



Notes de thèse

Discipline : Physique

Laboratoire Interdisciplinaire de Physique

École Doctorale de Physique de Grenoble

Characterization of absorbing phase transitions in soft matter

Directeurs de Thèse : M. Eric BERTIN, M. Romain MARI

Table des matières

Introduction	1	
1	Transitions de phases absorbantes et interactions à longue portée en matière molle	3
1.1	Transitions de phases absorbantes	3
1.1.1	Phénomènes critiques	3
1.1.2	Transitions vers un état absorbant	3
1.1.3	Percolation dirigée conservée	3
1.2	Interactions à longue portée en matière molle	4
1.2.1	Interactions dans un milieu élastique ou visqueux	4
1.2.2	Milieux complexes et conditions aux limites	4
1.3	Cas canonique de l'influence des interactions à longue portée sur le comportement critique	4
1.3.1	Transitions de phase absorbantes	4
1.4	Transitions de phases convexes, interactions médiées	4
1.4.1	Suspensions cisaillées cycliquement	5
1.4.2	Ecoulement des matériaux amorphes	5
1.5	Problématisation	5
2	Transport à longue portée dans la classe PDC	7
2.1	Motivations	7
2.2	Modèles	7
2.2.1	Cas canonique : modèle Manna	7
2.2.2	Suspensions cisaillées cycliquement : ROM	7
2.3	Exposants critiques	8
2.3.1	Exposants statiques	8
2.3.2	Exposant dynamique	8
2.4	Hyperuniformité	8
2.5	Conclusion de chapitre	8
3	Transition de réversibilité dans les suspensions cisaillées cycliquement	9
3.1	Importance de la spatialisation des interactions	10
3.2	Méthode	11
3.2.1	Le ROM comme modèle de dynamique stroboscopique	11
3.2.2	Modélisation des interactions médiées	13
3.2.3	Implémentation numérique	15
3.3	Comportement critique	18

TABLE DES MATIÈRES

3.3.1	Détermination du point critique	18
3.3.2	Évolution des exposants critiques	19
3.3.3	Hyperuniformité	25
3.3.4	Retour sur les cas physiques	27
3.4	Interprétation	28
3.4.1	Modèle de μ -Hébraud-Lequeux	28
3.4.2	Interprétation mean-field de la transition	34
3.4.3	Zone concave	42
3.5	Avalanches	45
3.5.1	Avalanches à densité fixée	45
3.5.2	Évolution des exposants	47
3.6	Conclusion	49
4	Transition vers l'écoulement des matériaux amorphes	51
4.1	Étudier la transition vers l'écoulement des matériaux amorphes	52
4.1.1	Expérimentalement	52
4.1.2	Numériquement	53
4.1.3	Théoriquement	53
4.2	Les modèles élastoplastiques comme outils privilégiés	55
4.2.1	Principe d'un modèle élastoplastique	55
4.2.2	Le modèle de Picard	56
4.2.3	Implémentation numérique	57
4.2.4	Changement du paramètre de contrôle	58
4.3	Comportement critique	59
4.3.1	Transition vers l'écoulement en milieu élastique	59
4.3.2	De l'importance de la longue portée - Modèles d'écoulement à courte portée	65
4.3.3	Situer la transition vers l'écoulement	73
4.3.4	Influence de la portée sur les corrélations de contrainte dans l'état stationnaire	79
4.4	Caractérisation dynamique et avalanches	85
4.4.1	Avalanches de plasticité	86
4.4.2	Avalanches en contrainte imposée	90
4.4.3	Influence de la portée sur les avalanches en contrainte imposée	94
4.5	Conclusion	96
5	Discussion	99
5.1	Un cadre commun	99
5.1.1	Avalanches	99
5.2	Notes random	99
5.3	Approches de champ pour les transitions convexes	100
5.4	Les autres voies vers la convexité	100
Conclusion		101
Bibliographie		103
Annexe		109

TABLE DES MATIÈRES

6.1	Transition de réversibilité	109
6.1.1	Transformée de Fourier des propagateurs	109
6.1.2	Test de l'approximation scalaire	109
6.1.3	Résolution numérique du modèle μ -Hébraud-Lequeux	109
6.1.4	Fonctions de corrélation de paire	109
6.1.5	Avalanches dans le modèle α -ROM	109
6.2	Transition vers l'écoulement	109
6.2.1	Modèles α -Picard	109
6.2.2	Dépendance en protocole des avalanches à contrainte imposée dans les modèles élastoplastiques	112
6.2.3	Modèle de Picard écranté	112

Introduction

Chapitre 1

Transitions de phases absorbantes et interactions à longue portée en matière molle

Objectif : Donner du sens à ce qu'on fait et introduire toutes les notions qu'on utilisera par la suite.

1.1 Transitions de phases absorbantes

Partie pour introduire les phénomènes critiques, absorbants, puis la classe d'universalité principale que l'on étudie

1.1.1 Phénomènes critiques

Introduction simple et concise aux phénomènes critiques

- Présenter le cadre de travail des phénomènes critiques (phénoménologie, hypothèse de scaling, exposants, classes d'universalité, relations entre exposants)

1.1.2 Transitions vers un état absorbant

Introduction à la notion d'état absorbant et à la phénoménologie résultante

- Définition et exemples de réalisation notamment en matière molle.
- Comportements spécifiques, exposants pertinents
- Classes d'universalité pour les APT (citer et exemples de réalisation)

1.1.3 Percolation dirigée conservée

Présentation de la classe connue de référence sur laquelle on va se baser dans la suite. Important d'être rigoureux ici.

1.1.3.1 Criticalité auto-organisée et avalanches

- Définition (conjecture de Grassberger, ...) et réalisations notamment en matière molle.
- Exposants et relations de scaling
- Théorie de champ associée, résultats théoriques
- Introduction de la notion d'hyperuniformité et état de l'art pour CDP.
- Introduction de la notion d'avalanches et des observables associées + état de l'art dans CDP. (anomalie de la dim fractale car c'est $D+1$). + Ca peut valoir le coup d'écrire toutes les relations de scaling de Lubeck

1.2 Interactions à longue portée en matière molle

Montrer que les interactions à longue portée sont omniprésentes, d'autant plus en matière molle, et montrer leur diversité

1.2.1 Interactions dans un milieu élastique ou visqueux

- Exemples de systèmes (pourquoi pas des exemple qu'on aurait cités avant)
- Calcul de kernels d'interaction en milieux infinis (Stokeslet et équivalents)

1.2.2 Milieux complexes et conditions aux limites

- Reprendre le Diamant pour montrer la diversité possible des portées d'interaction. Avoir un axe pour représenter les différents cas possibles pour figure finale.

1.3 Cas canonique de l'influence des interactions à longue portée sur le comportement critique

Présenter le cadre habituel pour le traitement de la longue portée dans les transition de phase, à l'équilibre et hors équilibre.

- Cas classique modèle d'Ising / phi4, très bref
- Cas des transition de phases absorbantes : DP et depinning. LP comprise au sens de transport de l'activité à longue portée : évolution des exposants, guess sur l'hyperuniformité, évolution sur les avalanches avec depinning mais aussi Manna par les relations de scaling.

1.3.1 Transitions de phase absorbantes

1.3.1.1 Impact sur la dynamique avalancheuse

1.4 Transitions de phases convexes, interactions médiées

Introduire clairement les deux systèmes qui vont constituer notre étude et montrer en quoi ce sont des cas intéressants à étudier

1.4.1 Suspensions cisaillées cycliquement

- Motivation (système)
- Phénoménologie
- Point de vue APT
- Résultats ($\beta > 1$, $\gamma' < 0$)
- Rationaliser la double spécificité par l'hyperscaling

1.4.2 Ecoulement des matériaux amorphes

- Motivations (systèmes)
- Phénoménologie (T1, Eshelby, yield stress...)
- Point de vue APT (contrainte imposée)
- Résultats ($\beta > 1$), une des questions : est-ce que du coup on a aussi $\gamma' < 0$?

1.5 Problématisation

- Rapprochement des deux systèmes (bruit interne, bords absorbants)
- Poser les questions auxquelles on va répondre tout ou partie.

Chapitre 2

Transport à longue portée dans la classe PDC

Objectif

- Vérifier et quantifier le comportement classique attendu sur les modèles classiques de CDP.

2.1 Motivations

Motiver l'intérêt

- Systèmes associés
- Intérêt via le mapping sur le depinning (confirmation du mapping en LP)

Mesuré pour partie dans le depinning LR (dimensions, exposants non exhaustifs) mais pas trop (pas du tout ?) dans un modèle directement CDP. C'est donc l'objet de ce chapitre

2.2 Modèles

Introduction des modèles CDP utilisés pour étudier l'évolution du comportement CDP avec l'ajout d'un transport à LP.

2.2.1 Cas canonique : modèle Manna

- Description et motivations
- Implémentation numérique

2.2.2 Suspensions cisaillées cycliquement : ROM

- Motivations (point de vue stroboscopique, le système aura déjà été introduit en introduction)
- Implémentation numérique (sauts à LP notamment)

2.3 Exposants critiques

Remarque : On arrête pas de citer ça pour la méthode de détermination donc faudra être clair.

- exposants β et γ' , principe de mesure, évolution avec la portée, comparaison avec la théorie et l'état de l'art.
- exposant δ , principe de mesure, évolution avec la portée, comparaison avec la théorie et l'état de l'art.

2.3.1 Exposants statiques

2.3.2 Exposant dynamique

2.4 Hyperuniformité

- Principe de mesure et lien entre les exposants.
- Résultats dans le LR-ROM, évolution avec la portée. Discussion : corrections log, conservation du CDM, influence des CLP.
- Résultats avec Manna, évolution avec la portée avec et sans CDM conservé. Même discussion

2.5 Conclusion de chapitre

Cadre théorique clair et relativement robuste mais ne permet pas de rendre compte de certaines APT avec notion de longue portée (interactions médiées). On propose une étude détaillée des deux exemples de l'intro et on va essayer de les rapprocher par un nouveau type de cadre.

Chapitre 3

Transition de réversibilité dans les suspensions cisaillées cycliquement



Pré-requis pour le chapitre

- Introduction : Influence du déplacement d'une particule sur une autre particule dans un fluide.
- Introduction : CDP, depinning, ROM, LR-depinning
- Introduction : avoir relié $\beta > 1$ et $\gamma' < 0$ avec l'hyperscaling
- Chapitre 2 : LR-ROM

Dans la [sous-section 1.4.1](#) nous avons vu que, sous cisaillement cyclique, les suspensions peuvent être soumises à une transition de réversibilité. Celle-ci peut être interprétée comme une transition de phase absorbante [1–4]. Le paramètre de contrôle de cette transition est alors l'amplitude de cisaillement appliquée γ_0 et le paramètre d'ordre le coefficient de diffusion stroboscopique des particules D_0 . Dans la phase absorbante, pour $\gamma_0 < \gamma_{0,c}$, les particules de la suspension suivent un mouvement réversible et donc on a $D_0 = 0$. Dans la phase active, pour $\gamma_0 > \gamma_{0,c}$, les interactions irréversibles entre particules induisent une diffusion stroboscopique des particules d'un cycle à l'autre et donc $D_0 > 0$. Proche de la transition ($\gamma_0 \approx \gamma_{0,c}$), D_0 , ses fluctuations $\langle \delta D_0^2 \rangle$ et la longueur de corrélation associée au système suivent une évolution dictée par les exposants critiques β , γ' et ν_\perp :

$$D_0 \sim \delta\gamma_0^\beta, \quad \langle \delta D_0^2 \rangle \sim \delta\gamma_0^{-\gamma'}, \quad \xi \sim \delta\gamma_0^{-\nu_\perp}, \quad \delta\gamma_0 = \frac{\gamma_0 - \gamma_{0,c}}{\gamma_{0,c}} \quad (3.1)$$

Les modélisations simples de ce système [2–4] semblent placer ce phénomène critique dans la classe d'universalité CDP. Toutefois, en considérant les interactions entre les particules, médiées par le fluide suspendant, Mari et al. [5] ont proposé un modèle présentant une criticalité très différente. Alors que pour la classe CDP l'évolution du paramètre d'ordre est concave ($\beta < 1$) et ses fluctuations divergentes ($\gamma' > 0$), le modèle prenant en compte les interactions médiées définit une évolution convexe du paramètre d'ordre ($\beta > 1$) et des fluctuations qui s'annulent au point critique ($\gamma' < 0$).

Dans le [chapitre 2](#), nous avons vu que l'introduction de la longue portée sous forme de transport à longue portée dans un modèle appartenant à la classe CDP permettait de passer continûment de la criticalité de courte portée à celle de champ moyen. Cette évolution canonique suit un cadre théorique que nous avons appelé LR-CDP. Dans ce cas, nous avons sur toute cette gamme $\beta \leq 1$ et $\gamma' \geq 0$. La criticalité exposée par le modèle prenant en compte les interactions médiées semble donc échapper à ce cadre.

Dans ce chapitre, nous proposons d'étudier plus en profondeur le modèle proposé par Mari et al. [5] afin de comprendre comment les interactions médiées à longue portée induisent une criticalité différente de celle induite par le transport à longue portée. Pour ce faire, nous présenterons un modèle numérique capable de prendre en compte ces interactions de manière spatialisée dans le système. Nous étudierons alors le comportement critique associé à ce modèle et sa dépendance en portée de l'interaction d'un point de vue statique, dynamique et structurel. Nous proposerons enfin un cadre de description champ moyen pour interpréter les fortes différences de comportement critique observées entre ce modèle et le cadre de référence LR-CDP.

3.1 Importance de la spatialisation des interactions

Limite de l'approche champ moyen

Dans leur modèle initial, Mari et al. [5] ont implémenté les interactions à longue portée médiées par le fluide d'un point de vue champ moyen. Les détails de cette implémentation seront donnés dans la section suivante. Dans cette approche, chaque particule est soumise à une interaction médiée moyenne, assimilée à une sorte de diffusion, qui dépend uniquement du nombre instantané de particules subissant une interaction de contact irréversible dans le système. En d'autres termes, peu importe la distance d'une particule à un événement irréversible, l'impact de ce dernier sur elle reste le même. Via ce modèle en deux dimensions, les auteurs ont mené des analyses numériques permettant de déterminer précisément la valeur des exposants critiques associés au paramètre d'ordre :

$$\beta \approx 1.85, \quad \gamma' \approx -1.3 \tag{3.2}$$

Cette approche simplificatrice met alors en évidence un mécanisme, la diffusion des particules via les interactions médiées, permettant de sortir du cadre de description LR-CDP. En effet, nous rappelons que pour celui-ci nous avons en champ moyen $\beta = 1$ et $\gamma' = 0$.

Toutefois, d'un point de vue de la modélisation d'un système réel ce modèle présente des lacunes. Notamment, comme nous l'avons vu au [chapitre 1](#), les interactions médiées par un fluide visqueux sont en général fonction de la distance. Celles-ci sont représentées formellement par un propagateur hydrodynamique, présenté à la [section 1.2](#), qui décroît comme :

$$\mathcal{G}_{ij}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \sim \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^\alpha} \tag{3.3}$$

à grande distance $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$ de la source de l'interaction. La question est alors de savoir si le comportement critique exotique exhibé par le modèle traitant les interactions médiées en champ moyen est effacé par une représentation spatialisée de celles-ci.

Quelle portée étudier ?

La première question à nous poser pour mener notre étude est donc de savoir quelle est la portée α pertinente pour modéliser un système réel. En fait, comme nous l'avons vu à la section 1.2, cela dépend fortement du dispositif considéré. Dans le cadre de la transition de réversibilité des suspensions cisaillées cycliquement, nous pouvons imaginer deux conditions expérimentales simples.

La première concerne le cisaillement d'une suspension dans un écoulement de Couette cylindrique (trouver un livre de méca flu), à la manière de Pine et al. [1]. Dans ce cas, à condition que l'écart entre les parois rigides cylindriques soit suffisamment grand devant le diamètre des particules, nous pouvons approximer les interactions médiées dans ce système comme celles caractérisant un système infini en trois dimensions, et pour lesquelles on a $\alpha = 1$ (trouver un livre de méca flu). En considérant alors que les interactions irréversibles de contact entre les paires de particules correspondent à la forme dipolaire de l'interaction, la portée pertinente pour caractériser ce système 3D est $\alpha = 2$.

La seconde concerne le cisaillement d'une suspension dans un espace confiné entre des plaques rigides, rendant le problème quasi-2D. La transition de réversibilité a déjà été étudiée dans un dispositif proche de ces conditions [6]. Dans ce cas là, nous avons vu que le propagateur hydrodynamique décroît comme $1/r^2$ à grande distance dans le milieu bidimensionnel, soit $\alpha = 2$ [7]. Selon la même hypothèse que les interactions irréversibles de contact entre les paires de particules correspondent à la forme dipolaire de l'interaction, la portée pertinente pour caractériser ce système 2D est donc $\alpha = 3$.

Nous pouvons imaginer encore d'autres dispositifs, comme un confinement quasi-2D sur une interface libre [8]. Ainsi, il ne semble pas y avoir une portée pertinente mais des portées pertinentes pour aborder le problème de la transition de réversibilité. Dans ce chapitre, nous proposons donc d'étudier un modèle mettant en jeu des interactions dont la portée α peut être variée librement. Son étude nous permettra alors de mieux comprendre l'influence des interactions médiées et de leur portée sur la criticalité de la transition associée, replaçant alors l'étude de Mari et al. [5] dans une image plus globale.

3.2 Méthode

Dans cette section, nous présentons le modèle que nous avons mis au point pour étudier la transition de réversibilité en présence d'interactions médiées à longue portée.

3.2.1 Le ROM comme modèle de dynamique stroboscopique

D'un point de vue numérique, la transition de réversibilité dans les suspensions cisaillées cycliquement peut être étudiée de différentes façons. Les approches les plus évidentes, i.e. les plus proches des expériences, sont celles de dynamique particulaire. Dans les travaux de Ge et Elfring [4] par exemple, des suspensions de quelques 500 particules ont été étudiées et montrent effectivement une transition de réversibilité, dont une estimation de l'exposant critique β a même été faite. Néanmoins, ces simulations comportant de nombreux degrés de liberté, il est

difficile d'étendre ce type d'étude à des systèmes plus grands. Cette condition est pourtant indispensable à l'étude des phénomènes critiques, puisque celle-ci n'est valable qu'à grande échelle. De plus, ces modèles font intervenir de nombreux paramètres (forme du potentiel d'interaction, modélisation du solvant, ...) rendant les résultats de chaque simulation modèle-spécifique. Ils ne sont donc pas adéquat pour étudier les propriétés universelles de la transition.

Pour remédier à ce problème, il est nécessaire de s'appuyer sur des modèles simplificateurs, basés sur des aspects phénoménologiques essentiels du problème. Une approche possible, développée par Corte et al. [2], consiste à considérer la dynamique du système d'un point de vue stroboscopique. En d'autres termes, les cycles de cisaillement ne sont pas considérés dans leur ensemble mais seulement représentés par deux instants : leur début et leur fin (voir [figure 3.1](#)). Le postulat de modélisation est alors le suivant : lorsqu'au cours d'un cycle deux particules sont suffisamment proches, elles interagissent irréversiblement. Cette interaction irréversible fait alors qu'entre le début et la fin du cycle, les particules ayant interagi ne se retrouvent pas exactement à la même position. Les interactions irréversibles que subissent les particules peuvent avoir des origines complexes comme des interactions de surface [9]. Ainsi, dans un but de simplification globale, l'approche stroboscopique considère ces interactions comme erratiques. En d'autres termes, d'un pas au suivant de la modélisation stroboscopique, les particules ayant interagi subissent un déplacement aléatoire de courte amplitude.

Le modèle **simplificateur** recherché doit donc, à chaque pas de temps, déterminer la distance entre les particules en début de cycle. Celles suffisamment proches sont alors considérées comme interagissant durant le cycle. Elles sont donc déplacées aléatoirement au prochain pas de temps, i.e. à l'issue de ce cycle. L'état réversible absorbant correspond donc à un état où toutes les particules de la suspension sont suffisamment loin pour ne pas interagir. L'état irréversible correspond au contraire à un état où, dans le régime stationnaire, il y a toujours des déplacements sur un pas de temps. Ce modèle correspond donc exactement au ROM, introduit et étudié dans les chapitres précédents, comme illustré à la [figure 3.1](#). En réalité cette correspondance n'est pas un total hasard puisque le ROM a précisément été créé pour modéliser cette transition [2].

Toutefois, nous avons vu dans le [chapitre 1](#) que la transition de réversibilité était une transition de phase absorbante avec comme paramètre de contrôle l'amplitude de cisaillement γ_0 et comme paramètre d'ordre le coefficient de diffusion stroboscopique D_0 . Il n'est donc pas évident de transposer ces observables au ROM, pour lequel le paramètre de contrôle est la densité de particules ϕ et le paramètre d'ordre l'activité A . En effet, dans le modèle stroboscopique, la notion de cisaillement est totalement perdue. Pourtant, il est possible de faire un parallèle direct entre ces deux approches. En fait, l'amplitude de cisaillement dans les expériences désigne simplement une distance de déplacement des particules lors d'un cycle. En d'autres termes, elle atteint sa valeur critique lorsque cette distance se compare à la distance interparticulaire $l \sim \phi^{-1/D}$ ¹. Un paramètre de contrôle équivalent de la transition est donc cette distance interparticulaire, via la densité de particules ϕ . De la même façon, le coefficient de diffusion stroboscopique du système est directement relié au nombre de particules interagissant irréversiblement. Ainsi, un paramètre d'ordre équivalent est bien l'activité dans le ROM. En d'autres termes, une particule active dans le ROM est une particule interagissant irréversible-

1. à réfléchir parce que les expériences ont l'air de dire le contraire

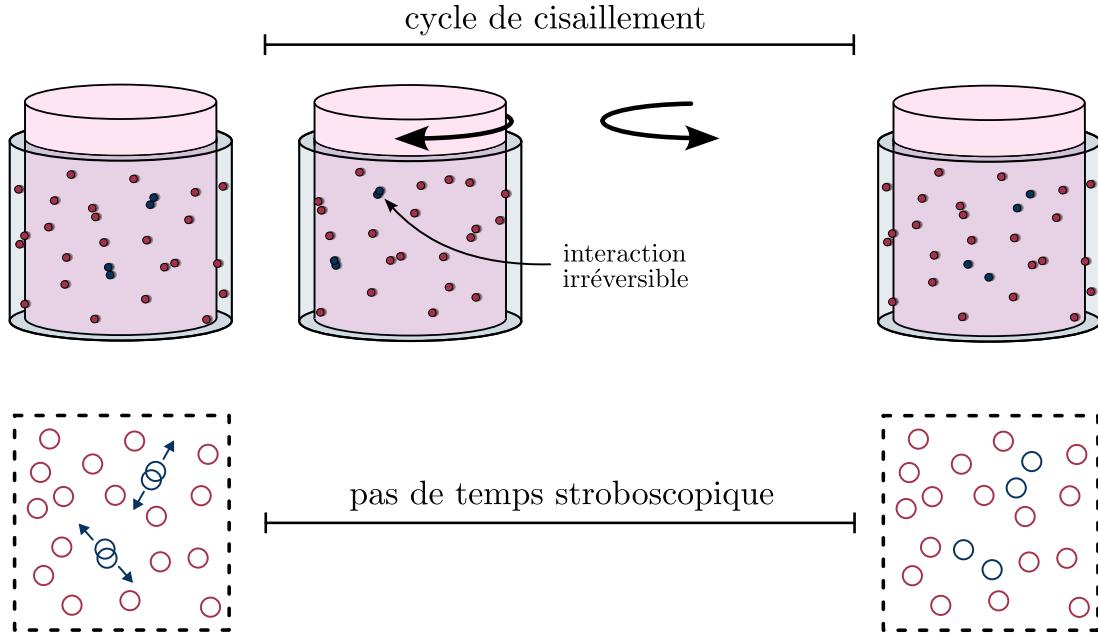


FIGURE 3.1 – Équivalence entre la vision dynamique et la vision stroboscopique dans les expériences de suspensions cisaillées cycliquement

ment dans la vision dynamique. Par la correspondance $\gamma_0 \rightarrow \phi$ et $D_0 \rightarrow A$, le ROM est donc le modèle numérique idéal pour simuler la transition de réversibilité dans les suspensions cisaillées cycliquement de par sa simplicité.

Suivant ces lignes, Tjhung et al. [3] ont utilisé cette équivalence pour justifier l'appartenance de cette transition à la classe CDP. Toutefois cette approche néglige totalement la présence du fluide suspendant et les interactions qu'il peut médier entre les particules. Notre objectif est alors de comprendre comment ces interactions médiées peuvent affecter la criticalité du système. Or, si le ROM est un modèle efficace pour sonder la transition dans le cas d'interactions à courte portée, il ne permet pas en l'état de modéliser les interactions médiées par le fluide suspendant.

3.2.2 Modélisation des interactions médiées

Afin de conserver l'efficacité du modèle stroboscopique tout en y ajoutant la présence d'interactions médiées à longue portée, ces dernières doivent pouvoir être modélisées de manière simple et efficace. Le premier objectif de cette étude est donc de déterminer la modélisation adaptée.

En pratique, au cours d'un cycle de cisaillement, chaque particule suspendue dans le fluide interagit avec les autres particules via des interactions hydrodynamiques (voir section 1.2). Considérons une particule située en \mathbf{r}' et soumise à une vitesse de déplacement $v_i(\mathbf{r}')$ selon chaque coordonnée spatiale i . En première approximation², d'après la théorie hydrodynamique, celle-ci induira une vitesse de déplacement $v_i^p(\mathbf{r})$ pour une particule située en \mathbf{r} selon :

2. Sous quelle approximation on assimile une particule se déplaçant à une force ponctuelle sur le fluide ?



$$v_i^p(\mathbf{r}) = \mathcal{G}_{ij}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') v_j(\mathbf{r}') \quad (3.4)$$

avec $\mathcal{G}_{ij}(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$ le tenseur hydrodynamique adéquat pour la modélisation du problème, décroissant comme $1/|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^\alpha$ à grande échelle.

Au cours de la transition réelle, les déplacements irréversibles des particules lors d'un cycle prennent des formes complexes et ne sont a priori pas instantanés. Afin de modéliser l'influence d'une telle trajectoire irréversible, nous la considérons simplement dans l'approche stroboscopique. Nous considérons alors qu'une telle trajectoire autour de \mathbf{r}' équivaut in fine à un simple déplacement aléatoire $\delta_i^a(\mathbf{r}')$, qui induit un déplacement $\delta_i^p(\mathbf{r})$ sur une particule située en \mathbf{r} selon :

$$\delta_i^p(\mathbf{r}) = \mathcal{G}_{ij}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \delta_j^a(\mathbf{r}') \quad (3.5)$$

Nous postulons alors que la forme adéquate du tenseur hydrodynamique est la même que pour le problème standard.

Cette modélisation implique une approche tensorielle de l'influence des particules actives sur les particules passives (par opposition à actives) dans le modèle stroboscopique : le déplacement d'une particule passive induit par une particule active dépend de la direction de déplacement de cette dernière. Pour simplifier davantage cette approche, nous nous appuyons sur le fait que, dans la phase active, dans la limite thermodynamique, chaque particule passive reçoit des interactions médiées de la part d'un grand nombre particules actives.. En notant $\{\mathbf{r}'\}$ l'ensemble des positions des particules actives, on a alors :

$$\delta_i^p(\mathbf{r}) = \sum_{\mathbf{r}'} \mathcal{G}_{ij}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \delta_j^a(\mathbf{r}') \quad (3.6)$$

De ce fait, nous pouvons aborder cette interaction d'un point de vue statistique. Les déplacements des particules actives étant de moyenne nulle on a de même $\langle \delta_i^p(\mathbf{r}) \rangle = 0$. Par ailleurs, ces premiers sont de directions aléatoires. En les considérant d'amplitude typique a on a alors en première approximation :

$$\langle \delta_i^p(\mathbf{r})^2 \rangle \sim a^2 \sum_{\mathbf{r}'} \mathcal{G}^2(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \quad (3.7)$$

avec \mathcal{G}^2 un propagateur effectif de l'interaction, que nous choisissons isotrope et décroissant comme $1/r^{2\alpha}$. En pratique, Le propagateur scalaire effectif retenu pour la modélisation est de la forme spécifique suivante :

$$\mathcal{G}^2(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = \frac{c}{\left(1 + \left(\frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{D_p}\right)^2\right)^\alpha}, \quad c \in \mathbb{R}^+ \quad (3.8)$$

avec D_p le diamètre des particules et c un paramètre représentant la borne supérieure de l'interaction. Dans la suite de ce travail, nous considérons $c = 0.25$, à comparer avec $a = 1$. Cette formulation modélise alors bien une interaction entre particules actives et particules passives qui décroît comme $1/r^\alpha$ en champ lointain. La régularisation en $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| = 0$ permet par ailleurs de considérer sans difficulté des interactions pour lesquelles on a $2\alpha > D$, sans quoi cette forme ne serait plus intégrable.

In fine, dans cette modélisation simplificatrice, chaque particule passive est donc soumise à un déplacement de moyenne nulle et dont l'amplitude typique dépend de la distance aux particules actives. Ces simplifications permettent alors de rendre la modélisation des interactions scalaire, ce qui permet d'alléger fortement l'implémentation numérique.

3.2.3 Implémentation numérique

Pour l'implémentation numérique de ce modèle, nous reprenons les éléments de base du ROM, détaillé au chapitre précédent. Les interactions médiées représentent alors simplement une composante additionnelle à ce modèle, à implémenter à chaque pas de temps.

3.2.3.1 Calcul de l'influence des particules actives

Afin de simplifier le calcul numérique de la somme de l'équation 3.7, nous choisissons de considérer une version gros grains de l'activité dans le système. Pour ce faire, nous définissons un champ d'activité discret $A(\mathbf{r}_i)$, défini sur le réseau utilisé pour la méthode cell-list, introduite à la sous-section 2.2.2. Chaque case du réseau est alors définie autour d'une position $\mathbf{r}_i = na\hat{\mathbf{e}}_x + ma\hat{\mathbf{e}}_y$ avec $(n, m) \in \mathbb{N}^2$ et a le pas du réseau que l'on prend de nouveau égal à $D_p = 1$. À chaque pas de temps, après identification des particules actives, nous calculons ce champ d'activité sur la case du réseau centrée autour de \mathbf{r}_i comme le nombre de particules actives dans cette case (voir figure 3.2). $A(\mathbf{r}_i)$ représente alors en quelques sortes la quantité locale d'activité sur toute la surface du réseau.

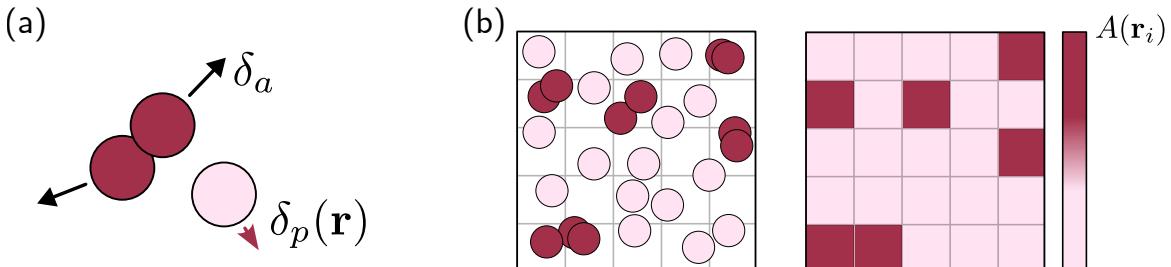


FIGURE 3.2 – Implémentation numérique du modèle α -ROM. (a) Les particules actives (rouges) sont soumises à des déplacements aléatoires δ^a indépendants de leur position. Les particules passives sont soumises à des déplacements aléatoires δ^p dont l'amplitude typique dépend de leur distance à l'activité. (b) Méthode de détermination du champ d'activité discret $A(\mathbf{r}_i)$

Pour déterminer la variance du déplacement des particules passives à chaque pas de temps, il suffit donc de calculer la convolution discrète suivante :

$$\langle \delta_\alpha^p(\mathbf{r}_i)^2 \rangle = a^2 \sum_j G^2(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) A(\mathbf{r}_j) \quad (3.9)$$

avec G^2 la version discrétisée du propagateur \mathcal{G}^2 . Cette convolution étant définie sur un réseau régulier, il est possible de la calculer efficacement par une méthode pseudo-spectrale. En pratique, nous la calculons donc dans l'espace réciproque où elle devient le simple produit $\hat{G}^2(\mathbf{q}_i) \hat{A}(\mathbf{q}_i)$, avec $\mathbf{q}_i = (\frac{2\pi}{L}n, \frac{2\pi}{L}m)$ et L la taille du système. Pour ce faire, nous définissons

directement le propagateur hydrodynamique dans l'espace de Fourier. Dans le cas continu, le calcul relégué à la [sous-section 6.1.1](#) donne en deux dimensions :

$$\hat{\mathcal{G}}(\mathbf{q}) = \frac{2\pi c}{\Gamma(\alpha)} \left(\frac{q}{2}\right)^{\alpha-1} K_{\alpha-1}(q) \quad (3.10)$$

avec Γ la fonction Gamma d'Euler et $K_{\alpha-1}$ la fonction de Bessel modifiée de seconde espèce d'ordre $\alpha - 1$ [10]. On peut alors estimer la valeur de ce propagateur continu en $\mathbf{q} = 0$ pour un milieu de taille finie en calculant sa valeur moyenne dans l'espace réel :

$$\hat{\mathcal{G}}(0) = \frac{\pi c}{\alpha - 1} \left(1 - (1 + L^2)^{1-\alpha}\right) \xrightarrow[L \rightarrow \infty]{\alpha > 1} \frac{\pi c}{\alpha - 1} \quad (3.11)$$

Nous choisissons donc de définir le propagateur discret \hat{G} dans l'espace réciproque par l'expression :

$$\hat{G}(\mathbf{q}_i) = \hat{\mathcal{G}}(\mathbf{q}_i), \quad q = \sqrt{\left(2 - 2 \cos\left(\frac{2\pi}{L}n\right)\right) + \left(2 - 2 \cos\left(\frac{2\pi}{L}m\right)\right)} \quad (3.12)$$

la conversion du nombre d'onde étant essentielle pour définir proprement le propagateur dans l'espace réciproque discret [11, 12]. La forme alors obtenue par cette procédure dans l'espace discret réel pour $\alpha \in \{3, 2, 1.5\}$ est présentée à la [figure 3.3-\(a\)](#).

Finalement, la valeur réelle de la convolution est obtenue en opérant une transformée de Fourier inverse discrète sur le produit. Cette méthode devenant alors parallélisable, elle nous permet de conserver l'architecture GPU utilisée pour les simulations précédentes. De plus, la méthode pseudo-spectrale permet de prendre en compte les conditions aux limites périodiques du système naturellement. Enfin, afin d'optimiser notre utilisation des fonctions de Fast Fourier Transform [13], nous privilégions les tailles de système de la forme $L = 2^p$ avec $p \in \mathbb{N}$.

De cette manière, en plus des particules actives, les particules passives sont soumises à un déplacement dont la variance est donnée par l'[équation 3.9](#) à chaque pas de temps. Ce modèle représente alors une généralisation du modèle étudié par Mari et al., qui correspond exactement au cas $\alpha = 0$ (et donc des interactions médiées indépendantes de la distance). Ce nouveau mécanisme permet d'observer une transition de phase absorbante analogue à celle du ROM et dont les propriétés critiques varient avec la portée de l'interaction α . Nous appelons alors ce nouveau modèle α -ROM, et, par analogie, celui de Mari et al. 0-ROM.

3.2.3.2 Non-intégrabilité du propagateur à longue portée

Si la régularisation du propagateur en $r = 0$ permet de le rendre intégrable pour $2\alpha > D$, pour $2\alpha < D$ c'est la limite $r \rightarrow \infty$ qui pose problème. En effet dans ce cas, la valeur moyenne du propagateur diverge comme $L^{2-2\alpha}$ pour L grand. Si cette divergence n'est pas un problème en soi pour l'étude d'un système de taille finie, elle en représente un pour la comparaison des comportements critiques à différentes tailles. En effet, cette dépendance du propagateur en taille rend la densité critique ϕ_c elle aussi fortement dépendante de L (voir [figure 3.3-\(b\)](#)). De ce fait, il n'est alors plus possible d'utiliser différentes tailles du système pour sonder le comportement critique à une portée α donnée, comme cela a été fait à la [section 2.3](#) dans le cas des sauts à longue portée.

Afin de remédier à ce problème, nous choisissons de normaliser les propagateurs pour $2\alpha < D$ par un facteur $L^{2-2\alpha}$, rendant de ce fait la valeur moyenne du propagateur indépendante de la taille du système. Par cette procédure, nous retrouvons alors pour $\alpha = 0.5$ une densité critique indépendante de la taille du système à grande taille (voir figure 3.3-(c)). Toutefois pour $\alpha = 1$, pour lequel la divergence de la valeur moyenne du propagateur évolue logarithmiquement avec la taille, cette procédure de normalisation n'est pas concluante. En effet, dans ce cas, ϕ_c montre une forte dépendance avec la taille du système même après normalisation. Ceci peut être expliqué par le fait qu'une telle divergence logarithmique n'est valable qu'à des tailles de systèmes excessivement grandes. Ce cas restant néanmoins d'intérêt, nous conservons son étude mais nous nous limitons pour cela à une taille de système fixée.

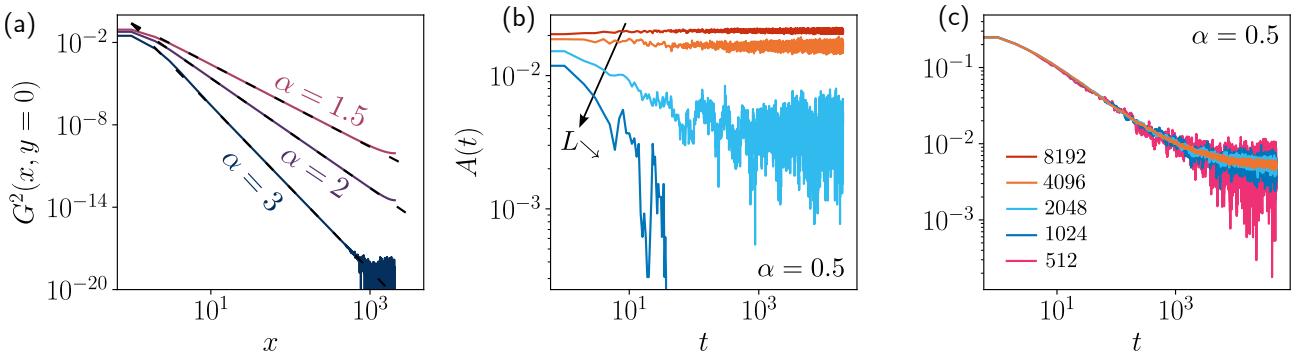


FIGURE 3.3 – Propagateurs d’interaction dans le modèle α -ROM

. (a) Évolution du propagateur effectif dans l'espace discret réel pour $\alpha \in \{3, 2, 1.5\}$. Les pointillés noirs représentent les lois de puissance $1/r^{2\alpha}$. (b) Évolution de l'activité vers l'état stationnaire à $\phi = 0.00486859$ pour différentes tailles de système avec $\alpha = 0.5$ dans le cas d'un propagateur non normalisé. La distinction des courbes montre un point critique discernable différent pour chaque taille. (c) Idem à $\phi = 0.101117$ avec le propagateur normalisé.

3.2.3.3 Extension aux dimensions supérieures

Notre travail se focalise sur une étude de la transition en deux dimensions. Toutefois, certains cas physiques de cette transition ont lieu dans un espace de trois dimensions [1]. De plus, d'un point de vue purement théorique, il peut être intéressant de comprendre comment cette transition évolue avec le nombre de dimensions du système. Pour ces raisons, nous généralisons cette méthode de simulation numérique à n dimensions, $n \in \mathbb{N}^+$.

La complexité de cette implémentation réside alors essentiellement dans l'intégration des conditions aux limites périodiques. Dans le cas du calcul des interactions à longue portée, celles-ci sont directement prises en compte par la méthode pseudo-spectrale. Pour le calcul des interactions de contact cependant, la périodicité nécessite plus d'attention, mais reste générable grâce à un peu d'algèbre.

Afin de mesurer de manière annexe le comportement critique du α -ROM en 3D, nous implementons les interactions médiées de la même façon qu'en 2D. Seulement, cette fois, la forme

spectrale continue du propagateur est³ :

$$\hat{\mathcal{G}}(\mathbf{q}) = \frac{c\pi^{\frac{3}{2}} 2^{\frac{5}{2}-\alpha}}{\Gamma(\alpha)} q^{\alpha-\frac{3}{2}} K_{\alpha-\frac{3}{2}}(q) \quad (3.13)$$

Pour $\alpha < \frac{3}{2}$, nous opérons la même procédure de normalisation que pour le cas 2D mais seulement cette fois par le facteur $L^{3-2\alpha}$.

Finalement le modèle ainsi implémenté du α -ROM nous permet d'étudier efficacement les transitions de phase absorbantes associées à chaque portée de l'interaction médiée α en deux et trois dimensions. Grâce à cet outil, il est alors possible de comprendre comment l'on passe du cas limite de courte portée du ROM ($\alpha \rightarrow \infty$), représenté par la classe CDP, au cas limite $\alpha \rightarrow 0$, représenté par une transition convexe et des fluctuations critiques évanescentes [5], totalement hors du cadre LR-CDP. Pour ce faire, nous caractérisons d'abord en 2D la gamme de portées suivante : $\alpha \in \{0.5, 1, 1.25, 1.5, 1.75, 2, 3\}$.

3.3 Comportement critique

Afin de déterminer l'évolution de la criticalité du système avec la portée d'interaction α et de la comparer avec le cadre de référence LR-CDP, nous commençons par déterminer le comportement critique statique des modèles α -ROM. Pour ce faire, nous mesurons les exposants critiques β et γ' .

3.3.1 Détermination du point critique

Dans cette optique, nous commençons par déterminer les densités critiques ϕ_c associées à chaque transition. En utilisant des tailles de systèmes allant de $L = 2048$ à $L = 8192$, nous mesurons l'activité moyenne $\langle A \rangle$ dans l'état stationnaire pour différentes densités ϕ et ce pour chaque portée α . Pour le cas problématique $\alpha = 1$ évoqué précédemment, le comportement critique est évalué pour la plus grande taille $L = 8192$. En estimant grossièrement la densité critique associée à chaque portée il est alors possible de tracer les courbes d'évolution du paramètre d'ordre, représentées à la figure 3.4-(a).

Nous remarquons que cette évolution passe effectivement d'une forme concave à grand α , à une forme convexe à petit α . Ce comportement qualitatif est donc en accord avec les limites de courte portée ($\beta \approx 0.64$ [14]) et de portée infinie ($\beta \approx 1.85$ [5]). Ainsi, comme dans le cas des sauts à longue portée, la criticalité semble évoluer continûment avec la portée de l'interaction. Toutefois, en plus de la différence asymptotique à très longue portée, une différence fondamentale semble apparaître quant au domaine de portées sur lequel cette évolution continue a lieu. En effet, nous rappelons que dans le cadre LR-CDP, pour $\alpha = 3$, la théorie est déjà à sa limite champ moyen (voir chapitre 1).

3. Le calcul est relayé en sous-section 6.1.1

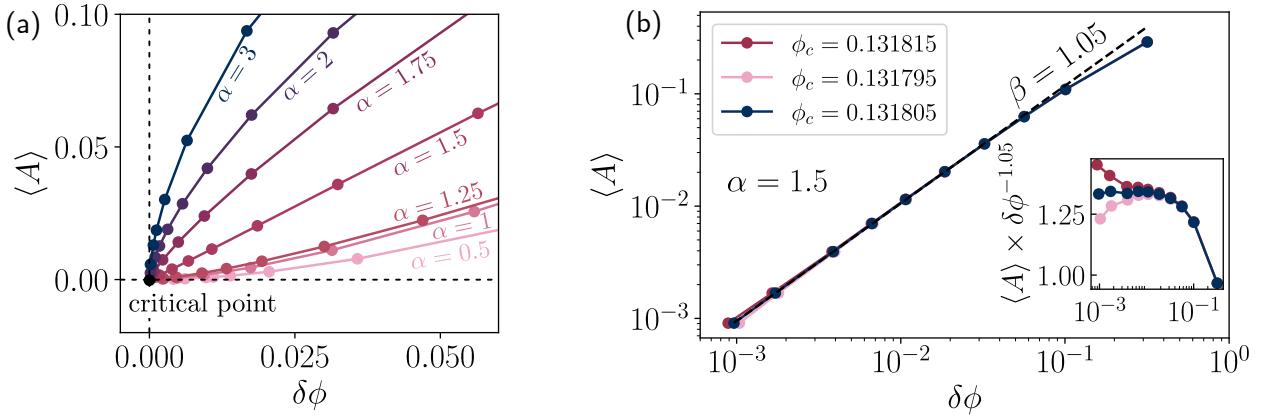


FIGURE 3.4 – (a) Évolution de l’activité moyenne dans l’état stationnaire avec la distance au point critique pour différentes portée α des interactions médiées en 2D. (b) Exemple de détermination d’une densité critique ϕ_c dans le cas $\alpha = 1.5$ en 2D. Le choix $\phi_c = 0.131805$ est significativement meilleure que $\phi_c = 0.131815$ et $\phi_c = 0.131795$. En encart, la représentation compensée permet d’exacerber ces différences.

Afin d’évaluer plus quantitativement cette différence, il nous faut mesurer précisément l’exposant β associé. Nous reprenons alors la méthode présentée à la section 2.3. Un exemple de détermination dans le cas du α -ROM pour $\alpha = 1.5$ est représenté à la figure 3.4-(b). Ces déterminations sont alors bien plus compliquées que dans le cas des sauts à longue portée et ce pour deux raisons principales. La première est que le régime transitoire est bien plus long à atteindre en présence de la diffusion des particules passives. Notamment, la décroissance initiale et la transition entre régime transitoire et régime stationnaire sont bien moins abruptes. Ainsi, pour une courbe de convexité équivalente (i.e. β équivalent), les simulations nécessitent plus de dix fois plus de pas de temps avant équilibration⁴. La seconde vient du fait que les transitions convexes sont plus difficiles à caractériser. En effet, pour une distance au point critique équivalente, celles-ci impliquent de descendre à des activités bien plus faibles (puisque $\langle A \rangle \sim \delta\phi^\beta$). Cela requiert alors des tailles de systèmes de plus en plus grandes et donc des simulations de plus en plus longues. Au final, l’équilibration de certains points a nécessité plus de 800 heures de simulation continue. En général, la caractérisation des transitions convexes amènera donc plus d’incertitudes.

3.3.2 Évolution des exposants critiques

3.3.2.1 Exposants statiques

Les densités critiques déterminées permettent de représenter les courbes $\langle A \rangle = f(\delta\phi)$ en échelle logarithmique pour chaque α sur la figure 3.5-(a). Les exposants β estimés par cette méthode sont reportés dans le tableau 3.1 et leur évolution est résumée sur la figure 3.6-(a).

4. De plus, les pas de temps du α -ROM sont bien plus coûteux en termes de ressources numériques puisqu’ils font intervenir des calculs de FFT.

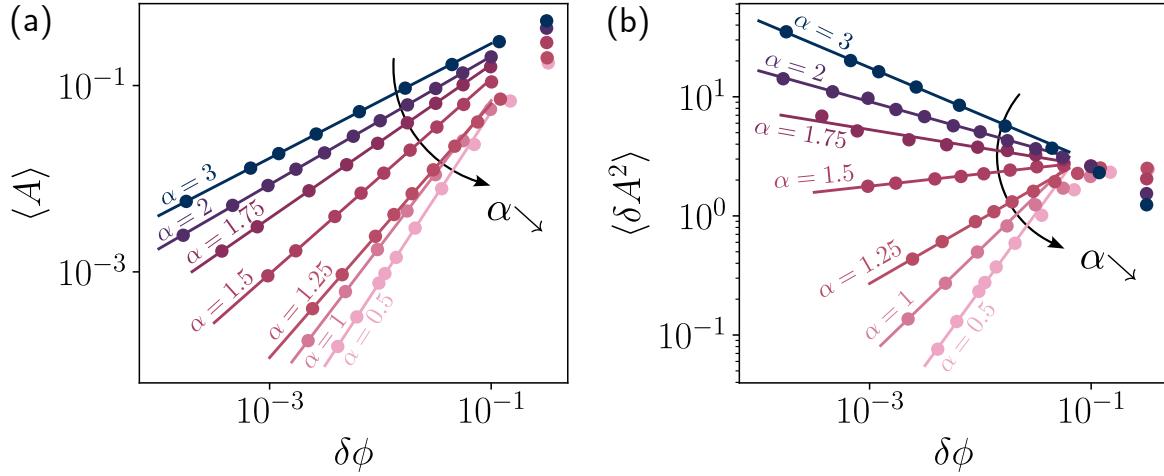


FIGURE 3.5 – (a) Évolution de la valeur moyenne de l'activité dans l'état stationnaire $\langle A \rangle$ en fonction de la distance au point critique $\delta\phi$ à différentes portées dans le α -ROM en 2D. (b) Idem pour la variance $\langle \delta A^2 \rangle$

Pour déterminer l'exposant γ' , comme dans le [chapitre 2](#), nous mesurons $\langle \delta A^2 \rangle$ dans l'état stationnaire. La détermination de ϕ_c étant déjà effectuée, l'exposant se mesure par un simple ajustement de la courbe en échelle logarithmique. L'évolution des fluctuations en fonction de la portée est alors représentée sur la [figure 3.5-\(b\)](#). Nous observons que l'on passe de fluctuations divergentes à l'approche du point critique pour les courtes portée à des fluctuations qui s'annulent pour les longues portées. Cette observation est à nouveau en accord avec les comportements limites de courte portée (CDP) et de portée infinie (0-ROM). Les valeurs des exposants γ' sont reportées dans le [tableau 3.1](#) et leur évolution est résumée sur la [figure 3.6-\(a\)](#).

α	β	γ'	δ	ν_{\perp}^*	α	β	γ'	δ	ν_{\perp}^*
CDP [14]	0.64	0.37	0.42	0.80	CDP [14]	0.84	0.15	0.75	0.59
3	0.62	0.39	0.41	0.82	3.5	0.84	0.16	0.74	0.61
2	0.69	0.26	0.42	0.82	3	0.85	0.11	0.74	0.60
1.75	0.82	0.15	0.45	0.90	2.5	0.95	-0.03	0.74	0.62
1.5	1.05	-0.10	0.49	1.00	2	1.30	-0.44	0.76	0.72
1.25	1.37	-0.54	0.54	1.10	1.75	1.49	-0.82	0.75	0.72
1	1.56	-0.90	0.62	1.11					
0.5	1.82	-1.28	0.67	1.18					
0 [5]	1.85	-1.2	-	1.3					

TABLE 3.1 – Exposants critiques déterminés dans les modèles α -ROM en 2D (a) et en 3D (b)

Zones d'évolution

Nous observons alors effectivement une évolution continue des deux exposants avec la portée. Notamment, l'évolution est significative entre $\alpha \approx 2$ et $\alpha \approx 1 - 0.5$, au-delà de quoi elle semble arriver à saturation des deux côtés. Par ailleurs les valeurs des exposants aux plus grands α rejoignent celles de la classe CDP : pour $\alpha = 6$, l'accord est exact aux incertitudes de détermination près et pour $\alpha = 4$ la différence est minime. Cela suggère donc de considérer

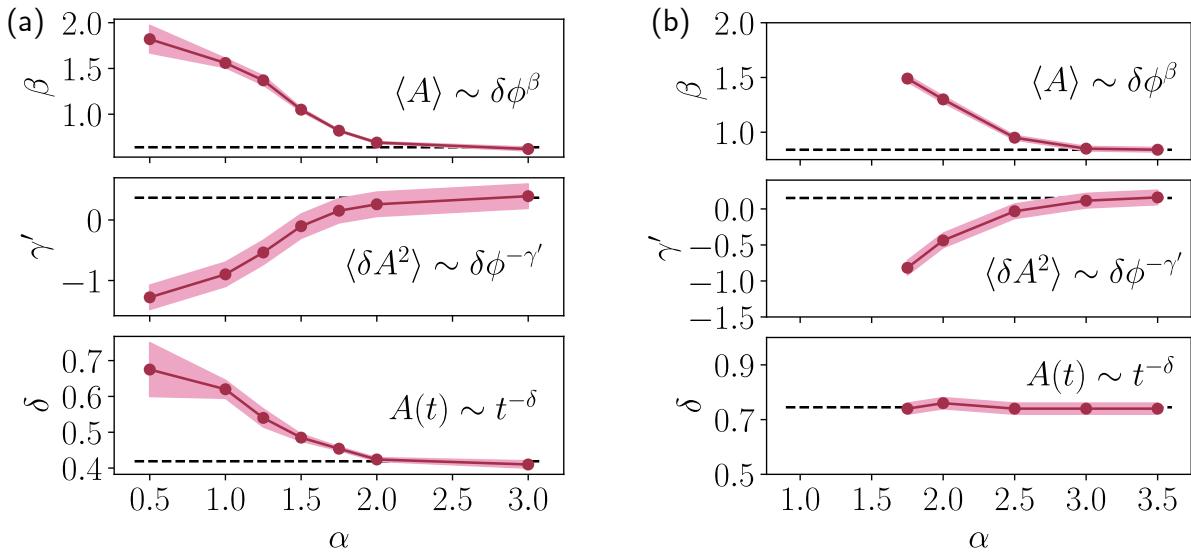


FIGURE 3.6 – Évolution des exposants critiques β , γ' et δ avec la portée dans le modèle α -ROM en 2D (tableau de gauche) et en 3D (tableau de droite). Les zones colorées rose représentent les incertitudes de détermination.

$\alpha \approx 2$ comme limite de courte portée de la transition. Dans le cadre de référence LR-CDP, cette borne se situe en $\alpha = 4$. À l’opposé du spectre, les exposants déterminés pour $\alpha = 0.5$ rejoignent aussi ceux déterminés dans le cas du 0-ROM. Cette observation suggère alors $\alpha \approx 0.5$ comme la limite champ moyen de la transition. Dans le cadre de référence LR-CDP, cette borne se situe en $\alpha = 3$. La zone d’évolution continue des exposants $0.5 - 1 < \alpha < 2$ est alors très différente de celle déterminée pour le cadre LR-CDP. Les interactions médiées ne se diffèrent donc pas du transport à longue portée uniquement dans la limite de portée infinie mais à toutes les portées. Cette distinction a donc de fortes implications dans l’étude des systèmes réels.

Comportement exotique et point singulier

En plus de présenter une zone de variation des exposants inhabituelle, la spécificité de la limite de portée infinie rend cette variation physiquement significative. En effet, si la courbe décrivant l’évolution du paramètre d’ordre reste concave ($\beta < 1$) pour $\alpha \gtrsim 1.5$, celle-ci change de convexité ($\beta > 1$) pour $\alpha \lesssim 1.5$. C’est aussi autour de ce même point $\alpha \approx 1.5$ que le comportement des fluctuations critiques s’inverse, passant de divergent à évanescents. Le comportement exotique du 0-ROM est donc retrouvé dans toute la gamme d’évolution $\alpha \lesssim 1.5$. Dans le cadre du 0-ROM, nous avons montré que cette double spécificité $\beta > 1$, $\gamma' < 0$ peut être rationalisée dans le cadre de la relation d’hyperscaling [14] :

$$2\beta + \gamma' = \nu_\perp D \quad (3.14)$$

Celle-ci permet en effet d’expliquer qu’une transition avec une valeur de β anormalement grande donne lieu à une valeur de γ' anormalement petite. Étant donné que cette relation est aussi vérifiée dans la limite de courte portée CDP, nous pouvons supposer qu’elle l’est dans toute la zone d’évolution. Ainsi, l’annulation des fluctuations critiques s’expliquerait par la convexité

de la transition à toute portée $\alpha \lesssim 1.5$.

Par ailleurs, si nous allons plus loin dans notre hypothèse, la relation d'hyperscaling permet de dériver pour chaque α un exposant de corrélation spatiale ν_{\perp} . Dans le tableau 3.1, nous répertorions le résultat de cette dérivation. Cette exposant hypothétique ν_{\perp}^* semble alors suivre une évolution continue avec la portée α qui lie les deux limites de CDP et du 0-ROM. Une différence alors marquante avec le cadre de référence LR-CDP et que cet exposant augmente avec la portée des interactions médiées alors que dans le cas canonique nous avons $\nu_{\perp}^{CDP,2D} = 0.80$ et $\nu_{\perp}^{CDPCM} = 0.50$, soit une tendance à diminuer lorsque le champ moyen est approché.

Le point $\alpha \approx 1.50$ se positionne alors à un changement drastique des propriétés de la transition, sortant alors complètement du cadre d'interprétation LR-CDP. En ce point spécifique, les exposants critiques β et γ' prennent la valeur des exposants du champ moyen de CDP. Une différence majeure est alors que, dans le cas des interactions actives-passives, ce point n'est pas une limite asymptotique mais il est effectivement dépassé pour des portées plus grandes.

Une limite non triviale

En général, les champs moyens des théories critiques amènent à des valeurs triviales des exposants critique ($\beta_{CDP}^{MF} = 1$ par exemple). Or ici, la limite de portée infinie atteinte en $\alpha = 0.5$, tout comme le 0-ROM caractérisé par Mari et al. [5], est caractérisée par des exposants non-triviaux. Ces mesures peuvent alors suggérer que cette limite n'est pas un équivalent champ moyen du système.

Cette observation n'est en fait pas si surprenante car certains éléments de la dynamique restent non-triviaux à portée infinie. En effet, même lorsque les interactions actives-passives sont à longue portée, les particules actives effectuent des sauts de taille finie et dans un espace de dimension finie. De plus, les particules passives, elles aussi diffusent dans un espace de dimension finie. La dimension de l'espace étant inférieure à la dimension critique supérieure de CDP $D_c = 4$, il est probable que ces mécanismes éloignent le modèle du champ moyen, même si les interactions médiées sont sous leur forme extrémale. Nous pouvons cependant nous attendre à approcher ce champ moyen en augmentant la dimension du système.

Cette première analyse statique suggère donc que le modèle α -ROM, modélisant les interactions médiées à longue portée, ne peut pas être compris dans le cadre de référence LR-CDP comme c'est le cas du transport à longue portée. Dans la suite de cette section, nous caractérisons la transition par d'autres aspects pour confirmer cette opposition.

3.3.2.2 Exposant dynamique

Une autre possibilité pour caractériser la criticalité et son évolution avec la portée est d'étudier la transition d'un point de vue dynamique. Comme dans le cas du transport à longue portée, proche du point critique, le système relaxe vers l'état stationnaire de manière algébrique :

$$\langle A \rangle(t) \sim t^{-\delta} \quad (3.15)$$

δ définissant alors un exposant critique universel. Il peut être alors intéressant de comprendre comment celui-ci varie avec α dans le cas du α -ROM, par opposition à son évolution observée dans le cadre LR-CDP (voir [sous-section 2.3.2](#)).

Pour aborder cette question, nous reprenons la méthode de redimensionnement utilisée à la [sous-section 2.3.2](#). Pour chaque α , nous déterminons alors l'exposant δ associé en se basant sur les mesures précédentes de β et ϕ_c . Un exemple de redimensionnement obtenu dans le cas du α -ROM est représenté à la [figure 3.7](#) pour $\alpha = 1.5$. Les valeurs mesurées pour chaque portée sont reportées dans le [tableau 3.1](#) et leur évolution est représentée sur la [figure 3.6-\(a\)](#).

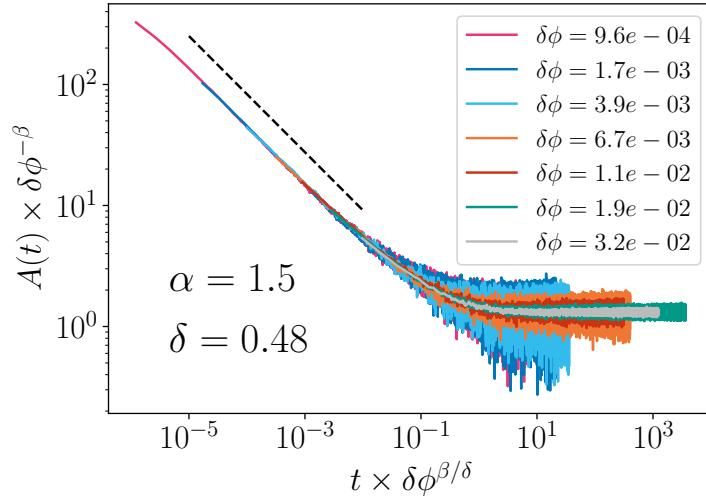


FIGURE 3.7 – Redimensionnement avec la distance au point critique $\delta\phi$ des évolutions de l’activité moyenne $\langle A \rangle$ avec le temps t dans le cadre du α -ROM en 2D pour $\alpha = 1.5$.

Comme pour les exposants β et γ' , l’exposant dynamique δ évolue de sa valeur CDP pour $\alpha \gtrsim 2$ à une valeur de saturation pour $\alpha \lesssim 1 - 0.5$. Cela confirme la zone d’évolution continue précédemment déterminée.

Par ailleurs, dans la limite de longue portée $\alpha = 0.5$, nous mesurons $\delta \approx 0.67$. Cette valeur est alors très différente de celle attendue dans la limite champ moyen de CDP pour laquelle on a $\delta_{\text{CDP}}^{\text{CM}} = 1$. Par ailleurs, cette valeur non triviale conforte le fait que le système n’est pas dans sa limite champ moyen pour une portée infinie. Il est tout à fait envisageable que les sauts à courte portée des particules actives jouent un rôle dans la relaxation vers l’état stationnaire.

Enfin, si le point $\alpha \approx 1.5$ correspondait aux propriétés critiques statiques du champ moyen de CDP avec $\beta = 1$ et $\gamma' = 0$, ses propriétés dynamiques sembleront différer. En effet, pour $\alpha = 1.5$ nous mesurons $\delta \approx 0.49$, qui est notablement inférieur à $\delta_{\text{CDP}}^{\text{MF}} = 1$. Malgré cette légère différence, l’évolution des propriétés de relaxation du système semblent donc souligner de la même façon un désaccord clair entre le comportement du α -ROM et le cadre de référence LR-CDP.

3.3.2.3 Extension à trois dimensions

Afin de confirmer ces désaccords statiques et dynamiques, nous étendons notre analyse à des systèmes en trois dimensions. Nous rappelons que dans ce cas là, la théorie LR-CDP prédit une évolution continue des exposants dans la zone $4.5 < \alpha < 5$. Dans la limite de courte portée $\alpha > 5$, les exposants prennent les valeurs reportées dans le [tableau 3.1](#).

En appliquant la même méthode, nous étudions la criticalité des modèles pour $\alpha \in \{3.5, 3, 2.5, 2, 1.75\}$ ⁵. Les analyses étant coûteuses numériquement et pour des raisons de temps, nous n'étudions pas le cas des très longues portées. Ce faisant, nous obtenons les évolutions de $\langle A \rangle$ et $\langle \delta A^2 \rangle$ en fonction de $\delta\phi$ tracées à la [figure 3.8](#). Les valeurs des exposants critiques sont alors reportées dans le [tableau 3.1](#) et leurs évolutions en fonction de la portée sont tracées sur la [figure 3.6-\(b\)](#). Nous retrouvons alors à très courte portée le comportement critique CDP en trois dimensions dès $\alpha \gtrsim 3$ et non $\alpha > 5$. À moyennes portées $\alpha \lesssim 3$, l'évolution des exposants statiques β et γ' est similaire au cas 2D, avec une augmentation progressive de β conjointement à une diminution progressive de γ' .

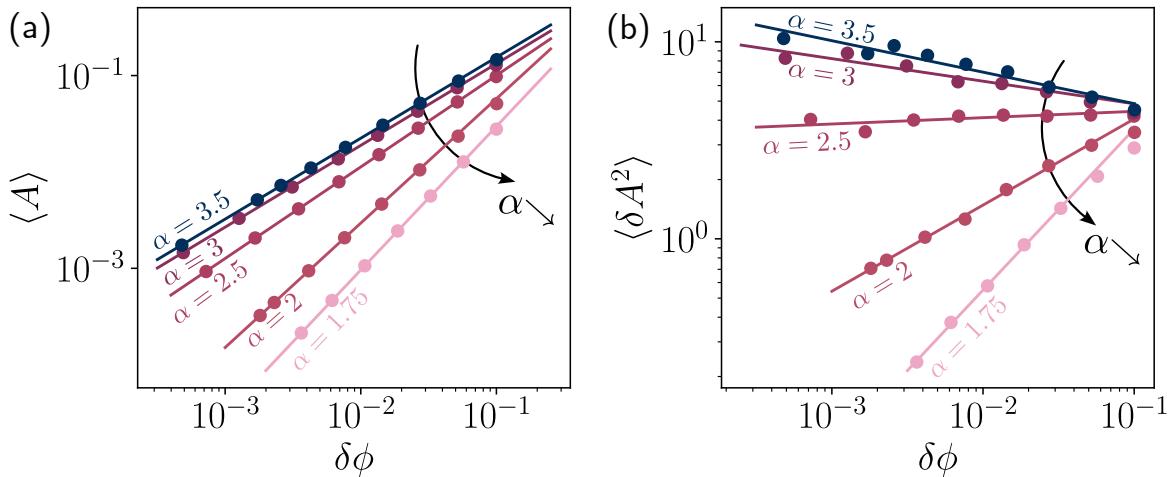


FIGURE 3.8 – (a) Évolution de la valeur moyenne de l'activité dans l'état stationnaire $\langle A \rangle$ en fonction de la distance au point critique $\delta\phi$ à différentes portées dans le α -ROM en 3D. (b) Idem pour la variance $\langle \delta A^2 \rangle$

Par ailleurs, nous retrouvons aussi dans ce cas un point autour duquel la transition change simultanément de convexité et de comportement fluctuant, seulement cette fois localisé en $\alpha \approx 2.5$. Dans cette dimension aussi, la criticalité des modèles α -ROM est donc très différente de celle prévue par le cadre LR-CDP. Pour ce qui est du comportement dynamique, l'exposant δ opère cette fois une évolution quelque peu surprenante. En effet, il reste constant autour de $\delta \approx 0.74$, valeur associée à la classe CDP à courte portée. Dans cette dimension, les interactions médiées ne semblent donc pas affecter la relaxation vers l'état stationnaire.

Finalement, l'étude des modèles α -ROM révèle un comportement critique très différent du cadre de référence LR-CDP en deux ou trois dimensions. Si l'on retrouve une zone d'exposants

5. Pourquoi il fait un truc bizarre comme ça ?

α pour lesquels la criticalité dépend continûment de la portée, celle-ci concerne des valeurs de α bien plus grandes que dans le cadre canonique. De plus, cette zone d'évolution continue n'est pas bornée par le champ moyen associé à celui de CDP, mais par une limite non-triviale en dimension finie, caractérisée par une convexité et des fluctuations évanescentes. Pourtant, l'évolution continue des exposants passe effectivement par un point caractérisé par les mêmes exposants statiques que le champ moyen canonique. Seulement, dans le cas des interactions médiées, celui-ci ne constitue pas un comportement limite. Les interactions médiées constituent donc un mécanisme permettant d'aller au-delà du champ moyen canonique, laissant place à un comportement exotique $\beta > 1$, $\gamma' < 0$ sur toute une gamme de portées physiquement envisageables.

3.3.3 Hyperuniformité

Une autre manière de comparer le modèle α -ROM avec le cadre LR-CDP est de s'intéresser aux propriétés de structure de la transition. En effet, dans le chapitre 1, nous avons vu que proche du point critique, les modèles dans la classe CDP exhibent un phénomène d'hyperuniformité. Dans le chapitre 2, nous avons vu que dans le cadre LR-CDP, la propriété d'hyperuniformité est modifiée par la présence de transport à longue portée. Notamment, l'exposant α_{HU} caractérisant l'évolution du facteur de structure selon $S(\mathbf{q}) \sim q^{\alpha_{HU}}$ évolue continûment de $\alpha_{HU}^{CDP, 2D} \approx 0.5$ à $\alpha_{HU}^{CDP, CM} = 0$ dans la zone $3 < \alpha < 4$ en 2D. L'hyperuniformité est donc perdue à longue portée dans ce cas. Les exposants critiques β , γ' et δ suivant une évolution différente du cadre LR-CDP dans le cas d'interactions médiées, il est naturel de se demander si l'en va de même pour l'exposant d'hyperuniformité. En d'autres termes, l'hyperuniformité est-elle aussi perdue dans le cas d'interactions médiées à longue portée ?

En réalité, cette question a déjà été abordée par Mari et al. [5] lors de l'étude du 0-ROM. Dans ce cas de portée infinie, les auteurs ont montré que l'hyperuniformité est effectivement perdue à grande échelle. La question restante est alors de savoir comment s'opère ce changement de propriété avec l'évolution de la portée des interactions. Dans cette sous-section, nous nous basons sur des observations qualitatives pour fournir un début de réponse à cette question.

3.3.3.1 Méthode

Pour ce faire, nous utilisons, en plus de la méthode de box-counting présentée à la section 2.4, une mesure du facteur de structure $S(\mathbf{q})$. Afin de rendre son calcul efficace, nous définissons un champ de densité $\rho(\mathbf{r}_i)$ sur le réseau discret de pas D_p , utilisé pour calculer les interactions actives-passives. Dans chaque case située autour de \mathbf{r}_i , $\rho(\mathbf{r}_i)$ prend alors une valeur entière correspondant aux nombres de particules présentes dans cette case. Ce faisant, nous pouvons donc utiliser les algorithmes de FFT pour calculer $\hat{\rho}(\mathbf{q}_i)$ dans l'espace réciproque discret et on a alors directement :

$$S(\mathbf{q}_i) = |\hat{\rho}(\mathbf{q}_i)|^2 \quad (3.16)$$

Pour évaluer l'évolution de $S(\mathbf{q})$ avec la norme du vecteur d'onde q et donc son évolution à petits q , nous réalisons une moyenne isotrope dans l'espace réciproque. En pratique, chaque point $S(q)$ est calculé par une moyenne sur l'anneau d'épaisseur $\frac{2\pi}{L}$ associé dans l'espace réciproque.

Afin de pouvoir comparer les répartitions de densité pour les différentes portées α , nous nous plaçons à une distance fixée du point critique $\delta\phi \approx 1 \times 10^{-2}$. Ce critère est en effet essentiel pour la comparaison puisque, comme nous l'avons vu au [chapitre 2](#), les propriétés d'hyperuniformité dépendent de la distance au point critique. Notamment, la propriété d'hyperuniformité est perdue à grande échelle pour des distances $\delta\phi$ trop grandes. Cette distance fixée est alors choisie de telle façon que les simulations associées à chaque portée puissent se dérouler sur **des temps raisonnables** (< 24 h). Afin d'obtenir une meilleure statistique, nous moyennons ces mesures sur quelques dizaines de configurations indépendantes dans l'état stationnaire. Les résultats obtenus sont alors représentés sur la [figure 3.9-\(a\)](#). En parallèle, les mesures de type box-counting sont effectuées et les résultats associés sont représentés sur la [figure 3.9-\(b\)](#).

3.3.3.2 Résultats

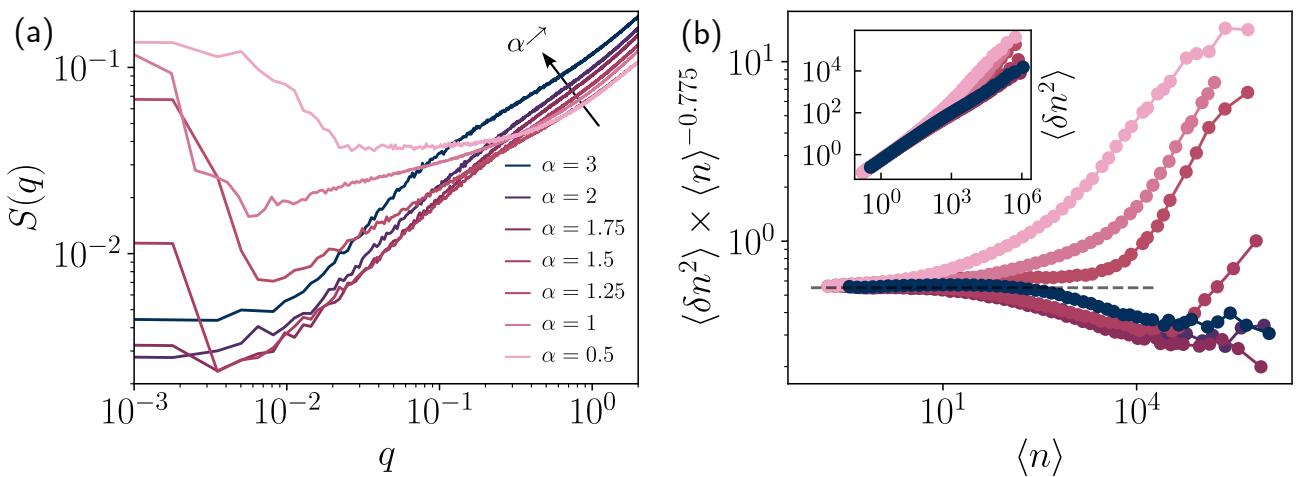


FIGURE 3.9 – Hyperuniformité dans le modèle α -ROM en 2D à $\delta\phi \approx 1 \times 10^{-2}$. (a) Facteur de structure isotrope. (b) Méthode box-counting (voir [section 2.4](#)) compensée par le comportement mesuré à courte portée $\alpha = 3$. En encart, les données brutes.

Dans la limite de longue portée $\alpha = 0.5$, nous retrouvons les résultats de Mari et al. [5] avec une perte du caractère évanescence de $S(\mathbf{q})$ à petits q . Dans la limite de courte portée $\alpha = 3$, l'allure globale de la courbe présente bien une diminution de $S(\mathbf{q})$ à petits q bien que celle-ci ne semble pas suivre une loi de puissance évidente et sature à très petits \mathbf{q} . Cette saturation peut notamment s'expliquer par la distance finie au point critique examinée. L'observation de cette évanescence marque alors une forte différence avec le cas LR-CDP. En effet, dans ce cas, l'hyperuniformité est déjà complètement perdue à cette portée. Entre ces deux extrémités, les portées intermédiaires montrent une évolution intéressante. Si pour $\alpha > 1.5$ les facteurs de structure sont difficilement distinguables, pour $\alpha \leq 1.5$ leur évolution montrent d'abord décroissance plus faible à des valeurs de q intermédiaires puis une augmentation à très petits q . Cette évolution suggère alors une perte de l'hyperuniformité à grande échelle dans le régime critique.

On pourrait objecter que la différence de comportement en fonction de α est due à la distance finie du point critique choisie. En effet, à distance égale du point critique, les transitions de

longue portée (petits α) correspondent à des activités bien plus faibles (β plus grands). Ainsi, cette analyse pourrait avoir tendance à sous-estimer, si présentes, les propriétés d'hyperuniformité des transitions à petit α . Or ici, malgré ce choix, nous observons clairement une perte des propriétés hyperuniformes conjointement à l'augmentation de la portée. Cette observation à distance fixée du point critique semble donc pouvoir être conclusive sur le fait d'une dégradation de l'hyperuniformité pour $\alpha < 1.5$, puisque ce choix de méthode "joue contre" la zone complémentaire $\alpha > 1.5$. Néanmoins, une étude plus poussée serait nécessaire pour étudier ce changement plus quantitativement, notamment en s'approchant davantage du point critique.

Cette tendance est toutefois moins évidente dans le cas de la méthode de box-counting. Mais en compensant l'évolution de $\langle \delta n^2 \rangle$ avec l'évolution mesurée à très courte portée $\langle \delta n^2 \rangle \sim \langle n \rangle^{0.775}$ sur la figure 3.9-(b), les évolutions pour $\alpha < 1.5$ semblent néanmoins aussi contraster avec celles de plus courtes portées $\alpha > 1.5$, révélant un comportement localement "moins hyperuniforme" (i.e. un exposant effectif local $\alpha_{\text{HU}}^{\text{eff}}$ plus grand).

Finalement, cette analyse qualitative des propriétés d'hyperuniformité du α -ROM semble montrer un changement autour de $\alpha = 1.5$. Pour $\alpha < 1.5$, les observations suggèrent une hyperuniformité perdue à grande échelle. De la même manière que le transport d'activité à longue portée, les interactions médiées effacent donc le caractère hyperuniforme de la transition. Toutefois, la zone d'effet $\alpha < 1.5$ qualitativement identifiable ici est à nouveau très différente de celle prévue par le cadre de référence LR-CDP $\alpha < 3$. Un étude plus approfondie est cependant nécessaire pour confirmer ces premières observations.

3.3.4 Retour sur les cas physiques

Au début de ce chapitre, nous avions identifié deux cas de portée pertinents dans le cadre de la transition de réversibilité des suspensions cisaillées cycliquement. Le premier, similaire au cas de l'expérience de Pine et. al [1], a lieu dans un milieu 3D avec des conditions aux bords supposées négligeables. Dans notre modélisation stroboscopique cela revient à $\alpha = 3$ dans le α -ROM en 3D. Les résultats présentés au cours de cette section placent ce cas au cœur de la zone d'évolution continue des exposants avec $\beta > 1$ et $\gamma' < 0$. La transition attendue est donc convexe.

Le second cas pertinent est le cas d'un cisaillement confiné entre deux plaques rigides, pour lequel on a $\alpha = 3$ dans un milieu quasi-2D. Notre étude du α -ROM en 2D place alors cette situation dans la limite de courte portée, dans laquelle la transition adopte le comportement de la classe CDP, soit concave, avec des fluctuations qui divergent et des propriétés hyperuniformes. Ainsi, notre analyse indique que l'influence des interactions médiées à longue portée dépend fortement du système réel étudié, celles-ci n'ayant un impact sur le comportement critique que dans certains cas.

Finalement, l'analyse des propriétés statiques (sous-sous-section 3.3.2.1), dynamiques (sous-sous-section 3.3.2.2) et de structure (sous-section 3.3.3) des transitions du α -ROM montre que les interactions médiées dans ce système ne peuvent pas être comprises dans le cadre de référence LR-CDP. Notamment, une large gamme de portées en 2D et en 3D montrent un comportement convexe de la transition et évanescents des fluctuations. Ces observations n'étant

pas rationalisables dans le cas canonique, il semble que la diffusion des particules passives dans le modèle constitue un mécanisme dont l'appréhension nécessite un nouveau cadre théorique.

3.4 Interprétation

Dans le cadre de la transition du ROM appartenant à la classe CDP, la dynamique du système est contrôlée par les sauts à courte portée des particules actives. Dans la généralisation au transport à longue portée décrite par le cadre LR-CDP, la dynamique est similaire, déterminée par le déplacement fini des particules après leur activation. Visiblement ce mécanisme, ne permet pas de rendre compte de la criticalité du α -ROM, laissant sa spécificité aux interactions médiées. Celles-ci introduisent en effet un tout nouveau mécanisme. Sous influence des particules actives, les particules passives opèrent de petits déplacements, diffusant alors vers le contact d'autres particules. Les particules passives représentent donc une nouvelle source de création d'activité, a priori très différente de celle représentée par les particules actives. Nous postulons que c'est ce mécanisme de diffusion vers le contact qui permet de rendre compte de la convexité de cette transition si spéciale.

Dans cette section, nous proposons un modèle champ moyen simple permettant de rendre compte de la convexité de la transition due à la diffusion des particules passives. Nous discuterons ensuite dans quelle mesure ce modèle peut nous aider à interpréter les résultats obtenus en dimensions finies.

3.4.1 Modèle de μ -Hébraud-Lequeux

3.4.1.1 Approximation gaussienne

Présentation du modèle

L'idée de ce modèle est de se concentrer sur une approche statistique, en considérant la dynamique effective d'une particule unique, représentée à la figure 3.10. Dans cette optique de champ moyen, toutes les corrélations de position et d'activité dans le système sont négligées. L'impact de l'environnement est alors pris en compte en considérant qu'il forme, statistiquement, une cage effective de rayon R dans laquelle la particule initialement passive est piégée. En supposant une répartition uniforme des particules dans le système, on a alors $R \sim \phi^{-1/D}$. En centrant cette zone de piégeage sur l'origine du repère, la particule cible positionnée en \mathbf{r} peut alors prendre deux états : passive si elle n'entre pas en contact avec d'autres particules ($|\mathbf{r}| < R$), et active si elle sort de la cage effective ($|\mathbf{r}| > R$).

Lorsque la particule est passive, celle-ci est soumise à un bruit interne dont l'intensité est proportionnelle au nombre de particules actives dans l'environnement (i.e. l'activité dans le système). Dans cette vision statistique du problème où toutes les particules ont une dynamique équivalente, cette intensité du bruit est donc proportionnelle à la probabilité (notée $\Gamma\tau$ dans la suite) pour les particules d'être actives. De plus dans le cadre champ moyen, nous considérons ce bruit comme gaussien. D'autre part, lorsque la particule est active, elle effectue, sur un temps typique τ , un saut suffisamment grand pour la replacer à l'origine d'une nouvelle cage effective. Nous retrouvons donc les mécanismes principaux présents dans le α -ROM. Nous

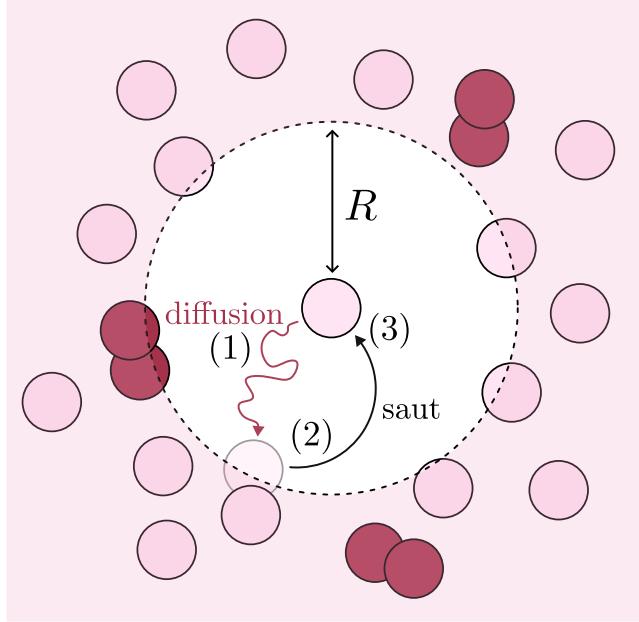


FIGURE 3.10 – Représentation champ moyen de la dynamique du α -ROM.

pouvons modéliser l'évolution de la distribution de probabilité $P(\mathbf{r})$ de la position \mathbf{r} de la particule par les équations suivantes :

$$\partial_t P(\mathbf{r}, t) = \alpha \Gamma(t) \Delta P(\mathbf{r}, t) - \frac{1}{\tau} \Theta(|\mathbf{r}| > R) P(\mathbf{r}, t) + \delta(\mathbf{r}) \Gamma(t), \quad \Gamma(t) = \frac{1}{\tau} \int_{|\mathbf{r}| > R} d\mathbf{r} P(\mathbf{r}, t) \quad (3.17)$$

avec α un paramètre réel. Le premier terme du membre de droite représente la diffusion de la particule ((1) sur la figure 3.10), le second le processus de saut actif ((2) sur la figure 3.10) et le troisième l'apparition dans une nouvelle cage ((3) sur la figure 3.10). Ce modèle a alors pour paramètre d'ordre $\Gamma(t)$, directement associé à l'activité dans le système $A(t)$ et comme paramètre de contrôle R , directement associé à la densité de particules ϕ . Cette forme ressemble alors fortement au modèle de Hébraud-Lequeux [15], dont on discutera au chapitre suivant.

Résolution en 2D

Afin de montrer que ce modèle champ moyen permet effectivement de retrouver une transition convexe par ce mécanisme de diffusion, nous le résolvons en deux dimensions pour déterminer la relation $\Gamma \sim (R - R_c)^\beta$ à petits Γ . Pour ce faire, nous commençons par adimensionner ces équations par les transformations :

$$\tilde{t} = \frac{t}{\tau}, \quad \tilde{\mathbf{r}} = \frac{\mathbf{r}}{R} \quad (3.18)$$

En nous plaçant de plus dans l'état stationnaire, nous obtenons alors :

$$0 = \tilde{\alpha} \tilde{\Gamma} \Delta P(\tilde{\mathbf{r}}) - \Theta(|\tilde{\mathbf{r}}| > 1) P(\tilde{\mathbf{r}}) + \delta(\tilde{\mathbf{r}}) \tilde{\Gamma}, \quad \tilde{\Gamma} = \int_{|\tilde{\mathbf{r}}| > 1} d\tilde{\mathbf{r}} P(\tilde{\mathbf{r}}), \quad \tilde{\alpha} = \frac{\alpha}{R^2} \quad (3.19)$$

Dans la suite de la résolution, nous omettrons les $\tilde{\cdot}$ pour alléger les notations. Le paramètre de contrôle adimensionnel est alors α .

Nous résolvons ensuite cette équation par morceaux dans les domaines disjoints $r < 1$ (zone I) et $r > 1$ (zone II). Dans la zone I, la résolution donne :

$$P_I(\mathbf{r}) = c_1 \ln(r) + c_2, \quad (c_1, c_2) \in \mathbb{R}^2 \quad (3.20)$$

et dans la zone II :

$$P_{II}(\mathbf{r}) = c_3 K_0\left(\frac{r}{\sqrt{\alpha\Gamma}}\right), \quad c_3 \in \mathbb{R} \quad (3.21)$$

avec K_0 la fonction de Bessel modifiée de seconde espèce d'ordre 0 [10]. La distribution $P(\mathbf{r})$ étant continue et de dérivée continue en $r = 1$, on obtient finalement :

$$P(\mathbf{r}) = \begin{cases} c_3 \left(K_0\left(\frac{1}{\sqrt{\alpha\Gamma}}\right) - K_1\left(\frac{1}{\sqrt{\alpha\Gamma}}\right) \frac{\ln(r)}{\sqrt{\alpha\Gamma}} \right), & r < 1 \\ c_3 K_0\left(\frac{r}{\sqrt{\alpha\Gamma}}\right), & r > 1 \end{cases} \quad (3.22)$$

La condition de normalisation de la distribution permet alors de déterminer la constante c_3 . En effet on a :

$$I_I = \int_0^1 dr 2\pi r P(\mathbf{r}) = \pi c_3 K_0\left(\frac{1}{\sqrt{\alpha\Gamma}}\right) + \frac{\pi c_3}{2\sqrt{\alpha\Gamma}} K_1\left(\frac{1}{\sqrt{\alpha\Gamma}}\right) \quad (3.23)$$

$$I_{II} = \int_0^\infty dr 2\pi r P(\mathbf{r}) = 2\pi c_3 \sqrt{\alpha\Gamma} K_1\left(\frac{1}{\sqrt{\alpha\Gamma}}\right) \quad (3.24)$$

en utilisant la propriété $(z^\nu K_\nu(z))' = -z^\nu K_{\nu-1}(z)$. Nous obtenons alors :

$$\frac{1}{c_3} = \pi K_0\left(\frac{1}{\sqrt{\alpha\Gamma}}\right) + \frac{\pi}{2\sqrt{\alpha\Gamma}} K_1\left(\frac{1}{\sqrt{\alpha\Gamma}}\right) + 2\pi \sqrt{\alpha\Gamma} K_1\left(\frac{1}{\sqrt{\alpha\Gamma}}\right) \quad (3.25)$$

La valeur de Γ dans l'état stationnaire est alors donnée par la relation d'auto-cohérence :

$$\Gamma = \frac{2\pi \sqrt{\alpha\Gamma} K_1\left(\frac{1}{\sqrt{\alpha\Gamma}}\right)}{\pi K_0\left(\frac{1}{\sqrt{\alpha\Gamma}}\right) + \frac{\pi}{2\sqrt{\alpha\Gamma}} K_1\left(\frac{1}{\sqrt{\alpha\Gamma}}\right) + 2\pi \sqrt{\alpha\Gamma} K_1\left(\frac{1}{\sqrt{\alpha\Gamma}}\right)} \quad (3.26)$$

Étant intéressés par le comportement asymptotique à petits Γ , nous développons les fonctions de Bessel asymptotiquement selon :

$$K_\nu(x) \sim \sqrt{\frac{\pi}{2x}} e^{-x} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k(\nu)}{x^k}, \quad a_k(\nu) = \frac{(4\nu^2 - 1^2)(4\nu^2 - 3^2)\dots(4\nu^2 - (2k-1)^2)}{k! 8^k} \quad (3.27)$$

et on a donc au premier ordre non-trivial⁶ :

$$\begin{cases} \sqrt{\Gamma} \sim \frac{8}{\sqrt{\alpha}} \frac{4\alpha - 1}{19 - 12\alpha}, & \alpha > \frac{1}{4} \\ \sqrt{\Gamma} = 0, & \text{sinon} \end{cases} \quad (3.28)$$

6. à vérifier

Ainsi, ce modèle rend bien compte d'une transition de phase absorbante avec une phase absorbée $\Gamma = 0$ lorsque la cage effective est suffisamment grande $R > R_c \Rightarrow \alpha < \alpha_c = \frac{1}{4}$, et une phase active $\Gamma > 0$ lorsque celle-ci est suffisamment petite $R < R_c \Rightarrow \alpha > \alpha_c$. Étant donné que R se comporte comme l'inverse de la densité de particules, le comportement qualitatif de transition du α -ROM est bien retrouvé. De plus, dans la limite de faible activité on a :

$$\Gamma \sim (\alpha - \alpha_c)^2 \quad (3.29)$$

soit un exposant critique $\beta = 2$. Ainsi, ce modèle simple permet effectivement de retrouver la convexité de la transition. Cela conforte alors notre hypothèse selon laquelle le mécanisme de diffusion des particules passives vers le contact est le responsable de cette convexité.

Ce cadre de modélisation semble donc être plus adéquat qu'une approche de type champ moyen à la CDP pour comprendre notre système d'étude. Toutefois, cette approche reste du côté champ moyen, négligeant tout type de corrélation. Or, comme nous l'avons vu à la section précédente, même dans la limite de portée infinie notre système n'est pas vraiment dans un cadre purement champ moyen. Il est alors intéressant de voir si ces écarts peuvent être compris, au moins partiellement, dans une généralisation de ce modèle afin de dresser un cadre théorique plus large dans lequel intégrer les modèles α -ROM (et donc le 0-ROM).

3.4.1.2 Extension non-gaussienne

Interactions à longue portée et distributions de bruit interne

Le modèle α -ROM peut s'écartier du cadre champ moyen par plusieurs aspects. L'un deux vient du bruit interne généré par les interactions actives-passives. En effet, il n'est pas évident que ces interactions à longue portée puissent être modélisées par un bruit gaussien dans la dynamique effective. Considérons le cas d'un système infini de D dimensions dans lequel une unique particule est active. Si les interactions médiées décroissent comme $1/r^\alpha$ alors d'un point de vue probabiliste, une particule passive prise au hasard se déplacera, à cause de cette particule active, d'un saut de taille typique Δ_1 distribué selon :

$$P_1(\Delta_1) \sim \int d\mathbf{r} \delta(\mathcal{G}(\mathbf{r}) - \Delta_1) \sim \frac{1}{\Delta_1^{1+\mu}}, \quad \mu = \frac{D}{\alpha} \quad (3.30)$$

La fonction caractéristique associée à cette distribution de bruit sera donc :

$$\hat{P}_1(k) \sim \exp(-|k|^\mu) \quad (3.31)$$

Ainsi, pour $\mu = 2$, nous retrouvons la fonction caractéristique d'une gaussienne. Pour considérer le cas réel de plusieurs particules actives dans le système, nous nous intéressons à la somme des sauts induits par chacune de ces n particules actives : $\Delta = \sum_i^n \Delta_i$. Si l'on fait l'hypothèse forte que l'activité est totalement décorrélée dans le système alors dans la limite de faible activité on a :

$$P\left(\Delta = \sum_i^n \Delta_i\right) = P_1(\Delta_1) * P_2(\Delta_2) * \dots * P_n(\Delta_n) \quad (3.32)$$

Dans la limite de taille infinie, pour une activité finie, on a $n \rightarrow \infty$. La distribution de probabilité adéquate pour décrire le saut des particules passives devient alors la limite du produit de

convolution infini. Pour $\mu \geq 2$, les distributions individuelles sont de moyenne et de variance finies. D'après le théorème central limite, cette limite est donc une gaussienne (citer un livre de proba). Le bruit interne est donc bien modélisé par le terme en $\Delta P(\mathbf{r}, t)$ dans l'[équation 3.17](#). Pour $\mu < 2$ cependant, les distributions individuelles $P_i(\Delta_i)$ ne sont plus de variance finie et donc le théorème central limite ne s'applique plus. Une modélisation de cette limite de convolution correspond alors plutôt à une loi stable S_μ , définie par la fonction caractéristique (citer un livre de proba) :

$$\hat{P}(k) \sim \exp(-|k|^\mu) \quad (3.33)$$

Cela correspond à une distribution de saut décroissant comme $1/\Delta^{(1+\mu)}$.

L'approximation gaussienne n'est donc adéquate que pour $\mu \geq 2$ soit $\alpha \leq D/2$. Afin de prendre en compte cette forme différente du bruit interne pour des portées d'interaction $\alpha > D/2$, nous généralisons le modèle précédent en remplaçant le Laplacien Δ par son équivalent fractionnaire $\Delta^{\mu/2}$ (citer un livre de fractional calculus) :

$$\partial_t P(\mathbf{r}, t) = \alpha \Gamma(t) \Delta^{\mu/2} P(\mathbf{r}, t) - \frac{1}{\tau} \Theta(|\mathbf{r}| > R) P(\mathbf{r}, t) + \delta(\mathbf{r}) \Gamma(t), \quad \Gamma(t) = \frac{1}{\tau} \int_{|\mathbf{r}| > R} d\mathbf{r} P(\mathbf{r}, t) \quad (3.34)$$

L'opérateur laplacien fractionnaire étant défini dans l'espace de Fourier selon :

$$\mathcal{F}[(-\Delta)^{\mu/2} f] = |q|^\mu \mathcal{F}[f] \quad (3.35)$$

par analogie avec l'opérateur Laplacien.

Nous nommons ce modèle généralisé, le modèle μ -Hébraud-Lequeux. Il est alors intéressant de voir comment cette généralisation permet de modifier l'exposant β associé en fonction du paramètre μ , afin d'interpréter la dépendance en α observée dans les simulations numériques.

Un modèle pas si nouveau

Remarque : Mettre un schéma de $P(r)$ pour montrer ce que représente Γ graphiquement et pourquoi pas illustrer θ aussi. Sinon c'est peut-être un peu rapide.

Ce modèle que nous proposons ressemble en réalité fortement à un modèle déjà étudié dans la littérature. En effet, motivé dans le cadre de la transition vers l'écoulement, Lin. et al. [16, 17] ont étudié une forme très similaire de ce modèle en 1D et avec un paramètre supplémentaire de forçage $\dot{\gamma}$. En l'adaptant à notre formalisme, ce modèle prend la forme suivante :

$$\begin{aligned} \partial_t P(\mathbf{r}, t) &= -\dot{\gamma} \partial_r P(r, t) + \alpha \Gamma(t) \partial^\mu P(r, t) - \frac{1}{\tau} \Theta(|r| > R) P(r, t) + \delta(r) \Gamma(t) \\ \Gamma(t) &= \frac{1}{\tau} \int_{|r| > R} dr P(\mathbf{r}, t), \quad r \in [-\infty, +\infty] \end{aligned} \quad (3.36)$$

avec ∂^μ l'opérateur de dérivée fractionnaire d'ordre μ , défini de la même façon que le laplacien fractionnaire en une dimension. Dans notre cas, ce terme de forçage supplémentaire correspondrait à un mécanisme poussant la particule hors de la cage effective. En ce sens, le modèle

μ -Hébraud-Lequeux représente une version simplifiée du modèle étudié par Lin et al.. Le paramètre de contrôle associé à cette transition n'est alors plus $\tilde{\alpha} = \alpha/R^D$ mais la position moyenne $\langle r \rangle$ de la particule. En effet, le forçage brisant la symétrie du problème, celle-ci n'est plus nulle pour $\dot{\gamma} > 0$. Toutefois, on retrouve une phénoménologie équivalente :

$$\Gamma \sim (\langle r \rangle - \langle r \rangle_c)^\beta \quad (3.37)$$

Nous exposons alors deux résultats principaux issus de ces travaux afin de nous appuyer dessus par la suite.

Dans la limite stationnaire et quasistatique, i.e. d'activité nulle ($P(r > R) = 0$), les auteurs ont montré que la distribution $P(r)$ régie par l'équation 3.36 montrait un comportement sans échelle proche du bord $r = R$ [16] :

$$P(R - r) \sim (R - r)^\theta \quad (3.38)$$

avec θ l'exposant de pseudo-gap. Dans le cas où le système n'est pas forcé, il a été montré que cet exposant dépend de l'exposant de bruit μ selon :

$$\theta = \begin{cases} \frac{\mu}{2}, & \mu \leq 2 \\ 1, & \mu \geq 2 \end{cases} \quad (3.39)$$

L'exposant μ a donc dans ce cas une influence sur le comportement d'échelle de $P(r)$ dans la limite non-gaussienne $\mu \leq 2$. De plus, dans le cas du système forcé, dans la limite de faible activité, il a été montré que [17] :

$$\beta = \begin{cases} 2, & \mu > 2 \\ \mu, & 1 < \mu < 2 \\ 1, & \mu < 1 \end{cases} \quad (3.40)$$



et donc que le comportement critique du système dépend aussi de l'exposant de bruit dans la limite non-gaussienne. Pour $\mu > 1$, la dynamique du système est entièrement dominé par le bruit interne et non le forçage [17]. Ce modèle permet donc de qualifier la convexité de la transition en fonction du bruit interne associé. Il diffère du modèle μ -Hébraud-Lequeux par deux aspects principaux : il est monodimensionnel et il incorpore un terme de forçage qui modifie le paramètre de contrôle de la transition. Toutefois les mécanismes à l'œuvre sont sensiblement les mêmes, surtout pour $\mu > 1$ où le forçage est dominé par le bruit interne. On peut donc supposer que les deux modèles partagent la même criticalité. Ainsi, une hypothèse naturelle est que les résultats de l'équation 3.39 et de l'équation 3.40 sont conservés dans le cadre du modèle μ -Hébraud-Lequeux.

Résolution numérique

Afin de confirmer que le modèle μ -Hébraud-Lequeux suit bien ce même comportement critique, nous résolvons l'équation 3.34 par une méthode numérique. Celle-ci, détaillée dans la sous-section 6.1.3, consiste à interpréter cette équation comme une équation de Fokker-Planck et de la résoudre statistiquement par son équivalent en équation de Langevin. Il est alors possible de déterminer l'évolution de Γ avec R et d'en déduire l'exposant critique β associé. La

méthode de détermination suit alors le même principe que celle dans le cas du α -ROM. Les résultats obtenus en 1D et en 2D sont reportés sur la figure 3.11 où nous avons aussi représenté le comportement du modèle de Lin. et al [17].

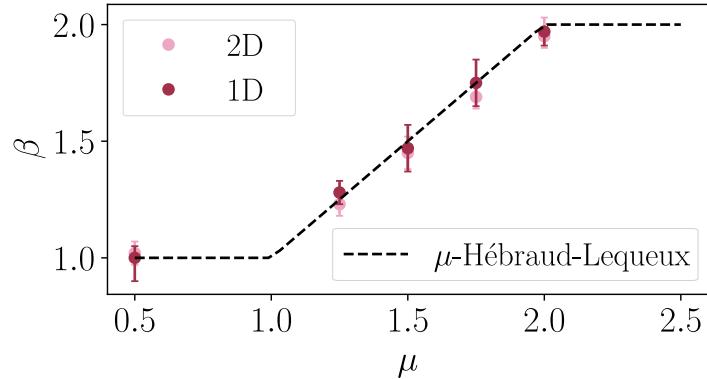


FIGURE 3.11 – Évolution de l'exposant β mesuré par la résolution numérique de l'équation 3.34 en 1D et en 2D (voir sous-section 6.1.3). En pointillés noirs, le comportement du modèle de Lin et al. [17]

La détermination des exposants n'est pas aisée car elle est coûteuse numériquement, laissant ainsi place à de larges incertitudes de mesure. Toutefois, que ce soit en une ou deux dimensions, les points mesurés montrent un plutôt bon accord avec l'attendu théorique. Les points en 1D semblent ainsi montrer que l'ajout du terme de forçage ne modifie pas la criticalité de la transition, tandis que les points en 2D suggèrent que cette théorie s'étend trivialement aux dimensions supérieures.

Pour la suite de notre analyse nous considérerons donc que le modèle μ -Hébraud-Lequeux suit effectivement une criticalité dictée par l'équation 3.39 et l'équation 3.40. En d'autres termes, dans une gamme d'exposants $1 < \mu < 2$, la criticalité du modèle dépend continûment de μ . Pour $\mu < 1$, le modèle atteint une limite de grands sauts pour laquelle on a trivialement $\beta = 1$. Pour $\mu > 2$, le modèle atteint une limite diffusive dans laquelle nous avons montré que $\beta = 2$. La forme propre du bruit permet donc d'induire des transitions de convexité différentes. Si ce résultat est en accord qualitatif avec le comportement du α -ROM, qu'en est-il quantitativement ?

3.4.2 Interprétation mean-field de la transition

3.4.2.1 Comparaison avec les simulations

Dans l'hypothèse que le bruit interne total est assimilable au bruit interne généré par une unique particule, l'exposant de bruit μ , que nous notons alors μ_1 , est relié à l'exposant de portée de l'interaction α selon :

$$\mu_1 = \frac{D}{\alpha} \quad (3.41)$$

Dans ce cas là, il est possible de comparer directement les prédictions du modèle μ -Hébraud-Lequeux avec l'évolution de la criticalité du α -ROM en fonction de l'exposant de portée α . Sur la figure 3.12-(a), nous représentons les évolutions de l'exposant β en 2D et 3D pour le α -ROM et les comparons avec l'attendu théorique de champ moyen du modèle μ -Hébraud-Lequeux.

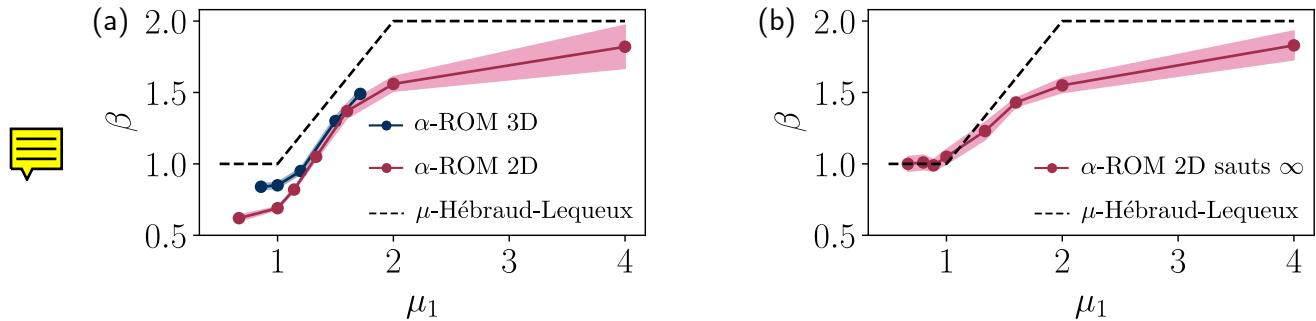


FIGURE 3.12 – Évolution de l'exposant β dans le α -ROM en 2D et 3D (a) et avec sauts infinis en 2D (b) avec l'approximation naïve du bruit $\mu_1 = D/\alpha$.

Pour le cas 2D, l'accord quantitatif est très limité. Nous retrouvons un fort désaccord à courte portée (et donc petits μ_1). Ce n'est toutefois pas surprenant car dans ce cas le α -ROM présente le comportement critique non trivial de CDP dû à la dynamique de saut des particules actives. Or dans le modèle μ -Hébraud-Lequeux, l'optique **champ moyen** gomme totalement cet aspect. Le désaccord se réduit alors à mesure que la portée et μ_1 augmentent bien que la convexité du α -ROM reste toujours plus faible que celle prédictée par la théorie champ moyen. Cette observation est en accord avec le fait, mentionné précédemment, que le α -ROM n'est en fait pas champ moyen dans sa limite de portée infinie et que donc $\beta < 2$ pour $\alpha \rightarrow 0$.

Toutefois, si l'accord à μ_1 donné est peu satisfaisant, l'évolution globale de la courbe l'est beaucoup plus. En effet, le bruit interne lié aux interactions médiées démarre effectivement son impact sur la criticalité à $\mu_1 = 1$, valeur à partir de laquelle β commence à dépendre de μ . En $D = 2$, cela correspond à $\alpha = 2$, comme nous l'avions remarqué à la sous-sous-section 3.3.2.1. Pour la saturation à très longue portée, celle-ci semble intervenir à des plus grandes portées que $\mu_1 = 2$, correspondant à $\alpha = 1$ en 2D. L'accord de cette borne est donc un peu moins satisfaisant. Finalement, ce modèle champ moyen semble donc être capable d'effectuer une prédiction raisonnable sur la dynamique en dimension finie quant à la zone d'évolution des exposants critiques.

La comparaison avec les simulations 3D est alors similaire quoique marquant un accord quantitatif plus fort. Bien que surestimées par la théorie, les valeurs de β à μ_1 donné sont en meilleur accord. À petits μ_1 , cela vient en partie du fait que la dynamique de sauts des particules actives en 3D est elle-même plus proche de celle du champ moyen. Toutefois, le légèrement meilleur accord à des portées intermédiaires montre que la dimension permet aussi de rapprocher la dynamique des particules passives de leur dynamique champ moyen. Enfin, nous retrouvons dans ce cas la borne $\mu_1 = 1$ à laquelle les interactions médiées démarrent leur influence sur le comportement critique. En 3D, cette borne correspond à $\alpha = 3$.

Le modèle μ -Hébraud-Lequeux développé précédemment permet donc de rationaliser la zone d'exposants α dans laquelle les exposants critiques évoluent continûment, et ce en dimension arbitraire. Toutefois, l'accord quantitatif à une portée donnée reste assez limité. Ceci n'est cependant pas surprenant, puisque nous essayons ici de modéliser une dynamique complexe en dimension finie par une dynamique **triviale** de champ moyen. Notamment, les corrélations induites par le déplacement des particules actives jouent probablement un rôle prépondérant dans ce désaccord.

3.4.2.2 Destruction des corrélations

Modèle à sauts infinis

Afin de comprendre si les corrélations d'activité sont effectivement la source du désaccord entre le modèle théorique et les simulations, nous proposons d'étudier un modèle numérique analogue au α -ROM qui les ferait disparaître. Pour ce faire, nous considérons exactement la même dynamique à l'exception des particules actives qui ne font plus des sauts finis mais sont redistribuées aléatoirement dans l'espace. Cela équivaut à faire des sauts de taille infinie. De ce fait, les corrélations spatiales d'activité sont totalement détruites.

Nous menons alors la même analyse que dans le cas du α -ROM pour déterminer l'exposant β pour différentes portées d'interaction α . Nous nous concentrons sur les portées $\alpha \in \{0.5, 1, 1.25, 1.5, 2, 2.5, 3\}$. Nous représentons alors de la même manière l'évolution de β avec μ_1 sur la [figure 3.12-\(b\)](#). Comme on peut le remarquer, l'accord est bien meilleur à courtes portées. Ceci n'est pas surprenant puisque dans le cas de sauts infinis nous avons bien le cas trivial $\beta = 1$ sans interactions médiées. La zone d'évolution continue des exposants reste alors inchangée et relativement compatible avec la théorie. Cependant, à mesure que la portée augmente, un écart se creuse entre la théorie et les simulations. Notamment, dans la limite de portée infinie, l'exposant β mesuré est toujours sensiblement inférieur à 2. Pour les portées intermédiaires, la théorie surestime encore une fois l'exposant β à chaque portée μ_1 .

Si les corrélations spatiales d'activité permettent effectivement d'expliquer une partie du désaccord, celles-ci ne suffisent donc pas à rendre compte de l'écart en théorie et simulations numériques. C'est donc la dynamique des particules passives qui semble faire défaut au modèle champ moyen. En effet, dans ce modèle à sauts infinis, les particules passives diffusent toujours dans un espace de dimension finie.

Approche du champ moyen par les grandes dimensions

Si le modèle μ -Hébraud-Lequeux est le bon champ moyen associé à la transition, alors ces désaccords devraient s'estomper en augmentant la dimension du système. Afin de le confirmer, nous nous intéressons à la limite de portée infinie du modèle à sauts infinis. Pour les dimensions $D \in \{2, 3, 4, 6\}$, nous déterminons alors l'exposant β associé à ce point. Il est à noter que plus la dimension du système est grande, plus les coûts numériques des simulations l'est aussi. L'évolution de cet exposant en portée infinie est alors reporté sur la [figure 3.13](#).

Malgré les larges incertitudes de mesure, il semble y avoir une tendance générale d'augmentation de β avec D qui passe de $\beta \approx 1.8$ pour $D = 2$ à $\beta \approx 1.96$ pour $D = 4$ et $D = 6$. Par analogie

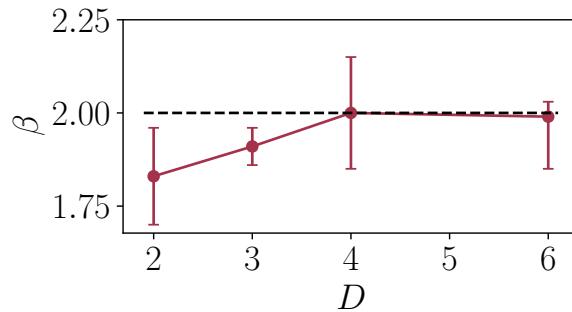


FIGURE 3.13 – Evolution de l'exposant critique β en fonction de la dimension de l'espace D dans le modèle α -ROM avec sauts infinis des particules actives.

avec les phénomènes critiques plus classiques, la saturation à $D = 4$ suggère que la dimension critique supérieure associée à la transition est $D_c = 4$. Il semble donc raisonnable de considérer le modèle μ -Hébraud-Lequeux comme le champ moyen associé à cette transition. Par ailleurs, ces résultats suggèrent donc effectivement que la dynamique n'est pas triviale en 2D, même avec des sauts infinis des particules actives. Cela montre alors que le bruit interne ne peut pas être modélisé aussi simplement dans un système réel de dimension finie. Ces conjectures sont cependant à nuancer et nécessiteraient un travail plus abouti pour arriver à des conclusions définitives.

3.4.2.3 Relaxation des hypothèses du modèle

La dynamique en dimension finie du α -ROM est donc difficilement capturable dans la version naïve du modèle champ moyen. Dans cette sous-sous-section, nous montrons qu'il est en fait possible de rendre compte de la non-trivialité de la transition en dimension finie avec le modèle μ -Hébraud-Lequeux, à condition que nous relaxions certaines hypothèses.

Un bruit interne plus complexe

L'hypothèse principale du modèle repose sur l'assimilation du bruit interne à celui produit par une unique particule. Celle-ci nous a alors amené à $\mu = D/\alpha$. De plus, la modélisation décrite par l'équation 3.34 suppose le bruit décorrélé temporellement et donc des corrélations temporelles d'activité dans le système négligeables. Or nous savons que ces corrélations spatio-temporelles d'activité sont essentielles dans le comportement du système, au moins à courte portée, puisqu'il rejoint dans ce cas là celui de CDP. Par ailleurs, comme les éléments précédents le suggèrent, la dynamique des particules passives est aussi complexe. Ainsi, de la même façon, il doit exister des corrélations non négligeables entre les particules passives. Ces deux sources de complexité ne devraient pas jouer exactement sur les mêmes mécanismes du modèle : les corrélations d'activité devraient influer sur le bruit tandis que les corrélations des particules passives devraient plutôt jouer sur la forme de la cage effective. Toutefois, nous postulons que ces deux aspects peuvent être inclus dans le formalisme μ -Hébraud-Lequeux via une redéfinition du bruit par un exposant μ non trivial. Ceci constitue alors notre hypothèse initiale que nous confrontons dans la suite de cette sous-sous-section.

Nous ne disposons pas de théorie pour prédire la valeur effective μ_{eff} de cet exposant de bruit en dimension finie. Une possibilité est alors de le mesurer lors de la dynamique. Il n'y a cependant pas de manière évidente de procéder. Une approche naturelle serait de mesurer la distribution du bruit sur les particules passives dans l'état stationnaire sur un pas de temps. Mais cette méthode ne serait pertinente que si chaque pas de temps était totalement décorrélé du précédent, ce qui n'est évidemment pas le cas ici.

Une autre possibilité est alors d'analyser les trajectoires complètes de diffusion des particules passives pour inférer la distribution de bruit à laquelle elles sont soumises. Cette approche a l'avantage de pouvoir étudier le système au-delà de son temps de corrélation en se concentrant sur des trajectoires suffisamment longues. Nous testons alors cette méthode dans le modèle α -ROM en 2D. Pour ce faire, nous enregistrons les trajectoires d'un millier de particules passives dans un état stationnaire proche du point critique. Afin d'en inférer les propriétés statistiques du bruit, nous mesurons pour chacune de ces trajectoires $r_i(t)$ la quantité :

$$\delta(\epsilon) = \langle |r_i(t) - r_i(t + \epsilon)| \rangle \quad (3.42)$$

qui est un équivalent du déplacement quadratique moyen, ou plutôt sa racine carrée. Pour un bruit distribué selon l'[équation 3.31](#), nous attendons alors :

$$\delta(\epsilon) \sim \epsilon^H, \quad H = \frac{1}{\mu} \quad (3.43)$$

avec H l'exposant de Hurst (citer livre de probas). Pour $H = 1/2$, l'évolution caractérise un bruit gaussien. En mesurant cette quantité au-delà du temps de corrélation de l'activité, il est donc théoriquement possible de remonter à l'exposant effectif μ_{eff} caractérisant le bruit interne de la transition de manière adéquate.

Nous calculons alors $\delta(\epsilon)$ pour ϵ allant de 10 à 10^6 pas de temps et le moyennons sur les 1000 trajectoires. Sur la [figure 3.14](#), nous représentons les évolutions $\delta(\epsilon) = f(\epsilon)$ obtenues en échelle logarithmique pour différents α . Comme on peut le remarquer, les évolutions dépendent bien de α avec une pente logarithmique moyenne qui semble diminuer avec la portée. Cela correspond alors, comme attendu en première approximation, à une augmentation de μ avec la portée. Toutefois, nous remarquons qu'à temps long, l'évolution de $\delta(\epsilon)$ se comporte comme $\sqrt{\epsilon}$ pour tout α . Ainsi, à temps longs les particules passives semblent suivre des trajectoires gaussiennes, peu importe la portée de l'interaction.

Ceci peut en fait s'expliquer par le fait que les distributions réelles de bruit pour un événement unique n'ont pas réellement la forme de l'[équation 3.31](#). En effet, étant dans un système de taille finie, l'interaction possède un cut-off à petite distance (valeur maximale) et un cut-off à grande distance (valeur minimale). Cela rend la distribution de bruit associée de variance et de moyenne finies. Ainsi, par ces effets de taille finie, la distribution du bruit cumulé finit effectivement par converger vers une gaussienne d'après le théorème central limite. Cette convergence pouvant être plus ou moins lente, cela explique pourquoi on ne retrouve le comportement gaussien des particules passives que dans la limite de grands temps.

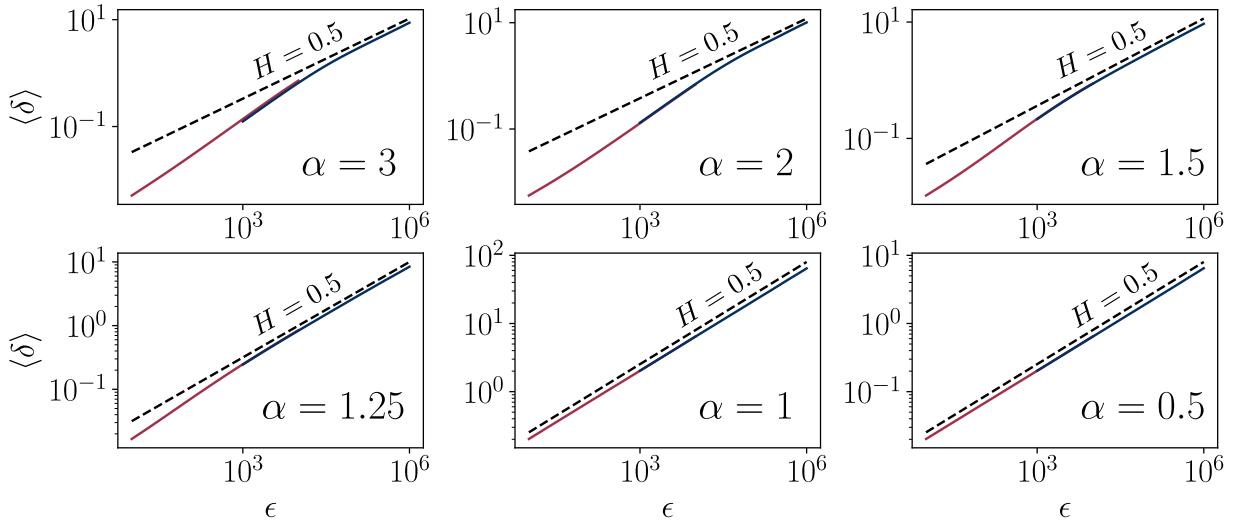


FIGURE 3.14 – Evolution de $\delta(\epsilon)$ pour différentes portées α dans le α -ROM. Cette représentation est l’assemblage de deux analyses, une à temps courts (rouge) et une à temps longs (bleu). Les pointillés noirs représentent le comportement gaussien $\delta(\epsilon) \sim \sqrt{\epsilon}$. Mettre les distances au point critique pour chaque portée. Remarque : J’ai beau avoir cherché je ne comprends pas le désaccord entre les courbes temps longs et temps courts...

Cela ne remet cependant pas en cause notre hypothèse initiale de modélisation par un exposant effectif μ_{eff} . En effet, dans notre cadre, la zone pertinente à étudier n’est pas celle à temps infini mais plutôt celle associée typiquement au temps nécessaire à la mise en contact avec une autre particule. Toutefois l’identification de cette zone pose des difficultés. En effet, entre le régime de courte durée corrélé (et donc inadapté à la modélisation de l’équation 3.34) et le régime de longue durée gaussien (hors des gammes de temps pertinentes), aucun régime clair de loi de puissance n’est distinctement visible sur les courbes obtenues. Il n’est alors pas possible de déterminer un exposant effectif à partir de ces données.

Mesure indirecte par la fonction de corrélation de paire

Les mesures directes sur le bruit interne n’étant pas concluantes, nous proposons une méthode alternative pour déterminer μ_{eff} . Pour ce faire, nous passons par une approche indirecte. Dans le modèle μ -Hébraud-Lequeux, la distribution de bruit n’agit pas que sur l’exposant β mais aussi sur la forme de la distribution de position $P(r)$. Ce comportement est caractérisé par l’exposant θ dont la dépendance en μ est donnée par l’équation 3.39.

$P(r)$ représentant la distribution de position dans la cage effective, dans notre modèle numérique en dimension finie, l’équivalent de $P(r)$ est en fait directement la fonction de corrélation de paire des particules passives $g^p(r)$. En notant $x = r - D_p$ avec D_p le diamètre des particules, nous nous attendons donc, d’après le cadre champ moyen, à avoir au point critique dans nos simulations numériques :

$$g^p(x) \sim x^\theta, \quad \theta = \begin{cases} \frac{\mu}{2}, & \mu \leq 2 \\ 1, & \mu \geq 2 \end{cases} \quad (3.44)$$

g^p est une quantité d'intérêt et facilement mesurable dans les simulations de particules. Ainsi, en mesurant θ , il est possible de déterminer indirectement l'exposant effectif de bruit $\mu_{\text{eff}} = 2\theta$ permettant de rendre compte de ce comportement via le modèle μ -Hébraud-Lequeux. Si notre hypothèse initiale est correcte, alors, par cohérence, l'exposant μ_{eff} déterminé ainsi sera directement lié à la valeur de l'exposant β selon :

$$\begin{cases} \beta = \mu_{\text{eff}} = 2\theta, & 1 < \mu_{\text{eff}} < 2 \\ \beta = 1, & \mu_{\text{eff}} < 1 \end{cases} \quad (3.45)$$

Nous proposons alors d'évaluer l'exposant θ dans les modèles de particules. Nous choisissons d'abord de nous concentrer sur le cas le plus proche de la théorie champ moyen, le α -ROM en 2D avec sauts infinis des particules actives. Nous mesurons alors la fonction de corrélation de paire entre particules passives $g^p(r)$ à petits r , pour différentes distances au point critique $\delta\phi$ et ce pour chaque portée α . Un exemple de mesure pour $\alpha = 1.5$ et $\alpha = 5$ est présenté sur les encarts de la [figure 3.15](#). Nous observons alors effectivement un comportement algébrique de $g^p(x)$ avec x qui s'étend à petits x à mesure que le point critique est approché. À très petits x , la fonction de corrélation sature sur un plateau dont la valeur décroît avec la distance au point critique. Cela s'explique par le fait que le comportement donné par l'[équation 3.44](#) n'est en fait valable qu'au point critique.

Pour s'affranchir de cet effet, nous utilisons une méthode de redimensionnement par $\delta\phi$ pour mesurer l'exposant θ . Cette méthode est alors très similaire à celle présentée à la [sous-section 2.3.2](#) pour la détermination de l'exposant δ . Pour ce faire, nous supposons donc que la fonction $g^p(x = r - D_p, \delta\phi)$ est homogène de ses arguments dans le régime critique. Dans le cadre de cette hypothèse, en redimensionnant $g^p(x, \delta\phi)$ par $\delta\phi^{a_1}$ et x par $\delta\phi^{a_2}$, il est possible de trouver a_1 et a_2 tels que les courbes pour différents $\delta\phi$ se superposent toutes sur une courbe maîtresse. L'exposant θ caractérisant le comportement de la fonction avec x est alors directement donné par $\theta = a_1/a_2$.

Nous représentons à la [figure 3.15](#) le meilleur redimensionnement par $\delta\phi$ obtenu dans les cas $\alpha = 1.5$ et $\alpha = 5$ et reportons le cas des autres portées à la [sous-section 6.1.4](#). Comme on peut le remarquer, la superposition des courbes est remarquablement satisfaisante sous le bon choix d'exposants. Notre hypothèse d'homogénéité de la fonction $g^p(r, \delta\phi)$ est donc bien validée. Les exposants θ déterminés permettent alors de tracer l'évolution de $\mu_{\text{eff}} = 2\theta$ avec α sur la [figure 3.16](#). Afin de confronter notre hypothèse initiale, nous traçons sur la même figure l'évolution de β avec α précédemment déterminée.

Nous remarquons alors un très bon accord entre les deux courbes pour $\mu_{\text{eff}} \geq 1$. Pour $\mu_{\text{eff}} < 1$, β sature à la valeur triviale $\beta = 1$, comme prédit par la théorie effective. Par ailleurs, sur cette même figure, nous montrons que dans cette zone de courte portée, l'exposant μ_{eff} coïncide avec la première approximation $\mu = D/\alpha$ (en pointillés noirs). Notre hypothèse initiale de modélisation de la transition en dimension finie par un exposant de bruit effectif semble donc

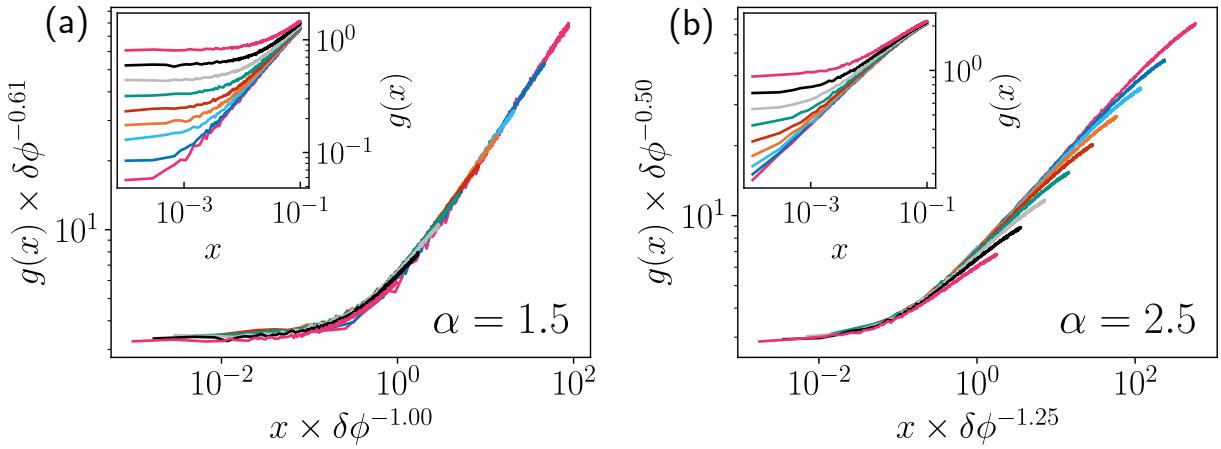


FIGURE 3.15 – Redimensionnement des fonctions de corrélation de paire des particules passives avec la distance au point critique $\delta\phi$ dans le α -ROM avec sauts infinis des particules actives pour $\alpha = 1.5$ (a) et $\alpha = 5$ (b). En encart, les données brutes associées. Remarque : mettre une flèche pour l'évolution de $\delta\phi$ et les donner en légende

parfaitement vérifiée dans ce cas. Si les corrélations ne peuvent pas être incorporées directement dans le modèle champ moyen, celles-ci peuvent donc tout de même être interprétées par celui-ci dans le cadre du α -ROM en 2D avec sauts infinis.

Une autre information que nous tirons de ces redimensionnement est que, pour $\mu_{\text{eff}} > 1$, la valeur au contact $x = 0$ de la fonction g^p évolue comme $\delta\phi^\theta$. De plus, pour $\mu_{\text{eff}} < 1$, là où $\beta = 1$, celle-ci évolue comme $\delta\phi^{0.5}$. Ainsi, par définition de l'exposant β , la valeur du plateau se comporte comme $\sqrt{\langle A \rangle}$ à toute portée. La forme adéquate de la fonction de corrélation de paire à une distance finie du point critique est donc :

$$g^p(x) \sim \sqrt{\langle A \rangle} + x^\theta \quad (3.46)$$

avec θ non trivialement déductible de la portée de l'interaction. Cette observable étant accessible expérimentalement, cette forme en lien direct avec l'exposant β pourrait être testée en conditions réelles.

En conclusion, les corrélations de dimension finie peuvent effectivement être incorporée dans le modèle μ -Hébraud-Lequeux via un exposant de bruit μ_{eff} non-trivial. Cette procédure permet alors d'expliquer les écarts entre champ moyen et simulations numériques et d'étendre le pouvoir explicatif du cadre mis en place. Toutefois, le modèle numérique utilisé ici reste une version simplifiée du phénomène. Qu'en est-il du modèle α -ROM conservant une dynamique de sauts finis des particules actives ?

Retour au modèle α -ROM

Pour répondre à cette question, nous menons la même analyse que dans le cas des sauts finis. Simplement, du fait des résultats de l'analyse précédente, nous choisissons de redimensionner

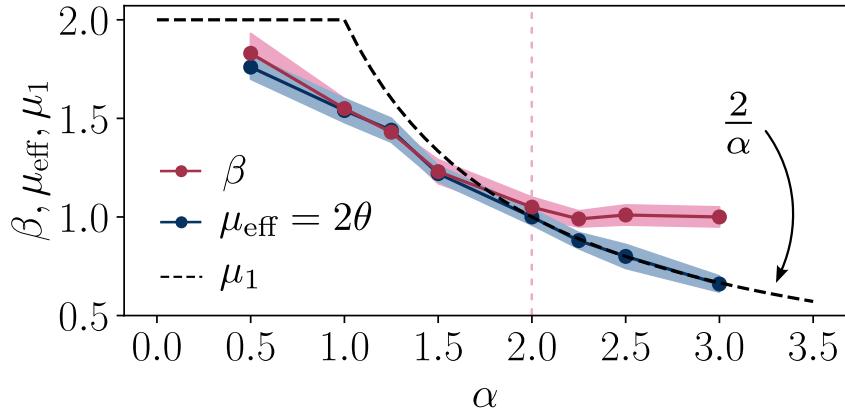


FIGURE 3.16 – Comparaison des évolutions de $\mu_{\text{eff}} = 2\theta$ et β avec α dans la modèle α -ROM avec sauts infinis des particules actives. En pointillés noirs, l'évolution de 2θ dans le modèle de Lin et al. [16]

directement les quantités par $\langle A \rangle$ et non $\delta\phi$. Les redimensionnements les plus convaincants obtenus sont alors représentés pour $\alpha = 0.5$ et $\alpha = 1.25$ à la figure 3.17. Les autres analyses sont reléguées à la [sous-section 6.1.4](#).

La superposition des courbes est alors toujours très satisfaisante pour tout α . Dans le cas de très longue portée, nous retrouvons un comportement en $\sqrt{\langle A \rangle}$ de $g^p(0)$. Toutefois ce comportement semble perdu à plus courtes portées où l'on mesure $g^p(0) \sim A^b$ avec $b > 0.5$ dès $\alpha = 1$. De plus, si la comparaison entre $\mu_{\text{eff}} = 2\theta$ est β est excellente pour $\alpha = 0.5$ ($2 \times 0.50/0.55 \approx 1.82$ à comparer à $\beta \approx 1.83$), cette correspondance semble se perdre dès $\alpha = 1$. En effet, à cette portée nous mesurons $2\theta \approx 1.7$ alors que nous avions mesuré $\beta \approx 1.56$ à la [sous-sous-section 3.3.2.1](#). Cet écart continue alors de se creuser pour des portées plus courtes pour lesquelles on sature à $\mu_{\text{eff}} \approx 1.5$ dès $\alpha = 1.25$. Cette valeur est alors bien loin de l'équivalent champ moyen $\beta = 1$ à petits μ .

La prise en compte des corrélations dans la théorie semble donc difficile pour la version plus réaliste du α -ROM. Cela suggère que le rôle des particules actives, qui ne peut être compris que d'un point de vue collectif, est dans ce cas là essentiel à la criticalité. Toutefois, il est remarquable que le modèle puisse interpréter le comportement critique dans la limite de très grande portée. Ainsi, même si $\alpha \rightarrow 0$ n'est pas un cas champ moyen à proprement parler, il peut être décrit dans le même cadre qu'une dynamique trivialisée. Cela permet donc de rationaliser les comportements mesurés par Mari et. al dans le cas du 0-ROM [5].

3.4.3 Zone concave

Les analyses précédentes nous ont permis de montrer en quoi la diffusion des particules passives représentait un mécanisme essentiel dans la transition du α -ROM. Toutefois, à courte portée, il ne semble pas que celle-ci suffise à comprendre entièrement la criticalité du modèle. Notamment, les cas où l'on mesure $\beta < 1$ ne peuvent être compris que par les corrélations induites par les sauts des particules actives. Bien que la zone $\beta > 1$ soit hors d'atteinte du cadre de référence LR-CDP, il est tentant de vouloir interpréter cette zone $\beta < 1$ via ce formalisme. Le

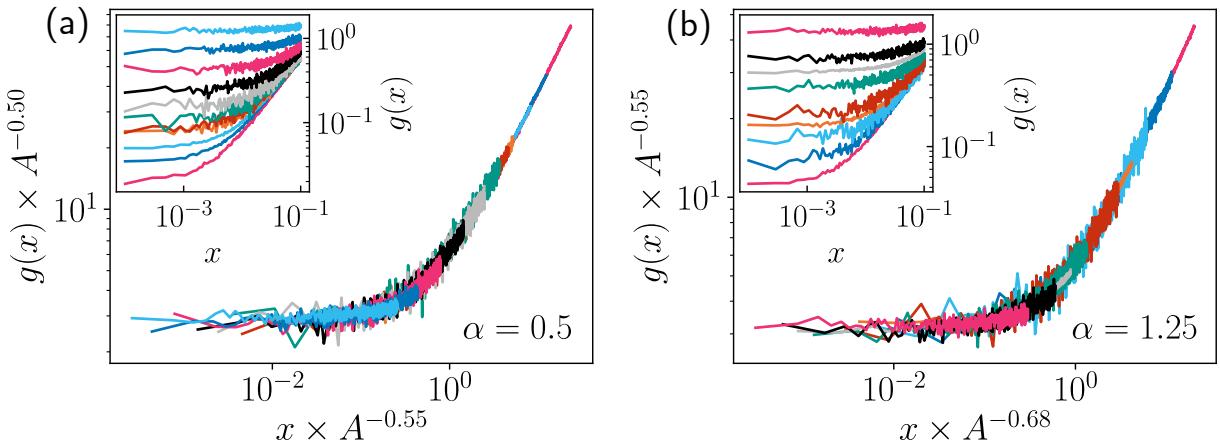


FIGURE 3.17 – Redimensionnement des fonctions de corrélation de paire des particules passives avec la distance au point critique $\delta\phi$ dans le α -ROM avec sauts finis des particules actives pour $\alpha = 0.5$ (a) et $\alpha = 1.25$ (b). En encart, les données brutes associées. Remarque : mettre une flèche pour l'évolution de $\delta\phi$ et les donner en légende

paysage global présenté à la sous-sous-section 3.3.2.1 se formerait donc d'une zone avec $\beta > 1$ dominée par la dynamique des particules passives, et d'une zone $\beta < 1$ interprétable comme une zone dominée par la dynamique des particules actives.

Un premier conflit d'interprétation de cette région concave vient du fait que la zone d'exposant α pour laquelle on passe de $\beta \approx 0.64$ en 2D à $\beta = 1$ n'est pas du tout la même que celle du cadre LR-CDP. En effet, nous avons identifié $0.5 \lesssim \alpha \gtrsim 2$ pour le α -ROM et $3 < \alpha < 4$ pour LR-CDP en 2D. Toutefois, il est possible que le mécanisme de diffusion dans cette zone agisse de la même manière qu'un transport à longue portée, seulement avec un exposant effectif différent. Il serait alors possible de réconcilier le α -ROM avec le cadre de référence dans cette zone concave.

Dans le cas d'un transport à longue portée contrôlé par l'exposant γ , une particule active dans un espace de dimension D fait un saut dont l'amplitude Δ suit une distribution $P(\Delta) \sim \Delta^{D-1-\gamma}$ (voir chapitre 2). En supposant la densité de particules homogène dans le système, cela correspond à une probabilité $P_a(r)$ de créer de l'activité à une distance r à l'issue du pas de temps telle que :

$$P_a(r) \sim \frac{1}{\Delta^{1+\gamma-D}} \quad (3.47)$$

La question est alors de savoir si une telle quantité peut être dérivée dans le cas du α -ROM, et comment celle-ci se compare au cas du transport à longue portée à comportement critique équivalent. Peut-on dériver un exposant de saut effectif γ_{eff} dans le cadre de ce modèle ?

Pour ce faire, nous considérons la portée $\alpha = 1.75$ pour laquelle nous avions mesuré $\beta \approx 0.82$. Elle se situe donc à mi-chemin entre la limite de courte portée $\beta = 0.64$ et la valeur triviale $\beta = 1$, et donc cette criticalité peut-être atteinte dans le cadre du transport à longue portée.

Pour ce faire, nous générerons un état absorbant du système à $\phi = \phi_c$. À partir de cet état absorbant, nous activons aléatoirement une particule, générant alors un saut de courte portée et un bruit sur toutes les autres particules passives. En identifiant les particules activées suite à ce pas de temps et leur distance r à la particule activée, nous pouvons mesurer la quantité $P_a(r)$ dans ce cadre. Le même protocole peut être appliqué dans le cadre du transport à longue portée. Pour un système de taille $L = 4096$, nous comparons alors la mesure de $P_a(r)$ obtenue pour $\alpha = 1.75$ à celle obtenue dans le cas d'un transport à longue portée avec $\gamma = 3.5$. La valeur de γ est choisie ainsi puisque dans ce cas nous avions mesuré $\beta \approx 0.81$, soit une valeur très proche de $\beta \approx 0.82$ pour $\alpha = 1.75$. Les résultats sont présentés sur la figure 3.18.

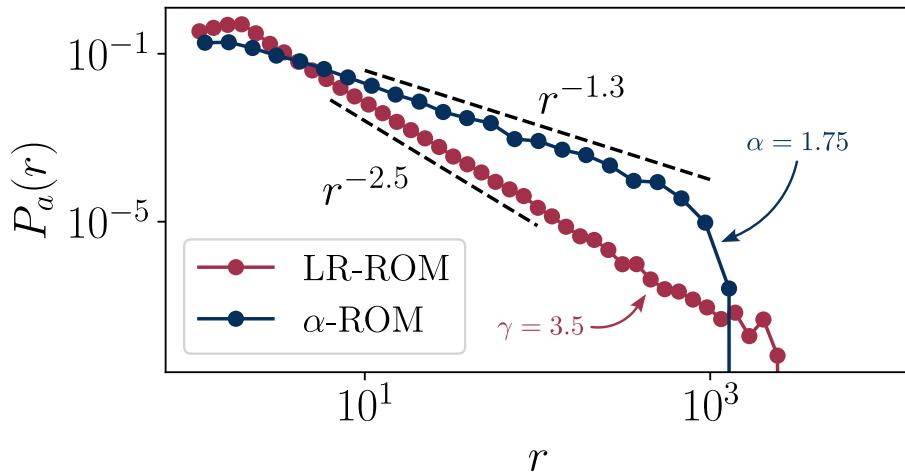


FIGURE 3.18 – Evolution des distributions $P_a(r)$ pour le LR-ROM avec $\gamma = 3.5$ et pour le α -ROM avec $\alpha = 1.75$.

Nous constatons alors que dans le cas du transport à longue portée, $P_a(r)$ décroît bien comme $1/r^{2.5}$ en 2D. Dans le cas du α -ROM, cette distribution décroît comme $1/r^{1.3}$ soit $\gamma_{\text{eff}} \approx 2.3$, donc bien moins rapidement. En réalisant ces mêmes mesures sur des états actifs de la dynamique, les mêmes observations peuvent être faites. Ainsi, si les deux modèles partagent le même exposant β à ces portées, ils ne partagent pas du tout les mêmes propriétés de création d'activité. En d'autres termes, il ne semble pas possible d'interpréter la criticalité du α -ROM via le cadre LR-CDP dans la zone concave. La dynamique des particules passives reste donc importante à toute portée $\alpha < D$ et le changement de convexité ne semble pas relever d'un changement abrupt de mécanisme prépondérant.

En conclusion, nous avons établi dans cette section un modèle de type champ moyen permettant une transition de réversibilité convexe. Son étude révèle alors la place essentielle du bruit interne, i.e. de la diffusion des particules passives, dans la criticalité du α -ROM. Ce modèle permet par ailleurs d'expliquer la zone déterminée précédemment sur laquelle la criticalité évolue continûment avec la portée en dimension finie. Pour obtenir des prédictions quantitatives sur la valeur de l'exposant critique β , il est nécessaire de prendre en compte les corrélations dans le modèle champ moyen via une redéfinition effective du bruit interne. Cela n'est cependant efficace qu'à très longue portée. Enfin, si la zone concave pour laquelle on retrouve $\beta < 1$ prend l'apparence du comportement attendu dans le cadre LR-CDP, celle-ci correspond en fait à une dynamique bien différente. Enfin, le modèle α -ROM est donc différent en tout point du

cadre LR-CDP sous les aspects abordés et nécessite un traitement théorique fondamentalement différent.

3.5 Avalanches

Afin de souligner ces différences par un dernier aspect incontournable de la criticalité absorbante, nous proposons d'étudier dans cette section la dynamique d'avalanches à l'œuvre dans le α -ROM.

3.5.1 Avalanches à densité fixée

Remarque : Peut-être un schéma ?

3.5.1.1 Redéfinition

Comme nous l'avons vu au [chapitre 1](#), les modèles appartenant à la classe CDP présentent une dynamique d'avalanches. Pour être mise en évidence, il est d'usage de se placer dans le cas de la criticalité auto-organisée (abrégée SOC pour *self-organized criticality*). Dans ce cadre, la séparation d'échelle entre le temps de forçage (ajout de matière aléatoire) et de relaxation (disparition de matière induite par l'activité) permet d'observer distinctement des événements d'activité fortement corrélés et distribués de manière algébrique : ce sont les avalanches.

Une autre manière d'observer cette dynamique critique est de se placer dans l'état stationnaire à une densité fixée de particules ϕ dans le système, proche de la densité critique ϕ_c . Une subtilité est que, dans ces conditions, le système est proche d'une transition de phase absorbante. Ainsi, pour un système de taille finie, du fait des fluctuations de la dynamique, cette dernière peut régulièrement tomber dans un état absorbant pour $\phi \gtrsim \phi_c$. Pour sonder la dynamique d'avalanches à densité imposée, il est donc nécessaire de réactiver le système à chaque fois qu'il se retrouve bloqué. Un protocole généralement utilisé est alors d'activer artificiellement une particule dans le système, alors précurseur de l'évènement [18–20].

Cette situation impose de redéfinir la notion d'avalanche à densité fixée. Dans ce cadre, nous définissons une avalanche comme l'évènement ayant lieu entre deux réactivations du système. Il est alors possible de définir ces évènements exactement de la même manière que les avalanches de la SOC, i.e. par leur taille S , leur durée T et le nombre de particules N qu'ils impliquent. Dans le cadre du α -ROM, la taille d'une avalanche correspond au nombre d'évènements d'activité individuels ayant lieu pendant l'évènement global. La durée correspond alors simplement aux nombre de pas de temps entre le début et la fin de l'avalanche. Plusieurs études ont montré que ces avalanches étaient de même nature que celles de la SOC dans les modèles à courte portée⁷ [18–20]. Il est alors attendu que ces évènements soient aussi distribués de manière algébrique, définis par les exposants d'avalanche déjà présentés à la [sous-sous-section 1.1.3.1](#) :

7. Ces études n'interprétaient cependant pas ces évènements à densité fixée comme des avalanches à proprement parler.

$$\begin{aligned} P(S) &\sim S^{-\tau} f\left(\frac{S}{S_c}\right), \quad S_c \sim L^{d_f} \\ P(T) &\sim T^{-\tau'} g\left(\frac{T}{T_c}\right), \quad T_c \sim L^z \\ P(N) &\sim N^{-\tau''} h\left(\frac{N}{N_c}\right), \quad N_c \sim L^\chi \end{aligned} \quad (3.48)$$

Afin d'analyser le comportement des avalanches à la transition dans le cadre du α -ROM et de le comparer avec l'attendu présupposé de LR-CDP, nous choisissons de nous placer à densité fixée. Ce choix se justifie par cohérence, les analyses précédentes ayant toutes été réalisées à densité fixée. Cela nous permet alors de caractériser directement la dynamique qui donne lieu au comportement critique précédemment déterminé.

3.5.1.2 Protocole

Pour étudier les avalanches à densité fixée dans le modèle α -ROM, pour une portée α donnée, nous nous plaçons à la densité critique ϕ_c du système. Dès lors, nous générerons un état absorbant du système en partant d'une configuration initiale aléatoire. À chaque fois que le système tombe dans un état absorbant, la dynamique est réactivée en activant artificiellement une particule choisie au hasard. Ce processus est alors réitéré suffisamment de fois pour obtenir une statistique propre et stationnaire pour les observables S , T et N ⁸. Nous réalisons alors ces mesures en 2D pour $\alpha \in \{3, 2, 1.75, 1.5, 1.25, 0.5\}$ et pour les tailles de systèmes $L \in \{256, 512, 1024, 2048\}$. Un exemple des 3×4 distributions obtenues est alors présenté à la figure 3.19 pour $\alpha = 1.5$

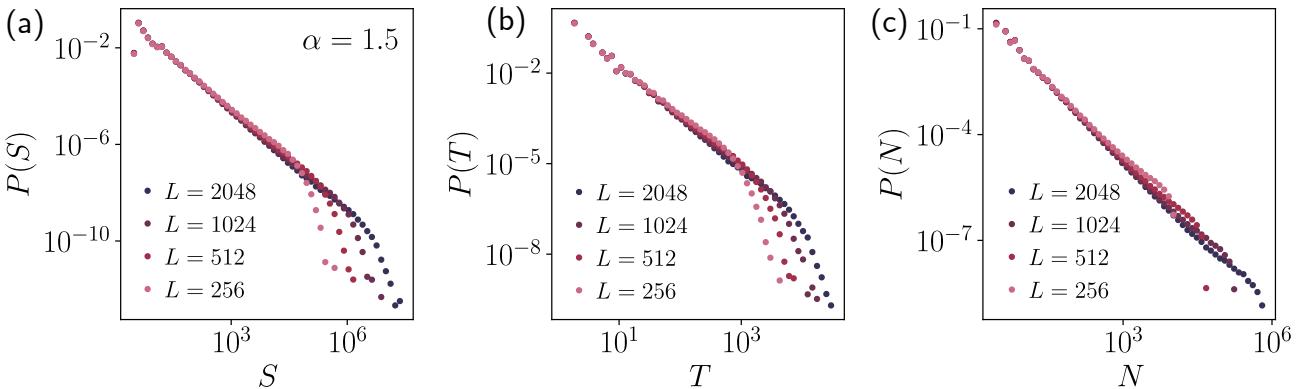


FIGURE 3.19 – Distributions de taille (a), de durée (b) et du nombre de particules impliquées (c) pour les avalanches mesurées dans le modèle α -ROM à densité fixée $\phi = \phi_c$ pour $\alpha = 1.5$ et pour $L \in \{256, 512, 1024, 2048\}$.

Les formes des distributions sont alors celles supposées, présentant une décroissance en loi de puissance, commune à chaque taille, puis un cut-off, augmentant avec la taille du système. Par ailleurs, ce cut-off, dans le cas de $P(S)$ et $P(T)$, semble présenter une bosse qui s'étale à mesure que la portée augmente. Afin de déterminer précisément les exposants d'avalanche associés à ces distributions, nous procédons à une analyse d'échelle en taille finie. Pour ce faire,

8. En pratique, la stationnarité impose d'ignorer les premiers événements

nous reprenons les formes définies par l'[équation 3.48](#). Selon ces ansatz, toute la dépendance des distributions en L est portée par le cut-off. Prenons alors l'exemple de la distribution des tailles $P(S)$. En redimensionnant S par S_c , nous obtenons :

$$P(S) \sim L^{-d_f \tau} \tilde{S}^{-\tau} f(\tilde{S}), \quad \tilde{S} = \frac{S}{L^{d_f}} \quad (3.49)$$

Ainsi, en redimensionnant $P(S)$ par $L^{-d_f \tau}$ et S par L^{d_f} , les courbes obtenues pour différentes tailles de système L sont indépendantes de L , i.e. se superposent. Ce principe constitue alors une méthode graphique de détermination des exposants : les exposants d_f et τ sont déterminés comme ceux définissant le redimensionnement qui permet la meilleure superposition des courbes obtenues pour différents L . Nous représentons alors sur la [figure 3.20](#) la meilleure superposition obtenue pour $\alpha = 1.5$. Les représentations graphiques obtenues pour les autres portées sont reportées à la [sous-section 6.1.5](#) et les exposants ainsi déterminés sont tous reportés dans le [tableau 3.2](#).

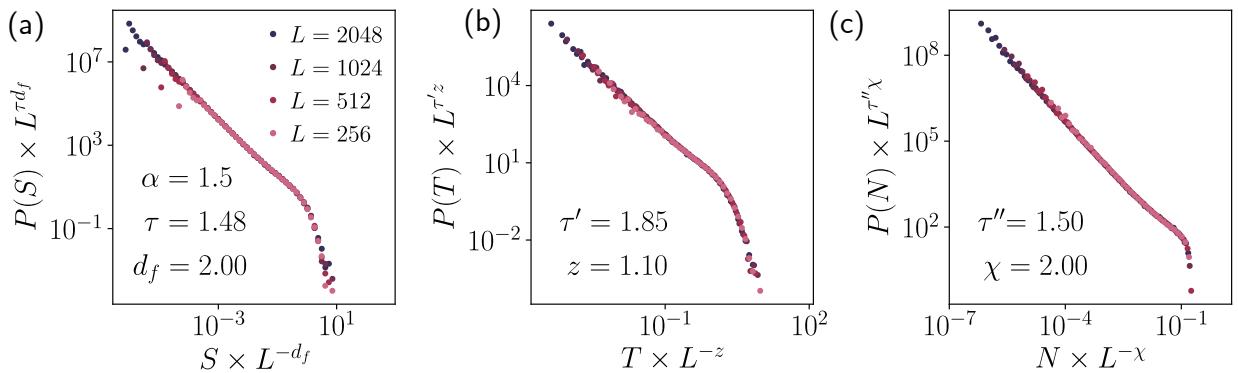


FIGURE 3.20 – Redimensionnement par L des distributions de taille (a), de durée (b) et du nombre de particules impliquées (c) pour les avalanches mesurées dans le modèle α -ROM à densité fixée $\phi = \phi_c$ pour $\alpha = 1.5$ et pour $L \in \{256, 512, 1024, 2048\}$.

3.5.2 Évolution des exposants

Pour les exposants τ , τ' et τ'' , nous observons une tendance d'augmentation avec la portée, comme dans le cadre LR-CDP/depinning (voir [section 1.3](#)). Par exemple, on passe de $\tau \approx 1.28$ pour $\alpha = 3$ à $\tau \approx 1.47$ pour $\alpha = 1.25$. Nous remarquons par ailleurs que la valeur obtenue à courte portée $\alpha = 3$ est compatible avec les mesures déjà effectuées dans le cas de la classe CDP [21]. Nous notons cependant une anomalie à cette tendance d'augmentation pour $\alpha = 0.5$, portée à laquelle le cut-off s'étale le plus sur la loi de puissance. Même si cette tendance générale est modérée, cela montre que les avalanches sont globalement distribuées de moins en moins largement à mesure que la portée des interactions augmente. De ce point de vue, l'évolution est alors compatible avec le cadre LR-CDP, bien que la gamme de portées sur laquelle a lieu l'évolution soit toujours très différente.

En contraste, les exposants de structure d_f , z et χ sont soumis à des variations fondamentales. Dans le cas de la courte portée, pour $\alpha = 3$ et $\alpha = 2$, nous mesurons $d_f \approx 2.75$, $z \approx 1.55$ et

$\chi \approx 2$, soit un parfait accord avec le cas CDP/depinning à courte portée [14, 21–24]. Les études précédentes ayant été menées dans le cadre de la SOC, cela valide l'équivalence avec le cas de densité fixée à courte portée. Nous rappelons par ailleurs qu'obtenir $d_f > D$ dans notre cas n'est pas surprenant puisque la taille S des avalanches caractérise une dynamique en $D + 1$ dimensions.

α	τ	τ'	τ''	d_f	z	χ
3	1.28	1.47	1.37	2.8	1.55	2
2	1.34	1.57	1.42	2.75	1.55	2
1.75	1.41	1.72	1.47	2.4	1.30	2
1.5	1.48	1.85	1.50	2.00	1.10	2
1.25	1.47	1.85	1.49	1.75	0.95	1.75
0.5	1.40	1.70	1.42	1.4	0.90	1.50

TABLE 3.2 – Exposants d'avalanches déterminés dans les modèles α -ROM. L'évolution des exposants de structure d_f , z et χ est représentée graphiquement à la figure 3.21.

Dès lors que $\alpha < 2$, la dimension fractale associée à ces avalanches diminue, pour atteindre $d_f \approx 1.5$ à $\alpha = 0.5$. Autour du point $\alpha = 1.5$, la dimension fractale des avalanches passe en dessous de la dimension spatiale D du système. Ce point $\alpha = 1.5$ marque donc un changement caractéristique dans la structure des avalanches, qui ne sont alors plus compactes spatialement aux portées plus grandes. Cette observation se confirme par l'évolution de χ , qui caractérise la surface occupée par les avalanches (leur taille spatiale en quelques sortes). En effet, $\chi = D$ signifie qu'au maximum, les avalanches occupent toute la surface du système, elles sont donc compactes spatialement. En revanche $\chi < D$ montre des événements qui présentent une fractalité spatiale. Le passage de $\chi \approx 2$ pour $\alpha \geq 1.5$ à $\chi < 2$ pour $\alpha < 1.5$ montre donc bien une perte en compacité spatiale des événements autour de $\alpha = 1.5$.

L'exposant dynamique diminue lui aussi avec la portée pour $\alpha < 2$. Il effectue un changement notable autour de $\alpha = 1.5$ puisqu'il passe de $z > 1$ à $\alpha = 1.5$ à $z < 1$ à $\alpha = 1.25$. Cette diminution de z avec la portée est à l'opposé de l'attendu CDP/depinning pour lequel z augmente vers sa valeur champ moyen $z = 2$ [23]. Si l'on suppose que la relation de scaling $z = \frac{\nu_{\parallel}}{\nu_{\perp}}$ est vérifiée dans notre cadre d'étude [14], alors cette anomalie entre en résonance avec l'anomalie de l'évolution de ν_{\perp} , discutée à la sous-sous-section 3.3.2.1. En effet nous avions vu que ν_{\perp} , dérivé par hyperscaling, augmentait avec la portée, alors que le comportement inverse était attendu dans le cadre LR-CDP.

Finalement, les propriétés d'avalanches du α -ROM suivent une évolution similaire à celle des exposants critiques. Pour $\alpha \lesssim 1.5$, l'évolution observée est celle convenue dans le cadre LR-CDP/depinning pour les exposants τ , τ' , τ'' et d_f avec des événements spatialement compacts $\chi = D$. Pour $\alpha \gtrsim 1.5$ cependant, nous observons un comportement hors des bornes du cadre LR-CDP avec des avalanches spatialement fractales. Comme dans le cas de l'évolution des exposants critiques, la ressemblance avec le cadre canonique dans la zone concave est à nuancer. En effet, ici l'exposant dynamique z diminue avec l'augmentation de la portée dans toute la zone d'évolution des exposants. De ce fait, au point où l'on retrouve les autres exposants tous

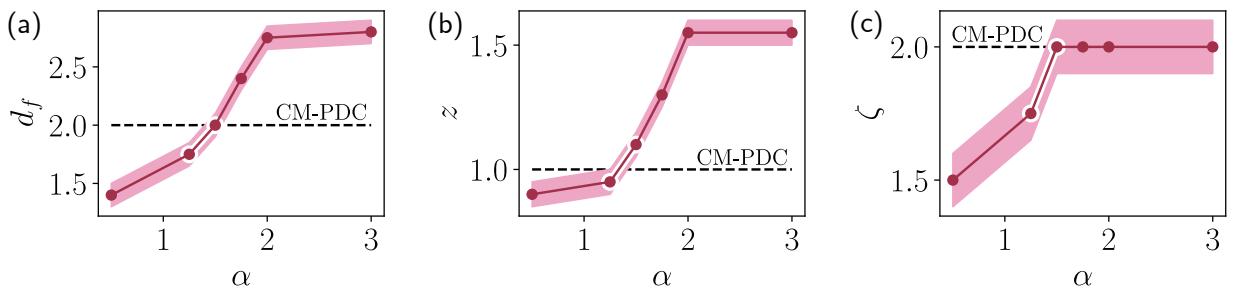


FIGURE 3.21 – Evolution des exposants de strcuture des avalanches d_f , z et χ avec la portée α dans le modèle α -ROM en 2D.

proches de leurs homologues CDP champ moyen, z prend la valeur $z \approx 1$ très différente de $z_{\text{CDP}}^{\text{CM}} = 2$.

3.6 Conclusion

En conclusion, nous avons caractérisé dans ce chapitre l'influence des interactions médiées sur la transition de réversibilité des suspensions cisaillées cycliquement. Cette caractérisation s'est faite via la définition d'un modèle numérique baptisé α -ROM en deux et trois dimensions, contrastant avec le modèle de transport à longue portée LR-ROM établi au chapitre précédent. Celle-ci a alors montré des différences fondamentales entre le comportement critique observé et celui attendu dans le cadre théorique LR-ROM.

En déterminant les exposants critiques statiques et dynamiques associés, nous avons mis en évidence l'influence de la portée des interactions sur le comportement critique. Cette influence prenant alors place sur une gamme de portée disjointe de celle prévue par le cadre LR-CDP. De plus, nous avons identifié une gamme de portées sur laquelle la transition se révèle convexe ($\beta > 1$) et les fluctuations évanescentes ($\gamma' < 0$), rejoignant alors le modèle de portée infini initialement proposé par Mari et al. [5].

Ces observations nous ont poussé à définir un nouveau cadre théorique pour décrire la transition de réversibilité en présence d'interactions médiées. Nous avons alors défini un modèle champ moyen baptisé μ -Hébraud-Lequeux, permettant de rendre compte de la convexité de la transition via la dynamique des particules passives. Ce modèle permet de rationaliser la gamme de portées sur laquelle la criticalité du système évolue continûment en dimension finie, alors très différente de celle prévue par le cadre LR-CDP. Par ailleurs, en généralisant cette théorie à un modèle effectif, nous avons pu expliquer quantitativement la valeur non triviale de β mesurée dans la limite de portée infinie.

Enfin, nous avons caractérisé cette famille de transition par sa dynamique d'avalanches. En réalisant des avalanches à densité de particules fixées, nous avons montré que leur statistique dépend fortement de la portée de l'interaction étudiée. Notamment, les exposants d'avalanche

suivent une évolution proche des exposants critiques statiques, délimitant une zone fondamentalement différente du cadre LR-CDP. Dans cette zone où les avalanches dans le cadre LR-CDP ont déjà atteint leur régime de champ moyen, les avalanches dans le cadre du modèle α -ROM montrent une structure spatialement fractale.

Chapitre 4

Transition vers l'écoulement des matériaux amorphes

TODO :

- Discuter du fait que ν_\perp et z ont des évolutions anormales et que donc le point champ moyen ne l'est en fait pas vraiment. Donc moins insister dessus.

Pré-requis pour ce chapitre

- Transitions de phase : exposants, hypothèse de scaling.
- CDP et CDP-LR : bornes, exposants limites, théorie de champ
- Introduction au yielding : systèmes concernés, phénoménologie, interaction d'Eshelby, point de vue transition de phase absorbante.
- Transition de depinning : phénoménologie, comportement critique, avalanches
- Suspensions : détermination du point critique (figure détermination log-log), analyse des avalanches dans les suspensions
- Conventions et notations : Transformées de Fourier

Dans la [sous-section 1.4.2](#), nous avons vu que la transition vers l'écoulement peut être comprise comme une transition de phase absorbante. Le paramètre de contrôle est alors la contrainte imposée au système Σ et le paramètre d'ordre le taux de déformation $\dot{\gamma}$. Ce dernier est nul dans la phase absorbante pour $\Sigma < \Sigma_c$ et non-nul dans la phase active $\Sigma > \Sigma_c$. Proche de la transition, l'évolution de $\dot{\gamma}$, de sa variance $\langle \Delta\dot{\gamma}^2 \rangle$ et de la longueur de corrélation ξ sont dictées par les exposants critiques β , γ' et ν_\perp selon :

$$\dot{\gamma} \sim \delta\Sigma^\beta, \quad \langle \Delta\dot{\gamma}^2 \rangle \sim \delta\Sigma^{-\gamma'}, \quad \xi \sim \delta\Sigma^{-\nu_\perp}, \quad \delta\Sigma = \frac{\Sigma - \Sigma_c}{\Sigma_c} \quad (4.1)$$

avec la spécificité $\beta > 1$ qui rend cette transition très différente de celle qui lui est souvent associée, le depinning. Le depinning étant lui-même associé à la criticalité LR-CDP, cette observation place la transition vers l'écoulement hors de ce cadre de référence.

Le but de ce chapitre est alors de caractériser précisément cette transition par tous ses aspects, et de montrer en quoi celle-ci se démarque de la transition de depinning/LR-CDP dans chacun de ceux-ci. Pour ce faire, nous présenterons d'abord la méthode élastoplastique utilisée. Ensuite nous mettrons en application cette méthode pour déterminer les exposants critiques de la transition. Puis, par des modifications sur le modèle de base, nous mettrons en évidence des ingrédients clés permettant de situer cette transition dans une compréhension globale, différente de celle du depinning. Enfin, par l'analyse de l'hyperuniformité, de la rugosité et des avalanches proche de la transition, nous mettrons en évidence une zone de criticalité en rupture avec le cadre de référence LR-CDP, dans laquelle se situe la transition vers l'écoulement.

4.1 Étudier la transition vers l'écoulement des matériaux amorphes

La transition vers l'écoulement, même si peu abordée en tant que transition de phase absorbante, reste un objet d'étude central en matière molle. Notamment, beaucoup se sont intéressés à la forme de la courbe d'écoulement associée $\dot{\gamma} = f(\Sigma)$ et de sa potentielle universalité. Un modèle phénoménologique communément utilisé pour la décrire est celui d'Herschel-Bulkley [25] :

$$\dot{\gamma} = k(\Sigma - \Sigma_c)^{1/n}, \quad k, n \in \mathbb{R}^+ \quad (4.2)$$

Cette forme est alors tout à fait équivalente à la description en termes de phénomène critique, avec l'exposant β relié à l'exposant d'Herschel-Bulkley par $\beta = 1/n$. Par la mesure de n sur différents systèmes, les chercheurs ont alors questionné l'universalité de cette courbe. En d'autres termes, cela revient donc à explorer un aspect de la criticalité de cette transition. Ces études peuvent alors nous guider sur la méthode la plus adaptée pour explorer plus largement et précisément cette criticalité.

4.1.1 Expérimentalement

Expérimentalement, l'exposant de Herschel-Bulkley a été mesuré dans de nombreux systèmes. Que ce soit dans les monocouches de mousse [26], les émulsions [27, 28], les suspensions colloïdales [29] ou les verres de colloïdes [30], des exposants allant de $n \approx 0.4$ à $n \approx 0.7$ ont pu être mesurés. Même si les mesures se montrent souvent dépendantes de certaines propriétés du système, la grande majorité soulignent un caractère convexe de la courbe d'écoulement avec $n < 1$ et donc $\beta > 1$. Dans certains cas cependant, la propriété de fluide à seuil ou la monotonicité de la courbe d'écoulement peuvent être perdues par une faible modification des propriétés microscopiques du système [27]. De plus, la mesure de la contrainte et du taux de déformation peuvent être grandement affectées par des effets parasites comme les glissements à l'interface [31].

Ainsi, si les expériences d'écoulement des matériaux amorphes en laboratoire révèlent une certaine universalité via la relation d'Herschel-Bulkley, leur exécution peut être soumise à de nombreuses contraintes réelles et à l'interférence de mécanismes supplémentaires. Le but de notre étude étant de se focaliser sur le concept global du phénomène d'écoulement, il peut être avantageux de travailler dans des situations idéalisées pour une analyse précise et simplifiée.

4.1.2 Numériquement

L'outil numérique apparaît alors comme une évidence pour étendre cette étude. Via les méthodes de dynamique moléculaire, il est possible de simuler des écoulements amorphes à différents degrés de modélisation. Des comportements similaires aux expériences ont alors pu être observés, même à de très petites échelles, souvent moins accessibles en laboratoire. Un problème soulevé par ces études est que, dans de tels systèmes, l'agitation thermique peut jouer un rôle essentiel sur la transition, modifiant de fait la courbe d'écoulement [32] et donc toute la criticalité. Afin d'étudier le phénomène dans sa forme la plus simple possible, nous choisissons de nous limiter dans ce travail au cas athermal. Cela signifie que l'agitation thermique est considérée négligeable, sans impact sur le comportement critique. Cette simplification n'exclue cependant pas la modélisation de tous les systèmes à petites échelles car ces derniers peuvent s'avérer effectivement athermiques sous certaines conditions. Par exemple, un exposant $n \approx 0.5$ est retrouvé pour le régime athermal du silicium amorphe dans [33]. Les méthodes moléculaires permettent donc de retrouver les résultats expérimentaux dans des conditions plus contrôlées. Par contre, le problème de ces méthodes est leur fort coût numérique qui rend impossible l'étude de très grands systèmes. Or les phénomènes critiques étant décrit aux grandes échelles, cela représente un obstacle de taille pour la caractérisation de la transition vers l'écoulement des matériaux amorphes athermiques.

4.1.3 Théoriquement

Une manière de répondre à cette difficulté est de s'appuyer sur une approche complètement théorique et donc applicable à des systèmes infinis.

4.1.3.1 Groupe de renormalisation et difficultés

Dans le cas des phénomènes critiques, ces approches théoriques se basent en général sur les théories de champs et les outils du groupe de renormalisation. Notamment, dans le cas du depinning, les méthodes du groupe de renormalisation fonctionnel permettent de prédire la courbe d'écoulement du système proche de la transition. Toutefois, même si des études ont tenté de décrire la transition vers l'écoulement dans le même formalisme que celui du depinning [34], une différence fondamentale bloque l'application de ces méthodes dans notre cas. En effet, là où le propagateur de redistribution dans le cas du depinning est positif en tout point, dans le cas de la transition vers l'écoulement, celui-ci change de signe. En effet, comme nous l'avons vu à la [sous-section 1.4.2](#), l'interaction de redistribution d'Eshelby, lors d'un réarrangement plastique, stabilise aussi bien qu'elle ne déstabilise le reste du matériau. Au contraire, dans le cas du depinning, le déploiement d'une zone entraîne nécessairement la déstabilisation des autres zones.

Cette différence physique a souvent été mise en avant pour expliquer les différences existantes entre depinning et transition vers l'écoulement. Pour conserver une approche théorique, il faut donc se baser sur de nouvelles méthodes de description. Une voie s'ouvre alors sur des approches de type champ moyen, dont l'une des plus célèbres d'entre elles est le modèle de Hébraud-Lequeux.

4.1.3.2 Modèle de Hébraud-Lequeux

Le modèle de Hébraud-Lequeux [35] est un modèle qui permet de prédire certaines propriétés de la transition vers l'écoulement, notamment la forme de la courbe $\dot{\gamma} = f(\Sigma)$. Ce modèle se base en fait sur la phénoménologie présentée au [chapitre 1](#). Considérant le matériau comme un ensemble de régions distinctes portant chacune une contrainte σ et soumises à un taux de cisaillement $\dot{\gamma}$, la distribution de probabilité $P(\sigma)$ se voit régie par l'évolution :

$$\begin{aligned}\partial_t P(\sigma, t) &= -\dot{\gamma} \partial_\sigma P(\sigma, t) + \alpha \Gamma(t) \partial_\sigma^2 P(\sigma, t) - \frac{\Theta(|\sigma| > \sigma_Y)}{\tau} P(\sigma, t) + \Gamma(t) \delta(\sigma) \\ \Gamma(t) &= \frac{1}{\tau} \int_{|\sigma| > \sigma_Y} d\sigma P(\sigma, t)\end{aligned}\quad (4.3)$$

avec τ un temps caractéristique de relaxation et α un paramètre du modèle aussi appelé fluidité. Le premier terme représente alors le chargement élastique du matériau. Le troisième et le dernier terme représentent le phénomène de relaxation locale lorsque la région dépasse sa contrainte seuil σ_Y et opère un réarrangement plastique. Toute la physique capturée dans le modèle réside alors dans le second terme de diffusion. Celui-ci modélise l'influence des régions en réarrangement sur les autres régions via les interactions élastiques d'Eshelby. Dans cette approche cela se fait par un bruit gaussien, reflet du point de vue champ moyen adopté. L'intensité de ce bruit dépend alors proportionnellement de la proportion de régions en réarrangement dans le système $\Gamma(t)$.

En résolvant ce système d'équations simple dans la limite stationnaire pour $\alpha < \frac{\sigma_Y^2}{2}$, il est possible de déduire une relation entre la contrainte moyenne $\langle \sigma \rangle = \int d\sigma P(\sigma)$ et le taux de cisaillement lorsque $\dot{\gamma} \rightarrow 0$ [36, 37] :

$$\dot{\gamma} \sim (\langle \sigma \rangle - \Sigma_c)^\beta, \quad \beta = 2 \quad (4.4)$$

On retrouve alors une forme de type Herschel-Bulkley avec $n = 0.5$, prédiction proche des résultats expérimentaux et numériques. Ce modèle simple permet donc de rendre compte de la convexité de la transition vers l'écoulement. Il se démarque alors des approches classiques de théorie des champs comme celle associée à la classe CDP ou au depinning en proposant une description statistique à l'échelle mésoscopique.

Toutefois, ce modèle reste très simplificateur et ne permet pas de rendre compte de toutes les propriétés critiques associées à la transition. Des approches de généralisation de ce modèle ont été étudiées [38, 39], notamment en complexifiant la forme du bruit mécanique afin de rendre compte de la spatialisation des interactions [16, 17]. Mais si ces études sont intéressantes d'un point de vue champ moyen, elles ne permettent pas d'accéder à certaines quantité comme les fluctuations critiques et les corrélations spatiales proche de la contrainte seuil. Afin d'étudier pleinement cette transition en dimension finie et toute la richesse qui y est associée, il est donc nécessaire d'effectivement spatialiser ce type de description.

4.2 Les modèles élastoplastiques comme outils privilégiés

L'approche idéale pour l'étude de la transition vers l'écoulement des matériaux amorphes athermiques semble alors se situer entre une description microscopique réaliste et spatialisée, mais coûteuse, et une description phénoménologique macroscopique, mais trop simplificatrice. Les modèles élastoplastiques répondent alors parfaitement à ce besoin. Nous présentons alors la méthode utilisée dans ce travail pour caractériser la transition.

4.2.1 Principe d'un modèle élastoplastique

Comme expliqué dans le [chapitre 1](#), l'écoulement des matériaux amorphes consiste en une succession d'évènements plastiques locaux, lesquels s'entre-déclenchent les uns les autres. Afin de modéliser ce comportement spécifique tout en conservant une efficacité de calcul satisfaisante, les modèles élastoplastiques se basent sur une description mésoscopique du matériau étudié [40]. Conceptuellement, le matériau est découpé en une collection de sites représentant chacun un groupe de particules susceptible d'effectuer un réarrangement plastique (voir [figure 4.1](#)). En pratique ces sites peuvent donc représenter quelques constituants élémentaires, comme dans le cas des mousses [41], ou quelques centaines d'entre eux, comme dans le cas des verres métalliques [42].

Dans la description élastoplastique, on associe à chacun de ces sites indexé par un indice i une contrainte tensorielle locale $\bar{\sigma}_i$. Afin de simplifier au maximum la modélisation du phénomène d'écoulement, nous considérons dans la suite de ce travail le cas simple d'un matériau bidimensionnel situé dans le plan $(\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y)$ et cisaillé dans la direction \mathbf{e}_x . Dans ce cas, il est d'usage de se concentrer sur une unique composante σ_{xy} du tenseur afin de rendre la description scalaire [11, 43–45]. Ainsi, chaque site i porte une contrainte $\sigma_i \equiv \sigma_{xy,i}$ constituante de la contrainte globale imposée au système $\Sigma = \frac{1}{N} \sum_i \sigma_i$, avec N le nombre de sites. En notant μ le module de cisaillement associé au matériau étudié, on peut associer de la même manière une déformation élastique $\epsilon_{\text{el},i}$ à chaque site selon $\epsilon_{\text{el},i} = \sigma_i / \mu$.

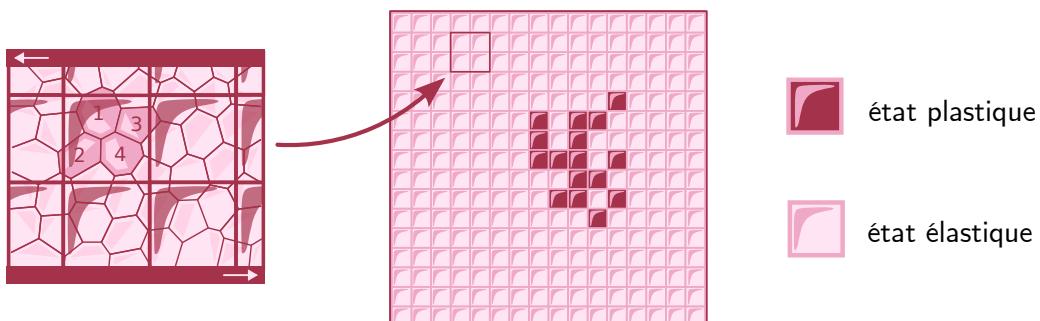


FIGURE 4.1 – Représentation schématique du principe des modèles élastoplastiques. Chaque groupe de particules dans la vision microscopique est représenté par un site pouvant prendre deux états : élastique ou plastique.

Chaque site possède un seuil de contrainte microscopique local $\sigma_{Y,i}$ qu'il est capable de soutenir élastiquement. Mais dès lors que la contrainte locale excède ce seuil local ($\sigma_i > \sigma_{Y,i}$), le site devient à même d'opérer un réarrangement plastique. Ce processus intervient alors selon un temps caractéristique τ_{pl} . Quand le réarrangement se produit, le site passe alors dans un état plastique ($n_i = 1$) et accumule une déformation plastique $\epsilon_{pl,i}$ sur un temps caractéristique τ . Cette déformation plastique permet alors une relaxation de la contrainte locale proportionnellement. La relaxation a lieu sur temps caractéristique τ_{el} après lequel le site retrouve son état élastique ($n_i = 0$).

Durant la relaxation, la contrainte accumulée par le site est redistribuée aux autres sites constituant le matériau via les interactions élastiques d'Eshelby, dont la forme est rappelée [figure 4.3-\(a\)](#). Cette redistribution va alors potentiellement permettre à d'autres sites de dépasser à leur tour leur seuil local et ainsi opérer un réarrangement. C'est cette interaction de redistribution et ces réarrangements en chaîne qui sont à l'origine du comportement collectif d'écoulement plastique du matériau.

Les règles précises qui définissent la co-évolution des variables $(\sigma_i, \epsilon_{pl,i}, n_i)$ sur chaque site dépendent alors du modèle spécifique considéré.

4.2.2 Le modèle de Picard

Le modèle élastoplastique retenu pour mener notre étude est le modèle de Picard [43]. Ce modèle pionnier du domaine est reconnu pour sa simplicité. C'est alors un outil de choix pour étudier ce système du point de vue des transitions de phase absorbantes.

Dans le modèle de Picard, tous les sites composant le matériau, indicés i et situés en \mathbf{r}_i , possèdent un seuil local uniforme et constant au cours du temps $\sigma_{Y,i} = \sigma_Y$. Dès lors que son seuil est dépassé, un site devient plastique avec un taux de transition constant $1/\tau_{pl}$. Une fois plastique, ce site retrouve sa forme élastique avec un taux $1/\tau_{el}$. L'évolution de la contrainte locale d'un site isolé prend alors la forme illustrée sur la [figure 4.2](#).

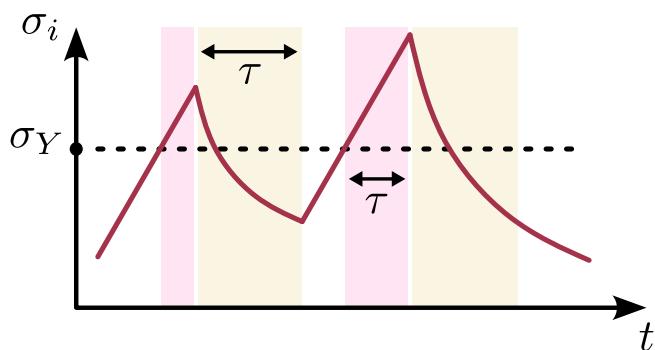


FIGURE 4.2 – Représentation schématique de l'évolution de la contrainte locale dans le modèle de Picard pour un site isolé.

Pour simplifier davantage cette approche, nous choisissons d'uniformiser les échelles de temps de telle manière que $\tau_{\text{pl}} = \tau_{\text{el}} = \tau$. On peut alors résumer ce modèle par le système d'équations suivant :

$$\partial_t \sigma_i = 2\mu \sum_j G_{ij} \partial_t \epsilon_{pl,j}, \quad \partial_t \epsilon_{pl,i} = \frac{1}{2\mu\tau} n_i \sigma_i, \quad \begin{cases} n_i : 0 \xrightarrow{\tau} 1 & |\sigma_i| > \sigma_Y \\ n_i : 0 \xleftarrow{\tau} 1 & \forall \sigma_i \end{cases} \quad (4.5)$$

avec $G_{ij} = G(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j)$ le noyau de redistribution d'Eshelby en champ lointain défini au [chapitre 1](#) et décrit en coordonnées polaires par $G(r, \theta) = \frac{\cos 4\theta}{\pi r^2}$. Cette description peut aisément se généraliser en trois dimensions mais notre étude s'est concentrée uniquement sur le cas bidimensionnel. Afin de simplifier l'implémentation numérique, ce système d'équations est adimensionné par les transformations :

$$\tilde{\sigma}_i = \frac{\sigma_i}{\sigma_Y}, \quad \tilde{t} = \frac{t}{\tau}, \quad \tilde{\epsilon}_{pl,i} = \frac{\mu\tau}{\sigma_Y} \epsilon_{pl,i} \quad (4.6)$$

pour obtenir :

$$\partial_t \tilde{\sigma}_i = \sum_j G_{ij} \partial_t \tilde{\epsilon}_{pl,j}, \quad \partial_t \tilde{\epsilon}_{pl,i} = n_i \tilde{\sigma}_i, \quad \begin{cases} n_i : 0 \xrightarrow{\tau} 1 & |\tilde{\sigma}_i| > 1 \\ n_i : 0 \xleftarrow{\tau} 1 & \forall \tilde{\sigma}_i \end{cases} \quad (4.7)$$

et nous omettrons le \sim pour alléger les notations dans la suite.

Il semble par ailleurs important de mentionner que la simplicité de ce modèle n'enlève rien à son pouvoir descriptif. En effet, pour les quantités et les phénomènes sur lesquels nous allons nous concentrer ici (exposants critiques, avalanches, ...) le modèle de Picard reproduit à l'identique les résultats des modèles plus raffinés [11], notamment ceux conservant une description tensorielle complète [40, 46].

4.2.3 Implémentation numérique

Afin de simuler l'écoulement cisaillé représenté par ce modèle, N sites sont positionnés sur une grille carrée périodique de taille $L \times L = N$ et d'axes principaux ($\hat{\mathbf{e}}_x, \hat{\mathbf{e}}_y$). La position de chaque site est alors donnée par $\mathbf{r}_i = na\hat{\mathbf{e}}_x + ma\hat{\mathbf{e}}_y$ avec $(n, m) \in \mathbb{N}^2$ et a le pas du réseau que l'on prend égal à 1. En pratique, nous considérons la règle d'évolution directement sous sa forme intégrée :

$$\sigma_i(t) = \sigma_{\text{int},i}(t) + \sigma_{\text{ext}} = \sum_j G_{ij} \epsilon_{pl,j}(t) + \Sigma \quad (4.8)$$

et l'évolution de $\epsilon_{pl,j}$ donnée par l'[équation 4.7](#) est discrétisée dans le temps, calculée sur chaque site tous les $\Delta t = 10^{-2} \tau$ selon une méthode d'Euler. À chaque pas de temps, les sites élastiques ($n_i = 0$) au-dessus du seuil microscopique ($\sigma_i > 1$) ont une probabilité $\Delta t/\tau$ de devenir plastiques tandis que les sites plastiques ont la même probabilité de redevenir élastiques.

Le point clé de l'algorithme est alors le calcul de la convolution $\sum_j G_{ij} \epsilon_{pl,j}$ puisqu'elle admet naïvement une complexité d'ordre N^2 . Afin d'optimiser nos calculs, nous tirons parti du fait que les sites soient disposés sur une grille régulière. Cela nous permet de déterminer ce terme selon une méthode pseudo-spectrale : la convolution est calculée dans l'espace de Fourier discret où

elle devient le simple produit $\hat{G}(\mathbf{q})\hat{\epsilon}_{pl}(\mathbf{q})$ puis l'on revient à sa représentation dans l'espace réel par une transformée de Fourier inverse discrète. Pour ce faire, nous implémentons directement le propagateur de Eshelby dans sa forme spectrale discrète [47] :

$$\hat{G}(\mathbf{q}) = -4 \frac{q_x^2 q_y^2}{q^4}, \quad (q_x, q_y) = \frac{2\pi}{L} \times (n, m) \quad (4.9)$$

avec $\hat{G}(\mathbf{q} = 0) = 0$ afin de conserver la contrainte totale du système. L'optimisation des algorithmes de FFT permet alors de réduire la complexité à l'ordre $N \log(N)$ [13]. De plus, l'analyse de Fourier permet de prendre en compte les limites périodiques de manière naturelle. Le schéma de calcul devenant complètement parallélisable, il est implanté sur des cartes graphiques via le langage CUDA [48] afin d'optimiser nettement la rapidité d'exécution des simulations. Grâce à ces ajustements, nous sommes capables de simuler le comportement de systèmes dont la taille va de $L = 32$ à $L = 2048$ ¹.

En pratique, le système est d'abord cisaillé sous une forte contrainte globale Σ_{preshear} durant un temps T_{preshear} avant d'être soumis brutalement à la contrainte globale souhaitée Σ . Le système évolue alors jusqu'à un état stationnaire caractérisé par une valeur moyenne du taux de déformation $\dot{\gamma} = \frac{1}{N} \sum_i \partial_t \epsilon_{pl,i}$ (voir figure 4.3-(b)), nulle pour $\Sigma < \Sigma_c$ et positive pour $\Sigma > \Sigma_c$. Nous sommes alors capables avec ce modèle de tracer la courbe d'écoulement $\langle \dot{\gamma} \rangle = f(\Sigma)$ représentée sur la figure 4.3-(c), qui montre clairement la convexité de la transition, par opposition à la concavité de celle du depinning. En étudiant le comportement du système pour $\Sigma \sim \Sigma_c$ il est alors possible de caractériser cette criticalité spécifique.

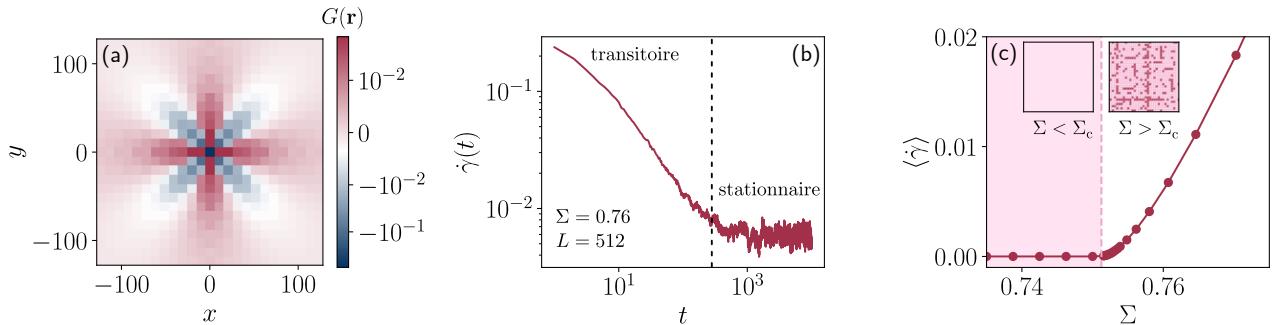


FIGURE 4.3 – Résultats de l'implémentation numérique du modèle de Picard. (a) Image du propagateur de redistribution d'Eshelby. (b) Exemple d'équilibration d'une simulation à contrainte imposée. (c) Courbe d'écoulement pour un système de taille $L = 256$.

4.2.4 Changement du paramètre de contrôle

De la même manière qu'il est possible de contrôler la contrainte globale à laquelle est soumis le système lors de la simulation, il est aussi possible de contrôler le taux de déformation $\dot{\gamma}$. Dans ce cas, les règles du modèle de Picard se voient légèrement modifiées [43]. Un terme de forçage $\mu\dot{\gamma}$ s'ajoute à l'évolution de la contrainte locale dans l'équation 4.5 et l'on a $\hat{G}(0) = -1$

1. L'algorithme de FFT étant optimisé pour des tailles de la forme 2^n avec $n \in \mathbb{N}$, nous privilégions ces tailles pour les simulations.

de telle sorte que les évènements plastiques permettent une relaxation globale du système (et plus seulement locale).

Il est alors possible d'appliquer un taux de déformation $\dot{\gamma}$ constant au système et d'observer l'évolution de la contrainte globale. Dans l'état stationnaire, cette dernière fluctue alors autour d'une valeur moyenne $\langle \Sigma \rangle$. Lorsque $\dot{\gamma}$ tend vers 0, la contrainte moyenne tend vers la contrainte seuil Σ_c . Ce changement de paramètre de contrôle permet lui aussi d'observer le comportement du système et de tracer une courbe d'écoulement $\langle \Sigma \rangle = f(\dot{\gamma})$. On remarque par ailleurs que ces deux approches sont équivalentes sous cet aspect [44].

Si la condition de contrainte imposée semble évidente dans le cas de l'étude de la transition de phase absorbante, contrôler le taux de déformation peut se révéler intéressant autant d'un point de vue numérique que du point de vue de la modélisation d'expériences réelles, comme nous le verrons par la suite.

4.3 Comportement critique

Grâce au modèle de Picard, nous sommes donc en mesure de déterminer le comportement local et global du système proche du point critique ($\Sigma = \Sigma_c, \dot{\gamma} = 0$). Des études basées sur une méthode élastoplastique similaire ont déjà permis d'analyser certaines propriétés critiques de la transition vers l'écoulement. On retrouve notamment une mesure $\beta \approx 1.5$ pour différents modèles [11, 44, 45] ou même une estimation de l'exposant ν_\perp [45]. Notre travail a pour vocation d'aller plus loin en caractérisant la transition de manière plus exhaustive et par d'autres aspects, afin de mieux contraster son comportement avec celle du depinning.

4.3.1 Transition vers l'écoulement en milieu élastique

4.3.1.1 Détermination du point critique

Méthodes

Le première étape dans l'étude d'une transition de phase est la détermination de son point critique. Ici, cela revient à mesurer la contrainte seuil globale du système Σ_c . Pour ce faire plusieurs approches sont possibles.

La première approche consiste à reproduire la méthode appliquée dans les sections précédentes sur les modèles de particules. Cela revient ici à mesurer pour différentes contraintes imposées au système Σ la valeur du taux de déformation moyen $\langle \dot{\gamma} \rangle$ dans l'état stationnaire. La contrainte seuil correspond alors à la contrainte pour laquelle la fonction $\langle \dot{\gamma} \rangle = f(\Sigma - \Sigma_c)$ est représentée par une droite sur une échelle logarithmique. Cette méthode, comme pour les modèles de particules, nécessite d'augmenter la taille du système L à mesure que l'on s'approche du point critique et que l'activité dans le système (ici représentée par $\langle \dot{\gamma} \rangle$) s'approche de 0. Cela requiert alors des temps de calcul conséquents pour une détermination précise de la contrainte seuil.

La seconde méthode, plus communément utilisée dans la littérature, est de ne pas contrôler la contrainte imposée au système mais le taux de cisaillement. De la même manière, la contrainte seuil est alors définie comme celle pour laquelle la fonction $\langle \Sigma \rangle - \Sigma_c = f(\dot{\gamma})$ est représentée par une droite sur une échelle logarithmique. L'avantage de ce choix est que lorsque le système est forcé, il ne peut jamais tomber dans l'état absorbant (puisque de fait $\dot{\gamma} > 0$). Cela permet alors de s'affranchir du tâtonnement nécessaire à la première méthode. Toutefois cette méthode n'est pas exempte de défauts. En effet, si l'on peut imposer $\dot{\gamma}$ arbitrairement petit à n'importe quelle taille de système L , dès lors que la longueur de corrélation ξ devient comparable à L , le système est soumis à des effets de taille finie. Ces effets parasitent alors la méthode de détermination graphique et incitent donc néanmoins à utiliser de plus grands systèmes à mesure que l'on s'approche du point critique.

Enfin, une troisième méthode astucieuse permet d'utiliser ces effets de taille finie afin de déterminer précisément Σ_c . Présentée dans [45], celle-ci consiste à soumettre le système à un cisaillement quasistatique selon un protocole qui sera développé à la [sous-sous-section 4.4.2.2](#). Pour chaque taille L de système il est alors possible de mesurer la contrainte moyenne dans l'état quasistatique $\langle \Sigma_c(L) \rangle$. En supposant la correction de taille finie algébrique : $\langle \Sigma_c(L) \rangle = \Sigma_c + k_1 L^{-1/\nu_\perp}$, il est alors possible de déterminer graphiquement Σ_c . Le même raisonnement peut être effectué sur les fluctuations de cette contrainte en taille finie.

Les deux premières méthodes présentent l'avantage de déterminer conjointement Σ_c et β , qui est un exposant d'intérêt principal pour nous. La troisième présente elle l'avantage de s'affranchir des effets parasites de taille finie. Toutefois, les deux dernières méthodes nécessitent la possibilité de changer de paramètre de contrôle (pour contrôler $\dot{\gamma}$ et non Σ). Elles sont donc facilement réalisables dans le cas physique mais, comme nous le verrons par la suite, cela devient moins évident dans le cadre d'une généralisation à des portées arbitraires.

Détermination à taux de cisaillement imposé

Pour l'analyse du cas physique, nous utilisons la deuxième méthode présentée. Pour des tailles de système $L \in [256, 512, 1024]$, nous réalisons des simulations à taux de cisaillement imposé. La mesure de $\langle \Sigma(\dot{\gamma}, L) \rangle$ se fait une fois l'état stationnaire atteint. Les données associées aux trois systèmes sont alors assemblées et l'on trace la fonction $\dot{\gamma} = f(\langle \Sigma \rangle - \Sigma_c)$ en échelle logarithmique pour différentes valeurs de Σ_c . Comme illustré sur la [figure 4.4](#), $\Sigma_c = 0.75125$ est une estimation convaincante de la contrainte seuil alors que $\Sigma_c^+ = 0.75130$ et $\Sigma_c^- = 0.75120$ le sont moins. Moyennant les potentiels effets de taille finie entâchant la mesure, nous retiendrons $\Sigma_c = 0.75125 \pm 0.00010$ comme détermination finale.

Via cette détermination, la pente de la courbe donne directement $\beta = 1.50 \pm 0.05$. Cette valeur est en parfait accord avec les résultats pré-existants sur les modèles élastoplastiques [11, 45], confortant de ce fait la justesse de notre méthode de détermination. L'exposant β mesuré est alors supérieur à 1, ce qui suggère bien que cette transition ne peut pas être décrite dans le cadre LR-CDP comme le depinning. De plus, cette valeur est différente de celle prédicta par le modèle champ moyen généralement associé de Hébraud et Lequeux avec $\beta = 2$ [15]. La transition vers l'écoulement semble alors présenter une criticalité à la fois spécifique et non triviale. Afin

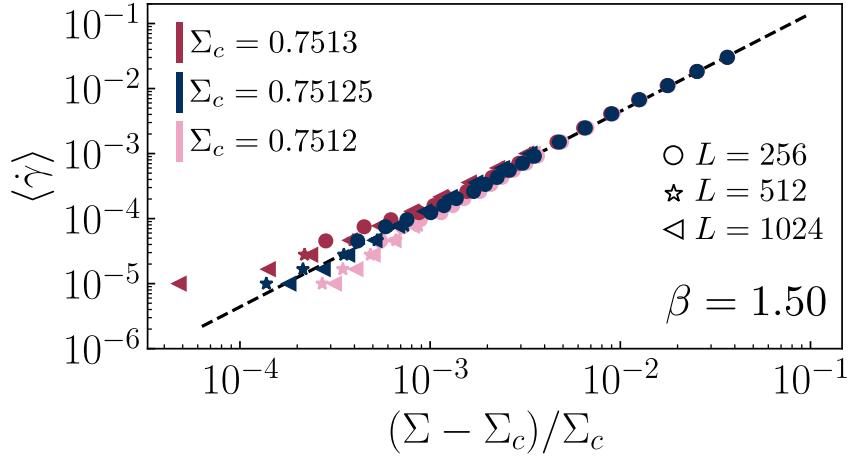


FIGURE 4.4 – Détermination de la contrainte critique pour le modèle de Picard à taux de cisaillement imposé. La courbe en tirets noirs correspond à la loi de puissance $\langle \dot{\gamma} \rangle \sim \delta \Sigma^\beta$.

de la caractériser plus précisément, nous déterminons dans la suite de cette section les autres exposants critiques associés.

4.3.1.2 Analyse d'échelle de taille finie

Difficultés dans la détermination des exposants critiques

La détermination du point critique et de l'exposant β est relativement coûteuse numériquement mais reste accessible. Pour les autres exposants γ' et ν_\perp , celle-ci peut s'avérer plus fastidieuse. En effet, dans le cas de γ' , la quantification précise de l'amplitude des fluctuations nécessite de très longues simulations. De plus le régime dans lequel $\langle \Delta \dot{\gamma}^2 \rangle$ suit effectivement une loi de puissance est souvent plus réduit et demande donc une meilleure approche du point critique. Celle-ci ne peut se faire qu'en augmentant la taille du système et donc en allongeant de ce fait le temps de simulation. De plus, dans le cas de ν_\perp , une mesure directe de la longueur de corrélation est fastidieuse du fait de l'anisotropie du modèle et de la longue portée des interactions [49].

Méthode

Afin de remédier à ces difficultés, nous proposons une méthode astucieuse inspirée des méthodes canoniques pour l'analyse des phénomènes critiques [14]. La difficulté première dans l'analyse de cette transition venant de la présence d'états absorbants, cette méthode permet de les supprimer. De la même manière que l'ajout d'un champ magnétique dans le modèle d'Ising permet de favoriser l'une des phases [50], nous ajoutons au modèle un champ d'activation permettant de favoriser la phase active. En pratique, nous ajoutons une règle au modèle de Picard. Désormais, un site élastique peut devenir plastique peu importe sa contrainte locale. Cette nouvelle voie d'activation se fait selon un taux de transition h qui représente alors l'intensité du champ d'activation :

$$n_i : 0 \xrightarrow{h} 1, \quad \forall \sigma_i. \quad (4.10)$$

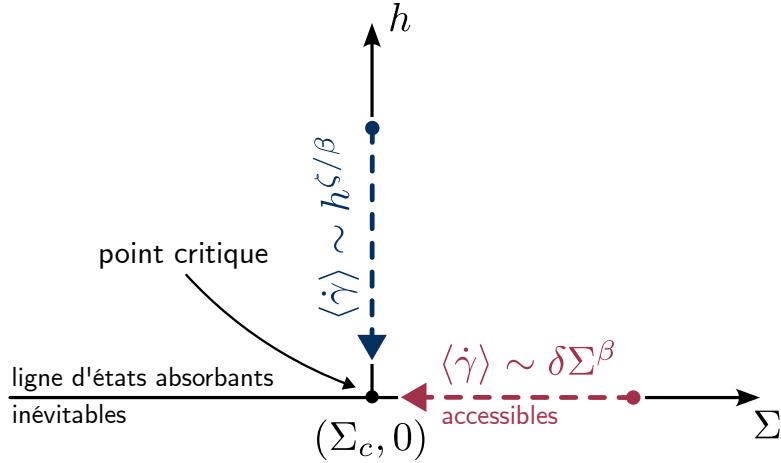


FIGURE 4.5 – Représentation schématique du principe de l'ajout d'un champ d'activation h .

De ce fait, dès lors que $h > 0$ le système ne peut pas tomber dans un état absorbant, quelque soit Σ . Cela revient à ajouter un paramètre de contrôle et donc une nouvelle dimension au diagramme critique, relocalisant le point critique en $(\Sigma = \Sigma_c, h = 0)$, à la marge d'une zone non absorbante (voir figure 4.5). En se plaçant à $\Sigma = \Sigma_c$ et $h > 0$, faire tendre h vers 0 constitue ainsi un nouveau moyen de s'approcher du point critique sans aucun risque de tomber dans un état absorbant. En ce sens, imposer un champ d'activation h est tout à fait analogue à imposer un taux de cisaillement $\dot{\gamma}$. Il est alors possible de sonder les propriétés critiques du système aussi près que l'on veut de la transition.

Néanmoins, comme dans le cas où l'on impose le taux de cisaillement $\dot{\gamma}$, dès lors que $\xi \sim L$ le système est soumis à des effets de taille finie. L'idée de l'analyse d'échelle en taille finie est alors de faire de ces effets de taille finie une force. Comme nous l'avons présenté au chapitre 1, dans le régime critique et pour un système de taille infinie, les observables physiques sont des fonctions homogènes des paramètres de contrôle. En adaptant les notations au cas de la transition vers l'écoulement, cela signifie que l'on peut écrire $\langle \dot{\gamma} \rangle$ comme :

$$\langle \dot{\gamma} \rangle \sim \lambda^{-\beta} R(a_\Sigma \lambda \delta \Sigma, a_h \lambda^\zeta h) \quad (4.11)$$

avec R une fonction universelle homogène de ses arguments, a_i des paramètres non-universels et $\lambda \in \mathbb{R}$. ζ représente alors un nouvel exposant critique caractérisant le champ d'activation h . En effet si l'on se place en $\Sigma = \Sigma_c$ et que l'on pose $\lambda = (a_h h)^{-1/\zeta}$ alors on obtient :

$$\langle \dot{\gamma} \rangle \sim (a_h h)^{\beta/\zeta} R(0, 1) \quad (4.12)$$

et donc $\langle \dot{\gamma} \rangle \sim h^{\beta/\zeta}$. Afin d'intégrer les effets de taille finie dans cette description, nous considérons L comme un nouveau paramètre de contrôle dont les propriétés d'échelle sont décrites par le même exposant ν_\perp que la longueur de corrélation ξ :

$$\langle \dot{\gamma} \rangle \sim \lambda^{-\beta} \tilde{R}(a_\Sigma \lambda \delta \Sigma, a_h \lambda^\zeta h, a_L L \lambda^{-\nu_\perp}) \quad (4.13)$$

En prenant alors $\Sigma = \Sigma_c$ et $\lambda = (a_L L)^{1/\nu_\perp}$ on obtient :

$$\langle \dot{\gamma} \rangle \sim (a_L L)^{-\beta/\nu_\perp} \tilde{R}(0, a_h (a_L L)^{\zeta/\nu_\perp} h, 1) \quad (4.14)$$

\tilde{R} étant une fonction universelle, cela signifie qu'en redimensionnant $\langle \dot{\gamma} \rangle$ par $(a_L L)^{-\beta/\nu_\perp}$ et h par $(a_L L)^{-\zeta/\nu_\perp}/a_h$, les courbes $\langle \tilde{\dot{\gamma}} \rangle = f(\tilde{h})$ ainsi représentées ne dépendent pas de la taille du système choisie. En des termes graphiques, les courbes obtenues pour différents L se superposent, même au niveau des effets de taille finie. On peut alors établir une méthode graphique de détermination des exposants : en traçant les courbes $\langle \dot{\gamma} \rangle = f(h)$ pour différentes tailles L , les exposants critiques sont déterminés comme ceux définissant le redimensionnement permettant la superposition de toutes les courbes. En pratique, étant donné que cette étude ne sera menée que sur ce modèle spécifique, nous oublierons les paramètres non-universels a_i .

Ce raisonnement peut être mené sur deux autres quantités mesurables dans l'état stationnaire : la variance du taux de cisaillement global $\langle \Delta \dot{\gamma}^2 \rangle$ et son cumulant de Binder Q [51] défini selon :

$$Q = 1 - \frac{\langle \dot{\gamma}^4 \rangle}{3\langle \dot{\gamma}^2 \rangle^2} \quad (4.15)$$

L'universalité est alors obtenue avec le redimensionnement de $\langle \Delta \dot{\gamma}^2 \rangle$ par L^{γ'/ν_\perp} tandis que Q ne nécessite pas de redimensionnement. La méthode que nous suivons pour la détermination des exposants est donc la suivante :

- par l'étude du cumulant Q nous déterminons ζ/ν_\perp .
- par l'étude de $\langle \dot{\gamma} \rangle$ nous déterminons β/ν_\perp .
- en utilisant la valeur mesurée de β nous déduisons ζ et ν_\perp .
- par l'étude de $\langle \Delta \dot{\gamma}^2 \rangle$ nous déterminons γ' .

Cette méthode peut en réalité être adaptée au cas similaire où le taux de cisaillement $\dot{\gamma}$ est imposé comme c'est le cas dans [45]. Néanmoins notre méthode présente l'avantage de conserver la contrainte comme paramètre de contrôle et donc de permettre l'accès aux fluctuations de taux du cisaillement.

Résultats

Nous simulons l'écoulement du système avec des tailles allant de $L = 32$ à $L = 1024$ et des valeurs de h allant de 10^{-7} à 10^{-2} . En appliquant la méthode décrite précédemment, il est possible d'obtenir la meilleure estimation des exposants ζ , ν_\perp et γ' grâce aux superpositions de courbes représentées à la figure 4.6. La justesse des superpositions obtenues valide notre approche d'échelle et nous permet d'obtenir des estimations plus précises que via une méthode d'ajustement classique. Les valeurs des exposants sont alors reportées dans le tableau 4.1. Notons que si cette transition est largement étudiée, la valeur des exposants γ' et ζ n'avait encore jamais été déterminée.

La valeur de l'exposant lié à la longueur de corrélation $\nu_\perp \approx 1.13$ est en accord avec celle trouvée dans le cas d'un autre modèle élastoplastique [45]. De plus, elle est légèrement supérieure à celle associée au champ moyen de la CDP ($\nu_{\perp,CDP}^{CM} = 1$), confirmant ainsi le désaccord avec le scénario de type LR-CDP du depinning.

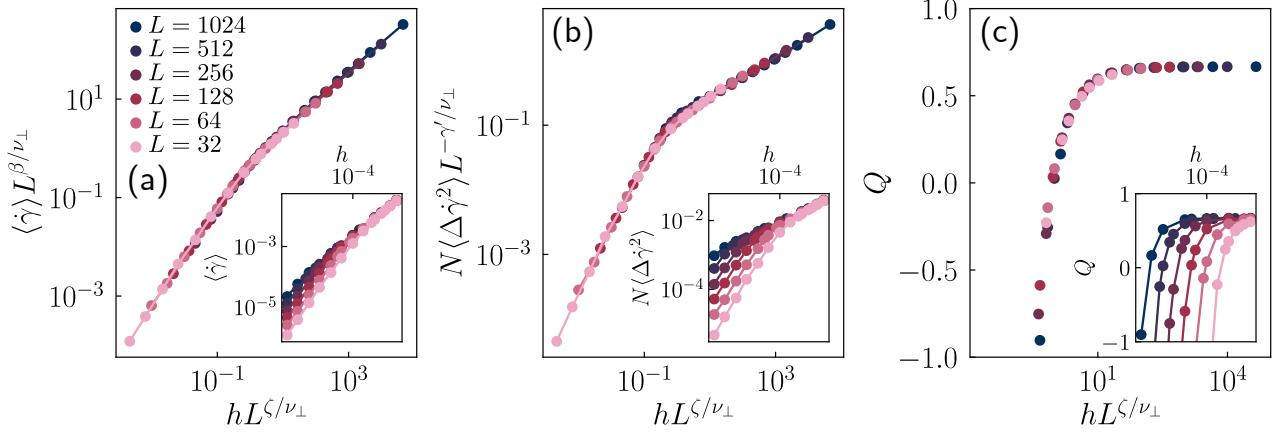


FIGURE 4.6 – Analyse d'échelle de taille finie pour le modèle de Picard. Redimensionnement de l'évolution de (a) la valeur moyenne du taux de cisaillement, (b) de la variance taux de cisaillement, (c) du cumulant de Binder. En inset, nous représentons les données brutes avant redimensionnement.

Modèle/Classe	β	γ'	ν_{\perp}	ζ
Picard	1.5	-0.70	1.1	2.5
Picard-CP	0.59	0.26	0.70	2.1
FES $^{\pm}$	0.62	0.36	0.79	2.25
CDP [14]	0.64	0.37	0.80	2.23

TABLE 4.1 – Exposants critiques déterminés dans le modèle de Picard, le modèle Picard-CP, le modèle FES $^{\pm}$ et les exposants attendus pour la classe CDP.

4.3.1.3 Relation d'hyperscaling

L'exposant lié aux fluctuations critiques prend lui une valeur $\gamma' \approx -0.7$, elle aussi très différente de celle associée au champ moyen de la CDP ($\gamma'_{\text{CDP}}^{CM} = 0$). Mais le point le plus intéressant est que cette valeur est négative. Cela signifie que lorsque l'on approche la contrainte seuil du système, les fluctuations du taux de déformation diminuent et finissent par s'annuler complètement au point critique exactement. Ce comportement est assez contre-intuitif de prime abord. En effet, du fait du renforcement des corrélations spatiales et temporelles à l'approche du point critique, le scénario habituel des phénomènes critiques présente des fluctuations critiques qui, au contraire, divergent [50]. Cette observation surprenante permet néanmoins de satisfaire la relation d'hyperscaling introduite au chapitre 1 :

$$\gamma' = \nu_{\perp} D - 2\beta \quad (4.16)$$

pour laquelle on trouve ici $(2\beta + \gamma')/\nu_{\perp} D \approx 1.01$.

Cette dernière peut en fait être rationalisée par un scénario simple dans le cas de la transition vers l'écoulement. Dans l'état stationnaire, le système peut être vu comme une collection de $(L/\xi)^D$ sous-systèmes indépendants de taille $\xi \times \xi$. Conforté par le scénario proposé dans [45], dans chaque compartiment le taux de cisaillement moyen $\langle \dot{\gamma} \rangle_{\xi}$ est imposé par celui produit par

les plus grands évènements, ici d'extension spatiale ξ . Les compartiments étant indépendants, chacun d'entre eux possède un taux de cisaillement moyen égal au taux de cisaillement moyen global du système $\langle \dot{\gamma} \rangle$. Supposé alors que la durée des évènements et leur période d'apparition suivent les mêmes lois d'échelles, la variance du taux de cisaillement dans chaque compartiment, qui est une quantité positive, se comporte comme le carré du taux de cisaillement moyen $\langle \Delta \dot{\gamma}^2 \rangle_\xi \sim \langle \dot{\gamma} \rangle_\xi^2 \sim \langle \dot{\gamma} \rangle^2$. La variance globale $\langle \Delta \dot{\gamma}^2 \rangle$ est alors l'addition de celle de tous les compartiments indépendants :

$$\langle \Delta \dot{\gamma}^2 \rangle \sim \left(\frac{L}{\xi} \right)^D \langle \Delta \dot{\gamma}^2 \rangle_\xi \sim \left(\frac{L}{\xi} \right)^D \langle \dot{\gamma} \rangle^2 \quad (4.17)$$

ce qui permet d'arriver à la relation d'hyperscaling en ré-exprimant toutes les grandeurs en fonction de la distance au point critique $\delta\Sigma$. En d'autres termes, l'évolution des fluctuations du taux de cisaillement est le fruit de deux phénomènes en compétition. D'une part à l'approche de la transition le nombre de zones indépendantes spatialement diminue, augmentant de ce fait les fluctuations globales (terme $\nu_\perp D$ dans l'équation [équation 4.16](#)). D'autre part le taux de cisaillement moyen, et donc sa variance, diminue dans chacune de ces zones à l'approche du point critique (terme -2β dans l'équation [équation 4.16](#)). Dès lors que l'exposant β est suffisamment grand, l'exposant γ' est donc susceptible de devenir négatif, ce qui est bien le cas ici.

4.3.2 De l'importance de la longue portée - Modèles d'écoulement à courte portée

Grâce au modèle de Picard, nous avons donc pu estimer les exposants critiques liés à la transition vers l'écoulement. Cette analyse dans le cas physique des interactions d'Eshelby montre donc qu'elle ne peut être comprise dans le cadre de la théorie LR-CDP, comme c'est le cas du depinning. Pour poursuivre cette étude, nous proposons alors d'identifier des caractéristiques du modèle qui pourraient expliquer ce désaccord. Pour ce faire, nous commençons par étudier l'importance de la longue portée des interactions de redistribution.

4.3.2.1 Le modèle Picard-CP

Pour ce faire, nous produisons la même analyse mais sur une variation du modèle de Picard que l'on nommera Picard-CP pour "Picard courte portée". Le modèle Picard-CP reprend alors toutes les règles du modèle de Picard mais considère une interaction différente. Celle-ci porte uniquement sur les premiers voisins, supprimant ainsi tous les effets de la longue portée de l'interaction. Pour conserver toutes choses égales par ailleurs, le noyau de redistribution choisi conserve la symétrie particulière du noyau d'Eshelby et prend donc la forme décrite sur la [figure 4.7-\(a\)](#). Nous nous attendons alors à ce que ce modèle appartienne à la classe CDP puisqu'il ressemble fortement à un modèle de tas de sables, comme le modèle Manna. Nous rappelons que cette classe d'universalité est décrite par les exposants récapitulés dans le [tableau 4.1](#).

Pour déterminer la contrainte critique associée à ce nouveau modèle, nous utilisons la méthode de contrainte imposée présentée à la [sous-sous-section 4.3.1.1](#). Dans ce cas, il n'y a en fait aucune manière naturelle de changer le paramètre de contrôle du système pour contrôler le taux de cisaillement. En effet, cela demanderait d'ajouter une composante de relaxation globale au

noyau de redistribution qui peut alors prendre n'importe quelle forme (uniforme, locale, ...), et qui a priori ne donnera pas la même courbe d'écoulement que dans des conditions de contrainte imposée. En utilisant des systèmes de tailles allant de $L = 256$ à $L = 1024$, nous obtenons les résultats présentés sur la figure 4.7-(b), permettant de déterminer la contrainte seuil comme étant $\Sigma_c = 0.75433 \pm 0.00005$ et l'exposant $\beta = 0.59 \pm 0.02$. On trouve alors une courbe d'écoulement concave, plus communément attendue dans le cadre des phénomènes critiques. Un point à noter est que la détermination du point critique se révèle ici beaucoup plus simple que dans le cas physique en termes de temps de calcul. Cela vient directement du caractère concave de la transition qui permet de s'approcher tout aussi près du point critique sans pour autant avoir à descendre à des taux de cisaillement très faibles.

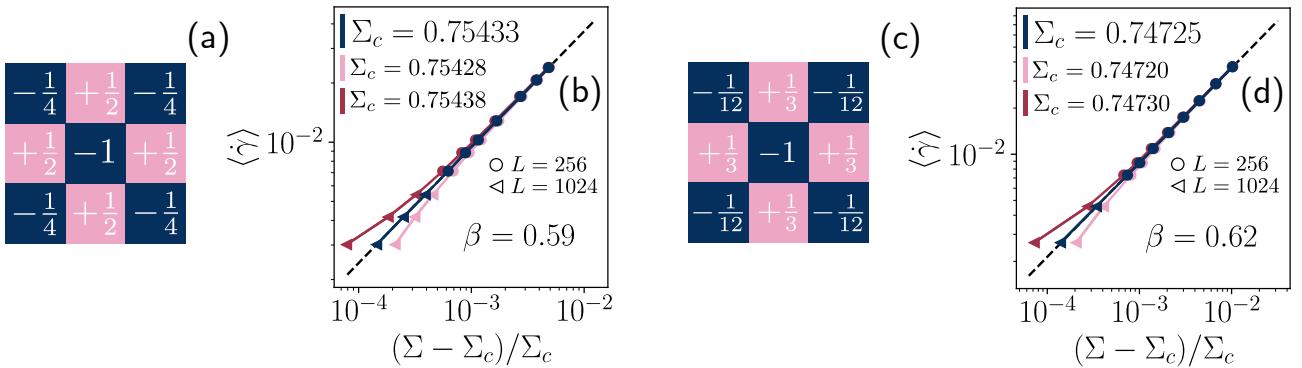


FIGURE 4.7 – Détermination de la contrainte critique Σ_c et de l'exposant β pour le modèle Picard-CP (b) (dont le propagateur est représenté en (a)) et pour le modèle FES^\pm (c) (dont le propagateur est représenté en (d))

La valeur obtenue de l'exposant β est alors très proche de celle attendue pour la classe CDP, même si la mesure numérique semble s'en éloigner très légèrement. Cet écart n'est pas non plus dérisoire puisque c'en est un du même ordre de grandeur qui permet de séparer les classes PD et CDP par exemple [14]. Afin de confirmer ou réfuter l'hypothèse que CDP, comme pour le depinning, est la classe représentant le modèle Picard-CP, nous le caractérisons grâce à une analyse d'échelle de taille finie. En simulant des systèmes pour des tailles allant de $L = 32$ à $L = 512$, la meilleure superposition des courbes après redimensionnement est représentée figure 4.8-(a)-(c). Les valeurs des exposants critiques estimées sont alors reportées dans le tableau 4.1.

La première observation à faire est que l'exposant lié aux fluctuations $\gamma' \approx 0.26$ est positif. On retrouve donc le comportement canonique des fluctuations critiques qui divergent à l'approche de la transition, conjointement au fait de retrouver une valeur de l'exposant β relativement petite. Par ailleurs, avec la valeur mesurée plus faible de l'exposant $\nu_\perp \approx 0.7$, la relation d'hyperscaling est encore une fois très bien vérifiée avec $(2\beta + \gamma')/\nu_\perp D \approx 1.03$. Le scénario proposé à la section précédente est donc toujours envisageable, mais le terme 2β subit une variation plus importante que le terme $\nu_\perp D$ ce qui inverse le rapport de force entre les deux phénomènes en compétition.

Par ailleurs, les exposants ν_\perp , ζ et γ' prennent eux aussi des valeurs proches des valeurs attendues pour la classe CDP, mais semblent pourtant discernablement différents. Pour se

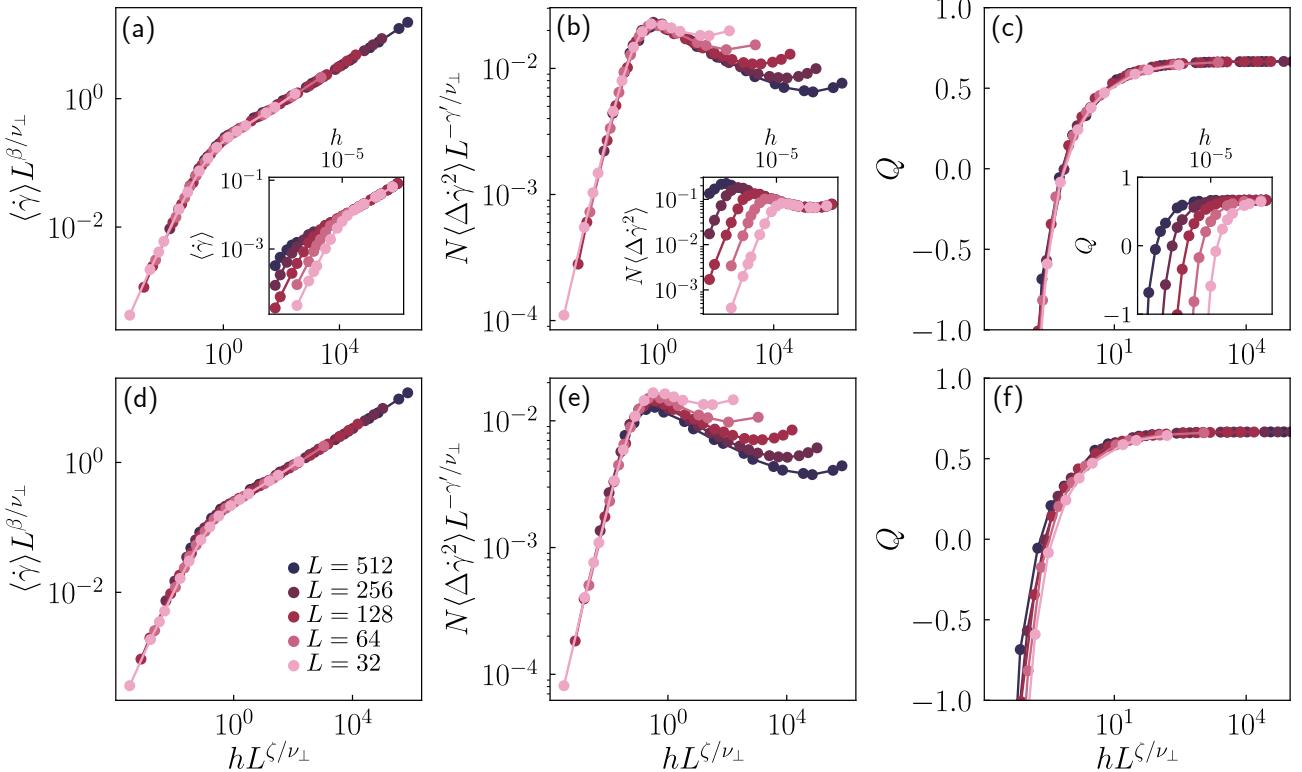


FIGURE 4.8 – Analyse d'échelle de taille finie dans le cas du modèle Picard-CP. Les redimensionnements de la valeur moyenne (a), de la variance (b) et du cumulant de Binder (c) du taux de cisaillement sont représentés en figures principales et les données brutes en inset. Les figures (d), (e) et (f) montrent ces mêmes redimensionnement avec les exposants connus de la classe CDP [14].

convaincre de cette différence, nous utilisons les exposants associés à la classe CDP pour la procédure de redimensionnement. Si cette classe est bien la représentante du modèle, alors la superposition dans ce cas devrait être au moins aussi convaincante. La superposition des courbes obtenue dans ce cas est présentée sur la figure 4.8-(d)-(f). On remarque alors que celle-ci est de qualité bien moindre, notamment dans le cas de la variance et du cumulant de Binder. En effet, la zone de changement de tendance pour la variance (i.e. la bosse figure 4.8-(e)) marque un désaccord entre les différentes courbes tandis que la superposition des cumulants Q est relativement mauvaise à petits h . Les exposants précédemment estimés permettant d'améliorer fortement ces désaccords, cette analyse suggère que le modèle Picard-CP n'appartient pas à la classe d'universalité CDP. Cela peut paraître surprenant car toutes les conditions de la conjecture de Rossi et. al [52] semblent être réunies ici.

4.3.2.2 Modes zéros, propriété fondamentale de la transition vers l'écoulement

Si le modèle fait bien intervenir une infinité d'états absorbants, des interactions à courte portée et une quantité conservée, il n'est pas dépourvu de symétrie supplémentaire. En effet, si l'on se penche sur la structure du noyau de redistribution, on remarque que la somme des contributions sur chaque ligne et chaque colonne est nulle (voir figure 4.9-(a)). Cette symétrie n'est pas anodine puisqu'elle implique qu'au cours de l'écoulement la contrainte portée par

une ligne ou une colonne est conservée. Le système n'est donc pas contraint uniquement par la conservation de la contrainte globale mais aussi par celle de $2L$ contraintes partielles. En espace de Fourier, cette symétrie correspond à $\hat{G}(q_x = 0, q_y) = \hat{G}(q_x, q_y = 0) = 0$, qui est bien apparente dans le cas du modèle Picard-CP où l'on a :

$$\hat{G}(\mathbf{q}) = \cos(q_x) + \cos(q_y) - \cos(q_x)\cos(q_y) - 1 \quad (4.18)$$

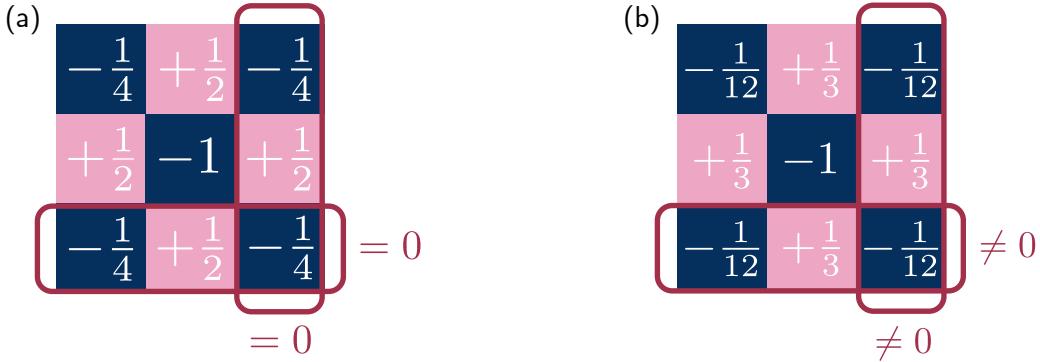


FIGURE 4.9 – Illustration de la propriété de mode zéro dans le cas du modèle Picard-CP (a) et sa brisure dans le cas du modèle FES^\pm (b)

Cette propriété est en fait une propriété déjà connue et étudiée dans le cas classique [34, 53]. En effet, d'après l'équation 4.9 on a de même pour l'interaction d'Eshelby $\hat{G}(q_x = 0, q_y) = \hat{G}(q_x, q_y = 0) = 0$. Cette conservation supplémentaire peut être interprétée sous un autre angle. Si un évènement plastique ne modifie pas la contrainte partielle portée par chaque ligne et colonne, alors une ligne ou colonne d'évènements ne modifie pas l'état de contrainte locale du système. En termes de physique d'équilibre, si l'on s'accorde ce parallèle, ces lignes plastiques ont un coût énergétique nul et peuvent donc être qualifiées de "modes mous". C'est cette propriété qui explique pourquoi ce système, proche du point critique, présente une activité plastique organisée sous-forme de clusters de faible compacité, presque linéaires (voir figure 4.10). Les bandes de cisaillement [12, 54] sont alors la représentation à son paroxysme de cette symétrie. Ces corrélations observées dans différents dispositifs expérimentaux montrent par ailleurs que cette propriété n'est pas uniquement un artefact numérique mais a un impact bien réelle sur la physique du phénomène d'écoulement. Par analogie avec les modes mous de la physique d'équilibre et la condition dans l'espace de Fourier, nous appellerons ces modes de plasticité "modes zéros".

Dans le cas classique, cette propriété de modes zéros qui se retrouve dans le noyau d'Eshelby n'est pas un hasard. En effet, elle vient du fait que l'interaction considérée est regardée dans la théorie de l'élasticité linéaire à l'équilibre mécanique. Cela implique donc que la divergence du tenseur des contraintes est nulle à tout moment de l'écoulement :

$$\partial_i \sigma_{ij} = 0 \Rightarrow \begin{cases} \partial_x \sigma_{xx} + \partial_y \sigma_{yx} = 0 \\ \partial_y \sigma_{yy} + \partial_x \sigma_{xy} = 0 \end{cases} \quad (4.19)$$

En intégrant alors sur x la première équation et sur y la seconde, et en se rappelant que $\sigma_{xy} = \sigma_{yx}$ on a :

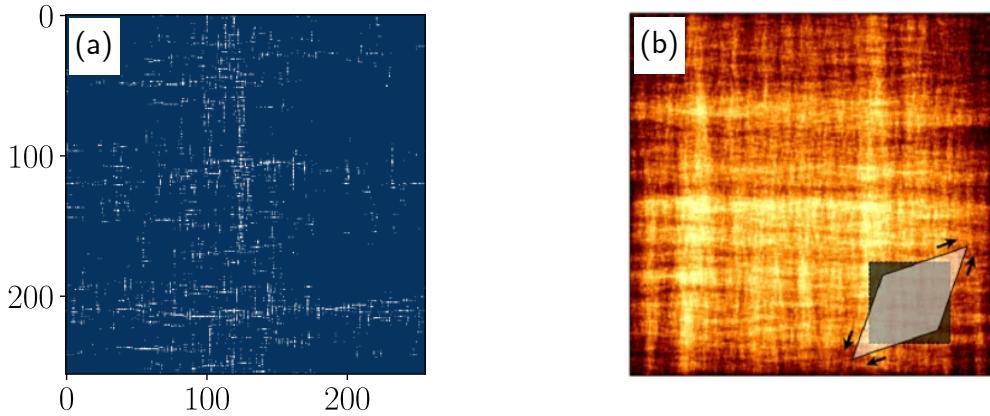


FIGURE 4.10 – (a) Carte d’activité plastique cumulée au cours d’une simulation du modèle de Picard. Les zones blanches représentent des zones de forte activité plastique. (b) Même carte dans le cas d’un modèle élastoplastique tensoriel implémenté par une méthode d’éléments finis [46]

$$\partial_x \int dy \sigma_{xy} = \partial_y \int dx \sigma_{xy} = 0 \quad (4.20)$$

ce qui implique que la contrainte partielle portée par chaque ligne et colonne est la même. Le propagateur de redistribution d’Eshelby qui répond à cette contrainte d’équilibre mécanique doit donc redistribuer la même contrainte partielle sur chaque ligne et colonne. De plus, étant de moyenne nulle afin de conserver la contrainte globale, cette contrainte partielle redistribuée est nécessairement nulle.

4.3.2.3 Retour à l’universalité et classe CDP-0

Afin de confirmer l’hypothèse que le modèle Picard-CP ne tombe pas dans la classe CDP du fait de la présence de modes zéros, nous étudions une troisième variation du modèle. Tout en conservant les mêmes règles par ailleurs, le noyau d’interaction sur les plus proches voisins est modifié de sorte que les modes zéros disparaissent (voir figure 4.9). Ceci se fait tout en gardant la symétrie quadrupolaire de l’interaction et donc des signes alternés. En ce sens, nous appelons ce modèle FES \pm du fait de sa forte ressemblance avec les modèles de tas de sable à énergie conservée (fixed-energy sandpiles) mais qui ne présentent en général que des redistributions de masse positives.

Nous déterminons alors le point critique associé à ce modèle de la même manière que pour le précédent. Les résultats présentés sur la figure 4.7-(c) donnent $\Sigma_c \approx 0.74725 \pm 0.00005$ et $\beta = 0.62 \pm 0.02$. On remarque alors d’abord un accord légèrement meilleur avec l’exposant β attendu pour la classe CDP. Afin de confirmer ce rapprochement, nous conduisons la même analyse d’échelle de taille finie. Les résultats obtenus pour le meilleur redimensionnement sont présentés figure 4.11-(a)-(c). Les exposants ν_\perp , ζ et γ' ont alors des valeurs estimées toutes plus proches des valeurs attendues pour la classe CDP que dans le cas du modèle Picard-CP (voir tableau 4.1).

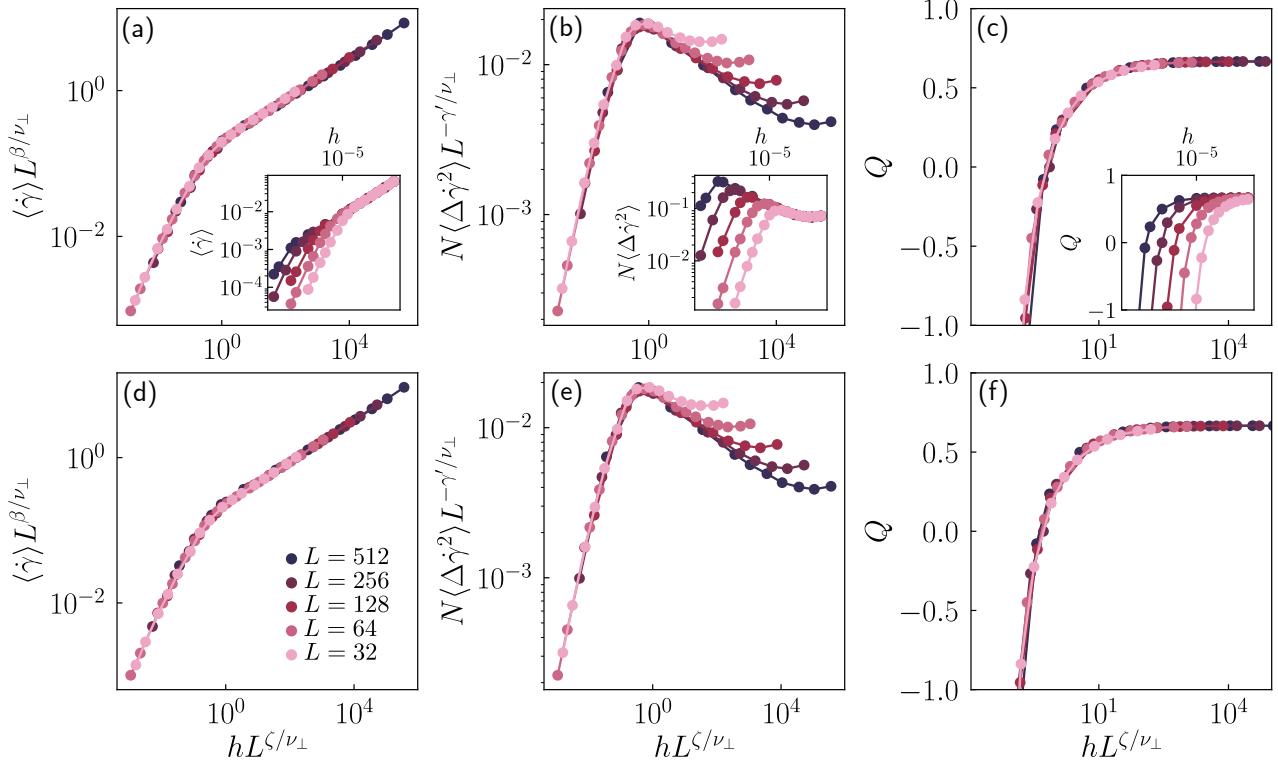


FIGURE 4.11 – Analyse d'échelle de taille finie dans le cas du modèle FES^\pm . Les redimensionnements de la valeur moyenne (a), de la variance (b) et du cumulant de Binder (c) sont représentés en figures principales et les données brutes en inset. Les figures (d), (e) et (f) montrent ces mêmes redimensionnement avec les exposants connus de la classe CDP.

Afin de confirmer que ce troisième modèle présente bien la criticalité de la percolation dirigée conservée, nous effectuons les redimensionnements des quantités avec les exposants critiques de cette classe. Les résultats sont exposés sur la figure 4.11-(d)-(f). Nous observons alors que les superpositions des courbes sont aussi convaincantes dans ce cas que lors d'une estimation indépendante des exposants. Cela nous permet d'affirmer raisonnablement que ce modèle tombe donc bien dans la classe CDP. Cette analyse renforce alors l'idée que le modèle Picard-CP présente une criticalité proche mais différente du fait de sa symétrie additionnelle, le différenciant ainsi des modèles de depinning à courte portée. Nous proposons alors de considérer ce nouveau comportement critique comme représentant d'une nouvelle classe d'universalité que nous appellerons CDP-0 pour des raisons évidentes.

Une critique pouvant être apposée à cette conclusion est que le modèle Picard-CP peut être sujet à des corrections d'échelle [55]. Ainsi, plus proche du point critique, pour des plus grands systèmes, la spécificité des modes zéro s'effacerait pour laisser place à la criticalité CDP. Si cette objection ne peut jamais être vraiment réfutée, la présence de telles corrections n'a pas pu être mise en évidence sur les données présentées. De plus, un autre indice penchant en faveur de notre interprétation est la visualisation de la répartition de l'activité plastique. Sur la figure 4.12, nous comparons la répartition de plasticité dans le cas du modèle Picard-CP et dans le cas du modèle FES^\pm . Comme on peut le remarquer, il semblerait qu'à des échelles raisonnables les clusters d'activité présentent des différences. Notamment, la répartition d'activité dans le cas du modèle

Picard-CP semble présenter des structures anisotropes, de compacité inférieure, suggérant un effet important des modes zéros. Il est bien sûr toujours possible qu'à plus grande échelle cette structure disparaîtse, mais cet indice s'ajoute au faisceau conduisant à considérer CDP-0 comme une nouvelle classe à part entière.

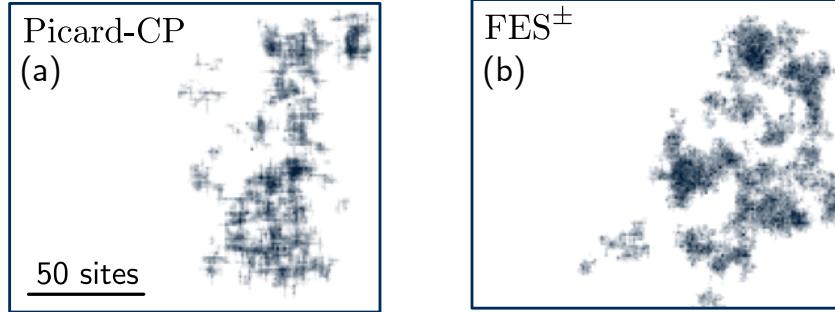


FIGURE 4.12 – Cartes d’activité plastique cumulée au cours d’une simulation pour le modèle Picard-CP (a) et le modèle FES^\pm (b). Les zones foncées correspondent aux zones de forte activité plastique.

Une description continue différente

Un dernier argument en la faveur de l’existence d’une telle classe d’universalité se base sur une description en termes de théorie continue des champs. Dans le cas de la classe d’universalité CDP, la quantité conservée ρ suit une dynamique non diffusive dépendante de la répartition spatiale de l’activité A dans le système : $\partial_t \rho = D \Delta A$ (voir chapitre 1). Dans notre système, le champ dynamique conservé est la contrainte σ tandis que l’activité peut être directement associée au taux de déformation plastique $\partial_t \epsilon_{pl}$. Une description de type CDP donnerait donc :

$$\partial_t \sigma(\mathbf{r}, t) = D \Delta A(\mathbf{r}, t) \quad (4.21)$$

où l’on a noté $A(\mathbf{r}, t) = \partial_t \epsilon_{pl}(\mathbf{r}, t)$ pour alléger l’écriture. Cette forme d’évolution du champ de contrainte est en réalité très proche de la règle d’évolution implémentée dans les variations du modèle de Picard étudiées. On a en effet sur la grille discrète en deux dimensions :

$$\partial_t \sigma_{i,j} = \sum_{k,l} G_{k,l} A_{i-k,j-l} \quad (4.22)$$

où l’on a utilisé la notation discrète $f_{ij} = f(x = ia, y = ja)$ avec $(i, j) \in \mathbb{N}^2$ et a le pas du réseau. On peut alors se demander comment cette équation se traduit dans le cas continu afin d’en inférer une équation de type CDP.

Nous introduisons dans ce but les densités continues de contrainte $\sigma(x, y)$ et d’activité $A(x, y)$ associées à leurs homologues discrets $\sigma_{i,j}$ et $A_{i,j}$:

$$A_{i,j} = \left(\frac{a}{L}\right)^2 A(x = i\frac{a}{L}, y = j\frac{a}{L}), \quad \sigma_{i,j} = \left(\frac{a}{L}\right)^2 \sigma(x = i\frac{a}{L}, y = j\frac{a}{L}) \quad (4.23)$$

avec L la taille du système. Dans la limite $(a/L) \rightarrow 0$, les densités continues correspondent aux champs de la théorie dynamique. L’équation d’évolution du modèle peut alors se ré-écrire selon :

$$\partial_t \sigma(x, y) = \sum_{k,l} G_{k,l} A(x - k \frac{a}{L}, y - l \frac{a}{L}). \quad (4.24)$$

Les propagateurs des deux modèles considérés étant de relative courte portée, la somme se restreint aux petites valeurs des entiers k et l . Il est alors naturel de développer la densité continue d'activité autour de (x, y) :

$$A(x - k \frac{a}{L}, y - l \frac{a}{L}) = \sum_{n,m=0}^{\infty} (-1)^{n+m} \left(\frac{a}{L}\right)^{n+m} \frac{k^n l^m}{n! m!} \partial_x^n \partial_y^m A(x, y). \quad (4.25)$$

De plus, dans le cas du modèle Picard-CP, le propagateur G présente une symétrie C_4 et des modes zéros. De ce fait, seuls les termes correspondant à des puissances n et m paires et strictement positives survivent à la convolution discrète. On obtient alors :

$$\partial_t \sigma(x, y) = \sum_{u,v=1}^{\infty} K_{u,v} \left(\frac{a}{L}\right)^{2(u+v)} \partial_x^{2u} \partial_y^{2v} A(x, y), \quad K_{u,v} = \sum_{k,l} G_{k,l} \frac{k^{2u} l^{2v}}{(2u)!(2v)!} \quad (4.26)$$

Pour obtenir une description de champ de type CDP, on s'intéresse à la limite continue de grande échelle où $a/L \rightarrow 0$. Dans ce cas, le terme dominant est le premier de la somme et on a alors :

$$\partial_t \sigma(x, y) = \left(\frac{a}{L}\right)^4 K \partial_x^2 \partial_y^2 A(x, y), \quad K \equiv K_{1,1} \quad (4.27)$$

En redimensionnant le temps selon $t' = t(a/L)^4$, nous obtenons donc finalement pour le modèle Picard-CP :

$$\partial_{t'} \sigma(x, y) = K \partial_x^2 \partial_y^2 A(x, y). \quad (4.28)$$

Dans le cas du modèle FES $^\pm$, la contrainte des modes zéros est relâchée et donc les puissances n et m nulles survivent aussi à la convolution, à l'exception de $(n = 0, m = 0)$ qui disparaît par moyenne nulle du propagateur. Dans ce cas la même procédure donne comme équation continue :

$$\partial_t \sigma(x, y) = \left(\frac{a}{L}\right)^2 K' \partial_x^2 \partial_y^2 A(x, y), \quad K' \equiv K_{1,0} = K_{0,1} \quad (4.29)$$

Et donc en redimensionnant le temps cette fois selon $t'' = t(a/L)^2$, nous obtenons :

$$\partial_{t''} \sigma(x, y) = K' \Delta A(x, y). \quad (4.30)$$

Si l'équation inférée du modèle FES $^\pm$ est bien la même que celle de la théorie CDP, celle inférée du modèle Picard-CP est fondamentalement différente. Cette différentiation originiaire des modes zéros est remarquable, mais comprendre comment elle pourrait modifier le comportement critique associé est une tâche difficile. Cela impliquerait l'utilisation d'outils théoriques que nous ne maîtrisons pas. Néanmoins, cela constitue un indice supplémentaire allant dans la direction de la caractérisation d'une nouvelle classe d'universalité.

L'analyse de ces deux modèles de courte portée permet donc de mettre en évidence l'importance des modes zéros et suggère donc une importance similaire si ce n'est plus grande dans le cas physique, en présence d'interactions à longue portée. Ceux-ci pourraient notamment permettre d'expliquer en partie la différence entre transition vers l'écoulement et depinning à longue portée.

4.3.3 Situer la transition vers l'écoulement

La modification brutale de la portée dans le modèle de Picard a permis de mettre en évidence des éléments intéressants. Afin de situer ce modèle ni courte portée ni champ moyen dans une image globale compréhensible, il est nécessaire de s'intéresser au comportement critique dans le cas de portées intermédiaires.

4.3.3.1 Le modèle α -Picard

Pour ce faire, nous généralisons le modèle de Picard à une portée d'interaction arbitraire, i.e. $G(\mathbf{r}) \sim 1/r^\alpha$. Pour conserver les propriétés centrales du propagateur classique d'Eshelby (symétrie quadrupolaire, modes zéros) nous définissons cette continuité de propagateurs dans l'espace de Fourier selon :

$$\hat{G}(\mathbf{q}) = -b_\alpha \frac{q_x^2 q_y^2}{q^{6-\alpha}} \quad (4.31)$$

Dans l'espace réel, le calcul détaillé en [sous-sous-section 6.2.1.1](#) donne la forme suivante pour l'interaction :

$$G(r, \theta) = B_\alpha \frac{C_\alpha + \cos 4\theta}{r^\alpha}, \quad B_\alpha = b_\alpha \frac{\alpha \Gamma(\alpha/2 - 2)(\alpha - 2)(\alpha - 4)(2 + \alpha)}{\pi 2^{9-\alpha} \Gamma(3 - \alpha/2)}, \quad C_\alpha = \frac{(\alpha - 2)(4 - \alpha)}{\alpha(2 + \alpha)} \quad (4.32)$$

b_α étant choisi pour que $G(0) \approx -1$. Nous appelons ce modèle généralisé α -Picard. Celui-ci coïncide alors avec le cas classique pour $\alpha = 2$ ($b_2 = 4$).

4.3.3.2 Implémentation numérique et instabilités

En implémentant naïvement le modèle comme dans les cas précédents, les propagateurs de redistribution obtenus pour $\alpha > 2$ présentent une très forte instabilité numérique (voir [figure 4.13-\(a\)](#)). En réalité, même si moindre, cette instabilité est déjà visible dans le cas $\alpha = 2$ comme c'est le cas sur la [figure 4.13-\(b\)](#). Une méthode proposée pour remédier à cette instabilité numérique a été présentée dans [56]. Celle-ci consiste à passer par un raffinement de la discrétisation. En d'autres termes, l'interaction est calculée sur une grille deux fois plus grande, puis le résultat est moyenné afin de gommer l'instabilité (qui a une période de deux sites). Cette technique peu efficace fonctionne mais cache en fait un problème à la racine.

L'instabilité numérique vient en réalité de l'implémentation du propagateur dans l'espace de Fourier qui est ici discret et non continu. Pour passer de la forme continue souhaitée à la forme discrète à implémenter, il faut en fait réinterpréter les nombres d'onde selon :

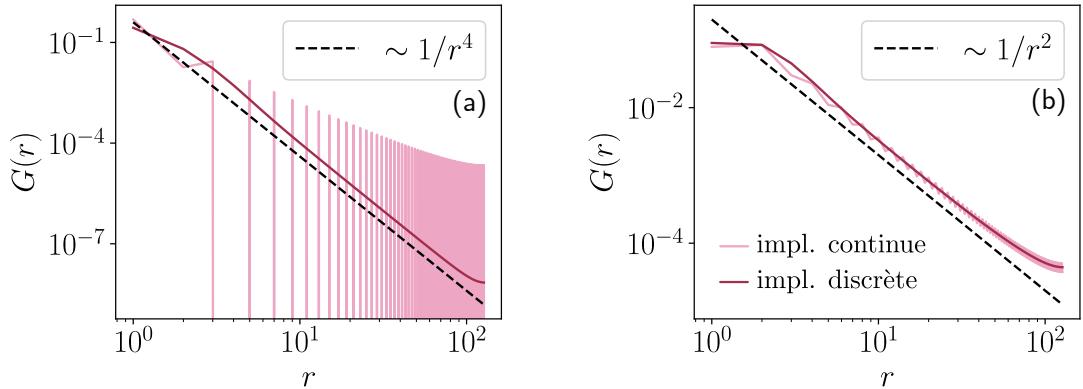


FIGURE 4.13 – Images des propagateurs de redistribution dans le modèle de Picard (a) et le modèle 4-Picard (b). Les figures montrent l'évolution du propagateur le long de la ligne $y = 0$.

$$q_x^2 = 2 - 2 \cos^2 \left(\frac{2\pi}{L} n \right), \quad q_y^2 = 2 - 2 \cos^2 \left(\frac{2\pi}{L} m \right) \quad (4.33)$$

Cette méthode déjà présentée dans la littérature [11, 12] est indispensable pour obtenir des redistributions bien définies à plus courtes portées. Les corrections apportées par cette conversion sont représentées figure 4.13, montrant ainsi que les instabilités peuvent être supprimées de la sorte. Les propagateurs du modèle généralisé seront donc implémentés de cette façon.

4.3.3.3 Comportement critique des modèles α -Picard

Nous étudions la généralisation du modèle pour $\alpha = \{1, 1.5, 3, 4, 5\}$. Pour chaque portée α , le point critique et l'exposant β sont déterminés à contrainte imposée. Les données et les résultats issus de ces méthodes sont consignés à la sous-sous-section 6.2.1.2. Il est à noter que la tendance précédemment évoquée est confirmée : plus l'exposant β mesuré est grand, plus la détermination du point critique est fastidieuse.

Sur la figure 4.14-(a), nous représentons l'évolution de $\langle \dot{\gamma} \rangle$ en fonction de la distance au point critique $\delta\Sigma$ en échelle logarithmique, pour les différentes portée α . Nous remarquons alors que plus la portée de l'interaction augmente, plus l'exposant β augmente aussi (pente sur la représentation graphique). Par ailleurs en représentant l'évolution de la variance du taux de cisaillement, nous observons que l'on passe de fluctuations divergentes à l'approche du point critique pour les courtes portées à des fluctuations évanescentes pour les plus longues portées. Afin de mieux visualiser ces évolutions, nous traçons la courbe $\beta = f(\alpha)$ sur la figure 4.14-(b). Nous remarquons alors une évolution continue de la criticalité allant de celle du modèle Picard-CP à une criticalité fortement convexe avec $\beta \approx 2$. Le cas physique $\alpha = 2$ se situe alors sur cette continuité.

Plus précisément, nous observons d'abord une région entre $\alpha = 6$ et $\alpha = 4$ où l'exposant β , qui varie entre $\beta \approx 0.59$ et $\beta \approx 0.68$, dépend faiblement de la portée. Puis, entre $\alpha = 4$ et $\alpha = 1$, une région où β dépend fortement de α se déploie. On retrouve alors un caractère concave de la transition pour $\alpha \gtrsim 3$ et un caractère convexe pour $\alpha \lesssim 3$. Il est intéressant de noter que le point autour duquel la transition perd sa concavité semble être le même que celui pour lequel

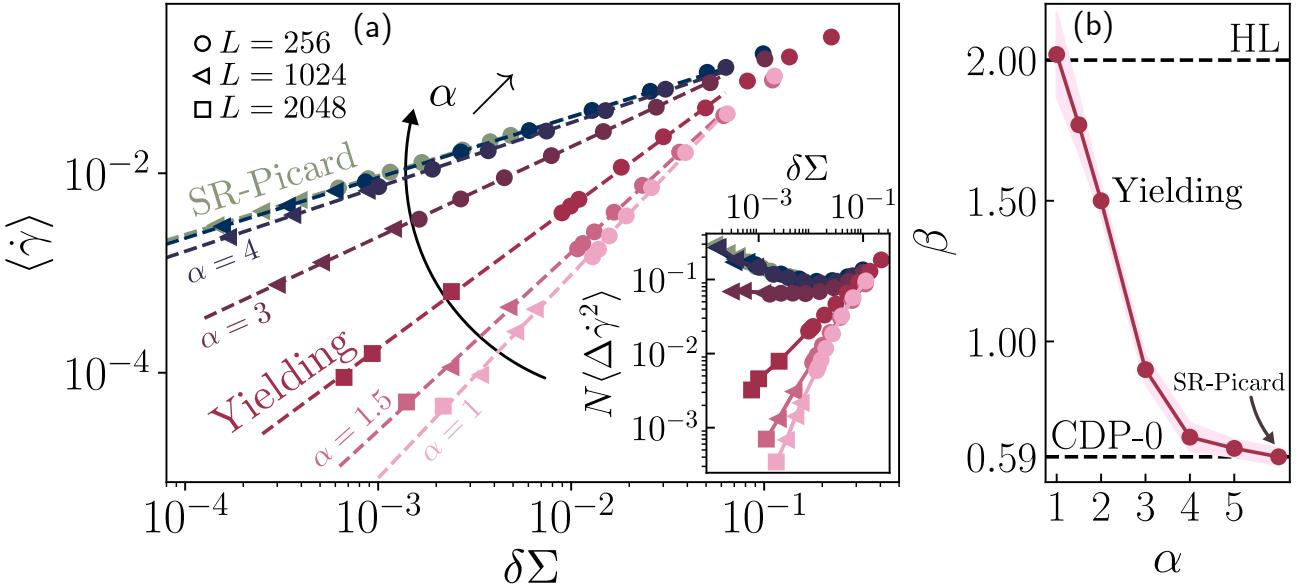


FIGURE 4.14 – (a) Courbes d’écoulement $\langle \dot{\gamma} \rangle = f(\delta\Sigma)$ pour les modèles α -Picard $\alpha = \{5, 4, 3, 2, 1.5, 1\}$ et pour le modèle Picard-CP. (b) Évolution de l’exposant critique β avec l’exposant de portée d’interaction α .

le comportement des fluctuations change ($\gamma' = 0$). Ainsi, si l’évolution du comportement pour $3 < \alpha < 4$ semble être sensiblement la même que dans le cas du depinning, en-dehors de celle-ci les comportements relevés sont très différents.

4.3.3.4 Description continue

Ces deux régions, d’influence faible puis forte de α sur β , peuvent être interprétées par un raisonnement analytique simple. Pour cela, nous allons essayer d’inférer, comme à la sous-sous-section 4.3.2.3, la bonne description continue à grande échelle de l’évolution du champ de contrainte en fonction de la portée α . Pour ce faire, nous repartons de l’équation équation 4.26. Cette fois-ci, avec la forme à longue portée du propagateur que l’on notera G^{LR} , la somme dans l’expression de $K_{u,v}^{\text{LR}}$ ne se restreint plus uniquement aux petites valeurs de k et l .

$$K_{u,v}^{\text{LR}} = \sum_{k,l} G_{k,l}^{\text{LR}} \frac{k^{2u} l^{2v}}{(2u)!(2v)!} \quad (4.34)$$

Nous cherchons donc d’abord à évaluer $K_{u,v}^{\text{LR}}$ pour un propagateur décroissant comme $1/r^\alpha$. Pour ce faire, de la même manière que pour la contrainte et l’activité, nous définissons un équivalent continu du propagateur selon :

$$\mathcal{G}\left(\mathbf{r} = \left(k \frac{a}{L}, l \frac{a}{L}\right)\right) = \left(\frac{L}{a}\right)^\alpha G_{LR}(k, l) \quad (4.35)$$

Dans la limite de grande échelle $a/L \rightarrow 0$, la somme peut alors être approximée par l’intégrale de Riemann associée :

$$K_{u,v}^{\text{LR}} = \sum_{k,l=1}^{L/a} G_{k,l}^{\text{LR}}(k, l) k^{2u} l^{2v} \rightarrow \left(\frac{L}{a}\right)^{2(1+u+v)-\alpha} \int d\mathbf{r} B_\alpha \frac{C_\alpha + \cos 4\theta}{r^\alpha} x^{2u} y^{2v} \quad (4.36)$$

et donc en intégrant :

$$\begin{aligned}
 K_{u,v}^{\text{LR}} &= \left(\frac{L}{a}\right)^{2(1+u+v)-\alpha} \int_{-\pi}^{\pi} d\theta B_\alpha(C_\alpha + \cos 4\theta) \cos^2 \theta \sin^2 \theta \times \int_{a/L}^1 dr r^{1-\alpha+2(u+v)} \\
 &= \left(\frac{L}{a}\right)^{2(1+u+v)-\alpha} \frac{\pi}{8} B_\alpha(2C_\alpha - 1) \int_{a/L}^1 dr r^{1-\alpha+2(u+v)} \\
 &\sim \left[\left(\frac{L}{a}\right)^{2(1+u+v)-\alpha} - 1 \right]
 \end{aligned} \tag{4.37}$$

Finalement, en ajoutant le facteur $(a/L)^{2(u+v)}$ initialement présent dans l'équation 4.26, chaque terme du développement de l'activité en (u, v) se comporte comme $\left(\frac{a}{L}\right)^{\alpha-2} - \left(\frac{a}{L}\right)^{2(u+v)}$.

Pour $\alpha \geq 6$, l'évolution temporelle de la contrainte est donc dominée par le terme $(u = 1, v = 1)$ qui évolue comme $\left(\frac{a}{L}\right)^4$. Nous arrivons donc à une description équivalente à celle du modèle Picard-CP :

$$\partial_{t'} \sigma(x, y) = \tilde{K} \partial_x^2 \partial_y^2 A(x, y). \tag{4.38}$$

Par contre pour $\alpha < 6$, tous les termes de la somme se comportent comme $\left(\frac{a}{L}\right)^{2-\alpha}$. Aucun ordre dominant du développement ne se détache et l'on doit donc considérer la somme dans son ensemble. L'évolution temporelle de la contrainte à grande échelle doit donc faire intervenir la convolution complète dans la limite continue et donc le raisonnement précédent ne tient plus.

Pour traiter ce cas et aller un peu plus loin, nous repartons de l'équation générale (équation 4.24). En utilisant les propriétés de symétrie du propagateur, nous pouvons ré-écrire astucieusement :

$$\begin{aligned}
 \partial_t \sigma(x, y) &= \sum_{k,l} G_{k,l} \left(A(x - k \frac{a}{L}, y - l \frac{a}{L}) - A(x, y) \right. \\
 &\quad \left. - \left(k \frac{a}{L} \right)^2 \partial_x^2 A(x, y) - \left(l \frac{a}{L} \right)^2 \partial_y^2 A(x, y) - kl \frac{a}{L} \partial_x \partial_y A(x, y) \right)
 \end{aligned} \tag{4.39}$$

puisque aucun des termes ajoutés ne survit à la convolution. Ceci est dû à la symétrie C_4 et à la propriété de modes zéros du propagateur. En prenant la limite continue de grande échelle comme précédemment, on obtient alors :

$$\partial_t \sigma(\mathbf{r}) = \left(\frac{a}{L}\right)^{\alpha-2} \int_{\theta=-\pi}^{\pi} \int_{r=a/L}^1 d\mathbf{r}' \mathcal{G}(\mathbf{r}') \times \left(A(\mathbf{r} - \mathbf{r}') - A(\mathbf{r}) - \frac{1}{2} r'_i r'_j \partial_i \partial_j A(\mathbf{r}) \right) \tag{4.40}$$

Le propagateur de redistribution tombant comme $\mathcal{G}(\mathbf{r}) \propto r^{-\alpha}$ et étant donné qu'à petits \mathbf{r}' on a :

$$A(\mathbf{r} - \mathbf{r}') - A(\mathbf{r}) - \frac{1}{2} r'_i r'_j \partial_i \partial_j A(\mathbf{r}) \sim \mathcal{O}(r'^4), \tag{4.41}$$

l'intégrale sur r' de l'équation équation 4.40 converge à sa borne inférieure seulement si $\alpha < 6$. Dans ce cas l'évolution temporelle de la contrainte se comporte comme $\left(\frac{a}{L}\right)^{\alpha-2}$. Cependant pour $\alpha > 6$, l'intégrale diverge et la description perd sa validité. Dans ce cas, le comportement à grande échelle est celui déterminé précédemment et décrit par l'équation 4.38.

Comparaison avec le depinning

Pour comprendre l'influence des modes zéros sur cette description, nous pouvons mener la même étude sur un propagateur de type depinning à longue portée, i.e. de symétrie C_∞ , sans modes zéros. Sans ces derniers, la description comme interaction de courte portée est celle du modèle FES $^\pm$ présentée équation 4.30. La somme de l'équation 4.34 est alors dominée par un terme de courte portée se comportant comme $\left(\frac{a}{L}\right)^2$ pour $\alpha > 4$ cette fois. Dans ce cas, la description adéquate est celle de CDP.

Pour le cas $\alpha < 4$, la convolution complète doit être considérée car aucun terme du développement ne domine le comportement d'échelle. On a alors :

$$\left(\frac{a}{L}\right)^{\alpha-2} \int_{\theta=-\pi}^{\pi} \int_{r=a/L}^1 dr' \mathcal{G}(\mathbf{r}') (A(\mathbf{r} - \mathbf{r}') - A(\mathbf{r})) \quad (4.42)$$

qui converge bien uniquement pour $\alpha < 4$ puisque le terme $\frac{1}{2}r'_i r'_j \partial_i \partial_j A(\mathbf{r})$ ne peut plus être ajouté librement cette fois dans la convolution. Dans ce cas, l'évolution temporelle de la contrainte se comporte alors comme $\left(\frac{a}{L}\right)^2$, exactement de la même manière qu'avec la présence de modes zéros.

4.3.3.5 Paysage global

Ces comportements d'échelle suggèrent donc un paysage en trois régions distinctes :

- Une première région pour $\alpha > 6$ dont la criticalité est dominée par les interactions à courte portée. La classe supposée décrire ce comportement est alors CDP-0, représentée par le modèle Picard-CP. Une proposition pour l'équation continue à grande échelle associée est :

$$\partial_{t'} \sigma(x, y) = \tilde{K} \partial_x^2 \partial_y^2 A(x, y). \quad (4.43)$$

- Une seconde région $4 < \alpha < 6$ où les interactions à longue portée démarrent leur influence sur le comportement critique. Cette région est spécifique à la présence de modes zéros. Nous la nommons LP-0. Une proposition pour l'équation continue à grande échelle associée est :

$$\partial_t \sigma = \int d\mathbf{s} \mathcal{G}_\alpha(\mathbf{s}) \left((A(\mathbf{r} - \mathbf{s}) - A(\mathbf{r})) - \frac{s_\alpha s_\beta}{2} \partial_{\alpha\beta}^2 A(\mathbf{r}, t) \right) \quad (4.44)$$

- Une troisième région $\alpha < 4$ où la portée de l'interaction maintient son influence sur le comportement critique mais dont la spécificité ne tient plus aux modes zéros. L'analyse d'échelle ne permet en effet pas de la différencier de la région homologue associée au depinning à longue portée. Nous la nommons LP. Une proposition pour l'équation continue à grande échelle associée est :

$$\partial_t \sigma = \int d\mathbf{s} \mathcal{G}_\alpha(\mathbf{s}) (A(\mathbf{r} - \mathbf{s}) - A(\mathbf{r})) \quad (4.45)$$

Ce court raisonnement analytique nous permet donc de confirmer la tendance observée numériquement pour l'identification de la région LP-0, où le comportement critique dépend a priori uniquement légèrement de la portée. Toutefois, celui-ci ne permet pas de faire la différence entre une interaction de type depinning et les interactions avec modes zéros du modèle α -Picard pour $\alpha < 4$. Or numériquement, il est clair que cette région est très différente dans les deux cas.

Dans le cas du depinning, la zone de longue portée (nommée Dep-LP sur la figure 4.15) où les exposants dépendent continûment de α est située entre $\alpha = 4$ et $\alpha = 3$. Ce comportement entre dans le cadre de référence LR-CDP. Pour $\alpha < 3$, le comportement critique devient celui du champ moyen avec $\beta = 1$.

Pour la transition vers l'écoulement, la zone $3 < \alpha < 4$ montre une évolution similaire en fonction de α avec β allant de $\beta \approx 0.68$ à $\beta \approx 0.95$. Pour être conclusif quant à l'équivalence avec le depinning dans cette région, il faudrait étendre notre étude à des portées intermédiaires. Pour $\alpha < 3$ cependant, le comportement critique ne semble pas avoir atteint celui du champ moyen puisque β continue d'augmenter jusqu'à $\alpha = 1$, pour lequel on mesure $\beta \approx 2$. Par ailleurs, le modèle de Hébraud-Lequeux, présent pour représenter les modèles élastoplastiques en champ moyen, montre une criticalité de type $\beta = 2$. Par analogie avec les comportements de longue portée canoniques, nous suggérons alors que pour $\alpha < 1$, le système admet un comportement champ moyen (nommé CM sur la figure 4.15). Cette conjecture pour la limite de champ moyen est partagée par l'étude de Lin et al [16] dont nous discuterons au chapitre suivant.

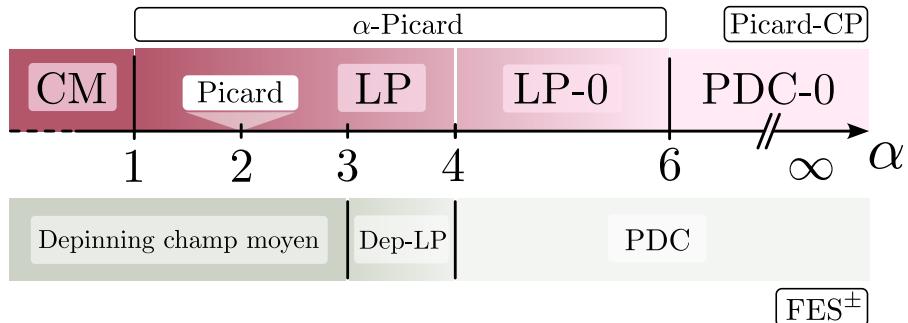


FIGURE 4.15 – Axe supérieur : classification du comportement à grande échelle des modèles d'écoulement en fonction de l'exposant de portée α . Axe inférieur : représentation équivalente pour les modèles de depinning [57].

In fine, les éléments que nous apportons suggèrent de placer la criticalité des modèles α -Picard sur un paysage décrit à la figure 4.15. La transition vers l'écoulement, représentée par le modèle de Picard, se situe donc dans une région de longue portée où le comportement critique dépend encore continûment de l'exposant α . Cette localisation dans une image globale nous permet de mettre en évidence des ingrédients qui jouent un rôle clé dans le phénomène, notamment la présence de mode zéro. Par ailleurs, cette étude suggère que la transition vers l'écoulement en deux dimensions n'est pas un phénomène champ moyen malgré sa longue portée caractéristique. Enfin, la comparaison avec le depinning dont on rapproche souvent cette transition, montre des évolutions profondément différentes. En effet, la zone de longue portée dans le cas de la transition vers l'écoulement est bien plus large ($1 < \alpha < 6$) que dans le cas du depinning ($3 <$

$\alpha < 4$) et la description équivalente à courte portée semble être issue d'une classe d'universalité différente. Si un point ressemblant au champ moyen du depinning semble pouvoir être atteint autour de $\alpha \approx 3$, un mécanisme dans la transition vers l'écoulement semble permettre de le dépasser pour faire apparaître un autre champ moyen de type Hébraud-Lequeux.

Il est alors intéressant de voir si les autres propriétés critiques du système suivent cette même évolution caractéristique.

4.3.4 Influence de la portée sur les corrélations de contrainte dans l'état stationnaire

Si notre étude statique s'est essentiellement concentrée sur des propriétés très globales du système, nous proposons dans cette partie de nous intéresser à une observable plus structurelle. Plus particulièrement, une propriété intéressante des systèmes analogue à la percolation dirigée conservée est celle d'hyperuniformité, définie au [chapitre 1](#).

4.3.4.1 Hyperuniformité dans les modèles élastoplastiques

Dans les modèles de particules appartenant à la classe CDP, l'hyperuniformité se traduit par une évanescence du facteur de structure $S(\mathbf{q})$ à petits nombres d'onde :

$$S(\mathbf{q}) \sim q^{\alpha_{HU}}, \quad 0 < \alpha_{HU} < 1 \quad (4.46)$$

Dans une théorie continue, le facteur de structure est défini via la densité particulaire ρ selon :

$$S(\mathbf{q}) = \hat{\rho}(\mathbf{q})\hat{\rho}(-\mathbf{q}) \quad (4.47)$$

Dans le cadre de la transition vers l'écoulement via l'approche élastoplastique, la notion de particules est absente. Il n'est donc pas évident de voir comment cette propriété pourrait se reporter dans ce cas. Une première approche naïve correspond alors à l'analogie opérée lors de l'établissement des équations continues [sous-sous-section 4.3.2.3](#). Dans les modèles élastoplastiques, le champ conservé est le champ de contrainte. Dans les modèles de particules, le champ conservé est la densité de particules. Dans les modèles élastoplastiques, l'activité induit une redistribution de la contrainte : le site actif relaxe sa contrainte et, en moyenne, en ajoute aux autres sites. Dans les modèles de particules, l'activité induit une redistribution de la masse : un site actif perd des particules qui viennent s'ajouter aux autres sites.

Il est alors naturel de penser que la contrainte σ dans le cas des modèles élastoplastiques joue le même rôle que la densité ρ dans les modèles de particules. Dans ce cas, nous pouvons supposer que pour un modèle élastoplastique tombant dans la classe CDP comme le modèle FES $^\pm$, nous obtiendrions :

$$S_\sigma(\mathbf{q}) \equiv \hat{\sigma}(\mathbf{q})\hat{\sigma}(-\mathbf{q}) \sim q^{\alpha_{HU, CDP}} \quad (4.48)$$

$S_\sigma(\mathbf{q})$ n'étant alors rien d'autre que la transformée de Fourier de la fonction de corrélation connectée de contrainte :

$$C_{\sigma\sigma}(\mathbf{r}) = \langle \sigma(\mathbf{r}')\sigma(\mathbf{r}' - \mathbf{r}) \rangle_c \quad (4.49)$$

qui est un objet d'étude bien plus regardé par la communauté des matériaux amorphes [58–60].

On peut alors se demander si ce comportement évanescence de $S_\sigma(\mathbf{q})$ à petits nombres d'onde se retrouve aussi dans les modèles élastoplastiques étudiés précédemment.

4.3.4.2 Approche naïve et hydrodynamique fluctuante

Un raisonnement analytique simple permet de conforter l'intuition que les corrélations de contrainte suivent un comportement sans échelle proche de la transition. Celui-ci repose sur le calcul de la fonction $S_\sigma(\mathbf{q})$ en interprétant la dynamique du système dans le cadre de l'hydrodynamique fluctuante [61].

Pour ce faire, nous considérons les équations de champ CDP modifiées selon :

$$\begin{aligned} \partial_t \sigma(\mathbf{r}, t) &= (\mathcal{G} * A)(\mathbf{r}, t) \\ \partial_t A(\mathbf{r}, t) &= (\kappa \sigma(\mathbf{r}, t) - \varsigma)A(\mathbf{r}, t) - \lambda A^2(\mathbf{r}, t) + D_A \Delta A(\mathbf{r}, t) + \chi \sqrt{A(\mathbf{r}, t)} \eta \end{aligned} \quad (4.50)$$

comme une première possible approximation de la théorie de champ associée à ces modèles. Suivant les méthodes classiques d'hydrodynamique fluctuante, nous linéarisons ces équations en décomposant les champs comme $A(\mathbf{r}, t) = A_0 + \delta A(\mathbf{r}, t)$ et $\sigma(\mathbf{r}, t) = \sigma_0 + \delta \sigma(\mathbf{r}, t)$ avec $\langle \delta A(\mathbf{r}, t) \rangle = \langle \delta \sigma(\mathbf{r}, t) \rangle = 0$. Après transformées de Fourier spatiale et temporelle des équations, nous obtenons :

$$\langle \delta \hat{\sigma}(\mathbf{q}, \omega) \delta \hat{\sigma}(\mathbf{q}', \omega') \rangle = \frac{\chi^2 A_0 \hat{\mathcal{G}}(\mathbf{q})^2 \delta(\omega + \omega') \delta(\mathbf{q} + \mathbf{q}')}{|\omega^2 + i\omega(\lambda A_0 + D_A q^2) + \kappa A_0 \hat{\mathcal{G}}(\mathbf{q})|^2}. \quad (4.51)$$

Nous intégrons ensuite sur les fréquences ω en utilisant le théorème des résidus pour obtenir :

$$S_\sigma(\mathbf{q}) = -\frac{\chi^2 \hat{\mathcal{G}}(\mathbf{q})}{2\kappa(\lambda A_0 + D_A q^2)} \quad (4.52)$$

Dans la limite de grande échelle $q \rightarrow 0$, on attend donc :

$$S_\sigma(\mathbf{q}) \sim -\hat{\mathcal{G}}(\mathbf{q}) \quad (4.53)$$

si bien que les corrélations de contrainte sont à l'image du propagateur de redistribution. Ce comportement sur la répartition de contrainte est par ailleurs connu pour les matériaux amorphes au repos [60], où elle prend la forme du propagateur de Eshelby. Dans le cas du modèle α -Picard, ce raisonnement simple suggère bien une propriété hyperuniforme à courte portée avec $\hat{\mathcal{G}}(\mathbf{q}) \sim q^4$ dans le modèle Picard-CP, propriété probablement perdue dans le cas physique où l'on a $\hat{\mathcal{G}}(\mathbf{q}) \sim q^0$ (voir [équation 4.9](#)).

4.3.4.3 Approche par le depinning

Une approche plus rigoureuse permet de pressentir une forme d'hyperuniformité sur la contrainte. Celle-ci se base sur la ressemblance entre les modèles de type depinning et les modèles élastoplastiques. Dans le cas du depinning, il n'y a pas non plus de quantité physiquement évidente pour laquelle on pourrait supposer une propriété d'hyperuniformité. Toutefois, comme nous l'avons mentionné au [chapitre 1](#), le depinning a été mis en équivalence avec la classe CDP. Il est donc a priori possible de déterminer une quantité dans ce système suivant le même comportement que la densité dans les modèles de particules représentés par CDP.

En fournissant une compréhension plus simple de l'équivalence entre les deux phénomènes critiques, K. Wiese [62] a en effet pu faire un parallèle direct entre la densité ρ dans les modèles de particules et la position de l'interface u dans les modèles de depinning, qui est :

$$\rho(\mathbf{r}, t) \sim \Delta u(\mathbf{r}, t) + \rho_0 \quad (4.54)$$

dans le cas de courte portée, avec ρ_0 la densité moyenne de particules. Le terme $\Delta u(\mathbf{r}, t)$ ne représente alors rien d'autre que l'interaction élastique entre les différents points du système. Ainsi, l'équivalent du déplacement dans nos simulations élastoplastiques étant la déformation plastique $\epsilon_{pl}(\mathbf{r}, t)$, la quantité équivalente à ρ dans ce cas serait :

$$\rho(\mathbf{r}, t) \sim (\mathcal{G} * \epsilon_{pl})(\mathbf{r}, t) + \rho_0 \quad (4.55)$$

Donc d'après l'[équation 4.8](#) de la dynamique intégrée on aurait :

$$\rho(\mathbf{r}, t) - \rho_0 \sim \sigma(\mathbf{r}, t) - \Sigma \quad (4.56)$$

ce qui confirme l'intuition initiale.

De cette équivalence, le travail [62] parvient à relier l'exposant d'hyperuniformité α_{HU} du modèle Manna à l'exposant de rugosité η du depinning avec la relation d'échelle :

$$\alpha_{HU} = 4 - D - 2\eta \quad (4.57)$$

que l'on peut généraliser dans notre cas pour une portée arbitraire α du propagateur :

$$\alpha_{HU} = 2\alpha - 3D - 2\eta \quad (4.58)$$

Le cas des modèles élastoplastiques est alors très intéressant puisque ceux-ci constituent des modèles dans lequel les deux exposants à la fois ont un sens physique intéressant : répartition de la contrainte pour α_{HU} et rugosité de l'interface pour η .

4.3.4.4 Résultats numériques

Méthode

Afin de sonder les propriétés de répartition de contrainte dans les modèles étudiés, nous nous plaçons, pour chaque modèle, dans un état stationnaire du système proche du point critique ($\delta\Sigma \ll 1$). La fonction $S_\sigma(\mathbf{q})$ est alors calculée en tout point de l'espace réciproque en prenant la transformée de Fourier du champ de contrainte discret $\{\sigma_i\}$ après lui avoir soustrait sa valeur moyenne Σ .

Afin d'obtenir une estimation propre de ce pseudo-facteur de structure et ce sur une large gamme de \mathbf{q} , il est nécessaire de ne pas limiter le calcul à une unique configuration. Pour ce faire, nous réalisons pour une même mesure une centaine de simulations issues de conditions initiales différentes. La mesure finale est alors la moyenne de chaque mesure individuelle. Afin de sonder des valeurs de \mathbf{q} suffisamment petites, nous choisissons de nous placer à une taille de système suffisamment grande, ici $L = 1024$.

Confirmation de l'analogie via le modèle FES $^\pm$

Nous appliquons tout d'abord cette méthode de mesure au cas du modèle FES $^\pm$, duquel on attend une criticalité de type CDP, et donc celle du depinning. Pour ce faire, nous nous plaçons à une distance $\delta\Sigma = 1.5 \times 10^{-4}$ du point critique. Celle-ci constitue la plus petite distance permettant d'atteindre l'état stationnaire en une itération de simulation.

Les résultats obtenus sont alors présentés à la figure 4.16-(a). La carte des valeurs du pseudo-facteur de structure indique bien une évanescence à petits nombres d'onde. Sa structure est par ailleurs légèrement anisotrope, ceci étant probablement dû aux conditions périodiques appliquées. Afin de quantifier plus précisément cette propriété, nous regardons l'évolution de $S_\sigma(\mathbf{q})$ sur la ligne $q_x = 0$. L'évolution obtenue est alors représentée figure 4.16-(b).

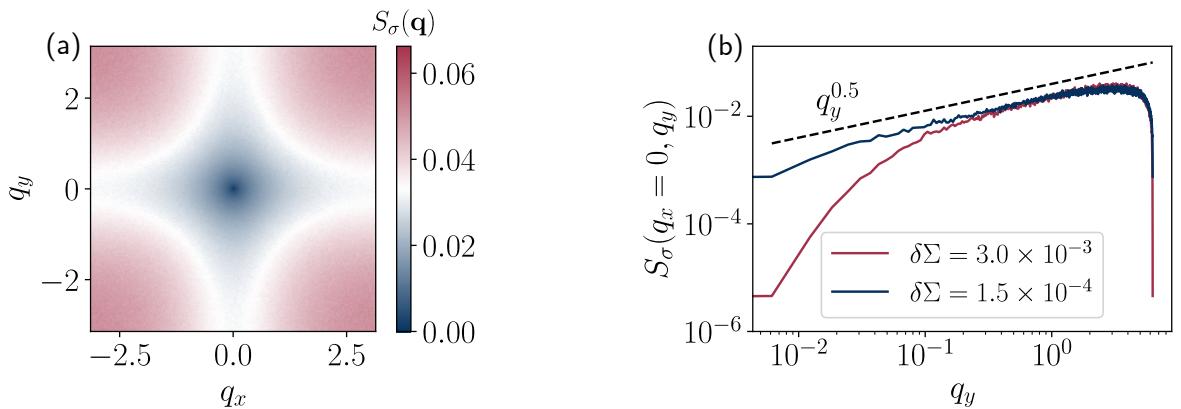


FIGURE 4.16 – Évolution du pseudo-facteur de structure dans le modèle FES $^\pm$. (a) carte de valeurs du pseudo-facteur de structure dans l'espace réciproque discret. (b) Évolution du pseudo-facteur de structure le long de la ligne $q_x = 0$.

Nous observons alors effectivement une évanescence en loi de puissance à petits q_y , qui semble alors parfaitement compatible avec l'exposant d'hyperuniformité associé à la classe CDP, $\alpha_{\text{CDP}} = 0.5$. En effectuant la même mesure légèrement plus loin du point critique pour $\delta\Sigma = 3.0 \times 10^{-3}$, un comportement similaire est observé, seulement sur une plage plus restreinte de nombres d'onde. Cela suggère donc qu'au point critique on a bien $S_\sigma(\mathbf{q}) \sim q^{0.5}$ pour tout $q \ll 1$, confirmant ainsi les parallèles entre densité et contrainte présentés précédemment.

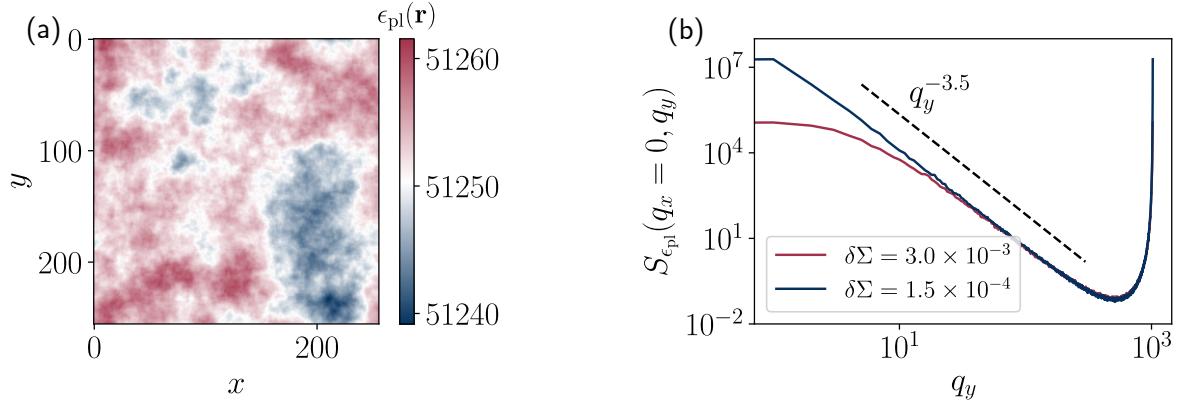


FIGURE 4.17 – Évolution du spectre de déplacement $S_{\epsilon_{\text{pl}}}(\mathbf{q})$ dans le modèle FES $^\pm$. (a) carte de valeurs dans l'espace réciproque discret. (b) Évolution le long de la ligne $q_x = 0$.

Nous pouvons par ailleurs mesurer les corrélations de déplacement dans le matériau afin d'évaluer la rugosité de l'interface. En effet, si l'on note de la même manière $S_{\epsilon_{\text{pl}}}(\mathbf{q})$ le spectre du déplacement plastique on a alors :

$$S_{\epsilon_{\text{pl}}}(\mathbf{q}) \sim q^{-D-2\eta} \quad (4.59)$$

par définition de l'exposant de rugosité. En appliquant la même méthode que précédemment, nous obtenons les résultats présentés à la figure 4.17. Nous mesurons alors $D + 2\eta \approx 3.5$ soit $\eta \approx 0.75$, qui est bien la valeur attendue dans le cas du depinning à courte portée en deux dimensions [63]. Ces mesures de structure semblent donc confirmer l'appartenance du modèle FES $^\pm$ à la classe CDP. Notons par ailleurs que ces mesures d'hyperuniformité sont bien plus évidentes que dans le cas des modèles de particules. Ceci peut potentiellement s'expliquer par le fait d'une redistribution continue et non discrète dans le cas des modèles élastoplastiques.

Hyperuniformité dans le modèle α -Picard

Pour comprendre comment cette propriété d'hyperuniformité se compare dans le cas des modèles d'écoulement, nous effectuons la même analyse sur les généralisations du modèle de Picard. Dans le cas du modèle Picard-CP, les résultats obtenus sont présentés à la figure 4.18.

La carte de valeurs de $S_\sigma(\mathbf{q})$ montre alors une anisotropie frappante dont les axes de symétrie sont ceux associés aux modes zéros ($q_x = 0$ et $q_y = 0$). Le pseudo-facteur de structure prend alors des valeurs proches de 0 sur ces axes. Cette propriété d'anisotropie découle en fait trivialement de l'équation 4.8 car dans l'espace de Fourier le champ de contrainte est une multiplication du propagateur et du champ de déplacement. Il semble donc compliqué de réduire cette analyse à un problème monodimensionnel, i.e. en regardant l'évolution de $S_\sigma(\mathbf{q})$ sur une ligne, puisque chaque choix de direction produira vraisemblablement une évolution différente.

Afin de pouvoir pousser l'analyse tout de même plus loin, nous choisissons de nous intéresser à la direction "orthogonale" à ces axes et donc considérer la diagonale ($q_x = q/\sqrt{2}$, $q_y = q/\sqrt{2}$). L'évolution le long de cette ligne est représentée figure 4.18-(b). Nous observons alors toujours

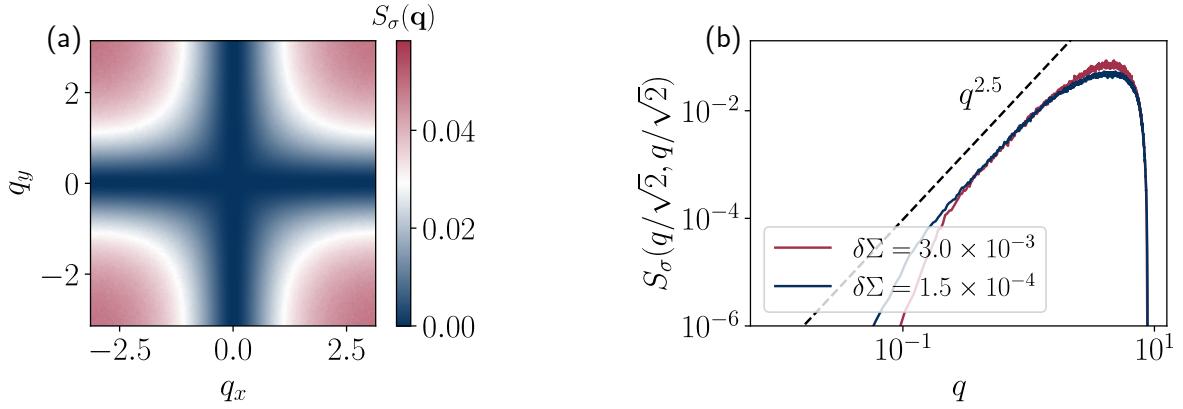


FIGURE 4.18 – Évolution du pseudo-facteur de structure dans le modèle Picard-CP. (a) carte de valeurs du pseudo-facteur de structure dans l'espace réciproque discret. (b) Évolution du pseudo-facteur de structure le long de la diagonale ($q_x = \frac{q}{\sqrt{2}}, q_y = \frac{q}{\sqrt{2}}$).

une évanescence de $S_\sigma(\mathbf{q})$ mais cette fois-ci bien plus abrupte avec $\alpha_{HU} \approx 2.5$. Cette mesure constitue alors un nouvel indice rejoignant la ligne qui suggère de séparer les comportements critiques du modèle Picard-CP et de la classe CDP.

Si l'hyperuniformité semble être fortement affectée par les modes zéros à courte portée, il nous semble intéressant d'observer comment la longue portée, elle, joue un rôle dans cette structure de contraintes. Notamment, si dans le cas classique ces corrélations suivent toujours une loi d'échelle évanescante. Nous réalisons donc ces mêmes mesures pour les modèles α -Picard avec $\alpha \geq 2$. Le pseudo-facteur de structure montre alors une symétrie similaire à celle du modèle Picard-CP, symétrie héritée à nouveau de celle du propagateur. Nous représentons les évolutions du pseudo-facteur de structure sur la ligne diagonale pour les différentes portées α sur la figure 4.19. Les valeurs estimées des exposants sont alors reportées dans le tableau 4.2.

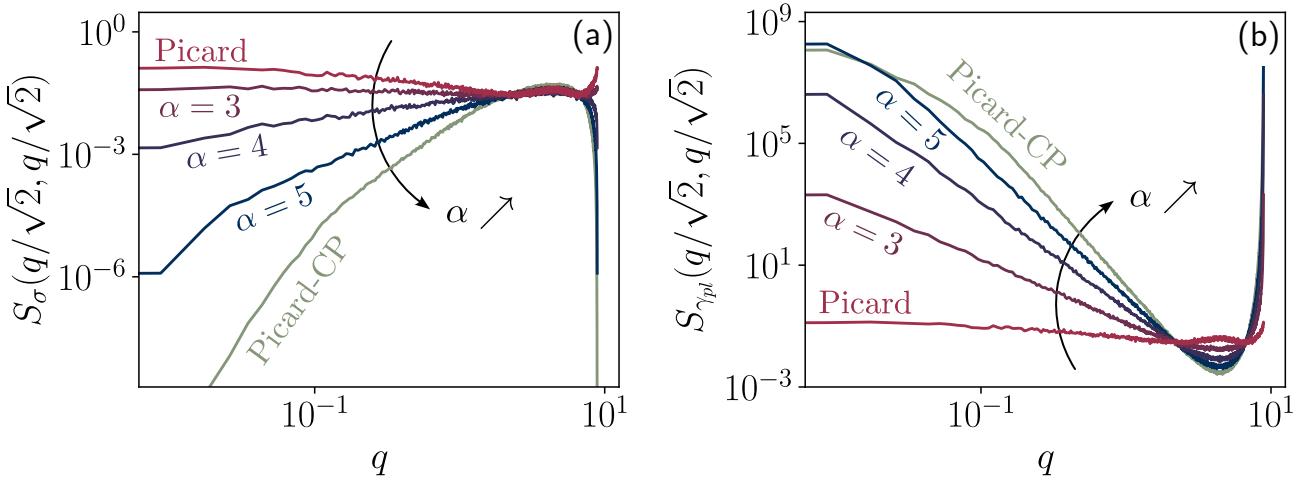


FIGURE 4.19 – Évolution des spectres $S_\sigma(\mathbf{q})$ (a) et $S_{\epsilon_{pl}}(\mathbf{q})$ (b) pour les généralisations du modèle de Picard le long de la diagonale ($q_x = \frac{q}{\sqrt{2}}, q_y = \frac{q}{\sqrt{2}}$).

α	α_{HU}	η
FES $^\pm$	0.5	0.75
Picard-CP	2.5	1.75
5	1.5	1.25
4	0.5	0.75
3	0	0
2 (Picard)	0	-1

TABLE 4.2 – Exposants d’hyperuniformité déterminés dans les modèles α -Picard, Picard-CP et FES $^\pm$

Nous remarquons alors une évolution a priori continue de l’hyperuniformité de contrainte, avec un caractère évanescence de $S_\sigma(\mathbf{q})$ perdu autour du point $\alpha = 3$. Pour le cas classique du modèle de Picard, il semble donc que la contrainte ne présente pas d’hyperuniformité, comme cela était suggéré par l’approche d’hydrodynamique fluctuante.

Si l’on regarde en parallèle l’évolution de $S_{\epsilon_{pl}}(\mathbf{q})$, nous observons la tendance inverse. L’exposant de rugosité apparent augmente à mesure que la portée de redistribution diminue. Il passe de $\eta \approx -1$ pour le modèle de Picard² à $\eta \approx 1.75$ pour le modèle Picard-CP. L’interface perd donc sa rugosité dans le cas classique. Il est par ailleurs intéressant de noter que les modèles Picard-CP et le modèle 5-Picard ont des exposants différents et différents du modèle FES $^\pm$, suggérant bien une différence marquée par la présence des modes zéros pour $\alpha > 4$. De plus pour $\alpha = 4$, nous obtenons les exposants de la classe CDP, suggérant le début d’une zone similaire entre les modèles type depinning et type transition vers l’écoulement (nommée LP dans la section précédente).

Cette évolution conjointe de α et η est bien compatible avec la relation équation 4.58, qui n’est autre qu’une traduction de la règle d’évolution de la contrainte. Plus la répartition de contrainte est hyperuniforme, plus l’interface est rugueuse.

Cette analyse structurelle permet donc d’appuyer le paysage présenté à la section précédente, notamment en confortant une différence entre la classe CDP et la classe CDP-0. Qui plus est, elle permet de clarifier la notion d’hyperuniformité dans les modèles élastoplastiques et son lien direct avec la rugosité de l’interface. Si le comportement champ moyen du depinning est retrouvé autour du point $\alpha \approx 3$, celui-ci est encore une fois dépassé pour des plus grandes portées. Nous rappelons que ce point était aussi celui autour duquel la convexité de la transition et le comportement des fluctuations s’inversaient.

4.4 Caractérisation dynamique et avalanches

Une dernière façon de caractériser la transition vers l’écoulement par comparaison à la transition de depinning est du point de vue dynamique. C'est-à-dire en analysant les évènements

2. La valeur négative trouvée ici est simplement extraite de l’étude du spectre. Son interprétation physique en tant qu’exposant de rugosité est peut-être discutable.

avalancheux qui la composent. Dans le cas de la transition vers l'écoulement, même si peu abordée sous le prisme des phénomènes critiques, les avalanches ont été l'objet d'études exhaustives, aussi bien expérimentalement que numériquement [44, 64–68].

4.4.1 Avalanches de plasticité

Dans les systèmes de particules étudiés lors des chapitres précédents, les avalanches correspondent à des événements corrélés d'activité proches du point critique, et donc sans échelle. Dans le cas de la transition vers l'écoulement, les avalanches correspondent de manière tout à fait analogue à des événements d'activité proches du point critique, l'activité étant ici assimilée à la plasticité.

4.4.1.1 Phénoménologie

Dynamique à l'approche du point critique

Reprendons ici le système modèle étudié jusqu'à présent, d'un matériau soumis à un cisaillement simple. Dans le cas où le taux de cisaillement $\dot{\gamma}$ est imposé, après une période transitoire, la contrainte Σ portée par le matériau fluctue autour de sa valeur moyenne. Pour des forçages relativement grands, cette évolution autour de la valeur moyenne se fait de manière continue (voir [figure 4.20-\(a1\)](#)). Mais à mesure que $\dot{\gamma}$ tend vers 0, la dynamique du système devient intermittente [40] : la contrainte portée par le système alterne des phases d'augmentation constante et de décroissance brutale. L'évolution de Σ au cours du temps prend alors la forme décrite à la [figure 4.20-\(a2\)](#), analogue à des dents de scie. Ces sauts brutaux dans la contrainte globale portée par le système correspondent aux avalanches de plasticité dans le matériau. En effet, à mesure que $\dot{\gamma} \rightarrow 0$, le système s'approche naturellement de son point critique, donnant lieu à des événements de plasticité de plus en plus corrélés, et sans échelle.

Observables d'intérêt

De la même manière que dans le cas des systèmes de particules, on peut caractériser ces événements dynamiques par leur taille S et leur durée T . Dans le cas des avalanches de plasticité, on définit communément la taille S d'une avalanche via la chute de contrainte $\Delta\Sigma$ associée selon :

$$S = \Delta\Sigma \times L^D \quad (4.60)$$

avec L^D le volume du système afin de rendre cette quantité extensive. D'autre part, la durée d'une avalanche correspond simplement à la durée sur laquelle a lieu cette chute brutale de contrainte.

Ces deux quantités S et T suivent alors des distributions de probabilité en loi de puissance :

$$P(S) \sim S^{-\tau} f\left(\frac{S}{S_c}\right), \quad P(T) \sim T^{-\tau'} g\left(\frac{T}{T_c}\right) \quad (4.61)$$

avec τ et τ' les exposants d'avalanche, f et g des fonctions à décroissance rapide, et S_c et T_c les cut-offs de taille et de durée du système. Tracées sur une échelle logarithmique, ces distributions de probabilités prennent alors la forme donnée à la [figure 4.20-\(b\)-\(c\)](#).

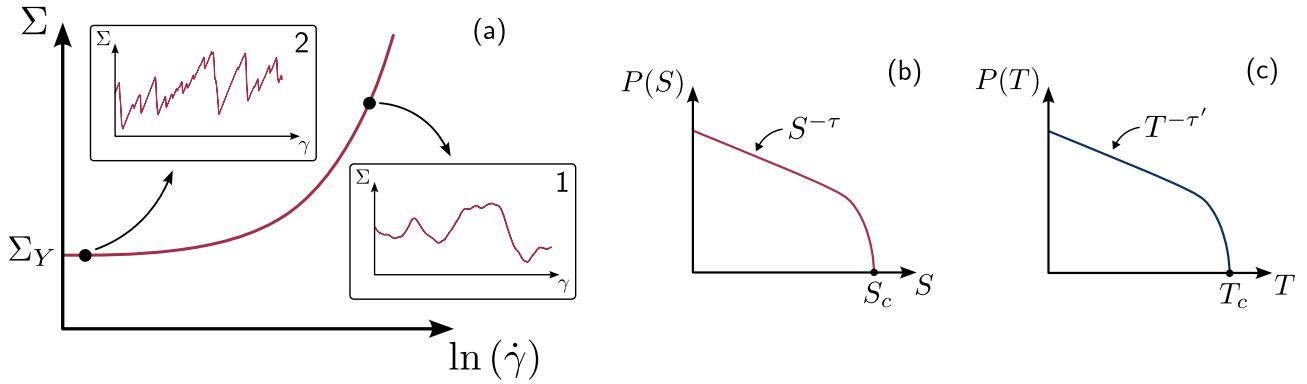


FIGURE 4.20 – Phénoménologie des avalanches de plasticité dans l’écoulement des matériaux amorphes. (a) Évolution de la contrainte avec la déformation globale à différentes distances du point critique. (b)-(c) Formes schématiques des distribution de probabilité de tailles et de durées d’avalanche.

4.4.1.2 L’approche quasistatique comme cadre de référence

Afin d’observer les avalanches de la manière la mieux définie possible, il faut se placer au plus proche du point critique, i.e. $\dot{\gamma} = 0$. Une méthode alors naturelle est d’utiliser un protocole quasistatique. La méthode quasistatique revient à utiliser un forçage dont l’échelle caractéristique de temps est très grande devant tout autre temps caractéristique (durée des avalanches, temps de réarrangement, ...). Elle permet alors une séparation d’échelle entre le phénomène de forçage (cisaillement) et de relaxation (avalanches). En pratique, partant d’un état initial élastique en tout point, le système est forcé infinitement lentement jusqu’à ce que le premier réarrangement plastique ait lieu. Le forçage est alors suspendu et on laisse le système relaxer par une suite de réarrangements plastiques : ce sont les avalanches. L’avalanche se poursuit alors jusqu’à ce que le système retourne à un état élastique en tout point, et l’on opère un nouveau forçage jusqu’au déclenchement de la prochaine avalanche. L’évolution de la contrainte portée par le système en fonction de sa déformation prend alors la forme définie figure 4.21.

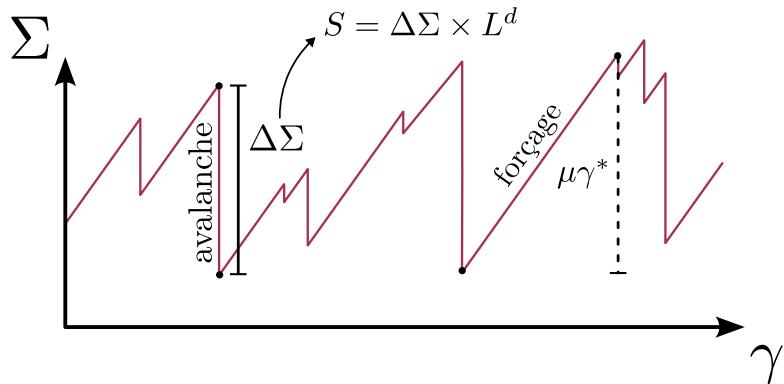


FIGURE 4.21 – Évolution schématique de la contrainte avec la déformation globale dans un protocole quasistatique.

Étant dans ce cas à la valeur critique du paramètre $\dot{\gamma} = 0^+$, les cut-offs sur la distribution des tailles et des durées d’avalanche dépendent uniquement de la taille L du système étudié

selon :

$$S_c \sim L^{d_f}, \quad T_c \sim L^z \quad (4.62)$$

avec d_f la dimension fractale et z l'exposant dynamique. Plus d_f est grand, plus les avalanches sont compactes.

En pratique, ce protocole quasistatique n'est pas rigoureusement applicable en laboratoire. Le compromis à faire est alors de trouver un forçage $\dot{\gamma}$ suffisamment faible pour opérer la séparation d'échelle tout en le gardant suffisamment grand pour limiter la durée totale de l'expérience. Dans certaines approches théoriques ou numériques, il est cependant possible de réduire le temps nécessaire aux phases de forçage lent, rendant ainsi ce protocole idéal pour la mesure des avalanches.

4.4.1.3 Résultats dans les différents cadre d'étude

D'un point de vue analytique, comme nous l'avons mentionné à la [sous-sous-section 4.1.3.1](#), la non-positivité du propagateur de redistribution d'Eshelby rend la résolution théorique du problème difficile. Une approche de théorie des champs ne permet donc pas de décrire les avalanches de plasticité dans le cadre de la transition vers l'écoulement. Toutefois, la phénoménologie de ces avalanches étant parfaitement similaire à celle observée dans le cas du depinning, il est usuel d'utiliser les prédictions associées à ce deuxième phénomène comme base de comparaison.

Dans le cas du depinning, les méthodes du groupe de renormalisation sont capables de prédire l'existence d'avalanches et les distributions de probabilité associées [23]. Notamment, ces méthodes permettent la prédiction des valeurs des exposants critiques comme τ . Dans la limite de champ moyen, la théorie prédit un exposant pour les tailles d'avalanches $\tau = 3/2$ [69].

Du côté expérimental, les avalanches de plasticité ont été mesurées dans de nombreux systèmes, à de nombreuses échelles et sous différentes conditions. Ces réalisations cherchent alors rapprocher ou différencier ces avalanches de celles du depinning et notamment des prédictions de champ moyen. Elles ont par exemple été mesurées dans des mousses cisaillées [65], donnant un exposant $\tau \approx 0.8$, dans des verres métalliques [64] donnant cette fois $\tau \approx 1.4 - 1.5$ ou encore dans un milieu granulaire [70] amenant cette fois un comportement compatible avec l'attendu de champ moyen. Dans la plupart des cas, les expériences donnent lieu à des distributions d'avalanches s'étendant sur très peu de décades. Par ailleurs, cette grande variabilité des propriétés statistiques mesurées vient probablement de la précision nécessaire à ces mesures et de la difficulté d'étudier un système parfaitement contrôlé [31]. Afin de qualifier l'universalité de ces avalanches il est alors plus simple de passer par une approche numérique.

Via les approches de type dynamique moléculaire notamment, il est facilement possible de mettre en oeuvre un protocole de cisaillement quasistatique. Par exemple, dans [71], les auteures ont cisaillé des verres métalliques CuZrAl et CuZr préparés de différentes manières. Sous forçage quasistatique, les tailles d'avalanches suivent une loi de puissance avec $\tau \approx 1.16$. Dans [66], les auteurs ont étudié les avalanches sous cisaillement quasistatique d'un autre verre, et ce pour différents régimes inertIELS. En deux ou trois dimensions, l'étude révèle un exposant $\tau \approx 1.2 - 1.3$ et donc diffère aussi du cadre champ moyen. Néanmoins, dans le travail [67],

les auteurices ont souligné l'importance d'une analyse attentive des distributions d'avalanches. En effet, ces dernières pouvant présenter des bosses au niveau de leur cut-off, la mesure de l'exposant τ peut s'en trouver grandement affectée si ignorées. Par une analyse attentive, les auteurices ont alors déduit de leurs résultats une compatibilité avec $\tau = 3/2$. Le problème est que ces simulations font intervenir de très nombreux degrés de liberté et sont donc très coûteuses numériquement. Elles ne permettent donc pas de simuler des systèmes de grande taille L et d'obtenir des distributions précises sur de larges gammes de tailles S . Pour dépasser ces limites, les modèles mésoscopiques comme les modèles élastoplastiques sont donc des outils de choix.

Modèles élastoplastiques

Par les simplifications adoptées, l'étude des avalanches dans les modèles élastoplastiques se révèle très efficace. Ainsi, il est tout à fait envisageable d'étudier ces phénomènes dans des systèmes de grande taille. De plus, il est possible dans ce cas d'implémenter exactement le protocole quasistatique de manière astucieuse. En effet, la distance au seuil microscopique local σ_Y étant connue à chaque instant et pour chaque site, il est possible de contourner la phase de forçage infiniment lente par l'ajout direct d'un chargement élastique $\mu\gamma^*$ uniforme sur tous les sites, de telle manière que le site le plus proche de sa contrainte seuil devienne plastique :

$$\mu\gamma^* = \min(\sigma_{Y,i} - \sigma_i) \quad (4.63)$$

Il est ainsi possible de passer de la fin d'une avalanche au début de la suivante en un unique pas de temps [45]. Cette implémentation, résumée à la figure 4.21 et que nous appellerons AQS pour *athermal quasistatic*, permet de produire des statistiques riches pour les observables S et T dans les différents modèles élastoplastiques.

En utilisant une dynamique extrême proche de l'AQS, Talamali et al [68] ont alors mesuré des avalanches distribuées selon $\tau \approx 1.25$, marquant un désaccord avec la théorie champ moyen. Par la suite, Lin et al [45], Liu et al [44] et Ferrero et al [11] ont déterminé précisément les distributions de tailles dans le cadre de l'AQS pour mesurer respectivement $\tau \approx 1.2$, $\tau \approx 1.28$ et $\tau \approx 1.33$ en 2D. Ces études s'appuyant toutes sur des modèles différents, un consensus scientifique s'est créé autour d'une valeur universelle $\tau \approx 1.25 - 1.35$, marquant une différence avec les avalanches de depinning en champ moyen. Ce consensus se renforce alors par l'extension des mesures à de nouveaux protocoles de déformation [45, 46]. Dans [46] notamment, les avalanches obtenues sous un grand nombre de déformations différentes donnent toutes $\tau \approx 1.28$.

Par ailleurs, avec ce protocole d'AQS et les protocoles apparentés, la dimension fractale d_f associée aux avalanches prend elle aussi une valeur avec de faibles variations, autour de $d_f \approx 1$ [11, 44, 45]. Ce résultat est central, puisqu'il met en évidence des avalanches de plasticité peu compactes, presque linéaires, à l'image des cartes de plasticité discutées à la figure 4.12 et des bandes de cisaillement observées dans les mêmes systèmes [54]. Ces événements contrastent alors avec ceux du depinning pour lesquels on mesure une plus grande compacité avec $d_f \geq D$ [23, 72]. En effet, on a dans le cas du depinning un lien direct entre dimension fractale et exposant de rugosité : $d_f = D + \eta$, avec $\eta = 0$ la valeur limite minimale en champ moyen³.

3. Dans le cas des avalanches mesurées avec le protocole AQS, cette relation semble toujours vérifiée si l'on se base sur les mesures de l'exposant de rugosité dans le modèle de Picard (voir sous-sous-section 4.3.4.4)

Ces résultats semblent assez robustes et placent les avalanches comme un descripteur possible de criticalité et d'universalité. Toutefois, comme nous l'avons relevé précédemment, la qualification d'un comportement critique peut se jouer sur une détermination très précise des exposants. Afin que notre étude soit conclusive il faut donc prêter une grande attention à nos méthodes et leurs implications, notamment si l'on s'éloigne des protocoles de référence.

4.4.2 Avalanches en contrainte imposée

L'analyse que nous faisons de la transition vers l'écoulement se place dans le cadre des transitions de phase absorbantes. Le paramètre de contrôle naturel à fixer est donc la contrainte globale. Afin de préserver notre cadre et de décrire les évènements proches du point critique sous la même dynamique, nous choisissons d'étudier les avalanches dans le système à contrainte imposée. Cela contraste avec la plupart des résultats précédemment exposés puisque l'approche quasistatique se fait naturellement à taux de cisaillement imposé.

Cette approche que nous proposons, en plus d'avoir une motivation conceptuelle majeure dans notre cas, peut trouver un intérêt pour la modélisation des systèmes réels. En effet, dans certains cas de dynamique avalancheuse, le paramètre imposé adapté est la contrainte plutôt que le taux de cisaillement, et parfois même un possible mélange des deux.

4.4.2.1 Un problème d'états absorbants

Dynamique proche du point critique en taille finie

Pour étudier les avalanches qui composent la dynamique, il est nécessaire de se placer au plus proche du point critique $\Sigma = \Sigma_c$. Comme nous l'avons vu précédemment, lorsque que nous imposons au système une contrainte $\Sigma < \Sigma_c$, il finit par tomber dans un état absorbant où le matériau est élastique en tout point (i.e. tous les sites sont dans l'état $n_i = 0$). Nous appellerons un tel état un état élastique. La dynamique étant fine piégée dans cet état élastique, il est impossible de sonder statistiquement les évènements constituant l'état stationnaire en-dessous du point critique, et donc les avalanches. Pour un système de taille fini, ce problème s'étend même aux cas $\Sigma \gtrsim \Sigma_c$. En effet, par ses fluctuations, le système peut atteindre un état élastique au cours de la dynamique et donc y rester piégé éternellement (voir l'exemple de simulation sur la figure 4.22-(a)).

Redéfinition des avalanches

Afin de pouvoir étudier les évènements proches de la transition à contrainte imposée, il est donc nécessaire de réactiver le système à chaque fois qu'il tombe dans un état élastique. Nous définissons alors les avalanches de plasticité comme les évènements d'activité ayant lieu entre deux réactivations du système. Cette redéfinition reste proche de celle présentée précédemment puisque dans le cas quasistatique, une avalanche correspond aussi à un évènement entre deux états élastiques, seulement générés différemment.

Il faut cependant réadapter la définition de certaines observables associées comme la taille S de ces avalanches. En effet, dans ce cas, la contrainte ne varie pas au cours de l'avalanche et la définition $S = \Delta\Sigma \times L^D$ devient obsolète. Cependant, lors de ces avalanches, la déformation

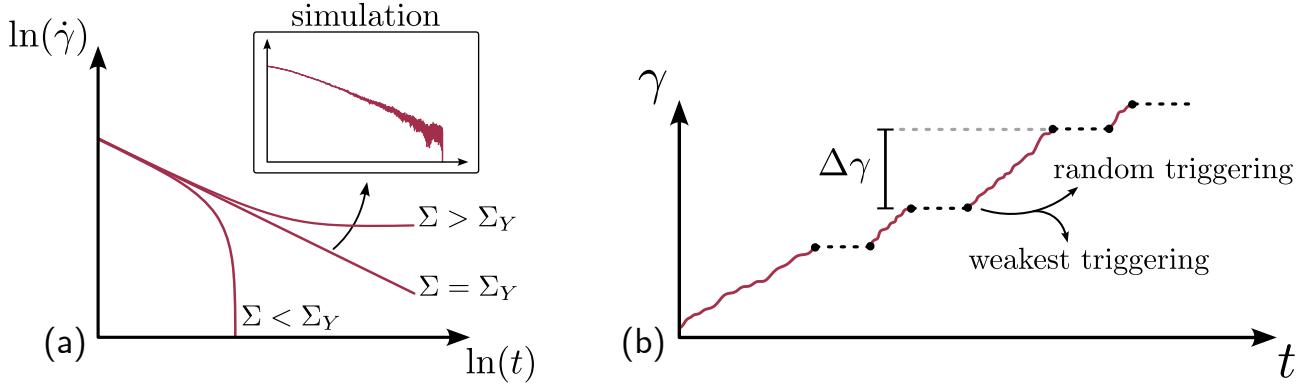


FIGURE 4.22 – Problème posé par l'étude des avalanches à contrainte imposée (a) et résolution par la mise en place de protocoles de réactivation (b).

globale du système γ augmente de manière analogue. En notant $\Delta\gamma$ la différence de déformation entre le début et la fin d'une avalanche, nous proposons de caractériser la taille d'une avalanche par $S = \Delta\gamma \times L^D$. Pour éviter toute confusion dans la suite de cette étude, nous noterons S_Σ la taille des avalanches à taux de cisaillement imposé et S_γ celle des avalanches à contrainte imposée.

Un problème majeur cependant est qu'au contraire du cas quasistatique, la réactivation des états élastiques en contrainte imposée n'a pas de forme naturelle. Dans le cas quasistatique, l'état élastique généré après une avalanche est réactivé en effectuant un forçage uniforme sur le système qui augmente sa contrainte globale (quantité $\mu\gamma^*$ sur la figure 4.21). La contrainte devant être conservée pendant la simulation, cette méthode ne peut pas être appliquée ici.

Il existe alors plusieurs méthodes possibles pour réactiver le système tout en conservant sa contrainte globale. La question est donc de savoir si toutes ces méthodes sont équivalentes et laquelle semble la plus adaptée pour mener notre étude dynamique de la transition. Si des protocoles d'avalanches à contrainte imposée ont déjà été mis en oeuvre, notamment dans les travaux cités précédemment [45, 46], l'influence spécifique du protocole a été mise de côté. Cela laisse à penser que tous seraient équivalents, qu'ils soient à contrainte ou déformation imposée. Notre question pratique se révèle donc d'une seconde utilité : préciser cette zone d'ombre de la littérature.

4.4.2.2 Importance du choix d'un protocole

Dans cette sous-section, nous reprenons les résultats publiés dans [Article avalanches]. La publication complète est présentée dans la sous-section 6.2.2 mais ne sera pas complètement discutée ici afin de ne se concentrer que sur les informations essentielles pour notre propos.

Protocoles étudiés

Afin de déterminer l'importance du protocole de réactivation dans l'analyse des avalanches à contrainte imposée, nous en étudions deux : le random triggering protocol (RTP) et le weakest triggering protocol (WTP).

Dans le cadre du RTP, le système est soumis à sa contrainte critique $\Sigma = \Sigma_c$ déterminée dans la [sous-sous-section 4.3.1.1](#). À chaque fois que le système tombe dans un état élastique, nous le réactivons en rendant plastique un site au hasard. Ceci se fait alors en agissant directement sur la variable n_i et donc sans modification du champ de contrainte $\{\sigma_i\}$. Nous notons que ce protocole ressemble fortement à un protocole déjà mentionné dans la littérature [45].

Le WTP ressemble alors fortement à ce premier protocole. Simplement, cette fois ce n'est pas un site aléatoire qui est rendu plastique mais nous choisissons spécifiquement le site le plus proche de sa contrainte seuil, i.e. avec la valeur minimale de $\sigma_Y - \sigma_i$. En ce sens, cette réactivation ressemble au protocole AQS. En effet, après un forçage uniforme du système c'est le site le plus proche de son seuil qui devient plastique en premier. De la même façon, un protocole analogue à celui-ci a déjà été décrit dans un précédent travail [45].

Enfin, afin d'avoir un point de comparaison, nous étudions en parallèle le protocole classique de l'AQS. Pour caractériser précisément les avalanches pour chacun de ces protocoles, nous les simulons pour générer dans l'état stationnaire⁴ environ 5×10^5 avalanches dans un système de taille $L = 512$.

Comparaisons statistiques

Les distributions de tailles d'avalanche obtenues pour ces trois protocoles sont présentées à la [figure 4.23](#). Comme on peut le remarquer, les distributions prennent alors des formes très différentes selon le protocole. Si les résultats pour l'AQS sont retrouvés avec $\tau \approx 1.35$, dans le cadre du RTP l'exposant estimé semble être légèrement plus grand avec $\tau \approx 1.5$. Il montre aussi une forme de cut-off différente, faisant apparaître une bosse aux grandes tailles. Par ailleurs, le WTP présente des avalanches largement distribuées mais pas selon une loi de puissance claire, rendant de ce fait impossible l'estimation de τ . Nous remarquons par ailleurs que les cut-offs dans le cas des protocoles à contrainte imposée sont bien plus grands que celui dans le cas de l'AQS. Cette première analyse montre donc clairement que les protocoles de génération d'avalanches influent fortement sur les événements générés. Il est donc très important de comparer des approches équivalentes pour conclure sur une comparaison des avalanches dans différents systèmes.

Pour comparer plus précisément ces protocoles, nous menons une analyse de taille finie sur les distributions de tailles et de durées d'avalanche qu'ils produisent. D'après les lois d'échelles présentées à l'[équation 4.61](#), en mesurant ces distributions pour différentes tailles de système et en opérant le redimensionnement suivant :

$$S \rightarrow \frac{S}{L^{d_f}}, \quad P(S) \rightarrow \frac{P(S)}{L^{-d_f \tau}}, \quad S \rightarrow \frac{T}{L^z}, \quad P(T) \rightarrow \frac{P(T)}{L^{-z \tau'}} \quad (4.64)$$

les distributions pour différentes tailles se superposent sur une même courbe maîtresse. Ainsi, cela constitue une méthode graphique précise et efficace pour la détermination des exposants (τ, τ', d_f, z). En suivant cette méthode pour les protocoles AQS et RTP, nous obtenons les résultats présentés à la [figure 4.24](#).

4. L'état stationnaire est considéré atteint lorsque les propriétés statistiques des avalanches sont elles aussi stationnaires

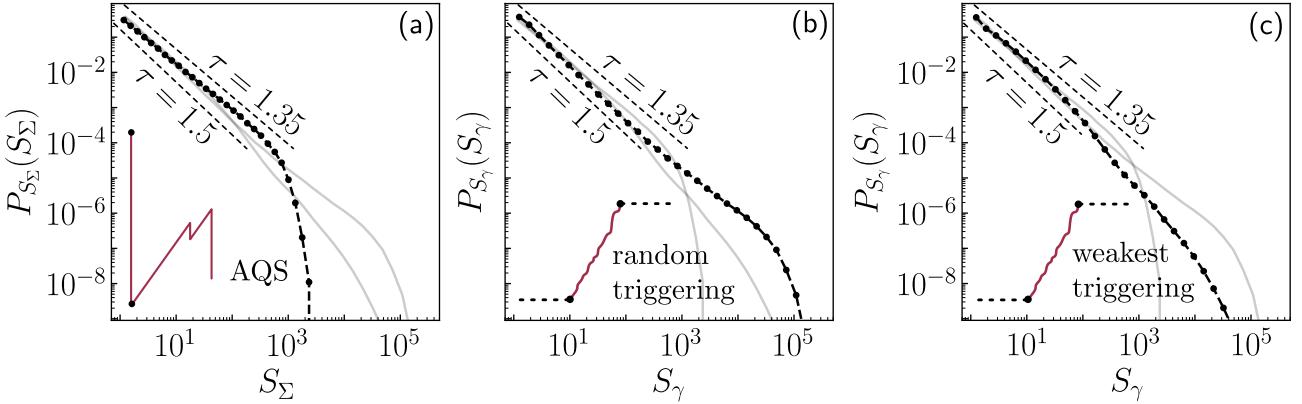


FIGURE 4.23 – Distributions des tailles d’avalanche pour les trois différents protocoles étudiés : (a) AQS, (b) RTP, (c) WTP. Les avalanches sont générées dans un système de taille $L = 512$.

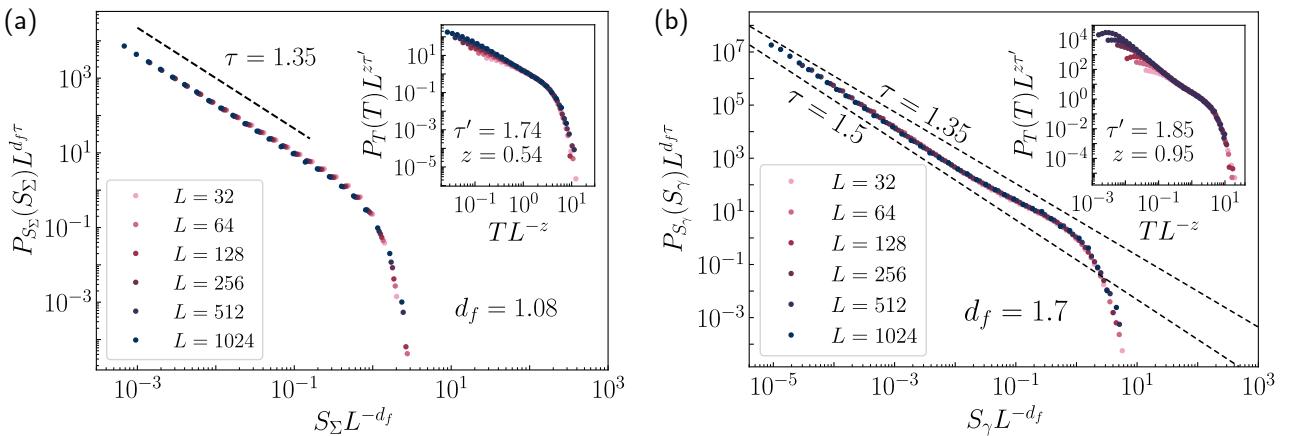


FIGURE 4.24 – Analyse d’échelle de taille finie des distributions de tailles (figures principales) et de durées (insets) d’avalanches pour les protocoles AQS (a) et RTP (b).

La première chose à noter est que la superposition des courbes est remarquable dans les deux cas. La différence d’exposant d’avalanche τ est par ailleurs bien confirmée entre ces deux protocoles avec $\tau = 1.35$ pour l’AQS et $\tau = 1.5$ pour le RTP. D’autre part, nous retrouvons approximativement pour l’AQS les valeurs attendues pour la dimension fractale $d_f \approx 1.1$ et l’exposant dynamique $z \approx 0.55$ [44, 45]. Pour le RTP cependant, ces exposants de structure sont très différents avec $d_f \approx 1.7$ et $z \approx 0.95$. Ces mesures identifient alors des événements plus longs et surtout plus compacts dans le cas du RTP, bien que l’on ait toujours $d_f < D$. D’autre part, dans le cas du WTP, un tel redimensionnement n’est pas réalisable de manière satisfaisante.

Cette caractérisation plus précise confirme alors une différence de nature fondamentale entre les événements générés par différents protocoles.

4.4.2.3 Le protocole RTP comme protocole naturel

S’il donne lieu à des résultats très différents de l’AQS, le protocole RTP semble tout de même être un protocole à contrainte imposé cohérent et solide. Il est par ailleurs possible de rationaliser

les différences mesurées entre ces deux protocoles [**Article avalanches**]. Nous montrons enfin à la [sous-section 6.2.2](#) qu'il répond aux mêmes lois d'échelle que le protocole classique de l'AQS. Ces éléments font donc du RTP un candidat de choix pour l'analyse dynamique de la transition vers l'écoulement à contrainte imposée, de la même façon que l'AQS l'est dans le cas du taux de cisaillement imposé.

Ce choix maintenant évident est en fait plus naturel qu'il n'y paraît. En effet, dans la [sous-sous-section 4.3.1.2](#), nous avons déjà défini le champ d'activation h comme un équivalent du forçage élastique à contrainte imposée. Or de la même manière que l'AQS correspond à la limite $\dot{\gamma} \rightarrow 0$, le RTP correspond à la limite $h \rightarrow 0$. Ainsi, même si son interprétation physique est moins directe, le protocole RTP correspond bien en quelque sorte à une limite critique du processus avalancheux en contrainte imposée. C'est donc ce protocole que nous allons utiliser pour caractériser les avalanches dans les généralisations du modèle de Picard présentées précédemment.

4.4.3 Influence de la portée sur les avalanches en contrainte imposée

De la même manière que la portée d'interaction modifie les exposants critiques ([sous-sous-section 4.3.3.3](#)) et les propriétés d'hyperuniformité ([sous-sous-section 4.3.4.4](#)), nous proposons d'évaluer son influence sur les propriétés d'avalanches. Notamment, nous déterminons comment évoluent les différents exposants caractérisant ces phénomènes avec la portée α , afin de voir si les propriétés dynamiques suivent une évolution similaire à celle des autres propriétés critiques.

4.4.3.1 Avalanches dans le modèle α -Picard

Méthode

Afin d'étudier les avalanches à contrainte imposée dans le modèle α -Picard, nous générions des avalanches en suivant le protocole RTP pour différentes tailles de système et ce pour $\alpha = \{2, 3, 4, 5\}$. Nous déterminons alors les différents exposants caractéristiques par une analyse d'échelle en taille finie comme dans le cas du modèle de Picard (voir [sous-sous-section 4.4.2.2](#)).

En plus de la taille et de la durée des avalanches, nous caractérisons leur étendue spatiale A . Celle-ci correspond en fait à la surface, exprimée en nombre de sites, sur laquelle a pris part l'avalanche. De la même manière que pour les deux autres observables, nous postulons que cette quantité est distribuée selon :

$$P(A) \sim A^{-\tau''} h\left(\frac{A}{A_c}\right), \quad A_c \sim L^\chi \quad (4.65)$$

avec h une fonction à décroissance rapide et A_c le cut-off associé. Ce cette façon, $\chi = D = 2$ signifie que les avalanches occupent au maximum toute la surface du système. Cette quantité permet alors d'offrir une nouvelle caractérisation des avalanches, utile à l'interprétation des résultats qui suit.

Évolution des exposants

Les redimensionnements effectués pour obtenir la meilleure estimation des exposants sont présentés à la [figure 4.25](#) dans le cas du modèle 3-Picard. Ces mêmes figures sont reportées en

annexe pour les autres modèles et nous reportons les exposants déterminés dans le [tableau 4.3](#). Globalement la superposition des courbes est très convaincante dans chacun des cas et pour toutes les distributions. Cela valide alors notre approche à tout α , notamment l'ansatz de l'[équation 4.65](#). Notons par ailleurs que ces résultats sont des résultats préliminaires non publiés qui nécessitent encore quelques améliorations. Néanmoins, leur état actuel permet d'effectuer certaines observations.

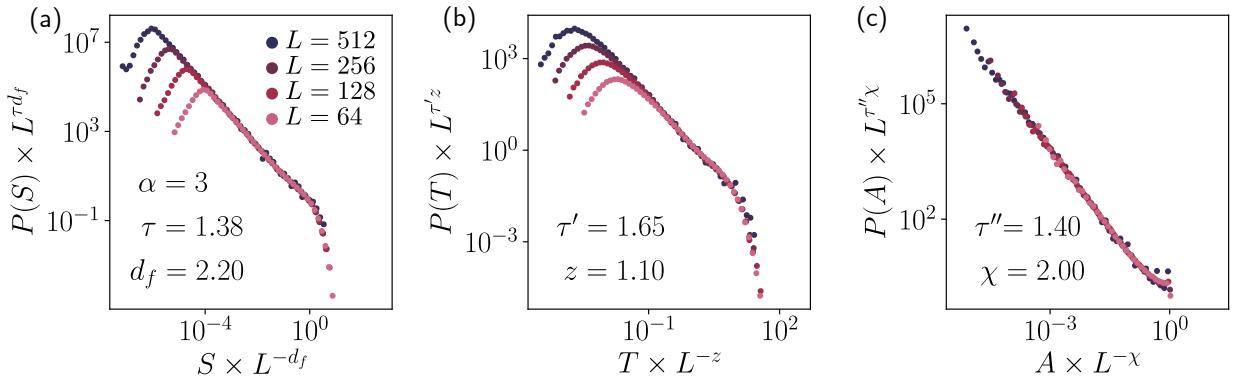


FIGURE 4.25 – Distributions de tailles (a), de durées (b) et de surfaces (c) d’avalanche redimensionnées dans le modèle 3-Picard. Les exposants permettant cette superposition sont reportés dans le [tableau 4.3](#)

α	τ	τ'	τ''	d_f	z	χ
5	1.3	1.5	1.35	2.8	1.55	2
4	1.3	1.47	1.37	2.8	1.55	2
3	1.38	1.65	1.4	2.2	1.1	2
2 (Picard)	1.50	1.85	1.48	1.7	0.95	1.75

TABLE 4.3 – Exposants d’avalanches déterminés dans les modèles α -Picard

Nous remarquons d’abord que les exposants τ , τ' et τ'' caractérisant les lois de puissance ont tous tendance à augmenter à mesure que la portée de l’interaction augmente. Par exemple, on passe de $\tau \approx 1.3$ pour le modèle 5-Picard à $\tau \approx 1.5$ pour le modèle de Picard. Même si ces tendances sont légères, cela signifie que les avalanches sont de moins en moins largement distribuées à mesure qu’ α diminue.

Par ailleurs, tous les exposants semblent être sensiblement les mêmes pour $\alpha = 4$ et $\alpha = 5$. Cette observation suggère alors que la région LP-0 identifiée précédemment ne correspond qu’à une variation des exposants critiques statiques, laissant les exposants d’avalanche inchangés sur toute la région. Nous remarquons de plus que cette criticalité est exactement la même que celle de la classe CDP d’après les résultats de la [section 3.5](#), avec $d_f \approx 2.8$ et $z \approx 1.5$. À des portées relativement courtes, les modes zéros ne semblent donc pas influencer significativement les avalanches.

Enfin le point le plus intéressant vient de l'évolution de la dimension fractale avec α , qui passe de $d_f \approx 2.8$ pour $\alpha = 5$ à $d_f \approx 1.7$ pour le modèle de Picard. Nous rappelons par ailleurs que, comme dans le cas des suspensions au [chapitre 3](#), cet exposant est à comparer à $D + 1$ pour juger de la compacité des avalanches. On passe donc d'avalanches très compactes à courte portée à des avalanches peu compactes à longue portée dans le modèle de Picard. Une manière plus significative de mettre en évidence ce changement est de regarder la projection de l'avalanche sur l'espace de dimension D . Dans ce cas là, la quantité d'intérêt est A , dont le cut-off est caractérisé par l'exposant χ . Celui-ci passe alors subitement d'une valeur $\chi = D = 2$ à $\chi < 2$ lorsque l'on passe de $\alpha = 3$ à $\alpha = 2$. De plus, pour $\alpha = 2$ nous mesurons $d_f \approx \chi$. En d'autres termes, autour de $\alpha = 3$ la compacité des avalanches change de telle manière qu'elles n'occupent plus, au maximum, la totalité du système. Les avalanches deviennent alors spatialement fractales. Parallèlement, l'exposant dynamique opère un changement significatif autour de $\alpha = 3$ où l'on passe de $z > 1$ à $z < 1$.

Comme dans le cas des propriétés critiques statiques et d'hyperuniformité, les avalanches de plasticité ressemblent donc à celles du depinning jusqu'au point $\alpha = 3$, qui marque la limite champ moyen de ce dernier. Toutefois, dans le cas de la transition vers l'écoulement, ce point n'est pas une limite puisqu'il est dépassé par l'évolution des exposants pour $\alpha < 3$. Dans cette zone de démarcation, la structure des avalanches est alors drastiquement différente avec $d_f < D$ et $z < 1$, propriétés déjà établies par les études précédentes. Cette étude permet alors de faire émerger ces propriétés d'une évolution globale du modèle avec la portée d'interaction α .

4.4.3.2 Aparté sur les avalanches écrantées

Si le modèle α -Picard est essentiel pour comprendre les propriétés critiques du cas classique, il ne porte pas vraiment de réalité physique. Dans le [chapitre 1](#), nous avons mis en avant une interaction similaire à l'interaction d'Eshelby mais qui, sous écrantage, voit sa portée modifiée. Notamment, elle décroît dans sa partie écrantée comme $1/r^4$, cas étudié ici à contrainte imposée. Un modèle étudiant précisément cette interaction écrantée a été implémenté et ses avalanches sous cisaillement quasistatiques ont été étudiées. L'étude reléguée à la [sous-sous-section 6.2.3.2](#) montre alors que le système perd sa criticalité dans la zone écrantée. Ceci vient du fait d'une relaxation globale de la contrainte portée uniquement par le site plastique, alors que celle-ci est portée uniformément par tout le système dans le cas du modèle de Picard à taux de cisaillement imposé.

Ainsi, au-delà de la longueur d'écrantage, les avalanches de plasticité disparaissent et ne prennent donc pas la forme de celles du modèle 4-Picard. Cette observation, bien qu'annexe, montre alors que la portée d'interaction n'est pas la seule variable pouvant agir sur les propriétés statistiques des avalanches. Dans des situations physiques réelles, tous les aspects de la dynamique doivent donc être soumis à la plus grande attention pour expliquer ces phénomènes.

4.5 Conclusion

En conclusion, par l'implémentation d'un modèle élastoplastique, nous avons caractérisé la transition vers l'écoulement des matériaux amorphes athermiques en opposition à la transition de depinning. La première phase de caractérisation nous a permis de déterminer les exposants

critiques associés à cette transition. Celle-ci a alors permis de mettre en évidence son caractère convexe ($\beta > 1$) et le caractère exotique des fluctuations critiques qui se dissipent à l'approche de la transition ($\gamma' < 0$).

Par l'étude de variations sur ce modèle, nous avons mis en évidence deux ingrédients clés faisant la spécificité de cette transition. Tout d'abord, la présence d'une symétrie particulière dans le propagateur de redistribution appelée modes zéros modifie le comportement critique du système, et ce même à courte portée. Enfin, la longue portée inscrite dans ce même propagateur place la transition dans une zone non triviale dont la forme a été esquissée. Celle-ci sépare une classe de courte portée distincte de la percolation dirigée conservée, appelée CDP-0, d'une zone de champ moyen représentée par le modèle de Hébraud-Lequeux. Si ce comportement est plutôt classique, sa spécificité réside dans le fait que la zone de longue portée s'étend sur une gamme de portées α différente du cas du depinning. De plus, si les exposants critiques sont relativement similaires au cas du depinning pour $\alpha > 3$, à partir de $\alpha = 3$ le comportement critique dépasse la limite de champ moyen CDP jusqu'à $\alpha < 1$.

Cette observation générale se retrouve alors dans l'évolution des autres propriétés critiques du système. L'hyperuniformité de la répartition de contrainte est perdue conjointement à la rugosité de l'interface pour $\alpha \lesssim 3$ alors qu'elles présentent des caractéristiques similaires au depinning pour $\alpha \gtrsim 3$. D'autre part, les propriétés des avalanches suivent la même tendance. Si des avalanches compactes sont observées pour $\alpha \gtrsim 3$, pour $\alpha \lesssim 3$ les évènements observés sont marqués par une faible compacité avec $d_f < D$, caractéristique de la transition vers l'écoulement.

Si ces comportements étaient déjà partiellement observés, cette étude permet de mettre en lumière ce point $\alpha \approx 3$ autour duquel le phénomène critique change drastiquement de paradigme par tous ses aspects. Dans la zone de démarcation, passé ce point, la transition semble totalement échapper au cadre de référence LR-CDP. Une toute nouvelle théorie semble alors nécessaire pour la description de la transition vers l'écoulement, différente de toutes les théories de champs connues.

Discussion

5.1 Un cadre commun

On a fini sur le yielding de manière pas interprété, cette partie permet de le réconcilier au moins en partie avec le modèle LHL pour proposer un cadre commun avec les suspensions. Ca reste une proposition car rien d'extrêmement solide.

5.1.1 Avalanches

Y'a trop de similarités pour les ignorer

5.2 Notes random

Je prends des notes ici sur les trucs qui me viennent pendant que je rédige les autres chapitres :

- Une différence entre le yielding et les suspensions est que pour les suspensions on démarre l'influence du bruit à partir de la courte portée. Dans le cas du yielding, le bruit commence à avoir une influence (théorie type LHL) à partir du champ moyen type depinning. C'est notamment sûrement pour ça qu'on n'a pas les mêmes évolutions de l'HU.
- Comparer yielding et depinning pour $\beta < 1$ serait intéressant, en plus d'être numériquement pas si exigeant.
- si on a bien un scénario du type LR-CDP puis LHL pour le yielding, c'est assez fou que l'évolution soit aussi continue... (après peut-on vraiment voir deux régimes avec si peu de points)
- Même si numériquement ça fonctionne pas du tout, la coïncidence entre $d = d_f$ et β qui devient plus grand que 1 ou gamma prime plus petit que 0 peut se voir en utilisant le scaling de Lin et Wyart.
- Vu qu'on a attribué la dépendance en protocole au $P(x)$ selon Jagla, est-ce qu'elle disparaît à courte portée ?
- A priori si la relation $d_f = D + \eta$ est valable pour l'AQS on aura aussi un changement de d_f avec des avalanches type AQS.

- Yielding et suspensions sont différents par le fait que le yielding fait aussi de la redistribution de masse à LP.
- Dans la littérature on dit que pour Manna les avalanches c'est pareil à densité imposée qu'en SOC. Est-ce que c'est vrai aussi en LP canonique ? Probablement vérifiable. Probablement pas vrai en LP médiée ! Dans ce cas là, notre résultats sur les avalanches EPM peut avoir un impact plus grand que celui escompté au départ.

5.3 Approches de champ pour les transitions convexes

5.4 Les autres voies vers la convexité

Conclusion

Bibliographie

- [1] D. J. Pine, J. P. Gollub, J. F. Brady, and A. M. Leshansky, “Chaos and threshold for irreversibility in sheared suspensions,” *Nature*, vol. 438, pp. 997–1000, Dec. 2005. Number : 7070 Publisher : Nature Publishing Group.
- [2] L. Corté, P. M. Chaikin, J. P. Gollub, and D. J. Pine, “Random organization in periodically driven systems,” *Nature Physics*, vol. 4, pp. 420–424, May 2008. Publisher : Nature Publishing Group.
- [3] E. Tjhung and L. Berthier, “Criticality and correlated dynamics at the irreversibility transition in periodically driven colloidal suspensions,” *Journal of Statistical Mechanics : Theory and Experiment*, vol. 2016, p. 033501, Mar. 2016. Publisher : IOP Publishing and SISSA.
- [4] Z. Ge and G. J. Elfring, “Rheology of periodically sheared suspensions undergoing reversible-irreversible transition,” *Physical Review E*, vol. 106, p. 054616, Nov. 2022.
- [5] R. Mari, E. Bertin, and C. Nardini, “Absorbing phase transitions in systems with mediated interactions,” *Physical Review E*, vol. 105, p. L032602, Mar. 2022. Publisher : American Physical Society.
- [6] J. S. Guasto, A. S. Ross, and J. P. Gollub, “Hydrodynamic irreversibility in particle suspensions with nonuniform strain,” *Physical Review E*, vol. 81, p. 061401, June 2010. Publisher : American Physical Society.
- [7] H. Diamant, “Hydrodynamic interaction in confined geometries,” *Journal of the Physical Society of Japan*, vol. 78, p. 041002, Apr. 2009. arXiv :0812.4971 [cond-mat, physics :physics].
- [8] S. Farhadi and P. E. Arratia, “Shear-induced reversibility of 2D colloidal suspensions in the presence of minimal thermal noise,” *Soft Matter*, vol. 13, pp. 4278–4284, June 2017. Publisher : The Royal Society of Chemistry.
- [9] G. Drazer, J. Koplik, B. Khusid, and A. Acrivos, “Microstructure and velocity fluctuations in sheared suspensions,” *Journal of Fluid Mechanics*, vol. 511, pp. 237–263, July 2004.
- [10] M. Abramowitz and I. A. Stegun, eds., *Handbook of Mathematical Functions : with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables*. New York, NY : Dover Publications, 0009-revised edition ed., June 1965.
- [11] E. E. Ferrero and E. A. Jagla, “Criticality in elastoplastic models of amorphous solids with stress-dependent yielding rates,” *Soft Matter*, vol. 15, no. 44, pp. 9041–9055, 2019.
- [12] S. Rossi, G. Biroli, M. Ozawa, G. Tarjus, and F. Zamponi, “Finite-Disorder Critical Point in the Yielding Transition of Elastoplastic Models,” *Physical Review Letters*, vol. 129, p. 228002, Nov. 2022. Publisher : American Physical Society.

- [13] J. W. Cooley and J. W. Tukey, “An algorithm for the machine calculation of complex Fourier series,” *Mathematics of Computation*, vol. 19, no. 90, pp. 297–301, 1965.
- [14] S. Lübeck, “Universal scaling behavior of non-equilibrium phase transitions,” *International Journal of Modern Physics B*, vol. 18, pp. 3977–4118, Dec. 2004. arXiv :cond-mat/0501259.
- [15] P. Hébraud and F. Lequeux, “Mode-Coupling Theory for the Pasty Rheology of Soft Glassy Materials,” *Physical Review Letters*, vol. 81, pp. 2934–2937, Oct. 1998. Publisher : American Physical Society.
- [16] J. Lin and M. Wyart, “Mean-Field Description of Plastic Flow in Amorphous Solids,” *Physical Review X*, vol. 6, p. 011005, Jan. 2016. Publisher : American Physical Society.
- [17] J. Lin and M. Wyart, “Microscopic processes controlling the Herschel-Bulkley exponent,” *Physical Review E*, vol. 97, p. 012603, Jan. 2018.
- [18] S. Lübeck, “Universal finite-size scaling behavior and universal dynamical scaling behavior of absorbing phase transitions with a conserved field,” *Physical Review E*, vol. 68, no. 5, 2003.
- [19] A. Vespignani, R. Dickman, M. A. Muñoz, and S. Zapperi, “Absorbing-state phase transitions in fixed-energy sandpiles,” *Physical Review E*, vol. 62, pp. 4564–4582, Oct. 2000. Publisher : American Physical Society.
- [20] M. A. Muñoz, R. Dickman, A. Vespignani, and S. Zapperi, “Avalanche and spreading exponents in systems with absorbing states,” *Physical Review E*, vol. 59, pp. 6175–6179, May 1999. Publisher : American Physical Society.
- [21] A. Chessa, A. Vespignani, and S. Zapperi, “Critical exponents in stochastic sandpile models,” *Computer Physics Communications*, vol. 121-122, pp. 299–302, Sept. 1999.
- [22] A. Chessa, H. E. Stanley, A. Vespignani, and S. Zapperi, “Universality in sandpiles,” *Physical Review E*, vol. 59, pp. R12–R15, Jan. 1999. Publisher : American Physical Society.
- [23] K. J. Wiese, “Theory and experiments for disordered elastic manifolds, depinning, avalanches, and sandpiles,” *Reports on Progress in Physics*, vol. 85, p. 086502, Aug. 2022. Publisher : IOP Publishing.
- [24] A. Rosso, “Depinning of elastic manifolds,” *Physical Review E*, vol. 67, no. 2, 2003.
- [25] W. H. Herschel and R. Bulkley, “Konsistenzmessungen von Gummi-Benzollösungen,” *Kolloid-Zeitschrift*, vol. 39, pp. 291–300, Aug. 1926.
- [26] G. Katgert, A. Latka, M. E. Möbius, and M. van Hecke, “Flow in linearly sheared two-dimensional foams : From bubble to bulk scale,” *Physical Review E*, vol. 79, p. 066318, June 2009. Publisher : American Physical Society.
- [27] L. Bécu, S. Manneville, and A. Colin, “Yielding and Flow in Adhesive and Nonadhesive Concentrated Emulsions,” *Physical Review Letters*, vol. 96, p. 138302, Apr. 2006. Publisher : American Physical Society.
- [28] P. Jop, V. Mansard, P. Chaudhuri, L. Bocquet, and A. Colin, “Microscale Rheology of a Soft Glassy Material Close to Yielding,” *Physical Review Letters*, vol. 108, p. 148301, Apr. 2012. Publisher : American Physical Society.
- [29] G. Ovarlez, L. Tocquer, F. Bertrand, and P. Coussot, “Rheopexy and tunable yield stress of carbon black suspensions,” *Soft Matter*, vol. 9, pp. 5540–5549, May 2013. Publisher : The Royal Society of Chemistry.

- [30] R. Besseling, E. R. Weeks, A. B. Schofield, and W. C. K. Poon, “Three-Dimensional Imaging of Colloidal Glasses under Steady Shear,” *Physical Review Letters*, vol. 99, p. 028301, July 2007. Publisher : American Physical Society.
- [31] D. Bonn, M. M. Denn, L. Berthier, T. Divoux, and S. Manneville, “Yield stress materials in soft condensed matter,” *Reviews of Modern Physics*, vol. 89, p. 035005, Aug. 2017. Publisher : American Physical Society.
- [32] V. Delbecq, P. Carrez, and P. Cordier, “Rheological properties of Mg₂SiO₄ glass : A molecular dynamics study,” *Journal of Non-Crystalline Solids*, vol. 619, p. 122572, Nov. 2023.
- [33] C. Fusco, T. Albaret, and A. Tanguy, “Rheological properties vs. local dynamics in model disordered materials at low temperature,” *The European Physical Journal E*, vol. 37, pp. 1–9, May 2014. Company : Springer Distributor : Springer Institution : Springer Label : Springer Number : 5 Publisher : Springer Berlin Heidelberg.
- [34] B. Tyukodi, S. Patinet, S. Roux, and D. Vandembroucq, “From depinning transition to plastic yielding of amorphous media : A soft-modes perspective,” *Physical Review E*, vol. 93, p. 063005, June 2016.
- [35] P. Hebraud and F. Lequeux, “Mode-Coupling Theory for the Pasty Rheology of Soft Glassy Materials,” *Physical Review Letters*, vol. 81, pp. 2934–2937, Oct. 1998.
- [36] J. Olivier, *Fluides vitreux, sutures craniofaciales, diffusion réactive : quelques contributions à l'étude de ces systèmes multi-échelles ou singuliers*. phdthesis, Université de Grenoble, July 2011.
- [37] E. Bertin, “Stochastic resetting of a population of random walks with resetting-rate-dependent diffusivity,” *Journal of Physics A : Mathematical and Theoretical*, vol. 55, p. 384007, Aug. 2022. Publisher : IOP Publishing.
- [38] E. Agoritsas, E. Bertin, K. Martens, and J.-L. Barrat, “On the relevance of disorder in athermal amorphous materials under shear,” *The European Physical Journal E*, vol. 38, p. 71, July 2015.
- [39] J.-P. Bouchaud, S. Gualdi, M. Tarzia, and F. Zamponi, “Spontaneous instabilities and stick-slip motion in a generalized Hébraud–Lequeux model,” *Soft Matter*, vol. 12, pp. 1230–1237, Jan. 2016. Publisher : The Royal Society of Chemistry.
- [40] A. Nicolas, E. E. Ferrero, K. Martens, and J.-L. Barrat, “Deformation and flow of amorphous solids : Insights from elastoplastic models,” *Reviews of Modern Physics*, vol. 90, p. 045006, Dec. 2018. Publisher : American Physical Society.
- [41] F. Schott, B. Dollet, S. Santucci, C. M. Schlepütz, C. Claudet, S. Gstöhl, C. Raufaste, and R. Mokso, “Multiscale stress dynamics in sheared liquid foams revealed by tomorheoscopy.” Nov. 2024.
- [42] D. Pan, A. Inoue, T. Sakurai, and M. W. Chen, “Experimental characterization of shear transformation zones for plastic flow of bulk metallic glasses,” *Proceedings of the National Academy of Sciences*, vol. 105, pp. 14769–14772, Sept. 2008. Publisher : Proceedings of the National Academy of Sciences.
- [43] G. Picard, A. Ajdari, F. Lequeux, and L. Bocquet, “Slow flows of yield stress fluids : complex spatio-temporal behaviour within a simple elasto-plastic model,” *Physical Review E : Statistical, Nonlinear, and Soft Matter Physics*, vol. 71, p. 010501, 2005.

- [44] C. Liu, E. E. Ferrero, F. Puosi, J.-L. Barrat, and K. Martens, “Driving rate dependence of avalanche statistics and shapes at the yielding transition,” *Physical Review Letters*, vol. 116, p. 065501, Feb. 2016. arXiv :1506.08161 [cond-mat].
- [45] J. Lin, E. Lerner, A. Rosso, and M. Wyart, “Scaling description of the yielding transition in soft amorphous solids at zero temperature,” *Proceedings of the National Academy of Sciences*, vol. 111, pp. 14382–14387, Oct. 2014. arXiv :1403.6735 [cond-mat].
- [46] Z. Budrikis, D. F. Castellanos, S. Sandfeld, M. Zaiser, and S. Zapperi, “Universal features of amorphous plasticity,” *Nature Communications*, vol. 8, p. 15928, July 2017. Number : 1 Publisher : Nature Publishing Group.
- [47] G. Picard, A. Ajdari, F. Lequeux, and L. Bocquet, “Elastic consequences of a single plastic event : a step towards the microscopic modeling of the flow of yield stress fluids,” *The European Physical Journal E*, vol. 15, pp. 371–381, Dec. 2004. arXiv :cond-mat/0403647.
- [48] NVIDIA, P. Vingelmann, and F. H. Fitzek, “Cuda, release : 10.2.89,” 2020.
- [49] C. Liu, *Critical dynamics at the yielding transition and creep behavior of amorphous systems : mesoscopic modeling*. phdthesis, Université Grenoble Alpes, Nov. 2016.
- [50] M. Kardar, *Statistical Physics of Fields*. Cambridge : Cambridge University Press, 2007.
- [51] K. Binder, “Finite size scaling analysis of ising model block distribution functions,” *Zeitschrift für Physik B Condensed Matter*, vol. 43, pp. 119–140, June 1981.
- [52] M. Rossi, R. Pastor-Satorras, and A. Vespignani, “Universality Class of Absorbing Phase Transitions with a Conserved Field,” *Physical Review Letters*, vol. 85, pp. 1803–1806, Aug. 2000. Publisher : American Physical Society.
- [53] E. E. Ferrero and E. A. Jagla, “Elastic interfaces on disordered substrates : From mean-field depinning to yielding,” *Physical Review Letters*, vol. 123, p. 218002, Nov. 2019. arXiv :1905.08771 [cond-mat].
- [54] K. Martens, L. Bocquet, and J.-L. Barrat, “Spontaneous formation of permanent shear bands in a mesoscopic model of flowing disordered matter,” *Soft Matter*, vol. 8, pp. 4197–4205, Mar. 2012. Publisher : The Royal Society of Chemistry.
- [55] H. Nishimori, G. Ortiz, H. Nishimori, and G. Ortiz, *Elements of Phase Transitions and Critical Phenomena*. Oxford Graduate Texts, Oxford, New York : Oxford University Press, Oct. 2015.
- [56] A. Nicolas, *Ecoulements des solides amorphes : modélisation élastoplastique et théorie de couplage de modes*. These de doctorat, Grenoble, Oct. 2014.
- [57] X. Cao, S. Bouzat, A. B. Kolton, and A. Rosso, “Localization of soft modes at the depinning transition,” *Physical Review E*, vol. 97, p. 022118, Feb. 2018. Publisher : American Physical Society.
- [58] S. Chowdhury, S. Abraham, T. Hudson, and P. Harrowell, “Long range stress correlations in the inherent structures of liquids at rest,” *The Journal of Chemical Physics*, vol. 144, p. 124508, Mar. 2016.
- [59] M. Maier, A. Zippelius, and M. Fuchs, “Emergence of Long-Ranged Stress Correlations at the Liquid to Glass Transition,” *Physical Review Letters*, vol. 119, p. 265701, Dec. 2017. Publisher : American Physical Society.
- [60] E. Lerner, “Simple argument for emergent anisotropic stress correlations in disordered solids,” *The Journal of Chemical Physics*, vol. 153, p. 216101, Dec. 2020.

- [61] P. M. Chaikin and T. C. Lubensky, *Principles of Condensed Matter Physics*. Cambridge : Cambridge University Press, 1995.
- [62] K. J. Wiese, “Hyperuniformity in the Manna Model, Conserved Directed Percolation and Depinning,” *Physical Review Letters*, vol. 133, p. 067103, Aug. 2024. Publisher : American Physical Society.
- [63] M. N. Semeikin and K. J. Wiese, “Roughness and critical force for depinning at 3-loop order,” *Physical Review B*, vol. 109, p. 134203, Apr. 2024. Publisher : American Physical Society.
- [64] B. A. Sun, H. B. Yu, W. Jiao, H. Y. Bai, D. Q. Zhao, and W. H. Wang, “Plasticity of Ductile Metallic Glasses : A Self-Organized Critical State,” *Physical Review Letters*, vol. 105, p. 035501, July 2010. Publisher : American Physical Society.
- [65] J. Lauridsen, M. Twardos, and M. Dennin, “Shear-Induced Stress Relaxation in a Two-Dimensional Wet Foam,” *Physical Review Letters*, vol. 89, p. 098303, Aug. 2002. Publisher : American Physical Society.
- [66] K. M. Salerno, “Effect of inertia on sheared disordered solids : Critical scaling of avalanches in two and three dimensions,” *Physical Review E*, vol. 88, no. 6, 2013.
- [67] N. Oyama, H. Mizuno, and A. Ikeda, “Unified view of avalanche criticality in sheared glasses,” *Physical Review E*, vol. 104, p. 015002, July 2021. Publisher : American Physical Society.
- [68] M. Talamali, V. Petäjä, D. Vandembroucq, and S. Roux, “Avalanches, precursors, and finite-size fluctuations in a mesoscopic model of amorphous plasticity,” *Physical Review E*, vol. 84, p. 016115, July 2011. Publisher : American Physical Society.
- [69] P. Le Doussal, “Size distributions of shocks and static avalanches from the functional renormalization group,” *Physical Review E*, vol. 79, no. 5, 2009.
- [70] D. V. Denisov, K. A. Lörincz, J. T. Uhl, K. A. Dahmen, and P. Schall, “Universality of slip avalanches in flowing granular matter,” *Nature Communications*, vol. 7, p. 10641, Feb. 2016. Publisher : Nature Publishing Group.
- [71] T. Mäkinen, A. D. S. Parmar, S. Bonfanti, and M. J. Alava, “Avalanches in Cu-Zr-Al metallic glasses,” *Physical Review E*, vol. 111, p. 014107, Jan. 2025. Publisher : American Physical Society.
- [72] C. Le Priol, “Spatial Clustering of Depinning Avalanches in Presence of Long-Range Interactions,” *Physical Review Letters*, vol. 126, no. 2, 2021.

Annexe

6.1 Transition de réversibilité

6.1.1 Transformée de Fourier des propagateurs

6.1.2 Test de l'approximation scalaire

6.1.3 Résolution numérique du modèle μ -Hébraud-Lequeux

6.1.4 Fonctions de corrélation de paire

6.1.4.1 α -ROM en 2D avec sauts infinis des particules actives

6.1.4.2 α -ROM en 2D avec sauts infinis des particules actives

6.1.5 Avalanches dans le modèle α -ROM

6.2 Transition vers l'écoulement

6.2.1 Modèles α -Picard

6.2.1.1 Transformée de Fourier inverse du propagateur

We start from the general result :

$$\mathcal{F}\left(\frac{1}{r^\alpha}\right) = \frac{\pi^{\alpha-d/2} \Gamma((d-\alpha)/2)}{\Gamma(\alpha/2)} \times \frac{1}{|k|^{d-\alpha}} \quad (6.1)$$

with d the dimension of space (k is directly the frequency not the pulsation). This result holds if $0 < \alpha < d$ in the sense of functions but can be extended to any α in the sense of distributions. This can be rewritten as :

$$\mathcal{F}^{-1}\left(\frac{1}{|k|^\beta}\right) = \frac{\Gamma\left(1 - \frac{\beta}{2}\right)}{\pi^{1-\beta} \Gamma\left(\frac{\beta}{2}\right)} \times \frac{1}{r^{2-\beta}} \quad (6.2)$$

Then we have :

$$\begin{aligned}
 (2\pi)^4 \mathcal{F}^{-1} \left(\frac{k_x^2 k_y^2}{|k|^\beta} \right) &= \partial_x^2 \partial_y^2 \mathcal{F}^{-1} \left(\frac{1}{|k|^\beta} \right) \\
 &= \frac{\Gamma(1 - \frac{\beta}{2})}{\pi^{1-\beta} \Gamma(\frac{\beta}{2})} \partial_x^2 \partial_y^2 \left(\frac{1}{r^{2-\beta}} \right)
 \end{aligned} \tag{6.3}$$

Computing the derivatives we get :

$$\partial_x^2 \partial_y^2 \left(\frac{1}{r^{2-\beta}} \right) = \frac{1}{r^{10-\beta}} (8 - 6\beta + \beta^2) \times (x^4(\beta - 5) + y^4(\beta - 5) + x^2y^2(38 - 12\beta + \beta^2)) \tag{6.4}$$

using $r^2 = x^2 + y^2$ and $(x, y) = (r \cos \theta, r \sin \theta)$ we can simplify this expression :

$$\partial_x^2 \partial_y^2 \left(\frac{1}{r^{2-\beta}} \right) = \frac{1}{r^{6-\beta}} (8 - 6\beta + \beta^2) \times (\beta - 5 + \cos^2 \theta \sin^2 \theta (48 - 14\beta + \beta^2)) \tag{6.5}$$

and using $\cos^2 \theta \sin^2 \theta = \frac{1}{8}(1 - \cos 4\theta)$ we get :

$$\partial_x^2 \partial_y^2 \left(\frac{1}{r^{2-\beta}} \right) = \frac{1}{8r^{6-\beta}} (8 - 6\beta + \beta^2) \times ((8 - 6\beta + \beta^2) - \cos 4\theta (48 - 14\beta + \beta^2)) \tag{6.6}$$

so factorizing we finally get :

$$(2\pi)^4 \mathcal{F}^{-1} \left(\frac{k_x^2 k_y^2}{|k|^\beta} \right) = \frac{\Gamma(1 - \frac{\beta}{2})}{\pi^{1-\beta} \Gamma(\frac{\beta}{2})} \times \frac{(\beta - 4)(\beta - 2)}{8r^{6-\beta}} ((\beta - 4)(\beta - 2) - \cos 4\theta (\beta - 8)(\beta - 6)) \tag{6.7}$$

Developing around $\beta = 4$

Non-negative integers (zero included) being poles of the function Γ , $\beta = 4$ must be taken as a limit. For that we use :

$$\Gamma(-n + \epsilon) = \frac{(-1)^n}{n!} \left(\frac{1}{\epsilon} + \mathcal{O}(1) \right) \tag{6.8}$$

then we have for $\beta = 4 + \epsilon$:

$$(2\pi)^4 \mathcal{F}^{-1} \left(\frac{k_x^2 k_y^2}{|k|^{4+\epsilon}} \right) = \frac{2/\epsilon}{\pi^{-3-\epsilon/2} \Gamma(2 + \frac{\epsilon}{2})} \times \frac{(\epsilon + 2)\epsilon}{8r^{2-\epsilon}} ((\epsilon + 2)\epsilon - \cos 4\theta (\epsilon - 2)(\epsilon - 4)) \tag{6.9}$$

which tends to :

$$\mathcal{F}^{-1} \left(\frac{-4q_x^2 q_y^2}{|q|^4} \right) = \frac{\cos 4\theta}{\pi r^2} \tag{6.10}$$

6.2.1.2 Détermination des points critiques

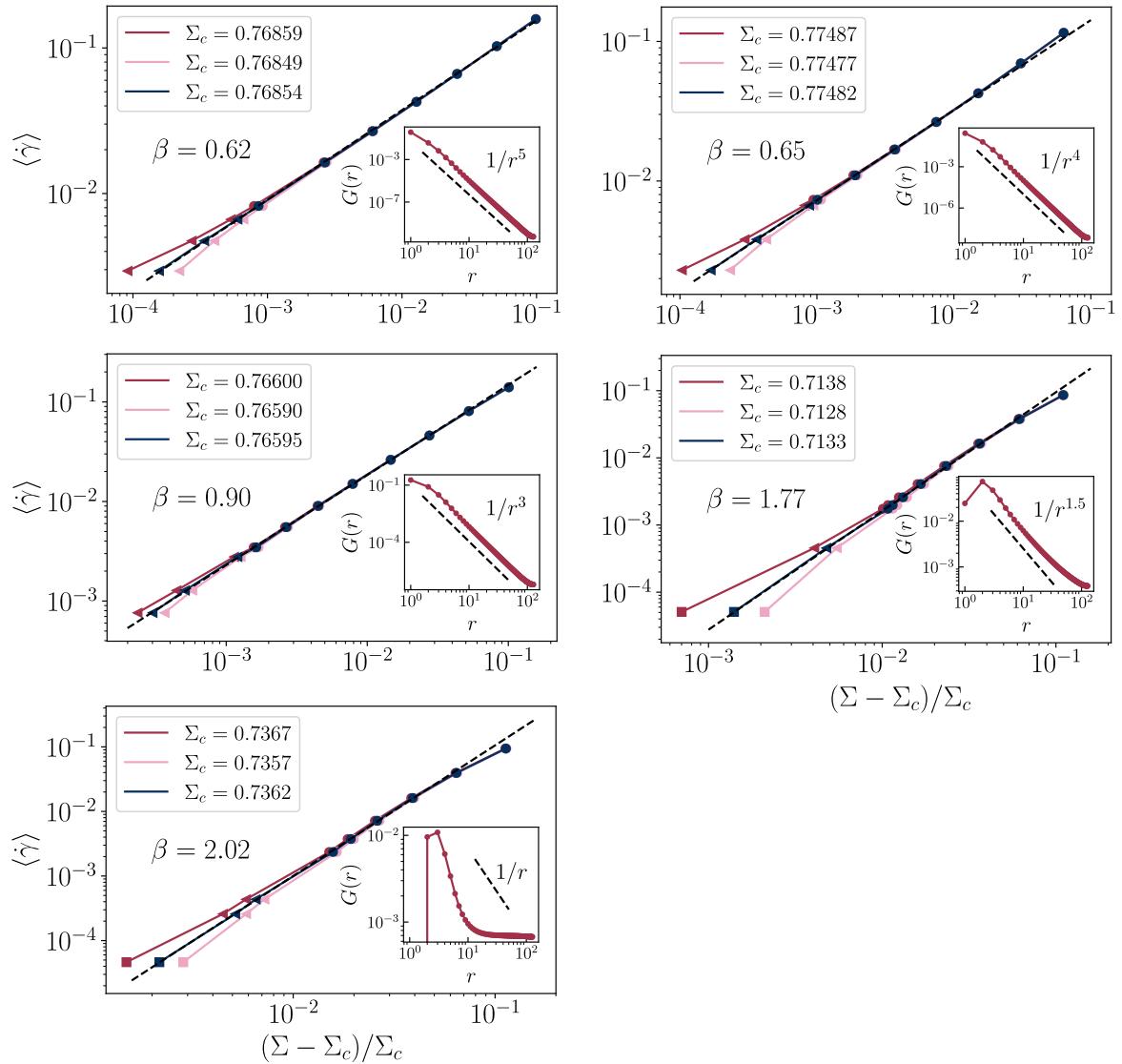


FIGURE 6.5

6.2.1.3 Avalanches

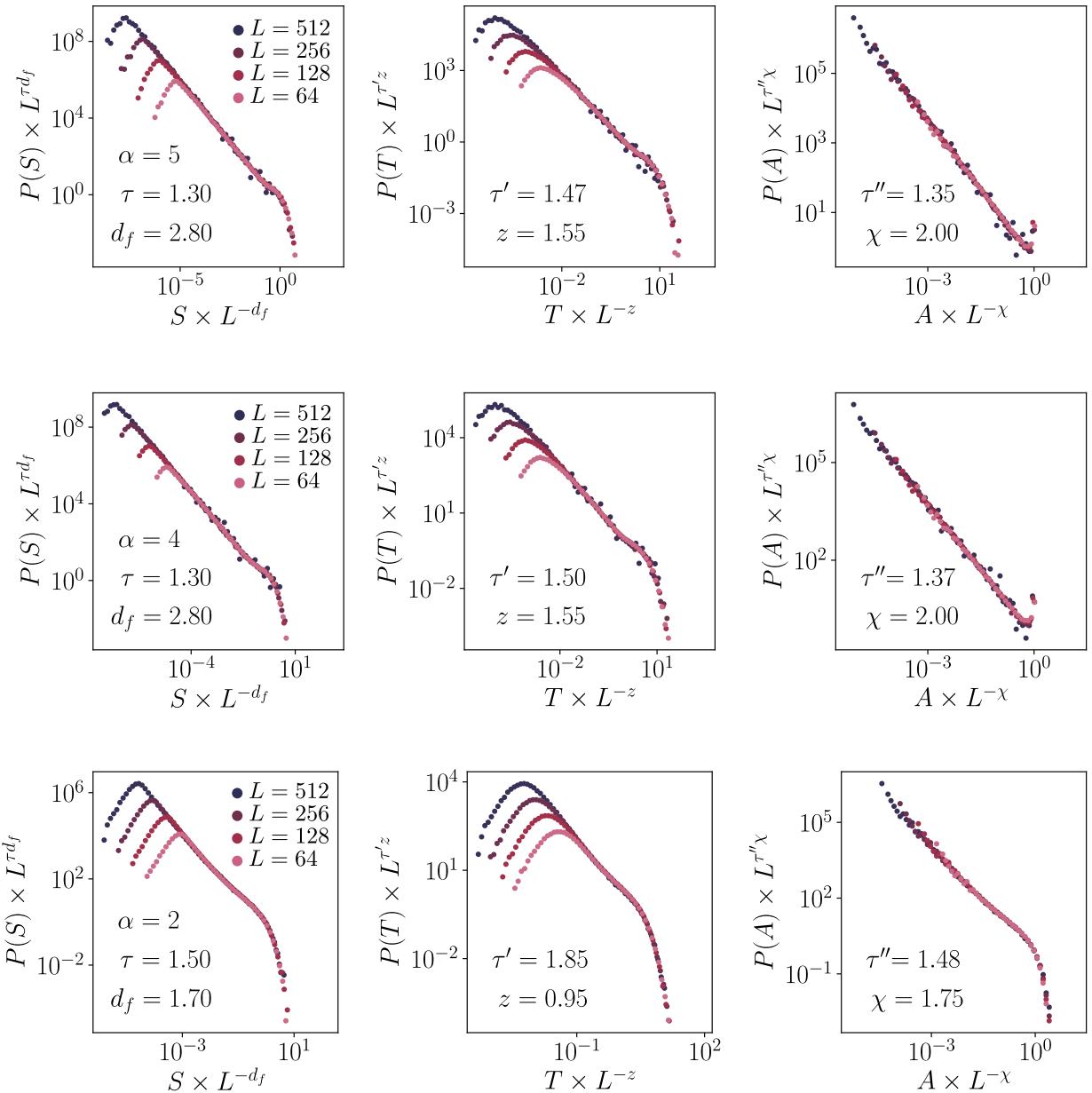


FIGURE 6.6 – Distributions de tailles (a), de durées (b) et de surfaces (c) d’avalanche redimensionnées dans le modèle α -Picard pour $\alpha \in \{5, 4, 2\}$.

6.2.2 Dépendance en protocole des avalanches à contrainte imposée dans les modèles élastoplastiques

6.2.3 Modèle de Picard écranté

6.2.3.1 Transformée de Fourier inverse du propagateur

The screened Eshelby in Fourier space can be written :

$$\mathcal{G}_\lambda(\mathbf{q}) = -4 \frac{q_x^2 q_y^2}{q^2(q^2 + \lambda^2)} - \frac{\lambda^2}{\lambda^2 + q^2} \quad (6.11)$$

from this we get the asymptotic forms :

$$\mathcal{G}_\lambda(\mathbf{q}) \xrightarrow[\lambda \ll q]{} -4 \frac{q_x^2 q_y^2}{q^4} \quad (6.12)$$

$$\mathcal{G}_\lambda(\mathbf{q}) \xrightarrow[\lambda \gg q]{} -4 \frac{q_x^2 q_y^2}{\lambda^2 q^2} - 1 \quad (6.13)$$

which correspond in real space to :

$$\mathcal{G}_\lambda(\mathbf{r}) \xrightarrow[\lambda \ll q]{} \sim \frac{\cos 4\theta}{r^2} \quad (6.14)$$

$$\mathcal{G}_\lambda(\mathbf{r}) \xrightarrow[\lambda \gg q]{} \sim \frac{\cos 4\theta}{r^4} \quad (6.15)$$

To get the full expression of the screened propagator in real space we decompose the first term so that we get :

$$\mathcal{G}_\lambda(\mathbf{q}) = -4 \frac{q_x^2 q_y^2}{\lambda^2 q^2} + 4 \frac{q_x^2 q_y^2}{\lambda^2 (\lambda^2 + q^2)} - \frac{\lambda^2}{\lambda^2 + q^2} \quad (6.16)$$

and so :

$$\mathcal{G}(r, \theta) = \frac{12}{\pi \lambda^2} \frac{\cos 4\theta}{r^4} - \frac{\lambda^2}{2\pi} K_0(\lambda r) + \frac{2}{\pi \lambda^2} \partial_x^2 \partial_y^2 K_0(\lambda r) \quad (6.17)$$

and after some algebra :

$$\mathcal{G}(r, \theta) = \frac{12}{\pi \lambda^2} \frac{\cos 4\theta}{r^4} - \frac{1}{32\pi \lambda r^3} \sum_{n=0}^4 K_n(\lambda r) \left(P_n^{(0)}(\lambda r) + P_n^{(1)}(\lambda r) \cos 4\theta \right) \quad (6.18)$$

with :

$$\begin{aligned} P_0^{(0)}(X) &= X(4 + 13X^2), & P_0^{(1)}(X) &= 3X(20 + X^2) \\ P_1^{(0)}(X) &= 8 + 12X^2, & P_1^{(1)}(X) &= 120 + 36X^2 \\ P_2^{(0)}(X) &= 4X(1 - X^2), & P_2^{(1)}(X) &= 60X^3 \\ P_3^{(0)}(X) &= 4X^2, & P_3^{(1)}(X) &= 12X^2 \\ P_4^{(0)}(X) &= -X^3, & P_4^{(1)}(X) &= X^3 \end{aligned} \quad (6.19)$$

The correct asymptotic forms should be recovered (but this still has to be verified).

From the asymptotical forms, it can be understood that criticality is lost for high screening since in this case the relaxation at the center dominates everything.

6.2.3.2 Avalanches

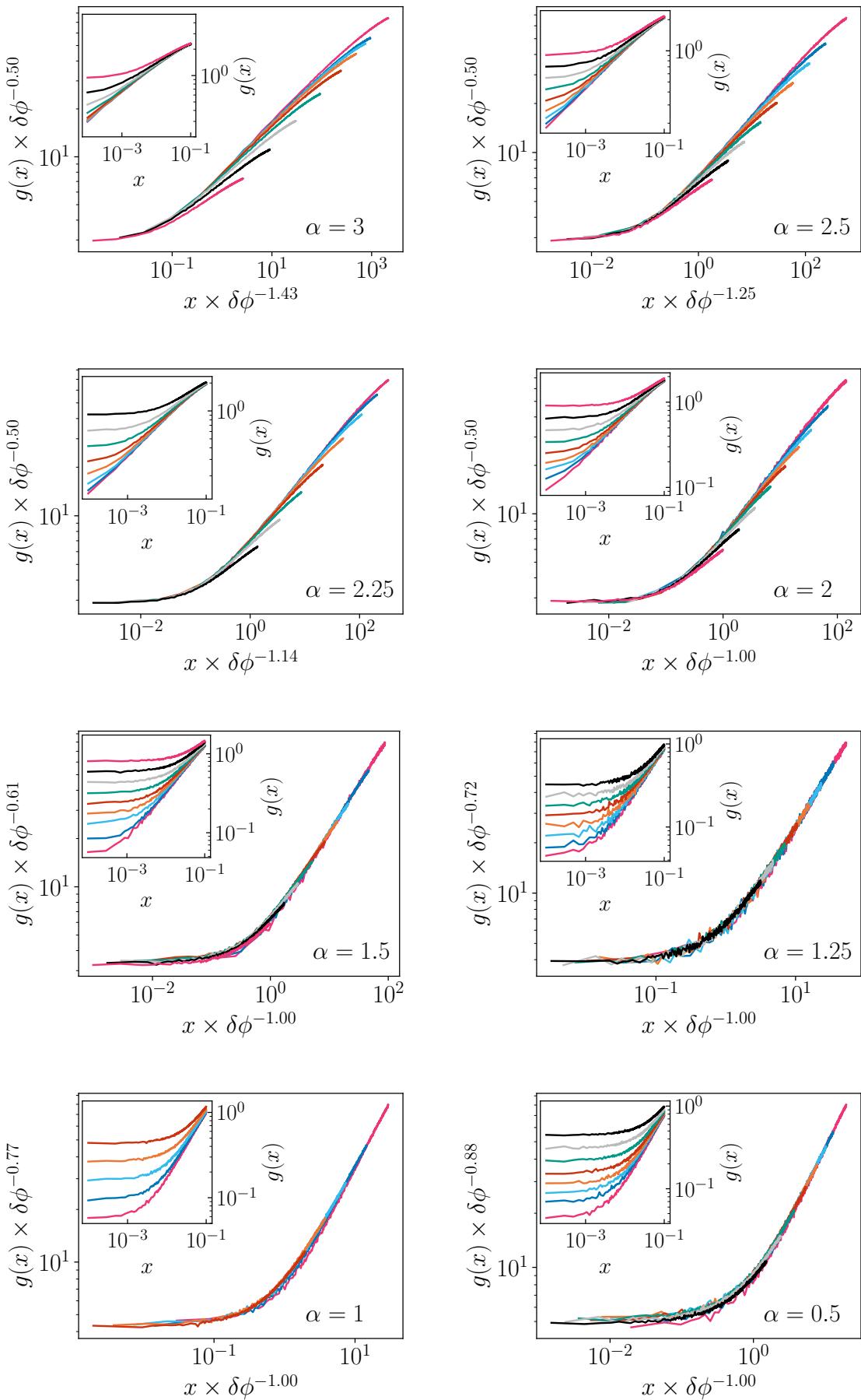
Le modèle de Picard écranté ne conservant pas la contrainte globale du système, il n'est pas possible de générer des avalanches selon le protocole RTP. Toutefois, l'approche quasistatique de l'AQS est tout à fait réalisable. Pour différentes tailles de systèmes L et différents écrantages λ , nous mesurons les distributions de tailles d'avalanche avec le protocole AQS dans ce modèle. Les résultats sont présentés à la figure ??.

Pour le plus faible écrantage ($\lambda = 10^{-3}$), nous retrouvons des distributions en loi de puissance avec $\tau \approx 1.35$ comme dans le cas du modèle de Picard ($\lambda = 0$). Par contre, à mesure que λ augmente, ces lois de puissance sont soumises à un cut-off de plus en plus faible. De ce fait, à $\lambda = 1$ la criticalité avalancheuse est perdue à toutes les tailles. Cette diminution du cut-off ne dépendant pas de la taille du système, cela suggère qu'il est uniquement contrôlé par la longueur d'écrantage $\xi \sim 1/\sqrt{\lambda}$. En d'autres termes, il n'y aurait des avalanches qu'en dessous de la longueur d'écrantage. Au-delà, le système perd sa criticalité. Etant donné qu'en dessous de ξ le propagateur prend la forme de celui d'Eshleby, il est raisonnable de penser que les avalanches ont la même structure que celle dans le modèle de Picard dans la zone non-écrantée. Pour valider cette hypothèse, nous redimensionnons les distributions obtenues pour les systèmes de plus grande taille selon :

$$P(S) \rightarrow \frac{P(S)}{\xi^{-\tau_{\text{eff}} d_{f,\text{eff}}}}, \quad S \rightarrow \frac{S}{\xi^{d_{f,\text{eff}}}} \quad (6.20)$$

La meilleure superposition des courbes est alors représentée à la figure ?? pour $d_{f,\text{eff}} \approx 0.9$ et $\tau_{\text{eff}} \approx 1.36$. La valeur des exposants déterminée ainsi étant très proche de celles déterminées dans le cas du modèle de Picard avec un redimensionnement par L , cela conforte notre hypothèse. Ainsi, l'écrantage sur une longueur ξ n'aurait comme effet que de supprimer la criticalité du système au-delà de cette échelle de longueur.

Ainsi, même si au-delà de ξ la redistribution de la contrainte décroît comme $1/r^4$, la criticalité du système observée n'est pas celle du modèle 4-Picard. Des mesures annexes suggèrent que cette perte de criticalité est due à la forme de la relaxation globale dans le cas du modèle de Picard écranté, qui est concentrée sur le site actif.



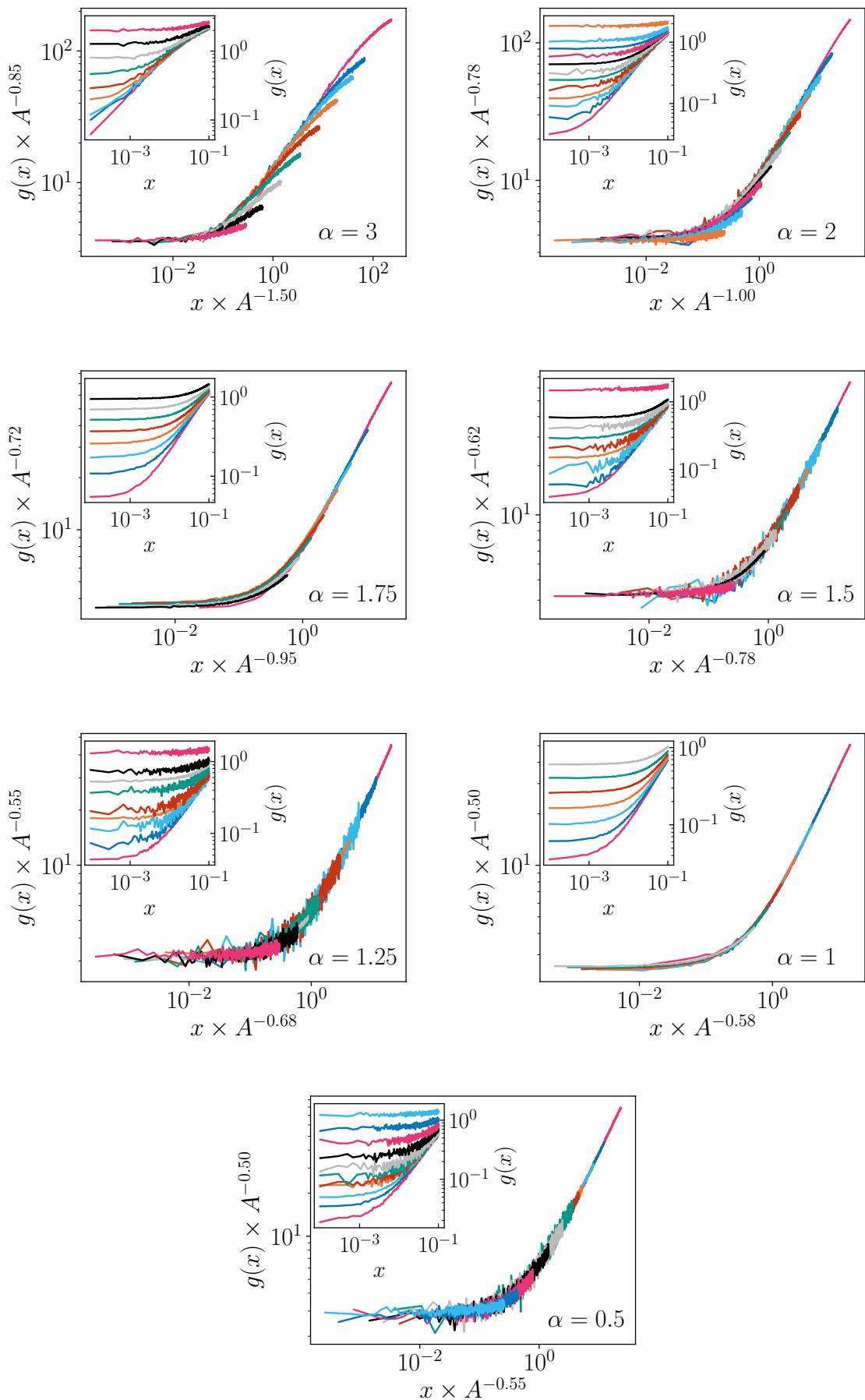


FIGURE 6.2

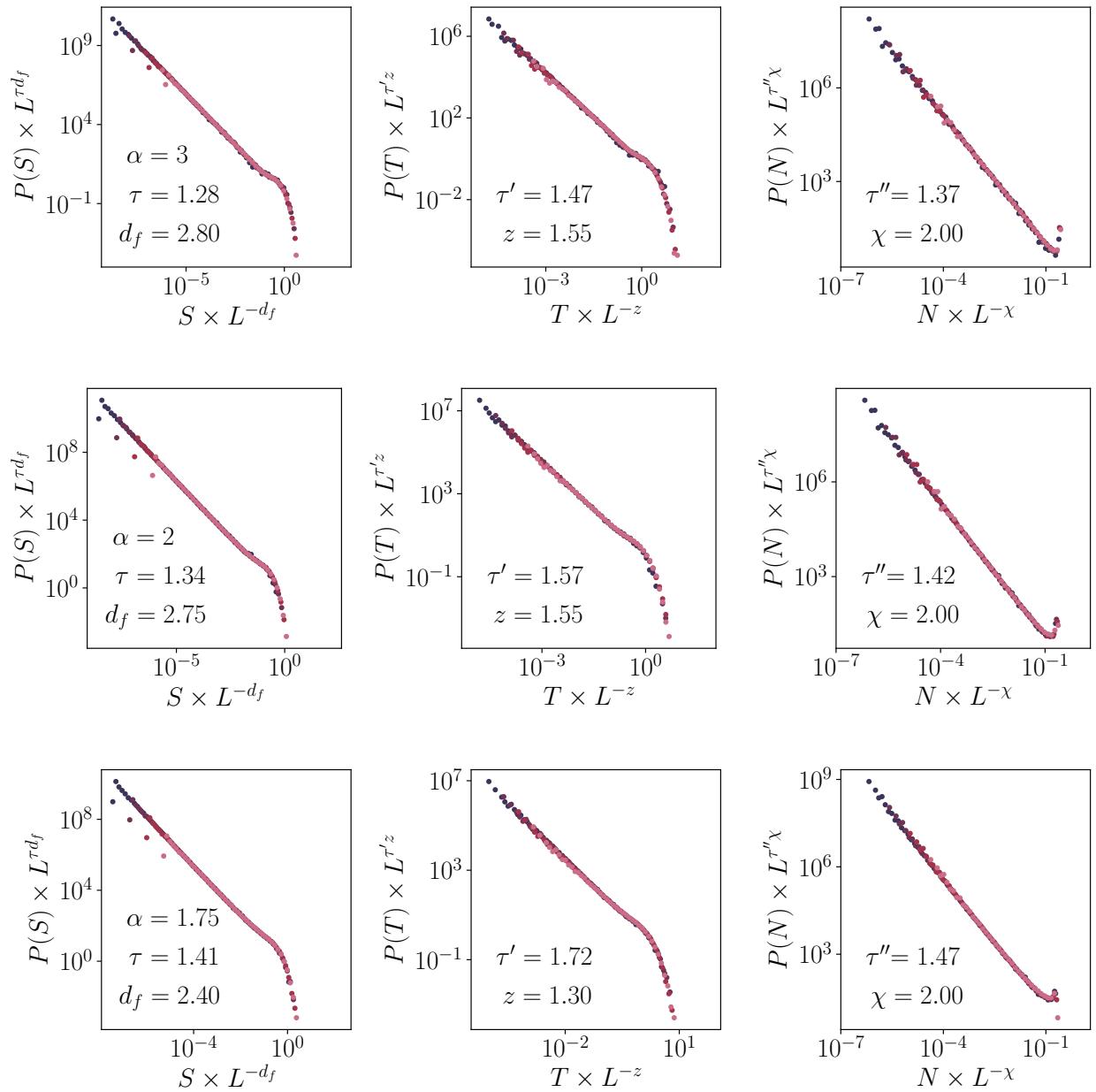


FIGURE 6.3

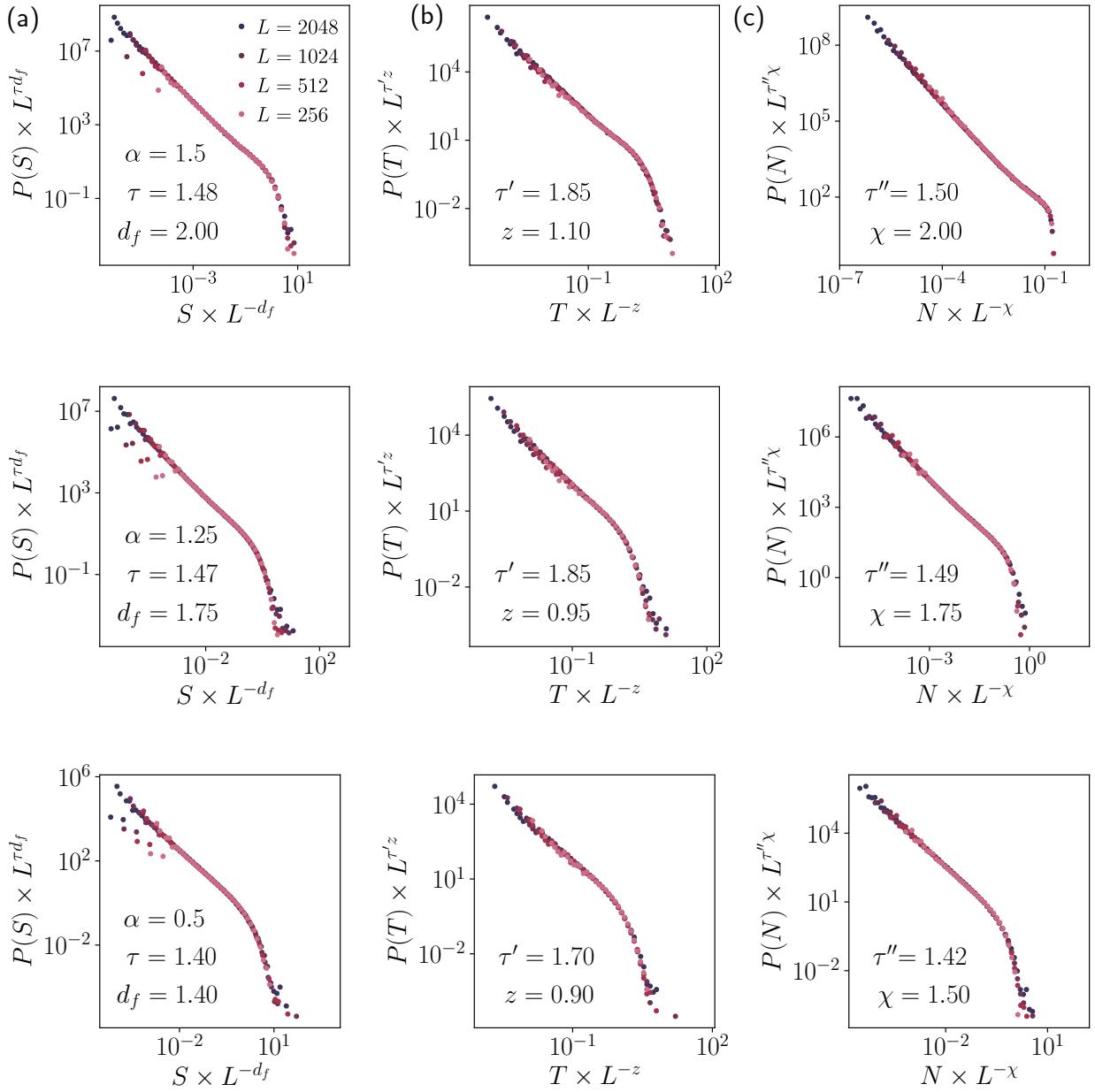


FIGURE 6.4

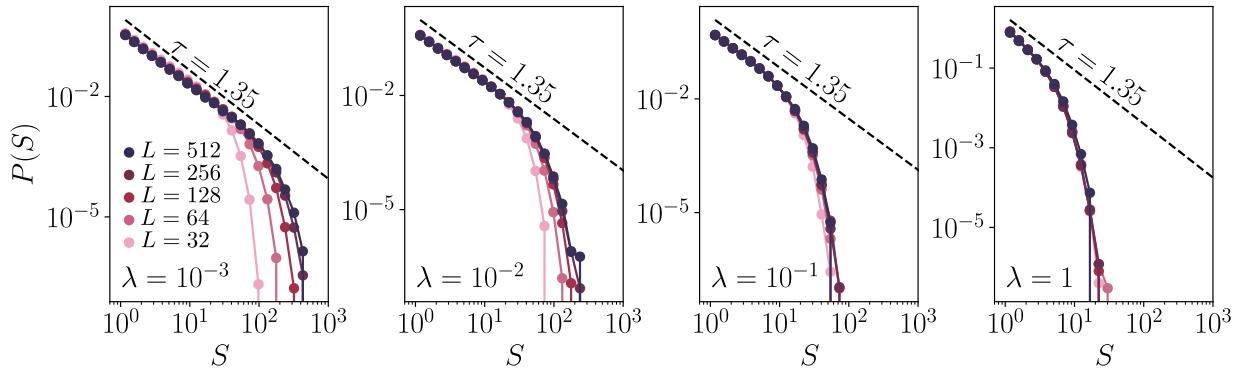


FIGURE 6.7 – Distributions de tailles d’avalanche quasistatiques dans le modèle de Picard écranté pour différentes valeurs de l’écrantage λ

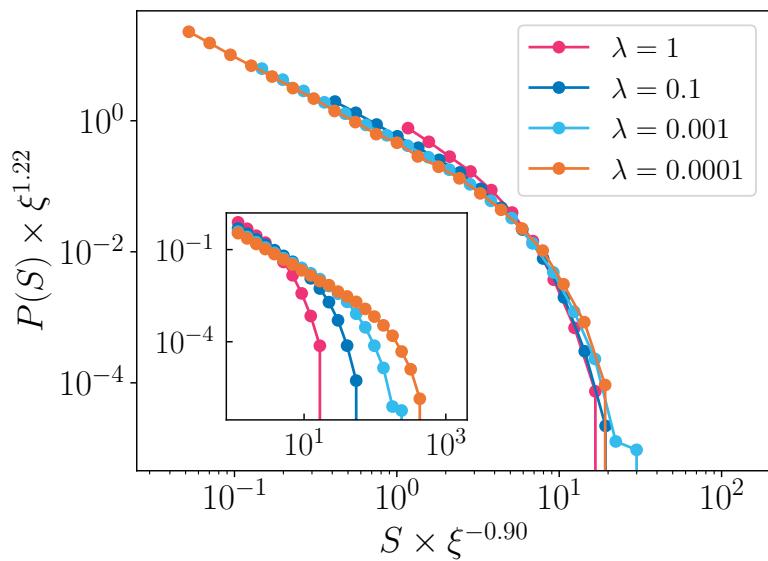


FIGURE 6.8 – Redimensionnement des distributions de tailles d’avalanche via la longueur d’écrantage ξ dans le modèle de Picard écranté. En inset, les données avant redimensionnement. La taille du système est $L = 512$.