

Chapitre 4

Transition vers l'écoulement des fluides à seuil

Dans le [chapitre 1](#), nous avons vu que la transition vers l'écoulement peut être comprise comme une transition de phase absorbante. Le paramètre de contrôle est alors la contrainte imposée au système Σ et le paramètre d'ordre le taux de déformation $\dot{\gamma}$. Ce dernier est nul dans la phase absorbante pour $\Sigma < \Sigma_c$ et non-nul dans la phase active pour $\Sigma > \Sigma_c$. Proche de la transition, l'évolution de $\dot{\gamma}$, de sa variance $\langle \Delta \dot{\gamma}^2 \rangle$ et de la longueur de corrélation ξ sont dictées par les exposants critiques β , γ' et ν_\perp selon :

$$\dot{\gamma} \sim \delta \Sigma^\beta, \quad \langle \Delta \dot{\gamma}^2 \rangle \sim \delta \Sigma^{-\gamma'}, \quad \xi \sim \delta \Sigma^{-\nu_\perp}, \quad \delta \Sigma = \frac{\Sigma - \Sigma_c}{\Sigma_c} \quad (4.1)$$

avec la spécificité $\beta > 1$ qui rend cette transition très différente de celle qui lui est souvent associée, la transition de dépiégeage, pour laquelle on trouve $\beta \leq 1$. La transition de dépiégeage étant elle-même associée à la criticalité [LR-CDP](#), cette observation place la transition vers l'écoulement hors de ce cadre théorique.

La spécificité de la transition vers l'écoulement et sa différence avec le cadre LR-CDP sont attribuées à la présence d'un bruit mécanique dans le système. Celui-ci, issu des interactions de signe alterné de Eshelby que nous avons évoquées au [chapitre 1](#), change [l'apprehension](#) du système en apportant un nouveau mécanisme de création de l'activité par diffusion et non par transport (voir [chapitre 1](#)). Dans ce cadre, les modèles théoriques de Hébraud-Lequeux et ses généralisations que nous avons réutilisés pour l'interprétation de la transition de réversibilité au [chapitre 3](#) permettent d'expliquer la convexité de la transition vers l'écoulement. Toutefois, toutes les études réalisées dans le cadre de la transition vers l'écoulement se concentrent spécifiquement, et à raison, sur le cas d'une redistribution élastique de la contrainte, soit décroissant comme $\sim 1/r^\alpha$ avec $\alpha = 2$ en 2D. Afin de proposer une comparaison riche entre cette transition et la transition de réversibilité, il s'avère donc intéressant d'étudier de la même manière l'évolution de sa criticalité en fonction de la portée des interactions α . Le but de ce chapitre est alors de réaliser une étude numérique similaire à celle du chapitre précédent afin de résituer la transition vers l'écoulement dans une image plus globale que celle proposée par les modèles champ moyen de type Hébraud-Lequeux. Cela nous permettra alors, au chapitre suivant, de disposer de plus d'éléments pour discuter des similarités et des différences entre la transition de réversibilité et la transition vers l'écoulement.

Pour ce faire, nous présenterons d'abord la méthode numérique élastoplastique utilisée pour simuler la transition vers l'écoulement. Ensuite nous mettrons en application cette méthode pour déterminer les exposants critiques associés dans le cas des interactions élastiques d'Eshelby pour lesquelles on a $\alpha = 2$. Puis en modifiant la portée des interactions dans le modèle de base, nous caractériserons l'évolution de cette criticalité avec α . Enfin, nous complèterons cette première caractérisation via l'évolution des autres propriétés critiques du système comme l'hyperuniformité et la dynamique d'avalanches.

4.1 Étudier la transition vers l'écoulement des fluides à seuil

La transition vers l'écoulement, même si non-systématiquement abordée en tant que transition de phase absorbante, reste un objet d'étude central en matière molle. Notamment, beaucoup se sont intéressé-es à la forme de la courbe d'écoulement associée $\dot{\gamma} = f(\Sigma)$ et de sa potentielle universalité. Un modèle phénoménologique communément utilisé pour la décrire est celui d'Herschel-Bulkley [105] :

$$\dot{\gamma} = k(\Sigma - \Sigma_c)^{1/n}, \quad k, n > 0 \quad (4.2)$$

Cette forme est alors tout à fait équivalente à la description en termes de phénomène critique, avec l'exposant β relié à l'exposant d'Herschel-Bulkley par $\beta = 1/n$. Par la mesure de n sur différents systèmes, les chercheur-euses ont alors questionné l'universalité de cette courbe. Cela revient donc à explorer un aspect de la criticalité de cette transition. Ces études peuvent alors nous guider sur la méthode la plus adaptée pour explorer plus largement et précisément cette criticalité.

4.1.1 Expérimentalement

Expérimentalement, l'exposant de Herschel-Bulkley a été mesuré dans de nombreux systèmes. Que ce soit dans les monocouches de mousse [106], les émulsions [107, 108], les suspensions colloïdales [109] ou les verres de colloïdes [110], des exposants allant de $n \approx 0.4$ à $n \approx 0.7$ ont pu être mesurés. Même si les mesures se montrent souvent dépendantes de certaines propriétés du système, la grande majorité soulignent un caractère convexe de la courbe d'écoulement avec $n < 1$ et donc $\beta > 1$. Dans certains cas cependant, la propriété de fluide à seuil ou la monotonie de la courbe d'écoulement peuvent être perdues par une faible modification des propriétés microscopiques du système [107]. De plus, les mesures de la contrainte et du taux de déformation peuvent être grandement affectées par des effets parasites comme les glissements à l'interface [9].

Ainsi, si les expériences d'écoulement des fluides à seuil en laboratoire révèlent une certaine universalité via la relation d'Herschel-Bulkley, leur exécution peut être soumise à de nombreuses contraintes réelles et à l'interférence de mécanismes supplémentaires. Le but de notre étude étant de se focaliser sur le concept global du phénomène d'écoulement, il peut être avantageux de travailler dans des situations idéalisées pour une analyse précise et simplifiée.

4.1.2 Numériquement

L'outil numérique apparaît alors comme une évidence pour étendre cette étude. Via les méthodes de dynamique moléculaire, il est possible de simuler des écoulements amorphes à différents degrés de modélisation. Des comportements similaires aux expériences ont alors pu être observés, même à de très petites échelles, souvent moins accessibles en laboratoire. Un problème soulevé par ces études est que, dans de tels systèmes, l'agitation thermique peut jouer un rôle essentiel sur la transition, modifiant de fait la courbe d'écoulement [111] et donc toute la criticalité. Afin d'étudier le phénomène dans sa forme la plus simple possible, nous choisissons de nous limiter dans ce travail au cas athermique. Cela signifie que l'agitation thermique est considérée négligeable, sans impact sur le comportement critique.

Cette simplification n'exclut cependant pas la modélisation de tous les systèmes à petites échelles car ces derniers peuvent s'avérer effectivement athermiques sous certaines conditions. Par exemple, un exposant $n \approx 0.5$ est retrouvé pour le régime athermique du silicium amorphe dans [112]. Les méthodes moléculaires permettent donc de retrouver les résultats expérimentaux dans des conditions plus contrôlées.

Par contre, un problème de ces méthodes est leur fort coût numérique qui rend impossible l'étude de très grands systèmes. Or les phénomènes critiques étant décrits aux grandes échelles, cela représente un obstacle de taille pour la caractérisation de la transition vers l'écoulement des fluides à seuil athermiques. Un autre point plus fondamental qui rend ces modèles inadéquats pour notre caractérisation est que ceux-ci font intervenir un grand nombre de degrés de liberté (forme du potentiel d'interaction, ...) qui dépendent du système spécifique considéré. Dans le but de mettre en évidence une universalité dans le phénomène d'écoulement, il est plus adapté de se concentrer sur des modélisations minimales.

4.1.3 Théoriquement

Une manière de répondre à cette difficulté est de s'appuyer sur une approche théorique générale, reposant sur la phénoménologie essentielle du phénomène.

4.1.3.1 Groupe de renormalisation et difficultés

Dans le cas des phénomènes critiques, ces approches théoriques se basent en général sur les théories de champs et les outils du groupe de renormalisation. Notamment, dans le cas de la transition de dépiégeage, les méthodes du groupe de renormalisation fonctionnel permettent de prédire l'équivalent de la courbe d'écoulement du système ($v(f_{\text{ext}})$, voir chapitre 1) proche de la transition. Toutefois, même si des études ont tenté de décrire la transition vers l'écoulement dans le même formalisme que celui du dépiégeage [54], une différence fondamentale bloque l'application de ces méthodes dans notre cas. En effet, là où le propagateur de redistribution dans le cas du dépiégeage est positif en tout point, dans le cas de la transition vers l'écoulement, celui-ci change de signe. En effet, comme nous l'avons vu au chapitre 1, l'interaction de redistribution d'Eshelby, lors d'un réarrangement plastique, stabilise aussi bien qu'elle ne déstabilise le reste du matériau. Au contraire, dans

le cas de la transition de dépiégeage, le dépiégage d'une zone entraîne nécessairement la déstabilisation des autres zones.

Cette différence physique a souvent été mise en avant pour expliquer les différences existantes entre transition de dépiégeage et transition vers l'écoulement. En effet, c'est elle qui est à l'origine de la compréhension des interactions de redistribution dans la transition vers l'écoulement comme un bruit mécanique. Pour conserver une approche théorique, il faut donc se baser sur de nouvelles méthodes de description. Une voie s'ouvre alors sur des approches de type champ moyen, dont l'une des plus célèbres est le modèle de Hébraud-Lequeux.

4.1.3.2 Modèle de Hébraud-Lequeux et généralisation

Remarque : Parler de la généralisation à longue portée ici ?

Le modèle de Hébraud-Lequeux [113] est un modèle qui permet de prédire certaines propriétés de la transition vers l'écoulement, notamment la forme de la courbe $\dot{\gamma} = f(\Sigma)$. Ce modèle se base en fait sur la phénoménologie présentée au chapitre 1. Considérant le matériau comme un ensemble de régions distinctes portant chacune une contrainte σ et soumises à un taux de cisaillement $\dot{\gamma}$, la distribution de probabilité $P(\sigma)$ se voit régie par l'évolution :

$$\begin{aligned}\partial_t P(\sigma, t) &= -\dot{\gamma} \partial_\sigma P(\sigma, t) + a \Gamma(t) \partial_\sigma^2 P(\sigma, t) - \frac{\Theta(|\sigma| > \sigma_Y)}{\tau} P(\sigma, t) + \Gamma(t) \delta(\sigma) \\ \Gamma(t) &= \frac{1}{\tau} \int_{|\sigma| > \sigma_Y} d\sigma P(\sigma, t)\end{aligned}\quad (4.3)$$

avec τ un temps caractéristique de relaxation et a un paramètre du modèle aussi appelé fluidité. Le premier terme du membre de droite de l'équation 4.3 représente alors le chargement élastique du matériau. Le troisième et le dernier terme représentent le phénomène de relaxation locale lorsque la région dépasse sa contrainte seuil σ_Y et opère un réarrangement plastique. Toute la physique capturée dans le modèle réside alors dans le second terme de diffusion. Celui-ci modélise l'influence des régions en réarrangement sur les autres régions via les interactions élastiques d'Eshelby. Cette interprétation vient du fait que ces interactions sont de signe alterné et donc, dans une certaine mesure, représentent une sorte de bruit mécanique dans le matériau. L'intensité de ce bruit dépend alors proportionnellement de la proportion de régions en réarrangement dans le système $\Gamma(t)$.

En résolvant ce système d'équations simples dans la limite stationnaire pour $a < \frac{\sigma_Y^2}{2}$, il est possible de déduire une relation entre la contrainte moyenne $\langle \sigma \rangle = \int d\sigma P(\sigma)$ et le taux de cisaillement lorsque $\dot{\gamma} \rightarrow 0$ [114, 115] :

$$\dot{\gamma} \sim (\langle \sigma \rangle - \Sigma_c)^\beta, \quad \beta = 2 \quad (4.4)$$

On retrouve alors une forme de type Herschel-Bulkley avec $n = 0.5$, prédition proche des résultats expérimentaux et numériques. Ce modèle simple permet donc de rendre compte

de la convexité de la transition vers l'écoulement. Il se démarque alors des approches classiques de théorie des champs comme celle associée à la classe CDP ou à la transition de dépiégeage en proposant une description statistique à l'échelle mésoscopique.

Toutefois, ce modèle reste très simplificateur et ne permet pas de rendre compte de toutes les propriétés critiques associées à la transition. Des approches de généralisation de ce modèle ont été étudiées [116, 117], notamment en complexifiant la forme du bruit mécanique afin de rendre compte de la spatialisation des interactions d'Eshleby [67, 102], comme nous l'avons évoqué au chapitre précédent. Ces études sont intéressantes d'un point de vue champ moyen notamment car elles permettent une interprétation de l'évolution des propriétés de la transition avec la portée des interactions. Cependant, elles ne permettent pas d'accéder à certaines quantités comme les fluctuations critiques et les corrélations spatiales proche de la contrainte seuil. Afin d'étudier pleinement cette transition en dimension finie et toute la richesse qui y est associée, il est donc nécessaire d'effectivement spatialiser ce type de description.

4.2 Les modèles élastoplastiques comme outils privilégiés

L'approche idéale pour l'étude de la transition vers l'écoulement des fluides à seuil athermiques semble alors se situer entre une description microscopique réaliste et spatialisée, mais coûteuse, et une description phénoménologique macroscopique, mais trop simplificatrice. Les modèles élastoplastiques répondent alors parfaitement à ce besoin. Nous présentons la méthode utilisée dans ce travail pour caractériser la transition.

4.2.1 Principe d'un modèle élastoplastique

Comme expliqué dans le [chapitre 1](#), l'écoulement des fluides à seuil consiste en une succession d'évènements plastiques locaux, lesquels s'entre-déclenchent les uns les autres. Afin de modéliser ce comportement spécifique tout en conservant une efficacité de calcul satisfaisante et une modélisation très générique du phénomène, les modèles élastoplastiques se basent sur une description mésoscopique du matériau étudié [10]. Conceptuellement, le matériau est découpé en une collection de sites représentant chacun un groupe de particules susceptible d'effectuer un réarrangement plastique (voir [figure 4.1](#)). En pratique ces sites peuvent donc représenter quelques constituants élémentaires, comme dans le cas des mousses [57], ou quelques centaines d'entre eux, comme dans le cas des verres métalliques [118].

Dans la description élastoplastique, on associe à chacun de ces sites indexé par un indice i une contrainte tensorielle locale $\bar{\sigma}_i$. Afin de simplifier au maximum la modélisation du phénomène d'écoulement, nous considérons dans la suite de ce travail le cas simple d'un matériau bidimensionnel situé dans le plan $(\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y)$ et cisaillé dans la direction \mathbf{e}_x . Dans ce cas, il est d'usage de se concentrer sur une unique composante σ_{xy} du tenseur afin de rendre la description scalaire et de considérer les réarrangements plastiques comme ayant tous la même symétrie que le forçage [52, 64–66]. Ainsi, chaque site i porte une contrainte

$\sigma_i \equiv \sigma_{xy,i}$ constituante de la contrainte globale imposée au système $\Sigma = \frac{1}{N} \sum_i \sigma_i$, avec N le nombre de sites. En notant μ le module de cisaillement associé au matériau étudié, on peut associer de la même manière une déformation élastique $\epsilon_{\text{el},i}$ à chaque site selon $\epsilon_{\text{el},i} = \sigma_i / \mu$.

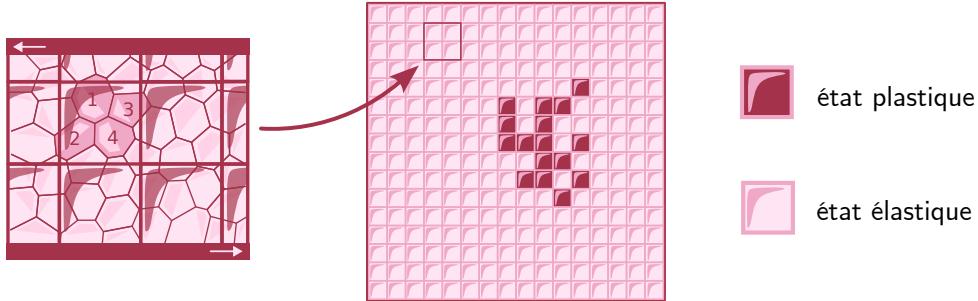


FIGURE 4.1 – Représentation schématique du principe des modèles élastoplastiques. Chaque groupe de particules dans la vision microscopique est représenté par un site pouvant prendre deux états : élastique ou plastique.

Chaque site possède un seuil de contrainte microscopique local $\sigma_{Y,i}$ qu'il est capable de soutenir élastiquement. Mais dès lors que la contrainte locale excède ce seuil local ($\sigma_i > \sigma_{Y,i}$), le site devient à même d'opérer un réarrangement plastique. Ce processus intervient alors selon un temps caractéristique τ_{pl} . Quand le réarrangement se produit, le site passe alors dans un état plastique ($n_i = 1$) et accumule une déformation plastique $\epsilon_{\text{pl},i}$ sur un temps caractéristique τ . Cette déformation plastique permet alors une relaxation de la contrainte locale proportionnellement. La relaxation a lieu sur temps caractéristique τ_{el} après lequel le site retrouve son état élastique ($n_i = 0$).

Durant la relaxation, la contrainte accumulée par le site est redistribuée aux autres sites constituant le matériau via les interactions élastiques d'Eshelby, dont la forme est rappelée figure 4.3-(a). Dans l'hypothèse que nous choisissons où les réarrangements plastiques présentent tous la même symétrie que le forçage, les propagateurs de Eshelby ont une orientation fixe, dans le sens du réseau. Cette redistribution va alors potentiellement permettre à d'autres sites de dépasser à leur tour leur seuil local et ainsi opérer un réarrangement. C'est cette interaction de redistribution et ces réarrangements en chaîne qui sont à l'origine du comportement collectif d'écoulement plastique du matériau.

Les règles précises qui définissent la co-évolution des variables ($\sigma_i, \epsilon_{\text{pl},i}, n_i$) sur chaque site dépendent alors du modèle spécifique considéré.

4.2.2 Le modèle de Picard

Le modèle élastoplastique retenu pour mener notre étude est le modèle de Picard [66]. Ce modèle pionnier du domaine est reconnu pour sa simplicité. C'est alors un outil de choix pour étudier ce système du point de vue des transitions de phase absorbantes.

Dans le modèle de Picard, tous les sites composant le matériau, indicés i et situés en \mathbf{r}_i , possèdent un seuil local identique et constant dans le temps $\sigma_{Y,i} = \sigma_Y$. Dès lors que son seuil est dépassé, un site devient plastique avec un taux de transition constant $1/\tau_{pl}$. Une fois plastique, ce site retrouve sa forme élastique avec un taux $1/\tau_{el}$. L'évolution de la contrainte locale d'un site isolé prend alors la forme illustrée sur la figure 4.2.

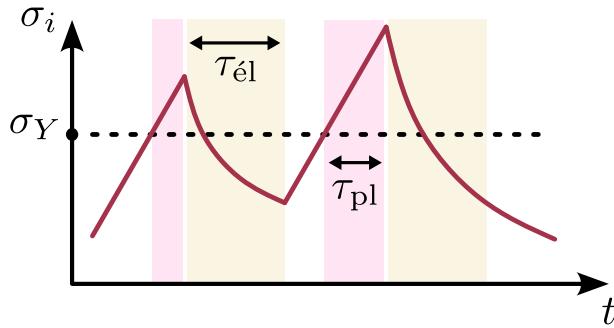


FIGURE 4.2 – Représentation schématique de l'évolution de la contrainte locale dans le modèle de Picard pour un site isolé.

Pour simplifier davantage cette approche, nous choisissons d'uniformiser les échelles de temps de telle manière que $\tau_{pl} = \tau_{el} = \tau$. On peut alors résumer ce modèle par le système d'équations suivant :

$$\partial_t \sigma_i = 2\mu \sum_j G_{ij} \partial_t \epsilon_{pl,j}, \quad \partial_t \epsilon_{pl,i} = \frac{1}{2\mu\tau} n_i \sigma_i, \quad \begin{cases} n_i : 0 \xrightarrow{\tau} 1 & |\sigma_i| > \sigma_Y \\ n_i : 0 \xleftarrow{\tau} 1 & \forall \sigma_i \end{cases} \quad (4.5)$$

avec $G_{ij} = G(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j)$ le noyau de redistribution en champ lointain d'Eshelby défini au ?? et décrit en coordonnées polaires par $G(r, \theta) = \frac{\cos 4\theta}{\pi r^2}$. Cette description peut aisément se généraliser en trois dimensions mais notre étude s'est concentrée uniquement sur le cas bidimensionnel. Afin de simplifier l'implémentation numérique, ce système d'équations est adimensionné par les transformations :

$$\tilde{\sigma}_i = \frac{\sigma_i}{\sigma_Y}, \quad \tilde{t} = \frac{t}{\tau}, \quad \tilde{\epsilon}_{pl,i} = \frac{\mu\tau}{\sigma_Y} \epsilon_{pl,i} \quad (4.6)$$

pour obtenir :

$$\partial_t \tilde{\sigma}_i = \sum_j G_{ij} \partial_t \tilde{\epsilon}_{pl,j}, \quad \partial_t \tilde{\epsilon}_{pl,i} = n_i \tilde{\sigma}_i, \quad \begin{cases} n_i : 0 \xrightarrow{\tau} 1 & |\tilde{\sigma}_i| > 1 \\ n_i : 0 \xleftarrow{\tau} 1 & \forall \tilde{\sigma}_i \end{cases} \quad (4.7)$$

et nous omettrons le \sim pour alléger les notations dans la suite.

Il semble par ailleurs important de mentionner que la simplicité de ce modèle n'enlève rien à son pouvoir descriptif. En effet, pour les quantités et les phénomènes sur lesquels nous allons nous concentrer ici (exposants critiques, avalanches, ...) le modèle de Picard reproduit à l'identique les résultats des modèles plus raffinés [65], notamment ceux conservant une description tensorielle complète [10, 119].

4.2.3 Implémentation numérique

Afin de simuler l'écoulement cisaillé représenté par ce modèle, nous reprenons un code mis au point précédemment dans l'équipe PSM du LIPhy que nous modifions selon notre besoin. N sites sont positionnés sur une grille carrée périodique de taille $L \times L = N$ et d'axes principaux ($\hat{\mathbf{e}}_x, \hat{\mathbf{e}}_y$). La position de chaque site est alors donnée par $\mathbf{r}_i = na\hat{\mathbf{e}}_x + ma\hat{\mathbf{e}}_y$ avec $(n, m) \in \mathbb{N}^2$ et a le pas du réseau que l'on prend égal à 1. En pratique, nous considérons la règle d'évolution directement sous sa forme intégrée :

$$\sigma_i(t) = \sigma_{\text{int},i}(t) + \sigma_{\text{ext}} = \sum_j G_{ij}\epsilon_{\text{pl},j}(t) + \Sigma \quad (4.8)$$

et l'évolution de $\epsilon_{\text{pl},j}$ donnée par l'équation 4.7 est discrétisée dans le temps, calculée sur chaque site tous les $\Delta t = 10^{-2} \tau$ selon une méthode d'Euler. À chaque pas de temps, les sites élastiques ($n_i = 0$) au-dessus du seuil microscopique ($\sigma_i > 1$) ont une probabilité $\Delta t/\tau$ de devenir plastiques tandis que les sites plastiques ont la même probabilité de redevenir élastiques.

Le point clé de l'algorithme est alors le calcul de la convolution $\sum_j G_{ij}\epsilon_{\text{pl},j}$ puisqu'elle admet naïvement une complexité d'ordre N^2 . Afin d'optimiser nos calculs, nous tirons parti du fait que les sites soient disposés sur une grille régulière. Cela nous permet de déterminer ce terme selon une méthode pseudo-spectrale : la convolution est calculée dans l'espace de Fourier discret où elle devient le simple produit $\hat{G}(\mathbf{q})\hat{\epsilon}_{\text{pl}}(\mathbf{q})$ puis l'on revient à sa représentation dans l'espace réel par une transformée de Fourier inverse discrète. Pour ce faire, nous implémentons directement le propagateur de Eshelby dans sa forme spectrale discrète [13] :

$$\hat{G}(\mathbf{q}) = -4 \frac{q_x^2 q_y^2}{q^4}, \quad (q_x, q_y) = \frac{2\pi}{L} \times (n, m) \quad (4.9)$$

avec $\hat{G}(\mathbf{q} = 0) = 0$ afin de conserver la contrainte totale du système. L'optimisation des algorithmes de FFT permet alors de réduire la complexité à l'ordre $N \log(N)$ [100]. De plus, l'analyse de Fourier permet de prendre en compte les limites périodiques de manière naturelle. Le schéma de calcul devenant complètement parallélisable, il est implanté sur des cartes graphiques via le langage CUDA [87] afin d'optimiser nettement la rapidité d'exécution des simulations. Grâce à ces ajustements, nous sommes capables de simuler le comportement de systèmes dont la taille va de $L = 32$ à $L = 2048$ ¹.

En pratique, le système est d'abord cisaillé sous une forte contrainte globale Σ_{preshear} durant un temps T_{preshear} avant d'être soumis brutalement à la contrainte globale souhaitée Σ . Le système évolue alors jusqu'à un état stationnaire caractérisé par une valeur moyenne du taux de déformation $\dot{\gamma} = \frac{1}{N} \sum_i \partial_t \epsilon_{\text{pl},i}$ (voir figure 4.3-(b)), nulle pour $\Sigma < \Sigma_c$ et positive pour $\Sigma > \Sigma_c$. Nous sommes alors capables avec ce modèle de tracer la courbe d'écoulement $\langle \dot{\gamma} \rangle = f(\Sigma)$ représentée sur la figure 4.3-(c), qui montre clairement la convexité de

1. L'algorithme de FFT étant optimisé pour des tailles de la forme 2^n avec $n \in \mathbb{N}$, nous privilégions ces tailles pour les simulations.

la transition, par opposition à la concavité de celle du dépiégeage. En étudiant le comportement du système pour $\Sigma \sim \Sigma_c$ il est alors possible de caractériser cette criticalité spécifique.

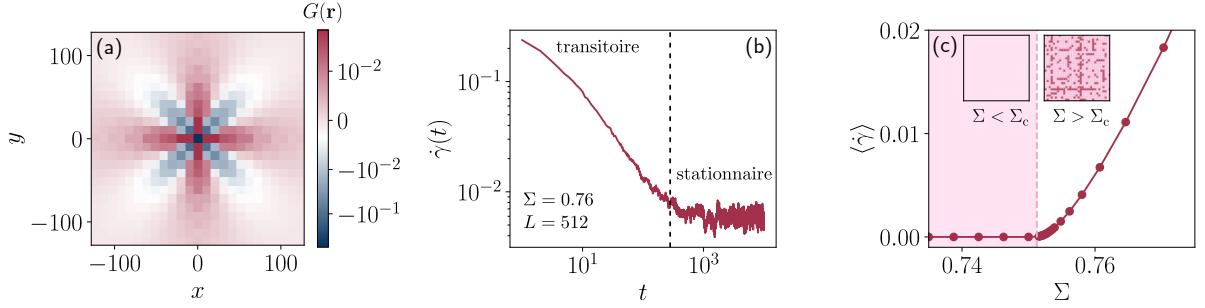


FIGURE 4.3 – Résultats de l’implémentation numérique du modèle de Picard. (a) Image du propagateur de redistribution d’Eshelby. (b) Exemple d’équilibration d’une simulation à contrainte imposée. (c) Courbe d’écoulement pour un système de taille $L = 256$.

4.2.4 Changement du paramètre de contrôle

De la même manière qu’il est possible de contrôler la contrainte globale à laquelle est soumis le système lors de la simulation, il est aussi possible de contrôler le taux de déformation $\dot{\gamma}$. Dans ce cas, les règles du modèle de Picard se voient légèrement modifiées [66]. Un terme de forçage constant $\mu\dot{\gamma}$ s’ajoute à l’évolution de la contrainte locale dans l’équation 4.5 et l’on a $\hat{G}^{\dot{\gamma}}(0) = -1$ de telle sorte que les événements plastiques permettent une relaxation globale du système (et plus seulement locale) :

$$\partial_t \sigma_i = \mu \dot{\gamma} + 2\mu \sum_j G_{ij}^{\dot{\gamma}} \partial_t \epsilon_{pl,j}, \quad \partial_t \epsilon_{pl,i} = \frac{1}{2\mu\tau} n_i \sigma_i, \quad \begin{cases} n_i : 0 \xrightarrow{\tau} 1 & |\sigma_i| > \sigma_Y \\ n_i : 0 \xleftarrow{\tau} 1 & \forall \sigma_i \end{cases} \quad (4.10)$$

Cette modification du propagateur n’est en fait pas simplement un artéfact numérique mais possède des origines physiques. Dans l’étude [13], Picard et al. ont montré que la forme précise du propagateur de Eshelby dépendait des conditions aux limites imposées (même lorsque celles-ci sont rejetées à l’infini), dépendant elles-mêmes du paramètre de contrôle associé. Dans le cas où les conditions aux limites conservent la contrainte dans le système, nous avons évidemment $\hat{G}(\mathbf{q} = 0) = 0$. Par contre, dans le cas où les conditions aux limites imposent un déplacement, la contrainte globale n’est pas conservée et on a plus spécifiquement $\hat{G}^{\dot{\gamma}}(0) = -1$. Par contre pour $\mathbf{q} \neq 0$, les deux propagateurs de redistribution de la contrainte de cisaillement gardent la même forme.

De cette manière, il est possible d’appliquer un taux de déformation $\dot{\gamma}$ constant au système et d’observer l’évolution de la contrainte globale. Dans l’état stationnaire, cette dernière fluctue alors autour d’une valeur moyenne $\langle \Sigma \rangle$. Lorsque $\dot{\gamma}$ tend vers 0, la contrainte moyenne tend vers la contrainte seuil Σ_c . Ce changement de paramètre de contrôle permet lui aussi d’observer le comportement du système et de tracer une courbe d’écoulement $\langle \Sigma \rangle = f(\dot{\gamma})$. On remarque par ailleurs que ces deux approches sont équivalentes sous cet aspect [64].

Si la condition de contrainte imposée semble évidente dans le cas de l'étude de la transition de phase absorbante, contrôler le taux de déformation peut se révéler intéressant autant d'un point de vue numérique que du point de vue de la modélisation d'expériences réelles, comme nous le verrons par la suite.

4.3 Comportement critique

Remarque : Citer plus ? Pourquoi ?

Grâce au modèle de Picard, nous sommes donc en mesure de déterminer le comportement local et global du système proche du point critique ($\Sigma = \Sigma_c, \dot{\gamma} = 0$). Des études basées sur une méthode élastoplastique similaire ont déjà permis d'analyser certaines propriétés critiques de la transition vers l'écoulement, comme les exposants critiques β [52, 64, 65, 120] et ν_\perp [52, 121] ou encore ceux reliés aux propriétés d'avalanches du système [52, 64, 65, 119], de manière similaire au cas de la transition de dépiégeage. Dans ce travail nous proposons une approche un peu différente en considérant une caractérisation dans la lignée directe de celles utilisées dans le cadre des transitions de phase absorbantes comme c'est le cas des modèles minimaux appartenant à la classe DP ou CDP.

4.3.1 Transition vers l'écoulement en milieu élastique

4.3.1.1 Détermination du point critique

Méthodes

Le première étape dans l'étude d'une transition de phase est la détermination de son point critique. Ici, cela revient à mesurer la contrainte seuil globale du système Σ_c . Pour ce faire plusieurs approches sont possibles.

La première approche consiste à reproduire la méthode appliquée dans les sections précédentes sur les modèles de particules. Cela revient ici à mesurer pour différentes contraintes imposées au système Σ la valeur du taux de déformation moyen $\langle \dot{\gamma} \rangle$ dans l'état stationnaire. La contrainte seuil correspond alors à la contrainte pour laquelle la fonction $\langle \dot{\gamma} \rangle = f(\Sigma - \Sigma_c)$ est représentée par une droite sur une échelle logarithmique. Cette méthode, comme pour les modèles de particules, nécessite d'augmenter la taille du système L à mesure que l'on s'approche du point critique et que l'activité dans le système (ici représentée par $\langle \dot{\gamma} \rangle$) s'approche de 0.

La seconde méthode, plus communément utilisée dans la littérature, est de ne pas contrôler la contrainte imposée au système mais le taux de cisaillement (voir [sous-section 4.2.4](#)). De la même manière, la contrainte seuil est alors définie comme celle pour laquelle la fonction $\langle \Sigma \rangle - \Sigma_c = f(\dot{\gamma})$ est représentée par une droite sur une échelle logarithmique. L'avantage de ce choix est que lorsque le système est forcé, il ne peut jamais tomber dans l'état absorbant (puisque de fait $\dot{\gamma} > 0$). Cela permet alors de s'affranchir du tâtonnement nécessaire à la première méthode. Toutefois cette méthode présente des inconvénients. En

effet, si l'on peut imposer $\dot{\gamma}$ arbitrairement petit à n'importe quelle taille de système L , dès lors que la longueur de corrélation ξ devient comparable à L , le système est soumis à des effets de taille finie. Ces effets parasitent alors la méthode de détermination graphique et incitent donc néanmoins à utiliser de plus grands systèmes à mesure que l'on s'approche du point critique.

Enfin, une troisième méthode astucieuse permet d'utiliser ces effets de taille finie afin de déterminer précisément Σ_c . Présentée dans [52], celle-ci consiste à soumettre le système à un cisaillement quasistatique selon un protocole qui sera développé à la [sous-sous-section 4.4.2.2](#). Pour chaque taille L de système il est alors possible de mesurer la contrainte moyenne dans l'état quasistatique $\langle \Sigma_c(L) \rangle$. En supposant la correction de taille finie algébrique : $\langle \Sigma_c(L) \rangle = \Sigma_c + k_1 L^{-1/\nu_\perp}$, il est alors possible de déterminer graphiquement Σ_c . Le même raisonnement peut être effectué sur les fluctuations de cette contrainte en taille finie.

Les deux premières méthodes présentent l'avantage de déterminer conjointement Σ_c et β , qui est un exposant d'intérêt principal pour nous. La troisième présente elle l'avantage de s'affranchir des effets parasites de taille finie. Toutefois, les deux dernières méthodes nécessitent la possibilité de changer de paramètre de contrôle (pour contrôler $\dot{\gamma}$ et non Σ). Elles sont donc facilement réalisables dans le cas des interactions élastiques avec $\alpha = 2$ mais, comme nous le verrons par la suite, cela devient moins évident dans le cadre d'une généralisation à des portées arbitraires.

Détermination à taux de cisaillement imposé

Pour l'analyse du cas élastique $\alpha = 2$, nous utilisons la deuxième méthode présentée. Pour des tailles de système $L \in [256, 512, 1024]$, nous réalisons des simulations à taux de cisaillement imposé. La mesure de $\langle \Sigma(\dot{\gamma}, L) \rangle$ se fait une fois l'état stationnaire atteint. Les données associées aux trois systèmes sont alors assemblées et l'on trace la fonction $\dot{\gamma} = f(\langle \Sigma \rangle - \Sigma_c)$ en échelle logarithmique pour différentes valeurs de Σ_c . Comme illustré sur la [figure 4.4](#), $\Sigma_c = 0.75125$ est une estimation convaincante de la contrainte seuil alors que $\Sigma_c^+ = 0.75130$ et $\Sigma_c^- = 0.75120$ le sont moins. Moyennant les potentiels effets de taille finie entâchant la mesure, nous retiendrons $\Sigma_c = 0.75125 \pm 0.00010$ comme détermination finale.

Via cette détermination, la pente de la courbe donne directement $\beta = 1.50 \pm 0.05$. Cette valeur est en parfait accord avec les résultats pré-existants sur les modèles élastoplastiques [52, 65], confortant de ce fait la justesse de notre méthode de détermination. L'exposant β mesuré est alors supérieur à 1, en accord avec les études précédentes, ce qui confirme bien que cette transition ne peut pas être décrite dans le cadre LR-CDP comme la transition de dépiégeage. De plus, cette valeur est différente de celle prédicta par le modèle champ moyen généralement associé de Hébraud et Lequeux avec $\beta = 2$ [101] et de sa généralisation dans le cas $\mu = D/\alpha = 1$ pour lequel on a $\beta = 1$ [67]. Afin de caractériser plus précisément la transition, nous déterminons dans la suite de cette section les autres exposants critiques associés.

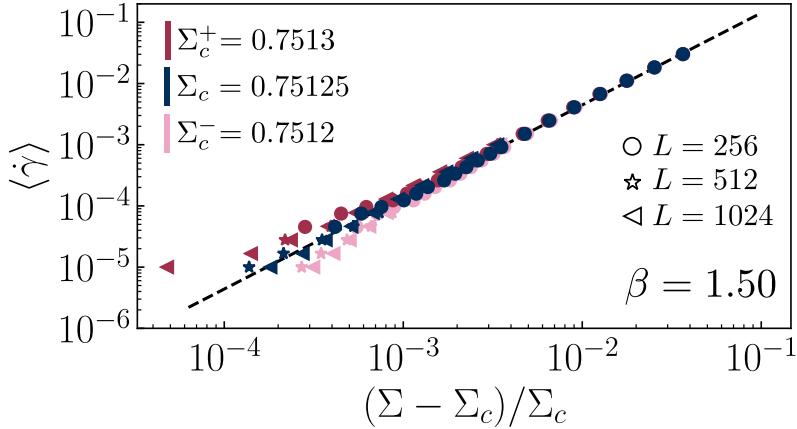


FIGURE 4.4 – Détermination de la contrainte critique pour le modèle de Picard à taux de cisaillement imposé. La courbe en tirets noirs correspond à la loi de puissance $\langle \dot{\gamma} \rangle \sim \delta \Sigma^\beta$.

4.3.1.2 Analyse d'échelle de taille finie

Difficultés dans la détermination des exposants critiques

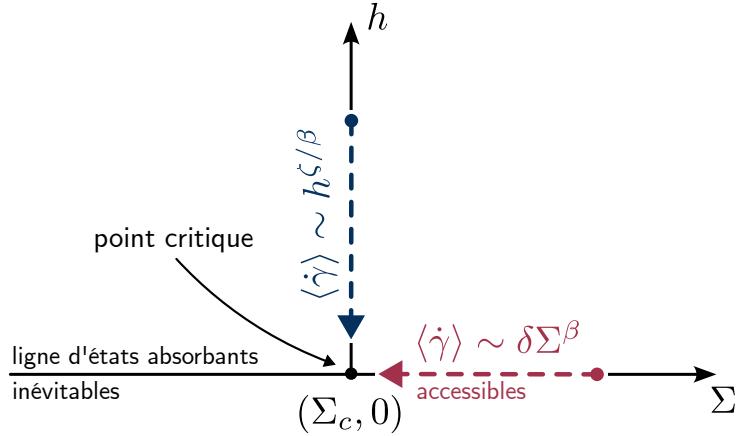
La détermination du point critique et de l'exposant β est relativement coûteuse numériquement mais reste accessible. Pour les autres exposants γ' et ν_\perp , celle-ci peut s'avérer plus fastidieuse. En effet, dans le cas de γ' , la quantification précise de l'amplitude des fluctuations nécessite de plus longues simulations du fait qu'elles représentent un moment d'ordre supérieur de la distribution $P(\dot{\gamma})$. De plus le régime dans lequel $\langle \Delta \dot{\gamma}^2 \rangle$ suit effectivement une loi de puissance est souvent plus réduit et demande donc une meilleure approche du point critique. Celle-ci ne peut se faire qu'en augmentant la taille du système et donc en allongeant de ce fait le temps de simulation. De plus, dans le cas de ν_\perp , une mesure directe de la longueur de corrélation est fastidieuse du fait de l'anisotropie du modèle et de la longue portée des interactions [122].

Méthode

Afin de remédier à ces difficultés, nous proposons une méthode astucieuse inspirée des méthodes canoniques pour l'analyse des phénomènes critiques [19]. La difficulté première dans l'analyse de cette transition venant de la présence d'états absorbants, cette méthode permet de les supprimer. De la même manière que l'ajout d'un champ magnétique dans le modèle d'Ising permet de favoriser l'une des phases [18], nous ajoutons au modèle un champ d'activation permettant de favoriser la phase active. En pratique, nous ajoutons une règle au modèle de Picard. Désormais, un site élastique peut devenir plastique peu importe sa contrainte locale. Cette nouvelle voie d'activation se fait selon un taux de transition h qui représente alors l'intensité du champ d'activation :

$$n_i : 0 \xrightarrow{h} 1, \quad \forall \sigma_i. \quad (4.11)$$

De ce fait, dès lors que $h > 0$ le système ne peut pas tomber dans un état absorbant, quelque soit Σ . Cela revient à ajouter un paramètre de contrôle et donc une nouvelle dimension au diagramme critique, relocalisant le point critique en $(\Sigma = \Sigma_c, h = 0)$, à la


 FIGURE 4.5 – Représentation schématique du principe de l'ajout d'un champ d'activation h .

marge d'une zone non-absorbante (voir figure 4.5). En se plaçant à $\Sigma = \Sigma_c$ et $h > 0$, faire tendre h vers 0 constitue ainsi un nouveau moyen de s'approcher du point critique sans aucun risque de tomber dans un état absorbant. En ce sens, imposer un champ d'activation h est tout à fait analogue à imposer un taux de cisaillement $\dot{\gamma}$. Il est alors possible de sonder les propriétés critiques du système aussi près que l'on veut de la transition.

Néanmoins, comme dans le cas où l'on impose le taux de cisaillement $\dot{\gamma}$, dès lors que $\xi \sim L$ le système est soumis à des effets de taille finie. L'idée de l'analyse d'échelle en taille finie est alors de faire de ces effets de taille finie une force. Comme nous l'avons présenté au chapitre 1, dans le régime critique et pour un système de taille infinie, les observables physiques sont des fonctions homogènes des paramètres de contrôle. En adaptant les notations au cas de la transition vers l'écoulement, cela signifie que l'on peut écrire $\langle \dot{\gamma} \rangle$ comme :

$$\langle \dot{\gamma} \rangle \sim \lambda^{-\beta} R(a_\Sigma \lambda \delta \Sigma, a_h \lambda^\zeta h) \quad (4.12)$$

avec R une fonction universelle homogène de ses arguments, a_i des paramètres non-universels et $\lambda > 0$. ζ représente alors un nouvel exposant critique caractérisant le champ d'activation h . En effet si l'on se place en $\Sigma = \Sigma_c$ et que l'on pose $\lambda = (a_h h)^{-1/\zeta}$ alors on obtient :

$$\langle \dot{\gamma} \rangle \sim (a_h h)^{\beta/\zeta} R(0, 1) \quad (4.13)$$

et donc $\langle \dot{\gamma} \rangle \sim h^{\beta/\zeta}$. Afin d'intégrer les effets de taille finie dans cette description, nous considérons L comme un nouveau paramètre de contrôle dont les propriétés d'échelle sont décrites par le même exposant ν_\perp que la longueur de corrélation ξ :

$$\langle \dot{\gamma} \rangle \sim \lambda^{-\beta} \tilde{R}(a_\Sigma \lambda \delta \Sigma, a_h \lambda^\zeta h, a_L L \lambda^{-\nu_\perp}) \quad (4.14)$$

En prenant alors $\Sigma = \Sigma_c$ et $\lambda = (a_L L)^{1/\nu_\perp}$ on obtient :

$$\langle \dot{\gamma} \rangle \sim (a_L L)^{-\beta/\nu_\perp} \tilde{R}(0, a_h (a_L L)^{\zeta/\nu_\perp} h, 1) \quad (4.15)$$

\tilde{R} étant une fonction universelle, cela signifie qu'en redimensionnant $\langle \dot{\gamma} \rangle$ par $(a_L L)^{-\beta/\nu_\perp}$ et h par $(a_L L)^{-\zeta/\nu_\perp}/a_h$, les courbes $\langle \tilde{\dot{\gamma}} \rangle = f(\tilde{h})$ ainsi représentées ne dépendent pas de la taille du système choisie. En termes graphiques, les courbes obtenues pour différents L se superposent, même au niveau des effets de taille finie. On peut alors établir une méthode graphique de détermination des exposants : en traçant les courbes $\langle \dot{\gamma} \rangle = f(h)$ pour différentes tailles L , les exposants critiques sont déterminés comme ceux définissant le redimensionnement permettant la superposition de toutes les courbes. En pratique, étant donné que cette étude ne sera menée que sur ce modèle spécifique, nous oublierons les paramètres non-universels a_i .

Ce raisonnement peut être mené sur deux autres quantités mesurables dans l'état stationnaire : la variance du taux de cisaillement global $\langle \Delta \dot{\gamma}^2 \rangle$ et son cumulant de Binder Q [123] défini selon :

$$Q = 1 - \frac{\langle \dot{\gamma}^4 \rangle}{3\langle \dot{\gamma}^2 \rangle^2} \quad (4.16)$$

L'universalité est alors obtenue avec le redimensionnement de $\langle \Delta \dot{\gamma}^2 \rangle$ par L^{γ'/ν_\perp} tandis que Q ne nécessite pas de redimensionnement. La méthode que nous suivons pour la détermination des exposants est donc la suivante :

- par l'étude du cumulant Q nous déterminons ζ/ν_\perp .
- par l'étude de $\langle \dot{\gamma} \rangle$ nous déterminons β/ν_\perp .
- en utilisant la valeur mesurée de β nous déduisons ζ et ν_\perp .
- par l'étude de $\langle \Delta \dot{\gamma}^2 \rangle$ nous déterminons γ' .

Cette méthode peut en réalité être adaptée au cas similaire où le taux de cisaillement $\dot{\gamma}$ est imposé comme c'est le cas dans [52]. Néanmoins notre méthode présente l'avantage de conserver la contrainte comme paramètre de contrôle et donc de permettre l'accès aux fluctuations du taux de cisaillement.

Résultats

Nous simulons l'écoulement du système avec des tailles allant de $L = 32$ à $L = 1024$ et des valeurs de h allant de 10^{-7} à 10^{-2} . Dans les encarts de la figure 4.6, nous observons alors le comportement typique attendu du système en présence d'effets de taille finie. Loin du point critique où la longueur de corrélation ξ est grande devant L , toutes les courbes suivent une même évolution (partie droite des encarts). En revanche, en s'approchant du point critique, en diminuant h , les effets de taille finie se ressentent d'autant plus tôt que la taille du système L est petite, induisant un décrochage de la loi universelle (partie gauche des encarts).

En appliquant la méthode décrite précédemment, il est possible d'obtenir la meilleure estimation des exposants ζ , ν_\perp et γ' grâce aux superpositions de courbes représentées à la figure 4.6. La justesse des superpositions obtenues valide notre approche d'échelle et nous permet d'obtenir des estimations plus précises que via une méthode d'ajustement classique. Les valeurs des exposants sont alors reportées dans le tableau 4.1. Notons que

Modèle/Classe	β	γ'	ν_{\perp}	ζ
Picard	1.5	-0.70	1.1	2.5
Picard-CP	0.59	0.26	0.70	2.1
FES $^{\pm}$	0.62	0.36	0.79	2.25
CDP [19]	0.64	0.37	0.80	2.23

TABLE 4.1 – Exposants critiques déterminés dans le modèle de Picard, le modèle Picard-CP, le modèle FES $^{\pm}$ et les exposants attendus pour la classe CDP.

si cette transition est largement étudiée, la valeur des exposants γ' et ζ n'avait encore jamais été déterminée puisque les études précédentes adoptent un point de vue plutôt centré sur la rhéologie associée que sur la caractérisation théorique en tant que transition de phase absorbante.

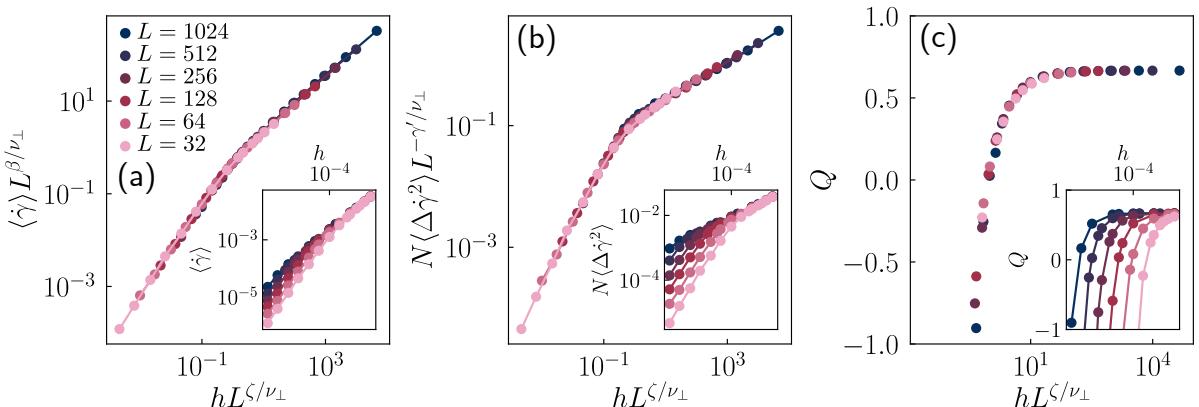


FIGURE 4.6 – Analyse d'échelle de taille finie pour le modèle de Picard. Redimensionnement de l'évolution de (a) la valeur moyenne du taux de cisaillement, (b) de la variance taux de cisaillement, (c) du cumulant de Binder. En encart, nous représentons les données brutes avant redimensionnement.

La valeur de l'exposant lié à la longueur de corrélation $\nu_{\perp} \approx 1.13$ est en accord avec celle trouvée dans le cas d'un autre modèle élastoplastique [52].

4.3.1.3 Relation d'hyperscaling

L'exposant lié aux fluctuations critiques prend lui une valeur $\gamma' \approx -0.7$, elle aussi exclue du cadre théorique LR-CDP pour lequel on a nécessairement $\gamma' > 0$. Le point le plus intéressant est que cette valeur est négative. Cela signifie que lorsque l'on approche la contrainte seuil du système, les fluctuations du taux de déformation diminuent et finissent par s'annuler complètement au point critique exactement. Ce comportement est assez contre-intuitif de prime abord. En effet, du fait du renforcement des corrélations spatiales et temporelles à l'approche du point critique, le scénario habituel des phénomènes critiques présente des fluctuations critiques qui, au contraire, divergent [18]. Cette observation surprenante permet néanmoins de satisfaire la relation d'hyperscaling introduite au chapitre 1 :

$$\gamma' = \nu_{\perp} D - 2\beta \quad (4.17)$$

pour laquelle on trouve ici $(2\beta + \gamma')/\nu_{\perp} D \approx 1.01$.

Cette dernière peut en fait être rationalisée par un scénario simple dans le cas de la transition vers l'écoulement. Dans l'état stationnaire, le système peut être vu comme une collection de $(L/\xi)^D$ sous-systèmes indépendants de taille $\xi \times \xi$. Conforté par le scénario proposé dans [52], dans chaque compartiment le taux de cisaillement moyen $\langle \dot{\gamma} \rangle_{\xi}$ est imposé par celui produit par les plus grands évènements, ici d'extension spatiale ξ . Les compartiments étant indépendants, chacun d'entre eux possède un taux de cisaillement moyen égal au taux de cisaillement moyen global du système $\langle \dot{\gamma} \rangle$. En supposant alors que la durée des évènements et leur période d'apparition suivent les mêmes lois d'échelles, la variance du taux de cisaillement dans chaque compartiment, qui est une quantité positive, se comporte comme le carré du taux de cisaillement moyen $\langle \Delta \dot{\gamma}^2 \rangle_{\xi} \sim \langle \dot{\gamma} \rangle_{\xi}^2 \sim \langle \dot{\gamma} \rangle^2$. La variance globale $\langle \Delta \dot{\gamma}^2 \rangle$ est alors l'addition de celle de tous les compartiments indépendants :

$$\langle \Delta \dot{\gamma}^2 \rangle \sim \left(\frac{L}{\xi} \right)^D \langle \Delta \dot{\gamma}^2 \rangle_{\xi} \sim \left(\frac{L}{\xi} \right)^D \langle \dot{\gamma} \rangle^2 \quad \square \quad (4.18)$$

ce qui permet d'arriver à la relation d'hyperscaling en ré-exprimant toutes les grandeurs en fonction de la distance au point critique $\delta\Sigma$. En d'autres termes, l'évolution des fluctuations du taux de cisaillement est le fruit de deux phénomènes en compétition. D'une part à l'approche de la transition le nombre de zones indépendantes spatialement diminue, augmentant de ce fait les fluctuations globales (terme $\nu_{\perp} D$ dans l'équation [équation 4.17](#)). D'autre part le taux de cisaillement moyen, et donc sa variance, diminue dans chacune de ces zones à l'approche du point critique (terme -2β dans l'équation [équation 4.17](#)). Dès lors que l'exposant β est suffisamment grand, l'exposant γ' est donc susceptible de devenir négatif, ce qui est bien le cas ici.

Cette image n'est cependant pas en **contradiction** avec des fluctuations relatives de plus en plus grandes à l'approche du point critique, puisque $\langle \Delta \dot{\gamma}^2 \rangle / \langle \dot{\gamma} \rangle^2 \sim \delta\Sigma^{-\gamma'-2\beta}$ et $-\gamma' - 2\beta < 0$. Ainsi, si les fluctuations absolues du taux de cisaillement s'annulent à l'approche du point critique, les fluctuations relatives, elles, divergent bien.

4.3.2 Modèles d'écoulement à courte portée

Grâce au modèle de Picard, nous avons donc pu estimer les exposants critiques liés à la transition vers l'écoulement dans le cas physique d'interactions élastiques pour lesquelles on a $\alpha = 2$. Afin de résister cette transition dans une image plus globale, nous proposons de caractériser son évolution en fonction de la portée des interactions qu'elle met en œuvre. Pour commencer, nous nous concentrerons sur le cas limite de courte portée.

4.3.2.1 Le modèle Picard-CP

Pour ce faire, nous produisons la même analyse mais sur une variation du modèle de Picard que l'on nommera Picard-CP pour "Picard courte portée". Le modèle Picard-CP reprend alors toutes les règles du modèle de Picard mais considère une interaction

différente. Celle-ci porte uniquement sur les premiers voisins, supprimant ainsi tous les effets de la longue portée de l'interaction. Pour conserver toutes choses égales par ailleurs, le noyau de redistribution choisi conserve la symétrie particulière du noyau d'Eshelby et prend donc la forme décrite sur la figure 4.7-(a). Nous nous attendons alors à ce que ce modèle appartienne à la classe CDP puisqu'il ressemble fortement à un modèle de tas de sables, comme le modèle Manna. Nous rappelons que cette classe d'universalité est décrite par les exposants récapitulés dans le tableau 4.1.

Pour déterminer la contrainte critique associée à ce nouveau modèle, nous utilisons la méthode de contrainte imposée présentée à la sous-sous-section 4.3.1.1. Dans ce cas, il n'y a en fait aucune manière naturelle de changer le paramètre de contrôle du système pour contrôler le taux de cisaillement. En effet, cela demanderait d'ajouter une composante de relaxation globale au noyau de redistribution qui peut alors prendre n'importe quelle forme (uniforme, locale, ...), et qui a priori ne donnera pas la même courbe d'écoulement que dans des conditions de contrainte imposée. En utilisant des systèmes de tailles allant de $L = 256$ à $L = 1024$, nous obtenons les résultats présentés sur la figure 4.7-(b), permettant de déterminer la contrainte seuil comme étant $\Sigma_c = 0.75433 \pm 0.00005$ et l'exposant $\beta = 0.59 \pm 0.02$. On trouve alors une courbe d'écoulement concave ($\beta < 1$), plus communément attendue dans le cadre des phénomènes critiques. Un point à noter est que la détermination du point critique se révèle ici beaucoup plus simple que dans le cas physique en termes de temps de calcul. Cela vient directement du caractère concave de la transition qui permet de s'approcher tout aussi près du point critique sans pour autant avoir à descendre à des taux de cisaillement extrêmement faibles et donc aller à des tailles de système extrêmement grandes.

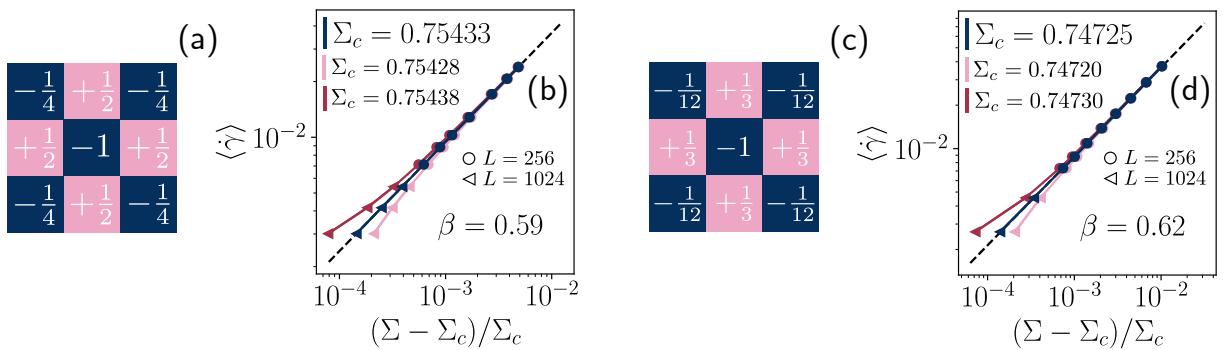


FIGURE 4.7 – Détermination de la contrainte critique Σ_c et de l'exposant β pour le modèle Picard-CP (b) (dont le propagateur est représenté en (a)) et pour le modèle FES \pm (c) (dont le propagateur est représenté en (d))

La valeur obtenue de l'exposant β est alors très proche de celle attendue pour la classe CDP, même si la mesure numérique semble s'en éloigner très légèrement. Cet écart n'est pas non plus dérisoire puisque c'en est un du même ordre de grandeur qui permet de séparer les classes DP et CDP par exemple [19]. Afin de confirmer ou réfuter l'hypothèse que CDP, comme pour la transition de dépiégeage, est la classe représentant le modèle Picard-CP, nous le caractérisons grâce à une analyse d'échelle de taille finie. En simulant des systèmes pour des tailles allant de $L = 32$ à $L = 512$, la meilleure superposition

des courbes après redimensionnement est représentée figure 4.8-(a)-(c). Les valeurs des exposants critiques estimées sont alors reportées dans le tableau 4.1.

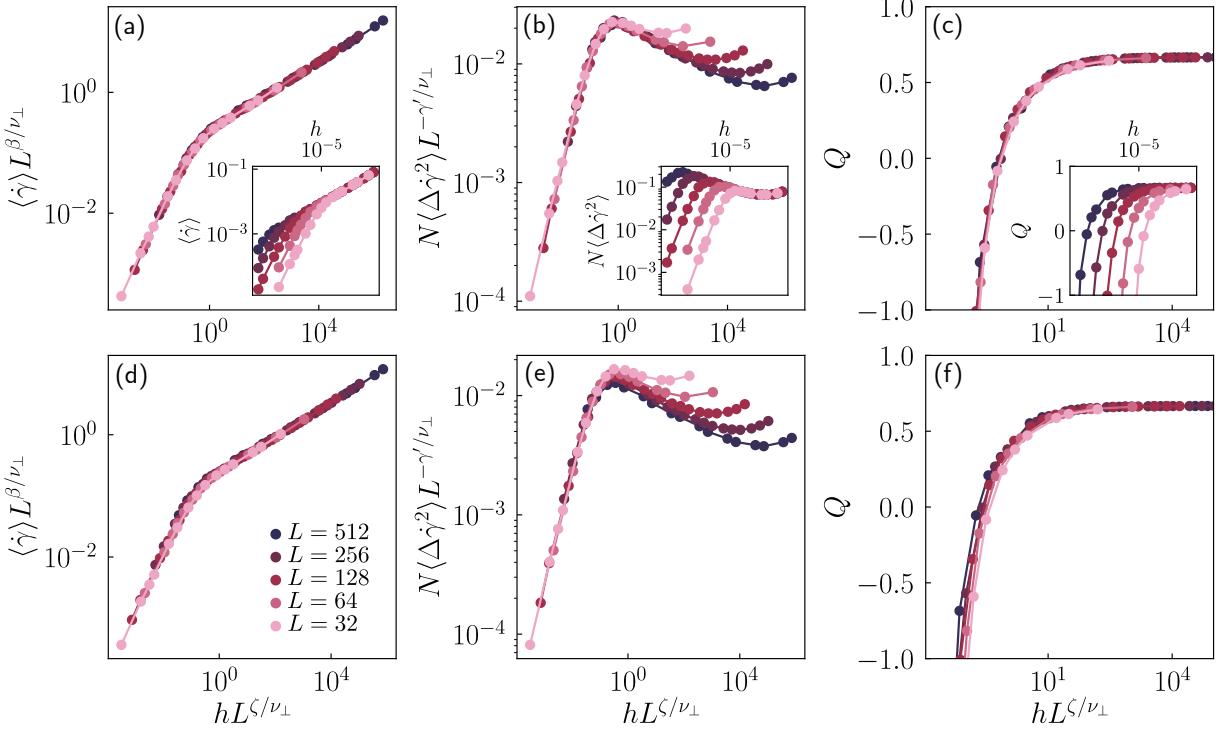


FIGURE 4.8 – Analyse d'échelle de taille finie dans le cas du modèle Picard-CP. Les redimensionnements de la valeur moyenne (a), de la variance (b) et du cumulant de Binder (c) du taux de cisaillement sont représentés en figures principales et les données brutes en inset. Les figures (d), (e) et (f) montrent ces mêmes redimensionnement avec les exposants connus de la classe CDP [19].

La première observation à faire est que l'exposant lié aux fluctuations $\gamma' \approx 0.26$ est positif. On retrouve donc le comportement canonique des fluctuations critiques qui divergent à l'approche de la transition, conjointement au fait de retrouver une valeur de l'exposant β relativement petite. Par ailleurs, avec la valeur mesurée plus faible de l'exposant $\nu_{\perp} \approx 0.7$, la relation d'hyperscaling est encore une fois très bien vérifiée avec $(2\beta + \gamma')/\nu_{\perp} D \approx 1.03$. Le scénario proposé à la section précédente est donc toujours envisageable, mais le terme 2β subit une variation plus importante que le terme $\nu_{\perp} D$ ce qui inverse le rapport de force entre les deux phénomènes en compétition.

Par ailleurs, les exposants ν_{\perp} , ζ et γ' prennent eux aussi des valeurs proches des valeurs attendues pour la classe CDP, mais semblent pourtant discernablement différents. Pour se convaincre de cette différence, nous utilisons les exposants associés à la classe CDP pour la procédure de redimensionnement. Si cette classe est bien la représentante du modèle, alors la superposition dans ce cas devrait être au moins aussi convaincante. La superposition des courbes obtenue dans ce cas est présentée sur la figure 4.8-(d)-(f). On remarque alors que celle-ci est de qualité bien moindre, notamment dans le cas de la variance et du cumulant de Binder. En effet, la zone de changement de tendance pour la variance (i.e.

la bosse présentée sur la figure 4.8-(e)) marque un désaccord entre les différentes courbes tandis que la superposition des cumulants Q est relativement mauvaise à petits h . Les exposants précédemment estimés permettant d'améliorer fortement ces désaccords, cette analyse suggère que le modèle Picard-CP n'appartient pas à la classe d'universalité CDP. Cela peut paraître surprenant car toutes les conditions de la conjecture de Rossi et. al [25] semblent être réunies ici.

4.3.2.2 Modes zéros, propriété fondamentale de la transition vers l'écoulement

Si le modèle fait bien intervenir une infinité d'états absorbants, des interactions à courte portée et une quantité conservée, il n'est pas dépourvu de symétrie supplémentaire. En effet, si l'on se penche sur la structure du noyau de redistribution, on remarque que la somme des contributions sur chaque ligne et chaque colonne est nulle (voir figure 4.9-(a)). Cette symétrie n'est pas anodine puisqu'elle implique qu'au cours de l'écoulement la contrainte portée par une ligne ou une colonne est conservée. Le système n'est donc pas constraint uniquement par la conservation de la contrainte globale mais aussi par celle de $2L$ contraintes partielles. En espace de Fourier, cette symétrie correspond à $\hat{G}(q_x = 0, q_y) = \hat{G}(q_x, q_y = 0) = 0$, qui est bien apparente dans le cas du modèle Picard-CP où l'on a :

$$\hat{G}(\mathbf{q}) = \cos(q_x) + \cos(q_y) - \cos(q_x)\cos(q_y) - 1 \quad (4.19)$$

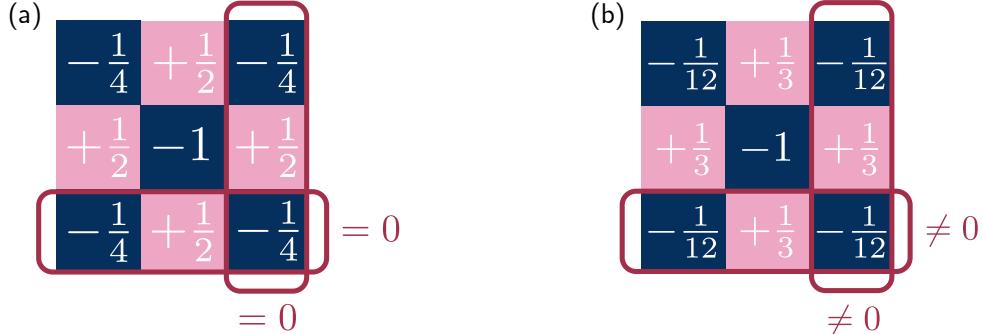


FIGURE 4.9 – Illustration de la propriété de mode zéro dans le cas du modèle Picard-CP (a) et sa brisure dans le cas du modèle FES \pm (b)

Cette propriété est en fait une propriété déjà connue et étudiée dans le cas classique [53, 54]. En effet, d'après l'équation 4.9 on a de même pour l'interaction d'Eshelby $\hat{G}(q_x = 0, q_y) = \hat{G}(q_x, q_y = 0) = 0$. Cette conservation supplémentaire peut être interprétée sous un autre angle. Si un évènement plastique ne modifie pas la contrainte partielle portée par chaque ligne et colonne, alors une ligne ou colonne d'évènements ne modifie pas l'état de contrainte locale du système. En termes de physique d'équilibre, si l'on s'accorde ce parallèle, ces lignes plastiques ont un coût énergétique nul et peuvent donc être qualifiées de "modes mous". C'est cette propriété qui explique pourquoi ce système, proche du point critique, présente une activité plastique organisée sous forme de clusters de faible compacité, presque linéaires (voir figure 4.10). Les bandes de cisaillement [99, 124] sont

alors la représentation à son paroxysme de cette symétrie. Ces corrélations observées dans différents dispositifs expérimentaux montrent par ailleurs que cette propriété n'est pas uniquement un artefact numérique mais a un impact bien réel sur la physique du phénomène d'écoulement. Par analogie avec les modes mous de la physique d'équilibre et la condition dans l'espace de Fourier, nous appellerons ces modes de plasticité "modes zéros".

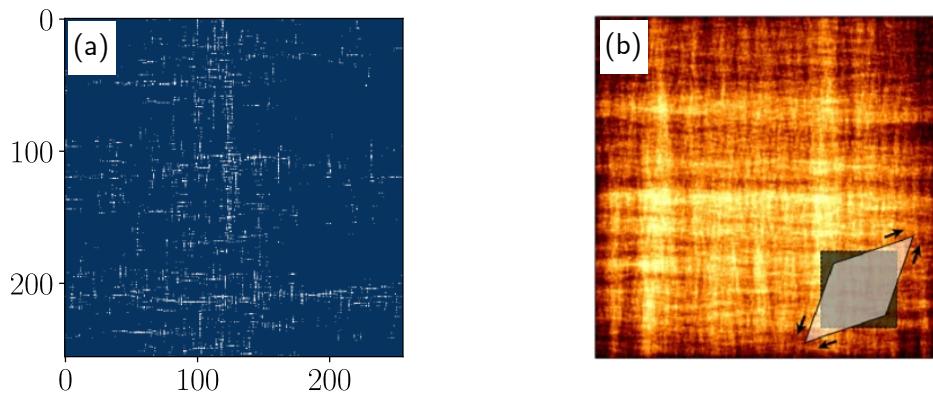


FIGURE 4.10 – (a) Carte d'activité plastique cumulée au cours d'une simulation du modèle de Picard. Les zones blanches représentent des zones de forte activité plastique. (b) Même carte dans le cas d'un modèle élastoplastique tensoriel implémenté par une méthode d'éléments finis [119]

Dans le cas classique, cette propriété de modes zéros qui se retrouve dans le noyau d'Eshelby n'est pas un hasard. En effet, elle vient du fait que l'interaction considérée est regardée dans la théorie de l'élasticité linéaire à l'équilibre mécanique. Cela implique donc que la divergence du tenseur des contraintes est nulle à tout moment de l'écoulement :

$$\partial_i \sigma_{ij} = 0 \Rightarrow \begin{cases} \partial_x \sigma_{xx} + \partial_y \sigma_{yx} = 0 \\ \partial_y \sigma_{yy} + \partial_x \sigma_{xy} = 0 \end{cases} \quad (4.20)$$

En intégrant alors sur x la première équation et sur y la seconde, et en se rappelant que $\sigma_{xy} = \sigma_{yx}$ on a :

$$\partial_x \int dy \sigma_{xy} = \partial_y \int dx \sigma_{xy} = 0 \quad (4.21)$$

ce qui implique que la contrainte partielle portée par chaque ligne et colonne est la même. Le propagateur de redistribution d'Eshelby qui répond à cette contrainte d'équilibre mécanique doit donc redistribuer la même contrainte partielle sur chaque ligne et colonne. De plus, étant de moyenne nulle afin de conserver la contrainte globale, cette contrainte partielle redistribuée est nécessairement nulle.

4.3.2.3 Retour à l'universalité et classe CDP-0

Afin de confirmer l'hypothèse que le modèle Picard-CP ne tombe pas dans la classe CDP du fait de la présence de modes zéros, nous étudions une troisième variation du

modèle. Tout en conservant les mêmes règles par ailleurs, le noyau d’interaction sur les plus proches voisins est modifié de sorte que les modes zéros disparaissent (voir figure 4.9). Ceci se fait tout en gardant la symétrie quadrupolaire de l’interaction et donc des signes alternés. En ce sens, nous appelons ce modèle FES^\pm du fait de sa forte ressemblance avec les modèles de tas de sable à énergie conservée (*fixed-energy sandpiles*) mais qui ne présentent en général que des redistributions de masse positives.

Nous déterminons alors le point critique associé à ce modèle de la même manière que pour le précédent. Les résultats présentés sur la figure 4.7-(c) donnent $\Sigma_c \approx 0.74725 \pm 0.00005$ et $\beta = 0.62 \pm 0.02$. On remarque alors d’abord un accord légèrement meilleur avec l’exposant β attendu pour la classe CDP. Afin de confirmer ce rapprochement, nous conduisons la même analyse d’échelle de taille finie. Les résultats obtenus pour le meilleur redimensionnement sont présentés figure 4.11-(a)-(c). Les exposants ν_\perp , ζ et γ' ont alors des valeurs estimées toutes plus proches des valeurs attendues pour la classe CDP que dans le cas du modèle Picard-CP (voir tableau 4.1).

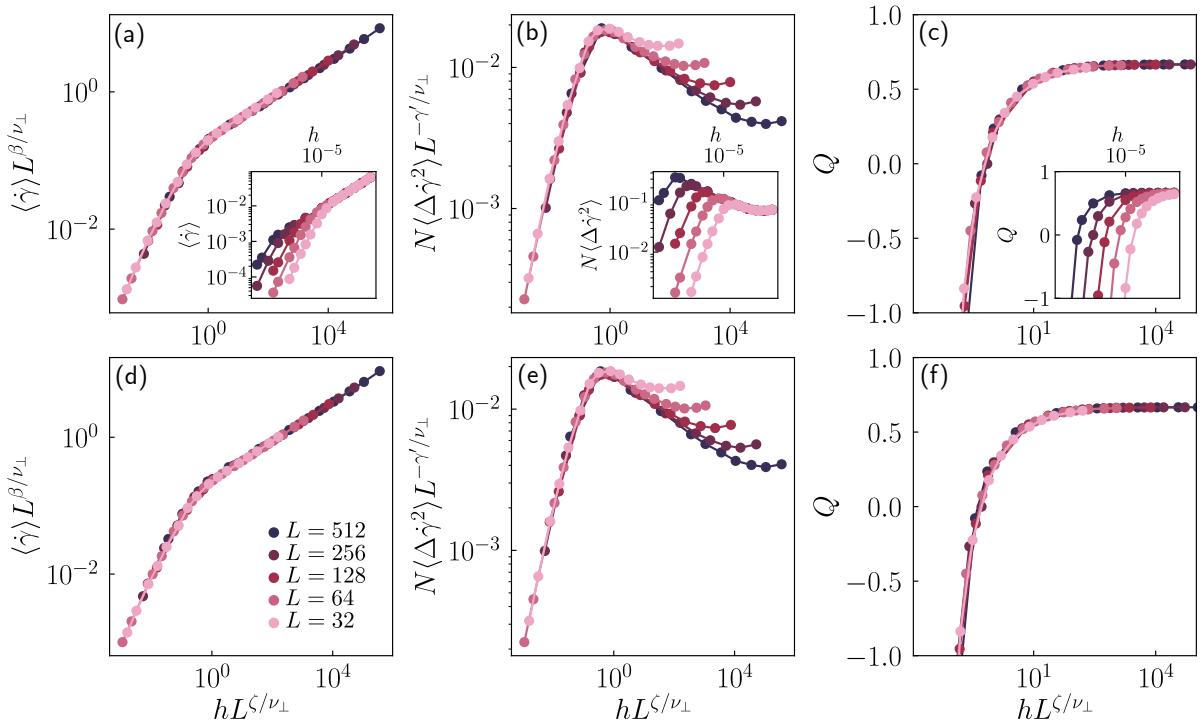


FIGURE 4.11 – Analyse d’échelle de taille finie dans le cas du modèle FES^\pm . Les redimensionnements de la valeur moyenne (a), de la variance (b) et du cumulant de Binder (c) sont représentés en figures principales et les données brutes en **inset**. Les figures (d), (e) et (f) montrent ces mêmes redimensionnements avec les exposants connus de la classe CDP.

Afin de confirmer que ce troisième modèle présente bien la criticalité de la percolation dirigée conservée, nous effectuons les redimensionnements des quantités avec les exposants critiques de cette classe. Les résultats sont exposés sur la figure 4.11-(d)-(f). Nous observons alors que les superpositions des courbes sont aussi convaincantes dans ce cas

que lors d'une estimation indépendante des exposants. Cela nous permet d'affirmer raisonnablement que ce modèle tombe donc bien dans la classe CDP. Cette analyse renforce alors l'idée que le modèle Picard-CP présente une criticalité proche mais différente du fait de sa symétrie additionnelle, le différenciant ainsi des modèles de dépiégeage à courte portée. Nous proposons alors de considérer ce nouveau comportement critique comme représentant d'une nouvelle classe d'universalité que nous appellerons CDP-0 pour des raisons évidentes.

Une critique pouvant être apposée à cette conclusion est que le modèle Picard-CP peut être sujet à des corrections d'échelle [125]. Ainsi, plus proche du point critique, pour des plus grands systèmes, la spécificité des modes zéro s'effacerait pour laisser place à la criticalité CDP. Si cette objection ne peut jamais être vraiment réfutée, la présence de telles corrections n'a pas pu être mise en évidence sur les données présentées. De plus, un autre indice penchant en faveur de notre interprétation est la visualisation de la répartition de l'activité plastique. Sur la figure 4.12, nous comparons la répartition de plasticité dans le cas du modèle Picard-CP et dans le cas du modèle FES $^\pm$. Comme on peut le remarquer, il semblerait qu'à des échelles raisonnables les clusters d'activité présentent des différences. Notamment, la répartition d'activité dans le cas du modèle Picard-CP semble présenter des structures anisotropes, de compacité inférieure, suggérant un effet important des modes zéros. Il est bien sûr toujours possible qu'à plus grande échelle cette structure disparaîtse, mais cet indice s'ajoute au faisceau conduisant à considérer CDP-0 comme une nouvelle classe à part entière.

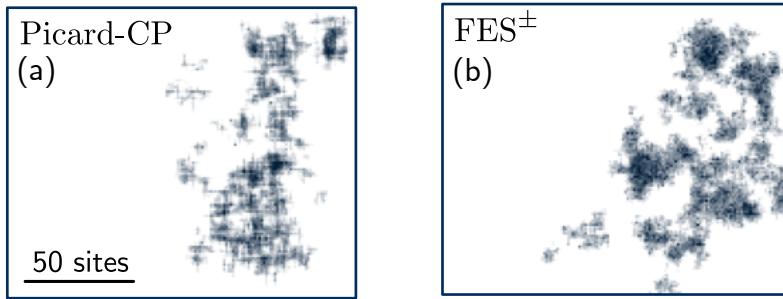


FIGURE 4.12 – Cartes d'activité plastique cumulée au cours d'une simulation pour le modèle Picard-CP (a) et le modèle FES $^\pm$ (b). Les zones foncées correspondent aux zones de forte activité plastique.

Une description continue différente

Un dernier argument en faveur de l'existence d'une telle classe d'universalité se base sur une description en termes de théorie continue des champs. Dans le cas de la classe d'universalité CDP, la quantité conservée ρ suit une dynamique non diffusive dépendante de la répartition spatiale de l'activité A dans le système : $\partial_t \rho = \kappa \nabla^2 A$ (voir chapitre 1). Dans notre système, le champ dynamique conservé est la contrainte σ tandis que l'activité peut être directement associée au taux de déformation plastique $\partial_t \epsilon_{pl}$. Une description de type CDP donnerait donc :

$$\partial_t \sigma(\mathbf{r}, t) = \kappa \nabla^2 A(\mathbf{r}, t) \quad (4.22)$$

où l'on a noté $A(\mathbf{r}, t) = \partial_t \epsilon_{pl}(\mathbf{r}, t)$ pour alléger l'écriture. Cette forme d'évolution du champ de contrainte est en réalité très proche de la règle d'évolution implémentée dans les variations du modèle de Picard étudiées. On a en effet sur la grille discrète en deux dimensions :

$$\partial_t \sigma_{i,j} = \sum_{k,l} G_{k,l} A_{i-k,j-l} \quad (4.23)$$

où l'on a utilisé la notation discrète $f_{ij} = f(x = ia, y = ja)$ avec $(i, j) \in \mathbb{N}^2$ et a le pas du réseau. On peut alors se demander comment cette équation se traduit dans le cas continu afin d'en inférer une équation de type CDP.

Nous introduisons dans ce but les densités continues de contrainte $\sigma(x, y)$ et d'activité $A(x, y)$ associées à leurs homologues discrets $\sigma_{i,j}$ et $A_{i,j}$:

$$A_{i,j} = \left(\frac{a}{L}\right)^2 A(x = i\frac{a}{L}, y = j\frac{a}{L}), \quad \sigma_{i,j} = \left(\frac{a}{L}\right)^2 \sigma(x = i\frac{a}{L}, y = j\frac{a}{L}) \quad (4.24)$$

avec L la taille du système. Dans la limite $(a/L) \rightarrow 0$, les densités continues correspondent aux champs de la théorie dynamique. L'équation d'évolution du modèle peut alors se récrire selon :

$$\partial_t \sigma(x, y) = \sum_{k,l} G_{k,l} A(x - k\frac{a}{L}, y - l\frac{a}{L}). \quad (4.25)$$

Les propagateurs des deux modèles considérés étant de relative courte portée, la somme se restreint aux petites valeurs des entiers k et l . Il est alors naturel de développer la densité continue d'activité autour de (x, y) :

$$A(x - k\frac{a}{L}, y - l\frac{a}{L}) = \sum_{n,m=0}^{\infty} (-1)^{n+m} \left(\frac{a}{L}\right)^{n+m} \frac{k^n l^m}{n! m!} \partial_x^n \partial_y^m A(x, y). \quad (4.26)$$

De plus, dans le cas du modèle Picard-CP, le propagateur G présente une symétrie C_4 (quadrupolaire) et des modes zéros. De ce fait, seuls les termes correspondant à des puissances n et m paires et strictement positives survivent à la convolution discrète. On obtient alors :

$$\partial_t \sigma(x, y) = \sum_{u,v=1}^{\infty} K_{u,v} \left(\frac{a}{L}\right)^{2(u+v)} \partial_x^{2u} \partial_y^{2v} A(x, y), \quad K_{u,v} = \sum_{k,l} G_{k,l} \frac{k^{2u} l^{2v}}{(2u)!(2v)!} \quad (4.27)$$

Pour obtenir une description de champ de type CDP, on s'intéresse à la limite continue de grande échelle où $a/L \rightarrow 0$. Dans ce cas, le terme dominant est le premier de la somme et on a alors :

$$\partial_t \sigma(x, y) = \left(\frac{a}{L}\right)^4 K \partial_x^2 \partial_y^2 A(x, y), \quad K \equiv K_{1,1} \quad (4.28)$$

En redimensionnant le temps selon $t' = t(a/L)^4$, nous obtenons donc finalement pour le modèle Picard-CP :

$$\partial_{t'}\sigma(x, y) = K\partial_x^2\partial_y^2A(x, y). \quad (4.29)$$

Dans le cas du modèle FES $^\pm$, la contrainte des modes zéros est relâchée et donc les puissances n et m nulles survivent aussi à la convolution, à l'exception de $(n = 0, m = 0)$ qui disparaît par moyenne nulle du propagateur. Dans ce cas la même procédure donne comme équation continue :

$$\partial_t\sigma(x, y) = \left(\frac{a}{L}\right)^2 K'\nabla^2A(x, y), \quad K' \equiv K_{1,0} = K_{0,1} \quad (4.30)$$

Et donc en redimensionnant le temps cette fois selon $t'' = t(a/L)^2$, nous obtenons :

$$\partial_{t''}\sigma(x, y) = K'\nabla^2A(x, y). \quad (4.31)$$

Si l'équation inférée du modèle FES $^\pm$ est bien la même que celle de la théorie CDP, celle inférée du modèle Picard-CP est fondamentalement différente. Cette différentiation originariaire des modes zéros est remarquable, mais comprendre comment elle pourrait modifier le comportement critique associé est une tâche difficile. De plus, cela nécessiterait la détermination d'une telle équation pour le champ d'activité. Néanmoins, cela constitue un indice supplémentaire allant dans la direction de la caractérisation d'une nouvelle classe d'universalité.

L'analyse de ces deux modèles de courte portée permet donc de mettre en évidence l'importance des modes zéros et suggère donc une importance similaire dans le cas physique, en présence d'interactions à longue portée.

4.3.3 Situer la transition vers l'écoulement

La modification brutale de la portée dans le modèle de Picard a permis de mettre en évidence des éléments intéressants. Afin de situer ce modèle ni courte portée ni champ moyen dans une image globale compréhensible, il est nécessaire de s'intéresser au comportement critique dans le cas de portées intermédiaires.

4.3.3.1 Le modèle α -Picard

Pour ce faire, nous généralisons le modèle de Picard à une portée d'interaction arbitraire, i.e. $G(\mathbf{r}) \sim 1/r^\alpha$. Pour conserver les propriétés centrales du propagateur classique d'Eshelby (symétrie quadrupolaire, modes zéros²) nous définissons cette continuité de propagateurs dans l'espace de Fourier selon :

$$\hat{G}(\mathbf{q}) = -b_\alpha \frac{q_x^2 q_y^2}{q^{6-\alpha}} \quad (4.32)$$

2. implique $\hat{G}(q_x = 0, q_y) = \hat{G}(q_x, q_y = 0) = 0$

Dans l'espace réel, le calcul détaillé en [sous-sous-section 6.4.1.1](#) donne la forme suivante pour l'interaction :

$$G(r, \theta) = B_\alpha \frac{C_\alpha + \cos 4\theta}{r^\alpha}, \quad B_\alpha = b_\alpha \frac{\alpha \Gamma(\alpha/2 - 2)(\alpha - 2)(\alpha - 4)(2 + \alpha)}{\pi 2^{9-\alpha} \Gamma(3 - \alpha/2)} \\ C_\alpha = \frac{(\alpha - 2)(4 - \alpha)}{\alpha(2 + \alpha)} \quad (4.33)$$

avec Γ la fonction gamma d'Euler et b_α étant choisi pour que $G(0) \approx -1$. Nous appelons ce modèle généralisé α -Picard. Celui-ci coïncide alors avec le cas classique pour $\alpha = 2$ ($b_2 = 4$).

4.3.3.2 Implémentation numérique et instabilités

En implémentant naïvement le modèle comme dans les cas précédents, les propagateurs de redistribution obtenus pour $\alpha > 2$ présentent une très forte instabilité numérique (voir [figure 4.13-\(a\)](#)). En réalité, même si moindre, cette instabilité est déjà visible dans le cas $\alpha = 2$ comme c'est le cas sur la [figure 4.13-\(b\)](#). Une méthode proposée pour remédier à cette instabilité numérique a été présentée dans [126]. Celle-ci consiste à passer par un raffinement de la discréttisation. En d'autres termes, l'interaction est calculée sur une grille deux fois plus fine, puis le résultat est moyenné/coarse-grainé afin de gommer l'instabilité (qui a une période de deux sites). Cette technique fonctionne mais cache en fait un problème à la racine.

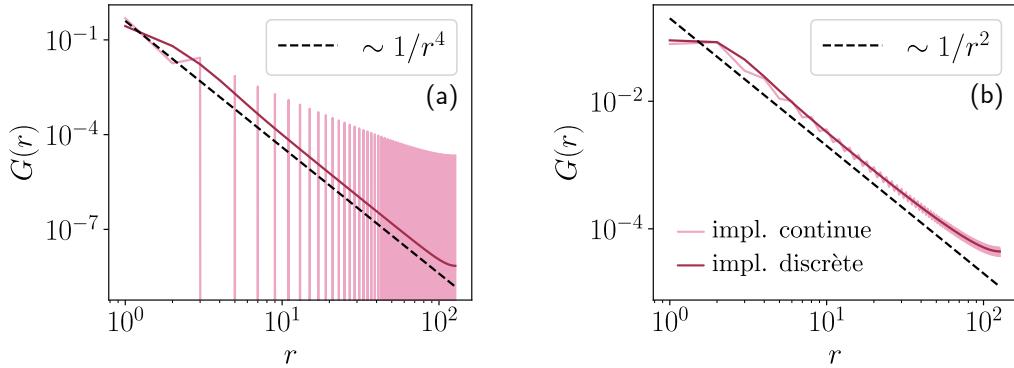


FIGURE 4.13 – Images des propagateurs de redistribution dans le modèle de Picard (a) et le modèle 4-Picard (b). Les figures montrent l'évolution du propagateur le long de la ligne $y = 0$.

L'instabilité numérique vient en réalité de l'implémentation du propagateur dans l'espace de Fourier qui est ici discret et non continu. Pour passer de la forme continue souhaitée à la forme discrète à implémenter, il faut en fait réinterpréter les nombres d'onde selon :

$$q_x^2 = 2 - 2 \cos^2 \left(\frac{2\pi}{L} n \right), \quad q_y^2 = 2 - 2 \cos^2 \left(\frac{2\pi}{L} m \right) \quad (4.34)$$

Cette méthode déjà présentée dans la littérature [65, 99] est indispensable pour obtenir des redistributions bien définies à plus courtes portées. Les corrections apportées par cette conversion sont représentées [figure 4.13](#), montrant ainsi que les instabilités peuvent être supprimées de la sorte. Les propagateurs du modèle généralisé seront donc implémentés de cette façon.

4.3.3.3 Comportement critique des modèles α -Picard

Nous étudions la généralisation du modèle pour $\alpha = \{1, 1.5, 3, 4, 5\}$. Pour chaque portée α , le point critique et l'exposant β sont déterminés à contrainte imposée. Les données et les résultats issus de ces méthodes sont consignés à la [sous-sous-section 6.4.1.2](#). Il est à noter que la tendance précédemment évoquée est confirmée : plus l'exposant β mesuré est grand, plus la détermination du point critique est fastidieuse.

Sur la [figure 4.14-\(a\)](#), nous représentons l'évolution de $\langle \dot{\gamma} \rangle$ en fonction de la distance au point critique $\delta\Sigma$ en échelle logarithmique, pour les différentes portées α . Nous remarquons alors que plus la portée de l'interaction augmente, plus l'exposant β augmente aussi (pente sur la représentation graphique). Par ailleurs en représentant l'évolution de la variance du taux de cisaillement, nous observons que l'on passe de fluctuations divergentes à l'approche du point critique pour les courtes portées à des fluctuations évanescentes pour les plus longues portées. Afin de mieux visualiser ces évolutions, nous traçons la courbe $\beta = f(\alpha)$ sur la [figure 4.14-\(b\)](#). Nous remarquons alors une évolution continue de la criticalité allant de celle du modèle Picard-CP à une criticalité fortement convexe avec $\beta \approx 2$. Le cas physique $\alpha = 2$ se situe alors sur cette continuité.

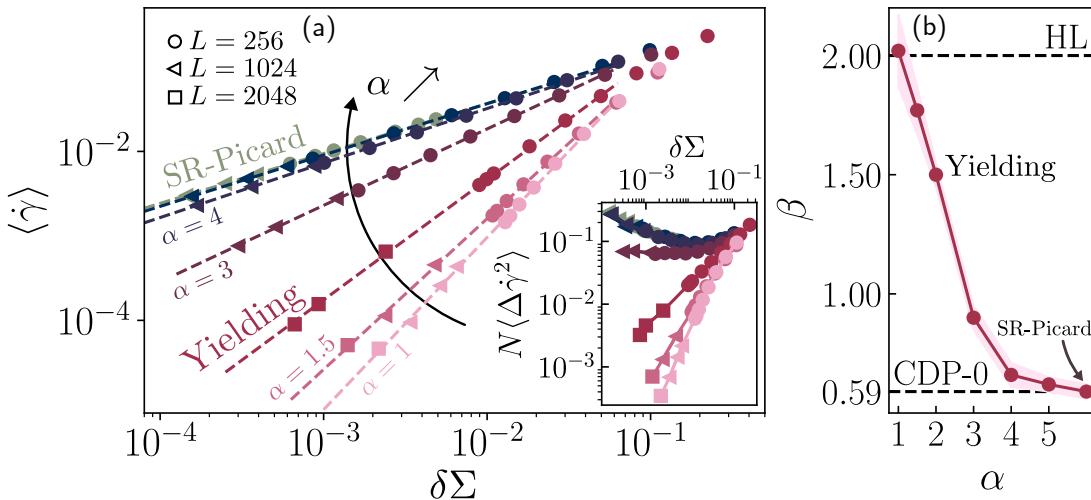


FIGURE 4.14 – (a) Courbes d'écoulement $\langle \dot{\gamma} \rangle = f(\delta\Sigma)$ pour les modèles α -Picard $\alpha \in \{5, 4, 3, 2, 1.5, 1\}$ et pour le modèle Picard-CP. (b) Évolution de l'exposant critique β avec l'exposant de portée d'interaction α .

Plus précisément, nous observons d'abord une région entre $\alpha = 6$ et $\alpha = 4$ où l'exposant β , qui varie entre $\beta \approx 0.59$ et $\beta \approx 0.68$, dépend faiblement de la portée. Puis, entre $\alpha = 4$ et $\alpha = 1$, une région où β dépend fortement de α se déploie. On retrouve alors un caractère

concave de la transition pour $\alpha \gtrsim 3$ et un caractère convexe pour $\alpha \lesssim 3$. Il est intéressant de noter que le point autour duquel la transition perd sa concavité semble être le même que celui pour lequel le comportement des fluctuations change ($\gamma' = 0$).

Pour les plus grandes portées le comportement critique est, comme attendu, différent de celui de la transition de dépiégeage. En effet, nous nous attendons à ce que le mécanisme défini par le bruit mécanique permette cette différence pour des exposants de bruit μ suffisamment grands et donc des portées suffisamment faibles (voir [chapitre 3](#)). Toutefois pour $3 < \alpha < 4$, l'évolution suivie semble être sensiblement là-même que dans le cas de la transition de dépiégeage. Cela suggère donc que dans la zone $\alpha > 3$, l'influence du bruit mécanique sur la transition est secondaire. Ainsi, la compréhension de cette zone pourrait être assurée par des descriptions similaires au cadre LR-CDP.

4.3.3.4 Description continue

En suivant cette idée, nous pensons que les deux régions, d'influence faible ($4 < \alpha < 6$) puis forte ($\alpha < 4$) de α sur β , peuvent être interprétées par un raisonnement analytique simple. Pour cela, nous allons essayer d'inférer, comme à la [sous-sous-section 4.3.2.3](#), la bonne description continue à grande échelle de l'évolution du champ de contrainte en fonction de la portée α . Pour ce faire, nous repartons de l'[équation 4.27](#). Cette fois-ci, avec la forme à longue portée du propagateur que l'on notera G^{LR} , la somme dans l'expression de $K_{u,v}^{\text{LR}}$ ne se restreint plus uniquement aux petites valeurs de k et l .

$$K_{u,v}^{\text{LR}} = \sum_{k,l} G_{k,l}^{\text{LR}} \frac{k^{2u} l^{2v}}{(2u)!(2v)!} \quad (4.35)$$

Nous cherchons donc d'abord à évaluer $K_{u,v}^{\text{LR}}$ pour un propagateur décroissant comme $1/r^\alpha$. Pour ce faire, de la même manière que pour la contrainte et l'activité, nous définissons un équivalent continu du propagateur selon :

$$\mathcal{G}\left(\mathbf{r} = (k\frac{a}{L}, l\frac{a}{L})\right) = \left(\frac{L}{a}\right)^\alpha G_{LR}(k, l) \quad (4.36)$$

Dans la limite de grande échelle $a/L \rightarrow 0$, la somme peut alors être approximée par l'intégrale de Riemann associée :

$$K_{u,v}^{\text{LR}} = \sum_{k,l=1}^{L/a} G_{k,l}^{\text{LR}}(k, l) k^{2u} l^{2v} \rightarrow \left(\frac{L}{a}\right)^{2(1+u+v)-\alpha} \int d\mathbf{r} B_\alpha \frac{C_\alpha + \cos 4\theta}{r^\alpha} x^{2u} y^{2v} \quad (4.37)$$

et donc en intégrant :

$$\begin{aligned} K_{u,v}^{\text{LR}} &= \left(\frac{L}{a}\right)^{2(1+u+v)-\alpha} \int_{-\pi}^{\pi} d\theta B_\alpha (C_\alpha + \cos 4\theta) \cos^2 \theta \sin^2 \theta \int_{a/L}^1 dr r^{1-\alpha+2(u+v)} \\ &= \left(\frac{L}{a}\right)^{2(1+u+v)-\alpha} \frac{\pi}{8} B_\alpha (2C_\alpha - 1) \int_{a/L}^1 dr r^{1-\alpha+2(u+v)} \\ &\sim \left[\left(\frac{L}{a}\right)^{2(1+u+v)-\alpha} - 1\right] \end{aligned} \quad (4.38)$$

Finalement, en ajoutant le facteur $(a/L)^{2(u+v)}$ initialement présent dans l'équation 4.27, chaque terme du développement de l'activité en (u, v) se comporte comme $\left(\frac{a}{L}\right)^{\alpha-2} - \left(\frac{a}{L}\right)^{2(u+v)}$.

Pour $\alpha \geq 6$, l'évolution temporelle de la contrainte est donc dominée par le terme $(u=1, v=1)$ qui évolue comme $\left(\frac{a}{L}\right)^4$. Nous arrivons donc à une description équivalente à celle du modèle Picard-CP :

$$\partial_{t'}\sigma(x, y) = \tilde{K}\partial_x^2\partial_y^2A(x, y). \quad (4.39)$$

Par contre pour $\alpha < 6$, tous les termes de la somme se comportent comme $\left(\frac{a}{L}\right)^{\alpha-2}$. Aucun ordre dominant du développement ne se détache et l'on doit donc considérer la somme dans son ensemble. L'évolution temporelle de la contrainte à grande échelle doit donc faire intervenir la convolution complète dans la limite continue.

Comparaison avec la transition de dépiégeage

Pour comprendre l'influence des modes zéros sur cette description, nous pouvons mener la même étude sur un propagateur de type dépiégeage à longue portée, i.e. isotrope, sans modes zéros. Sans ces derniers, la description comme interaction de courte portée est celle du modèle FES $^\pm$ présentée équation 4.31. La somme de l'équation 4.35 est alors dominée par un terme de courte portée se comportant comme $\left(\frac{a}{L}\right)^2$ pour $\alpha > 4$ cette fois. Dans ce cas, la description adéquate est celle de CDP.

Pour le cas $\alpha < 4$, la convolution complète doit être considérée car aucun terme du développement ne domine le comportement d'échelle. Dans ce cas, l'évolution temporelle de la contrainte se comporte alors comme $\left(\frac{a}{L}\right)^{\alpha-2}$, exactement de la même manière qu'avec la présence de modes zéros.

Raisonnement simple dans l'espace réciproque

Ces résultats peuvent être tout aussi bien déduits d'une analyse d'échelle simple dans l'espace réciproque. Dans le cas de la transition vers l'écoulement, nous avons montré que le terme d'interaction de courte portée avait la forme donnée par l'équation 4.39. Dans l'espace réciproque il est donc représenté par un terme en $\sim q^4$. L'interaction à longue portée, elle, se comporte comme $\frac{q_x^2 q_y^2}{q^{6-\alpha}}$, soit en $\sim q^{\alpha-2}$. Ainsi, selon le raisonnement déjà présenté dans le cadre LR-CDP au chapitre 2, nous nous attendons à ce que le terme de longue portée domine pour $\alpha < 6$ et que le terme de courte portée domine pour $\alpha > 6$.



Dans le cadre de la transition de dépiégeage, l'interaction de courte portée se comporte comme $\sim q^2$ dans l'espace réciproque alors que l'interaction de longue portée, représentée par l'opérateur fractionnaire $-|\nabla|^{\alpha-D}$ se comporte comme $q^{\alpha-2}$. Dans ce cas, nous nous attendons à ce que le terme de longue portée domine pour $\alpha < 4$ et que le terme de courte portée domine pour $\alpha > 4$.

Ainsi, la présence de modes 0 dans les interactions ouvre une zone d'influence des interactions à longue portée située en $\alpha = 6$ et $\alpha = 4$.

4.3.3.5 Paysage global

Ces comportements d'échelle suggèrent donc un paysage en trois régions distinctes :

- Une première région pour $\alpha > 6$ dont la criticalité est dominée par les interactions à courte portée. La classe supposée décrire ce comportement est alors CDP-0, représentée par le modèle Picard-CP.
- Une seconde région $4 < \alpha < 6$ où les interactions à longue portée démarrent leur influence sur le comportement critique. Cette région est spécifique à la présence de modes zéros. Nous la nommons LP-0.
- Une troisième région $\alpha < 4$ où la portée de l'interaction maintient son influence sur le comportement critique mais dont la spécificité ne tient plus aux modes zéros. L'analyse d'échelle ne permet en effet pas de la différencier de la région homologue associée au dépiégeage à longue portée.

Ce court raisonnement analytique nous permet donc de confirmer la tendance observée numériquement pour l'identification de la région LP-0, où le comportement critique dépend a priori uniquement légèrement de la portée. Toutefois, celui-ci ne permet pas de faire la différence entre une interaction de type dépiégeage et les interactions avec modes zéros du modèle α -Picard pour $\alpha < 4$. À la place, nous pensons que cette différenciation que l'on remarque effectivement sur l'évolution de l'exposant β , plus spécifiquement pour $\alpha = 3$, est principalement due à la présence d'un bruit mécanique dans le cas de la transition vers l'écoulement. Nous nommons cette zone LP.

Dans le cas du dépiégeage, la zone de longue portée (nommée Dep-LP sur la [figure 4.15](#)) où les exposants dépendent continûment de α est située entre $\alpha = 4$ et $\alpha = 3$. Ce comportement entre dans le cadre de référence LR-CDP. Pour $\alpha < 3$, le comportement critique devient celui du champ moyen avec $\beta = 1$.

Pour la transition vers l'écoulement, la zone $3 < \alpha < 4$ montre une évolution similaire en fonction de α avec β allant de $\beta \approx 0.68$ à $\beta \approx 0.95$. Pour être conclusif quant à l'équivalence avec le dépiégeage dans cette région, il faudrait étendre notre étude à des portées intermédiaires. Pour $\alpha < 3$ cependant, le comportement critique ne semble pas avoir atteint celui du champ moyen puisque β continue d'augmenter jusqu'à $\alpha = 1$, pour lequel on mesure $\beta \approx 2$. Par ailleurs, le modèle de Hébraud-Lequeux, [présenté](#) pour représenter les modèles élastoplastiques en champ moyen, montre une criticalité de type $\beta = 2$. Par analogie avec les comportements de longue portée canoniques, nous suggérons alors que pour $\alpha < 1$, le système admet un comportement champ moyen (nommé CM sur la [figure 4.15](#)). Cette conjecture pour la limite de champ moyen est partagée par l'étude de Lin et. al [67] dont nous discuterons au chapitre suivant.

In fine, les éléments que nous apportons suggèrent de placer la criticalité des modèles α -Picard sur un paysage décrit à la [figure 4.15](#). La transition vers l'écoulement, représentée

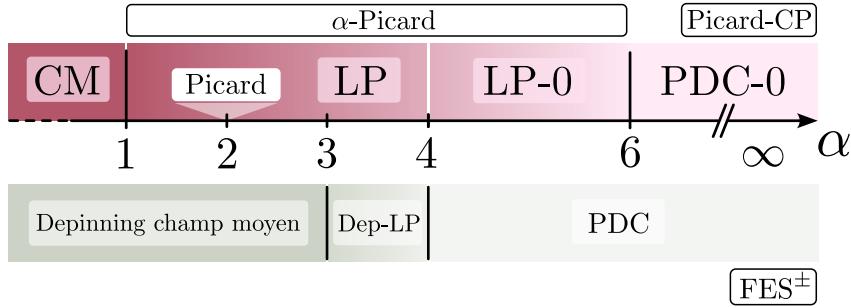


FIGURE 4.15 – Axe supérieur : classification du comportement à grande échelle des modèles d’écoulement en fonction de l’exposant de portée α . Axe inférieur : représentation équivalente pour les modèles de dépiégeage [127].

par le modèle de Picard, se situe donc dans une région de longue portée où le comportement critique dépend encore continûment de l’exposant α . Cette localisation dans une image globale nous permet de mettre en évidence des ingrédients qui jouent un rôle clé dans le phénomène, notamment la présence de modes zéro. Enfin, la comparaison avec le dépiégeage dont on rapproche souvent cette transition, montre des évolutions profondément différentes. En effet, la zone de longue portée dans le cas de la transition vers l’écoulement est bien plus large ($1 < \alpha < 6$) que dans le cas du dépiégeage ($3 < \alpha < 4$) et la description équivalente à courte portée semble être issue d’une classe d’universalité différente. Si un point ressemblant au champ moyen du dépiégeage semble pouvoir être atteint autour de $\alpha \approx 3$, le mécanisme de bruit interne dans la transition vers l’écoulement semble permettre de le dépasser pour faire apparaître un autre champ moyen de type Hébraud-Lequeux.

Il est alors intéressant de voir si les autres propriétés critiques du système suivent cette même évolution caractéristique.

4.3.4 Influence de la portée sur les corrélations de contrainte dans l’état stationnaire

Si notre étude statique s’est essentiellement concentrée sur des propriétés très globales du système, nous proposons dans cette partie de nous intéresser à une observable plus structurelle. Plus particulièrement, une propriété intéressante des systèmes appartenant à la classe CDP est celle d’hyperuniformité, définie au chapitre 1.

4.3.4.1 Hyperuniformité dans les modèles élastoplastiques

Dans les modèles de particules appartenant à la classe CDP, l’hyperuniformité se traduit par une évanescence du facteur de structure $S(\mathbf{q})$ à petits nombres d’onde :

$$S(\mathbf{q}) \sim q^{\alpha_{HU}}, \quad 0 < \alpha_{HU} < 1 \quad (4.40)$$

Dans une théorie continue, le facteur de structure est défini via la transformée de Fourier $\hat{\rho}(\mathbf{q})$ de la densité particulaire $\rho(\mathbf{r})$ selon :

$$S(\mathbf{q}) \propto \langle \hat{\rho}(\mathbf{q})\hat{\rho}(-\mathbf{q}) \rangle \quad (4.41)$$

$\langle \cdot \rangle$ désignant une moyenne sur les réalisations du système.

Dans le cadre de la transition vers l'écoulement via l'approche élastoplastique, la notion de particules est absente. Il n'est donc pas évident de voir comment cette propriété pourrait se reporter dans ce cas. Une première approche naïve correspond alors à l'analogie opérée lors de l'établissement des équations continues [sous-sous-section 4.3.2.3](#). Dans les modèles élastoplastiques, le champ conservé est le champ de contrainte. Dans les modèles de particules, le champ conservé est la densité de particules. Dans les modèles élastoplastiques, l'activité induit une redistribution de la contrainte : le site actif relaxe sa contrainte et, en moyenne, en ajoute aux autres sites. Dans les modèles de particules, l'activité induit une redistribution de la masse : un site actif perd des particules qui viennent s'ajouter aux autres sites.

Il est alors naturel de penser que la contrainte σ dans le cas des modèles élastoplastiques joue le même rôle que la densité ρ dans les modèles de particules. Dans ce cas, nous pouvons supposer que pour un modèle élastoplastique tombant dans la classe CDP comme le modèle FES $^\pm$, nous obtiendrions :

$$S_\sigma(\mathbf{q}) \equiv \langle \hat{\sigma}(\mathbf{q})\hat{\sigma}(-\mathbf{q}) \rangle \sim q^{\alpha_{\text{HU}}^{\text{CDP}}} \quad (4.42)$$

$S_\sigma(\mathbf{q})$ n'étant alors rien d'autre que la transformée de Fourier de la fonction de corrélation connectée de contrainte :

$$C_{\sigma\sigma}(\mathbf{r}) = \langle \sigma(\mathbf{r}')\sigma(\mathbf{r}' - \mathbf{r}) \rangle_c \quad (4.43)$$

qui est un objet d'étude bien plus étudié par la communauté des fluides à seuil [128–130].

On peut alors se demander si ce comportement évanescant de $S_\sigma(\mathbf{q})$ à petits nombres d'onde se retrouve aussi dans les modèles élastoplastiques étudiés précédemment.

4.3.4.2 Approche par le dépiégeage

En fait, une approche plus rigoureuse permet de pressentir une forme d'hyperuniformité sur la contrainte. Celle-ci se base sur la ressemblance entre les modèles de type dépiégeage et les modèles élastoplastiques. Dans le cas du dépiégeage, il n'y a pas non plus de quantité physiquement évidente pour laquelle on pourrait supposer une propriété d'hyperuniformité. Toutefois, comme nous l'avons mentionné au ??, celle-ci est en lien direct avec les propriétés de rugosité de l'interface.

En fournissant une compréhension plus simple de l'équivalence entre les deux phénomènes critiques, K. Wiese [43] a en effet pu faire un parallèle direct entre la densité ρ dans les modèles de particules et la position de l'interface u dans les modèles de dépiégeage, qui est :

$$\rho(\mathbf{r}, t) \sim \Delta u(\mathbf{r}, t) + \rho_0 \quad (4.44)$$

dans le cas de courte portée, avec ρ_0 la densité moyenne de particules. Le terme $\Delta u(\mathbf{r}, t)$ ne représente alors rien d'autre que l'interaction élastique entre les différents points du système. Ainsi, l'équivalent du déplacement dans nos simulations élastoplastiques étant la déformation plastique $\epsilon_{pl}(\mathbf{r}, t)$, la quantité équivalente à ρ dans ce cas serait :

$$\rho(\mathbf{r}, t) \sim (\mathcal{G} * \epsilon_{pl})(\mathbf{r}, t) + \rho_0 \quad (4.45)$$

Donc d'après l'[équation 4.8](#) de la dynamique intégrée on aurait :

$$\rho(\mathbf{r}, t) - \rho_0 \sim \sigma(\mathbf{r}, t) - \Sigma \quad (4.46)$$

ce qui confirme l'intuition initiale.

De cette équivalence, le travail [\[43\]](#) parvient à relier l'exposant d'hyperuniformité α_{HU} du modèle Manna à l'exposant de rugosité η du dépiégeage avec la relation d'échelle :

$$\alpha_{HU} = 4 - D - 2\eta \quad (4.47)$$

que l'on peut généraliser dans notre cas pour une portée arbitraire α du propagateur :

$$\alpha_{HU} = 2\alpha - 3D - 2\eta \quad (4.48)$$

Le cas des modèles élastoplastiques est alors très intéressant puisque ceux-ci constituent des modèles dans lequel les deux exposants à la fois ont un sens physique intéressant. L'exposant α_{HU} qualifie la répartition de la contrainte et l'exposant η la répartition des zones de plasticité accumulée au cours du temps. ([Remarque : reformuler ?](#))

4.3.4.3 Résultats numériques

Méthode

Afin de sonder les propriétés de répartition de contrainte dans les modèles étudiés, nous nous plaçons, pour chaque modèle, dans un état stationnaire du système proche du point critique ($\delta\Sigma \ll 1$). La fonction $S_\sigma(\mathbf{q})$ est alors calculée en tout point de l'espace réciproque en prenant la transformée de Fourier du champ de contrainte discret $\{\sigma_i\}$ après lui avoir soustrait sa valeur moyenne Σ .

Afin d'obtenir une estimation propre de ce pseudo-facteur de structure et ce sur une large gamme de \mathbf{q} , il est nécessaire de ne pas limiter le calcul à une unique configuration. Pour ce faire, nous réalisons pour une même mesure une centaine de simulations issues de conditions initiales différentes. La mesure finale est alors la moyenne de chaque mesure individuelle. Afin de sonder des valeurs de \mathbf{q} suffisamment petites, nous choisissons de nous placer à une taille de système suffisamment grande, ici $L = 1024$.

Confirmation de l'analogie via le modèle FES $^\pm$

Nous appliquons tout d'abord cette méthode de mesure au cas du modèle FES $^\pm$, duquel on attend une criticalité de type CDP, et donc celle du dépiégeage. Pour ce faire, nous nous plaçons à une distance $\delta\Sigma = 1.5 \times 10^{-4}$ du point critique. Celle-ci constitue la plus petite distance permettant d'atteindre l'état stationnaire en une itération de simulation.

Les résultats obtenus sont alors présentés à la figure 4.16-(a). La carte des valeurs du pseudo-facteur de structure indique bien une diminution à petits nombres d'onde. Sa structure est par ailleurs légèrement anisotrope, ceci étant probablement dû aux conditions périodiques appliquées³. Afin de quantifier plus précisément cette propriété, nous regardons l'évolution de $S_\sigma(\mathbf{q})$ sur la ligne $q_x = 0$. L'évolution obtenue est alors représentée sur la figure 4.16-(b).

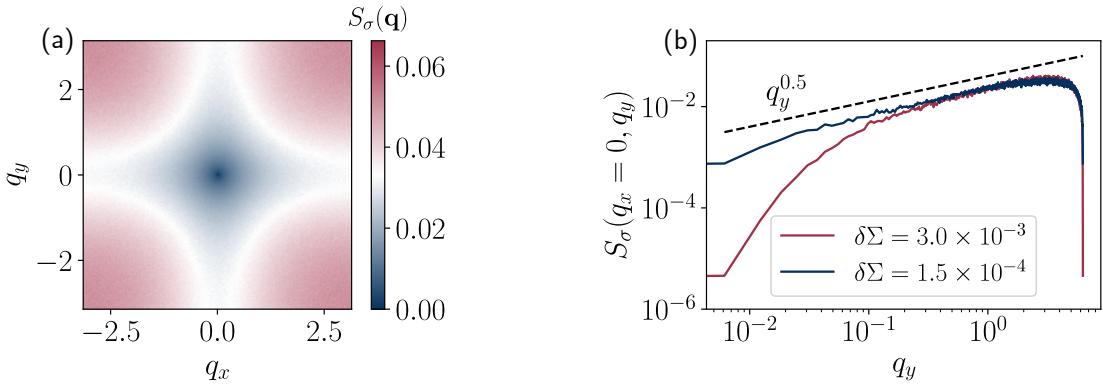


FIGURE 4.16 – Évolution du pseudo-facteur de structure dans le modèle FES^\pm . (a) carte de valeurs du pseudo-facteur de structure $S_\sigma(\mathbf{q})$ dans l'espace réciproque discret. (b) Évolution du pseudo-facteur de structure le long de la ligne $q_x = 0$.

Nous observons alors effectivement une évanescence en loi de puissance à petits q_y , qui semble parfaitement compatible avec l'exposant d'hyperuniformité associé à la classe CDP, $\alpha_{\text{HU}}^{\text{CDP}} = 0.5$. En effectuant la même mesure légèrement plus loin du point critique pour $\delta\Sigma = 3.0 \times 10^{-3}$, un comportement similaire est observé, seulement sur une plage plus restreinte de nombres d'onde. Cela suggère donc qu'au point critique on a bien $S_\sigma(\mathbf{q}) \sim q^{0.5}$ pour tout $q \ll 1$, confirmant ainsi les parallèles entre densité et contrainte présentés précédemment.

Nous pouvons par ailleurs mesurer les corrélations de déplacement dans le matériau afin d'évaluer la rugosité de l'interface. En effet, si l'on note de la même manière $S_{\epsilon_{\text{pl}}}(\mathbf{q})$ le spectre du déplacement plastique on a alors :

$$S_{\epsilon_{\text{pl}}}(\mathbf{q}) \sim q^{-D-2\eta} \quad (4.49)$$

par définition de l'exposant de rugosité. En appliquant la même méthode que précédemment, nous obtenons les résultats présentés à la figure 4.17. Nous mesurons alors $D + 2\eta \approx 3.5$ soit $\eta \approx 0.75$, qui est bien la valeur attendue dans le cas du dépiégeage à courte portée en deux dimensions [131]. Ces mesures de structure semblent donc confirmer l'appartenance du modèle FES^\pm à la classe CDP. Notons par ailleurs que ces mesures d'hyperuniformité sont bien plus évidentes que dans le cas des modèles de particules, dans

3. Il est à noter que cette représentation est linéaire en q . Dans la zone de petits q qui nous intéresse, la fonction est globalement isotrope

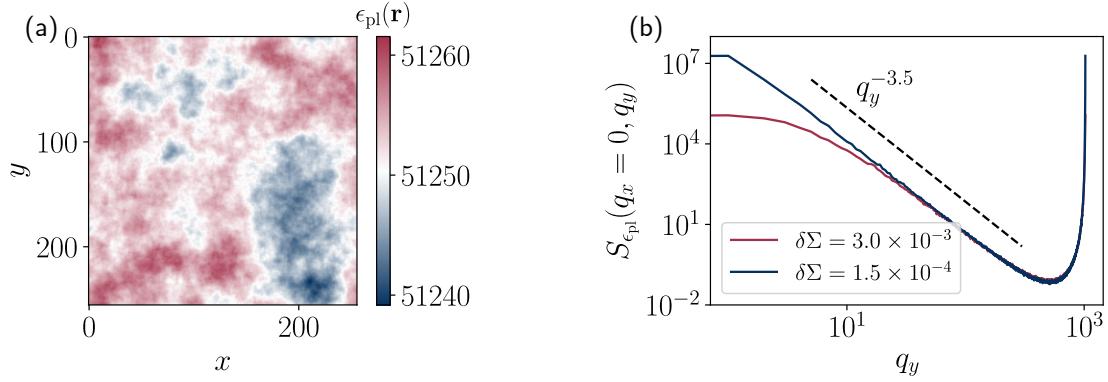


FIGURE 4.17 – (a) Répartition spatiale du déplacement plastique $\epsilon_{\text{pl}}(\mathbf{r})$ dans le modèle FES $^\pm$ pour une simulations avec $\delta\Sigma = 1.5 \times 10^{-4}$. (b) Évolution du spectre du déplacement plastique $S_{\epsilon_{\text{pl}}}(\mathbf{q})$ le long de la ligne $q_x = 0$.

le sens où nous observons ici des lois de puissance claires. Ceci peut potentiellement s'expliquer par le fait d'une redistribution continue et non discrète dans le cas des modèles élastoplastiques.

Hyperuniformité dans le modèle α -Picard

Pour comprendre comment cette propriété d'hyperuniformité se compare dans le cas des modèles d'écoulement, nous effectuons la même analyse sur les généralisations du modèle de Picard. Dans le cas du modèle Picard-CP, les résultats obtenus sont présentés à la figure 4.18.

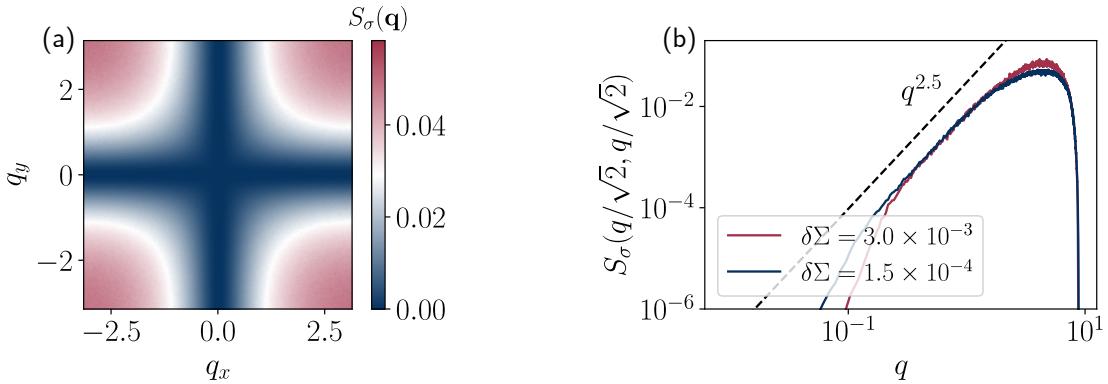


FIGURE 4.18 – Évolution du pseudo-facteur de structure dans le modèle Picard-CP. (a) carte de valeurs du pseudo-facteur de structure dans l'espace réciproque discret. (b) Évolution du pseudo-facteur de structure le long de la diagonale ($q_x = \frac{q}{\sqrt{2}}$, $q_y = \frac{q}{\sqrt{2}}$).

La carte de valeurs de $S_\sigma(\mathbf{q})$ montre alors une anisotropie frappante dont les axes de symétrie sont ceux associés aux modes zéros ($q_x = 0$ et $q_y = 0$). Le pseudo-facteur de

structure prend alors des valeurs proches de 0 sur ces axes. Cette propriété d'anisotropie découle en fait trivialement de l'équation 4.8 car dans l'espace de Fourier le champ de contrainte est une multiplication du propagateur et du champ de déplacement. Il semble donc compliqué de réduire cette analyse à un problème monodimensionnel, i.e. en regardant l'évolution de $S_\sigma(\mathbf{q})$ sur une ligne, puisque chaque choix de direction produira vraisemblablement une évolution différente.

Afin de pouvoir pousser l'analyse tout de même plus loin, nous choisissons de nous intéresser à la direction définie par la bissectrice de ces axes et donc de considérer la diagonale ($q_x = q/\sqrt{2}, q_y = q/\sqrt{2}$). L'évolution le long de cette ligne est représentée figure 4.18-(b). Nous observons alors toujours une évanescence de $S_\sigma(\mathbf{q})$ mais cette fois-ci bien plus abrupte avec $\alpha_{HU} \approx 2.5$. Cette mesure constitue alors un nouvel indice rejoignant la ligne qui suggère de séparer les comportements critiques du modèle Picard-CP et de la classe CDP.

Si l'hyperuniformité semble être fortement affectée par les modes zéros à courte portée, il nous semble intéressant d'observer comment la longue portée, elle, joue un rôle dans cette structure de contraintes. Notamment, si dans le cas classique ces corrélations suivent toujours une loi d'échelle évanescante. Nous réalisons donc ces mêmes mesures pour les modèles α -Picard avec $\alpha \geq 2$. Le pseudo-facteur de structure montre alors une symétrie similaire à celle du modèle Picard-CP, symétrie héritée à nouveau de celle du propagateur. Nous représentons les évolutions du pseudo-facteur de structure sur la ligne diagonale pour les différentes portées α sur la figure 4.19. Les valeurs estimées des exposants sont alors reportées dans le tableau 4.2.

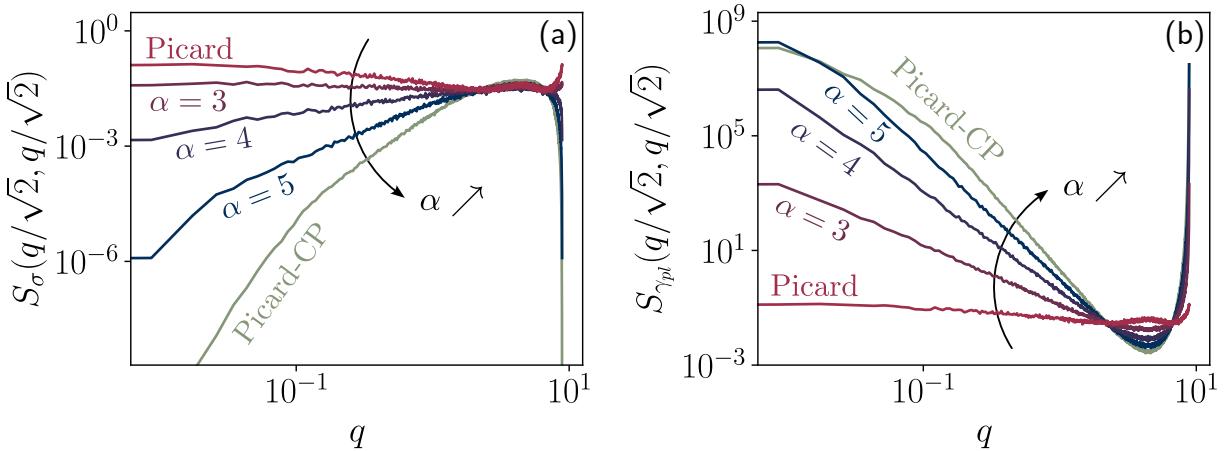


FIGURE 4.19 – Évolution des spectres $S_\sigma(\mathbf{q})$ (a) et $S_{\gamma_{pl}}(\mathbf{q})$ (b) pour les généralisations du modèle de Picard le long de la diagonale ($q_x = \frac{q}{\sqrt{2}}, q_y = \frac{q}{\sqrt{2}}$).

Nous remarquons alors une évolution a priori continue de l'hyperuniformité de contrainte, avec un caractère évanescant de $S_\sigma(\mathbf{q})$ perdu autour du point $\alpha = 3$. Pour le cas classique du modèle de Picard, il semble donc que la contrainte ne présente pas d'hyperuniformité.

α	α_{HU}	η
FES $^\pm$	0.5	0.75
Picard-CP	2.5	1.75
5	1.5	1.25
4	0.5	0.75
3	0	0
2 (Picard)	0	-1

TABLE 4.2 – Exposants d’hyperuniformité déterminés dans les modèles α -Picard, Picard-CP et FES $^\pm$.

Si l’on regarde en parallèle l’évolution de $S_{\epsilon_{pl}}(\mathbf{q})$, nous observons la tendance inverse. L’exposant de rugosité apparent augmente à mesure que la portée de redistribution diminue. Il passe de $\eta \approx -1$ pour le modèle de Picard⁴ à $\eta \approx 1.75$ pour le modèle Picard-CP. L’interface perd donc sa rugosité dans le cas classique. Il est par ailleurs intéressant de noter que les modèles Picard-CP et le modèle 5-Picard sont décrits par des exposants différents, et différents du modèle FES $^\pm$, suggérant bien une différence marquée par la présence des modes zéros pour $\alpha > 4$. De plus pour $\alpha = 4$, nous obtenons les exposants de la classe CDP, suggérant le début d’une zone similaire entre les modèles type dépiégeage et type transition vers l’écoulement (nommée LP dans la section précédente).

Cette évolution conjointe de α_{HU} et η est bien compatible avec la relation équation 4.48, qui n’est autre qu’une traduction de la règle d’évolution de la contrainte. Plus la répartition de contrainte est hyperuniforme, plus l’interface est rugueuse.

Cette analyse structurelle permet donc d’appuyer le paysage présenté à la section précédente, notamment en confortant une différence entre la classe CDP et la classe CDP-0. Qui plus est, elle permet de clarifier la notion d’hyperuniformité dans les modèles élastoplastiques et son lien direct avec la rugosité de l’interface, représentée ici par la répartition spatiale de plasticité accumulée. Si le comportement champ moyen du dépiégeage est retrouvé autour du point $\alpha \approx 3$, celui-ci est encore une fois dépassé pour des plus grandes portées. Nous rappelons que ce point était aussi celui autour duquel la convexité de la transition et le comportement des fluctuations s’inversaient.

4.4 Caractérisation dynamique et avalanches

Une dernière façon de caractériser la transition vers l’écoulement est du point de vue dynamique. C’est-à-dire en analysant les avalanches qui la composent. Dans le cas de la transition vers l’écoulement, ces avalanches ont été l’objet d’études exhaustives, aussi bien expérimentalement que numériquement [64, 132–136].

4. La valeur négative trouvée ici est simplement extraite de l’étude du spectre. Son interprétation physique en tant qu’exposant de rugosité est peut-être discutable.

4.4.1 Avalanches de plasticité

Dans les systèmes de particules étudiés lors des chapitres précédents, les avalanches correspondent à des événements corrélés d'activité proches du point critique, et donc sans échelle. Dans le cas de la transition vers l'écoulement, les avalanches correspondent de manière tout à fait analogue à des événements d'activité proches du point critique, l'activité étant ici assimilée à la plasticité.

4.4.1.1 Phénoménologie

Dynamique à l'approche du point critique

Reprenons ici le système modèle étudié jusqu'à présent d'un matériau soumis à un cisaillement simple. Dans le cas où le taux de cisaillement $\dot{\gamma}$ est imposé, après une période transitoire, la contrainte Σ portée par le matériau fluctue autour de sa valeur moyenne. Pour des forçages relativement grands, cette évolution autour de la valeur moyenne se fait de manière continue (voir [figure 4.20-\(a1\)](#)). Mais à mesure que $\dot{\gamma}$ tend vers 0, la dynamique du système devient intermittente [10] : la contrainte portée par le système alterne des phases d'augmentation constante et de décroissance brutale. L'évolution de Σ au cours du temps prend alors la forme décrite à la [figure 4.20-\(a2\)](#), analogue à des dents de scie. Ces sauts brutaux dans la contrainte globale portée par le système correspondent aux avalanches de plasticité dans le matériau. En effet, à mesure que $\dot{\gamma} \rightarrow 0$, le système s'approche naturellement de son point critique, donnant lieu à des événements de plasticité de plus en plus corrélés, et sans échelle caractéristique.

Observables d'intérêt

De la même manière que dans le cas des systèmes de particules, on peut caractériser ces événements dynamiques par leur taille S et leur durée T . Dans le cas des avalanches de plasticité, on définit communément la taille S d'une avalanche via la chute de contrainte $\Delta\Sigma$ associée selon :

$$S = \Delta\Sigma \times L^D \quad (4.50)$$

avec L^D le volume du système afin de rendre cette quantité extensive. D'autre part, la durée d'une avalanche correspond simplement à la durée sur laquelle a lieu cette chute brutale de contrainte.

Ces deux quantités S et T suivent alors des distributions de probabilité en loi de puissance :

$$P(S) \sim S^{-\tau} f\left(\frac{S}{S_c}\right), \quad P(T) \sim T^{-\tau'} f\left(\frac{T}{T_c}\right) \quad (4.51)$$

avec τ et τ' les exposants d'avalanche, f et g des fonctions à décroissance rapide, et S_c et T_c les cut-offs de taille et de durée du système, de la même manière que dans le cas du dépiégeage présenté au [chapitre 1](#). Tracées sur une échelle logarithmique, ces distributions prennent alors la forme donnée à la [figure 4.20-\(b\)-\(c\)](#).

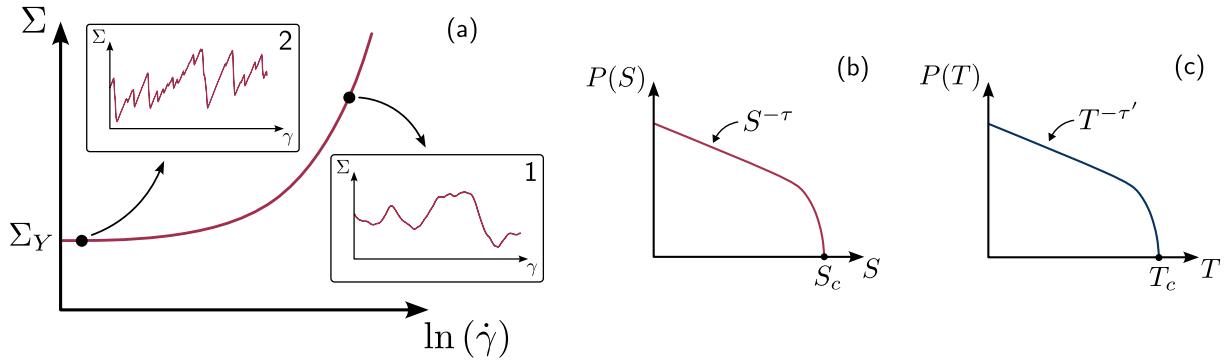


FIGURE 4.20 – Phénoménologie des avalanches de plasticité dans l’écoulement des fluides à seuil. (a) Évolution de la contrainte avec la déformation globale à différentes distances du point critique. (b)-(c) Formes schématiques des distribution de probabilité de tailles et de durées d’avalanche.

4.4.1.2 L’approche quasistatique comme cadre de référence

Afin d’observer les avalanches de la manière la mieux définie possible, il faut se placer au plus proche du point critique, i.e. $\dot{\gamma} = 0$. Une méthode alors naturelle est d’utiliser un protocole quasistatique. La méthode quasistatique revient à utiliser un forçage dont l’échelle caractéristique de temps est très grande devant tout autre temps caractéristique (durée des avalanches, temps de réarrangement, ...). Elle permet alors une séparation d’échelle entre le phénomène de forçage (cisaillement) et de relaxation (avalanches). En pratique, partant d’un état initial élastique en tout point, le système est forcé infinitement lentement jusqu’à ce que le premier réarrangement plastique ait lieu. Le forçage est alors suspendu et on laisse le système relaxer par une suite de réarrangements plastiques : ce sont les avalanches. L’avalanche se poursuit alors jusqu’à ce que le système retourne à un état élastique en tout point, et l’on opère un nouveau forçage jusqu’au déclenchement de la prochaine avalanche. L’évolution de la contrainte portée par le système en fonction de sa déformation prend alors la forme définie sur la figure 4.21.

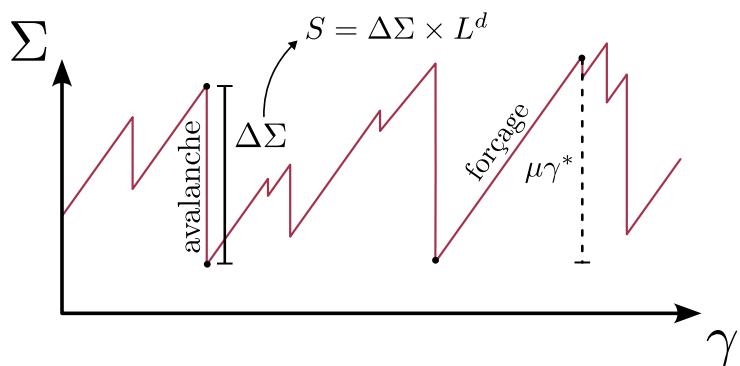


FIGURE 4.21 – Évolution schématique de la contrainte avec la déformation globale dans un protocole quasistatique.

Étant dans ce cas à la valeur critique du paramètre $\dot{\gamma} = 0^+$, les cut-offs sur la distribution des tailles et des durées d’avalanche dépendent uniquement de la taille L du système étudié

selon :

$$S_c \sim L^{d_f}, \quad T_c \sim L^z \quad (4.52)$$

avec d_f la dimension fractale et z l'exposant dynamique. Plus d_f est grand, plus les avalanches sont compactes.

En pratique, ce protocole quasistatique n'est pas rigoureusement applicable en laboratoire. Le compromis à faire est alors de trouver un forçage γ suffisamment faible pour opérer la séparation d'échelle tout en le gardant suffisamment grand pour limiter la durée totale de l'expérience. Dans certaines approches théoriques ou numériques, il est cependant possible de réduire le temps nécessaire aux phases de forçage lent, rendant ainsi ce protocole idéal pour la mesure des avalanches (voir la section suivante).

4.4.1.3 Résultats dans les différents cadre d'étude

D'un point de vue analytique, comme nous l'avons mentionné à la [sous-sous-section 4.1.3.1](#), la non-positivité du propagateur de redistribution d'Eshelby rend la résolution théorique du problème difficile. Une approche de théorie des champs ne permet donc pas de décrire les avalanches de plasticité dans le cadre de la transition vers l'écoulement. Toutefois, la phénoménologie de ces avalanches étant parfaitement similaire à celle observée dans le cas du dépiégeage, il est usuel d'utiliser les prédictions associées à ce deuxième phénomène comme base de comparaison.

Dans le cas du dépiégeage, les méthodes du groupe de renormalisation sont capables de prédire l'existence d'avalanches et les distributions de probabilité associées [34]. Notamment, ces méthodes permettent la prédiction des valeurs des exposants critiques comme τ . Dans la limite de champ moyen, la théorie prédit un exposant pour les tailles d'avalanches $\tau = 3/2$ [38].

Du côté expérimental, les avalanches de plasticité ont été mesurées dans de nombreux systèmes, à de nombreuses échelles et sous différentes conditions. Ces réalisations cherchent alors à rapprocher ou différencier ces avalanches de celles du dépiégeage et notamment des prédictions de champ moyen. Elles ont par exemple été mesurées dans des mousses cisaillées dans [133], donnant un exposant $\tau \approx 0.8$, dans des verres métalliques dans [132] donnant cette fois $\tau \approx 1.4 - 1.5$ ou encore dans un milieu granulaire dans [137] amenant comme dans le second cas à un comportement compatible avec l'attendu de champ moyen. Dans la plupart des cas, les expériences donnent lieu à des distributions d'avalanches s'étendant sur très peu de décades. Par ailleurs, cette grande variabilité des propriétés statistiques mesurées vient probablement de la précision nécessaire à ces mesures et de la difficulté d'étudier un système parfaitement contrôlé [9]. Afin de qualifier l'universalité de ces avalanches il est alors plus simple de passer par une approche numérique.

Via les approches de type dynamique moléculaire notamment, il est facilement possible de mettre en oeuvre un protocole de cisaillement quasistatique. Par exemple, dans [138], les auteures ont cisaillé des verres métalliques CuZrAl et CuZr préparés de différentes

manières. Sous forçage quasistatique, les tailles d'avalanches suivent une loi de puissance avec $\tau \approx 1.16$. Dans [134], les auteurs ont étudié les avalanches sous cisaillement quasistatique d'un autre verre, et ce pour différents régimes inertiels. En deux ou trois dimensions, l'étude révèle un exposant $\tau \approx 1.2 - 1.3$ et donc diffère aussi du cadre champ moyen. Néanmoins, dans le travail [135], les auteurices ont souligné l'importance d'une analyse attentive des distributions d'avalanches. En effet, ces dernières pouvant présenter des bosses au niveau de leur cut-off, la mesure de l'exposant τ peut s'en trouver grandement affectée si celles-ci sont ignorées. Par une analyse attentive, les auteurices ont alors déduit de leurs résultats une compatibilité avec $\tau = 3/2$. Le problème est que ces simulations font intervenir de très nombreux degrés de liberté et sont donc très coûteuses numériquement. Elles ne permettent donc pas de simuler des systèmes de grande taille L et d'obtenir des distributions précises sur de larges gammes de tailles S . Pour dépasser ces limites, les modèles mésoscopiques comme les modèles élastoplastiques sont donc des outils de choix.

Modèles élastoplastiques

Par les simplifications adoptées, l'étude des avalanches dans les modèles élastoplastiques se révèle très efficace. Ainsi, il est tout à fait envisageable d'étudier ces phénomènes dans des systèmes de grande taille. De plus, il est possible dans ce cas d'implémenter exactement le protocole quasistatique de manière astucieuse. En effet, la distance au seuil microscopique local σ_Y étant connue à chaque instant et pour chaque site, il est possible de contourner la phase de forçage infiniment lente par l'ajout direct d'un chargement élastique $\mu\gamma^*$ uniforme sur tous les sites, de telle manière que le site le plus proche de sa contrainte seuil devienne plastique :

$$\mu\gamma^* = \min(\sigma_{Y,i} - \sigma_i) \quad (4.53)$$

Il est ainsi possible de passer de la fin d'une avalanche au début de la suivante en un unique pas de temps [52]. Cette implémentation, résumée à la figure 4.21 et que nous appellerons AQS pour *athermal quasistatic*, permet de produire des statistiques riches pour les observables S et T dans les différents modèles élastoplastiques.

En utilisant une dynamique extrême proche de l'AQS, Talamali et. al [136] ont alors mesuré des avalanches distribuées selon $\tau \approx 1.25$, marquant un désaccord avec la théorie champ moyen. Par la suite, Lin et. al [52], Liu et. al [64] et Ferrero et. al [65] ont déterminé précisément les distributions de tailles dans le cadre de l'AQS pour mesurer respectivement $\tau \approx 1.2$, $\tau \approx 1.28$ et $\tau \approx 1.33$ en 2D. Ces études s'appuyant toutes sur des modèles différents, un consensus scientifique s'est créé autour d'une valeur universelle $\tau \approx 1.25 - 1.35$, marquant une différence avec les avalanches de la transition de dépiégeage en champ moyen. Ce consensus se renforce alors par l'extension des mesures à de nouveaux protocoles de déformation [52, 119]. Dans [119] notamment, les avalanches obtenues sous un grand nombre de déformations différentes donnent toutes $\tau \approx 1.28$.

Par ailleurs, avec ce protocole d'AQS et les protocoles apparentés, la dimension fractale d_f associée aux avalanches prend elle aussi une valeur avec de faibles variations, autour de $d_f \approx 1$ [52, 64, 65]. Ce résultat est central, puisqu'il met en évidence des avalanches de

plasticité peu compactes, presque linéaires, à l'image des cartes de plasticité discutées à la figure 4.12 et des bandes de cisaillement observées dans les mêmes systèmes [124]. Ces évènements contrastent alors avec ceux du dépiégeage pour lesquels on mesure une plus grande compacité avec $d_f \geq D$ [34, 139]. En effet, on a dans le cas du dépiégeage un lien direct entre dimension fractale et exposant de rugosité : $d_f = D + \eta$, avec $\eta = 0$ la valeur limite minimale en champ moyen⁵.

Ces résultats semblent assez robustes et placent les avalanches comme un descripteur possible de criticalité et d'universalité. Toutefois, comme nous l'avons relevé précédemment, la qualification d'un comportement critique peut se jouer sur une détermination très précise des exposants. Afin que notre étude soit conclusive il faut donc prêter une grande attention à nos méthodes et leurs implications, notamment si l'on s'éloigne des protocoles de référence.

4.4.2 Avalanches à contrainte imposée

L'analyse que nous faisons de la transition vers l'écoulement se place dans le cadre des transitions de phase absorbantes. Le paramètre de contrôle naturel à fixer est donc la contrainte globale Σ . Afin de préserver notre cadre et de décrire les évènements proches du point critique sous la même dynamique, nous choisissons d'étudier les avalanches dans le système à contrainte imposée. Cela contraste avec la plupart des résultats précédemment exposés puisque l'approche quasistatique se fait naturellement à taux de cisaillement imposé ($\dot{\gamma} \rightarrow 0$).

Cette approche que nous proposons, en plus d'avoir une motivation conceptuelle majeure dans notre cas, peut trouver un intérêt pour la modélisation des systèmes réels. En effet, dans certains cas de dynamique d'avalanche de plasticité, le paramètre imposé adapté est la contrainte plutôt que le taux de cisaillement, et parfois même un possible mélange des deux.

4.4.2.1 Un problème d'états absorbants

Dynamique proche du point critique en taille finie

Pour étudier les avalanches qui composent la dynamique, il est nécessaire de se placer au plus proche du point critique $\Sigma = \Sigma_c$. Comme nous l'avons vu précédemment, lorsque que nous imposons au système une contrainte $\Sigma < \Sigma_c$, il finit par tomber dans un état absorbant où le matériau est élastique en tout point (i.e. tous les sites sont dans l'état $n_i = 0$). Nous appellerons un tel état un état élastique. La dynamique étant piégée dans cet état élastique, il est impossible de sonder statistiquement les évènements constituant l'état stationnaire en-dessous du point critique, et donc les avalanches. Pour un système de taille fini, ce problème s'étend même aux cas $\Sigma \gtrsim \Sigma_c$. En effet, par ses fluctuations, le système peut atteindre un état élastique au cours de la dynamique et donc y rester piégé éternellement (voir l'exemple de simulation sur la figure 4.22-(a)).

5. Dans le cas des avalanches mesurées avec le protocole AQS, cette relation semble toujours vérifiée si l'on se base sur les mesures de l'exposant de rugosité dans le modèle de Picard (voir sous-sous-section 4.3.4.3)

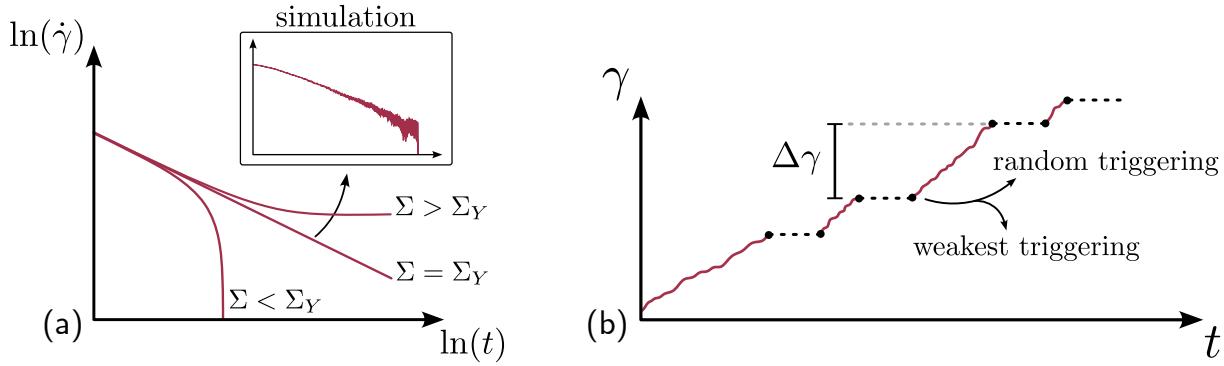


FIGURE 4.22 – Problème posé par l'étude des avalanches à contrainte imposée (a) et résolution par la mise en place de protocoles de réactivation (b).

Redéfinition des avalanches

Afin de pouvoir étudier les événements proches de la transition à contrainte imposée, il est donc nécessaire de réactiver le système à chaque fois qu'il tombe dans un état élastique. Nous définissons alors les avalanches de plasticité comme les événements d'activité ayant lieu entre deux réactivations du système. Cette redéfinition reste proche de celle présentée précédemment puisque dans le cas quasistatique, une avalanche correspond aussi à un événement entre deux états élastiques, seulement générés différemment.

Il faut cependant réadapter la définition de certaines observables associées comme la taille S de ces avalanches. En effet, dans ce cas, la contrainte ne varie pas au cours de l'avalanche et la définition $S = \Delta\Sigma \times L^D$ devient obsolète. Cependant, lors de ces avalanches, la déformation globale du système γ augmente de manière analogue. En notant $\Delta\gamma$ la différence de déformation entre le début et la fin d'une avalanche, nous proposons de caractériser la taille d'une avalanche par $S = \Delta\gamma \times L^D$. Pour éviter toute confusion dans la suite de cette étude, nous noterons S_Σ la taille des avalanches à taux de cisaillement imposé et S_γ celle des avalanches à contrainte imposée.

Un problème majeur cependant est qu'au contraire du cas quasistatique, la réactivation des états élastiques en contrainte imposée n'a pas de forme naturelle. Dans le cas quasistatique, l'état élastique généré après une avalanche est réactivé en effectuant un forçage uniforme sur le système qui augmente sa contrainte globale (quantité $\mu\gamma^*$ sur la figure 4.21). La contrainte devant être conservée pendant la simulation, cette méthode ne peut pas être appliquée ici.

Il existe alors plusieurs méthodes possibles pour réactiver le système tout en conservant sa contrainte globale. La question est donc de savoir si toutes ces méthodes sont équivalentes et laquelle semble la plus adaptée pour mener notre étude dynamique de la transition. Si des protocoles d'avalanches à contrainte imposée ont déjà été mis en oeuvre, notamment dans les travaux cités précédemment [52, 119], l'influence spécifique du protocole a été mise de côté. Cela laisse à penser que tous seraient équivalents, qu'ils soient à contrainte ou déformation imposée. Notre question pratique se révèle donc d'une seconde utilité : éclairer cette zone d'ombre de la littérature.

4.4.2.2 Importance du choix d'un protocole

Dans cette sous-section, nous reprenons les résultats publiés dans [140]. La publication complète est présentée dans la [sous-section 6.4.2](#) mais ne sera pas complètement discutée ici afin de ne se concentrer que sur les informations essentielles pour notre propos.

Protocoles étudiés

Afin de déterminer l'importance du protocole de réactivation dans l'analyse des avalanches à contrainte imposée, nous en étudions deux : le *random triggering protocol*⁶ (RTP) et le *weakest triggering protocol*⁷ (WTP).

Dans le cadre du RTP, le système est soumis à sa contrainte critique $\Sigma = \Sigma_c$ déterminée dans la [sous-sous-section 4.3.1.1](#). À chaque fois que le système tombe dans un état élastique, nous le réactivons en rendant plastique un site au hasard. Ceci se fait alors en agissant directement sur la variable n_i et donc sans modification du champ de contrainte $\{\sigma_i\}$. Nous notons que ce protocole ressemble fortement à un protocole déjà mentionné dans la littérature [52].

Le WTP ressemble alors fortement à ce premier protocole. Simplement, cette fois ce n'est pas un site aléatoire qui est rendu plastique mais nous choisissons spécifiquement le site le plus proche de sa contrainte seuil, i.e. avec la valeur minimale de $\sigma_Y - \sigma_i$. En ce sens, cette réactivation ressemble au protocole AQS. En effet, après un forçage uniforme du système c'est le site le plus proche de son seuil qui devient plastique en premier. De la même façon, un protocole analogue à celui-ci a déjà été décrit dans un précédent travail [52].

Enfin, afin d'avoir un point de comparaison, nous étudions en parallèle le protocole classique de l'AQS. Pour caractériser précisément les avalanches pour chacun de ces protocoles, nous les simulons pour générer dans l'état stationnaire⁸ environ 5×10^5 avalanches dans un système de taille $L = 512$.

Comparaisons statistiques

Les distributions de tailles d'avalanche obtenues pour ces trois protocoles sont présentées à la [figure 4.23](#). Comme on peut le remarquer, les distributions prennent des formes très différentes selon le protocole. Si les résultats pour l'AQS sont retrouvés avec $\tau \approx 1.35$, dans le cadre du RTP l'exposant estimé semble être légèrement plus grand avec $\tau \approx 1.5$. Il montre aussi une forme de cut-off différente, faisant apparaître une bosse aux grandes tailles. Par ailleurs, le WTP présente des avalanches largement distribuées mais pas selon une loi de puissance claire, rendant de ce fait impossible l'estimation de τ . Nous remarquons par ailleurs que les cut-offs dans le cas des protocoles à contrainte imposée sont bien plus grands que celui dans le cas de l'AQS. Cette première analyse montre

6. traduit en français par *protocole par déclenchement aléatoire*

7. traduit en français par *protocole par déclenchement du plus faible*

8. L'état stationnaire est considéré atteint lorsque les propriétés statistiques des avalanches sont elles aussi stationnaires.

donc clairement que les protocoles de génération d'avalanches influent fortement sur les événements générés. Il est donc très important de comparer des approches équivalentes pour conclure sur une comparaison des avalanches dans différents systèmes.

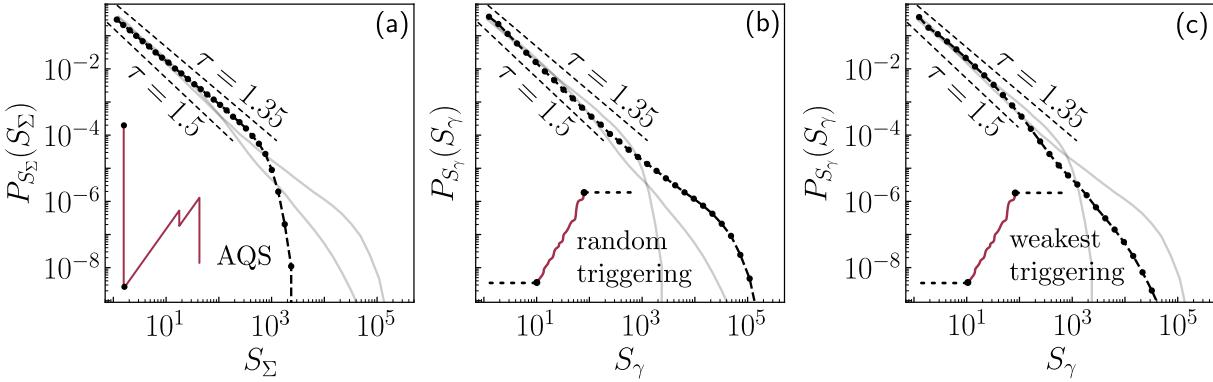


FIGURE 4.23 – Distributions des tailles d’avalanche pour les trois différents protocoles étudiés : (a) AQS, (b) RTP, (c) WTP. Les avalanches sont générées dans un système de taille $L = 512$.

Pour comparer plus précisément ces protocoles, nous menons une analyse de taille finie sur les distributions de tailles et de durées d’avalanche qu’ils produisent. D’après les lois d’échelles présentées à l’équation 4.51, en mesurant ces distributions pour différentes tailles de système et en opérant le redimensionnement suivant :

$$S \rightarrow \frac{S}{L^{d_f}}, \quad P(S) \rightarrow \frac{P(S)}{L^{-d_f\tau}}, \quad S \rightarrow \frac{T}{L^z}, \quad P(T) \rightarrow \frac{P(T)}{L^{-z\tau'}} \quad (4.54)$$

les distributions pour différentes tailles se superposent sur une même courbe maîtresse. Ainsi, cela constitue une méthode graphique précise et efficace pour la détermination des exposants (τ, τ', d_f, z) . En suivant cette méthode pour les protocoles AQS et RTP, nous obtenons les résultats présentés à la figure 4.24.

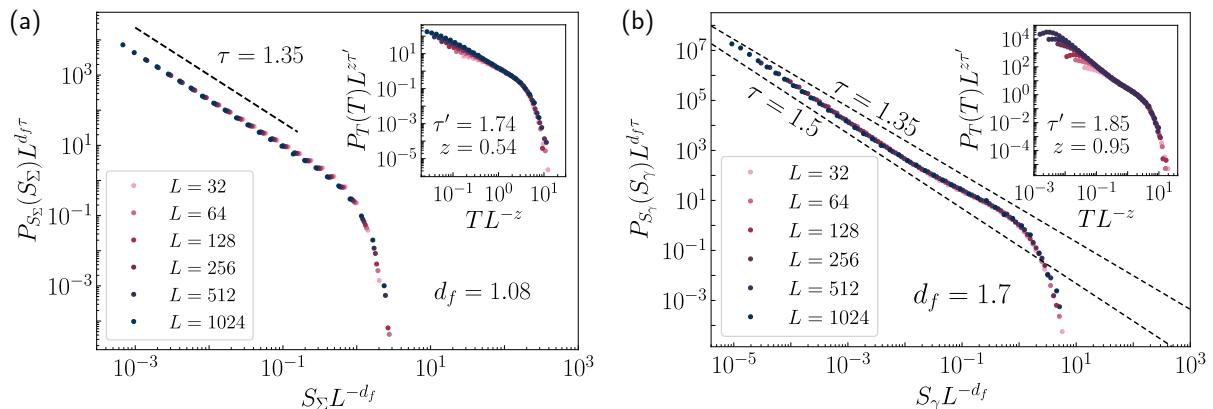


FIGURE 4.24 – Analyse d’échelle de taille finie des distributions de tailles (figures principales) et de durées (encarts) d’avalanches pour les protocoles AQS (a) et RTP (b).

La première chose à noter est que la superposition des courbes est remarquable dans les deux cas. La différence d'exposant d'avalanche τ est par ailleurs bien confirmée entre ces deux protocoles avec $\tau = 1.35$ pour l'AQS et $\tau = 1.5$ pour le RTP. D'autre part, nous retrouvons approximativement pour l'AQS les valeurs attendues pour la dimension fractale $d_f \approx 1.1$ et l'exposant dynamique $z \approx 0.55$ [52, 64]. Pour le RTP cependant, ces exposants de structure sont très différents avec $d_f \approx 1.7$ et $z \approx 0.95$. Ces mesures identifient alors des événements plus longs et surtout plus compacts dans le cas du RTP, bien que l'on ait toujours $d_f < D$. D'autre part, dans le cas du WTP, un tel redimensionnement n'est pas réalisable de manière satisfaisante [140].

Cette caractérisation plus précise confirme alors une différence de nature fondamentale entre les événements générés par différents protocoles.

4.4.2.3 Le protocole RTP comme protocole naturel

S'il donne lieu à des résultats très différents de l'AQS, le protocole RTP semble tout de même être un protocole à contrainte imposé cohérent et solide. Il est par ailleurs possible de rationaliser les différences mesurées entre ces deux protocoles [140]. Nous montrons enfin à la [sous-section 6.4.2](#) qu'il répond aux mêmes lois d'échelle que le protocole classique de l'AQS. Ces éléments font donc du RTP un candidat de choix pour l'analyse dynamique de la transition vers l'écoulement à contrainte imposée, de la même façon que l'AQS l'est dans le cas du taux de cisaillement imposé.

Ce choix maintenant évident est en fait plus naturel qu'il n'y paraît. En effet, dans la [sous-sous-section 4.3.1.2](#), nous avions déjà défini le champ d'activation h comme un équivalent du forçage élastique à contrainte imposée. Or de la même manière que l'AQS correspond à la limite $\dot{\gamma} \rightarrow 0$, le RTP correspond à la limite $h \rightarrow 0$. Ainsi, même si son interprétation physique est moins directe, le protocole RTP correspond bien en quelque sorte à une limite critique du processus d'avalanches en contrainte imposée. C'est donc ce protocole que nous allons utiliser pour caractériser les avalanches dans les généralisations du modèle de Picard présentées précédemment.

4.4.3 Influence de la portée sur les avalanches en contrainte imposée

De la même manière que la portée d'interaction modifie les exposants critiques ([sous-sous-section 4.3.3.3](#)) et les propriétés d'hyperuniformité ([sous-sous-section 4.3.4.3](#)), nous proposons d'évaluer son influence sur les propriétés d'avalanches. Notamment, nous déterminons comment évoluent les différents exposants caractérisant ces phénomènes avec la portée α , afin de voir si les propriétés dynamiques suivent une évolution similaire à celle des autres propriétés critiques.

4.4.3.1 Avalanches dans le modèle α -Picard

Méthode

Afin d'étudier les avalanches à contrainte imposée dans le modèle α -Picard, nous générerons des avalanches en suivant le protocole RTP pour différentes tailles de système et ce pour $\alpha = \{2, 3, 4, 5\}$. Nous déterminons alors les différents exposants caractéristiques par une analyse d'échelle en taille finie comme dans le cas du modèle de Picard (voir sous-sous-section 4.4.2.2).

En plus de la taille et de la durée des avalanches, nous caractérisons leur étendue spatiale A . Celle-ci correspond en fait à la surface, exprimée en nombre de sites, sur laquelle a pris part l'avalanche. De la même manière que pour les deux autres observables, nous postulons que cette quantité est distribuée selon :

$$P(A) \sim A^{-\tau''} h\left(\frac{A}{A_c}\right), \quad A_c \sim L^\chi \quad (4.55)$$

avec h une fonction à décroissance rapide et A_c le cut-off associé. Ce cette façon, $\chi = D = 2$ signifie que les avalanches occupent au maximum toute la surface du système. Cette quantité permet alors d'offrir une nouvelle caractérisation des avalanches, utile à l'interprétation des résultats qui suit.

Évolution des exposants

Les redimensionnements effectués pour obtenir la meilleure estimation des exposants sont présentés à la figure 4.25 dans le cas du modèle 3-Picard. Ces mêmes figures sont reportées en annexe pour les autres modèles et nous reportons les exposants déterminés dans le tableau 4.3. Globalement la superposition des courbes est très convaincante dans chacun des cas et pour toutes les distributions. Cela valide alors notre approche à tout α , notamment l'ansatz de l'équation 4.55. Notons par ailleurs que ces résultats sont des résultats préliminaires non publiés qui nécessitent encore quelques améliorations. Néanmoins, leur état actuel permet d'effectuer certaines observations.

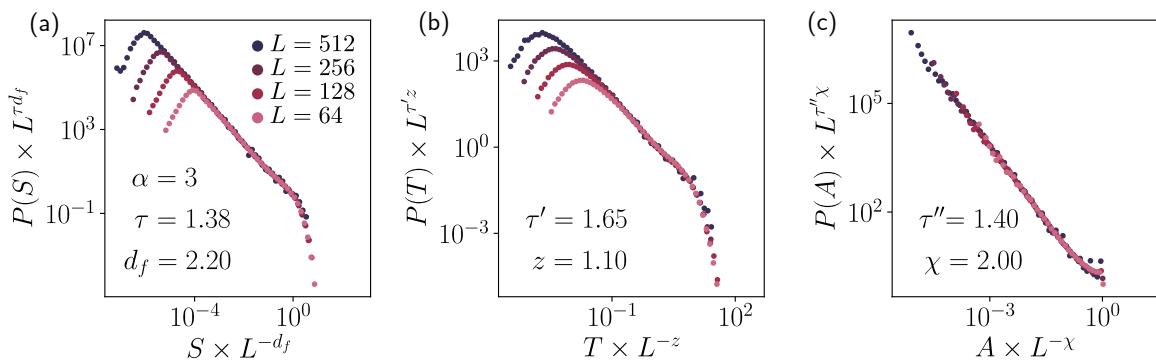


FIGURE 4.25 – Distributions de tailles (a), de durées (b) et de surfaces (c) d'avalanche redimensionnées dans le modèle 3-Picard. Les exposants permettant cette superposition sont reportés dans le tableau 4.3

α	τ	τ'	τ''	d_f	z	χ
5	1.3	1.5	1.35	2.8	1.55	2
4	1.3	1.47	1.37	2.8	1.55	2
3	1.38	1.65	1.4	2.2	1.1	2
2 (Picard)	1.50	1.85	1.48	1.7	0.95	1.75

TABLE 4.3 – Exposants d’avalanches déterminés dans les modèles α -Picard

Nous remarquons d’abord que les exposants τ , τ' et τ'' caractérisant les lois de puissance ont tous tendance à augmenter à mesure que la portée de l’interaction augmente. Par exemple, on passe de $\tau \approx 1.3$ pour le modèle 5-Picard à $\tau \approx 1.5$ pour le modèle de Picard. Même si ces tendances sont légères, cela signifie que les avalanches sont de moins en moins largement distribuées à mesure qu’ α diminue.

Par ailleurs, tous les exposants semblent être sensiblement les mêmes pour $\alpha = 4$ et $\alpha = 5$. Cette observation suggère alors que la région LP-0 identifiée précédemment ne correspond qu’à une variation des exposants critiques statiques, laissant les exposants d’avalanche inchangés sur toute la région. Nous remarquons de plus que cette criticalité est exactement la même que celle de la classe CDP d’après les résultats de la section 3.5, avec $d_f \approx 2.8$ et $z \approx 1.5$. À des portées relativement courtes, les modes zéros ne semblent donc pas influencer significativement les avalanches générées via ce protocole.

Enfin le point le plus intéressant vient de l’évolution de la dimension fractale avec α , qui passe de $d_f \approx 2.8$ pour $\alpha = 5$ à $d_f \approx 1.7$ pour le modèle de Picard. Nous rappelons par ailleurs que, comme dans le cas des suspensions discuté au chapitre 3, cet exposant est à comparer à $D + 1$ pour juger de la compacité des avalanches. On passe donc d’avalanches très compactes à courte portée à des avalanches peu compactes à longue portée dans le modèle de Picard. Une manière plus significative de mettre en évidence ce changement est de regarder la projection de l’avalanche sur l’espace de dimension D . Dans ce cas là, la quantité d’intérêt est A , dont le cut-off est caractérisé par l’exposant χ . Celui-ci passe alors subitement d’une valeur $\chi = D = 2$ à $\chi < 2$ lorsque l’on passe de $\alpha = 3$ à $\alpha = 2$. De plus, pour $\alpha = 2$ nous mesurons $d_f \approx \chi$. En d’autres termes, autour de $\alpha = 3$ la compacité des avalanches change de telle manière qu’elles n’occupent plus, au maximum, la totalité du système. Les avalanches deviennent alors spatialement fractales. Parallèlement, l’exposant dynamique opère un changement significatif autour de $\alpha = 3$ où l’on passe de $z > 1$ à $z < 1$.

Comme dans le cas des propriétés critiques statiques et d’hyperuniformité, les avalanches de plasticité ressemblent donc à celles du dépiégeage jusqu’au point $\alpha = 3$, qui marque la limite champ moyen de ce dernier. Toutefois, dans le cas de la transition vers l’écoulement, ce point n’est pas une limite puisqu’il est dépassé par l’évolution des exposant pour $\alpha < 3$. Dans cette zone, la structure des avalanches est alors drastiquement différente avec $d_f < D$ et $z < 1$, propriétés déjà établies par les études précédentes. Cette étude permet alors de faire émerger ces propriétés d’une évolution globale du modèle avec la portée d’interaction α .

4.4.3.2 Aparté sur les avalanches écrantées

Si le modèle α -Picard est essentiel pour comprendre les propriétés critiques du cas classique, il ne porte pas vraiment de réalité physique. Dans le [chapitre 1](#), nous avons évoqué une interaction similaire à l'interaction d'Eshelby mais qui, sous écrantage, voit sa portée modifiée. Notamment, elle décroît dans sa partie écrantée comme $1/r^4$, cas étudié ici à contrainte imposée. Un modèle étudiant précisément cette interaction écrantée a été implémenté et ses avalanches sous cisaillement quasistatiques ont été caractérisées. L'étude reléguée à la [sous-sous-section 6.4.3.2](#) montre alors que le système perd sa criticalité dans la zone écrantée. Ceci vient du fait d'une relaxation globale de la contrainte portée uniquement par le site plastique, alors que celle-ci est portée uniformément par tout le système dans le cas du modèle de Picard à taux de cisaillement imposé.

Ainsi, au-delà de la longueur d'écrantage, les avalanches de plasticité disparaissent et ne prennent donc pas la forme de celles du modèle 4-Picard. Cette observation, bien qu'annexe, montre alors que la portée d'interaction n'est pas la seule variable pouvant agir sur les propriétés statistiques des avalanches. Dans des situations physiques réelles, tous les aspects de la dynamique doivent donc être soumis à la plus grande attention pour expliquer ces phénomènes.

4.5 Conclusion

En conclusion, par l'implémentation d'un modèle élastoplastique, nous avons caractérisé la transition vers l'écoulement des fluides à seuil athermiques. La première phase de caractérisation nous a permis de déterminer les exposants critiques associés à cette transition. Celle-ci a alors permis de mettre en évidence son caractère convexe ($\beta > 1$) et le caractère exotique des fluctuations critiques qui se dissipent à l'approche de la transition ($\gamma' < 0$).

Par l'étude de variations sur ce modèle, nous avons étudié l'évolution de cette criticalité en fonction de la portée α des interactions associées. Cela nous a permis de mettre en évidence la présence d'une symétrie particulière dans le propagateur de redistribution appelée modes zéros qui modifie le comportement critique du système, et ce même à courte portée. La longue portée inscrite dans ce même propagateur place la transition vers l'écoulement ($\alpha = 2$) dans une zone non-triviale dont la forme a été esquissée. Celle-ci semble séparer une classe de courte portée distincte de la percolation dirigée conservée, appelée CDP-0, d'une zone de champ moyen représentée par le modèle de Hébraud-Lequeux. Si ce comportement est plutôt classique, sa spécificité réside dans le fait que la zone de longue portée s'étend sur une gamme de portées α différente du cas du dépiégeage. Pour $\alpha < 3$, le comportement critique est, comme attendu, très différent de celui de la transition de dépiégeage, du fait de la possibilité d'interpréter les interactions comme un bruit interne dans cette zone. En revanche, pour $\alpha > 3$, l'évolution des exposants ressemble fortement à celle prédictive par le cadre LR-CDP.

Cette observation générale se retrouve aussi dans l'évolution des autres propriétés critiques du système. L'hyperuniformité de la répartition de contrainte est perdue conjointement

ment à la rugosité de l'interface pour $\alpha \lesssim 3$ alors qu'elles présentent des caractéristiques similaires au dépiégeage pour $\alpha \gtrsim 3$. D'autre part, les propriétés des avalanches suivent la même tendance. Si des avalanches compactes sont observées pour $\alpha \gtrsim 3$, pour $\alpha \lesssim 3$ les événements observés sont marqués par une faible compacité avec $d_f < D$, caractéristique de la transition vers l'écoulement.

Chapitre 5

Discussion : interprétation conjointe des transitions de réversibilité et d'écoulement

Dans ce chapitre, nous proposons de rassembler les résultats obtenus dans les chapitres précédents afin de mener une étude comparée de la transition de réversibilité et de la transition vers l'écoulement. Nous nous appuierons tout d'abord sur les modèles numériques étudiés pour formuler plus précisément l'analogie entre les deux systèmes, du point de vue microscopique comme du point de vue de la modélisation en champ moyen. Nous montrerons alors l'importance donnée aux mécanismes de bruit interne présents dans ces deux phénomènes.

Nous comparerons ensuite les évolutions mesurées dans les modèles numériques de la criticalité de ces transitions avec la portée de l'interaction. Pour ce faire, nous nous appuierons essentiellement sur l'évolution de la convexité associée, soit l'exposant critique β . Si celle-ci suit des évolutions globalement similaires dans les deux cas, nous proposerons un scénario et ses limites pour expliquer les points de divergence qui subsistent. Celui-ci se basera sur les ingrédients de la dynamique présents dans les modèles microscopiques.

5.1 Des similarités globales

5.1.1 Analogie entre les deux systèmes

Après avoir présenté une étude exhaustive des deux transitions via les modèles numériques évoqués aux chapitres précédents, nous proposons de revenir sur les conclusions du chapitre 1 pour reformuler plus précisément l'analogie entre les deux systèmes. Dans le tableau 5.1, nous développons les parallèles réalisables entre ces deux transitions représentées par les modèles du α -ROM et du α -Picard.

5.1.1.1 Activité et quantité conservée

À l'instar des modèles appartenant à la classe CDP, les modèles α -ROM et α -Picard font tout deux intervenir la dynamique d'une activité et d'une quantité conservée. Concernant la quantité conservée, elle correspond à la contrainte locale $\sigma(\mathbf{r}, t)$ dans le α -Picard,

qui est l'équivalent de la densité de particules $\rho(\mathbf{r}, t)$ dans le α -ROM. Cette première analogie rappelle directement le parallèle entre la transition de dépiégeage et les modèles de particules appartenant à la classe CDP¹. Du côté de l'activité, une analogie directe est établie entre l'activité gros grains $A(\mathbf{r}, t)$ dans le α -ROM et la variable locale $\dot{\epsilon}_{\text{pl}}(\mathbf{r}, t)$ dans le modèle α -Picard.

Dans les deux cas, et comme dans tous les modèles représentés par l'universalité CDP, la valeur locale du champ conservé correspond en quelque sorte à une susceptibilité à l'activation. Une densité élevée dans le α -ROM correspond à des particules proches, i.e. susceptibles de se recouvrir suite à un petit déplacement et donc de créer de l'activité. Dans le modèle α -Picard, une contrainte locale élevée représente une faible distance au seuil microscopique σ_Y et donc une éventualité forte de devenir plastique en la présence de fluctuations externes.

D'un point de vue macroscopique, les paramètres de contrôle homologues l'un de l'autre sont la contrainte globale Σ et la densité globale ϕ , tandis que l'équivalence des paramètres d'ordre se retrouve via la proportion moyenne de particules actives $\langle A \rangle$ et le taux de cisaillement moyen $\langle \dot{\gamma} \rangle$.

5.1.1.2 Avalanches et hyperuniformité

Comme les autres modèles appartenant à la classe CDP, le α -ROM et le modèle α -Picard présentent des dynamiques d'avalanche proche du point critique, que nous avons mises en évidence dans des conditions de contrainte/densité imposée. En accord avec les équivalences précédentes, là où la taille d'une avalanche dans le modèle α -Picard est représentée par le déplacement global du matériau, celle dans le α -ROM correspond à la quantité d'évènements actifs qui la constituent. De même, on retrouve dans ces deux systèmes, dans une certaine limite, la propriété d'hyperuniformité. Si celle-ci se traduit dans le modèle de particules via les fluctuations anormales de densité, dans le modèle d'écoulement elle correspond aux fluctuations anormales de contrainte.

5.1.1.3 Effets multiples des évènements d'activité

L'analogie entre les deux modèles peut être complétée plus spécifiquement en s'intéressant à l'effet d'un évènement actif dans le système. Celui-ci peut en fait être découpé en trois contributions : un effet de relaxation (0), un effet de transport (1) et un effet non-local spécifique (2) qui fait la particularité des transitions étudiées. Par transport, nous entendons ici, comme dans le chapitre 1, un déplacement de la quantité conservée à l'échelle microscopique issu d'une zone d'activité. Cette notion de transport représente donc le mécanisme classique de propagation de l'activité dans les modèles appartenant à la classe CDP. Nous verrons par la suite que ce découpage est utile pour comprendre les différents mécanismes à l'œuvre dans chacune de ces transitions.

1. Dans le chapitre 1, nous avons présenté une équivalence entre la force élastique de rappel locale dans la transition de dépiégeage et la densité de particules dans le modèle Manna

Pour clarifier cette division, prenons tout d'abord le cas du α -ROM. Dans ce modèle, le processus de relaxation (0) se traduit par le saut de la particule active. En effet, en réalisant ce saut la particule active défait le recouvrement qui avait mené à son activation. C'est donc bien un processus d'auto-inhibition local de l'activité. D'autre part, le processus de transport (1) correspond au déplacement de la particule active qui est susceptible d'en recouvrir une autre. Il correspond alors exactement au même mécanisme de transport que celui présent dans le ROM. Il est donc fait à courte portée. Enfin, le processus non-local spécifique (2), qui le différencie des autres modèles associés au ROM, est l'interaction entre particules actives et passives à longue portée, représentée par des petits déplacements des particules passives sans transport des particules actives.

Dans le cas du modèle α -Picard, ce découpage est un peu moins évident mais peut être compris par une ré-écriture formelle du propagateur selon :

$$G(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = G(0) + G_1(\mathbf{r} - \mathbf{r}') + G_2(\mathbf{r} - \mathbf{r}'), \quad \int d\mathbf{r} G_1(\mathbf{r}) = -G(0) \quad (5.1)$$

G_1 définissant la partie isotrope du propagateur. Dans le cas des modèles α -Picard, dans la limite continue, celui-ci prend la forme :

$$G_1(r) = B_\alpha \frac{C_\alpha}{r^\alpha} \quad (5.2)$$

avec C_α et B_α des constantes définies par l'[équation 4.33](#) au [chapitre 4](#). Dans les cas spécifiques $\alpha = 2$ et $\alpha = 4$, le terme C_α s'annule. Toutefois, dans un système fini, la conservation de la contrainte globale implique nécessairement l'existence d'un tel terme. En pratique, celui-ci prend plutôt une forme uniforme qui se comporte comme $\sim 1/L^2$ dans le cas spécifique $\alpha = 2$. Pour $\alpha = 4$, la partie isotrope du propagateur discret implémenté est moins évidente. ([Remarque : mieux vaut ne rien dire sur ces cas spécifiques si on n'a pas grand chose à en dire ?](#)).

Dans le cadre du modèle α -Picard, le processus de relaxation (0) correspond à la partie $G(0) < 0$ du propagateur qui traduit la relaxation d'un site plastique, l'amenant vers $\sigma < \sigma_Y$ et donc vers le retour à un état élastique. Le processus de transport (1), quant à lui, correspond à la redistribution de cette contrainte relaxée via la partie isotrope du propagateur G_1 . Dans le cas de la transition de dépiégeage, le propagateur élastique n'est formé que des deux premiers termes. La particularité du propagateur non-monotone d'Eshelby dans le cas de la transition vers l'écoulement fait intervenir un troisième terme G_2 , à longue portée et de signe alterné. C'est cette partie qui représente l'effet non-local spécifique (2) de la transition, absent des modèles représentant les classes CDP et LR-CDP. En effet, celui-ci ne peut pas être traduit comme le déplacement de la contrainte relaxée vers d'autres sites.

L'ingrédient constitutif qui rapproche les deux transitions de réversibilité et d'écoulement et les sépare des classes CDP et LR-CDP est précisément cette partie non-locale spécifique (2) de l'effet de l'activité. Dans la suite, nous rappelons brièvement en quoi celle-ci représente un nouveau mécanisme de création de l'activité, par opposition au mécanisme usuel de création de l'activité par transport dans les classes CDP et LR-CDP.

	α -ROM	α -Picard
Param. de contrôle	densité ϕ	contrainte Σ
Param. d'ordre	fraction de particules actives A	taux de cisaillement $\dot{\gamma}$
Mise en activité	contact : $ \mathbf{r} - \mathbf{r}' < D_P$	dépassement du seuil : $\sigma > \sigma_Y$
Effet local de l'act.	saut	relaxation de σ
Effet non-local de l'act.	déplacement local des part. passives	modification des contraintes locales à longue portée
Distribution de distance micro.	fonction de corrélation de paire : $g_p(\mathbf{r} - \mathbf{r}' - D_p)$	distribution de distance au seuil : $P(\sigma_Y - \sigma)$
Présence de transport à longue portée	Non (sauts à courte portée)	Oui (via la partie G_1 du propagateur)
Géométrie du propagateur	isotrope	présence de modes 0

TABLE 5.1 – Tableau d'analogie entre la transition de réversibilité et la transition vers l'écoulement étudiées via les modèles α -ROM et α -Picard.

5.1.2 Bruit interne, bruit mécanique

5.1.2.1 Diffusion vers une barrière

Dans le modèle α -ROM, comme nous l'avons discuté au [chapitre 3](#), l'effet non-local spécifique des interactions à longue portée provoque une diffusion des particules passives via l'effet successif de nombreux évènements actifs. Cette diffusion représente alors un mécanisme de propagation de l'activité très différent de celui des modèles associés à la classe CDP. Sous l'influence du bruit interne, les particules passives se déplacent aléatoirement et finissent par se rencontrer. Ainsi, à partir de deux particules passives, deux particules actives sont créées, tandis que les particules actives à l'origine de ce bruit interne poursuivent leur dynamique purement locale. Formellement, ce mécanisme de création de l'activité peut être associé à une marche aléatoire en présence d'une barrière. Dans le α -ROM, pour une particule passive, cette barrière est représentée par toute autre particule. L'activation de la particule suite au franchissement de cette barrière correspond alors au mécanisme de création d'activité associé à ce bruit interne.

Le même constat peut être fait du point de vue des modèles élastoplastiques en considérant l'effet de la partie G_2 du propagateur. Si l'on se concentre sur un site élastique lors d'un pas de temps unique, en fonction de sa position relative à la plasticité, sa contrainte locale se voit augmenter ou diminuer de manière plus ou moins importante (du fait que G_2 soit de signe alterné). Au cours de l'écoulement, via les fluctuations de plasticité dans le système, la contrainte locale de ce site va donc fluctuer de manière pseudo-aléatoire. Nous utilisons ici le terme pseudo-aléatoire puisque, en pratique, la modification de la contrainte suite à un réarrangement plastique est déterministe. Seulement, la stochasticité

de la contrainte locale relaxée et les corrélations finies du champ de plasticité permettent de comprendre ces interactions comme une sorte de bruit effectif au niveau local. Dans ce cadre, nous pouvons donc voir l'effet non-local spécifique des modèles α -Picard comme induisant une diffusion des contraintes locales. Là encore, cette diffusion définit un nouveau mécanisme de création d'activité qui peut être compris comme une marche aléatoire en présence d'une barrière. La contrainte locale σ diffuse sous l'action de la plasticité jusqu'à arriver au seuil σ_Y qui représente la barrière, créant ainsi de l'activité dans le système.

Ces mécanismes de diffusion vers un bord absorbant sont complexes à appréhender en dimension finie car ils ne peuvent pas être réellement réduit à un problème de marche aléatoire simple. Dans le cas du α -ROM, cela vient du fait que les particules actives qui créent le bruit interne opèrent une dynamique corrélée non-triviale et que la notion de barrière ne renvoie pas à une frontière fixe mais à un ensemble de particules diffusant elles aussi dans un espace de dimension finie. Dans le cas du modèle α -Picard, l'effet du propagateur G_2 n'est que pseudo-aléatoire puisqu'il présente une forte anisotropie quadrupolaire en plus d'une spatialisation. Pour ces raisons, il est plus simple d'aborder ce mécanisme dans un premier temps via un point de vue champ moyen qui permet de s'affranchir de toutes ces sources de complexité.

5.1.2.2 Modélisation champ moyen

Il est possible d'interpréter les deux transitions via des modèles de champ moyen comprenant ce mécanisme non-local spécifique de la manière la plus simple qu'il soit. Ceux-ci se démarquent des approches champ moyen issues des équations de champ comme dans le cas de CDP par deux aspects : l'objet central de la théorie est le champ conservé et non le champ d'activité, et le point de vue adopté est un point de vue mésoscopique/microscopique, via la dynamique effective d'un agent unique.

Dans le cadre de la transition vers l'écoulement, ce modèle champ moyen est le modèle de Hébraud-Lequeux [101], décrit par l'équation :

$$\begin{aligned}\partial_t P(\sigma, t) &= -\dot{\gamma}(t)\partial_\sigma P(\sigma, t) + a\Gamma(t)\partial_\sigma^2 P(\sigma, t) - \frac{\Theta(|\sigma| > \sigma_Y)}{\tau} P(\sigma, t) + \Gamma(t)\delta(\sigma) \\ \Gamma(t) &= \frac{1}{\tau} \int_{|\sigma| > \sigma_Y} d\sigma P(\sigma, t)\end{aligned}\tag{5.3}$$

avec $\dot{\gamma}(t) = \dot{\gamma}$ dans des conditions de taux de cisaillement imposé ou alors :

$$\dot{\gamma}(t) = \frac{1}{\tau} \int_{|\sigma| > \sigma_Y} d\sigma \sigma P(\sigma, t)\tag{5.4}$$

dans le cas où c'est la contrainte globale $\Sigma = \int d\sigma \sigma P(\sigma, t)$ qui est imposée.

Dans le cas de la transition de réversibilité, le modèle équivalent est décrit par les équations présentées au chapitre 3 :

$$\begin{aligned}\partial_t P(\mathbf{r}, t) &= a\Gamma(t)\nabla^2 P(\mathbf{r}, t) - \frac{1}{\tau}\Theta(|\mathbf{r}| > R)P(\mathbf{r}, t) + \delta(\mathbf{r})\Gamma(t) \\ \Gamma(t) &= \frac{1}{\tau} \int_{|\mathbf{r}| > R} d\mathbf{r} P(\mathbf{r}, t)\end{aligned}\tag{5.5}$$

Là où le lien avec la modélisation élastoplastique du modèle α -Picard est complètement transparent, celui avec le α -ROM demande un certain degré d'abstraction et d'hypothèse via la mise en place d'une cage effective de dimension R , comme nous l'avons présenté au [chapitre 3](#). En fait, si le lien est plus direct dans le cadre de la transition vers l'écoulement c'est parce que les modèles élastoplastiques ont déjà intégré ce degré d'abstraction dans leur construction, à la différence de modèle plus maximaux comme les simulations de dynamique moléculaire. Ceci fait, les équations régissant cette image champ moyen sont très similaires et permettent de comprendre les interactions à longue portée de la même façon via les termes en laplacien : chaque élément est soumis à un bruit dont l'intensité est proportionnelle à l'activité dans le système. Par ailleurs tout élément ayant dépassé la barrière (R ou σ_Y) est considéré comme actif.

La différence fondamentale entre ces deux modèles est la présence d'un terme de forçage en $\sim \dot{\gamma}$ dans le modèle de Hébraud-Lequeux, absent dans l'équivalent pour la transition de réversibilité, et la dimension dans laquelle prend place la diffusion. Toutefois, en considérant les paramètres de contrôle respectifs ($\Sigma = \int d\sigma \sigma P(\sigma, t)$ dans le cas de la transition d'écoulement et R dans le cas de la transition de réversibilité), ces deux modèles prédisent un même comportement critique représenté par un exposant $\beta = 2$:

$$\Gamma \sim (\Sigma - \Sigma_c)^2, \quad \Gamma \sim (R_c - R)^2\tag{5.6}$$

Ces modèles renforcent alors l'analogie entre les deux transitions et placent ainsi le mécanisme de création de l'activité par diffusion (des particules passives dans la transition de réversibilité et des contraintes locales dans la transition vers l'écoulement) comme l'explication de la convexité observée dans les modèles de dimension finie.

Extension à l'influence de la portée des interactions

Comme on l'a vu dans le cas des suspensions au [chapitre 3](#), il est possible d'interpréter l'influence de la portée des interactions dans ce cadre champ moyen en considérant que celle-ci dicte les propriétés du bruit interne, plus précisément sa distribution. Cela se traduit dans les équations des modèles par un remplacement du laplacien classique ∇^2 en un laplacien fractionnaire $-|\nabla|^\mu$. Dans le modèle d'écoulement, cette généralisation a été étudiée précédemment par Lin et al. [67, 102], montrant une évolution de la convexité avec μ décrite par :

$$\beta = \begin{cases} 2, & \mu > 2 \\ \mu, & 1 < \mu < 2 \\ 1, & \mu < 1 \end{cases}\tag{5.7}$$

et la présence de corrections logarithmiques dans le cas limite $\mu = 1$ ². Dans l'approximation

2. Dans ce cas là nous avons $\delta\Sigma \sim \dot{\gamma} \log(\dot{\gamma})$

mation où le système est exempt de toutes corrélations liées à la dimension du système, l'équivalence discutée au [chapitre 3](#) entre μ et D/α suggère que les interactions à longue portée influent sur le comportement critique entre $\alpha = D$ et $\alpha = D/2$ avec β passant de $\beta = 1$ à $\beta = 2$. Nous avons alors montré dans ce manuscrit que ces résultats se transposaient aussi au modèle champ moyen de particules. Cela suggère que l'influence de la portée des interactions est en principe le même dans les deux cas, du moins en ce qui concerne le mécanisme de création de l'activité par diffusion dans une approche champ moyen.

Ce cadre théorique qui permet d'expliquer l'évolution globale de la convexité sert alors d'appui pour interpréter les résultats obtenus dans les simulations de dimension finie et comparer plus quantitativement les deux transitions. C'est ce que nous ferons plus en détail à la [section 5.2](#).

5.1.3 Répartition de la masse et distance à l'activation : des indices microscopiques

En plus de la convexité des transitions, une preuve de l'importance du mécanisme de diffusion pour la création d'activité dans les modèles α -ROM et α -Picard vient des distributions de distances à l'activation.

Dans le cadre champ moyen commun aux deux transitions, nous pouvons définir une distance à l'activation associée à la dynamique à agent unique étudiée. Dans le cas du modèle d'écoulement, cette distance à l'activation est la distance à la contrainte seuil $x = \sigma_Y - \sigma$. Dans le cas du modèle pour la transition de réversibilité, c'est la distance au bord de la cage effective $x = R - |\mathbf{r}|$. Proche de la transition, les modèles champs moyens prévoient une distribution algébrique de ces distances dictée par un exposant critique θ selon :

$$P(x) \sim x^\theta, \quad \theta = \begin{cases} \frac{\mu}{2}, & 1 < \mu \leq 2 \\ 1, & \mu \geq 2 \end{cases} \quad (5.8)$$

le cas $\mu \leq 1$ dépendant de la présence ou non d'un forçage dans le modèle [67] (et donc différent dans le cas du modèle d'écoulement et du modèle pour la transition de réversibilité). Ce résultat place alors la mesure $\theta > 0.5$ en témoin de l'importance du mécanisme de diffusion dans la transition.

Par construction, il est possible de définir un équivalent de ces propriétés dans les modèles microscopiques. Dans le modèle α -Picard, l'équivalence est directe avec la distribution $P(x)$, x étant la distance au seuil définie sur chacun des N sites. Dans le α -ROM, nous avons associé au [chapitre 3](#) cette distribution à la fonction $g(x)$ obtenue de la fonction corrélation de paire entre particules passives g_p selon $g(x) = g_p(x = r - D_p)$.

Dans le cas du α -ROM, nous avons montré que cette distribution était effectivement caractérisée par un exposant θ non-trivial évoluant avec la portée. Dans le cas du modèle

élastoplastique, la quantité $P(x)$ a été étudiée à de nombreuses reprises, notamment car l'exposant θ est relié aux propriétés des avalanches quasistatiques [52, 64, 65, 67]. Dans ces études, on retrouve aussi dans le cas d'un propagateur de type Eshelby un exposant θ non-trivial entre $\theta = 0.5$ et $\theta = 1$. Notamment, dans le modèle de Picard que nous avons étudié, nous mesurons $\theta \approx 0.62$ (voir [sous-section 6.4.2](#)). Cette propriété est un marqueur de la dynamique microscopique diffusive, absente dans les modèles de type CDP et depinning pour lesquels on a a priori $\theta = 0$ [52] et conforte donc l'interprétation de ces transitions via le cadre de champ moyen commun proposé.

5.1.4 Des évolutions qualitativement similaires dans les modèles numériques

Dans une certaine mesure, l'évolution mesurée des criticalités du α -ROM et du modèle α -Picard avec la portée d'interaction α sont très similaires. Dans les deux cas, on passe continûment d'un comportement de courte portée similaire (ou équivalent) à la classe CDP à un comportement de très longue portée, similaire à celui proposé par les modèles de champ moyen de type Hébraud-Lequeux. Dans la limite de très longue portée, nous observons un comportement atypique dans les lois d'échelle régissant le régime stationnaire. L'évolution du paramètre d'ordre en fonction de la distance au point critique est convexe, caractérisée par un exposant β proche de 2, et les fluctuations de l'activité s'annulent à l'approche du point critique, caractérisées par un exposant γ' négatif.

Cette atypicité se traduit aussi dans les propriétés dynamiques des transitions, plus particulièrement via la dynamique d'avalanche à contrainte/densité imposée dans la limite de longue portée. Dans ce cas, les événements perdent leur compacité spatiale, avec une extension spatiale caractérisée par un exposant χ^3 inférieur à la dimension de l'espace $\chi < D$. De plus, nous observons dans les deux modèles que dans cette limite, les exposants χ et la dimension fractale des avalanches d_f sont liés simplement par $d_f \approx \chi$. Le fait que la taille d'un évènement se comporte directement comme le nombre d'éléments impliqués suggère une sorte de simplification de la dynamique. L'évolution des propriétés critiques dynamiques repose alors essentiellement sur l'évolution de χ qui présente une perte de compacité supposée continue.

En fait, plus généralement, l'évolution de la plupart des exposants critiques prend la même forme que celle dans le cadre de la théorie LR-CDP : en augmentant la portée des interactions l'évolution du paramètre d'ordre devient moins concave, les fluctuations divergent de moins en moins fortement, les avalanches sont de moins en moins compactes, etc. Simplement, dans le cadre de ces deux transitions, la limite de longue portée est modifiée. Le mécanisme de création d'activité par diffusion, par opposition au mécanisme de création d'activité par transport, permet d'aller au-delà du comportement champ moyen de la classe CDP.

Une observation remarquable est que dans les deux cas, ce passage aux propriétés exotiques (convexité de la transition, annulation des fluctuations, perte de compacité des

³. Nous rappelons ici que l'exposant χ définit le comportement d'échelle entre la surface A occupée par une avalanche et son extension spatiale l selon $A \sim l^\chi$

événements, ...) se fait de manière simultanée pour tous les exposants. En d'autres termes, la limite de la région atypique est un point correspondant sous presque tous les aspects au comportement champ moyen de la classe CDP. Dans le cas du modèle α -Picard, ce point est retrouvé autour de $\alpha \approx 3$. Pour le modèle α -ROM, c'est autour de $\alpha \approx 1.5$. Il est possible que des relations d'échelle sous-jacentes permettent de rationaliser en partie cette simultanéité des différents passages $\beta > 1$, $\gamma' < 0$, $\chi < D$. En revanche, il n'est toutefois pas clair qu'il existe une relation de cause à effet entre ces observations ou si elles représentent simplement une façon cohérente de caractériser cette dynamique. Quoiqu'il en soit, cette étude semble souligner le lien étroit entre convexité, évanescence des fluctuations et compacité de la dynamique. Dès lors, l'observation d'un élément de ce triptyque dans des systèmes différents pourrait suggérer la présence des deux autres propriétés, ou plus généralement la présence d'un mécanisme de création de l'activité par diffusion via la présence d'un bruit interne.

5.2 Des différences en dimension finie

Si les modèles α -Picard et α -ROM sont similaires sous bien des aspects, leur étude détaillée aux [chapitre 3](#) et [chapitre 4](#) révèle des différences entre ces deux phénomènes. Dans cette sous-section, nous reprenons les approches théoriques présentées dans cette thèse pour proposer un scénario permettant d'expliquer les différences apparentes entre la criticalité du α -ROM et celle du modèle α -Picard. Pour ce faire, nous nous concentrerons sur une propriété centrale de ces transitions : leur convexité caractérisée par l'exposant critique β , dont nous reportons l'évolution sur la [figure 5.2](#). Nous séparons ces différences, entre les deux modèles et entre les modèles et les approches théoriques, en deux catégories : celles de la zone concave $\beta < 1$ et celles de la zone convexe $\beta > 1$. Nous montrons alors que malgré ces divergences, l'interprétation de ces phénomènes dans un même cadre en dimension fini permet de mieux les appréhender. Enfin, nous discuterons des limites de cette interprétation.

5.2.1 Cadres d'interprétation théoriques

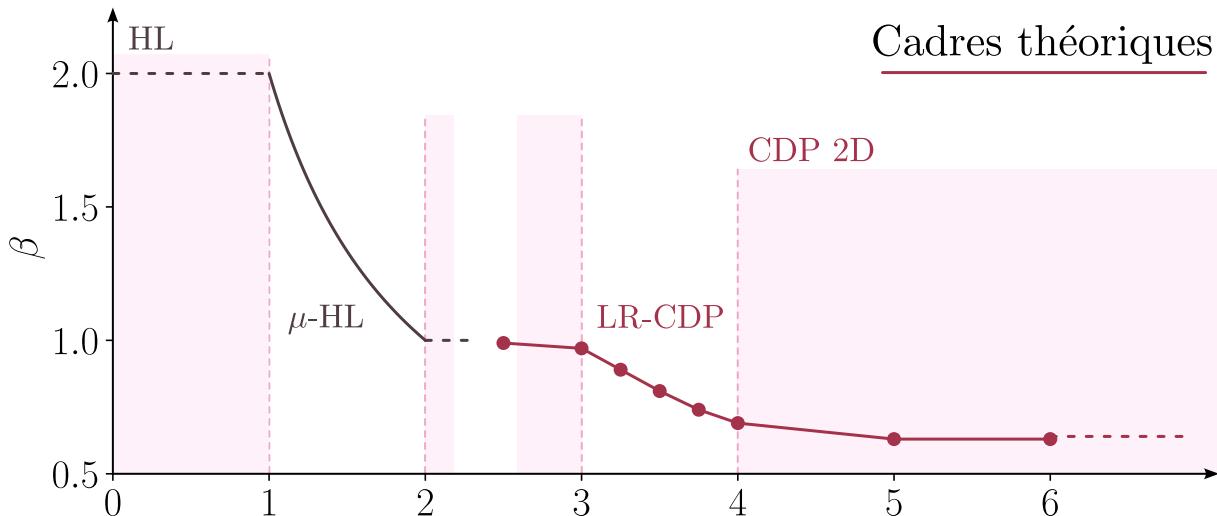


FIGURE 5.1 – Evolution de l'exposant β dans les cadres d'interprétation théorique LR-CDP et μ -Hébraud-Lequeux avec $\mu = D/\alpha$. Les points correspondent aux mesures numériques sur le modèle LR-ROM ([chapitre 2](#))

Pour tenter de comprendre l'influence de la portée d'interaction sur le comportement critique dans les modèles α -Picard et α -ROM, nous disposons de deux approches théoriques. La première est celle présentée au [chapitre 2](#), baptisée LR-CDP, représentant l'influence du mécanisme de création de l'activité par transport à longue portée. En 2D, celle-ci prévoit une évolution continue des exposants entre $\alpha = 4$ et $\alpha = 3$, avec l'exposant β allant de $\beta \approx 0.64$ à $\beta = 1$. La seconde est celle des modèles μ -Hébraud-Lequeux qui, sous l'hypothèse $\mu = D/\alpha$, prédisent une évolution continue de la criticalité entre $\alpha = 2$ et $\alpha = 1$ en 2D avec β allant de $\beta = 1$ à $\beta = 2$. Nous représentons à la [figure 5.1](#) la juxtaposition de ces deux approches qui opèrent sur des domaines de portée disjoints. Nous

proposons alors de comparer les évolutions mesurées dans le α -ROM et dans le α -Picard sur cette base.

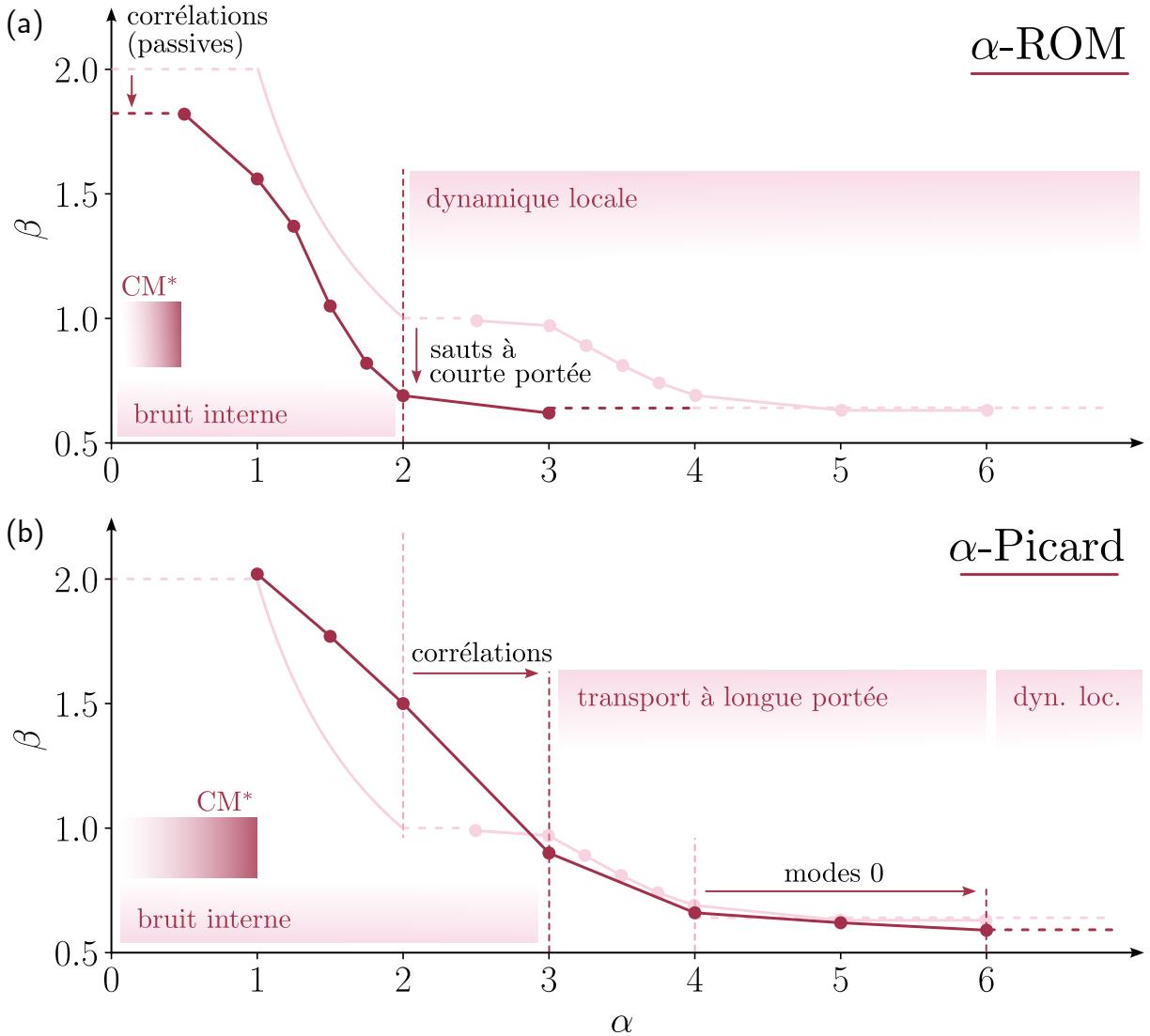


FIGURE 5.2 – Figure récapitulative de l'étude comparée des transitions de réversibilité et d'écoulement, représentée via le prisme de l'évolution de l'exposant β avec la portée α en 2D. (b) Modèle α -ROM (résultats du [chapitre 3](#)). (c) Modèle α -Picard (résultats du [chapitre 4](#)). Les courbes roses en arrière-plan représente les évolutions présentées à la [figure 5.1](#).

5.2.2 Zone concave : des évolutions décalées

En comparant la [figure 5.2-\(a\)](#) et la [figure 5.2-\(b\)](#), une première différence est frappante : la gamme de portées pour laquelle la transition est concave n'est pas la même dans les deux cas. Dans le cas du modèle α -Picard, celle-ci est définie par $\alpha \gtrsim 3$, avec une évolution très proche de celle du cadre LR-CDP, alors que dans le α -ROM elle correspond à $\alpha \gtrsim 1.5$, montrant une évolution plus abrupte.

Dans le scénario que nous proposons, la différence de principe fondamentale entre les deux modèles qui explique le décalage de ce début d'évolution est à chercher du côté

du mécanisme de création de l'activité par transport. Dans le cadre LR-CDP, l'évolution continue de la criticalité résulte d'une redistribution de masse (ou de contrainte) qui se fait à une portée de plus en plus étendue. Dans le modèle α -Picard, cette propriété se retrouve dans la partie G_1 du propagateur qui correspond au transport de la contrainte localement relaxée, évoluant comme $\sim 1/r^\alpha$. Ceci explique l'accord qualitatif observé avec la théorie LR-CDP, à savoir une évolution de $\beta \approx 0.64$ à $\beta \approx 1$ entre $\alpha = 4$ et $\alpha = 3$. En revanche, dans le α -ROM, la redistribution de masse suite à un événement actif est toujours à courte portée, quelque soit α : une particule active saute uniquement dans son voisinage. Ainsi, il n'est pas question de transport à longue portée dans le modèle de particules. C'est la raison pour laquelle la criticalité est constante dans la zone $\alpha > 3$ associée au cadre LR-CDP.

Le mécanisme de création de l'activité par transport à longue portée étant absent dans le cadre du α -ROM, le seul mécanisme susceptible de modifier le comportement critique est le bruit interne. De manière remarquable nous observons par ailleurs que le début d'influence de la portée d'interaction sur la criticalité est retrouvé à $\alpha \approx D$, en accord avec le cadre théorique μ -Hébraud-Lequeux avec $\mu = D/\alpha$. Ainsi, dans le scénario que nous proposons, la relation $\mu = D/\alpha$ basée sur une dynamique d'activité simplifiée dans le système semble être toujours vérifiée dans le α -ROM. Ou tout du moins, il semble que l'on ait effectivement $\mu(\alpha = D) \approx 1$.

En d'autres termes, alors que l'évolution de β dans la zone concave du modèle α -Picard correspond à une extension de la dynamique à longue portée du type LR-CDP, celle du α -ROM correspond à l'introduction du mécanisme de bruit interne en superposition de la dynamique locale pré-existante. Dans ce deuxième cas, le comportement critique résulte donc de la présence de deux mécanismes de création de l'activité (par transport à courte portée de type CDP et par diffusion de type Hébraud-Lequeux), et dont l'observation $\mu(\alpha = D) \approx 1$ pourrait suggérer qu'ils ne sont pas fortement couplés. Ceci permet d'expliquer une première différence entre le modèle de particules et la théorie μ -Hébraud-Lequeux : le fait que la dynamique des particules actives ne soit pas champ moyen en $\alpha = 2$ fait que l'influence du bruit interne démarre à $\beta \approx 0.64$ et non $\beta = 1$ avant de l'amener autour de $\beta \approx 2$. Cette différence est illustrée par le texte *sauts à courte portée* sur la figure 5.2-(a), puisque c'est la dynamique complexe sous-jacente à courte portée des particules actives qui justifie principalement cet écart avec le cadre champ moyen. Ainsi, dans ce cas, c'est le bruit interne, via le mécanisme de création de l'activité par diffusion, qui permet d'effacer la concavité de la transition.

Cette différence permet de mieux comprendre les mesures d'hyperuniformité réalisées au chapitre 3 et au chapitre 4. Dans le cas des modèles α -Picard, les évolutions de l'hyperuniformité avec la portée étaient clairement définies par un exposant critique α_{HU} évoluant d'une manière compatible avec le cadre LR-CDP. En revanche, dans le α -ROM, les propriétés mesurées desquelles nous n'avons pu extraire qu'une évolution qualitative avec la portée montraient un comportement moins clair. Ces évolutions complexes (remarquables par exemple sur les facteurs de structure de la figure 3.10-(a)) ne montrant pas d'évolution continue de la décroissance algébrique peuvent être rationalisées par cette confrontation

complexe entre la dynamique de type CDP produisant de l'hyperuniformité et la dynamique de bruit interne la détruisant.

5.2.3 Zone convexe : importance des corrélations

Nous nous intéressons maintenant à la zone convexe de ces modèles. Dans le α -ROM celle-ci correspond par complémentarité à $\alpha \lesssim 1.5$. Dans cette zone, les mécanismes en jeu sont a priori les mêmes que dans la zone concave $1.5 < \alpha < 2$, i.e. un processus de bruit interne en superposition d'une dynamique active locale. Ainsi, à l'instar de la théorie μ -Hébraud-Lequeux, la convexité de la transition augmente avec la portée des interactions. Toutefois, comme nous l'avons remarqué au [chapitre 3](#), deux écarts à la théorie champ moyen sont observables ici : pour $\alpha \rightarrow 0$ on mesure $\beta < 2$, et pour $\alpha = 1$ la limite de longue portée ne semble pas être atteinte. En comparant cette évolution de l'exposant β à celle obtenue dans le cas d'une simplification de la dynamique active (voir modèle α -ROM avec sauts infinis des particules actives à la [figure 3.4.2.1](#)), celles-ci apparaissent sensiblement les mêmes. Ainsi, ces différences ne peuvent a priori pas être imputées à la dynamique active sous-jacente. À la place, c'est plutôt la complexité du processus de diffusion dans un ensemble de particules en dimension finie qui semble être à l'origine de ces différences. Plus précisément, nous nous attendons à ce que la modélisation de l'environnement par une cage effective se trouve mise en défaut, les particules ne représentant pas vraiment des barrières fixes et présentant **probablement** des corrélations d'ordre supérieur (corrélations à trois particules, ...). Cette divergence est donc illustrée par l'inscription *corrélations (passives)* sur la [figure 5.2-\(a\)](#).

Dans le cas du modèle α -Picard, la zone convexe se situe à $\alpha < 3$. Dans ce cas, la situation semble en principe plus simple : dans notre scénario, l'influence du bruit interne commence à prendre place lorsque la dynamique active est déjà champ moyen et la diffusion vers la barrière est directement fidèle au modèle Hébraud-Lequeux (la contrainte locale d'un site diffuse vers la contrainte seuil de ce site, indépendamment de l'état des autres sites). La perte en complexité du processus de diffusion semble bien se retrouver à longue portée, puisque l'on semble arriver à $\beta \approx 2$ pour $\alpha = 1^4$ (voir partie gauche de la [figure 5.2-\(b\)](#)). En revanche, malgré la simplification du mécanisme de création de l'activité par transport, le mécanisme de création de l'activité par diffusion, seul capable d'expliquer $\beta > 1$, semble prendre place dès $\alpha = 3$ et non $\alpha = 2$. Pour expliquer cela nous pouvons nous appuyer sur la forme de l'interaction et ses implications.

Une différence fondamentale entre le α -ROM et le modèle α -Picard vient de la structure du propagateur d'interaction. Dans le cas du α -ROM, notre approche nous a amené à simplifier la structure spatiale portée par la forme des interactions hydrodynamiques. En effet, dans une approche statistique de la modélisation, les sauts des particules passives sont de nature aléatoire et dont l'amplitude est désignée par un propagateur isotrope. Au contraire, dans le cadre du modèle α -Picard, la modification déterministe de la contrainte conserve toutes les propriétés géométriques du propagateur anisotrope. C'est notamment de là que vient la propriété de modes 0 discutée au [chapitre 4](#). Cette structure spatiale joue

4. La mesure de ce point est cependant entachée d'erreurs assez larges (voir [figure 4.14-\(b\)](#)). Il serait intéressant de préciser cette mesure pour appuyer réellement cet argument.

un rôle important. Non seulement dans la zone de courte portée déterminée au [chapitre 4](#), qui définit la nouvelle classe d'universalité CDP-0, mais aussi à longue portée où la forme du propagateur donne lieu à une répartition fractale de l'activité plastique dans l'espace avec $d_f < D$.

Ce que nous suggérons, c'est que ce sont ces corrélations particulières de la plasticité découlant de la forme spécifique du propagateur qui déplacent la borne inférieure d'influence du bruit interne de $\alpha = 2$ à $\alpha = 3$. En fait cette idée n'est pas nouvelle. Dans les études [67, 102] introduisant la généralisation du modèle Hébraud-Lequeux à longue portée, les auteurs avaient déjà mis en évidence le désaccord entre les modèles élastoplastiques et le modèle μ -Hébraud-Lequeux avec l'approximation $\mu = D/\alpha$. En effet, dans le cas des [intercations](#) d'Eshelby, ce modèle champ moyen prédit $\beta = 1^5$ alors que les mesures numériques donnent $\beta \approx 1.5$. De plus, dans le cas de l'exposant de pseudo-gap θ , les auteurs ont montré que l'écart avec la théorie s'efface effectivement dans le cas d'un modèle où la structure spatiale du propagateur est détruite (en mélangeant aléatoirement le noyau d'interaction). Plus tard, l'étude [65] a cherché à réconcilier le modèle μ -Hébraud-Lequeux avec les modèles élastoplastiques en 2D. Dans celle-ci, les auteurs ont mesuré un exposant effectif de bruit $\mu_{\text{eff}} \approx 1.5$ via la dynamique d'avalanches quasistatiques, cohérent avec la mesure $\beta \approx 1.5$. Dans le scénario que nous proposons, la structure spatiale du propagateur donnant lieu à des corrélations particulières du champ de plasticité (structure quasi-linéaire des avalanches, ...) serait donc à l'origine d'une forte déviation à l'attente naïve $\mu = D/\alpha$ permettant d'expliquer la criticalité des modèles toujours dans le cadre d'interprétation μ -Hébraud-Lequeux.

Pour renforcer cette intuition développée précédemment, nous avons étudié un nouveau modèle élastoplastique dont le [fonctionnement](#) est détaillée à la [sous-section 6.5.1](#). Dans celui-ci, nous adoptons une approche statistique de la redistribution de contrainte suite à un évènement plastique, exactement de la même manière que dans le α -ROM. De ce fait, la structure spatiale du propagateur est perdue, et avec elle toutes les corrélations d'activité liées aux modes 0. En analysant succinctement la criticalité de ce modèle et son évolution avec la portée d'interaction α , nous obtenons l'évolution de l'exposant β présentée à la [figure 5.3-\(a\)](#). Nous remarquons alors en effet que, dans ce cas, l'influence du bruit interne semble prendre place uniquement pour $\alpha < 2$ et non $\alpha < 3$ comme c'est le cas pour le modèle α -Picard.

In fine, dans le modèle α -Picard, la zone d'influence du bruit interne semble être modifiée par les corrélations présentes dans le propagateur. Cette modification est illustrée par le texte [corrélations](#) sur la [figure 5.2-\(c\)](#). Dans cette zone, le rôle des modes zéro semble être double : ceux-ci impliquent un signe alterné de la redistribution et donc la présence d'un bruit interne, et la forte anisotropie qu'ils induisent entraîne des corrélations d'activité qui rendent les propriétés de ce bruit hautement non-triviales.

5. avec des corrections logarithmiques

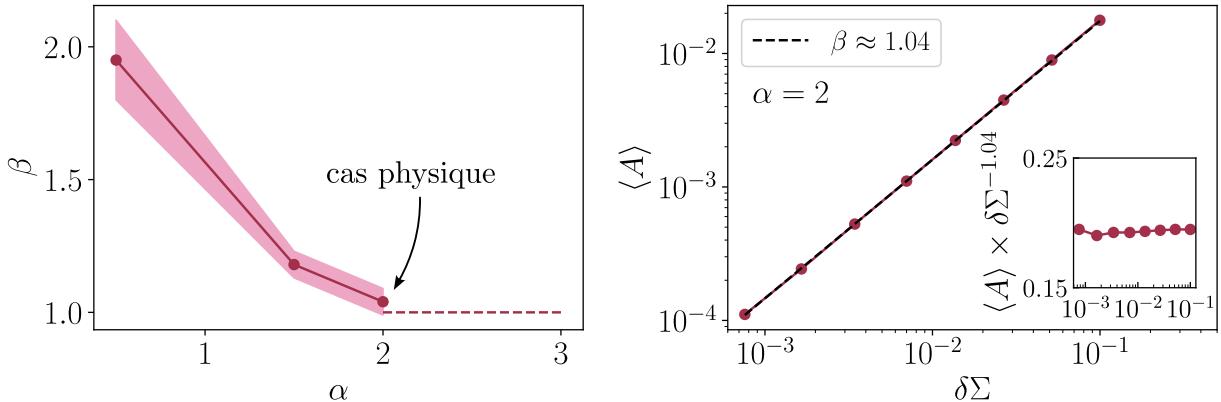


FIGURE 5.3 – Résultats préliminaires obtenues dans le cadre du modèle élastoplastique décrit à la sous-section 6.5.1. (a) Évolution de l'exposant β avec la portée d'interaction α . (b) Exemple de détermination de l'exposant β dans le cas $\alpha = 2$ représentant le cas physique du propagateur d'Eshelby. Nous mesurons dans ce cas $\beta \approx 1.04$, ce qui est bien compatible avec les prédictions du modèle μ -Hébraud-Lequeux avec $\mu = D/\alpha$ pour lequel on attend $\beta = 1$ avec des corrections logarithmiques [102].

5.2.4 Limites du scénario proposé

Si le scénario proposé pour interpréter l'évolutions de la criticalité des modèles α -Picard et α -ROM permet de mettre en évidence des différences intéressantes entre les deux phénomènes, celui-ci présente des limites et soulève quelques questions.

5.2.4.1 Une approche découpée des mécanismes de création de l'activité

Une hypothèse forte dans notre interprétation de ces transitions est de considérer les deux mécanismes de création d'activité (par transport ou par diffusion) de manière presque décorrélée. Nous discutons alors de quelques observations qui mettent en difficulté cette hypothèse dans le scénario que nous avons présenté.

α -ROM

Dans le α -ROM, cette hypothèse est basée sur le fait que la borne α séparant le comportement de courte portée de la zone continue d'évolution des exposants se retrouve en $\alpha \approx D$ à deux et trois dimensions, exactement comme dans le cas du modèle μ -Hébraud-Lequeux dans lequel la dynamique d'activité serait complètement triviale. Toutefois, si cette hypothèse de découplage entre les deux mécanismes semble validée par ce point, une incohérence se remarque dans les mesures de l'exposant de pseudo-gap θ . En effet au chapitre 3 nous avons montré que l'exposant θ , a priori contrôlé uniquement par le mécanisme de création de l'activité par diffusion, suit une évolution différente en fonction de la dynamique des particules actives (i.e. si celle-ci est décorrélée via des sauts infinis ou corrélée via des sauts finis). Cette observation suggèrerait donc que la dynamique des particules actives influence en fait la diffusion des particules passives.

Aussi, dans le cas du α -ROM en 2D nous mesurons $\theta \approx 0.75$ à $\alpha = 2$, qui marque le point de début de l'influence des interactions à longue portée sur le comportement

critique. Or, si c'est le effectivement le mécanisme de création de l'activité par diffusion, seul, qui permet de faire évoluer cette criticalité (comprendre sans influence du mécanisme de transport), nous nous attendrions à mesurer $\theta \approx 0.5$ à cette portée. En effet, il n'y a pas de raison de croire que le mécanisme de transport des particules actives puisse modifier, seul, l'exposant de pseudo-gap θ qui caractérise une structure à une échelle inférieure à la taille de sauts des particules actives.

α -Picard

Dans le cas du modèle α -Picard, cette hypothèse est mieux motivée dans le scénario proposé. En effet, en présence d'un mécanisme de transport à longue portée, nous nous attendons dans une image naïve à ce que celui-ci prenne sa forme champ moyen ($\alpha = 3$ en 2D dans le cadre LR-CDP) bien avant que le mécanisme de diffusion via le bruit interne ne rentre en jeu ($\alpha = 2$ en 2D dans le modèle μ -Hébraud-Lequeux avec $\mu = D/\alpha$). Toutefois, une observation assez inattendue est que, sur la base des mesures effectuée sur le modèle α -Picard, l'exposant β semble suivre une évolution assez monotone (voir [figure 5.2-\(b\)](#)), ne suggérant pas la présence d'un plateau $\beta = 1$ quelque part dans la zone entre $\alpha = 3$ et $\alpha = 2$. Ceci mérirerait à être confirmé en mesurant β finement dans cette zone, mais si cette observation persiste dans ce cas, le raccord parfait entre le régime LR-CDP et le régime μ -Hébraud-Lequeux pourrait remettre en question le scénario que nous avons proposé.

Un autre point intéressant à remarquer est que dans la zone $\alpha < 3$ dans laquelle notre scénario, comme l'étude [65], suppose que le comportement peut être entièrement décrit par le modèle μ -Hébraud-Lequeux (seulement avec $\mu \neq D/\alpha$), nous mesurons $2\theta \neq \beta$ qui est pourtant un attendu de cette image champ moyen. En effet, dans le cas des interactions d'Eshelby $\alpha = 2$ nous mesurons $\theta \approx 0.62$ et $\beta \approx 1.5$. Cette mesure est différente de celle présentée dans l'étude [65] qui replace les modèles élastoplastiques avec $\alpha = 2$ dans le cadre μ -Hébraud-Lequeux ($\theta \approx 0.75$) mais plus proche de celles présentées dans les études [52, 64, 67] pour lesquelles on a clairement $\theta < 0.75$. Il pourrait alors être intéressant de mesurer cet exposant dans nos simulations d'une manière différente⁶ pour confirmer que l'on ait bien $\theta < 0.75$ et donc une déviation claire au cadre champ moyen du modèle μ -Hébraud-Lequeux, ce qui fragiliserait le scénario présenté précédemment.

5.2.4.2 Une vision réduite de la criticalité

L'interprétation de l'évolution de la criticalité des modèles α -Picard et α -ROM que nous avons présentée présente un angle mort. En effet, celle-ci se base uniquement sur l'évolution de l'exposant β . Ceci se fait pour la raison principale que nous ne disposons pas en l'état des prédictions du modèle μ -Hébraud-Lequeux concernant les autres exposants critiques comme γ' , δ ⁷. Dans le cas où ces prédictions sont réalisables, il serait donc intéressant de voir si la mesure numérique de ces autres exposants conforte le scénario

6. Dans notre cas, nous avons évalué la distributions $P(x)$ dans les états élastiques issus des avalanches générées par le protocole RTP. Nous pourrions à la place procéder à une mesure sur des états actifs et mesurer θ via un redimensionnement par $\delta\Sigma$ comme on l'a fait dans le cas du α -ROM

7. Dans certains cas, comme pour l'exposant d'hyperuniformité, ces prédictions sont impossibles du fait que la dynamique de type Hébraud-Lequeux est non spatialisée

proposé de la même manière que l'exposant de convexité β . Notamment il serait intéressant de parvenir à rationaliser l'évolution intriguante de l'exposant δ que nous avons mesuré dans le α -ROM.

Pour remédier à ce problème, nous pourrions approfondir l'étude du modèle μ -Hébraud-Lequeux, et éventuellement en proposer une version spatialisée afin de pouvoir définir dans ce cadre des exposants caractérisant des propriétés structurelles comme la dimension fractale des avalanches d_f où l'exposant d'hyperuniformité α_{HU}

5.2.5 Vers un cadre théorique complet

Afin de mieux comprendre l'évolution des criticalités présentées par les modèles α -Picard et α -ROM, un cadre d'interprétation théorique plus complexe serait donc nécessaire. Celui-ci permettrait notamment d'étudier conjointement l'effet des deux mécanismes de création de l'activité, par transport et par diffusion via le bruit interne.

Dans le cadre LR-CDP, la compréhension de la criticalité et de son évolution avec α passe par la formulation d'équations de champ simples. Avec celles-ci et les méthodes de calculs adaptées, il est possible de déterminer le comportement critique à toutes les portées et en toute dimension. Il est donc tentant de vouloir établir une telle théorie dans le cadre des transitions observées dans les modèles α -Picard et α -ROM, capable de représenter les deux mécanismes de création de l'activité dans un même système d'équations en dimension finie. À la sous-section 6.5.2, nous présentons le cheminement qui a occupé une période de cette thèse mais qui met en évidence les difficultés d'une telle formulation.

5.3 Conclusion

En conclusion, les transitions de réversibilité et d'écoulement étudiées à travers les modèles α -Picard et α -ROM présentent des similitudes frappantes. D'un point de vue constitutif, on y retrouve les mêmes ingrédients, similaires aux modèles de la classe CDP, et la présence d'interactions à longue portée ayant un effet spécifique. Celles-ci représentent un nouveau mécanisme de création de l'activité, associé à une diffusion vers une barrière. D'un point de vue phénoménologique global, les deux transitions présentent les mêmes évolutions montrant un comportement critique atypique à très longue portée et un comportement similaire à l'universalité CDP à très courte portée. Nous remarquons par ailleurs dans ces deux modèles la présence d'un point singulier mettant en lien le changement de convexité ($\beta = 1$), l'inversion du comportement des fluctuations critiques ($\gamma' = 0$) et la perte de compacité spatiale des événements dynamiques ($\chi = d_f = D$).

Toutefois, ces modèles présentent des points de divergence. Pour tenter de les expliquer, nous avons proposé un scénario basé deux cadres théoriques : le cadre LR-CDP qui rationalise l'influence du transport à longue portée et le cadre μ -Hébraud-Lequeux qui rationalise l'effet du bruit interne sur le comportement critique. De manière générale, nous pouvons mettre en avant deux différences fondamentales. La première est que le α -ROM ne présente jamais de transport de la quantité conservée à longue portée alors que c'est le

cas du modèle α -Picard. La seconde est que les modèles d'écoulement font intervenir une forme très particulière du propagateur, induisant des fortes corrélations dans le système tandis que le α -ROM présente une dynamique simplifiée par le point de vue statistique adopté.

Enfin, nous avons évoqué les limites du scénario présenté pour rationaliser les évolutions et les différences constatées entre les modèles α -Picard et α -ROM. Pour passer outre celles-ci, une modélisation plus complète prenant simultanément en compte les mécanismes de création de l'activité par transport et par diffusion semble nécessaire. Cependant celle-ci semble être compliquée à déterminer.

Conclusion

Bibliographie

- [1] E. C. Eckstein, D. G. Bailey, and A. H. Shapiro, “Self-diffusion of particles in shear flow of a suspension,” *Journal of Fluid Mechanics*, vol. 79, pp. 191–208, Jan. 1977.
- [2] V. Breedveld, D. van den Ende, R. Jongschaap, and J. Mellema, “Shear-induced diffusion and rheology of noncolloidal suspensions : Time scales and particle displacements,” *The Journal of Chemical Physics*, vol. 114, pp. 5923–5936, Apr. 2001.
- [3] G. Drazer, J. Koplik, B. Khusid, and A. Acrivos, “Microstructure and velocity fluctuations in sheared suspensions,” *Journal of Fluid Mechanics*, vol. 511, pp. 237–263, July 2004.
- [4] S. Maeguchi, K. Ienaga, and S. Okuma, “Critical behavior of density-driven and shear-driven reversible–irreversible transitions in cyclically sheared vortices,” *Scientific Reports*, vol. 11, p. 19280, Sept. 2021. Number : 1 Publisher : Nature Publishing Group.
- [5] D. J. Pine, J. P. Gollub, J. F. Brady, and A. M. Leshansky, “Chaos and threshold for irreversibility in sheared suspensions,” *Nature*, vol. 438, pp. 997–1000, Dec. 2005. Number : 7070 Publisher : Nature Publishing Group.
- [6] L. Corté, P. M. Chaikin, J. P. Gollub, and D. J. Pine, “Random organization in periodically driven systems,” *Nature Physics*, vol. 4, pp. 420–424, May 2008. Publisher : Nature Publishing Group.
- [7] B. Dollet and C. Raufaste, “Rheology of aqueous foams,” *Comptes Rendus Physique*, vol. 15, pp. 731–747, Oct. 2014.
- [8] P. C. F. Møller, A. Fall, and D. Bonn, “Origin of apparent viscosity in yield stress fluids below yielding,” *Europhysics Letters*, vol. 87, p. 38004, Aug. 2009.
- [9] D. Bonn, M. M. Denn, L. Berthier, T. Divoux, and S. Manneville, “Yield stress materials in soft condensed matter,” *Reviews of Modern Physics*, vol. 89, p. 035005, Aug. 2017. Publisher : American Physical Society.
- [10] A. Nicolas, E. E. Ferrero, K. Martens, and J.-L. Barrat, “Deformation and flow of amorphous solids : Insights from elastoplastic models,” *Reviews of Modern Physics*, vol. 90, p. 045006, Dec. 2018. Publisher : American Physical Society.
- [11] H. M. Princen and A. D. Kiss, “Rheology of foams and highly concentrated emulsions : III. Static shear modulus,” *Journal of Colloid and Interface Science*, vol. 112, pp. 427–437, Aug. 1986.

- [12] A.-L. Biance, S. Cohen-Addad, and R. Höhler, “Topological transition dynamics in a strained bubble cluster,” *Soft Matter*, vol. 5, pp. 4672–4679, Nov. 2009. Publisher : The Royal Society of Chemistry.
- [13] G. Picard, A. Ajdari, F. Lequeux, and L. Bocquet, “Elastic consequences of a single plastic event : a step towards the microscopic modeling of the flow of yield stress fluids,” *The European Physical Journal E*, vol. 15, pp. 371–381, Dec. 2004. arXiv :cond-mat/0403647.
- [14] R. Mari, E. Bertin, and C. Nardini, “Absorbing phase transitions in systems with mediated interactions,” *Physical Review E*, vol. 105, p. L032602, Mar. 2022. Publisher : American Physical Society.
- [15] H. Xie, F. Yin, T. Yu, J.-T. Wang, and C. Liang, “Mechanism for direct graphite-to-diamond phase transition,” *Scientific Reports*, vol. 4, p. 5930, Aug. 2014. Publisher : Nature Publishing Group.
- [16] N. Theodorakopoulos, T. Dauxois, and M. Peyrard, “Order of the Phase Transition in Models of DNA Thermal Denaturation,” *Physical Review Letters*, vol. 85, pp. 6–9, July 2000. Publisher : American Physical Society.
- [17] D. J. Bishop, “Study of the superfluid transition in two-dimensional He films,” *Physical Review B*, vol. 22, no. 11, pp. 5171–5185, 1980.
- [18] M. Kardar, *Statistical Physics of Fields*. Cambridge : Cambridge University Press, 2007.
- [19] S. Lubeck, “Universal scaling behavior of non-equilibrium phase transitions,” *International Journal of Modern Physics B*, vol. 18, pp. 3977–4118, Dec. 2004. arXiv :cond-mat/0501259.
- [20] H. Hinrichsen, “Non-equilibrium critical phenomena and phase transitions into absorbing states,” *Advances in Physics*, vol. 49, pp. 815–958, Nov. 2000. Publisher : Taylor & Francis _eprint : <https://doi.org/10.1080/00018730050198152>.
- [21] R. Dickman, “Nonequilibrium phase transitions in epidemics and sandpiles,” *Physica A : Statistical Mechanics and its Applications*, vol. 306, pp. 90–97, Apr. 2002.
- [22] E. V. Albano, “Spreading analysis and finite-size scaling study of the critical behavior of a forest fire model with immune trees,” *Physica A : Statistical Mechanics and its Applications*, vol. 216, pp. 213–226, June 1995.
- [23] H. K. Janssen, “On the nonequilibrium phase transition in reaction-diffusion systems with an absorbing stationary state,” *Zeitschrift für Physik B Condensed Matter*, vol. 42, pp. 151–154, June 1981.
- [24] P. Grassberger, “On phase transitions in Schlögl’s second model,” *Zeitschrift für Physik B Condensed Matter*, vol. 47, pp. 365–374, Dec. 1982. Publisher : Springer ADS Bibcode : 1982ZPhyB..47..365G.
- [25] M. Rossi, R. Pastor-Satorras, and A. Vespignani, “Universality Class of Absorbing Phase Transitions with a Conserved Field,” *Physical Review Letters*, vol. 85, pp. 1803–1806, Aug. 2000. Publisher : American Physical Society.

- [26] S. S. Manna, “Two-state model of self-organized criticality,” *Journal of Physics A : Mathematical and General*, vol. 24, p. L363, Apr. 1991.
- [27] E. Tjhung and L. Berthier, “Criticality and correlated dynamics at the irreversibility transition in periodically driven colloidal suspensions,” *Journal of Statistical Mechanics : Theory and Experiment*, vol. 2016, p. 033501, Mar. 2016. Publisher : IOP Publishing and SISSA.
- [28] F. van Wijland, K. Oerding, and H. J. Hilhorst, “Wilson renormalization of a reaction–diffusion process,” *Physica A : Statistical Mechanics and its Applications*, vol. 251, pp. 179–201, Mar. 1998.
- [29] R. Pastor-Satorras and A. Vespignani, “Reaction-diffusion system with self-organized critical behavior,” *The European Physical Journal B - Condensed Matter and Complex Systems*, vol. 19, pp. 583–587, Feb. 2001.
- [30] R. Pastor-Satorras and A. Vespignani, “Field theory of absorbing phase transitions with a nondiffusive conserved field,” *Physical Review E*, vol. 62, pp. R5875–R5878, Nov. 2000. Publisher : American Physical Society.
- [31] F. van Wijland, “Universality Class of Nonequilibrium Phase Transitions with Infinitely Many Absorbing States,” *Physical Review Letters*, vol. 89, p. 190602, Oct. 2002. Publisher : American Physical Society.
- [32] P. Le Doussal and K. J. Wiese, “Exact Mapping of the Stochastic Field Theory for Manna Sandpiles to Interfaces in Random Media,” *Physical Review Letters*, vol. 114, p. 110601, Mar. 2015. Publisher : American Physical Society.
- [33] D. S. Fisher, “Collective transport in random media : from superconductors to earthquakes,” *Physics Reports*, vol. 301, pp. 113–150, July 1998.
- [34] K. J. Wiese, “Theory and experiments for disordered elastic manifolds, depinning, avalanches, and sandpiles,” *Reports on Progress in Physics*, vol. 85, p. 086502, Aug. 2022. Publisher : IOP Publishing.
- [35] O. Narayan, “Threshold critical dynamics of driven interfaces in random media,” *Physical Review B*, vol. 48, no. 10, pp. 7030–7042, 1993.
- [36] A. Rosso, P. Le Doussal, and K. J. Wiese, “Avalanche-size distribution at the depinning transition : A numerical test of the theory,” *Physical Review B*, vol. 80, p. 144204, Oct. 2009. Publisher : American Physical Society.
- [37] P. Le Doussal, A. A. Middleton, and K. J. Wiese, “Statistics of static avalanches in a random pinning landscape,” *Physical Review E*, vol. 79, p. 050101, May 2009. Publisher : American Physical Society.
- [38] P. Le Doussal, “Size distributions of shocks and static avalanches from the functional renormalization group,” *Physical Review E*, vol. 79, no. 5, 2009.
- [39] C. Le Priol, *Long-range interactions in the avalanches of elastic interfaces*. These de doctorat, Université Paris sciences et lettres, Nov. 2020.
- [40] P. Bak, C. Tang, and K. Wiesenfeld, “Self-organized criticality,” *Physical Review A*, vol. 38, pp. 364–374, July 1988. Publisher : American Physical Society.
- [41] D. L. Turcotte, “Self-organized criticality,” *Reports on Progress in Physics*, vol. 62, p. 1377, Oct. 1999.

- [42] T. Nattermann, S. Stepanow, L.-H. Tang, and H. Leschhorn, “Dynamics of interface depinning in a disordered medium,” *Journal de Physique II*, vol. 2, pp. 1483–1488, Aug. 1992. Publisher : EDP Sciences.
- [43] K. J. Wiese, “Hyperuniformity in the Manna Model, Conserved Directed Percolation and Depinning,” *Physical Review Letters*, vol. 133, p. 067103, Aug. 2024. Publisher : American Physical Society.
- [44] S. Lübeck, “Moment analysis of the probability distribution of different sandpile models,” *Physical Review E*, vol. 61, no. 1, pp. 204–209, 2000.
- [45] R. Dickman, M. A. Muñoz, A. Vespignani, and S. Zapperi, “Paths to self-organized criticality,” *Brazilian Journal of Physics*, vol. 30, pp. 27–41, Mar. 2000. Publisher : Sociedade Brasileira de Física.
- [46] M. A. Muñoz, R. Dickman, A. Vespignani, and S. Zapperi, “Avalanche and spreading exponents in systems with absorbing states,” *Physical Review E*, vol. 59, pp. 6175–6179, May 1999. Publisher : American Physical Society.
- [47] E. Tjhung and L. Berthier, “Hyperuniform Density Fluctuations and Diverging Dynamic Correlations in Periodically Driven Colloidal Suspensions,” *Physical Review Letters*, vol. 114, p. 148301, Apr. 2015. Publisher : American Physical Society.
- [48] D. Hexner and D. Levine, “Hyperuniformity of Critical Absorbing States,” *Physical Review Letters*, vol. 114, p. 110602, Mar. 2015. Publisher : American Physical Society.
- [49] J. H. Weijs, R. Jeanneret, R. Dreyfus, and D. Bartolo, “Emergent Hyperuniformity in Periodically Driven Emulsions,” *Physical Review Letters*, vol. 115, p. 108301, Sept. 2015. Publisher : American Physical Society.
- [50] S. Kim and S. J. Karrila, *Microhydrodynamics : Principles and Selected Applications*. Butterworth-Heinemann Series in Chemical Engineering, Boston : Butterworth-Heinemann, 1991.
- [51] H. Diamant, “Hydrodynamic interaction in confined geometries,” *Journal of the Physical Society of Japan*, vol. 78, p. 041002, Apr. 2009. arXiv :0812.4971 [cond-mat, physics :physics].
- [52] J. Lin, E. Lerner, A. Rosso, and M. Wyart, “Scaling description of the yielding transition in soft amorphous solids at zero temperature,” *Proceedings of the National Academy of Sciences*, vol. 111, pp. 14382–14387, Oct. 2014. arXiv :1403.6735 [cond-mat].
- [53] E. E. Ferrero and E. A. Jagla, “Elastic interfaces on disordered substrates : From mean-field depinning to yielding,” *Physical Review Letters*, vol. 123, p. 218002, Nov. 2019. arXiv :1905.08771 [cond-mat].
- [54] B. Tyukodi, S. Patinet, S. Roux, and D. Vandembroucq, “From depinning transition to plastic yielding of amorphous media : A soft-modes perspective,” *Physical Review E*, vol. 93, p. 063005, June 2016.
- [55] J. D. Eshelby and R. E. Peierls, “The determination of the elastic field of an ellipsoidal inclusion, and related problems,” *Proceedings of the Royal Society of London. Series A. Mathematical and Physical Sciences*, vol. 241, pp. 376–396, Jan. 1997. Publisher : Royal Society.

- [56] K. W. Desmond and E. R. Weeks, “Measurement of Stress Redistribution in Flowing Emulsions,” *Physical Review Letters*, vol. 115, p. 098302, Aug. 2015. Publisher : American Physical Society.
- [57] F. Schott, B. Dollet, S. Santucci, C. M. Schlepütz, C. Claudet, S. Gstöhl, C. Raufaste, and R. Mokso, “Multiscale stress dynamics in sheared liquid foams revealed by tomo-rheoscopy.” Nov. 2024.
- [58] K. E. Jensen, D. A. Weitz, and F. Spaepen, “Local shear transformations in deformed and quiescent hard-sphere colloidal glasses,” *Physical Review E*, vol. 90, p. 042305, Oct. 2014. Publisher : American Physical Society.
- [59] A. Kabla, “Local Stress Relaxation and Shear Banding in a Dry Foam under Shear,” *Physical Review Letters*, vol. 90, no. 25, 2003.
- [60] C. E. Maloney, “Amorphous systems in athermal, quasistatic shear,” *Physical Review E*, vol. 74, no. 1, 2006.
- [61] A. Tanguy, F. Leonforte, and J. L. Barrat, “Plastic response of a 2D Lennard-Jones amorphous solid : Detailed analysis of the local rearrangements at very slow strain rate,” *The European Physical Journal E*, vol. 20, pp. 355–364, July 2006.
- [62] B. Metzger, “Irreversibility and chaos : Role of long-range hydrodynamic interactions in sheared suspensions,” *Physical Review E*, vol. 82, no. 5, 2010.
- [63] N. K. Agrawal, Z. Ge, M. Trulsson, O. Tammisola, and L. Brandt, “Dense Suspensions in Rotary Shear,” Nov. 2024. arXiv :2411.13463 [cond-mat].
- [64] C. Liu, E. E. Ferrero, F. Puosi, J.-L. Barrat, and K. Martens, “Driving rate dependence of avalanche statistics and shapes at the yielding transition,” *Physical Review Letters*, vol. 116, p. 065501, Feb. 2016. arXiv :1506.08161 [cond-mat].
- [65] E. E. Ferrero and E. A. Jagla, “Criticality in elastoplastic models of amorphous solids with stress-dependent yielding rates,” *Soft Matter*, vol. 15, no. 44, pp. 9041–9055, 2019.
- [66] G. Picard, A. Ajdari, F. Lequeux, and L. Bocquet, “Slow flows of yield stress fluids : complex spatio-temporal behaviour within a simple elasto-plastic model,” *Physical Review E : Statistical, Nonlinear, and Soft Matter Physics*, vol. 71, p. 010501, 2005.
- [67] J. Lin and M. Wyart, “Mean-Field Description of Plastic Flow in Amorphous Solids,” *Physical Review X*, vol. 6, p. 011005, Jan. 2016. Publisher : American Physical Society.
- [68] H. Hinrichsen, “Non-equilibrium Phase Transitions with Long-Range Interactions,” *Journal of Statistical Mechanics : Theory and Experiment*, vol. 2007, pp. P07006–P07006, July 2007. arXiv :cond-mat/0702169.
- [69] M. E. Fisher, “Critical Exponents for Long-Range Interactions,” *Physical Review Letters*, vol. 29, no. 14, pp. 917–920, 1972.
- [70] A. Chessa, H. E. Stanley, A. Vespignani, and S. Zapperi, “Universality in sandpiles,” *Physical Review E*, vol. 59, pp. R12–R15, Jan. 1999. Publisher : American Physical Society.
- [71] A. Chessa, A. Vespignani, and S. Zapperi, “Critical exponents in stochastic sandpile models,” *Computer Physics Communications*, vol. 121-122, pp. 299–302, Sept. 1999.

- [72] A. Rosso, “Depinning of elastic manifolds,” *Physical Review E*, vol. 67, no. 2, 2003.
- [73] K. Wiese, T. Jocteur, R. Mari, and E. Bertin, “Hyperuniformity in the manna model for long-range toppling,” à paraître.
- [74] H. Hinrichsen and M. Howard, “A model for anomalous directed percolation,” *The European Physical Journal B - Condensed Matter and Complex Systems*, vol. 7, pp. 635–643, Feb. 1999.
- [75] T. B. dos Santos, C. I. N. Sampaio Filho, N. A. M. Araújo, C. L. N. Oliveira, and A. A. Moreira, “Crossover from mean-field to $2d$ Directed Percolation in the contact process,” *Physica A : Statistical Mechanics and its Applications*, vol. 512, pp. 352–358, Dec. 2018.
- [76] A. Tangy, M. Gounelle, and S. Roux, “From individual to collective pinning : Effect of long-range elastic interactions,” *Physical Review E*, vol. 58, pp. 1577–1590, Aug. 1998.
- [77] A. Rosso, “Roughness at the depinning threshold for a long-range elastic string,” *Physical Review E*, vol. 65, no. 2, 2002.
- [78] S. Ramanathan, “Onset of propagation of planar cracks in heterogeneous media,” *Physical Review B*, vol. 58, no. 10, pp. 6026–6046, 1998.
- [79] P. Le Doussal, “Two-loop functional renormalization group theory of the depinning transition,” *Physical Review B*, vol. 66, no. 17, 2002.
- [80] B. Zhao, “Interface pinning of immiscible gravity-exchange flows in porous media,” *Physical Review E*, vol. 87, no. 2, 2013.
- [81] M. J. Alava, “Disorder-induced roughening in the three-dimensional Ising model,” *Physical Review B*, vol. 54, no. 21, pp. 14990–14993, 1996.
- [82] H. Sanhedrai and S. Havlin, “Epidemics on evolving networks with varying degrees,” *New Journal of Physics*, vol. 24, p. 053002, May 2022. Publisher : IOP Publishing.
- [83] M. P. S. Mota, G. A. Alves, A. Macedo-Filho, and T. F. A. Alves, “Critical behavior of SIS model on two-dimensional quasiperiodic tilings,” *Physica A : Statistical Mechanics and its Applications*, vol. 510, pp. 577–586, Nov. 2018.
- [84] B. Nettuno, D. Toffenetti, C. Metzl, L. Weigand, F. Raßhofer, R. Swiderski, and E. Frey, “The role of mobility in epidemics near criticality,” *Journal of Physics A : Mathematical and Theoretical*, vol. 57, p. 405002, Sept. 2024. Publisher : IOP Publishing.
- [85] L. Devroye, “General Principles in Random Variate Generation,” in *Non-Uniform Random Variate Generation* (L. Devroye, ed.), pp. 27–82, New York, NY : Springer, 1986.
- [86] M. P. Allen and D. J. Tildesley, *Computer Simulation of Liquids*. Oxford University Press, Aug. 2017. Google-Books-ID : WFExDwAAQBAJ.
- [87] NVIDIA, P. Vingelmann, and F. H. Fitzek, “Cuda, release : 10.2.89,” 2020.
- [88] S. Torquato, “Local density fluctuations, hyperuniformity, and order metrics,” *Physical Review E*, vol. 68, no. 4, 2003.
- [89] Y. Lei and R. Ni, “Non-equilibrium dynamic hyperuniform states,” *Journal of Physics : Condensed Matter*, vol. 37, p. 023004, Oct. 2024. Publisher : IOP Publishing.

- [90] S. Bub Lee, “Hyperuniformity and absorbing phase transition in continuous media with a conserved field,” *Journal of Statistical Mechanics : Theory and Experiment*, vol. 2019, p. 053201, May 2019. Publisher : IOP Publishing and SISSA.
- [91] D. Hexner and D. Levine, “Noise, Diffusion, and Hyperuniformity,” *Physical Review Letters*, vol. 118, p. 020601, Jan. 2017. Publisher : American Physical Society.
- [92] D. Hexner, P. M. Chaikin, and D. Levine, “Enhanced hyperuniformity from random reorganization,” *Proceedings of the National Academy of Sciences*, vol. 114, pp. 4294–4299, Apr. 2017. Publisher : Proceedings of the National Academy of Sciences.
- [93] Z. Ma, “Hyperuniformity of generalized random organization models,” *Physical Review E*, vol. 99, no. 2, 2019.
- [94] “Conversations privées avec k. wiese.”
- [95] Z. Ge and G. J. Elfring, “Rheology of periodically sheared suspensions undergoing reversible-irreversible transition,” *Physical Review E*, vol. 106, p. 054616, Nov. 2022.
- [96] J. S. Guasto, A. S. Ross, and J. P. Gollub, “Hydrodynamic irreversibility in particle suspensions with nonuniform strain,” *Physical Review E*, vol. 81, p. 061401, June 2010. Publisher : American Physical Society.
- [97] S. Farhadi and P. E. Arratia, “Shear-induced reversibility of 2D colloidal suspensions in the presence of minimal thermal noise,” *Soft Matter*, vol. 13, pp. 4278–4284, June 2017. Publisher : The Royal Society of Chemistry.
- [98] M. Abramowitz and I. A. Stegun, eds., *Handbook of Mathematical Functions : with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables*. New York, NY : Dover Publications, 0009-revised edition ed., June 1965.
- [99] S. Rossi, G. Biroli, M. Ozawa, G. Tarjus, and F. Zamponi, “Finite-Disorder Critical Point in the Yielding Transition of Elastoplastic Models,” *Physical Review Letters*, vol. 129, p. 228002, Nov. 2022. Publisher : American Physical Society.
- [100] J. W. Cooley and J. W. Tukey, “An algorithm for the machine calculation of complex Fourier series,” *Mathematics of Computation*, vol. 19, no. 90, pp. 297–301, 1965.
- [101] P. Hebraud and F. Lequeux, “Mode-Coupling Theory for the Pasty Rheology of Soft Glassy Materials,” *Physical Review Letters*, vol. 81, pp. 2934–2937, Oct. 1998. Publisher : American Physical Society.
- [102] J. Lin and M. Wyart, “Microscopic processes controlling the Herschel-Bulkley exponent,” *Physical Review E*, vol. 97, p. 012603, Jan. 2018.
- [103] S. Lübeck, “Universal finite-size scaling behavior and universal dynamical scaling behavior of absorbing phase transitions with a conserved field,” *Physical Review E*, vol. 68, no. 5, 2003.
- [104] A. Vespignani, R. Dickman, M. A. Muñoz, and S. Zapperi, “Absorbing-state phase transitions in fixed-energy sandpiles,” *Physical Review E*, vol. 62, pp. 4564–4582, Oct. 2000. Publisher : American Physical Society.
- [105] W. H. Herschel and R. Bulkley, “Konsistenzmessungen von Gummi-Benzollösungen,” *Kolloid-Zeitschrift*, vol. 39, pp. 291–300, Aug. 1926.

- [106] G. Katgert, A. Latka, M. E. Möbius, and M. van Hecke, “Flow in linearly sheared two-dimensional foams : From bubble to bulk scale,” *Physical Review E*, vol. 79, p. 066318, June 2009. Publisher : American Physical Society.
- [107] L. Becu, S. Manneville, and A. Colin, “Yielding and Flow in Adhesive and Non-adhesive Concentrated Emulsions,” *Physical Review Letters*, vol. 96, p. 138302, Apr. 2006. Publisher : American Physical Society.
- [108] P. Jop, V. Mansard, P. Chaudhuri, L. Bocquet, and A. Colin, “Microscale Rheology of a Soft Glassy Material Close to Yielding,” *Physical Review Letters*, vol. 108, p. 148301, Apr. 2012. Publisher : American Physical Society.
- [109] G. Ovarlez, L. Tocquer, F. Bertrand, and P. Coussot, “Rheopexy and tunable yield stress of carbon black suspensions,” *Soft Matter*, vol. 9, pp. 5540–5549, May 2013. Publisher : The Royal Society of Chemistry.
- [110] R. Besseling, E. R. Weeks, A. B. Schofield, and W. C. K. Poon, “Three-Dimensional Imaging of Colloidal Glasses under Steady Shear,” *Physical Review Letters*, vol. 99, p. 028301, July 2007. Publisher : American Physical Society.
- [111] V. Delbecq, P. Carrez, and P. Cordier, “Rheological properties of Mg₂SiO₄ glass : A molecular dynamics study,” *Journal of Non-Crystalline Solids*, vol. 619, p. 122572, Nov. 2023.
- [112] C. Fusco, T. Albaret, and A. Tanguy, “Rheological properties vs. local dynamics in model disordered materials at low temperature,” *The European Physical Journal E*, vol. 37, pp. 1–9, May 2014. Company : Springer Distributor : Springer Institution : Springer Label : Springer Number : 5 Publisher : Springer Berlin Heidelberg.
- [113] P. Hebraud and F. Lequeux, “Mode-Coupling Theory for the Pasty Rheology of Soft Glassy Materials,” *Physical Review Letters*, vol. 81, pp. 2934–2937, Oct. 1998.
- [114] J. Olivier, *Fluides vitreux, sutures crano faciales, diffusion reactive : quelques contributions à l'étude de ces systèmes multi-échelles ou singuliers*. phdthesis, Universite de Grenoble, July 2011.
- [115] E. Bertin, “Stochastic resetting of a population of random walks with resetting-rate-dependent diffusivity,” *Journal of Physics A : Mathematical and Theoretical*, vol. 55, p. 384007, Aug. 2022. Publisher : IOP Publishing.
- [116] E. Agoritsas, E. Bertin, K. Martens, and J.-L. Barrat, “On the relevance of disorder in athermal amorphous materials under shear,” *The European Physical Journal E*, vol. 38, p. 71, July 2015.
- [117] J.-P. Bouchaud, S. Gualdi, M. Tarzia, and F. Zamponi, “Spontaneous instabilities and stick-slip motion in a generalized Hebraud–Lequeux model,” *Soft Matter*, vol. 12, pp. 1230–1237, Jan. 2016. Publisher : The Royal Society of Chemistry.
- [118] D. Pan, A. Inoue, T. Sakurai, and M. W. Chen, “Experimental characterization of shear transformation zones for plastic flow of bulk metallic glasses,” *Proceedings of the National Academy of Sciences*, vol. 105, pp. 14769–14772, Sept. 2008. Publisher : Proceedings of the National Academy of Sciences.
- [119] Z. Budrikis, D. F. Castellanos, S. Sandfeld, M. Zaiser, and S. Zapperi, “Universal features of amorphous plasticity,” *Nature Communications*, vol. 8, p. 15928, July 2017. Number : 1 Publisher : Nature Publishing Group.

- [120] E. A. Jagla, “Different universality classes at the yielding transition of amorphous systems,” *Physical Review E*, vol. 96, p. 023006, Aug. 2017.
- [121] D. J. Korchinski and J. Rottler, “Thermally activated intermittent flow in amorphous solids,” *Soft Matter*, vol. 20, pp. 7891–7913, Oct. 2024. Publisher : The Royal Society of Chemistry.
- [122] C. Liu, *Critical dynamics at the yielding transition and creep behavior of amorphous systems : mesoscopic modeling*. phdthesis, Universite Grenoble Alpes, Nov. 2016.
- [123] K. Binder, “Finite size scaling analysis of ising model block distribution functions,” *Zeitschrift für Physik B Condensed Matter*, vol. 43, pp. 119–140, June 1981.
- [124] K. Martens, L. Bocquet, and J.-L. Barrat, “Spontaneous formation of permanent shear bands in a mesoscopic model of flowing disordered matter,” *Soft Matter*, vol. 8, pp. 4197–4205, Mar. 2012. Publisher : The Royal Society of Chemistry.
- [125] H. Nishimori, G. Ortiz, H. Nishimori, and G. Ortiz, *Elements of Phase Transitions and Critical Phenomena*. Oxford Graduate Texts, Oxford, New York : Oxford University Press, Oct. 2015.
- [126] A. Nicolas, *Ecoulements des solides amorphes : modelisation elastoplastique et theorie de couplage de modes*. These de doctorat, Grenoble, Oct. 2014.
- [127] X. Cao, S. Bouzat, A. B. Kolton, and A. Rosso, “Localization of soft modes at the depinning transition,” *Physical Review E*, vol. 97, p. 022118, Feb. 2018. Publisher : American Physical Society.
- [128] S. Chowdhury, S. Abraham, T. Hudson, and P. Harrowell, “Long range stress correlations in the inherent structures of liquids at rest,” *The Journal of Chemical Physics*, vol. 144, p. 124508, Mar. 2016.
- [129] M. Maier, A. Zippelius, and M. Fuchs, “Emergence of Long-Ranged Stress Correlations at the Liquid to Glass Transition,” *Physical Review Letters*, vol. 119, p. 265701, Dec. 2017. Publisher : American Physical Society.
- [130] E. Lerner, “Simple argument for emergent anisotropic stress correlations in disordered solids,” *The Journal of Chemical Physics*, vol. 153, p. 216101, Dec. 2020.
- [131] M. N. Semeikin and K. J. Wiese, “Roughness and critical force for depinning at 3-loop order,” *Physical Review B*, vol. 109, p. 134203, Apr. 2024. Publisher : American Physical Society.
- [132] B. A. Sun, H. B. Yu, W. Jiao, H. Y. Bai, D. Q. Zhao, and W. H. Wang, “Plasticity of Ductile Metallic Glasses : A Self-Organized Critical State,” *Physical Review Letters*, vol. 105, p. 035501, July 2010. Publisher : American Physical Society.
- [133] J. Lauridsen, M. Twardos, and M. Dennin, “Shear-Induced Stress Relaxation in a Two-Dimensional Wet Foam,” *Physical Review Letters*, vol. 89, p. 098303, Aug. 2002. Publisher : American Physical Society.
- [134] K. M. Salerno, “Effect of inertia on sheared disordered solids : Critical scaling of avalanches in two and three dimensions,” *Physical Review E*, vol. 88, no. 6, 2013.
- [135] N. Oyama, H. Mizuno, and A. Ikeda, “Unified view of avalanche criticality in sheared glasses,” *Physical Review E*, vol. 104, p. 015002, July 2021. Publisher : American Physical Society.

- [136] M. Talamali, V. Petäjä, D. Vandembroucq, and S. Roux, “Avalanches, precursors, and finite-size fluctuations in a mesoscopic model of amorphous plasticity,” *Physical Review E*, vol. 84, p. 016115, July 2011. Publisher : American Physical Society.
- [137] D. V. Denisov, K. A. Lörincz, J. T. Uhl, K. A. Dahmen, and P. Schall, “Universality of slip avalanches in flowing granular matter,” *Nature Communications*, vol. 7, p. 10641, Feb. 2016. Publisher : Nature Publishing Group.
- [138] T. Mäkinen, A. D. S. Parmar, S. Bonfanti, and M. J. Alava, “Avalanches in Cu-Zr-Al metallic glasses,” *Physical Review E*, vol. 111, p. 014107, Jan. 2025. Publisher : American Physical Society.
- [139] C. Le Priol, “Spatial Clustering of Depinning Avalanches in Presence of Long-Range Interactions,” *Physical Review Letters*, vol. 126, no. 2, 2021.
- [140] T. Jocteur, E. Bertin, R. Mari, and K. Martens, “Protocol dependence for avalanches under constant stress in elastoplastic models,” *Physical Review E*, vol. 111, p. 024101, Feb. 2025. Publisher : American Physical Society.
- [141] J. F. Joanny and P. G. de Gennes, “A model for contact angle hysteresis,” *The Journal of Chemical Physics*, vol. 81, pp. 552–562, July 1984.
- [142] A. Rosso, *Dépiégeage de variétés élastiques en milieu aléatoire*. thesis, Paris 6, Jan. 2002.
- [143] S. Moulinet, C. Guthmann, and E. Rolley, “Roughness and dynamics of a contact line of a viscous fluid on a disordered substrate,” *The European Physical Journal E*, vol. 8, pp. 437–443, July 2002. Company : Springer Distributor : Springer Institution : Springer Label : Springer Number : 4 Publisher : EDP Sciences.
- [144] P. Le Doussal, K. J. Wiese, S. Moulinet, and E. Rolley, “Height fluctuations of a contact line : A direct measurement of the renormalized disorder correlator,” *Europhysics Letters*, vol. 87, p. 56001, Sept. 2009.
- [145] J. Schmittbuhl and K. J. Måløy, “Direct Observation of a Self-Affine Crack Propagation,” *Physical Review Letters*, vol. 78, pp. 3888–3891, May 1997. Publisher : American Physical Society.
- [146] A. Delaplace, J. Schmittbuhl, and K. J. Måløy, “High resolution description of a crack front in a heterogeneous Plexiglas block,” *Physical Review E*, vol. 60, pp. 1337–1343, Aug. 1999. Publisher : American Physical Society.
- [147] S. Santucci, M. Grob, R. Toussaint, J. Schmittbuhl, A. Hansen, and K. J. Maløy, “Fracture roughness scaling : A case study on planar cracks,” *Europhysics Letters*, vol. 92, p. 44001, Nov. 2010.
- [148] C. Le Priol, J. Chopin, P. Le Doussal, L. Ponson, and A. Rosso, “Universal Scaling of the Velocity Field in Crack Front Propagation,” *Physical Review Letters*, vol. 124, p. 065501, Feb. 2020. Publisher : American Physical Society.
- [149] M. L. Goff, *Flow and dynamics of driven and active amorphous materials : a multi-scale modeling approach*. phdthesis, Université Grenoble Alpes [2020-....], Mar. 2021.
- [150] *Physique et outils mathématiques ; méthodes et exemples - Angel Alastuey, Marc Magro, Pierre Pujol - Edp Sciences - Grand format - Librairie Gallimard Paris*.
- [151] M. Lisicki, “Four approaches to hydrodynamic Green’s functions – the Oseen tensors,” Dec. 2013. arXiv :1312.6231 [physics].

- [152] S. Jespersen, R. Metzler, and H. C. Fogedby, “L\’evy flights in external force fields : Langevin and fractional Fokker-Planck equations and their solutions,” *Physical Review E*, vol. 59, pp. 2736–2745, Mar. 1999. Publisher : American Physical Society.
- [153] J. Weiss, L. Girard, F. Gimbert, D. Amitrano, and D. Vandembroucq, “(Finite) statistical size effects on compressive strength,” *Proceedings of the National Academy of Sciences*, vol. 111, pp. 6231–6236, Apr. 2014. Publisher : Proceedings of the National Academy of Sciences.
- [154] I. Dornic, H. Chaté, and M. A. Muñoz, “Integration of Langevin Equations with Multiplicative Noise and the Viability of Field Theories for Absorbing Phase Transitions,” *Physical Review Letters*, vol. 94, p. 100601, Mar. 2005. Publisher : American Physical Society.
- [155] M. A. Muñoz, “Mean-field limit of systems with multiplicative noise,” *Physical Review E*, vol. 72, no. 5, 2005.
- [156] M. A. Munoz, “Multiplicative Noise in Non-equilibrium Phase Transitions : A tutorial,” May 2003. arXiv :cond-mat/0303650.