. En effet, dans ce cas, nous observons aussi une zone d'évolution continue des exposants séparant une limite de longue portée et une limite de courte portée. De plus, les évolutions des exposants avec  $\alpha$  présentent la même tendance :  $\beta$ ,  $\gamma'$ ,  $\nu_{\perp}^*$  et  $\delta$  augmentent avec  $\alpha$ .

Toutefois, du point de vue de la valeur des différents exposants, les transitions convexes ( $\beta > 1$ ) mesurées dans le  $\alpha$ -ROM pour  $\alpha \lesssim 1.5$  se situent complètement en dehors du cadre LR-CDP, restreint à la description de transitions concaves. De plus, la zone continue d'évolution des exposants se situe à des portées bien plus grandes dans le cas du  $\alpha$ -ROM que dans le cadre LR-CDP. En effet, dans le cas du  $\alpha$ -ROM nous avons mesuré  $0.5 - 1 \lesssim \alpha \lesssim 2$ . La différence entre ce modèle numérique et le cadre LR-CDP ne prend donc pas uniquement place à grande portée mais à toute portée.

Finalement, les mesures des exposants critiques du  $\alpha$ -ROM montrent donc que le cadre LR-CDP ne permet pas de décrire l'influence des interactions hydrodynamiques sur le système malgré une évolution qualitative vaguement similaire”.

### 3.3.2.4 Extension à trois dimensions

Afin de confirmer ces désaccords statiques et dynamiques, nous étendons notre analyse à des systèmes en trois dimensions. Nous rappelons que dans ce cas là, la théorie LR-CDP prédit une évolution continue des exposants dans la zone  $4.5 < \alpha < 5$ . Dans la limite de courte portée  $\alpha > 5$ , les exposants prennent les valeurs reportées dans le [tableau 3.1](#).

En appliquant la même méthode, nous étudions la criticalité des modèles pour  $\alpha \in \{3.5, 3, 2.5, 2, 1.75\}$ . Les analyses étant coûteuses numériquement et pour des raisons de temps, nous n'étudions pas le cas des très longues portées. Ce faisant, nous obtenons les évolutions de  $\langle A \rangle$  et  $\langle \delta A^2 \rangle$  en fonction de  $\delta\phi$  tracées à la [figure 3.9](#). Les valeurs des

exposants critiques sont alors reportées dans le [tableau 3.1](#) et leurs évolutions en fonction de la portée sont tracées sur la [figure 3.7-\(b\)](#). Nous retrouvons alors à courte portée le comportement critique CDP en trois dimensions dès  $\alpha \gtrsim 3$  et non  $\alpha > 5$ . Pour des plus grandes portées  $\alpha \lesssim 3$ , l'évolution des exposants statiques  $\beta$  et  $\gamma'$  est similaire au cas 2D, avec une augmentation progressive de  $\beta$  conjointement à une diminution progressive de  $\gamma'$ .

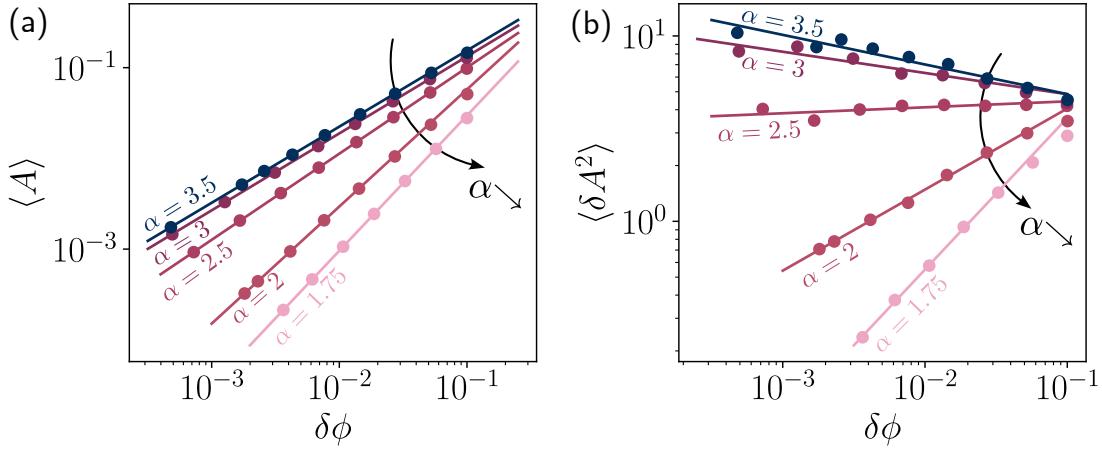


FIGURE 3.9 – (a) Évolution de la valeur moyenne de l'activité dans l'état stationnaire  $\langle A \rangle$  en fonction de la distance au point critique  $\delta\phi$  à différentes portées dans le  $\alpha$ -ROM en 3D. (b) Idem pour la variance  $\langle \delta A^2 \rangle$

Par ailleurs, nous retrouvons aussi dans ce cas un point autour duquel la transition change simultanément de convexité et de comportement fluctuant, seulement cette fois localisé en  $\alpha \approx 2.5$ . En trois dimensions aussi, la criticalité des modèles  $\alpha$ -ROM est donc très différente de celle prévue par le cadre LR-CDP. Pour ce qui est du comportement dynamique, l'exposant  $\delta$  opère cette fois une évolution quelque peu surprenante. En effet, celui-ci reste constant autour de  $\delta \approx 0.74$ , valeur associée à la classe CDP à courte portée. Dans cette dimension, les interactions médiées ne semblent donc pas affecter la relaxation vers l'état stationnaire.

Finalement, l'étude des modèles  $\alpha$ -ROM révèle un comportement critique très différent du cadre de référence LR-CDP en deux ou trois dimensions. Si l'on retrouve une zone d'exposants  $\alpha$  pour lesquels la criticalité dépend continûment de la portée, celle-ci concerne des valeurs de  $\alpha$  bien plus grandes que dans le cadre canonique. De plus, cette zone d'évolution continue n'est pas bornée par le champ moyen associé à celui de CDP, mais par une limite non-triviale en dimension finie, caractérisée par une convexité et des fluctuations évanescentes. Pourtant, l'évolution continue des exposants passe effectivement par un point caractérisé par les mêmes exposants statiques que le champ moyen CDP. Seulement, dans le cas des interactions médiées, celui-ci ne constitue pas un comportement limite. Les interactions médiées constituent donc un mécanisme permettant d'aller au-delà du champ moyen associé au comportement de courte portée, laissant place à un comportement exotique  $\beta > 1$ ,  $\gamma' < 0$  sur toute une gamme de portées  $\alpha$  physiquement envisageables.

### 3.3.3 Hyperuniformité

Une autre manière de caractériser le modèle  $\alpha$ -ROM est de s'intéresser aux propriétés de structure de la transition. Dans le chapitre 1, nous avons vu que proche du point critique, les modèles dans la classe CDP présentent un phénomène d'hyperuniformité. Dans le chapitre 2, nous avons vu que dans le cadre LR-CDP, la propriété d'hyperuniformité est modifiée par la présence de transport à longue portée. Notamment, l'exposant  $\alpha_{\text{HU}}$  caractérisant l'évolution du facteur de structure selon  $S(\mathbf{q}) \sim q^{\alpha_{\text{HU}}}$  évolue continûment de  $\alpha_{\text{HU}}^{\text{CDP, 2D}} \approx 0.5$  à  $\alpha_{\text{HU}}^{\text{CDP, CM}} = 0$  dans la zone  $3 < \alpha < 4$  en 2D. L'hyperuniformité est donc perdue à longue portée dans ce cas. Les exposants critiques  $\beta$ ,  $\gamma'$  et  $\delta$  suivant une évolution différente du cadre LR-CDP dans le cas des interactions médiées à longue portée considérées dans le  $\alpha$ -ROM, il est naturel de se demander s'il en va de même pour l'exposant d'hyperuniformité. En d'autres termes, l'hyperuniformité est-elle aussi perdue dans la limite de longue portée des interactions hydrodynamiques ?

En réalité, cette question a déjà été abordée par Mari et al. [14] lors de l'étude du 0-ROM. Dans ce cas de portée infinie, les auteurs ont montré que l'hyperuniformité est effectivement perdue à grande échelle. La question restante est alors de savoir comment s'opère ce changement de propriété avec l'évolution de la portée des interactions. Dans cette sous-section, nous nous basons sur des observations qualitatives pour fournir un début de réponse à cette question.

#### 3.3.3.1 Méthode

Pour ce faire, nous utilisons, en plus de la méthode de box-counting présentée à la section 2.6, une mesure du facteur de structure  $S(\mathbf{q})$ . Afin de rendre son calcul efficace, nous définissons un équivalent du champ de densité  $\rho(\mathbf{r}_i)$  sur le réseau discret de pas  $D_p$ , utilisé pour calculer les interactions actives-passives. Dans chaque case située autour de  $\mathbf{r}_i$ ,  $\rho(\mathbf{r}_i)$  prend alors une valeur entière correspondant aux nombres de particules présentes dans cette case. Ce faisant, nous pouvons donc utiliser les algorithmes de FFT pour calculer  $\hat{\rho}(\mathbf{q}_i)$  dans l'espace réciproque discret et on a alors directement<sup>9</sup> :

$$S(\mathbf{q}_i) = |\hat{\rho}(\mathbf{q}_i)|^2 \quad (3.17)$$

Pour évaluer l'évolution de  $S(\mathbf{q})$  avec la norme du vecteur d'onde  $q$  et donc sonder son évolution à petits  $q$ , nous réalisons une moyenne isotrope dans l'espace réciproque. En pratique, chaque point  $S(q)$  est calculé par une moyenne sur l'anneau d'épaisseur  $\frac{2\pi}{L}$  associé dans l'espace réciproque.

Afin de pouvoir comparer les répartitions de densité pour les différentes portées  $\alpha$ , nous nous plaçons à une distance fixée du point critique  $\delta\phi \approx 1 \times 10^{-2}$ . Ce critère est en effet essentiel pour la comparaison puisque, comme nous l'avons vu au chapitre 2, les propriétés d'hyperuniformité dépendent de la distance au point critique. Notamment, la propriété d'hyperuniformité est perdue à grande échelle pour des distances  $\delta\phi$  trop grandes. Cette distance fixée est alors choisie de telle façon que les simulations associées à chaque portée puissent se dérouler sur des temps raisonnables (< 24 h pour une simulation

9. Est-ce qu'il faut mettre une moyenne en soi ?

individuelle). Afin d'obtenir une meilleure statistique, nous moyennons ces mesures sur plusieurs dizaines de configurations indépendantes dans l'état stationnaire. Les résultats obtenus sont alors représentés sur la figure 3.10-(a). En parallèle, les mesures de type box-counting sont effectuées et les résultats associés sont représentés sur la figure 3.10-(b).

### 3.3.3.2 Résultats

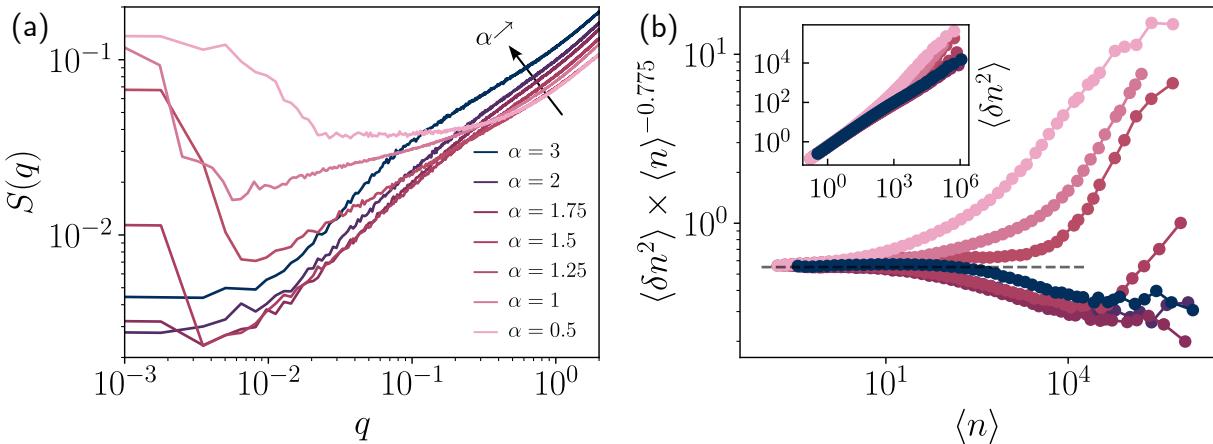


FIGURE 3.10 – Hyperuniformité dans le modèle  $\alpha$ -ROM en 2D à  $\delta\phi \approx 1 \times 10^{-2}$ . (a) Facteur de structure isotrope. (b) Méthode box-counting (voir section 2.6) compensée par le comportement mesuré à courte portée  $\alpha = 3$ . En encart, les données brutes.

Dans la limite de longue portée  $\alpha = 0.5$ , nous retrouvons les résultats de Mari et al. [14] avec une perte du caractère évanescence de  $S(\mathbf{q})$  à petits  $q$ . Dans la limite de courte portée  $\alpha = 3$ , l'allure globale de la courbe présente bien une diminution de  $S(\mathbf{q})$  à petits  $q$  bien que celle-ci ne semble pas suivre une loi de puissance évidente et sature à très petits  $\mathbf{q}$ . Cette saturation peut notamment s'expliquer par la distance finie au point critique examinée. L'observation de cette évanescence marque alors une forte différence avec le cas LR-CDP. En effet, dans ce cas, l'hyperuniformité est déjà complètement perdue à cette portée.

Entre ces deux extrémités, les portées intermédiaires montrent une évolution intéressante. Si pour  $\alpha > 1.5$  les facteurs de structure sont difficilement distinguables, pour  $\alpha \leq 1.5$  leur évolution montrent d'abord décroissance plus faible à des valeurs de  $q$  intermédiaires puis une augmentation à très petits  $q$ . Cette évolution suggère alors une perte de l'hyperuniformité à grande échelle dans le régime critique.

Un aspect de notre comparaison des différentes portées peut être questionné. Nous pouvons en fait imaginer deux façons de définir la distance à la transition, qui doit être fixée pour comparer les résultats obtenus pour différents  $\alpha$ . Ici, nous avons fait le choix de la caractériser via  $\delta\phi$ , qui est le choix le plus standard. Une autre possibilité aurait été de la caractériser via la valeur moyenne de l'activité dans l'état stationnaire  $\langle A \rangle$ . Dans ce cas, sachant que la convexité de la transition augmente avec la portée des interactions,

nous en conclurions que les données présentées pour les plus petites valeurs de  $\alpha$  sont bien plus proches de la transition que celles présentées pour les plus grandes valeurs de  $\alpha$ . Pourtant, nous mesurons ici une perte du caractère hyperuniforme dans le cas des plus petites valeurs de  $\alpha$ . Sachant que l'on attend que les propriétés hyperuniformes se développent d'autant plus que le système est proche de la transition, un changement de convention pour définir la distance à la transition ne permettrait donc pas de renverser la tendance observée ici, il l'exacerberait plutôt.

Cette tendance est moins évidente mais se retrouve qualitativement dans le cas de la méthode de box-counting. En compensant l'évolution de  $\langle \delta n^2 \rangle$  avec l'évolution mesurée à très courte portée  $\langle \delta n^2 \rangle \sim \langle n \rangle^{0.775}$  sur la figure 3.10-(b), les évolutions pour  $\alpha < 1.5$  semblent aussi contraster avec celles de plus courtes portées  $\alpha > 1.5$ , révélant un comportement localement "moins hyperuniforme" (i.e. un exposant effectif local  $\alpha_{\text{HU}}^{\text{eff}}$  plus grand).

Finalement, cette analyse qualitative des propriétés d'hyperuniformité du  $\alpha$ -ROM semble montrer un changement autour de  $\alpha = 1.5$ . Pour  $\alpha < 1.5$ , les observations suggèrent une hyperuniformité perdue à grande échelle. De la même manière que le transport d'activité à longue portée, les interactions médiées effacent donc le caractère hyperuniforme de la transition. Toutefois, la zone d'effet  $\alpha < 1.5$  qualitativement identifiable ici est à nouveau très différente de celle prévue par le cadre de référence LR-CDP pour lequel on a  $\alpha < 3$ . Une étude plus approfondie serait cependant nécessaire pour confirmer ces premières observations.

### 3.3.4 Retour sur les cas physiques

Au début de ce chapitre, nous avions identifié deux cas de portée pertinents dans le cadre de la transition de réversibilité des suspensions cisailées cycliquement. Le premier, similaire au cas de l'expérience de Pine et al [5], a lieu dans un milieu 3D peu confiné. Dans notre modélisation stroboscopique cela revient à  $\alpha = 3$  dans le  $\alpha$ -ROM en 3D. Les résultats présentés au cours de cette section placent ce cas au cœur de la zone d'évolution continue des exposants avec  $\beta > 1$  et  $\gamma' < 0$ . La transition attendue est donc convexe.

Le second cas pertinent est le cas d'un cisaillement confiné entre deux plaques rigides, pour lequel on a  $\alpha = 3$  dans un milieu quasi-2D. Notre étude du  $\alpha$ -ROM en 2D place alors cette situation dans la limite de courte portée, dans laquelle la transition adopte le comportement de la classe CDP, soit concave, avec des fluctuations qui divergent et des propriétés hyperuniformes. Ainsi, notre analyse indique que l'influence des interactions médiées à longue portée dépend fortement du système réel étudié, celles-ci n'ayant un impact sur le comportement critique que dans certains cas.

## Conclusion de la section

Finalement, l'analyse des propriétés statiques (sous-sous-section 3.3.2.1), dynamiques (sous-sous-section 3.3.2.2) et de structure (sous-section 3.3.3) des transitions du  $\alpha$ -ROM montre que les interactions médiées dans ce système agissent sur le comportement critique d'une manière originale. Notamment l'évolution des exposants critiques avec l'exposant de

portée  $\alpha$  ne peut pas être comprise dans le cadre LR-CDP qui représente l'influence de sauts à longue portée dans le système. Plus particulièrement, nous observons une large gamme de portées en 2D et en 3D montrant un comportement convexe de la transition et évanescence des fluctuations. Ces observations n'étant pas rationalisables dans le cadre LR-CDP, il semble que la diffusion des particules passives dans le modèle constitue un mécanisme dont l'appréhension nécessite un nouveau cadre théorique.

## 3.4 Interprétation

Que ce soit dans le cas du ROM appartenant à la classe CDP ou dans le cas du LR-ROM rattaché au cadre LR-CDP, la dynamique du système est contrôlée par le transport des particules actives. Comme nous l'avons détaillé dans la section précédente, ce mécanisme, par les cadres théoriques qu'il appelle, ne permet pas d'appréhender la criticalité dans les modèles  $\alpha$ -ROM.

Comme nous l'avons déjà évoqué au [chapitre 1](#), nous pensons que cette distinction est due à la nature des interactions à longue portée dans ces modèles. Celles-ci n'induisent en fait pas un transport des particules actives mais plutôt un bruit interne auquel sont soumises l'ensemble des particules du système. Au niveau de l'implémentation numérique de notre modèle, ce bruit interne est représenté par le processus diffusif composé de la succession des petits déplacements  $\delta^p$  (voir [figure 3.3](#)) induits par l'activité dans le système. Ce mécanisme propose alors un nouveau mode de création d'activité par rapport au ROM et au LR-ROM : deux particules passives peuvent devenir actives en se recouvrant après diffusion. Là où le processus de propagation de l'activité par transport (toujours présent dans le  $\alpha$ -ROM) est représenté par le processus de réaction-diffusion  $A + B \xrightarrow{\lambda} 2A$  (voir [sous-section 1.3.3](#)), on pourrait formellement représenter ce nouveau mode de création de l'activité par l'équation :



les particules passives représentées par l'espèce  $B$  ayant une dynamique stochastique dictée par l'espèce  $A$ . Nous pensons que c'est l'ajout de cette seconde réaction qui rend le comportement critique du  $\alpha$ -ROM très différent du cadre LR-CDP.

Dans ce chapitre, nous proposons un cadre d'interprétation de la transition de réversibilité dans les suspensions cisaillées cycliquement suivant ces lignes. Pour ce faire, nous partirons du modèle de Hébraud-Lequeux, incontournable dans le cas de la transition vers l'écoulement des fluides à seuil, pour développer un modèle champ moyen associé au  $\alpha$ -ROM. Se construisant via la notion de bruit interne, ce modèle permettra de mettre en évidence le mécanisme diffusif comme origine de la convexité des transitions précédemment caractérisées.

Nous généraliserons ensuite ce cadre champ moyen pour obtenir une première compréhension de l'effet de la longue portée des interactions sur le processus diffusif et le

comportement critique résultant. Cette analyse mènera à l'établissement d'un cadre théorique, alternative au cadre LR-CDP, qui nous permettra une première interprétation des résultats présentés dans la section précédente.

Enfin, via des modifications de notre modèle numérique et des mesures complémentaires, nous mettrons en évidence les limites mais aussi les apports de cette approche de champ moyen pour interpréter les criticalités des modèles  $\alpha$ -ROM.

### 3.4.1 Un cadre de description champ moyen

Dans le cadre de la transition vers l'écoulement des fluides à seuil, la présence d'un bruit mécanique issu des interactions à longue portée médiées par le milieu a fait l'objet de diverses études [65, 67]. D'un point de vue champ moyen, cette interprétation permet d'établir un modèle permettant d'expliquer la convexité de la transition observée expérimentalement. Ce modèle est le modèle de Hébraud-Lequeux [101], que l'on présentera plus spécifiquement à la [sous-sous-section 4.1.3.2](#) du [chapitre 4](#). Du fait des similarités entre les transitions de réversibilité et d'écoulement présentées au [chapitre 1](#), notamment la présence d'un bruit interne, nous cherchons dans cette partie à définir un modèle équivalent au modèle Hébraud-Lequeux dans le cas de la transition de réversibilité afin d'expliquer les convexités mesurées dans la section précédente.

Pour ce faire, nous présenterons d'abord l'image champ moyen permettant d'établir un tel modèle. Nous montrerons alors que si celui-ci est très proche du modèle original de Hébraud-Lequeux, il existe entre ces deux formulations certaines différences. Malgré cela, nous montrerons par une résolution analytique que ce cadre d'interprétation champ moyen permet effectivement de décrire une transition convexe dans le cadre de la transition de réversibilité. Toujours inspiré du cadre de la transition vers l'écoulement, nous mettrons alors ce modèle à profit pour interpréter l'effet de la portée des interactions sur le comportement critique observé dans le  $\alpha$ -ROM.

#### 3.4.1.1 Première modélisation et diffusion normale

##### Présentation du modèle

La philosophie du modèle de Hébraud-Lequeux capturant l'effet du bruit interne dans la transition vers l'écoulement consiste à se concentrer sur la dynamique effective d'un agent unique du système, diffusant vers une barrière sous l'action de l'activité globale. Nous proposons une image s'adaptant à cette formulation dans le cadre de la dynamique des particules dans le  $\alpha$ -ROM, illustrée à la [figure 3.11](#).

Considérons une particule passive dans notre modèle numérique. Au cours du temps, celle-ci diffuse jusqu'à rencontrer une autre particule. Dans une approche champ moyen négligeant toutes corrélations (d'activité, de positions, ...), nous pouvons représenter les particules entourant notre particule d'intérêt par une cage effective de rayon  $R$ . En supposant une répartition des particules uniforme dans le système, la taille de cette cage peut être directement associée à la distance interparticulaire typique  $l$  et donc à la densité de particules  $\phi$ . On a alors  $R \sim \phi^{-1/D}$ . En centrant cette zone de piégeage sur l'origine du

repère, la particule cible positionnée en  $\mathbf{r}$  peut donc prendre deux états : passive si elle n'entre pas en contact avec d'autres particules ( $|\mathbf{r}| < R$ ), et active si elle sort de la cage effective ( $|\mathbf{r}| > R$ ).

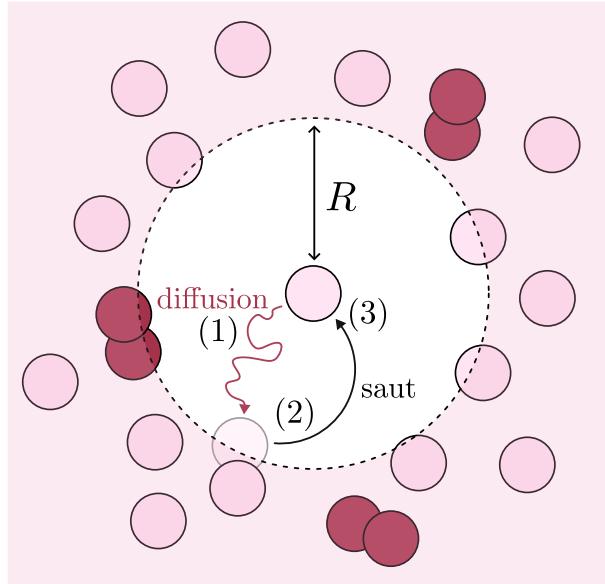


FIGURE 3.11 – Représentation champ moyen de la dynamique du  $\alpha$ -ROM.

Lorsque la particule est passive, celle-ci est soumise à un bruit interne dont l'intensité est proportionnelle au nombre de particules actives dans l'environnement (i.e. l'activité dans le système). Dans cette vision statistique du problème où toutes les particules ont une dynamique équivalente, cette intensité du bruit est proportionnelle à la probabilité (notée  $\Gamma\tau$  dans la suite) pour la particule d'être active. En première intention de modélisation, nous considérons ce bruit comme gaussien et donc que la particule diffuse avec un coefficient de diffusion  $D = a\Gamma$  sous l'action de l'activité globale.

Lorsque la particule est active, elle effectue un saut, comme dans le  $\alpha$ -ROM, sur un temps typique  $\tau$ . Dans notre modélisation champ moyen, nous considérons ce saut suffisamment grand pour replacer la particule à l'origine d'une nouvelle cage effective, la rendant de nouveau passive.

Dans cette image simple, nous pouvons modéliser l'évolution de la distribution de probabilité  $P(\mathbf{r})$  de la position  $\mathbf{r}$  de la particule par les équations suivantes :

$$\begin{aligned} \partial_t P(\mathbf{r}, t) &= a\Gamma(t)\nabla^2 P(\mathbf{r}, t) - \frac{1}{\tau}\Theta(|\mathbf{r}| > R)P(\mathbf{r}, t) + \delta(\mathbf{r})\Gamma(t) \\ \Gamma(t) &= \frac{1}{\tau} \int_{|\mathbf{r}| > R} d\mathbf{r} P(\mathbf{r}, t) \end{aligned} \quad (3.19)$$

avec  $a$  un paramètre réel. Le premier terme du membre de droite représente la diffusion de la particule ((1) sur la [figure 3.11](#)), le second le processus de saut actif ((2) sur la [figure 3.11](#)) et le troisième l'apparition dans une nouvelle cage ((3) sur la [figure 3.11](#)).

Comme nous le montrons juste après via sa résolution numérique, le modèle ainsi défini présente une transition de phase absorbante de paramètre d'ordre  $\Gamma = \langle \Gamma(t) \rangle$  et de paramètre de contrôle  $R$ . Ces deux quantités sont les pendants directs de l'activité  $\langle A \rangle$  et de la densité<sup>10</sup>  $\phi$  dans le  $\alpha$ -ROM.

### Comparaison avec la formulation originale

Le modèle défini par cette image champ moyen dans le modèle de particules ressemble fortement au modèle de Hébraud-Lequeux utilisé dans le cadre de la transition vers l'écoulement (voir [sous-sous-section 4.1.3.2](#)). Dans ce cas où la variable d'intérêt est une contrainte locale  $\sigma$  et non la position d'un objet, les équations prennent en fait la forme suivante :

$$\begin{aligned} \partial_t P(\sigma, t) &= -\dot{\gamma} \partial_\sigma P(\sigma, t) + a\Gamma(t) \nabla P(\sigma, t) - \frac{1}{\tau} \Theta(|\sigma| > \sigma_Y) P(\sigma, t) + \delta(\sigma)\Gamma(t) \\ \Gamma(t) &= \frac{1}{\tau} \int_{|\sigma| > \sigma_Y} d\sigma P(\sigma, t) \end{aligned} \quad (3.20)$$

On peut cependant remarquer deux différences principales entre ces deux formulations. La première est que la diffusion prend place dans un espace de dimension 1 dans le cadre de la transition vers l'écoulement alors qu'elle prend place dans un espace de dimension 2 ou 3 pour le modèle de suspensions. La seconde est la présence d'un terme additionnel dans l'[équation 3.20](#), le premier du membre de droite. Ce terme en dérivée première de la distribution correspond à un forçage du système. Absent dans le cas du modèle de suspensions, il biaise la diffusion de la variable vers la barrière. Dans le cas de la transition de réversibilité, celui-ci reviendrait à l'ajout d'un mécanisme déterministe d'attraction vers le bord de la cage.

Cette seconde différence introduit une autre différence plus fondamentale. Dans le cas du modèle de Hébraud-Lequeux, le paramètre de contrôle habituel n'est pas  $\sigma_Y$  (et donc de manière équivalente  $R$  dans le cas des suspensions) mais plutôt la valeur moyenne de la variable d'intérêt  $\Sigma = \int d\sigma P(\sigma, t)$ . En effet, dans ce cas, via la brisure de symétrie opérée par le terme additionnel, celle-ci n'est plus nulle. La phénoménologie de la transition associée est donc décrite par la relation :

$$\Gamma \sim (\Sigma - \Sigma_c)^\beta \quad (3.21)$$

Dans le cadre du modèle d'écoulement, la résolution numérique de ce modèle donne  $\beta = 2$  et permet donc d'expliquer la convexité de la transition via le mécanisme de diffusion sous l'activité globale. On peut alors se demander si ce résultat tient toujours dans la formulation champ moyen adaptée au modèle de suspensions, malgré les deux différences mises en évidences dans cette partie.

---

10. Nous rappelons que dans notre modélisation champ moyen  $R \sim \phi^{-1/D}$

## Résolution en 2D

Afin de montrer que ce modèle champ moyen permet effectivement de retrouver une transition convexe par ce mécanisme de diffusion, nous le résolvons en deux dimensions pour déterminer la relation  $\Gamma \sim (R - R_c)^\beta$  à petits  $\Gamma$ . Pour ce faire, nous commençons par adimensionner l'équation 5.4 par les transformations :

$$\tilde{t} = \frac{t}{\tau}, \quad \tilde{\mathbf{r}} = \frac{\mathbf{r}}{R} \quad (3.22)$$

En nous plaçant de plus dans l'état stationnaire, nous obtenons alors :

$$0 = \tilde{a}\tilde{\Gamma}\nabla^2P(\tilde{\mathbf{r}}) - \Theta(|\tilde{\mathbf{r}}| > 1)P(\tilde{\mathbf{r}}) + \delta(\tilde{\mathbf{r}})\tilde{\Gamma}, \quad \tilde{\Gamma} = \int_{|\tilde{\mathbf{r}}| > 1} d\tilde{\mathbf{r}} P(\tilde{\mathbf{r}}), \quad \tilde{a} = \frac{a}{R^2} \quad (3.23)$$

Dans la suite de la résolution, nous omettrons les  $\tilde{\cdot}$  pour alléger les notations. Sous cette transformation, le paramètre de contrôle est  $a$ , relié à la densité de particules via  $a \sim \phi$  puisque nous rappelons que l'on a  $R \sim 1/\sqrt{\phi}$ .

Nous résolvons ensuite cette équation par morceaux dans les domaines disjoints  $r < 1$  (zone I) et  $r > 1$  (zone II). Dans la zone I, la résolution donne :

$$P_I(\mathbf{r}) = c_1 \ln(r) + c_2, \quad (c_1, c_2) \in \mathbb{R}^2 \quad (3.24)$$

et dans la zone II :

$$P_{II}(\mathbf{r}) = c_3 K_0\left(\frac{r}{\sqrt{a\Gamma}}\right), \quad c_3 \in \mathbb{R} \quad (3.25)$$

avec  $K_0$  la fonction de Bessel modifiée de seconde espèce d'ordre 0 [98]. La distribution  $P(\mathbf{r})$  étant continue et de dérivée continue en  $r = 1$ , on obtient finalement :

$$P(\mathbf{r}) = \begin{cases} c_3 \left( K_0\left(\frac{1}{\sqrt{a\Gamma}}\right) - K_1\left(\frac{1}{\sqrt{a\Gamma}}\right) \frac{\ln(r)}{\sqrt{a\Gamma}} \right), & r < 1 \\ c_3 K_0\left(\frac{r}{\sqrt{a\Gamma}}\right), & r > 1 \end{cases} \quad (3.26)$$

La condition de normalisation de la distribution permet alors de déterminer la constante  $c_3$ . En effet on a :

$$I_I = \int_0^1 dr 2\pi r P(\mathbf{r}) = \pi c_3 K_0\left(\frac{1}{\sqrt{a\Gamma}}\right) + \frac{\pi c_3}{2\sqrt{a\Gamma}} K_1\left(\frac{1}{\sqrt{a\Gamma}}\right) \quad (3.27)$$

$$I_{II} = \int_0^\infty dr 2\pi r P(\mathbf{r}) = 2\pi c_3 \sqrt{a\Gamma} K_1\left(\frac{1}{\sqrt{a\Gamma}}\right) \quad (3.28)$$

en utilisant la propriété  $(z^\nu K_\nu(z))' = -z^\nu K_{\nu-1}(z)$ . Nous obtenons alors :

$$\frac{1}{c_3} = \pi K_0\left(\frac{1}{\sqrt{a\Gamma}}\right) + \frac{\pi}{2\sqrt{a\Gamma}} K_1\left(\frac{1}{\sqrt{a\Gamma}}\right) + 2\pi \sqrt{a\Gamma} K_1\left(\frac{1}{\sqrt{a\Gamma}}\right) \quad (3.29)$$

La valeur de  $\Gamma$  dans l'état stationnaire est alors donnée par la relation d'auto-cohérence :

$$\Gamma = \frac{2\pi\sqrt{a\Gamma}K_1\left(\frac{1}{\sqrt{a\Gamma}}\right)}{\pi K_0\left(\frac{1}{\sqrt{a\Gamma}}\right) + \frac{\pi}{2\sqrt{a\Gamma}}K_1\left(\frac{1}{\sqrt{a\Gamma}}\right) + 2\pi\sqrt{a\Gamma}K_1\left(\frac{1}{\sqrt{a\Gamma}}\right)} \quad (3.30)$$

Étant intéressés par le comportement asymptotique à petits  $\Gamma$ , nous développons les fonctions de Bessel asymptotiquement selon :

$$K_\nu(x) \sim \sqrt{\frac{\pi}{2x}}e^{-x}\left(1 + \frac{4\nu^2 - 1}{8x} + \mathcal{O}(1/x^2)\right) \quad (3.31)$$

En développant le membre de droite de l'équation 3.30 au premier ordre non-trivial nous obtenons finalement :

$$\Gamma = 4a\Gamma\left(1 - 2\sqrt{a\Gamma} + \mathcal{O}(a\Gamma)\right) \quad (3.32)$$

Il y a alors deux cas possibles selon la valeur de  $a$  et sa comparaison avec la valeur critique  $a_c = \frac{1}{4}$ . Pour  $a < a_c$ , la seule solution est  $\Gamma = 0$ . Pour  $a > a_c$ , une autre solution  $\Gamma > 0$  apparaît, se comportant comme  $\Gamma \sim (a - a_c)^2$ . Si l'on revient aux variables avant adimension, cela revient à :

$$\Gamma \sim (R - R_c)^2 \quad (3.33)$$

Ainsi, ce modèle rend bien compte d'une transition de phase absorbante avec une phase absorbée  $\Gamma = 0$  lorsque la cage effective est suffisamment grande  $R > R_c$ , et une phase active  $\Gamma > 0$  lorsque celle-ci est suffisamment petite  $R < R_c$ . Étant donné que l'on a  $R \sim 1/\sqrt{\phi}$  dans l'image champ moyen et que  $\Gamma$  correspond à l'activité dans le système, le comportement qualitatif de transition du  $\alpha$ -ROM est bien retrouvé. De plus, dans l'image champ moyen celui-ci est donc caractérisé par un exposant critique  $\beta = 2$ . Ce modèle simple permet donc effectivement de retrouver la convexité de la transition de réversibilité. Les différences entre le modèle champ moyen d'écoulement et celui de réversibilité n'impactent donc pas la criticalité du système.

Via ce nouveau cadre de modélisation statistique, nous sommes donc capables d'interpréter la convexité des transitions observées dans le  $\alpha$ -ROM. Toutefois, cette approche champ moyen ne permet pas de rendre compte de l'évolution de cette convexité avec la portée des interactions associées puisque celles-ci sont encodées dans un terme de bruit gaussien générique, quelque soit  $\alpha$ . Dans la partie suivante, nous montrons, en suivant les lignes d'études menées sur la transition vers l'écoulement, que l'effet de la portée des interactions peut en fait être introduit dans cette image simple afin de formuler des prédictions quant à l'évolution de l'exposant  $\beta$  avec  $\alpha$  dans un cadre champ moyen.

### 3.4.1.2 Influence de la longue portée et diffusion anormale

Dans le cadre de la transition vers l'écoulement, les auteurs de l'étude [67] ont montré que la modélisation gaussienne du bruit n'était pas toujours la plus pertinente pour décrire l'effet des interactions à longue portée dans le système. Dans cette partie, nous reprenons cet argument pour le transposer au modèle de suspensions.

## Interactions à longue portée et distributions de bruit interne

En fait, du fait de la propriété de décroissance algébrique du propagateur hydrodynamique  $\mathcal{G}$ , le bruit interne peut être largement distribué. Dans l'image champ moyen développée précédemment, cela revient à considérer que la particule cible effectue des sauts de Lévy de taille  $\Delta$  distribués selon :

$$P(\Delta) \sim \frac{1}{\Delta^{1+\mu}} \quad (3.34)$$

avec  $\mu < 2$ <sup>11</sup>. Dans notre modélisation probabiliste, cela revient donc à modifier l'équation 5.4 selon :

$$\begin{aligned} \partial_t P(\mathbf{r}, t) &= -a\Gamma(t)|\nabla|^\mu P(\mathbf{r}, t) - \frac{1}{\tau}\Theta(|\mathbf{r}| > R)P(\mathbf{r}, t) + \delta(\mathbf{r})\Gamma(t) \\ \Gamma(t) &= \frac{1}{\tau} \int_{|\mathbf{r}| > R} d\mathbf{r} P(\mathbf{r}, t) \end{aligned} \quad (3.35)$$

avec  $|\nabla|^\mu$  l'opérateur de dérivée fractionnaire déjà défini au chapitre 2 dans le cadre du transport à longue portée. Celui-ci traduit alors une diffusion anormale de la particule.

D'un point de vue champ moyen, nous pouvons déterminer la valeur de  $\mu$  en fonction de la portée des interactions hydrodynamiques. Dans le cas où le bruit interne provient d'une unique particule active et où les interactions médiées décrites par le propagateur  $\mathcal{G}(\mathbf{r})$  décroissent comme  $1/r^\alpha$ , la distribution associée est :

$$P(\Delta) \sim \int d\mathbf{r} \delta(\mathcal{G}(\mathbf{r}) - \Delta) \sim \frac{1}{\Delta^{1+D/\alpha}} \quad (3.36)$$

et on a donc  $\mu = D/\alpha$ . Ce résultat basé sur un événement unique reste valable lorsque l'on considère un ensemble de particules actives dans le système, mais à la condition que l'activité dans le système soit totalement décorrélée et n'est donc valable que dans la limite de champ moyen.

Nous nommons le modèle généralisé représenté par l'équation 3.35, le modèle  $\mu$ -Hébraud-Lequeux. Il est alors intéressant de voir comment cette généralisation permet de modifier l'exposant  $\beta$  associé en fonction du paramètre  $\mu$ , afin d'interpréter la dépendance en  $\alpha$  observée dans les simulations numériques.

## Résultats dans le cadre de la transition vers l'écoulement

La généralisation du modèle de Hébraud-Lequeux à un bruit largement distribué a déjà été étudié dans le cas de la transition vers l'écoulement. Via cette formulation, les auteurs des études [67, 102] sont parvenus à formuler des prédictions sur le comportement critique du modèle en fonction de l'exposant de bruit  $\mu$ . Dans cette partie, nous rappelons brièvement ces résultats. Ceux-ci sont en fait utiles à notre étude puisque l'on peut penser qu'ils se transposent à notre modèle  $\mu$ -Hébraud-Lequeux, de la même manière que dans le cas d'une diffusion normale.

11. Dans la limite  $\mu \geq 2$ , la variance de la distribution est finie et donc ce processus se ramène à une marche aléatoire gaussienne

Par une étude quasistatique de la généralisation de l'équation 3.20, il a été montré que l'exposant  $\beta$  caractérisant la transition vers l'écoulement via l'équation 3.21 évoluait en fonction de  $\mu$  selon :

$$\beta = \begin{cases} 2, & \mu \geq 2 \\ \mu, & 1 < \mu \leq 2 \\ 1, & \mu < 1 \end{cases} \quad (3.37)$$

retrouvant  $\beta = 2$  dans la limite gaussienne et  $\beta = 1$  dans la limite  $\mu < 1$  où la dynamique est dominée par le terme de forçage [67].

Par ailleurs, dans cette même limite d'activité nulle ( $P(\sigma > \sigma_Y) = 0$ ), il a été démontré que la distribution  $P(\sigma)$  présentait un comportement algébrique proche de la barrière  $\sigma = \sigma_Y$  [67] :

$$P(\sigma_Y - \sigma) \sim (\sigma_Y - \sigma)^\theta \quad (3.38)$$

avec  $\theta$  l'exposant de pseudo-gap. Dans le cas où le système n'est pas forcé, se rapprochant alors du cas de notre modèle de suspensions, il a été montré que cet exposant dépend de l'exposant de bruit  $\mu$  selon :

$$\theta = \begin{cases} \frac{\mu}{2}, & \mu \leq 2 \\ 1, & \mu \geq 2 \end{cases} \quad (3.39)$$

Le modèle d'écoulement étudié dans [67, 102] permet donc de qualifier une évolution de la criticalité de la transition vers l'écoulement en fonction du bruit interne associé. Étant très similaire au modèle  $\mu$ -Hébraud-Lequeux établi dans le cas de la transition de réversibilité, nous nous demandons si nous pouvons transposer ces résultats analytiques à notre cadre d'interprétation champ moyen. En d'autres termes, l'équation 3.37 et l'équation 3.39 sont-elles toujours valables dans ce cas ?

Dans le cadre de l'image champ moyen que nous avons proposé pour la transition de réversibilité, l'exposant  $\beta$  définit la relation entre l'activité  $\Gamma$  et la taille de la cage effective  $R$  selon :

$$\Gamma \sim (R - R_c)^\beta \quad (3.40)$$

Pour ce qui est de l'exposant de pseudo-gap, par transposition, celui-ci définit la relation :

$$P(R - |\mathbf{r}|) \sim (R - |\mathbf{r}|)^\theta \quad (3.41)$$

Les raisons pour lesquelles cette correspondance de valeur des exposants pourrait ne pas fonctionner sont les différences entre les modèles présentées à la sous-sous-section 3.4.1.1, à savoir la différence de dimension et l'existence ou non d'un terme de forçage qui implique un changement du paramètre de contrôle. Toutefois, la correspondance entre les deux modèles dans le cas de la diffusion normale (où l'on trouve  $\beta = 2$  dans les deux cas) suggère que ces différences n'impactent pas réellement le comportement critique de la

transition. Pour s'en assurer, nous proposons une résolution numérique du modèle  $\mu$ -Hébraud-Lequeux dans la partie suivante.

## Résolution numérique

Afin de confirmer que le modèle  $\mu$ -Hébraud-Lequeux suit bien le même comportement critique que dans le cas des études [67, 102], nous résolvons l'équation 3.35 par une méthode numérique. Celle-ci, détaillée dans la sous-section 6.3.3, consiste à interpréter cette équation comme une équation de Fokker-Planck et de la résoudre statistiquement par son équivalent en équation de Langevin. Il est alors possible de déterminer l'évolution de  $\Gamma$  avec  $R$  et d'en déduire l'exposant critique  $\beta$  associé. La méthode de détermination de l'exposant  $\beta$  suit alors le même principe que celle dans le cas du  $\alpha$ -ROM. Les résultats obtenus en 1D et en 2D sont reportés sur la figure 3.12 où nous avons aussi représenté le comportement prédit dans la théorie homologue pour la transition vers l'écoulement.

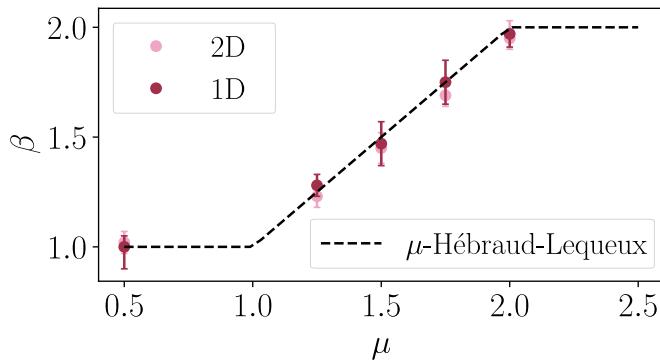


FIGURE 3.12 – Évolution de l'exposant  $\beta$  mesuré par la résolution numérique de l'équation 3.35 en 1D et en 2D (voir sous-section 6.3.3). En pointillés noirs, le comportement du modèle de Lin et al. [102]

La détermination des exposants n'est pas aisée car elle est coûteuse numériquement, laissant ainsi place à de larges incertitudes de mesure. Toutefois, que ce soit en une ou deux dimensions, les points mesurés montrent un plutôt bon accord avec l'attendu théorique. Les points en 1D semblent ainsi montrer que l'ajout du terme de forçage ne modifie pas la criticalité de la transition, tandis que les points en 2D suggèrent que cette théorie s'étend trivialement aux dimensions supérieures.

Pour la suite de notre analyse nous considérerons donc que le modèle  $\mu$ -Hébraud-Lequeux suit effectivement une criticalité dictée par l'équation 3.39 et l'équation 3.37. En d'autres termes, dans une gamme d'exposants  $1 < \mu < 2$ , la criticalité du modèle dépend continûment de  $\mu$  avec  $\beta = 2\theta = \mu$ . Pour  $\mu < 1$ , le modèle atteint une limite dans laquelle on a **trivialement**  $\beta = 1$  et  $\theta = \mu/2$ . Pour  $\mu > 2$ , le modèle atteint une limite diffusive dans laquelle nous avons montré que  $\beta = 2$ , et  $\theta = 1$ .

Le raisonnement présenté à la [sous-sous-section 3.4.1.2](#) implique que  $\mu$  est inversement proportionnel à la porté des interactions  $\alpha$ . Dans le cadre champ moyen représenté par le modèle  $\mu$ -Hébraud-Lequeux, la portée des interactions semble donc affecter le comportement critique de la même manière que nous l'avons observé dans le  $\alpha$ -ROM : la convexité de la transition augmente avec la portée. Afin de tester plus spécifiquement cette image champ moyen et sa pertinence pour décrire le mécanisme à l'oeuvre dans les simulations numériques en dimension finie, nous proposons dans la partie suivante un test plus spécifique des prédictions du modèle.

### 3.4.2 Interprétation champ moyen du mécanisme de diffusion dans le $\alpha$ -ROM

L'image développée précédemment via le modèle  $\mu$ -Hébraud-Lequeux est une image champ moyen du mécanisme de diffusion des particules passives et de son influence sur la criticalité de la transition. Puisque champ moyen, elle repose sur deux approximations essentielles : celle que la dynamique des particules actives est décorrélée et celle que la dynamique des particules passives l'est aussi. Dans ce cas, il est possible de faire un lien entre les différents exposants caractérisant le problème.

Le premier lien réside dans la relation reliant la portée des interactions caractérisée par l'exposant  $\alpha$  et la distribution du bruit interne caractérisée par l'exposant  $\mu$ . Dans le cas d'une dynamique des particules actives décorrélée, nous avons en effet  $\mu = D/\alpha$  comme nous l'avons montré à la [sous-sous-section 3.4.1.2](#). Le second lien réside dans l'influence de cet exposant  $\mu$  sur la criticalité du modèle caractérisée par les exposants  $\beta$  et  $\theta$ . Celui-ci est représenté par l'[équation 3.39](#) et l'[équation 3.37](#). Notamment, pour  $1 < \mu < 2$ , nous avons  $\beta = \mu$  et  $2\theta = \mu$  et donc  $\beta = 2\theta$ .

Dans cette partie, nous cherchons à tester la pertinence de cette image champ moyen pour interpréter les transitions observées dans le  $\alpha$ -ROM. La difficulté est que le  $\alpha$ -ROM est un modèle numérique complexe. Pour deux raisons principales, nous nous attendons d'emblée à ce que celui-ci se démarque de l'image champ moyen. La première raison est que celui-ci fait intervenir deux mécanismes différents pour la création d'activité, comme nous l'avons mentionné au début de cette section. Le premier mécanisme est celui de la diffusion des particules passives et le second est celui du transport des particules actives. Dans sa construction, le modèle  $\mu$ -Hébraud-Lequeux basé uniquement sur ce premier mécanisme ne prétend donc pas représenter la criticalité complète du  $\alpha$ -ROM mais seulement un aspect de celle-ci. La seconde raison est que le  $\alpha$ -ROM présente une dynamique des particules passives et actives en dimension finie, et donc a priori non exempte de corrélation.

Afin de déterminer si le modèle  $\mu$ -Hébraud-Lequeux est un cadre d'interprétation pertinent, nous ne pouvons donc pas nous réduire à une comparaison de ses prédictions avec les résultats directement obtenus dans le cadre du  $\alpha$ -ROM. À la place, nous proposons d'étudier la validité de ces prédictions dans des limites du modèle  $\alpha$ -ROM où les points de divergence conceptuels s'estompent. Si dans la limite où les hypothèses de l'image champ moyen sont satisfaites nous retrouvons les prédictions associées au modèle  $\mu$ -Hébraud-

Lequeux, cela constitue une preuve que celui-ci permet bien de représenter le mécanisme de diffusion du  $\alpha$ -ROM dans son aspect champ moyen.

### 3.4.2.1 Image champ moyen dans une dynamique d'activité décorrélée

#### Approche du champ moyen par les grandes dimensions

Afin de pouvoir tester la validité de l'image proposée par le modèle  $\mu$ -Hébraud-Lequeux, nous proposons donc d'isoler le mécanisme de création de l'activité par diffusion des particules passives dans le  $\alpha$ -ROM et de le considérer dans sa version champ moyen.

Pour ce faire, nous modifions d'abord le modèle en changeant la dynamique des particules actives. Au lieu de faire des sauts finis, nous considérons cette fois que celles-ci sont redistribuées aléatoirement dans l'espace. Cela équivaut donc à faire des sauts de taille infinie. De ce fait, en accord avec les résultats du chapitre 2, la dynamique d'activité devient champ moyen. Cela permet deux choses : isoler l'influence du mécanisme de diffusion puisque c'est dans ce cas là le seul capable de produire une criticalité non-triviale, et supprimer les corrélations dans la dynamique d'activité qui pourraient modifier la relation simple  $\mu = D/\alpha$ .



Pour rendre champ moyen le mécanisme de diffusion des particules passives, nous proposons de supprimer les corrélations dans leur dynamique en considérant des dimensions élevées du système. Dans cette limite, nous nous attendons à ce que cette version modifiée du  $\alpha$ -ROM représente le cadre de modélisation du modèle  $\mu$ -Hébraud-Lequeux. Nous proposons alors, pour tester l'image champ moyen, de mesurer l'exposant  $\beta$  dans ce modèle numérique pour la valeur de portée des interactions  $\alpha = 0$  et pour les dimensions  $D \in \{2, 3, 4, 6\}$ . Si le cadre  $\mu$ -Hébraud-Lequeux est effectivement le bon champ moyen associé, nous nous attendons à mesurer  $\beta = 2$  dans la limite de grande dimension.

Pour ce faire, nous reprenons les méthodes utilisées précédemment dans le cadre du  $\alpha$ -ROM. Nous répertorions alors sur la figure 3.13 des mesures préliminaires de l'exposant  $\beta$  pour ces différentes dimensions. Il est à noter que plus la dimension du système est grande, plus le coût numérique des simulations l'est aussi, rendant difficilement accessible une estimation très précise de l'exposant. Des résultats préliminaires nous permettent toutefois de représenter l'évolution de cet exposant sur la figure 3.13. Malgré les larges incertitudes de mesure, il semble y avoir une tendance générale d'augmentation de  $\beta$  avec  $D$  qui passe de  $\beta \approx 1.8$  pour  $D = 2$  à  $\beta \approx 1.96$  pour  $D = 4$  et  $D = 6$ .

Ainsi, dans la limite de grande dimension où la dynamique des particules passives est simplifiée, nous mesurons effectivement  $\beta \approx 2$ . Malgré le statut fragile de ces résultats, cela suggère que l'image proposée par le modèle  $\mu$ -Hébraud-Lequeux est effectivement adéquate pour décrire le mécanisme de diffusion des particules passives dans le  $\alpha$ -ROM dans la limite champ moyen.

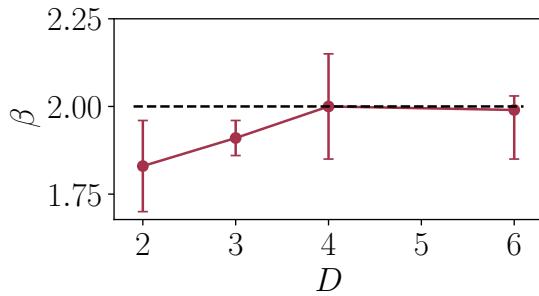


FIGURE 3.13 – Evolution de l'exposant critique  $\beta$  en fonction de la dimension de l'espace  $D$  dans le modèle  $\alpha$ -ROM avec sauts infinis des particules actives et  $\alpha = 0$ .

### Interprétation champ moyen du mécanisme de diffusion en dimension finie

En pratique, les systèmes réels d'intérêt ne se situent pas exactement dans les limites de champ moyen. Toutefois, nous pouvons parfois espérer que le cadre champ moyen associé puisse être capable d'expliquer certains aspects hors de ces limites. Dans cette optique, nous proposons d'étudier le modèle défini précédemment en 2D, dimension d'intérêt pour ce travail, et pour différentes portées d'interactions  $\alpha$ . Dans cette version du  $\alpha$ -ROM, les sauts infinis des particules actives permettent de laisser le contrôle de la criticalité au mécanisme de diffusion, mais dans une limite non-triviale de basse dimension que l'on retrouve dans le  $\alpha$ -ROM original. Via ces sauts infinis, nous nous attendons à une validité de la relation  $\mu = D/\alpha$ . Toutefois, la dynamique des particules passives prenant place dans un espace de dimension finie, il est probable que les relations entre les exposants  $\mu$ ,  $\theta$  et  $\beta$  se voient modifiées.

Pour comprendre ce qu'il subsiste de l'image champ moyen à cette dimension, nous nous concentrons dans ce cas sur les portées  $\alpha \in \{0.5, 1, 1.25, 1.5, 2, 2.5, 3\}$ , et nous nous intéressons aux exposants  $\beta$  puis  $\theta$  associés.

### Évolution de la convexité

Pour déterminer l'évolution de la convexité dans ce modèle simplifié, nous menons la même analyse que dans le cas du  $\alpha$ -ROM à la sous-sous-section 3.3.2.1. Sur la figure 3.14-(a), nous représentons l'évolution de  $\beta$  avec l'exposant de portée d'interaction  $\alpha$  et, en pointillés noirs, le comportement champ moyen du modèle  $\mu$ -Hébraud-Lequeux pour  $\mu = D/\alpha$ . Malgré la dynamique a priori non triviale des particules passives dans le modèle numérique, les deux évolution présentent un très bon accord aux courtes portées  $\alpha \gtrsim 1.5$ . Plus particulièrement, comme l'image champ moyen le prédit, l'influence du bruit interne sur la criticalité prend place à partir de  $\alpha = D = 2$ . De manière remarquable, le modèle  $\mu$ -Hébraud-Lequeux semble donc permettre de rationaliser partiellement la zone continue d'évolution de la criticalité dans ce modèle 2D.

Pour les plus grandes portées  $\alpha \lesssim 1.5$ , si un accord qualitatif est remarqué, le modèle en dimension fini se démarque de l'image champ moyen comme nous le pensions du fait

de la dynamique réelle des particules passives.

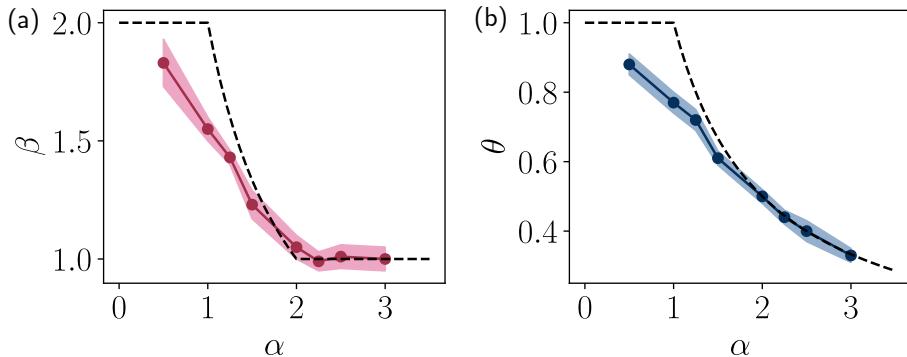


FIGURE 3.14 – (a) Evolution de l'exposant  $\beta$  avec la portée des interactions  $\alpha$  dans le  $\alpha$ -ROM en 2D avec sauts infinis des particules actives. (b) Idem mais pour l'exposant de pseudo-gap  $\theta$ . Dans les deux cas, les pointillés noirs représentent les prédictions du modèle  $\mu$ -Hébraud-Lequeux.

### Évolution de la distribution des distances à l'activation

Pour tester la pertinence de l'image champ moyen concernant l'exposant  $\theta$  dans un cadre de dimension finie, nous proposons tout d'abord une manière de le déterminer dans les modèles numériques dérivés du ROM. Dans le cadre de ces modèles, la distance à l'activation d'une particule peut être associée à la distance à la particule voisine la plus proche. Sous cet angle, la fonction de corrélation de paire entre particules passives  $g^p(r)$  semble être l'objet physique le plus adéquat pour caractériser cette propriété. Plus précisément, étant donné que  $g^p(r < D_p) = 0$  dû à la condition de recouvrement, nous nous attendons à ce que la fonction  $g(x) = g^p(r - D_p)$  se comporte comme la distribution  $P(R - |\mathbf{r}|)$  du modèle  $\mu$ -Hébraud-Lequeux. Bien que la fonction de corrélation de paire ne représente pas directement une probabilité de présence du plus proche voisin, nous nous attendons à ce que ce soit le cas asymptotiquement à petits  $x$ . Ainsi, nous nous attendons, dans le cas idéal où l'image champ moyen est parfaitement retrouvée, à mesurer dans nos simulations numériques au point critique :

$$g(x) \sim x^\theta, \quad \theta = \begin{cases} \frac{\mu}{2}, & \mu \leq 2 \\ 1, & \mu \geq 2 \end{cases} \quad (3.42)$$

Nous proposons alors d'évaluer cet exposant  $\theta$  dans le  $\alpha$ -ROM en 2D avec sauts infinis des particules actives. Nous mesurons donc la fonction de corrélation de paire entre particules passives  $g^p(r)$  à petits  $r$ , pour différentes distances au point critique  $\delta\phi$  et ce pour chaque portée  $\alpha$ . Un exemple de mesures pour  $\alpha = 1.5$  et  $\alpha = 5$  sont présentées sur les encarts de la figure 3.15. Une première chose remarquable est que, même si nous considérons un cas de dimension finie ici, nous observons effectivement un comportement algébrique de  $g(x)$  avec  $x$  qui s'étend à petits  $x$  à mesure que le point critique est approché. La prédition du modèle champ moyen  $\mu$ -Hébraud-Lequeux quant à une distribution algébrique des distances à l'activation semble donc retrouvée dans ce modèle.

À très petits  $x$ , la fonction de corrélation sature sur un plateau dont la valeur décroît avec la distance au point critique. Cela s'explique probablement par le fait que le comportement donné par l'équation 3.42 n'est en fait valable qu'au point critique. De ce fait, la détermination directe de l'exposant  $\theta$  est rendue difficile, puisque le régime de loi de puissance est parasité par ce plateau. Pour s'affranchir de cet effet, nous utilisons une méthode de redimensionnement par  $\delta\phi$  pour mesurer l'exposant  $\theta$ . Cette méthode est alors très similaire à celle présentée à la sous-section 2.5.2 pour la détermination de l'exposant  $\delta$ . Pour ce faire, nous supposons donc que la fonction  $g^p(x = r - D_p, \delta\phi)$  est homogène de ses arguments dans le régime critique. Dans le cadre de cette hypothèse, en redimensionnant  $g^p(x, \delta\phi)$  par  $\delta\phi^{a_1}$  et  $x$  par  $\delta\phi^{a_2}$ , il est possible de trouver  $a_1$  et  $a_2$  tels que les courbes pour différents  $\delta\phi$  se superposent toutes sur une courbe maîtresse. Si cette superposition est effectivement réalisable, l'exposant  $\theta$  caractérisant le comportement de la fonction avec  $x$  est alors directement donné par  $\theta = a_1/a_2$ .

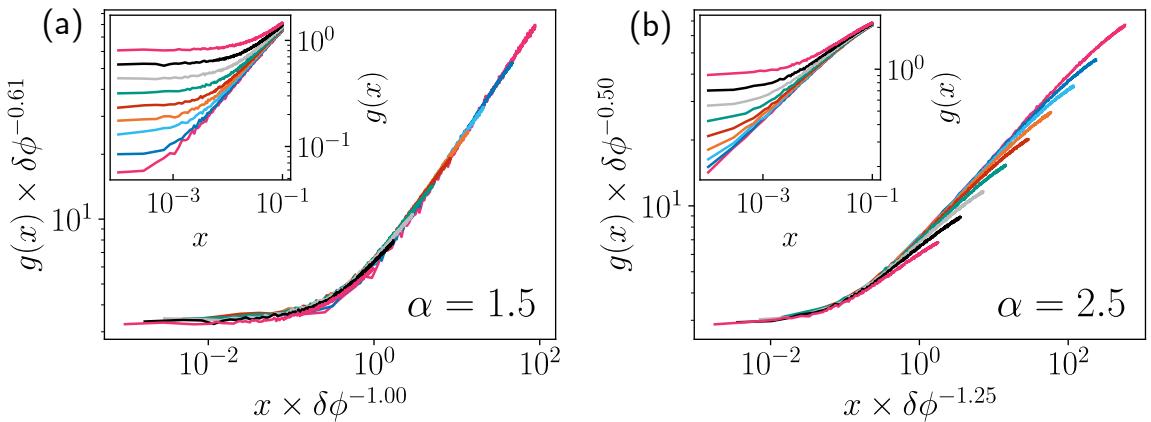


FIGURE 3.15 – Redimensionnement des fonctions de corrélation de paire des particules passives avec la distance au point critique  $\delta\phi$  dans le  $\alpha$ -ROM avec sauts infinis des particules actives pour  $\alpha = 1.5$  (a) et  $\alpha = 5$  (b). En encart, les données brutes associées. **Remarque :** mettre une flèche pour l'évolution de  $\delta\phi$  et les donner en légende

Nous représentons à la figure 3.15 le meilleur redimensionnement par  $\delta\phi$  obtenu dans les cas  $\alpha = 1.5$  et  $\alpha = 5$  et reportons le cas des autres portées à la sous-section 6.3.5. Comme on peut le remarquer, la superposition des courbes est remarquablement satisfaisante sous le bon choix d'exposants. Notre hypothèse d'homogénéité de la fonction  $g^p(r, \delta\phi)$  est donc bien validée. Une information annexe que nous tirons de ces redimensionnements est que, pour  $\theta > 0.5$ , la valeur au contact  $x = 0$  de la fonction  $g^p$  évolue comme  $\delta\phi^{\beta/2}$ . De plus, pour  $\theta < 0.5$ , là où nous avons mesuré  $\beta = 1$ , celle-ci évolue comme  $\delta\phi^{0.5}$ . Ainsi, par définition de l'exposant  $\beta$ , la valeur du plateau se comporte comme  $\sqrt{\langle A \rangle}$  à toute portée. La forme adéquate de la fonction de corrélation de paire à une distance finie du point critique est donc :

$$g(x) \sim \sqrt{\langle A \rangle} + x^\theta \quad (3.43)$$

Pour en revenir à la mesure de l'exposant  $\theta$  et son évolution avec la portée, nous traçons sur la figure 3.14-(b) l'évolution de l'exposant  $\theta$  mesuré par redimensionnement avec  $\alpha$  et, en pointillés noirs, le comportement du modèle  $\mu$ -Hébraud-Lequeux pour  $\mu = D/\alpha$ . De manière similaire à l'étude de la convexité, nous remarquons un comportement quantitativement comparable entre le modèle numérique et l'image champ moyen à courte portée  $\alpha \gtrsim 1.5$ . À plus longue portée, nous retrouvons de nouveau un écart avec l'image champ moyen.

### Complexité dans la dynamique des particules passives

De manière remarquable, certaines prédictions du modèle champ moyen semblent être vérifiées dans le  $\alpha$ -ROM avec sauts infinis des particules actives en dimension finie. Notamment, nous retrouvons un impact du mécanisme de diffusion sur la criticalité à partir de  $\alpha = D = 2$  et un accord quantitatif sur les courbes  $\beta(\alpha)$  et  $\theta(\alpha)$  à courte portée. Dans cette partie nous montrons que même si les relations  $\beta(\alpha)$  et  $\theta(\alpha)$  ne sont plus champ moyen à longue portée, une loi d'échelle du modèle  $\mu$ -Hébraud-Lequeux reste toujours vérifiée dans ce cas.

Les relations  $\beta(\alpha)$  et  $\theta(\alpha)$  dans le modèle  $\mu$ -Hébraud-Lequeux sont en fait une combinaison de résultats issus de différentes hypothèses. Elles se basent sur la relation entre  $\mu$  et  $\alpha$ , celle entre  $\theta$  et  $\mu$ , puis celle entre  $\beta$  et  $\theta$  et  $\mu$  [102]. Une manière de tester la pertinence de l'image champ moyen en dimension finie peut être de se concentrer sur une de ces sous-relations, par exemple, la relation d'échelle  $\beta = 2\theta$ . Sur la figure 3.16, nous superposons donc les évolutions de  $2\theta$  et  $\beta$  dans le cas du  $\alpha$ -ROM avec sauts infinis des particules actives.

De manière remarquable, nous observons que la loi d'échelle  $\beta = 2\theta$  pour  $\theta > 0.5$  est vérifiée à toutes les portées, mêmes les plus grandes où l'accord quantitatif avec le modèle était perdu pour les deux exposants. Ainsi, il semblerait que même dans le domaine où la dynamique des particules passives en dimension finie écarte le modèle numérique de l'image champ moyen, nous retrouvons un lien direct entre la convexité de la transition et la forme de la fonction de corrélation de paire. En ce sens, le modèle  $\mu$ -Hébraud-Lequeux reste un cadre intéressant pour analyser le mécanisme de diffusion même en dimension finie. Cette observation confirme les résultats préliminaires de la sous-sous-section précédente, plaçant effectivement le modèle  $\mu$ -Hébraud-Lequeux comme le cadre de description adéquat du mécanisme de diffusion.

#### 3.4.2.2 Image champ moyen dans le $\alpha$ -ROM

Dans le cadre du  $\alpha$ -ROM avec sauts finis des particules actives, pour les raisons que nous avons évoqué précédemment, nous ne nous attendons pas à ce que les prédictions de l'image champ moyen puisse se retrouver dans l'analyse du modèle numérique. Toutefois, comme nous le montrons dans cette sous-sous-section, une comparaison avec le modèle  $\mu$ -Hébraud-Lequeux et avec le modèle numérique avec sauts infinis des particules actives peut amener à des observations intéressantes.

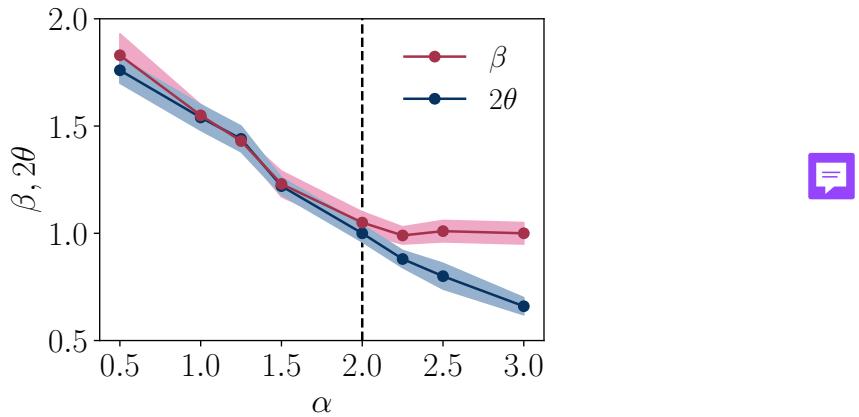


FIGURE 3.16 – Comparaison de l'évolution des exposants  $\beta$  et  $\theta$  avec la portée  $\alpha$  dans le cadre du  $\alpha$ -ROM en 2D avec sauts infinis des particules actives. La ligne pointillée noire représente  $\alpha = 2$  soit  $\mu = 1$  dans le modèle  $\mu$ -Hébraud-Lequeux avec  $\mu = D/\alpha$

### Évolution de la convexité : une influence moindre des corrélations d'activité ?

Sur la figure 3.17-(a), nous comparons les évolutions de l'exposant  $\beta$  avec  $\alpha$  pour le  $\alpha$ -ROM en 2D et en 3D avec les prédictions du modèle  $\mu$ -Hébraud-Lequeux pour  $\mu = D/\alpha$ . De manière attendue, nous n'observons d'accord quantitatif dans aucune limite : les mesures numériques présentent systématiquement une convexité moindre. Dans la limite de courte portée, ce désaccord est évident. En effet, dans ce cas là la criticalité est celle de la classe CDP, dominée par la dynamique des particules actives, et n'a donc rien à voir avec le mécanisme proposé par l'image champ moyen. Nous notons toutefois qu'étant donné que l'exposant  $\beta_{\text{CDP}}$  augmente avec la dimension pour arriver à  $\beta = 1$  pour  $D = 4$ , en augmentant la dimension, l'écart observable se réduit entre les points de mesure et les pointillés dans la limite gauche du graphique.

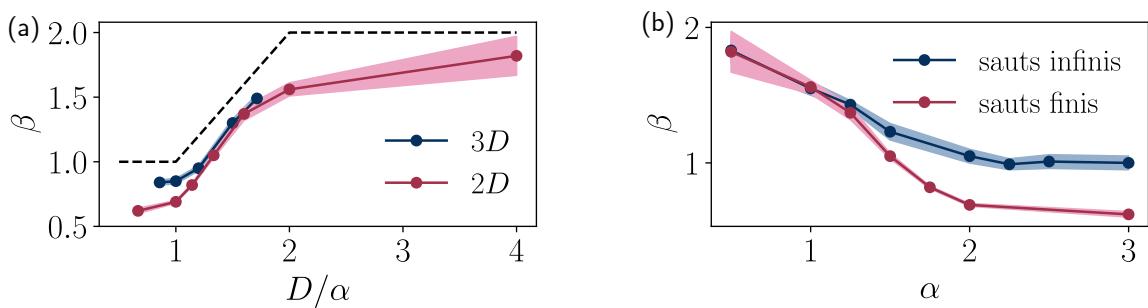


FIGURE 3.17 – (a) Evolution de l'exposant  $\beta$  en fonction de  $D/\alpha$  dans le  $\alpha$ -ROM en 2D et en 3D. En pointillés noirs, nous représentons les prédictions du modèle  $\mu$ -Hébraud-Lequeux. (b) Comparaison de l'évolution de l'exposant  $\beta$  avec  $\alpha$  dans le cas du  $\alpha$ -ROM et du  $\alpha$ -ROM avec sauts infinis des particules actives en 2D.

Dans la limite de longue portée, cet écart n'est pas non plus surprenant puisque dans la partie précédente concernant le modèle avec sauts infinis des particules actives, nous l'avons attribué à la dynamique des particules passives, qui reste intacte dans le cas du  $\alpha$ -ROM. Toutefois, nous pouvons noter quelque chose de plus intéressant dans cette zone. Sur la figure 3.17-(b), nous comparons les résultats obtenus en 2D dans le cas de sauts finis et de sauts infinis (resp. activité corrélée et activité décorrélée). Comme nous pouvons le remarquer, à longue portée  $\alpha \lesssim 1.25$  les résultats associés aux deux modèles convergent. Cela suggère alors que la dynamique de l'activité n'influence pas, via la modification de la relation  $\mu = D/\alpha$  ou via le mécanisme additionnel de création de l'activité par transport, le comportement critique dans cette limite. Ainsi, à longue portée, la création d'activité dans le  $\alpha$ -ROM semble être dominée par le mécanisme de diffusion (voir équation 3.18).

Une observation remarquable par ailleurs est que dans le cas 2D et 3D, l'influence des interactions à longue portée sur la criticalité débute en  $\alpha = D$ , comme le prédit le modèle  $\mu$ -Hébraud-Lequeux avec  $\mu = D/\alpha$ , et comme cela a été mesuré dans le cas du modèle avec sauts infinis.

### Évolution de l'exposant de pseudo-gap

Dans la dynamique complexe offerte par le  $\alpha$ -ROM, dû à la dynamique annexe des particules actives, il n'est pas évident que la fonction de corrélation de paire présente un comportement algébrique comme dans les modèles isolant le mécanisme de diffusion. Pour le vérifier, nous effectuons les mêmes mesures de fonctions de corrélation de paire que dans la partie précédente pour le  $\alpha$ -ROM en 2D. Simplement, du fait des résultats de l'analyse précédente, nous choisissons de redimensionner directement les quantités par  $\langle A \rangle$  et non  $\delta\phi$ . Les redimensionnements les plus convaincants obtenus sont alors représentés pour  $\alpha = 0.5$  et  $\alpha = 1.25$  à la figure 3.18. Les autres analyses sont reléguées à la sous-section 6.3.5.

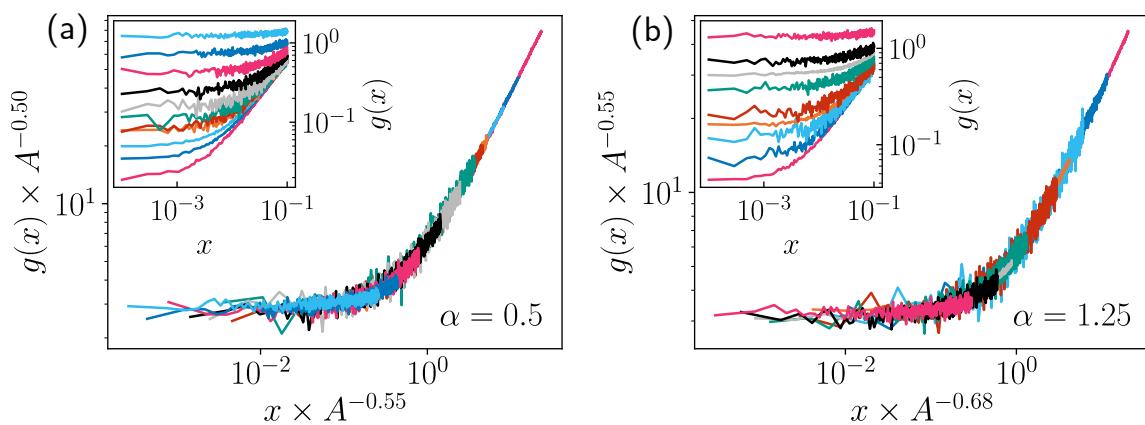


FIGURE 3.18 – Redimensionnement des fonctions de corrélation de paire des particules passives avec la distance au point critique  $\delta\phi$  dans le  $\alpha$ -ROM avec sauts finis des particules actives pour  $\alpha = 0.5$  (a) et  $\alpha = 1.25$  (b). En encart, les données brutes associées. Remarque : mettre une flèche pour l'évolution de  $\delta\phi$  et les donner en légende

La superposition des courbes est alors toujours satisfaisante, même si un peu moins nette, pour tout  $\alpha$ . Cela montre que même en présence de la dynamique corrélée des particules actives, les fonctions de corrélation de paire possèdent un caractère non-trivial, signe de la présence du mécanisme de diffusion vers l'activation capturé par l'image champ moyen. Dans le cas de très longue portée, nous retrouvons un comportement en  $\sqrt{\langle A \rangle}$  de  $g^p(0)$ . Toutefois ce comportement semble perdu à plus courtes portées où l'on mesure  $g^p(0) \sim A^b$  avec  $b > 0.5$  dès  $\alpha = 1$ . En adaptant la méthode de redimensionnement à cette observation, nous sommes capables d'extraire des valeurs de  $\theta$  pour chaque  $\alpha$ . Sur la figure 3.19, nous représentons l'évolution de  $2\theta$  avec  $\alpha$  et la mettons en regard de l'évolution de l'exposant  $\beta$ .

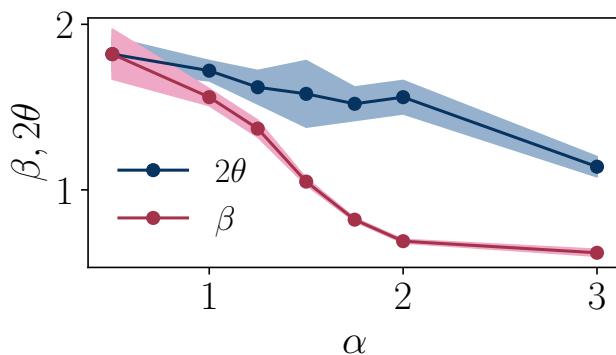


FIGURE 3.19 – Comparaison de l'évolution de  $\beta$  et  $2\theta$  avec  $\alpha$  dans le cas du  $\alpha$ -ROM en 2D.

Nous observons alors une évolution de l'exposant  $\theta$  qualitativement en accord avec l'image champ moyen, soit une tendance d'augmentation avec la portée des interactions. Celle-ci semble cependant différente de celle observée dans le cas du modèle à sauts infinis. En effet, l'évolution observée ici est d'une amplitude moindre et nous n'observons par exemple pas de tendance réellement significative dans la zone  $1.5 \leq \alpha \leq 2$ , là où l'exposant  $\beta$  varie pourtant fortement.

Si l'on compare les évolutions de  $2\theta$  et  $\beta$  nous remarquons des divergences claires, signifiant que la relation d'échelle  $2\theta = \beta$  n'est plus vérifiée pour tout  $\theta > 0.5$ . Cette observation est attendue, puisque l'image champ moyen ne permet de toute façon pas de rendre compte d'un exposant  $\beta < 1$ , ce que l'on a mesuré pour  $\alpha \gtrsim 1.5$ . Toutefois, de manière remarquable, l'écart entre ces deux exposants se réduit à mesure que la portée augmente, si bien que dans la limite de très grande portée  $\alpha = 0.5$  l'accord est retrouvé. Cela conforte l'idée selon laquelle à grande portée, la dynamique de l'activité n'influence plus significativement le comportement critique, faisant du modèle  $\mu$ -Hébraud-Lequeux le champ moyen adéquat du système même lorsque les particules actives font des sauts finis.

### 3.4.2.3 Conclusion de la sous-section

En conclusion, cette sous-section nous a permis de tester la pertinence de l'image champ moyen pour comprendre le mécanisme de diffusion des particules passives et son influence

dans les modèles numériques étudiés. Via l'étude d'une version simplifiée du  $\alpha$ -ROM, nous avons montré que le modèle  $\mu$ -Hébraud-Lequeux permet effectivement de rationaliser l'effet du mécanisme de diffusion sur la criticalité malgré la présence d'une dynamique non-triviale des particules passives.

Dans le cas d'une dynamique plus complexe représentée par le modèle  $\alpha$ -ROM, les prédictions du modèle champ moyen ne tiennent plus de manière générale mais nous permettent de retrouver des traces de l'influence de la diffusion des particules passives. Notamment, nous remarquons une forme algébrique de la fonction de corrélation de paire proche du contact, décrite par un exposant de pseudo-gap  $\theta$ . De manière remarquable, nous observons par ailleurs que dans la limite de grande portée, la dynamique d'activité dans le modèle ne semble plus contrôler la convexité de la transition, faisant du modèle  $\mu$ -Hébraud-Lequeux le champ moyen adéquat pour appréhender la dynamique complète.

### 3.4.3 Disqualification complète du cadre LR-CDP

Les analyses précédentes nous ont permis de montrer en quoi la diffusion des particules passives représentait un mécanisme essentiel dans la transition du  $\alpha$ -ROM. Toutefois, à courte portée au minimum, il ne semble pas que celle-ci suffise à comprendre entièrement la criticalité du modèle. Notamment, les cas où l'on mesure  $\beta < 1$  ne peuvent être compris sans les corrélations induites par les sauts des particules actives et le mécanisme de création de l'activité par transport qu'elles représentent. Bien que la zone  $\beta > 1$  soit hors d'atteinte du cadre de référence LR-CDP, il est tentant de vouloir interpréter cette zone  $\beta < 1$  via ce formalisme. Dans ce scénario, le paysage global présenté à la [sous-sous-section 3.3.2.1](#) se formerait donc d'une zone avec  $\beta > 1$  dominée par la dynamique des particules passives, et d'une zone  $\beta < 1$  interprétable comme une zone dominée par la dynamique des particules actives.

Un premier conflit d'interprétation de cette région concave par ce scénario vient du fait que la zone d'exposant  $\alpha$  pour laquelle on passe de  $\beta \approx 0.64$  en 2D à  $\beta = 1$  n'est pas du tout la même que celle du cadre LR-CDP. En effet, nous avons identifié  $0.5 \lesssim \alpha \lesssim 2$  pour le  $\alpha$ -ROM et  $3 < \alpha < 4$  pour LR-CDP en 2D. Toutefois, nous pourrions imaginer que le mécanisme de diffusion dans cette zone agisse de la même manière qu'un transport à longue portée, seulement avec un exposant effectif de transport différent. Il serait alors possible de rattacher le  $\alpha$ -ROM au cadre d'interprétation de l'influence d'un transport à longue portée dans cette zone concave.

Dans le cas d'un transport à longue portée contrôlé par l'exposant  $\gamma$ , une particule active dans un espace de dimension  $D$  fait un saut dont l'amplitude  $\Delta$  suit une distribution  $P(\Delta) \sim \Delta^{D-1-\gamma}$  (voir [chapitre 2](#)). En supposant la densité de particules homogène dans le système, cela correspond pour la particule active à une probabilité  $P_a(r)$  de créer de l'activité à une distance  $r$  à l'issue du pas de temps telle que :

$$P_a(r) \sim \frac{1}{r^{1+\gamma-D}} \quad (3.44)$$

La question est alors de savoir si une telle quantité peut être dérivée dans le cas du  $\alpha$ -ROM, et comment celle-ci se compare au cas du transport à longue portée à comportement critique équivalent. En d'autres termes, peut-on dériver un exposant de saut effectif  $\gamma_{\text{eff}}$  dans le cadre de ce modèle ?

Pour ce faire, nous considérons la portée  $\alpha = 1.75$  pour laquelle nous avons mesuré  $\beta \approx 0.82$  dans le  $\alpha$ -ROM en 2D. Elle se situe donc à mi-chemin entre la limite de courte portée  $\beta = 0.64$  et la valeur triviale  $\beta = 1$ , et donc cette criticalité peut-être atteinte dans le cadre du transport à longue portée. Pour ce faire, nous générions un état absorbant du système à  $\phi = \phi_c$ . À partir de cet état absorbant, nous activons aléatoirement une particule, générant alors un saut de courte portée et un bruit sur toutes les autres particules passives. En identifiant les particules activées suite à ce pas de temps et leur distance  $r$  à la particule activée, nous pouvons mesurer la quantité  $P_a(r)$  dans ce cadre. Le même protocole peut être appliqué dans le cadre du transport à longue portée. Pour un système de taille  $L = 4096$ , nous comparons alors la mesure de  $P_a(r)$  obtenue pour  $\alpha = 1.75$  à celle obtenue dans le cas d'un transport à longue portée avec  $\gamma = 3.5$ . La valeur de  $\gamma$  est choisie ainsi puisque dans ce cas nous avons mesuré  $\beta \approx 0.81$ , soit une valeur très proche de  $\beta \approx 0.82$  pour  $\alpha = 1.75$  dans le cas du  $\alpha$ -ROM. Les résultats obtenus sont présentés sur la figure 3.20.

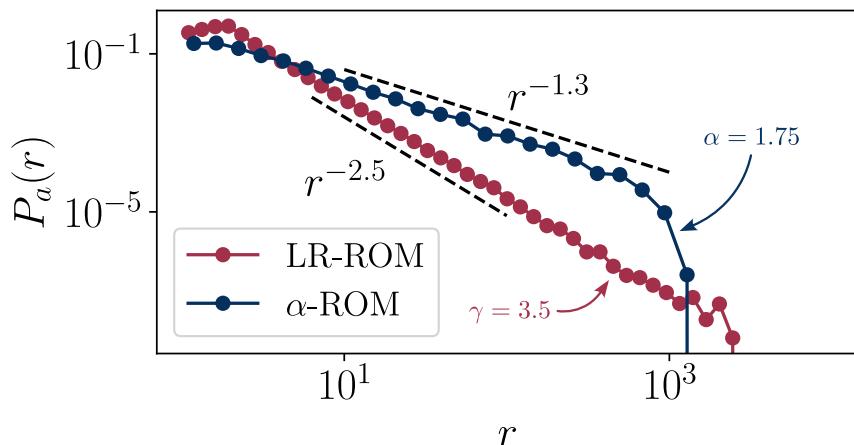


FIGURE 3.20 – Evolution des distributions  $P_a(r)$  pour le LR-ROM avec  $\gamma = 3.5$  et pour le  $\alpha$ -ROM avec  $\alpha = 1.75$ .

Nous constatons alors que dans le cas du transport à longue portée,  $P_a(r)$  décroît bien comme  $1/r^{2.5}$  en 2D. Dans le cas du  $\alpha$ -ROM, cette distribution décroît comme  $1/r^{1.3}$  soit  $\gamma_{\text{eff}} \approx 2.3$ , donc bien moins rapidement. En réalisant ces mêmes mesures sur des états actifs de la dynamique, les mêmes observations peuvent être faites. Ainsi, si les deux modèles partagent le même exposant  $\beta$  à ces portées, ils ne partagent pas du tout les mêmes propriétés de création d'activité. En d'autres termes, il ne semble pas possible d'interpréter la criticalité du  $\alpha$ -ROM via le cadre LR-CDP dans la zone concave  $\beta < 1$ . La dynamique des particules passives reste donc importante à toute portée  $\alpha < D$  et le changement de convexité ne semble pas relever d'un changement abrupt de mécanisme prépondérant.

### 3.4.4 Conclusion de la section

En conclusion, nous avons établi dans cette section un modèle de type champ moyen permettant une transition de réversibilité convexe. Son étude révèle alors la place essentielle du bruit interne, i.e. de la diffusion des particules passives, dans la criticalité du  $\alpha$ -ROM. Notamment, dans la limite de très longue portée  $\alpha \rightarrow 0$ , ce mécanisme de création de l'activité semble pouvoir décrire à lui seul la transition. Enfin, si la zone concave pour laquelle on retrouve  $\beta < 1$  prend l'apparence du comportement attendu dans le cadre LR-CDP, celle-ci correspond en fait à une dynamique bien différente. In fine, via la présence supplémentaire du mécanisme de diffusion des particules, le modèle  $\alpha$ -ROM est donc différent en tout point du cadre LR-CDP sous les aspects abordés et nécessite un traitement théorique fondamentalement différent.

## 3.5 Avalanches

Afin de souligner ces différences par un dernier aspect incontournable de la criticalité absorbante, nous proposons d'étudier dans cette section la dynamique d'avalanches à l'œuvre dans le  $\alpha$ -ROM.

### 3.5.1 Avalanches à densité fixée

#### 3.5.1.1 Redéfinition

Comme nous l'avons vu au [chapitre 1](#), les modèles appartenant à la classe CDP présentent une dynamique d'avalanches. Pour la mettre en évidence, il est d'usage de se placer dans le **cas** de la criticalité auto-organisée (abrégée SOC pour *self-organized criticality*). Dans ce cadre, la séparation d'échelle entre le temps de forçage (ajout de matière aléatoire) et de relaxation (disparition de matière induite par l'activité) permet d'observer distinctement des événements d'activité fortement corrélés et distribués de manière algébrique : ce sont les avalanches.

Une autre manière d'observer la dynamique critique est de se placer dans l'état stationnaire à une densité fixée de particules  $\phi$  dans le système, proche de la densité critique  $\phi_c$ . Le fait est que, dans ces conditions, le système est proche d'une transition de phase absorbante. Ainsi, pour un système de taille finie, du fait des fluctuations de la dynamique, cette dernière peut régulièrement tomber dans un état absorbant pour  $\phi \gtrsim \phi_c$ . Pour sonder la dynamique d'avalanches à densité imposée, il est donc nécessaire de réactiver le système à chaque fois qu'il se retrouve bloqué. Un protocole généralement utilisé est alors d'activer artificiellement une particule dans le système, alors précurseur de l'évènement [46, 103, 104].

Cette situation impose de redéfinir la notion d'avalanche à densité fixée. Dans ce cadre, nous définissons une avalanche comme l'évènement ayant lieu entre deux réactivations du système. Il est alors possible de définir ces évènements exactement de la même manière que les avalanches de la SOC, i.e. par leur taille  $S$ , leur durée  $T$  et le nombre de particules  $N$  qu'ils impliquent. Dans le cadre du  $\alpha$ -ROM, la taille d'une avalanche correspond au

nombre d'évènements d'activité individuels ayant lieu pendant l'évènement global. La durée correspond alors simplement au nombre de pas de temps entre le début et la fin de l'avalanche. Plusieurs études ont montré que ces avalanches étaient de même nature que celles de la SOC dans les modèles à courte portée<sup>12</sup> [46, 103, 104]. Il est alors attendu que ces évènements soient aussi distribués de manière algébrique, définis par les exposants d'avalanche déjà présentés à la [sous-section 1.3.5](#) :

$$\begin{aligned} P(S) &\sim S^{-\tau} f\left(\frac{S}{S_c}\right), \quad S_c \sim L^{d_f} \\ P(T) &\sim T^{-\tau'} g\left(\frac{T}{T_c}\right), \quad T_c \sim L^z \\ P(N) &\sim N^{-\tau''} h\left(\frac{N}{N_c}\right), \quad N_c \sim L^\chi \end{aligned} \quad (3.45)$$

Afin d'analyser le comportement des avalanches à la transition dans le cadre du  $\alpha$ -ROM, nous choisissons de nous placer à densité fixée. Ce choix se justifie par cohérence, les analyses précédentes ayant toutes été réalisées à densité fixée. Cela nous permet alors de caractériser directement la dynamique qui donne lieu au comportement critique précédemment déterminé.

### 3.5.1.2 Protocole

Pour étudier les avalanches à densité fixée dans le modèle  $\alpha$ -ROM, pour une portée  $\alpha$  donnée, nous nous plaçons à la densité critique  $\phi_c$  du système. Dès lors, nous générerons un état absorbant du système en partant d'une configuration initiale aléatoire. À chaque fois que le système tombe dans un état absorbant, la dynamique est réactivée en activant artificiellement une particule choisie au hasard. Ce processus est alors réitéré suffisamment de fois pour obtenir une statistique propre et stationnaire pour les observables  $S$ ,  $T$  et  $N$ <sup>13</sup>. Nous réalisons alors ces mesures en 2D pour  $\alpha \in \{3, 2, 1.75, 1.5, 1.25, 0.5\}$  et pour les tailles de systèmes  $L \in \{256, 512, 1024, 2048\}$ . Un exemple des  $3 \times 4$ <sup>14</sup> distributions obtenues est alors présenté à la [figure 3.21](#) pour  $\alpha = 1.5$ .

Les formes des distributions sont alors celles supposées, présentant une décroissance en loi de puissance, commune à chaque taille, puis un cut-off, augmentant avec la taille du système. Par ailleurs, ce cut-off, dans le cas de  $P(S)$  et  $P(T)$ , semble présenter une bosse qui s'étale à mesure que la portée augmente. Afin de déterminer précisément les exposants d'avalanche associés à ces distributions, nous procédons à une analyse d'échelle en taille finie. Pour ce faire, nous reprenons les formes définies par l'[équation 3.45](#). Selon ces ansatz, toute la dépendance des distributions en  $L$  est portée par le cut-off. Prenons alors l'exemple de la distribution des tailles  $P(S)$ . En redimensionnant  $S$  par  $S_c$ , nous obtenons :

12. Ces études n'interprétaient cependant pas ces évènements à densité fixée comme des avalanches à proprement parler.

13. En pratique, la stationnarité impose d'ignorer les premiers évènements.

14. pour les trois grandeurs  $S$ ,  $T$  et  $N$  et aux quatre tailles de système.

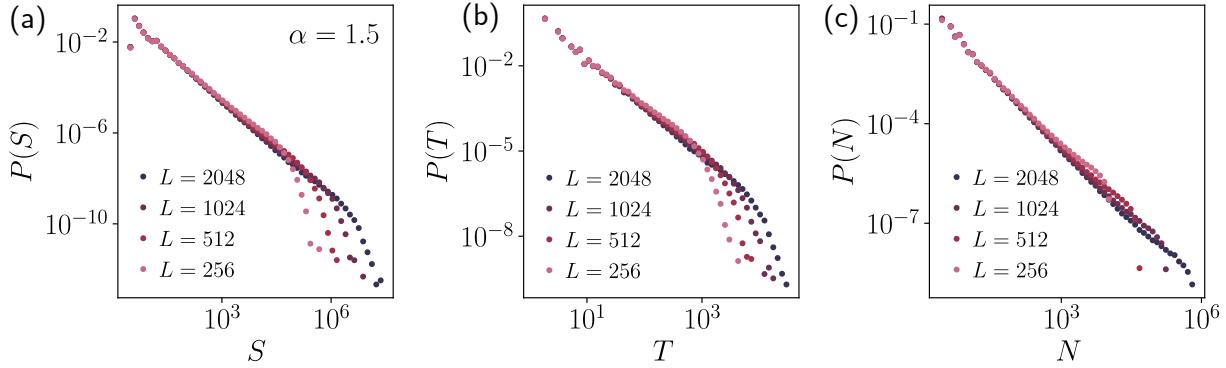


FIGURE 3.21 – Distributions de taille (a), de durée (b) et du nombre de particules impliquées (c) pour les avalanches mesurées dans le modèle  $\alpha$ -ROM à densité fixée  $\phi = \phi_c$  pour  $\alpha = 1.5$  et pour  $L \in \{256, 512, 1024, 2048\}$ .

$$P(S) \sim L^{-d_f \tau} \tilde{S}^{-\tau} f(\tilde{S}), \quad \tilde{S} = \frac{S}{L^{d_f}} \quad (3.46)$$

Ainsi, en redimensionnant  $P(S)$  par  $L^{-d_f \tau}$  et  $S$  par  $L^{d_f}$ , les courbes obtenues pour différentes tailles de système  $L$  sont indépendantes de  $L$ , i.e. se superposent. Ce principe constitue alors une méthode graphique de détermination des exposants : les exposants  $d_f$  et  $\tau$  sont déterminés comme ceux définissant le redimensionnement qui permet la meilleure superposition des courbes obtenues pour différents  $L$ . Nous représentons alors sur la figure 3.22 la meilleure superposition obtenue pour  $\alpha = 1.5$ . Les représentations graphiques obtenues pour les autres portées sont reportées à la sous-section 6.3.6 et les exposants ainsi déterminés sont tous reportés dans le tableau 3.2.

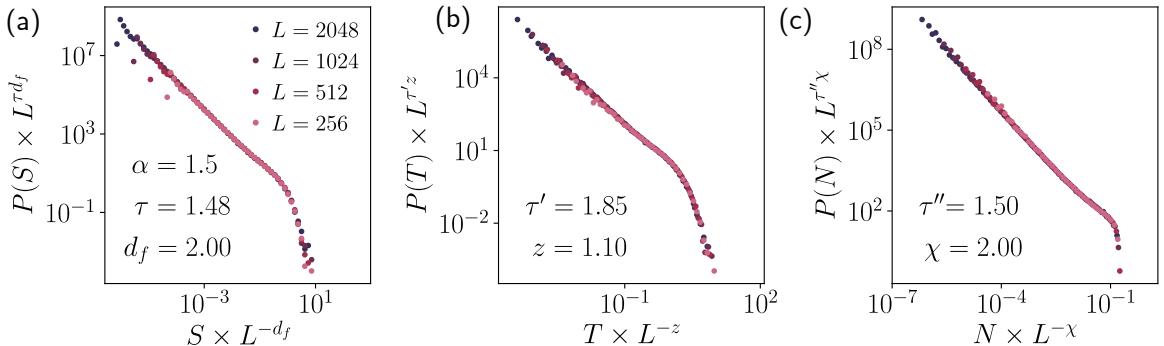


FIGURE 3.22 – Redimensionnement par  $L$  des distributions de taille (a), de durée (b) et du nombre de particules impliquées (c) pour les avalanches mesurées dans le modèle  $\alpha$ -ROM à densité fixée  $\phi = \phi_c$  pour  $\alpha = 1.5$  et pour  $L \in \{256, 512, 1024, 2048\}$ .

### 3.5.2 Évolution des exposants

Pour les exposants  $\tau$ ,  $\tau'$  et  $\tau''$ , nous observons une tendance d’augmentation avec la portée, comme dans le cadre LR-CDP/depinning (voir section 2.1). Par exemple, on passe de  $\tau \approx 1.28$  pour  $\alpha = 3$  à  $\tau \approx 1.47$  pour  $\alpha = 1.25$ . Nous remarquons par ailleurs que

la valeur obtenue à courte portée  $\alpha = 3$  est compatible avec les mesures déjà effectuées dans le cas de la classe CDP [71]. Nous notons cependant une anomalie à cette tendance d'augmentation pour  $\alpha = 0.5$ , portée à laquelle le cut-off s'étale le plus sur la loi de puissance. Même si cette tendance générale est modérée, cela montre que les avalanches sont globalement distribuées de moins en moins largement à mesure que la portée des interactions augmente. De ce point de vue, l'évolution est alors compatible avec le cadre LR-CDP, bien que la gamme de portées sur laquelle a lieu l'évolution soit toujours très différente.

En **contraste**, les exposants de structure  $d_f$ ,  $z$  et  $\chi$  sont soumis à des variations significatives. Dans le cas de la courte portée, pour  $\alpha = 3$  et  $\alpha = 2$ , nous mesurons  $d_f \approx 2.75$ ,  $z \approx 1.55$  et  $\chi \approx 2$ , soit un parfait accord avec le cas CDP/depinning à courte portée [19, 34, 70–72]. Les études précédentes ayant été menées dans le cadre de la SOC, cela valide l'équivalence avec le cas de densité fixée à courte portée. Nous rappelons par ailleurs qu'obtenir  $d_f > D$  dans notre cas n'est pas surprenant puisque la taille  $S$  des avalanches caractérise une dynamique en  $D + 1$  dimensions.

$\alpha$	$\tau$	$\tau'$	$\tau''$	$d_f$	$z$	$\chi$
3	1.28	1.47	1.37	2.8	1.55	2
2	1.34	1.57	1.42	2.75	1.55	2
1.75	1.41	1.72	1.47	2.4	1.30	2
1.5	1.48	1.85	1.50	2.00	1.10	2
1.25	1.47	1.85	1.49	1.75	0.95	1.75
0.5	1.40	1.70	1.42	1.4	0.90	1.50

TABLE 3.2 – Exposants d'avalanche déterminés dans les modèles  $\alpha$ -ROM. L'évolution des exposants de structure  $d_f$ ,  $z$  et  $\chi$  est représentée graphiquement à la figure 3.23.

Dès lors que  $\alpha < 2$ , la dimension fractale associée à ces avalanches diminue, pour atteindre  $d_f \approx 1.5$  à  $\alpha = 0.5$ . Autour du point  $\alpha = 1.5$ , la dimension fractale des avalanches passe en dessous de la dimension spatiale  $D$  du système. Ce point  $\alpha = 1.5$  marque donc un changement caractéristique dans la structure des avalanches, qui ne sont alors plus compactes spatialement aux portées plus grandes. Cette observation se confirme par l'évolution de  $\chi$ , qui caractérise la surface occupée par les avalanches (leur taille spatiale en quelques sortes). En effet,  $\chi = D$  signifie qu'au maximum, les avalanches occupent toute la surface du système, elles sont donc compactes spatialement. En revanche  $\chi < D$  montre des événements qui présentent une fractalité spatiale. Le passage de  $\chi \approx 2$  pour  $\alpha \geq 1.5$  à  $\chi < 2$  pour  $\alpha < 1.5$  montre donc bien une perte en compacité spatiale des événements autour de  $\alpha = 1.5$ .

L'exposant dynamique  $z$  diminue lui aussi avec la portée pour  $\alpha < 2$ . Il effectue un changement notable autour de  $\alpha = 1.5$  puisqu'il passe de  $z > 1$  à  $\alpha = 1.5$  à  $z < 1$  à  $\alpha = 1.25$ . Cette diminution de  $z$  avec la portée correspond par ailleurs à l'attendu LR-CDP/depinning. En effet, si l'on suppose que la relation de scaling  $z = \frac{\nu_{\parallel}}{\nu_{\perp}}$  est vérifiée

dans notre cadre d'étude [19], alors nous nous attendons bien à ce que  $z$  diminue avec la portée puisque  $\nu_\perp$ , lui, augmente (voir chapitre 2).

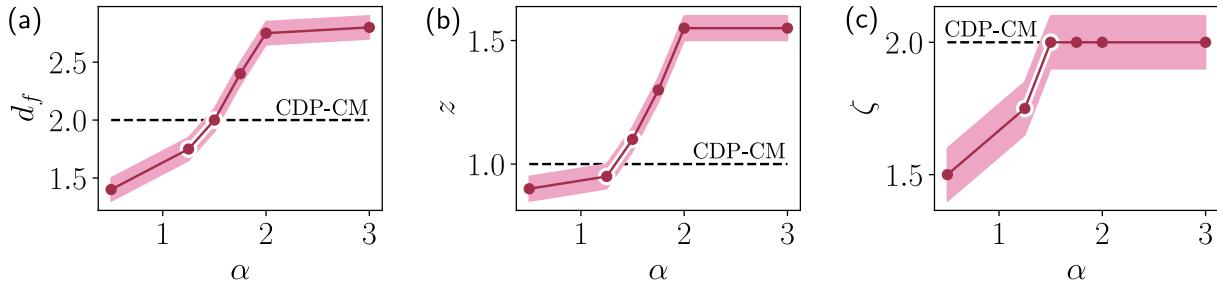


FIGURE 3.23 – Evolution des exposants de structure des avalanches  $d_f$ ,  $z$  et  $\chi$  avec la portée  $\alpha$  dans le modèle  $\alpha$ -ROM en 2D.

Finalement, les propriétés d’avalanches du  $\alpha$ -ROM suivent une évolution similaire à celle des exposants critiques. Pour  $\alpha \gtrsim 1.5$ , l’évolution observée est celle convenue dans le cadre LR-CDP/depinning pour les exposants  $\tau$ ,  $\tau'$ ,  $\tau''$  et  $d_f$  avec des événements spatialement compacts  $\chi = D$ . Pour  $\alpha \lesssim 1.5$  cependant, nous observons un comportement hors des bornes du cadre LR-CDP avec des avalanches spatialement fractales.

## 3.6 Conclusion

En conclusion, nous avons caractérisé dans ce chapitre l’influence des interactions médiées sur la transition de réversibilité des suspensions cisaillées cycliquement. Cette caractérisation s’est faite via la définition d’un modèle numérique baptisé  $\alpha$ -ROM en deux et trois dimensions, contrastant avec le modèle de transport à longue portée LR-ROM établi au chapitre précédent. Celle-ci a alors montré des différences fondamentales entre le comportement critique observé et celui attendu dans le cadre théorique LR-CDP.

En déterminant les exposants critiques statiques et dynamiques associés, nous avons mis en évidence l’influence de la portée des interactions sur le comportement critique. Cette influence prenant alors place sur une gamme de portée disjointe de celle dans le cadre LR-CDP. De plus, nous avons identifié une gamme de portées sur laquelle la transition se révèle convexe ( $\beta > 1$ ) et les fluctuations évanescentes ( $\gamma' < 0$ ), rejoignant alors le modèle de portée infini initialement proposé par Mari et al. [14].

Ces observations nous ont poussé à définir un nouveau cadre théorique pour décrire la transition de réversibilité en présence d’interactions médiées. Nous avons alors établi un modèle champ moyen baptisé  $\mu$ -Hébraud-Lequeux, permettant de rendre compte de la convexité de la transition via la dynamique des particules passives et de comprendre dans une limite champ moyen l’influence de la portée des interactions sur le comportement critique.

Enfin, nous avons caractérisé cette famille de transitions par sa dynamique d’avalanches. En réalisant des avalanches à densité de particules fixées, nous avons montré que leur statistique dépend fortement de la portée de l’interaction étudiée. Notamment, les exposants d’avalanche suivent une évolution proche des exposants critiques statiques, délimitant une zone fondamentalement différente du cadre LR-CDP. Dans cette zone de portée où les avalanches dans le cadre LR-CDP ont déjà atteint le régime de champ moyen, les avalanches dans le cadre du modèle  $\alpha$ -ROM montrent une structure spatialement fractale.