

分 类 号: TP 18

密 级: 公 开

学校代码: 10699

学 号: 007110069

西北工业大学

博士学位论文

(学位研究生)

题目: 复杂系统中分形混沌与
逻辑的相关性推理研究

作者姓名: 陈志成

入学日期: 2000 年 09 月

所属院系: 计算机学院

指导教师: 何华灿(教授)

研究方向: 人工智能基础理论

学科专业: 计算机软件与理论

西北工业大学研究生院

申请学位日期: 2004 年 04 月 10 日

Studies on Correlation Reasoning of Fractal, Chaos, and Logic in Complex System

Dissertation Submitted to
Northwestern Polytechnical University
For the Doctor's Degree of Philosophy

Candidate: *Mr.* Chen Zhi-cheng

Supervisor : *Prof.* He Hua-can

Specialty : **Computer Software and Theory**

The College of Computer
Northwestern Polytechnical University, Xi'an, China

Date: April, 10th, 2004

摘要

本课题的研究来源于：国家自然科学基金（60273087）、北京市自然科学基金（4032009）、国家十五 863 重大基金（2001AA113400）在研资助项目。

在现实世界中，复杂系统无处不在，其表现形态多种多样。自 20 世纪 70 年代以来，对复杂系统的研究是卓有成效的，其中的非线性科学，尤其是分形论与混沌学，得到了前所未有的快速发展与广泛应用。对复杂系统的研究已经成为当今科学的一大主题，对其中各要素、各过程的判断、推理、控制则是研究热点。

由于复杂系统中存在各种不确定性及相互关系，经典的二值逻辑对于人脑思维等复杂系统来说太刚性，模糊逻辑的出现改变了人们长期以来的二值观，但它忽略了事物之间的相关性。泛逻辑提出了广义相关系数 h 和广义自相关系数 k 的概念，给出了柔性逻辑学的统一框架。泛逻辑在人工智能和逻辑理论的研究中已经得到良好的应用，目前正在探求各种现实复杂系统中的逻辑规律，比如分形与混沌系统。

“如何在分形与混沌之类的复杂系统中运用逻辑推理，它需要什么样的理论支持？”，根据现有的泛逻辑和分形混沌理论，存在的问题主要有：

(1) 在分形与混沌领域，不少研究者都在探求其逻辑规律，但其表现形式、运算模型、应用方式尚不清楚，目前还没有“可推理”的分形逻辑或混沌逻辑出现。

(2) 分形维数作为刻画分形事物和混沌吸引子的标志性参数，目前有多种与测度相关的求解方法，但是测度的选取主要依赖于经验，没有统一的理论指导。

(3) 一些复杂系统中的参数很难用隶属度函数转化到 $[0,1]$ 区间上来进行推理，但它们又具有明显的逻辑运算语义，这就要求建立任意区间 $[a,b]$ 上的逻辑推理系统。

(4) 泛逻辑已用 h 和 k 把模糊逻辑的“最小最大”原则柔性化。但对于现实复杂问题，目前还没有求解 h 和 k 的切实可行的方法，这制约了它在柔性推理中的应用。

有鉴于此，本课题将探讨复杂系统中分形、混沌、逻辑之间的相关性，试图给出以上部分问题的求解方法，提出了“基于分形逻辑的复杂系统相关性推理模型（CSCRM）”，并对其各个部分进行了系统地研究，主要工作与创新有：

(1) 概念引入

- 在分形领域中引入了逻辑运算的概念，给出了“可推理”的分形逻辑的定义、分类、连接词运算模型，研究了广义区间上的连续值基分数逻辑的运算性质。

(2) 关系探讨

- 探讨了分形、混沌、逻辑三者之间的广义相关性，从一定角度看有关系式：

相似分形结构+广义逻辑规则=混沌动力行为。

- 探讨了广义 NT 性生成元的分形性和初值敏感性，以及分叉方程的自相关性。

(3) 模型建立

• 提出了 CSCRM 模型，架起了泛逻辑理论与复杂系统柔性推理之间的实用性桥梁，这有利于加速泛逻辑自身的发展及其在柔性推理与柔性控制中的应用。

- 基于广义 NTS 范数理论，给出了分形逻辑各连接词的零级和一级运算模型。

(4) 理论研究

• 在分形理论中引入“单位格”与“参考格空间”等重要概念，提出了一种新的维数理论——格分维理论，给出了一种求解任意几何图形（图像）分形维数的统一算法。利用格分维理论研究了康托集和任意几何图像的分形逻辑运算。

• 根据复杂系统参数不一定限于 $[0,1]$ 区间的事实在逻辑推理中引入了广义区间 $[a,b]$ 的概念，研究了广义区间上的 NTS 性生成元及其范数的定义与性质。

(5) 技术方法

• 在多参数复杂系统中，把“求解局部相关系数”转化为“求解全局相关系数”，从而给出了求解两命题之间的广义相关系数 h 值的方法。

• 在研究广义 N 范数的基础上，结合复杂系统中参数的分布函数，给出了求解广义自相关系数 k 值的一般步骤，并推导出了重要的“直通 NLK 公式”。同时研究了均匀分布、指数分布、正态分布随机参量的广义自相关性。

(6) 仿真模拟

- 对分形逻辑的各连接词运算模型进行了图像的连续变化仿真。
- 对格分维理论应用在康托集和任意几何图像中的分形逻辑运算进行了仿真。
- 对分叉方程、曼得波罗特集、洛伦兹混沌等分形与混沌系统进行了图像仿真。

(7) 应用研究

• 研究了自动焊机稳定性的柔性控制，它是 CSCRM 模型的应用范例。

• 把汉字看成复杂图像，研究了 GB18030 汉字的分形特性与复杂特性，体现了分形逻辑在分形领域的应用模式，给出了一种汉字复杂性分类的新方法。

• 应用分形逻辑研究其它逻辑，给出了研究无穷区间逻辑、混沌逻辑等的思路。

总体而言，本文属于人工智能的逻辑基础理论。文中格分维理论是一种全新的思想，求解 h 和 k 的方法是实现相关性推理的关键技术，广义 NTS 范数理论为任意区间上的推理提供理论支持。对于混沌，本文主要探讨了它与分形、逻辑之间的相关性。文中部分概念还需要在应用中进一步完善，预期可派生出若干新的研究课题。

关键词：复杂系统，分形，混沌，泛逻辑，分形逻辑，混沌逻辑，广义相关性，广义自相关性，广义 NTS 范数，格分维理论，康托集，运算模型，汉字复杂性

Abstract

The theoretic study of this paper comes from the National Nature Science Foundation (No.60273087), Beijing Nature Science Foundation (No.4032009), and National 10th five 863 special program (No.2001AA113400).

In the real world, complex systems exist anywhere, and they have many kinds of forms. Since 1970's, There are many fruitful studies on complex system. The nonlinear sciences, especially fractal and chaos, have rapid development and wide application. It is an important subject to study complex system today. And there are hotspots to judge, reason and control the factors and processes.

Because of all kinds of uncertainties in complex system and correlation, the classical two-value logic is too rigid for complex systems, such as human brain's thinking. The birth of fuzzy logic changes the long viewpoint of people's two-value. But fuzzy logic ignores the correlation between things. Universal logic puts forward the conceptions of general correlation coefficient " h " and general self-correlation coefficient " k ", and gives the uniform frame. Universal logic has good application in Artificial Intelligence and the studies on logic theories, and now is searching for the logic laws in real complex systems, such as fractal and chaos systems.

“How to reason in fractal and chaos complex systems with logic. What theory is necessary for this?”. According to today's universal logic and fractal chaos principles, the main problems are:

(1) In the fields of fractal and chaos, many people try to search after the logic laws. But their forms, operation models and application ways are not clear. There is not “reasoning” fractal logic or chaos logic now.

(2) As a representational parameter to describe fractal things and chaos attractors, fractal dimension can be calculated in several methods, which is related to measure. But the measure mainly depends on sense datum, and there is not a uniform theory for this.

(3) In complex system, it is difficult to convert some parameters into interval [0,1]. Because these parameters have obvious meaning in logic, it is necessary to establish a logic reasoning system in interval [a,b].

(4) Universal logic has made the “min or max” principles of fuzzy logic flexible. But for real complex systems, there is not a practical method for calculating the value of

h or *k*. It limits the application of universal in flexible reasoning.

According to the above problems, the object of this paper is to probe into the correlation of fractal, chaos and logic, and try to solve some above problems. The paper puts up “The Complex System Correlation Reasoning Model (CSCRM)”, and studies the every part of it completely. The following items are the main work and innovations.

(1) Import conception

- Imports the conception of logic operation into fractal filed, and gives the definition and classification of the “reasoning” fractal logic. Then gives the operation models of connectives. This paper mainly studies the operation properties of continuous radix fractal logic based on general interval [a,b].

(2) Discuss correlation

- Analyses the general correlation of fractal, chaos and logic. To some degreed, there is the expression: Similar fractal structurse add General logic rules equal to Chaos dynamic behaviors.

- Discusses the fractal characteristic and the sensitivity for initial value of general NTS generators, and the general self-correlation of bifurcate equation.

(3) Establish models

- Puts up the CSCRM, and sets up the practical bridge between universal theory and the correlation reasoning of complex system. It is propitious to develop universal logic itself and accelerate the application in flexible reasoning and flexible control.

- Based on the general NTS norms theories, gives the zero-level and one-level operation models of connectives of fractal logic.

(4) Study theories

- Imports the important conceptions of “unit grid” and “reference grid space” into fractal theory. Puts up a new kind of dimention theory——“grid fractal dimention theory”. Gives a uniform method of calculating the fractal dimention of any geometrical image. Studies the fractal logic operations of cantor set and any geometrical image.

- According to the fact that the values of many parameters in complex systems is not in interval [0,1], imports the conception of general interval [a,b], and studies the definitions and properties of general NTS generators and their norms.

(5) Technologies or methods

- In the complex systems that have many parameters, converts the “local correlation coefficient” to “global correlation coefficient”, and gives the method of calculating the general correlation coefficient between two propositions.

•Based on the study of general N norms and the distribution functions of parameters in complex systems, gives the general steps of calculating the general self-correlation coefficient. Deduce the important “the immediate NLK formulas”. At this time, studies the general self-correlation of uniform distribution, exponential distribution, normal distribution.

(6) Simulations

- Simulates the operation models of connectives of fractal logic for watching the continuous changes.
- Simulates the fractal logic operation of cantor set and any geometrical image with grid fractal dimention theory.
- Simulates some typical fractal and chaos image, such as bifurcate equation, mandelbrot set, Lorenz chaos system, etc.

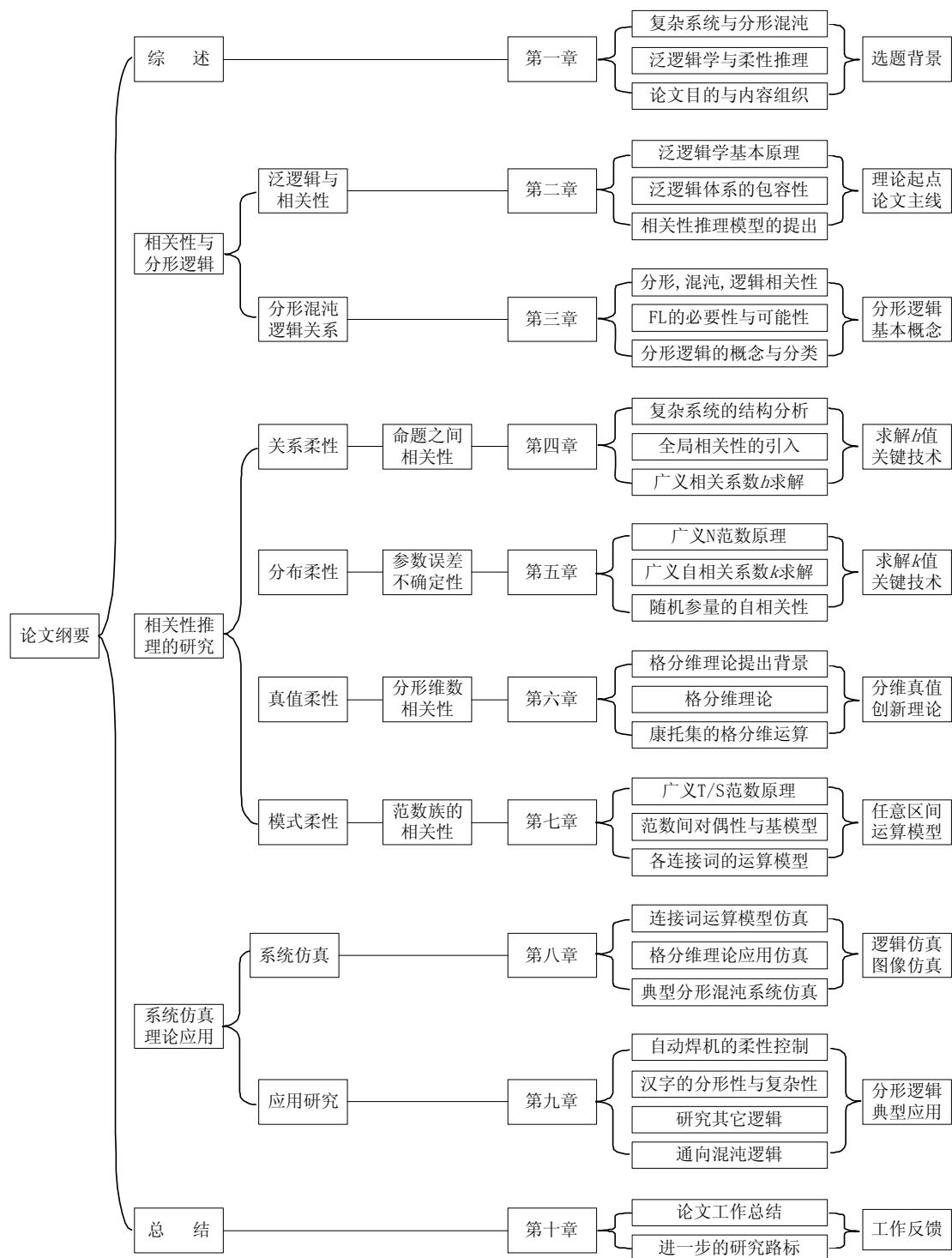
(7) Study applications

- Studies the flexible control of the stability of auto-weld machine. It is a applied example of CSCRM.
- Considering Chinese-word as complex image, studies its fractal characteristic and complexity. It is the embodiment of the application ways of fractal logic. Gives a new method for the classification of Chinese-word complexity.
- Studies other logic using fractal. Gives the ways to infinite logic and chaos logic.

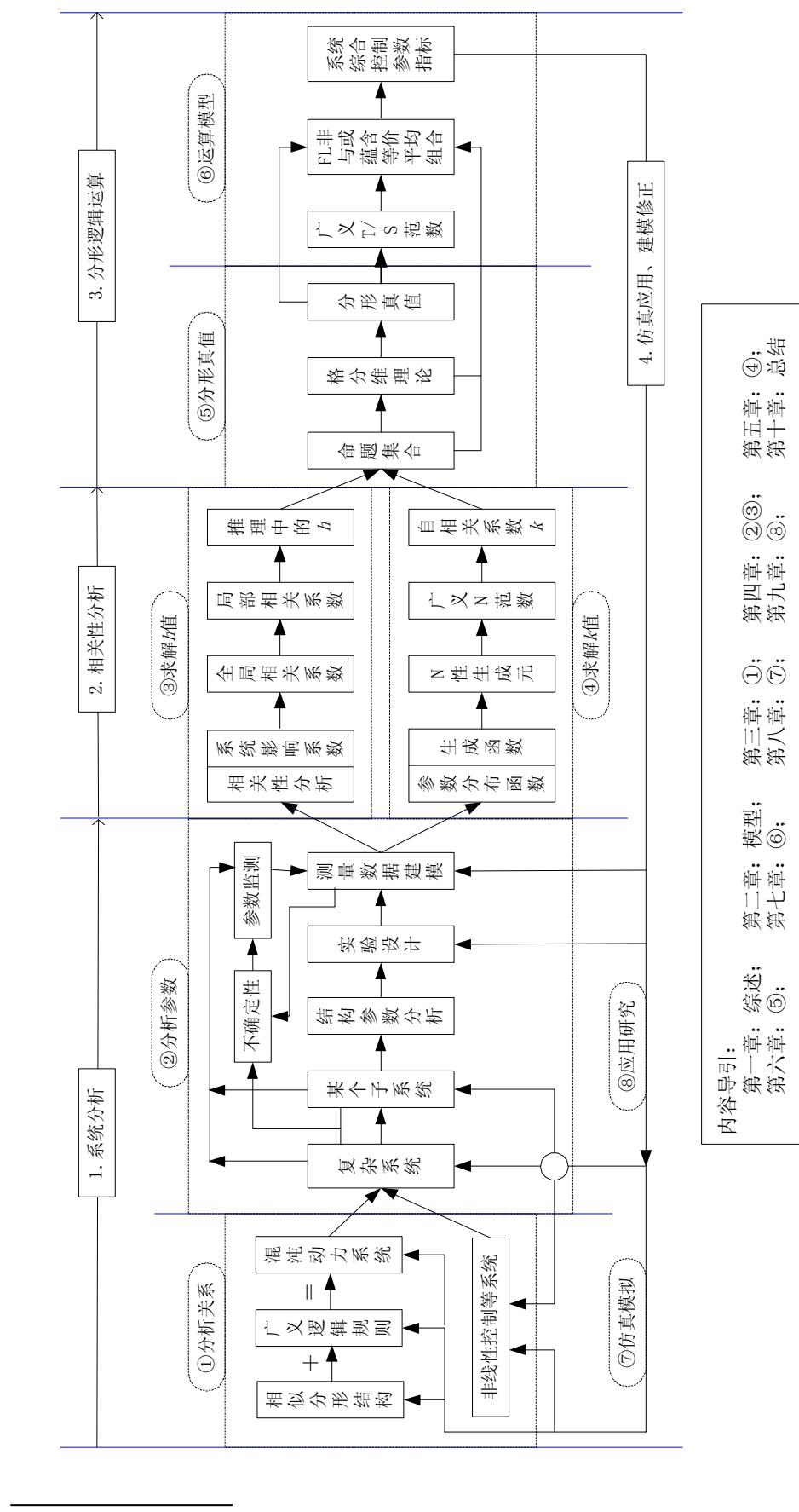
In the whole work, this paper is on the theory of logical foundation of Artificial Intelligence. The grid fractal dimention theory is a new idea. The methods of calculating the values of h and k are pivotal technologies for correlation reasoning. The general NTS norms offer the theories for reasoning based on general interval $[a,b]$. for chaos, this paper manily analyses the correlation of fractal, chaos and logic. Some conceptions should be perfected in the following applications, and they can generate some new research subjects.

Key words: Complex system, Fractal, Chaos, Universal logic, Fractal logic, Chaos logic, General correlation, General self-correlation, General NTS-norms, Grid fractal dimension theory, Cantor set, Opration model, Chinese-word complexity

论 文 导 图



导图一(图1.4) 复杂系统中分形混沌与逻辑的相关性推理研究 (论文纲要)



目 录

摘 要	I
ABSTRACT	III
论 文 导 图	VI
符号与概念约定	XIV
第一章 综 述	1
1.1 未来科学发展的转向	1
1.1.1 自然科学的确定论困惑	1
1.1.2 社会科学的复杂性研究	2
1.1.3 非线性科学的迅速发展	2
1.2 复杂系统与分形混沌	3
1.2.1 复杂系统无处不在	3
1.2.2 分形论的国内外研究现状	3
1.2.3 混沌学的发展历史与现状	4
1.3 泛逻辑学与柔性推理	5
1.3.1 逻辑学的研究与发展	5
1.3.2 经典逻辑是刚性逻辑	6
1.3.3 泛逻辑学与柔性推理	6
1.4 选题内容与目的创新	7
1.4.1 课题的目的与意义	7
1.4.2 研究思路与内容组织	8
1.4.3 课题的创新性分析	8
第二章 泛逻辑原理与相关性推理模型.....	10
2.1 泛逻辑学基本原理	10
2.1.1 泛逻辑学的四大要素	10

2.1.2 广义相关性与自相关性	11
2.1.3 零级泛逻辑运算模型	14
2.2 泛逻辑学体系的包容性	15
2.2.1 泛逻辑的完备性与开放性	15
2.2.2 包含不确定性的推理模型	17
2.3 复杂系统相关性推理模型	18
2.3.1 复杂系统中的不确定性	18
2.3.2 复杂系统需要柔性控制	20
2.3.3 复杂系统相关性推理模型	20
2.4 小结	22
第三章 分形、混沌、逻辑的相关性.....	24
3.1 分形、混沌、逻辑的相关性.....	24
3.1.1 分形与逻辑的相关性	24
3.1.2 混沌的概念及其特征	27
3.1.3 分形与混沌的相关性	29
3.1.4 分形、混沌、逻辑的相关性	30
3.2 有关建立分形逻辑的探讨.....	32
3.2.1 建立分形逻辑的必要性	32
3.2.2 建立分形逻辑的可能性	34
3.3 分形逻辑研究纲要	36
3.3.1 分形逻辑的四大要素	36
3.3.2 分形逻辑的定义与分类	37
3.3.3 分形逻辑的换基规则	39
3.3.4 分形逻辑中的相关系数定义	40
3.4 小结	41
第四章 复杂系统组成与广义相关性	42
4.1 复杂系统的组成结构	42
4.1.1 复杂系统的组成结构	42
4.1.2 全局相关性与局部相关性	43
4.1.3 相关性推理原理	45
4.2 由系统相关性求h的方法	46

4.2.1 系统影响系数 h_S 求解.....	46
4.2.2 广义相关系数 h 求解	48
4.2.3 推理过程中的 h 求解	49
4.3 由已知算子求h的方法	50
4.3.1 标准长度法	51
4.3.2 函数拟合法	52
4.4 小结	53
 第五章 广义N范数与自相关性	54
5.1 广义N范数的定义与性质.....	54
5.1.1 广义N范数的定义	54
5.1.2 广义N范数的主要性质	55
5.2 N性生成元与N范数的生成	56
5.2.1 N性生成元定义与性质	56
5.2.2 N范数生成定理	58
5.2.3 广义自相关系数的求解	60
5.2.4 直通NLK公式	60
5.3 随机参量的自相关性	65
5.3.1 均匀分布	65
5.3.2 指数分布	68
5.3.3 正态分布	72
5.4 从实验数据求广义自相关系数	77
5.4.1 实验数据的正交分析与自相关系数	77
5.4.2 求 k 值的换基规则使用原则	80
5.4.3 求解广义自相关系数的步骤总结	82
 第六章 格分维理论与康托集的逻辑运算	83
6.1 格分维理论的提出背景	83
6.1.1 命题真值的柔性化	83
6.1.2 线段的维数是多少	84
6.1.3 现有分维求解方法	85
6.1.4 现有维数的局限性	87
6.2 格分维理论	88

6.2.1 单位格与格图象	88
6.2.2 格空间、格测度、格分维	90
6.2.3 参考格分维与本征格分维	93
6.2.4 格分维求解步骤	95
6.2.5 线段的格分维	96
6.2.6 条件格分维、比例格分维	97
6.2.7 维数与位置的相关性	98
6.2.8 维数变换定律	100
6.2.9 格分维与现有分维的比较	103
6.3 康托集的格分维与分形逻辑运算	104
6.3.1 自相似康托集的定义	105
6.3.2 康托集的格图象与格分维	105
6.3.3 康托集的分形逻辑运算	107
6.3.4 进一步探讨的问题	109
6.3.5 几何图象的格分维与逻辑运算	109
6.4 小结	111
第七章 广义T/S范数与连接词运算模型	112
7.1 广义T/S范数的一般原理	112
7.1.1 广义T范数的概念与性质	112
7.1.2 广义S范数的概念与性质	114
7.1.3 广义T/S性生成元的概念与类型	115
7.1.4 广义T/S范数生成定理	118
7.2 广义NTS范数完整簇与连接词运算基模型	121
7.2.1 广义N范数完整簇	121
7.2.2 广义幂型N范数完整簇	122
7.2.3 广义T/S范数完整簇	123
7.2.4 广义NTS性生成元的对偶性	124
7.2.5 广义NTS范数之间的对偶性	125
7.2.6 分形逻辑的连接词运算基模型	127
7.3 分形逻辑的连接词运算模型	129
7.3.1 分形非运算模型	129
7.3.2 分形与运算模型	130
7.3.3 分形或运算模型	132

7.3.4 分形蕴涵运算模型	134
7.3.5 分形等价运算模型	137
7.3.6 分形平均运算模型	139
7.3.7 分形组合运算模型	141
7.4 小结与说明.....	148
 第八章 分形逻辑与分形混沌系统仿真..... 149	
8.1 分形逻辑的连接词运算仿真.....	149
8.1.1 广义NT性生成元的分形特性	149
8.1.2 广义NT性生成元的初值敏感性.....	150
8.1.3 连接词运算仿真系统	151
8.2 格分维理论的应用仿真.....	152
8.2.1 康托集的格分维与逻辑运算仿真	152
8.2.2 几何图象的格分维与逻辑运算仿真	152
8.3 典型分形与混沌系统的图象仿真.....	153
8.3.1 仿真方法与仿真系统设计	153
8.3.2 分叉方程仿真及其自相关性分析	154
8.3.3 生物细胞生长的分形模拟	156
8.3.4 朱丽亚与曼得波罗特集仿真.....	157
8.3.5 洛伦兹混沌吸引子的仿真	158
8.4 小结与说明.....	159
 第九章 相关性推理模型与分形逻辑的应用研究 160	
9.1 自动焊机的柔性控制.....	160
9.1.1 焊接参数稳定性与质量稳定性	160
9.1.2 基于相关性推理的柔性控制原理	162
9.1.3 柔性控制过程的模拟计算	164
9.1.4 本节小结	165
9.2 GB18030 汉字的分形特性与复杂特性	166
9.2.1 汉字的图象与格分维计算方法	166
9.2.2 汉字的分形特性	167
9.2.3 汉字分维与结构复杂性的关系	169
9.2.4 汉字分维与复杂性分类的逻辑关系	172

9.2.5 本节小结	176
9.3 由分形逻辑研究其它逻辑	176
9.3.1 生成现有的典型逻辑	176
9.3.2 研究无穷区间上的逻辑	177
9.3.3 不同参数域的逻辑推理	179
9.3.4 研究自相似和分数维逻辑	179
9.4 通向混沌逻辑	180
 第十章 总结与路标	182
10.1 本文工作的总结	182
10.2 进一步研究路标	183
 参 考 文 献	184
博士期间发表的文章与科研实践	193
致 谢	195
跋 记	196

符号与概念约定

1. 主要符号约定

h' : 标准相关系数, $h' \in [0, 1]$;	h : 广义相关系数, $h \in [-1, 1]$
k' : 标准自相关系数, $k' \in [0, 1]$;	k : 广义自相关系数, $k \in [-1, 1]$
l' : 标准不动点, $l' \in [0, 1]$;	l : 广义不动点, $l \in [a, b]$
F : 分形体(对象);	G : 几何(集合)图象(图形)、格图象
δ : 单位格;	S : 参考格空间
L : 格测度集;	D : 分形维数、格分维

\sim_k 、 $\wedge_{h,k}$ 、 $\vee_{h,k}$ 、 $\rightarrow_{h,k}$ 、 $\leftrightarrow_{h,k}$ 、 $\oplus_{h,k}$ 、 $\odot^e_{h,k}$: 泛逻辑与分形逻辑的柔性命题连接词
 $N(x)$ 、 $T(x,y)$ 、 $S(x,y)$ 、 $I(x,y)$ 、 $Q(x,y)$ 、 $M(x,y)$ 、 $C^e(x,y)$: 连接词基模型与范数
 $N(x)$ 、 $T(x,y,h)$ 、 $S(x,y,h)$ 、 $I(x,y,h)$ 、 $Q(x,y,h)$ 、 $M(x,y,h)$ 、 $C^e(x,y,h)$: 零级模型
 $N(x,k), T(x,y,h,k), S(x,y,h,k), I(x,y,h,k), Q(x,y,h,k), M(x,y,h,k), C^e(x,y,h,k)$: 一级模型

条件表达式: $\text{ite}\{\beta|\alpha; \gamma\}$ 表示: 如果 α 为真, 则 β ; 否则 γ 。

$$\text{ite}\{\beta_1|\alpha_1; \beta_2|\alpha_2; \gamma\} = \text{ite}\{\beta_1|\alpha_1; \text{ite}\{\beta_2|\alpha_2; \gamma\}\}.$$

限幅函数式: $\Gamma_a^b[x] = \text{ite}\{b|x>b; a|x<a; x\}$, 可以只限 a,b 之一。

2. 基本概念约定

对于任意有限区间 $[a, b]$, 以及 $(-\infty, +\infty)$, 统称为“广义区间”;

对于特定区间 $[0, 1]$, 称其为“标准区间”。

对于概念“X”, 约定:

如果在广义区间上考察, 称其为 “[a,b] 上的广义 X”, 简称“广义 X”;

如仅在标准区间上考察, 称其为 “[0,1] 上的标准 X”, 简称“标准 X”。

在意义明确的情况下, 二者均可直接简称为“X”。

文中的概念“X”包括: 相关系数、生成函数、NTS 性生成元(簇及完整簇)、NTS 范数(簇及完整簇)、(基)模型、NTS(簇及完整簇)等。

第一章 综述

课题以复杂系统的相关性推理为中心，在阐述“复杂系统——分形混沌——逻辑规律”之间的广义相关性的基础上，尝试在分形领域引入逻辑运算的概念，建立了基于分形逻辑的复杂系统相关性推理模型。论文对模型中的各个部分进行了系统地研究，力求探索复杂系统中分形混沌与逻辑推理之间的相关规律。

1.1 未来科学发展的转向

人类科学的发展历程可归纳如表 1.1，目前正处于由“决定观”向“演化观”的过渡，未来科学将以系统论为方法，以复杂系统为对象，以寻求其中的自然规律为目的。

表 1.1 人类科学的发展历程

发展	时间	自然观	方法论	研究对象	代表人物	典型学说/学科
↓	17世纪以前	神授观	上帝论	宇宙起源	神学宗教领袖	神学、宗教学 圣经
	18世纪以后	决定观	还原论	确定系统	牛顿、拉普拉斯	数学、物理等 自然科学
	20世纪中叶后	演化观	系统论	复杂系统	普利高津 洛伦兹	社会经济学、系统控制论、非线性科学

1.1.1 自然科学的决定论困惑

以数学为代表的自然科学，起源于古希腊，自它诞生之日起的两千多年来，数学家们一直在追求真理，而且成就辉煌。关于数和几何图形的庞大理论体系为自然科学的发展提供了一个看来似乎永无休止的确定性前景。哥白尼和开普勒自然地接受了关于自然是按数学设计的信念及天主教关于上帝创造和设计了宇宙的信条，笛卡儿建立了他的哲学体系，建立了思维的《法则》，并在《方法论》中证实了思维的存在，进一步证实了自然法则是永恒不变的，因为他们是并且仅仅是预定的数学模型的一部分。康德在他的《自然科学的形而上学基础》中承认牛顿定律关于自然的法则是不证自明的[MRKL97]。长时期以来，天文学、物理学、力学、光学、空气动力学所做的预测与观察和实验相当吻合。

以牛顿、拉普拉斯、爱因斯坦为代表的决定论认为：宇宙是由少数几条简单的规则所决定的，时间是可逆的，不确定性是一种无知、近似或错觉。在长期的科学发展过程中，牛顿力学、物理定律得到了广泛地应用，没有人怀疑自然科学在人类

认识自然、改造自然的历史劳动中所起的重要作用。

然而，湍流机制与贝纳实验却无法用牛顿定律做合理解释。洛伦兹的实验表明：即使是用确定的方程，在迭代一定次数之后得到的图象完全可能是随机的[LREZ97, YEST94, CHYS93]。物理世界中确实存在许多不确定性[XUYA94, LIFA92, LIHD01, LIWQ95, LILY95, LIDY20, WAQY01, TAGH20, JHJG20, YUXF20]。普利高津等人确立的新自然法认为[PLGJ98, CHAR20]：自然界处在不断地演化过程中，它处处存在涨落、不稳定性、多种选择和有限可预测性，时间是不可逆的，不确定性是常规，确定性是一种理想化的近似，它不仅表现在自然科学的迭代系统中，尤其表现在社会经济学、非线性系统中。在许多研究领域，决定观正逐渐被演化观所代替。

- 科学的发展正从“还原论”向“系统论”转折。

1.1.2 社会科学的复杂性研究

人类具有两个重要的属性，即自然属性和社会属性。人们对自然系统的研究目的在于寻求那些“简单的规则”，并利用这些规则来改造自然。然而，由于社会科学的组成与规律的复杂性，以及科学技术发展的局限性，长期以来，人们对社会系统的研究滞后了许多，往往只能对其进行定性描述。

但是，自 20 世纪末期以来，社会科学正以惊人的速度在快速发展。一方面，传统的历史学、文学、生物学正在经历着巨大的变革；另一方面，人类学，组织行为学、群体协作学、结构主义学等新兴学科亦异军突起，无不显示出一番欣欣向荣的景象。这是整个人类社会自身发展的需要，人们着眼于对“社会”这个人类自身构成的复杂系统进行研究[DARW99, WSYY96]。

混沌、分形、复杂性以及 DNA 结构的发现，正使我们深深地感受到这场科学思想大变革的脚步。《复杂》[MXER02]一书所描述的，正是这场大变革的最前沿的情况，桑塔费研究所的主要研究领域——复杂性科学，正是近百年来各学科中的新思想、新观念的最集中的表现[DARW98]。它综合了各学科、各领域的最新的思想成果，从方法论的高度出发，把弄清人类如何认识和控制复杂系统当作目标。

- 科学的发展正从“简单性”向“复杂性”转折。

1.1.3 非线性科学的迅速发展

“ $1+1>2$ ”，这就是非线性科学。自 20 世纪 80 年代以来，非线性科学越来越受到人们的重视，陆续出现了非线性分析、非线性动力学、非线性控制等系列新的学科或方法[BRHM92, INGR92, HDSD93, KIME99, HOLT20, WAXY03]。

在多相介质中，分子扩散的动力学行为不再符合经典规律，而要用“分形”理论才能得到合理的结果[LHQW93]。在经济学中，经济系统存在一种“放大”现象，它是非线性、非平衡系统的子系统间协同作用的结果。著名经济学家 Brian Arthur 据

此提出了“报酬递增率”[MXER02]，用以描述经济行为中的非线性关系。

随着非线性科学的发展，混沌不再是“无知愚昧、毫无次序”的不可认知系统，混沌亦存在着特殊的逻辑规律[WANY01, ATKI90, PLGJ99, CAMP95, ZHSR01, WAGR01]。造成混沌轨道指数发散的伸缩变换是一种非线性操作，相空间的局部不稳定性与整体耗散性的结合产生了具有特定分维的奇异吸引子。目前，分形与混沌理论已经成为非线性科学的主要研究对象，混沌控制、量子混沌在理论与应用上均有较快的发展[SHEK99, DEWA92, GUTZ90, DITT95, GUYA96, LJBF95, CHFS98, CHYS93, HUGA20, BOCC02, DEVA03]。

- 科学的发展正从“线序学”向“混沌学”转折。

1.2 复杂系统与分形混沌

1.2.1 复杂系统无处不在

在生命系统中，细胞最惊人的特性就是新陈代谢的纯粹复杂性。人类基因组约有 10^5 数量级的表达产物，在各种类别的蛋白质中，许多是酶、受体、信号传递序列的成员，生物信号传输通道的相互作用形成了一个复杂的网络系统。

在经济系统中，人们开始研究经济学中的一般结构的实现与模式的展开。复杂性领域不把经济描述成决定性的、可预测的以及机械的，而是过程相关的、有机的以及演化的。

在自然地形中，地形模式是复杂的，有高山、沙漠、河流、大海等。自然地形是在开放的系统中形成的，波浪的传播、涌流和紊流的形成、沉积物的迁移都是复杂的非线性过程。

复杂系统无处不在，其表现形态多种多样：

生命系统：人体系统、大脑系统、认知系统、免疫系统、生物系统……

地球系统：地理系统、地表系统、地矿系统、地质系统、生态系统……

社会系统：农业系统、经济系统、金融系统、管理系统、军事系统……

科学系统：哲学系统、逻辑系统、代数系统、分形系统、混沌系统……

1.2.2 分形论的国内外研究现状

普通几何学研究的对象，一般都具有整数的维数。比如，零维的点、一维的线、二维的面、三维的立体、乃至四维的时空。而在新兴的分形几何学中，空间的维数不一定是整数，而可以是一个分数维数，这是几何学的新突破，引起了自然科学家的极大关注[HOLD86, LHYL94, BLWM82, WEZY20, LOQW99, CHJZ98, LIHJ98, BBDM88, HOFE94]。在客观自然界中，许多事物具有自相似的结构，在理想情况下，甚至具有无穷层次。图 1.1 是典型的科赫岛。适当的放大或缩小几何尺寸，整个结构并不改变。不少复杂的物理现象，其中就蕴涵着这类层次结构。

1975 年，曼德勃罗特创造了“分形（Fractal）”一词、Fractal 出自拉丁语，含有“碎化、分裂”之意。他在 1975、1977 和 1982 年先后用法文和英文出版了三本书，特别是《分形——形、机遇和维数》[MDBT99] 以及《大自然的分形几何学》[BLWM82]，开创了新的数学分支——分形几何学。曼德勃罗特利用计算机绘出了第一张分形图象，如图 1.2。

1986 年北京大学成立非线性科学中心。1989 年 7 月，在四川大学召开了“第一届全国分形理论与应用学术讨论会”。1990 年李后强与程光锐著《分形与分维》一书由四川教育出版社出版[LHQC90]。1991 年英国创办国际学术性期刊《混沌、孤子和分形》(Chaos, Soliton and Fractal)。1993 年，新加坡创办国际学术性期刊《分形》(Fractal)。同年，我国的李后强、汪富泉所著《分形理论及其在分子科学中的应用》由四川大学出版社出版[LHQW93]。1995 年，王东升、曹磊著《混沌、分形及其应用》由中国科学技术大学出版社出版[WDSC95]。1996 年 7 月，FractalArt 1.0 在中国软件登记中心注册。在 1997 年之后，我国除翻译国外著作外，自己也陆续出版了相关专著 30 多本，发表论文数百篇。

目前，分形理论已经在数学拓扑、物理相变、地质结构、分子作用、生命系统、材料微观结构、计算机图象处理、纺织图案、艺术美学等众多领域得到良好应用 [MARG90, SARK92, ZEFG01, XIZX20, LCJM99, CSJZ98, SUBW99, CHYY97, AND03]。

1.2.3 混沌学的发展历史与现状

为什么天气变化存在着不可预测性？为什么两个形式与意义极不相同的方程迭代所出现的倍周期参数收敛比率却完全相同？这些深奥的问题极可能揭示大自然更深一层的规律。的确，这就是混沌[SHAT99]。

1903 年，美国数学家 J.H.Poincare 在《科学与方法》一书中提出了 Poincare 猜想。他把动力学系统和拓扑学两大领域结合起来，指出了混沌存在的可能性。1953 年，美国气象学家 E.Lorenz 在《大气科学》杂志上发表了“决定性的非周期流”一文，指出在气候不能精确重演与长期天气预报者无能为力之间必然存在着一种联系，并发现了第一个“奇怪吸引子”，也即著名的洛伦兹吸引子[LREZ97]，如图 1.3。他清楚地描述了“对初始条件的敏感性”这一混沌的基本性质。这就是著名的蝴蝶效应。

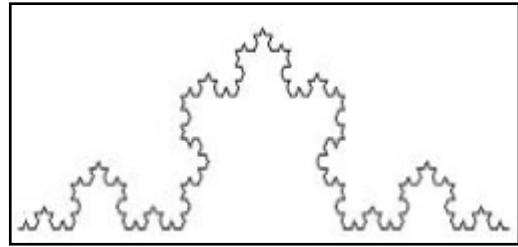


图 1.1 具有自相似结构的科赫岛

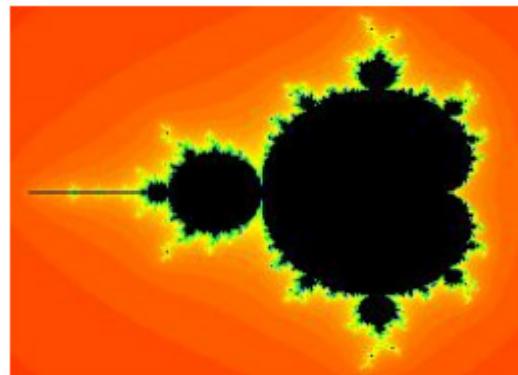


图 1.2 曼德勃罗特分形混沌图

20世纪70年代，生理学家发现在人类的心脏中存在着混沌现象，经济学家发现股票价格的上升下降满足某些混沌特征。1975年，我国学者李天岩和美国数学家J.Yorke在《美国数学》杂志上发表了“周期三意味着混沌”的著名文章，深刻揭示了从有序到混沌的演变过程。1976年，美国生物学家R.May在《自然》杂志上发表了“具有权复杂的动力学的简单数学模型”一文，它表明简单的确定性数学模型也可以产生看似随机的行为。1977年，第一次国际混沌会议在意大利召开，标志着混沌科学的诞生。1978年，美国物理学家M.J.Feigenbaum在《统计物理学杂志》上发表了关于普适性的文章“一类非线性变换的定量的普适性”，轰动世界。

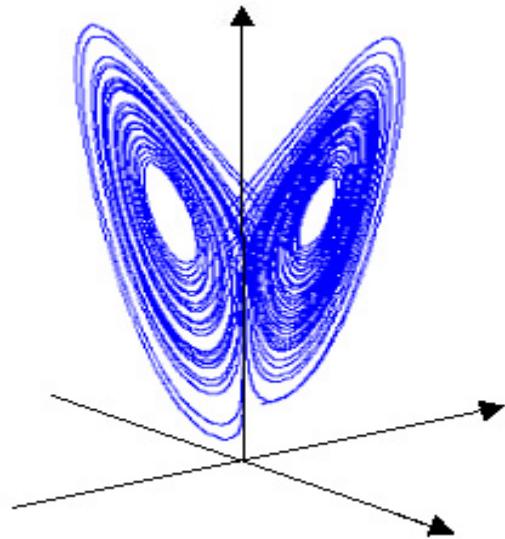


图 1.3 洛伦兹吸引子

20世纪80年代，混沌科学得到了快速发展[LIHJ99, EOTT02, BANK03]。1980年，美国数学家Mandelbrot绘出的如图1.2所示的分形图象，同时也是五彩绚丽的混沌图象，拓展了混沌科学的计算机仿真领域。1983年，加拿大物理学家Glass在《物理学》杂志发表文章“计算奇异吸引子的奇异程度”，开创了全世界计算时间序列维数的热潮[TAKE80, GRAS83, GRAS86, LUND88, LUTZ95]。1981年，中国著名科学家郝柏林编写的《混沌》一书在新加坡出版。1986年，中国第一届混沌会议在桂林召开。

目前，混沌在生物学、生理学、数学、物理学、化学、信息科学，以及气象学、经济学，音乐、艺术等领域[HORT84, CHFS98, FRAS86, NIC091, LAST94, MCCA93, WILL97]，都得到了广泛的应用，它已经成为非线性科学的研究主题之一。

1.3 泛逻辑学与柔性推理

1.3.1 逻辑学的研究与发展

从逻辑学独立成为一门学科以来，其发展主要经历了三个阶段：

第一个阶段从逻辑学创始至19世纪中叶，是古典逻辑阶段。其研究都与哲学研究紧密的联系在一起，包括亚利士多德与黑格尔的研究。

第二个阶段是从19世纪后期到20世纪中后期，是现代逻辑阶段。其标志主要是数理逻辑的产生、发展及其广泛应用[MIZU89, ZHAN93]。现代逻辑的发展动力主要来自于数学中的公理化运动。当时的数学家们试图把整个数学构造成为一个严格的演绎大厦，然后用某种程序和方法一劳永逸地证明数学体系的可靠性。

第三个阶段是从 20 世纪 70 年代至今。在 Zadeh 提出模糊集合基础上，出现了模糊逻辑 [ZADE65, ZADE79, ESTD81, ZAZI92, ZHAN83, ALTV83, ELKA94, HACS96]。后来随着其它学科，尤其控制论发展的需要，出现了模态逻辑 [ARIS95]、信任逻辑 [BANL89]、多值逻辑 [ALQU88] 等逻辑理论。泛逻辑学的产生则标志着逻辑学正在进行“柔性化”的大革命 [HELH96, HEWL01, WAYJ01, HEAW03]。

1.3.2 经典逻辑是刚性逻辑

经典逻辑通常是指在“全息条件下”进行推理的、“二值”的数理逻辑。依照泛逻辑的观点，它是“刚性逻辑”。其主要特征有：

1. 命题真值的二值性

经典逻辑仅适用于描述完全对立的二值世界，命题要么为真，要么为假，二者必居其一，其真值只能是 0 或 1。这种绝对化的观点不允许中间过渡状态存在，因而无法描述存在无数中间过渡状态的对立不充分的现实世界中各种柔性。

2. 命题关系的独立性

经典逻辑不考虑命题之间的相关性，即通常假定各个命题之间是相互无关的。然而现实世界中的各种事物之间存在复杂的相关性，很难保证完全独立。

3. 连接词运算模型的惟一性

在经典逻辑中，连接词的运算都是确定的规则，比如： $\sim P = 1 - P$ ， $P \wedge Q = \min(P, Q)$ ， $P \vee Q = \max(P, Q)$ ， $P \leftrightarrow Q = 1 - |P - Q|$ 。但是，但是客观事物的相关性通常是不确定的，这需要根据具体情况而变化。

4. 推理过程的封闭性

在经典逻辑的推理过程中，必须事先知道所有的前提条件和推理规则，不允许在中途增加或修改它们，也即是基于全息条件的推理。

所以，我们称经典逻辑为刚性逻辑，它只能描述和解决理想的二值世界中的问题，例如数学定理的证明，对现实世界中普遍存在的不确定性问题少能为力。

1.3.3 泛逻辑学与柔性推理

随着对复杂性问题研究的深入，经典的逻辑已经不能解决现实社会中的所有问题，人们因此转而寻求“非标准逻辑”或“现代逻辑”。1965 年，Zadeh 提出了模糊集合，之后发展而成的模糊逻辑打破了人们长期以来的“二值观”，开创了“连续值逻辑”的先河，目前已经得到良好的应用 [ZADE65, ZADE79, YANG89, ZAZI92]。但是，模糊逻辑没有考虑命题之间的相关性，其“与、或”运算的“最小、最大”原则不是柔性的，文献 [HEWL01] 对其缺陷和使用范围进行了深刻地分析。

由于人工智能和信息技术发展的需要 [HEHC82, HEHC88]，在探求广义问题求解的基础上，泛逻辑学为复杂系统的柔性推理与柔性控制给出了新的思路和方法。泛逻辑

提出了“广义相关性”和“广义自相关性”两个重要的概念，给出了一种包含若干不确定性的推理模型，即不再把连接词运算模型写成一种固定的公式，而是把其建立在相应的“算子簇”之上，可以通过相关性参数的变化在推理过程中采用不同的运算模型，从而实现包含“不确定性”的“柔性推理”。这主要体现在：

- **柔性真值域** 可以描述命题的不确定性。命题真值域 W 建立在任意的多维超序空间，其一般形式是： $W = \{\perp\} \cup [0,1]^n <\alpha>$ ， $n > 0$ 。真值域可以在任意维空间上进行拓展，包括在分数维空间。

- **柔性连接词运算模型** 可以描述命题间关系的不确定性。泛逻辑通过广义相关性系数 h 、广义自相关性系数 k 、偏袒系数 p 来刻划这种关系柔性；

- **柔性量词运算模型** 可以描述约束程度的不确定性。量词的作用是约束命题、谓词的个体变元。除了经典逻辑中的全称量词和存在量词之外，泛逻辑提出了阈元量词、位置量词、程度量词等；

- **柔性推理模式** 可以描述推理过程的不确定性。在柔性的真值域、连接词和量词的基础上定义的演绎推理、归纳推理、类比推理、假设推理、发现推理、进化推理等推理模式，相互之间不是截然分开的，它们在一定条件下可以相互转化。

利用泛逻辑原理对复杂系统进行柔性推理和柔性控制的研究已经取得了一定的成果[CHHM03]，最近正在研究利用泛逻辑来实现对多级倒摆的柔性控制。

1.4 选题内容与目的创新

1.4.1 课题的目的与意义

基于“复杂系统需要柔性推理”这样的现实，本课题的目的在于：分析复杂系统中的广义相关性，分析分形、混沌、与逻辑之间的广义相关性，最终目的在于建立**“基于分形逻辑的复杂系统相关性推理模型”**，简记为 CCRM (Complex System Correlation Reasoning Model)，为从逻辑推理的角度对复杂控制系统、相似分形结构、混沌动力行为等的研究提供理论上的指导，同时也提供一种具有实用性的“分形逻辑”，简记为 FL (Fractal Logic)。

课题的意义在于：分形逻辑的建立不仅是人们长期以来深入认识自然系统和社会系统的必然结果，也是人们以后进一步深入认识自然与社会的客观需要。它不仅打破了经典逻辑的“刚性”，拓展了泛逻辑学的应用领域，更为重要的是把对分形、混沌等复杂系统与泛逻辑理论联系起来，认为混沌行为并不是“不可捉摸”的，复杂系统并不是“不可控制”的。论文首次尝试在“分形与混沌”领域引入“逻辑推理”的概念，认为这些复杂系统之中必有内在的相关性。

诚然，本文的工作仅是相关研究的开端，还有许多地方需要进一步完善。但由本文的研究内容与思想方法可以派生出若干新的研究课题，如能起到抛砖引玉之效

果，笔者亦甚为欣慰。

1.4.2 研究思路与内容组织

基于本题的目的和目前的研究现状，拟定的研究思路与内容组织如图 1.4 所示，可以归纳如下：

- 题目拟定** 复杂系统中分形混沌与逻辑的相关性推理研究；
中心目标 试图建立“基于分形逻辑的复杂系统相关性推理模型（CSCRM）”；
概念逻辑 泛逻辑、分形逻辑、混沌逻辑；
基础理论 泛逻辑理论、分形混沌理论、格分维理论、广义 NTS 范数理论；
重要模型 CSCRM 模型、分形逻辑各连接词的运算模型；
关键技术 广义相关系数 h 的求解、广义自相关系数 k 的求解、基变换规则；
主要仿真 分形逻辑连接词运算仿真、典型分形与混沌系统的迭代图象仿真；
典型应用 自动焊机的柔性控制、康托集的格分维与分形逻辑运算、GB18030 汉字的分形特性与复杂特性分类。

1.4.3 课题的创新性分析

根据本文的研究内容与现有文献分析，本课题的创新之处主要有：

- **逻辑方面** 在分形领域引入“逻辑运算”的概念，建立“可推理的分形逻辑”，给出了分形逻辑的分类与研究纲要，这属于概念上的创新。
- **理论方面** 在分形维数的求解过程中引入“参考空间”、“单位格”等系列概念，提出一种的维数理论——“格分维理论”，这属于理论上的创新；研究了广义区间 $[a, b]$ 上的 NTS 范数，对 $[0, 1]$ 上的 NTS 范数理论进行了扩展和完善。
- **模型方面** 提出了基于分形逻辑的复杂系统相关性推理模型，架起了泛逻辑理论与复杂系统柔性推理之间的桥梁；给出了分形逻辑的连接词运算模型。
- **方法技术** 在对复杂系统组成结构与参数分析的基础上，给出了广义相关系数 h 、广义自相关系数 k 的求解方法，它是实现相关性推理的关键技术。
- **应用方面** 把相关性推理模型用于自动焊机的柔性控制是 CSCRM 应用的一个好的范例；把格分维理论用于经典康托集的研究，体现了一种新的应用思维；对汉字的分形特性和复杂特性进行研究，给出了一种汉字复杂性分类的新方法。

笔者必须指出：“分形逻辑”与“混沌逻辑”这两个词不是本文所创造，在一些文献中已经明确提出[MAS004, BJ0R95, NONL03]，但绝大多数还局限于哲学探讨的范畴。文献[BJ0R95]强调指出：“分形逻辑主要是一个概念，而不是严格数学意义上的逻辑（Fractal logic is not a logic in the strict mathematical sense of the word. It is more of a concept）”。本文则试图研究实实在在的“可推理”的分形逻辑，整体上属于人工智能的逻辑推理部分。本文在泛逻辑的基础上，提出与复杂系统、分形混沌相关的新概

念、新思想、新方法，目的在于为研究复杂系统提供新的理论指导和实用工具。

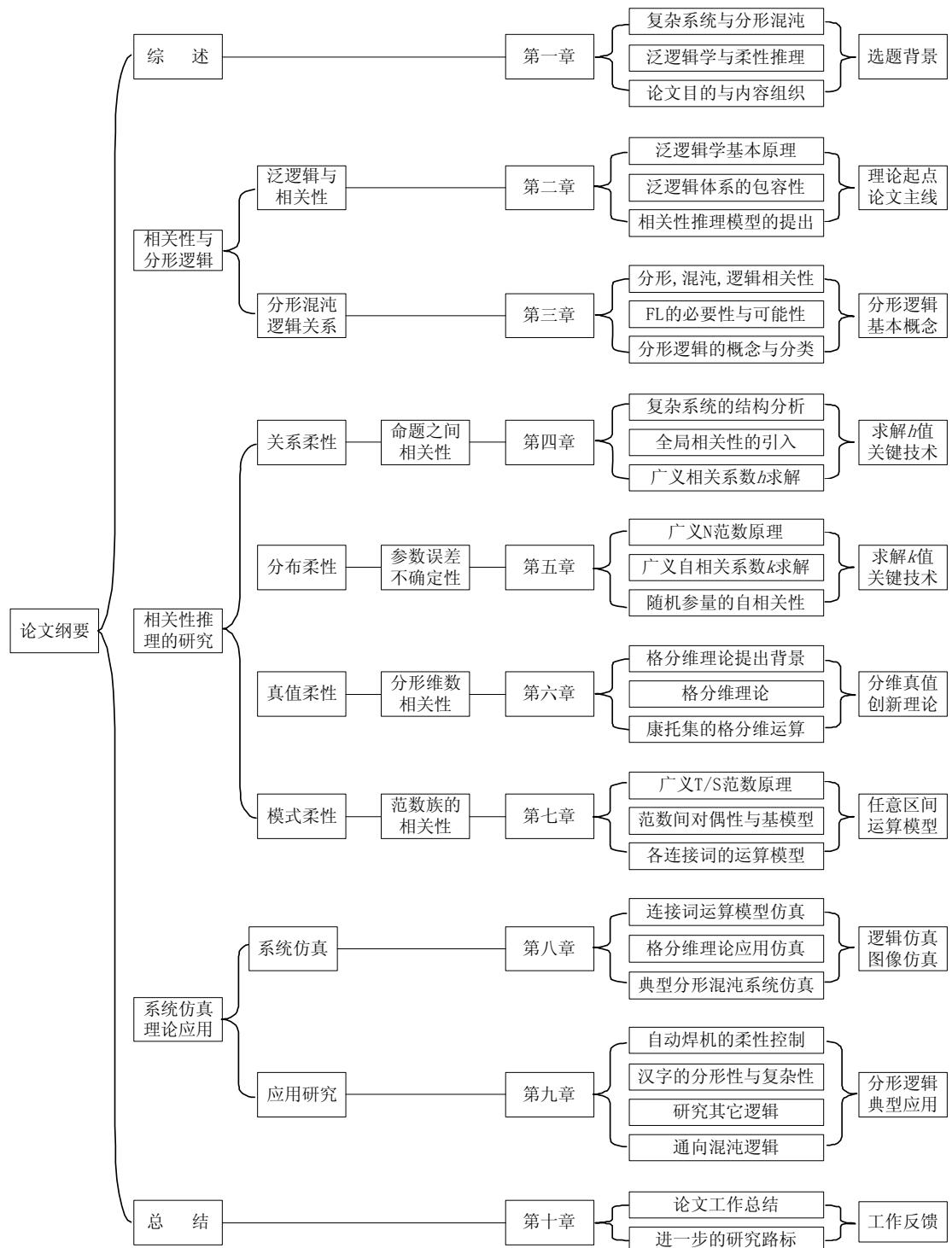


图1.4 复杂系统中分形混沌与逻辑的相关性推理研究（论文纲要）

第二章 泛逻辑原理与相关性推理模型

泛逻辑学是本文研究的主要理论指导，本章在概述泛逻辑学原理的基础上，提出了基于泛逻辑的复杂系统相关性推理模型(CSCRM)，为研究复杂系统的泛逻辑规律提供了新的思路。CSCRM 把泛逻辑理论与不确定性推理紧密联系起来，架起了二者之间的实用性桥梁。CSCRM 是本文内容的主线，以后各章将对其各个部分进行深入研究。

2.1 泛逻辑学基本原理

2.1.1 泛逻辑学的四大要素

泛逻辑学提出的任何一个逻辑都至少应具备四个特征要素[HEWL01]：研究论域、命题连接词、相关量词、常用规则集与合适的推理模式。对于某一具体逻辑而言，还应该有相应的语义解释[ABDI91]，同时允许有各自的其它特征，必要时可以扩充或修正泛逻辑这一框架。

1. 泛逻辑学语法规则的四大要素

(1) 泛逻辑学的研究论域：包括命题的真值域 W 和谓词的个体变域 U 。 W 的一般形式是任意的多维超序空间 $W=\{\perp\} \cup [0,1]^n < \alpha >$ ， $n>0$ 。其中， \perp 表示无定义或超出讨论空间， $[0,1]$ 表示基空间， n 表示空间维数。 α 是有限字符串，可以是空串，代表命题或谓词的附加特性。 U 可以是任意研究对象(包括映射函数)的集合。真值域的连续可变性可以描述命题真伪程度的不确定性，而其空间维数的连续可变性则可描述命题真值域空间维数的不确定性。

(2) 泛逻辑学的命题连接词有：泛非 \sim 、泛与 \wedge 、泛或 \vee 、泛蕴含 \rightarrow 、泛等价 \leftrightarrow 、泛平均 \textcircled{P} 、泛组合 \textcircled{C} ，后两种是泛逻辑学最新提出的连接词。这些连接词使得原子命题更能够依照现实情况构造出合理的分子命题，由相对简单的命题构造更为复杂的命题。在泛逻辑学，命题连接词运算模型建立在相应的“算子簇”上，不是惟一性的，而是连续可变的，体现的是一种“关系柔性”，可用来描述命题之间关系的不确定性。

(3) 泛逻辑学的量词有：范围量词 \oint （包括全称量词 \forall 、存在量词 \exists 、必然量词 \Box 、可能量词 \Diamond ）、阈元量词 \wp 、位置量词 \wp 、过渡量词 \int 、假设量词 $\$$ 。量词的功能是约束个体变元、谓词和命题。在经典逻辑中只有约束个体变元的全称量词 \forall 和存在量词 \exists ，后来出现了模态量词，在模糊分类中有时用到表示程度的量词。泛逻

辑学提供的量词体现了“程度柔性”，用以描述约束程度的不确定性。

(4) 泛逻辑学的常用公式集和推理模式：根据命题连接词和量词的性质可以得到非常丰富的公式集，对某具体逻辑形式可以有相应的推理模式。经典逻辑的推理在本质上是一种“演绎推理”，所推出的结论已经事先蕴涵在已有的知识之中。然而，对于现有的开放的、复杂的、包含不确定性的系统而言，这种演绎模式已经不能完全满足推理的需要，在一些情况下，“归纳、类比”等推理模式显得更为有效。更多的是在一个推理系统中，可能用到多种模式，而且相互之间存在相互转换与过渡。基于此，泛逻辑提出了“模式柔性”，用于表征推理模式的连续可变性，可描述推理过程中模式变化的不确定性。

2. 泛逻辑学的语义解释

泛逻辑学的语义解释是给各种抽象的逻辑符号赋予具体应用领域的语义。其真值域可以是真假、好坏、可信度、模糊测度等。其 $[0,1]$ 基空间可以是各种有限集或无限集的变形。

2.1.2 广义相关性与自相关性

1. 广义相关性

泛逻辑学认为，世间万事万物都是广义相关的，不是相生就是相克，非此即彼。通常的相关性只研究相生关系，为了与之相区别，泛逻辑学统称相生关系和相克关系为广义相关性，又称何氏相关性[HEWL01]，其主要含义有：

(1) 相生关系是各种包容关系和共生关系的抽象，其中存在吸引力和排斥力的一对矛盾：当吸引力最大、排斥力最小时，表现为最大相容(最大相吸)状态；当吸引力和排斥力相等时，表现为独立相关状态；当吸引力最小、排斥力最大时，表现为最小相容(最大相斥)状态。相生系数 $g \in [-1,1]$ 。

(2) 相克关系是各种相互抑制关系（如敌对关系和生存竞争关系）的抽象，其中存在杀伤力和生存力的一对矛盾：当杀伤力最大、生存力最小时，表现为最大相克状态；当杀伤力和生存力相等时，表现为僵持状态；当杀伤力最小、生存力最大时，表现为最小相克状态。相克系数 $f \in [-1,1]$ 。

(3) 最小相克状态和最小相容状态是同一种状态，都表现为双方尽可能不接触但互不杀伤，它是广义相关的中间状态即相生和相克的分界线。所以广义相关性认为，相生和相克不是两个完全独立无关的相关关系，从相生到相克是连续过渡的。

(4) 从有利于生存的观点看，最大相容状态是广义相关的最大状态，最大相克状态是广义相关的最小状态。

(5) 广义相关性是存在于命题之间的互相关性，可用广义相关系数，即何氏相关系数 h' 来刻画， $h' \in [0,1]$ 。 $h'=1$ 表示最大相吸状态； $h'=0.75$ 表示独立相关状态；

$h'=0.5$ 表示最大相斥状态; $h'=0.25$ 表示僵持状态; $h'=0$ 表示最大相克状态。

下面对 h' 的物理意义进行解释:

如图 2.1 所示: 设 E 表示特征空间, 其面积为一个单位, 如已知任意分明子集 $X, Y \in E$ 的面积 $s(X)=P$, $s(Y)=Q$, 试问它们交集的面积 $s(X \cap Y)=P \wedge Q=?$, 它们并集的面积 $s(X \cup Y)=P \vee Q=?$, 答案显然与分明子集 X, Y 间的广义相关性有关:

$h'=1$ 表示 X, Y 间最大相吸, 大的集合

完全包含小的集合, 则有:

$$P \wedge Q = \min(P, Q) = T_3$$

$$P \vee Q = \max(P, Q) = S_3$$

这是著名的 **Zadeh 算子对**, T_3 是最大与算子, S_3 是最小或算子。

$h'=0.75$ 表示 X, Y 间独立相关, 交集的面积分别与 X, Y 的面积成正比, 则有:

$$P \wedge Q = PQ = T_2$$

$$P \vee Q = P + Q - PQ = S_2$$

这是著名的**概率算子对**, T_2 是中度相容与算子, S_2 是中度相容或算子。

$h'=0.5$ 表示 X, Y 间最大相斥或最小相克, 只有 $P+Q>1$ 时才有交集, 则有:

$$P \wedge Q = \max(0, P+Q-1) = T_1 \quad P \vee Q = \min(1, P+Q) = S_1$$

这是著名的**有界算子对**, T_1 是中心与算子, S_1 是中心或算子。

在相克关系中由于存在相互杀伤和扩军备战, 则有:

$P+Q<1$ 时, 双方不接触, 没有战争或抑制作用, 但都需要扩军备战, 则有:

$$P \vee Q \geq \min(1, P+Q) \quad P \wedge Q = 0$$

$P+Q=1$ 时, 双方刚好接触上, 但无冲突, 也无扩军余地, 则有:

$$P \vee Q = 1 \quad P \wedge Q = 0$$

$P+Q>1$ 时, 双方接触, 必然发生战争或抑制作用, 会造成部分死亡, 则有:

$$P \wedge Q \leq \max(0, P+Q-1) \quad P \vee Q = 1$$

$h'=0$ 时, 表示 X, Y 间最大相克, 双方是死敌, 具有最大的杀伤性, 只有一方为 1 时才允许另一方存活; 只有一方为 0 时, 另一方才会停止扩军备战, 则有:

$$P \wedge Q = \text{ite}\{\min(x, y) | \max(x, y) = 1; 0\} = T_0$$

$$P \vee Q = \text{ite}\{\max(x, y) | \min(x, y) = 0; 1\} = S_0$$

这是**突变算子对或最大相克算子对**, T_0 是最小与算子, S_0 是最大或算子。

$h'=0.25$ 表示 X, Y 间处于僵持状态, 其中杀伤力和生存力相等, 两事件都需要部分地扩大自己抑制对方, 此时:

$$T_0 \leq P \wedge Q \leq T_1, \quad S_0 \geq P \vee Q \geq S_1$$

以上的四个特殊算子对之间有如下关系:

$$0 \leq T_0 \leq T_1 \leq T_2 \leq T_3 \leq S_3 \leq S_2 \leq S_1 \leq S_0 \leq 1$$

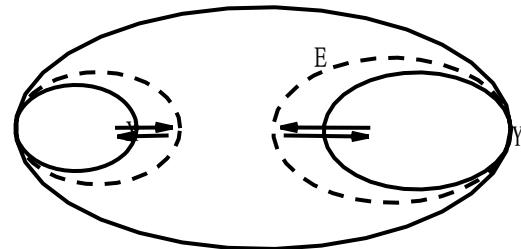


图 2.1 广义相关性作用图

2. 广义自相关性

在泛逻辑的研究中发现：在某个泛命题 P 和它的泛非命题 $\sim P$ 之间存在着一种相关性，泛逻辑学称其为广义自相关性，又称为何氏自相关性[HEWL01]。

在对立不充分世界中，泛命题 P 的隶属度是由它在特征空间 E 中对应的分明子集 X 的模糊泛测度 $u(X)$ 决定的。在理论上，我们假定特征空间 E 中的任意分明子集的模糊泛测度都是可以精确得到的，它满足可加性，即：

$$u(X \cup Y) = u(X) + u(Y) = P \vee Q = P + Q, \text{ 故:}$$

$$u(X \cup \sim X) = u(E) = P \vee \sim P = P + \sim P = 1, \quad u(\sim X) = \sim P = 1 - P$$

但在现实生活中，由于种种人类无法控制的不确定性因素，会引起测量和认识上的偏差。除 $u(E)=1$, $u(E)=0$ 外， $u(\sim X) = \sim P = 1 - P$ 不再成立，且偏差越大， $\sim P$ 偏离 $1 - P$ 越大。在这种不确定性问题中，把模糊测度误差对模糊非运算的影响称为广义自相关性，或何氏自相关性。为了刻画模糊泛测度误差对模糊泛非算子的影响，泛逻辑学引入了广义自相关系数(General self-correlation coefficient)，用 k' 表示， $k' \in [0,1]$ 。

k' 的物理含义可用著名的 Sugeno 算子簇进行解释，如图 2.2 所示： $\sim P = (1 - P)/(1 + sP) = SN(P, s)$ ，其中 s 是 Sugeno 系数，它是算子在算子簇中的位置标志参数。算子在算子簇中的排列是单调的，且具有逆等性，即 $SN(P, s) = SN^{-1}(P, s)$ 。

$s=0$ 时是精确估计， $\sim P = 1 - P = N_1$ ，为零级不确定性问题， N_1 为零中心非算子。

$s < 0$ 时是正偏差估计，带有一定冒险性质。

$s \rightarrow -1$ 时， $N(P, s)$ 的极限是 $s(\sim X) = (1 - s(X))/(1 - s(X)) = N_3$ ， N_3 是一种最大非算子。

$s = -8/9$ 时， $s(\sim X) = (1 - s(X))/(1 - 8s(X)/9) = N_2$ ，这是一种中度冒险的估计。

$s > 0$ 时是负偏差估计，带有一定保险性质。

$s \rightarrow \infty$ 时， $N(P, s)$ 的极限是 $s(\sim X) = (1 - s(X)/(1 + s \times s(X)) = N_0$ ， N_0 是一种最小非算子。

$s = 8$ 时， $s(\sim X) = (1 - s(X))/(1 + 8s(X)) = N_{0.5}$ ，这是一种中度保险的估计。

Sugeno 算子的变化曲线和坐标平面主对角线的交点的坐标值 k' 是非算子的不动点， $SN(k', s) = k'$, $k' \in [0,1]$, k' 和 s 的关系是：

$$s = (1 - 2k') / k'^2 \text{ 或 } k' = ((1 + s)^{1/2} - 1) / s = 1 / ((1 + s)^{1/2} + 1)$$

故 k' 也是算子的位置标志参数，其逻辑上的意义是： k' 表征了对泛命题进行否定时的风险程度：

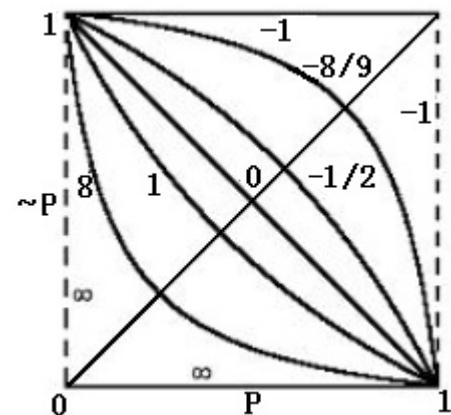


图 2.2 Sugeno 算子簇的物理意义

- $k' \rightarrow 1$: 表示逻辑上的最大可能否定，对应于最冒险估计；
 $k' = 0.75$: 表示逻辑上的偏大否定，对应于中度冒险估计；
 $k' = 0.5$: 表示逻辑上的适度否定，对应于精确估计；
 $k' = 0.25$: 表示逻辑上的偏小否定，对应于中度保险估计；
 $k' \rightarrow 0$: 表示逻辑上的最小可能否定，对应于最保险的估计。

2.1.3 零级泛逻辑运算模型

在泛逻辑学中，所有的连接词运算模型都是建立在“算子簇”之上的， h' 和 k' 是泛逻辑的精髓，算子簇是建立在 h' 和 k' 之上的系列函数簇。其中，算子簇又是可以通过“生成基”来生成。

1. 泛逻辑运算的生成基

(1)【定义】设命题 P, Q 的隶属度 $u(X)=x, u(Y)=y$ 没有误差，即 $k'=0.5$ ；且命题之间的广义相关性正好是相生相克的分界线，即 $h'=0.5$ ，此时的泛逻辑运算模型称为“泛逻辑运算的生成基模型”，简称生成基或基模型，也称为“中心运算模型”，或“理想算子模型”，此时有：

- *中心非运算 $N(x, 0.5) = 1 - x = N_1$
- *中心与运算 $T(x, y, 0.5, 0.5) = \max(0, x + y - 1) = T_1$
- *中心或运算 $S(x, y, 0.5, 0.5) = N(T(N(x, 0.5), N(y, 0.5), 0.5, 0.5), 0.5) = \min(1, x + y) = S_1$
- *中心蕴涵运算 $I(x, y, 0.5, 0.5) = \sup\{z | y \geq T(x, z, 0.5, 0.5)\} = \min(1, 1 - x + y) = I_1$
- *中心等价运算 $Q(x, y, 0.5, 0.5) = T(I(x, y, 0.5, 0.5), I(y, x, 0.5, 0.5), 0.5, 0.5) = 1 - |x - y| = Q_1$
- *中心平均运算 $M(x, y, 0.5, 0.5) = N((N(x, 0.5) + N(y, 0.5)) / 2, 0.5) = (x + y) / 2 = M_1$
- *中心组合运算 $C(x, y, e', 0.5, 0.5) = \min(1, \max(0, x + y - e')) = C_1$ 。

其中， $N_1, T_1, S_1, I_1, Q_1, M_1, C_1$ 分别为中心非、中心与、中心或、中心蕴涵、中心等价、中心平均、中心组合算子的符号。

(2) 如果命题之间的广义相关性不是相生相克的分界线，即 $h' \neq 0.5$ ，则所有二元运算将偏离逻辑运算的基模型：

- *泛与运算 $T(x, y, 0.5, h') \neq \max(0, x + y - 1)$
- *泛或运算 $S(x, y, 0.5, h') = N(T(N(x, 0.5), N(y, 0.5), 0.5, h'), 0.5) \neq \min(1, x + y)$
- *泛蕴涵运算 $I(x, y, 0.5, h') = \sup\{z | y \geq T(x, z, 0.5, h')\} \neq \min(1, 1 - x + y)$
- *泛等价运算 $Q(x, y, 0.5, h') = T(I(x, y, 0.5, h'), I(y, x, 0.5, h'), 0.5, h') \neq 1 - |x - y|$
- *泛平均运算 $M(x, y, 0.5, h') \neq (x + y) / 2$
- *泛组合运算 $C'(x, y, e', 0.5, h') \neq \min(1, \max(0, x + y - e'))$

以上运算模型均是受 h' 控制的函数簇，其中，泛组合运算是受 e' 和 h' 同时控制的函数簇。

(3) 如果命题的隶属度有误差, 即 $k' \neq 0.5$, 则泛非运算将偏离逻辑运算的基模型, 此时有:

*泛非运算 $N(x, k') \neq 1-x$, 而是一个受 k' 控制的函数簇。

(4) 如果命题的隶属度有误差, 即 $k' \neq 0.5$, 同时命题之间的广义相关性也不是相生相克的分界线, 即 $h' \neq 0.5$, 则所有二元运算都将进一步偏离逻辑运算的基模型, 但对应的二元运算模型均可以通过生成基和生成规则的拓展而生成。

【定义】 在泛逻辑中, 称不考虑命题的隶属度误差 ($k'=0.5$) 时的运算模型为零级泛逻辑运算模型; 当 $k' \neq 0.5$, 但如果 $u(X)$ 和 $u(\neg X)$ 的值服从共同的误差分布规律, 则 $u(\neg X)$ 的值可以通过已知的近似值 $u(X)$ 来估算, 称此类问题为一级不确定性问题, 对应的运算模型称为一级泛逻辑运算模型; 当 k' 偏离 0.5 较大, 需要通过某些复杂的方法才能求解时, 则称此类问题为高级不确定性问题, 对应的运算模型称为高级泛逻辑运算模型。

目前, 泛逻辑的研究在零级、一级以及高级问题方面都取得了较好的成果, 为便于理解, 这里仅对零级泛逻辑运算模型进行介绍。

2. 零级泛逻辑运算模型

根据三角范数理论中 T 范数的性质, 泛逻辑学研究得到了“零级 T 性生成元完整簇”, 它通过基模型生成的零级泛逻辑运算模型如下 [HEWL01]。其中: $m = (3 - 4h')/(4h'(1 - h'))$ 。函数 $\Gamma^R[x]$ 为 $[0, R]$ 上的有界截取函数, 当 $x > R$ 时取值为 R , 当 $x < 0$ 时取值为 0, 否则为 x 。

- (1) 零级泛非运算簇: $N(x, k') = 1 - x$, 连接词为 “~”。
- (2) 零级泛与运算簇: $T(x, y, h') = \Gamma^1[(x^m + y^m - 1)^{1/m}]$, 连接词为 “ \wedge_h' ”。
- (3) 零级泛或运算簇: $S(x, y, h') = \Gamma^1[1 - ((1 - x)^m + (1 - y)^m - 1)^{1/m}]$, 连接词为 “ \vee_h' ”。
- (4) 零级泛蕴涵运算簇: $I(x, y, h') = \Gamma^1[(1 - x^m + y^m)^{1/m}]$, 连接词为 “ \rightarrow_h' ”。
- (5) 零级泛等价运算簇: $Q(x, y, h') = \text{ite}\{(1 + |x^m - y^m|)^{1/m} | m \leq 0; (1 - |x^m - y^m|)^{1/m}\}$, 连接词为 “ \leftrightarrow_h' ”。
- (6) 零级泛平均运算簇: $M(x, y, h') = 1 - (((1 - x)^m + (1 - y)^m)/2)^{1/m}$, 连接词为 “ \oplus_h' ”。
- (7) 零级泛组合运算簇: $C^{e'}(x, y, h') = \text{ite}\{\Gamma^{e'}[(x^m + y^m - e'^m)^{1/m}] | x + y < 2e'; 1 - (\Gamma^{1-e'})[((1 - x)^m + (1 - y)^m) - (1 - e')^{m/l}]^{1/m}) | x + y > 2e'; e'\}$, 连接词为 “ $\odot_{h'}^{e'}$ ”。

2.2 泛逻辑学体系的包容性

2.2.1 泛逻辑的完备性与开放性

近几十年来, 为了在逻辑学中描述某种不确定性, 国内外学者已先后提出了数十种不同形式和用途的逻辑, 它们分别隶属在非标准逻辑和现代逻辑的旗帜下。显

然，任何一门学科或一个实际系统，都不可能建立在一大堆互不相容的逻辑之上。由抽象代数的启发，泛逻辑学在现有各种逻辑的基础上，从高层入手抽象出逻辑学的一般规律，建立能尽可能包容一切逻辑形态和推理模式的柔性逻辑学雏形。然后利用这个雏形中得到的构造一个具体逻辑的原则和方法，指导研究描述某些不确定性推理的具体逻辑。泛逻辑学研究的最终目标是建立一个具有最大包容性的抽象逻辑学，它最小的不变内核是刚性逻辑学，柔性逻辑学能根据需要自由伸缩变化在其中，但它们都必须能够退化到刚性逻辑学，如图 2.3 所示[HEHC03]。按文献[HUAN01]的思维方式可以提出：当今时代的思维逻辑应该具备如下特征：是基于大系统的复杂逻辑，是基于框架思维的统一逻辑，是全方位开放的可扩展逻辑。泛逻辑学正是这样一种具有完备性和开放性的逻辑，如图 2.4 所示[HEWL01]。

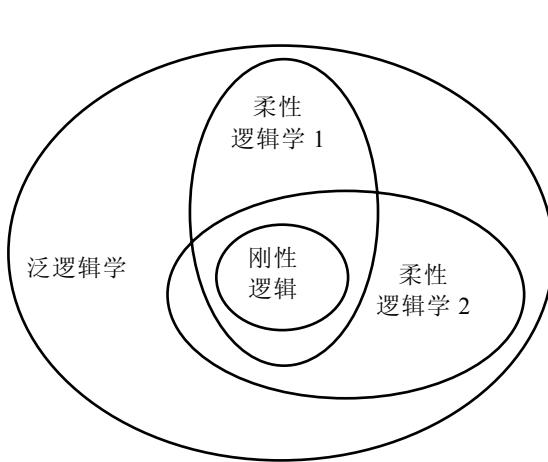


图 2.3 泛逻辑具有很强的包容性

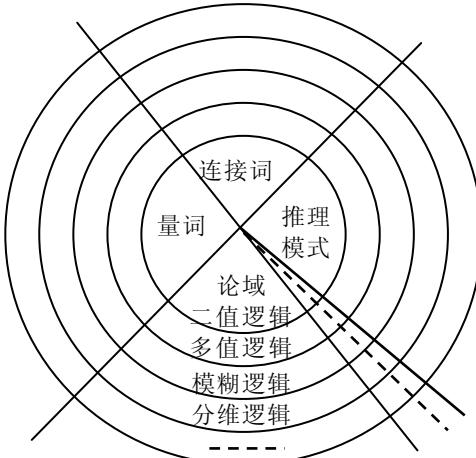


图 2.4 泛逻辑的完备性与开放性

1. 泛逻辑学的完备性体现在：

- 它提出了任何一个逻辑都应至少具备的四个特征要素：研究论域、命题连接词、相关量词、常用规则集与合适的推理模式。
- 在勾画逻辑框架的同时，它提供了可以生成各种具体逻辑（如应用逻辑）的“逻辑生成器”，给出了泛逻辑运算的基模型和生成规则，而新生成的逻辑又自然而然地加入到泛逻辑的大框架之中。
- 泛逻辑包含了现有的各种具体逻辑：如二值逻辑、多值逻辑、灰度逻辑、模糊逻辑、概率逻辑等。这些具体的逻辑都是泛逻辑学中 h' 、 k' 为某个值时的特例。

2. 泛逻辑学的开放性体现在：

- 对于某一具体逻辑而言，有其具体的语义解释，同时允许有除四大基本特征之外的其它特征。
- 泛逻辑学提供的“逻辑生成器”，可以根据需要生成目前还没有的具体的应

用逻辑，这大大扩展了泛逻辑学的应用领域。

• 在应用已有的逻辑，或建立新逻辑的过程中，由于某种特殊需要，如发现与现有泛逻辑系统有不相容之处，允许修正现有泛逻辑学中相应部分的理论，甚至修改现有的逻辑学框架。这也正是泛逻辑自身发展的需要。

2.2.2 包含不确定性的推理模型

泛逻辑学突破了命题连接词运算模型惟一的传统思想，根据模糊测度的逻辑性质，研究得到了柔性逻辑学在 $W=[0,1]$ 上定义的泛非、泛与、泛或、泛蕴含、泛等价、泛平均和泛组合等命题连接词的运算模型簇，它可以描述柔性命题之间关系的不确定性（又称为关系柔性）。关系柔性包括广义相关性（用广义相关系数 $h' \in [0,1]$ 来刻画）、测度误差系数（用广义自相关系数 $k' \in [0,1]$ 来刻画）和偏袒性（用偏袒系数 $p \in [0,1]$ 来刻画）等，这个运算模型包容了目前常见的各种不确定性推理模型。基于概率测度、信任测度、可能测度、必然测度、模糊测度等推理模型都是泛逻辑学中 h' 、 k' 为一定值时的特例。

1. 基于概率测度的不确定性推理

概率测度的基本性质有：

- (1) $p(E)=1$;
- (2) $X \cap Y = \Phi$ 时， $p(X \cup Y) = p(X) + p(Y)$ 。

其演绎性质有：

$$P_1: p(\Phi)=0;$$

$$P_2: p(\neg X)=1-p(X);$$

$$P_3: p(X \cup Y)=p(X)+p(Y)-p(X \cap Y);$$

$$P_4: p(X_1 \cup X_2 \cup X_3)=p(X_1)+p(X_2)+p(X_3)-p(X_1 \cap X_2)-p(X_2 \cap X_3)-p(X_1 \cap X_3) \\ +p(X_1 \cap X_2 \cap X_3)$$

$$P_5: p(X_1 \cap X_2 \cap X_3)=p(X_1)+p(X_2)+p(X_3)-p(X_1 \cup X_2)-p(X_2 \cup X_3)-p(X_1 \cup X_3) \\ +p(X_1 \cup X_2 \cup X_3)$$

由以上公式与 h' 、 k' 的含义可知：模糊测度下 P_1 成立； $k'=0.5$ 时 P_2 成立； $h' \geq 0.5$ 时 P_3 成立；在泛逻辑中，当系统的 h' 、 k' 一定时，结合律成立，故 P_4 、 P_5 成立。故概率逻辑是泛逻辑中当 $h' \in [0.5,1]$ ， $k'=0.5$ ； $h'=1$ ， $k' \in (0,1)$ 时的特例。

2. 基于信任测度和似然测度的不确定性推理

信任测度的基本性质：

- (1) $b(\Phi)=0, b(E)=1$;
- (2) $b(X_1 \cup X_2 \cup X_3) \geq b(X_1) + b(X_2) + b(X_3) - b(X_1 \cap X_2) - b(X_2 \cap X_3) - b(X_1 \cap X_3) +$

$$b(X_1 \cap X_2 \cap X_3)$$

似然测度的基本性质：

(1) $I(\Phi) = 0, I(E) = 1;$

(2) $I(X_1 \cap X_2 \cap X_3) \geq I(X_1) + I(X_2) + I(X_3) - I(X_1 \cup X_2) - I(X_2 \cup X_3) - I(X_1 \cup X_3) + I(X_1 \cup X_2 \cup X_3)$

信任测度与可能测度之间有如下关系：

$$b(\neg X) = 1 - l(X); \quad l(\neg X) = 1 - b(X)$$

可以证明，信任逻辑为泛逻辑中当 $h' \geq 0.5$ 及 $k' \leq 0.5$ 时的特例；似然逻辑为泛逻辑中当 $h', k' \geq 0.5$ 时的特例。

3. 基于必然测度和可能测度的不确定性推理

必然测度的基本性质：

(1) $n(\Phi) = 0; \quad n(E) = 1$

(2) $n(X \cup Y) = \max(n(X), n(Y))$

可能测度的基本性质：

(1) $c(\Phi) = 0; \quad c(E) = 1$

(2) $c(X \cap Y) = \min(c(X), c(Y))$

必然测度与可能测度之间有如下关系：

$$n(\neg X) = 1 - c(X); \quad c(\neg X) = 1 - n(X)$$

可以证明，必然逻辑是泛逻辑中当 $h' \geq 0.75$ 及 $k' = 0$ 时的特例；可能性逻辑是泛逻辑中当 $h' \geq 0.75$ 及 $k' = 1$ 时的特例。

4. 基于 Zadeh 模糊逻辑的不确定性推理

模糊逻辑的连接词运算模型为：

$$P_1: \sim P = 1 - P$$

$$P_2: P \wedge Q = \min(P, Q) \text{ and } P \vee Q = \max(P, Q)$$

$$P_3: P \rightarrow Q = \min(1, 1 - P + Q) \text{ and } P \leftrightarrow Q = 1 - |P - Q|$$

在泛逻辑中，当不考虑命题真值的误差时 P_1 成立，此时 $k' = 0, h' \in [0, 1]$ ；当 $h' = 1$ 时 P_2 成立；当 $h' = 0.5$ 时 P_3 成立。故模糊逻辑也是泛逻辑中所包含的特例。

2.3 复杂系统相关性推理模型

2.3.1 复杂系统中的不确定性

在现实生活中，复杂系统无处不在。自相似分形结构看似简单，却能够产生复杂美妙的几何图形，其中包含了确定性与随机性；非线性方程经过若干次迭代以后

就可能发生“蝴蝶效应”，洛伦兹奇怪吸引子充分表明了复杂系统中存在不确定性，即使计算机的计算精度特别高，在经过有限次迭代之后也可能产生混沌行为。分析表明：复杂系统中的不确定主要由以下几个方面引起。

1. 系统自身结构的不确定性

这种不确定性体现在系统结构的不稳定性。比如：在耗散结构中，熵增原理不再适用。耗散结构是指处在远离平衡态的复杂系统在外界能量流或物质流的维持下，通过自组织形成的一种新的有序结构。例如，从下方加热的液体，当上下液面的温度差超过某一特定的阈值时，液体中便出现一种规则的对流格子，它对应着一种很高度的分子组织，这种被称为贝纳尔流图象，就是液体中的一种耗散结构。又如，化学反应中的别洛索夫—扎博京斯基反应，某些反应物浓度随时间和空间呈周期性的变化，这种化学振荡和空间图象，就是化学反应中的一种耗散结构。目前，耗散结构理论把复杂系统的自组织问题当作一个新方向来研究。

再如，对于结构的稳定与不稳定现象，突变理论用势函数的洼存在表示稳定，用洼取消表示不稳定，并有自己的一套运算方法。例如，一个小球在洼底部时是稳定的，如果把它放在突起顶端时是不稳定的，小球就会从顶端处，不稳定滚下去，往新洼地过渡，事物就发生突变；当小球在新洼地底处，又开始新的稳定，所以势函数的洼存在与消失是判断事物的稳定性与不稳定性、渐变与突变过程的根据。突变理论就是用数学工具描述系统状态的飞跃，给出系统处于稳定态的参数区域，参数变化时，系统状态也随着变化，当参数通过某些特定位置时，状态就会发生突变。

2. 数据误差的不确定性

在复杂系统中，为了确定某一目标的参数或状态(位置、速度等)，需要对该目标进行测量或者进行观测。测量可分为静态目标测量和动态目标测量。如测量的目标是静态的，则估计的量不随时间而变化，其测量误差主要来源于系统误差。如测量的目标是动态的，则估计的量是随时间变化的随机量，其测量误差主要来源于系统误差和随机误差。

产生误差的因素是很多的，大致可以分为：目标误差、设备误差、传播误差、人员误差。从统计的角度来看，分为系统误差和随机误差。系统误差通常可以通过改进设备，改进算法来降低。在不确定性推理过程中，随机误差往往占据了主导地位，从而使得随机变量成为统计数学的主要研究对象之一。从概率论的角度讲，随机误差是指服从某一分布的随机量，它可以取实数轴上某个集合中的值，比如二项分布随机量、正态分布随机量等。典型的随机误差有设备的热噪声与环境因素。对随机误差的分析，主要有检验它的正态性、独立性及方差性。

3. 参数之间关系的不确定性

在复杂系统中，对于每个参数的具体测量值，都或大或小都包含着误差。除此之外，由于复杂系统中往往是多个参数对系统的某个性能或整体性能产生影响，参数之间具有一定独立性，但又相互影响，也即存在一种广义相关性。

以自动焊机为例，其中包括电压、电流、焊接速度三个主要参数，在系统稳定状态下，由欧姆定律可知，电流与电压之间存在一定的相互关系，但由于温度对电阻的影响，电流与电压并不严格满足欧姆定律。显然，此时电流与电压既是主要的参数，但又不是完全独立的参数，由于控制过程与环境因素的影响，二者之间存在不确定性。

2.3.2 复杂系统需要柔性控制

人类正在更大范围内改造自然和社会，在很多场合扮演着控制主体的角色，其可控复杂系统将越来越多，如：经济系统、政治系统、以及工程系统等，复杂系统的控制问题亦日趋重要，深入研究复杂系统、复杂事物的控制问题，具有现实的指导意义。

在复杂系统中，具有如下明显的“相互关系”：

- (1) 复杂的多层次结构，具有多个子系统，反映在时间和空间尺度两个方面，是不均一的网络结构。
- (2) 各组分之间相互关联、存在非线性的相互作用，且相互作用是多种多样的。
- (3) 复杂系统是开放的、与外部环境存在相互作用，又与外部环境和谐统一。

由于复杂系统中的以上“相互关系”是随时空而变化的，因此希望控制的方法或过程能自适应、自组织的向有序化方向发展，并且能变化为各种形式，这样当关系变化时，控制方法只需要改变某些参数，即可实现柔性控制的目的。

传统的数学模型和经典的逻辑推理对控制复杂系统中的“复杂行为”作用有限。布尔的真假二值逻辑相对于人脑思维等复杂系统来说太刚性，Zadeh 的模糊逻辑则忽略了事物间存在的各种相关性，因此：

- 对复杂系统的研究需要一种能够分析其中广义相关性的柔性逻辑体系。

2.3.3 复杂系统相关性推理模型

在分形、混沌、非线性控制等复杂系统中，由于存在上述的各类不确定性，因此其推理模型必须考虑相关因素。在本文中，结合泛逻辑的广义相关性与广义自相关性的概念，提出了基于分形逻辑的复杂系统相关性推理模型，简写为 CSCRM，其整体模型如图 2.5 所示，相关概念将在以后各章节介绍。

在图 2.5 中，对上述三种不确定的处理体现在：

对系统进行结构分析，建立合适的数学模型，求取不同参数的分布函数，根据

参数的定义域和目标要求选择合适的逻辑运算模型，力求减小系统自身结构的不确定性。

对各参数的分布函数进行分析，求取分布函数对应的广义 N 范数、及广义自相关系数 k 值， k 值能够对逻辑运算进行误差修正。

对所考察的所有参数进行相关性分析，确定各参数对目标要求的重要性（影响程度）大小，并求取各参数的全局相关系数，在推理过程中即可求取命题之间的广义相关系数， h 值反映了参与逻辑运算的命题所对应参数之间的关系，使得所选择的逻辑运算模型更加能够确切的描述实际问题。

在图 2.5 的模型中，可以把它分解成四个大的部分，其中每个部分又分成两个小部分。下面对模型解释如下：

1. 系统分析

① 对于多个系统而言，需要分析系统之间的关系，由于复杂系统多种多样，对于不同系统的处理方法不尽相同，因此对于所考察的系统，首先需要进行复杂系统的判别，弄清楚“是否是复杂系统，是什么类型的复杂系统？”。

② 针对复杂系统的性质，把它分解为相对独立的若干子系统，对各子系统需要进行结构与参数分析、确定考察目标，也即推理目标、并设计实验进行数学建模。

2. 相关性分析

相关性分析包括广义相关性分析和广义自相关性分析两个部分

③ 由于复杂系统中往往存在多个参数，因此需要进行广义相关性分析。分析变量参数对目标参数的影响程度，可以求得变量参数的全局相关系数，进而可求得局部相关系数 h' 值。 h' 值对参数间的广义相关性反映在具体的连接词运算模型之中。

④ 在复杂系统中，参数的分布函数是很重要的。根据试验数据求得分布函数之后，就可以求取相应的生成函数、N 性生成元、N 范数及其广义自相关系数 k' 值。 k' 值反映由于各种不确定性因素引起的命题真值的误差，通过分析与求解广义自相关系数，可以弥补或修正此误差。

3. 分形逻辑推理

⑤ 在分形逻辑中，命题的真值域空间是分维的超序空间，命题真值可以是任意的实数，这体现了泛逻辑中真值的维数柔性。在进行逻辑运算之前，需要知道“如何求解分维真值”，并求出各原始命题的真值。

⑥ 根据问题的性质，选定逻辑推理在哪个区间上进行。根据目标命题和原始命题，选择相应的算子，进行分形逻辑推理。分形逻辑提供的连接词有非、与、或、蕴含、平均、组合。

4. 仿真与应用

⑦ 对于系统中参数的确定、相关系数的求解，以及连接词运算模型的选择，在真正应用之前都需要进行反复的仿真模拟，不断进行建模修正，以求得到最佳的目标参数控制阈值，和选择合适的运算模型。

⑧ 在实际应用过程中，把分形逻辑运算所得到的控制参数值反馈到子系统及整个系统，根据情况进行相应的参数控制或调节，以使系统达到预期的状态，或获得期望的服务。

在图 2.5 模型中，复杂系统及其子系统都会存在不确定性，测量数据也会存在误差，因此需要对所关注的参数进行动态监测，如数据的实际分布与期望分布发生了偏离，则其生成函数、N 性生成元，N 范数、系数 k' 值以及各逻辑运算都会随之进行调整，并通过不确定性推理得到新的目标参数逻辑值，并把调整信息反馈到系统中，从而实现精确控制。

针对以上 8 个部分，本文在以后各章中依次进行研究：第①部分在第三章进行分析；第②、③部分在第四章进行探讨，并给出求解 h 值的方法；第五章主要研究④中的广义 N 范数定义与性质，并推导由分布函数求解 k 值的公式；第⑤部分在第六章进行研究，给出了一种创新的维数理论。第⑥部分在第七章进行研究，定义了广义 T/S 范数，研究了任意区间上的连接词运算模型。第八章进行⑦中的仿真模拟，并探讨由分形逻辑通向混沌逻辑的途径；第⑧部分在第九章的应用案例中进一步阐释。

2.4 小结

泛逻辑学是本文的重要理论基础，本章首先介绍了泛逻辑学的基本原理，包括语法规则的四大要素、广义相关性 h 和广义自相关性 k 的基本概念与物理意义、以及零级泛逻辑运算模型。泛逻辑学具有完备性与开放性双重性质，它包含现有的各种具体应用逻辑，同时又是一个随时准备新的逻辑加入的开放体系，这种特征反映了当代科学发展的新思维。

泛逻辑学的重要贡献在于发现了命题之间在客观事实上存在的广义相关性和广义自相关性，据此提出了柔性逻辑的研究纲要，同时开展广泛的理论与应用研究。但是，对于“泛逻辑原理在复杂系统中如何应用”这一课题，本文之前暂时还没有涉及，笔者在掌握泛逻辑原理，了解分形混沌等复杂系统的基础上，提出了“基于分形逻辑的复杂系统相关性推理”，这个模型很好地把泛逻辑原理与复杂系统的不确定性推理连接起来，它贯穿论文的始末，是以后各章的连接线。下一章紧接着分析分形、混沌与逻辑之间的广义相关性。

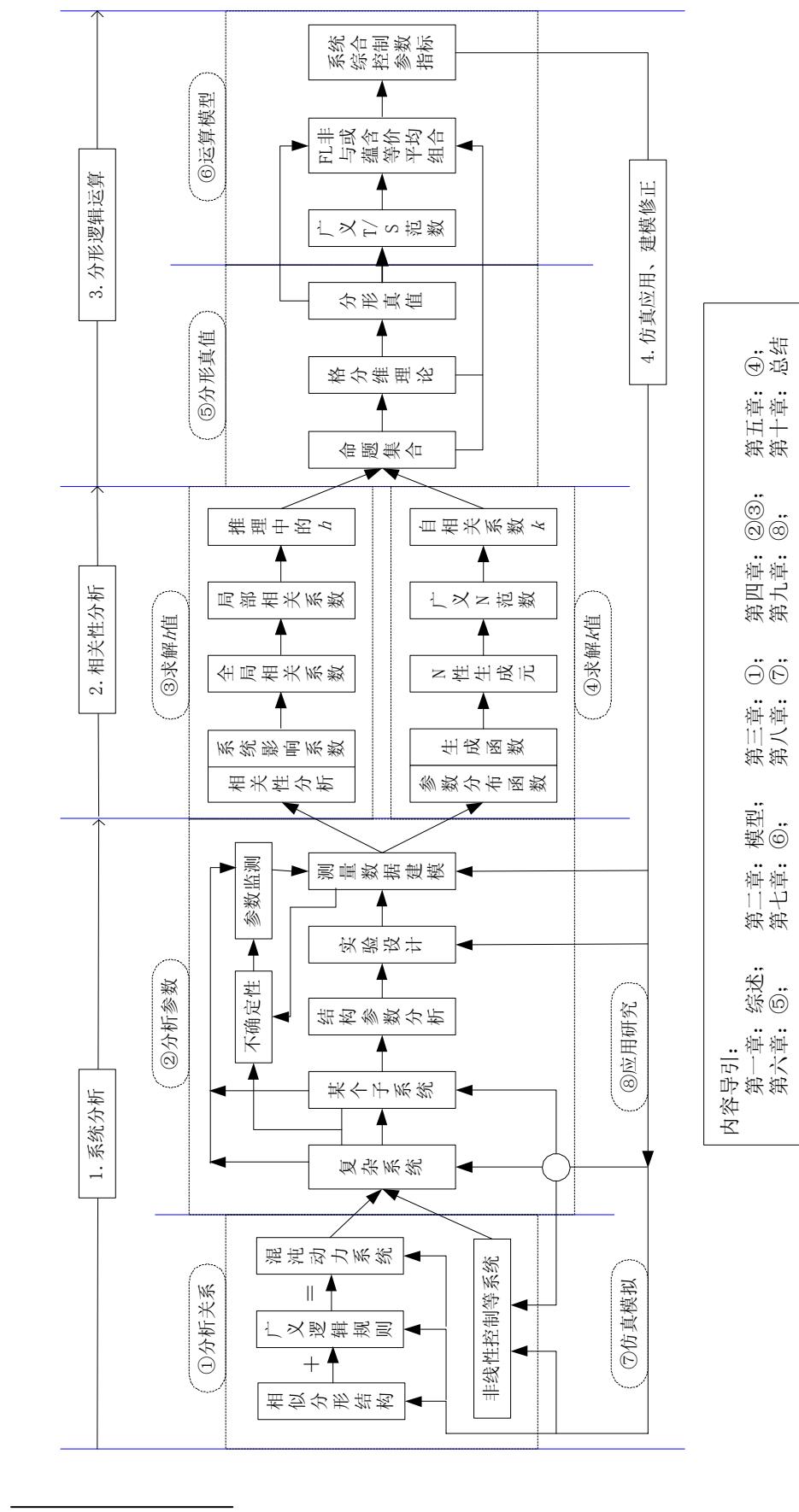


图2.5 基于分形逻辑的复杂系统相关性推理模型 (CSCRM)

第三章 分形、混沌、逻辑的相关性

本章首次在分形领域引入了逻辑推理的概念，重点讨论了分形、逻辑、混沌之间的广义相关性，三者在一定程度上存在“相似分形结构 + 广义逻辑规则 = 混沌动力行为”的关系。并在此基础上探讨了建立“分形逻辑”的必要性与可能性，分析表明：建立分形逻辑是基于客观事实的复杂系统推理的需要，而泛逻辑原理则为其提供了可能。

3.1 分形、混沌、逻辑的相关性

3.1.1 分形与逻辑的相关性

1. 分形的概念

自 1975 年以来，分形理论无论是在数学基础还是在应用方面都有快速发展。那么，什么是分形呢？事实上，目前对分形还没有严格的定义，而只能给出描述性的概念。简单的讲，分形是对没有特征长度，但有一定意义的自相似结构的事物的总称[MDBB82]。“分形”一词的英文为“Fractal”，由 Mandelbrot 最先引入，意为破碎的、不规则的，并将分形定义为整体与局部在某种意义上的自相似集合，也给出了一个定量的刻划，称“分形是其豪斯道夫维数严格大于其拓扑维数的集合”。但是这些定义都不够精确、不够全面。英国数学家 Falconer 在《分形集几何》一书中认为[KJFA85]，分形的定义应该以生物学家给出“生命”定义的类似的方法给出，即不寻求分形的确定简明的定义，而是从分形的特性着手，将分形看作具有如下所列性质的集合 F：

- (1) 具有精细结构，即在任意小的比例尺度内包含其整体形状；
- (2) 是不规则的，以至于不能用传统的几何语言来描述；
- (3) 通常具有某种自相似性，或许是近似的或许是统计意义上的；
- (4) 在某种意义上定义的“分维数”通常大于 F 的拓扑维数；
- (5) F 的定义常常是很简单的，或许是递归的。

目前，它的这些观点已被大多数人所接受，例如：康托尔三分集和科赫曲线都是分形的典型例子。

2. 分形的基本特征

分形最明显的特征是自相似性，其它的特征包括无限复杂、无限细致等[LHYL94]。

(1) 自相似性

自然界中许多植物具有自相似特性，例如，在这棵厥类植物中，枝权是整个植物的小版本，而枝权的枝权则是更小的版本。这种特性可以无限地持续下去，如图 3.1。正是因为分形所具有的自相似特性，才使分形如此重要并且具有实际应用意义。很多物体都可以通过分形来精确描述。分形可以描述植物、雪花等自然物体，同样也可以生成风景图象，甚至是音乐作品。

(2) 无限精细和无限复杂

分形的另一个重要特征是具有无限精细和无限复杂性。这个性质在迭代函数系统（IFS）中得到了充分的体现与应用。但是，无论是自相似性还是无限精细性都不能用来科学地定义分形，因为这些都只是分形中普遍存在的特点。



图 3.1 分形植物

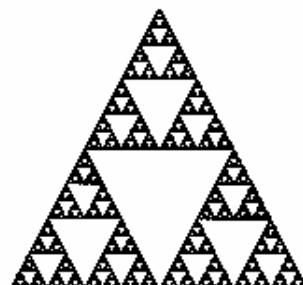


图 3.2 Sierpinski 三角形

(3) 分维性

为了定义分形，必须引进分维的概念，分形的正式定义是依据分维（分数维）来判断的，分维同时又是分形事物所具备的特征，用它可以更为贴近地描述分形事物。因为分维的概念非常复杂，所以目前主要研究分形的自相似特性，为分数维的研究奠定必要的基础。

无论是自然系统的、社会系统的、还是统计物理的分形事物，都具有自相似性、结构复杂性、并且都可以通过分形维数来定量描述。

3. 分形与逻辑的相关性

分形与逻辑的相关性主要体现在分形原理中，分形原理在不同的应用需求中被定义和解释，目前分形原理主要有以下 7 条。可以看出，这些原理都是从数学公式的角度给出，然而，我们可以给出其逻辑上的描述。

(1) 自相似原理

这里用集合术语来表述自相似原理。假定集合 S 由 n 个不相重叠的子集 S_i ($i=1,2,3,\dots,n$) 组成，若 S_i 放大 (缩小) r_i 倍后与 S 重合，则 S 是一个自相似分形集。当各个 r_i 相等时，称为均匀自相似分形集。其分维为：

$$D_f = \frac{\ln N}{\ln(1/r)}$$

当 r_i 不全相等时，称 S 为自仿射集合，是非均匀自相似分形集。其分维由下式定义：

$$\sum_{i=1}^n r_i^{D_f} = 1$$

逻辑描述为：若把分形事物当成命题对象，则其分形维数 D_f 是此命题(对象)的真值。即上述分维的计算公式给出了分形命题的真值定义与求解方法。

(2) 积和原理

积和原理也称曼德布罗特经验定理。假定分形集合 S 是两个互不重叠的分形子集 S_1 和 S_2 的乘积，则 S 的维数等于 S_1 和 S_2 的维数之和：

$$D_f = D_1 + D_2$$

逻辑描述为：若 $S_1 \cap S_2 = \emptyset$ ，则 $D(S_1 \times S_2) = D_1 \vee D_2 = D_1 + D_2$ 。此时 D_f 可以大于 1。

(3) 加和原理

若两个分形集合 S_1 和 S_2 的交集为 S ，则 S 的维数为

$$D_f = D_1 + D_2 - d$$

其中， d 为嵌入空间的欧几里得数。

逻辑描述为：若 $S_1 \cap S_2 = S$ ，则 $D(S) = D_1 \vee D_2 = D_1 + D_2 - d$ 。

(4) 合并原理

设分形集 S 是两个互不相关的分形子集 S_1 和 S_2 的和，两分形子集的维数分别是 D_1 和 D_2 ，如 $D_1 > D_2$ ，则 S 的分维为 D_1 。

逻辑描述为：若 $S_1 + S_2 = S$ ，则 $D(S) = \text{Max}(D_1, D_2)$ 。这与模糊逻辑的或运算对应。

(5) 匹配原理

若要分形集 S_1 和 S_2 有效地组成分形集 S ，则要求 S_1 和 S_2 的分维相等或局部的分维相等。在实际问题中，只要求二者近似相等。

匹配原理给出了分形集有效组合的分维等价性条件，可以用泛逻辑的“泛等价”运算模型来描述。

(6) 级差原理

分形整体是分形集 S ， S 由分属于不同层次的分形子集 S_i ($i=1,2,3,\dots$) 构成， i 称为级次。 S_i 以某种方式与 S 相似。 i 越小，结构越简单， i 越大，结构越复杂。级差 i 相差越大，相似程度越小，这与生物进化的历程是类似的。

级差原理反映了逻辑推理过程的递归性，逻辑公式的传递性，随着命题真值的传递，推理的层次越多，则最后得到的命题的误差越大，也即与原始期望值的相似度减小。

(7) 自仿射原理

设在 d 维欧几里得空间, 分形集 S 由 n 个互不重叠的分形子集 $S_i (i=1,2,3,\dots,n)$ 组成。若 S_i 通过仿射变换 $r_k (k=1,2,3,\dots,d)$ 后与 S 重合, 则称 S 为自仿射分形集。自仿射分形的分维不是唯一的, 可以引入不同的分维来表征系统的分形特征。

由于逻辑推理过程存在近似性或不确定性, 因而完全确定系统的推理模型在实际中是不存在的, 自仿射变换体现了如何处理近似问题的思路与方法。

在上述分形原理中, 除自相似原理外, 其它原理很少得到实际应用。积和原理、加和原理、合并原理目前仅是在某些条件下成立, 其应用受到很大的限制, 原因在于这些原理没有考虑不同分形对象之间的“相关性”, 从而导致其计算公式具有不合理性。例如: 合并原理指出: 两个分形子集的和的分维等于其中较大的分维, 这是典型的模糊数学中的定义方法, 其局限性的论述参见文献[HEWL01], 从而使得“分形”这一新思想仍然禁锢在“经典”数学之中。

根据泛逻辑的思想, 我们可以考虑各个分形集合之间的广义相关性, 可以在各个分维 D 的表述上加上广义相关系数 h 和 k , 并使其能参与逻辑运算。例如

$$D_{1(h,k)} \vee D_{2(h,k)} \longrightarrow D_{3(h,k)}$$

其中, 每个 $D_{(h,k)}$ 都是一个命题。在分形领域引入泛逻辑相关性的思想, 一方面可以进一步明确分形原理的应用条件, 另一方面可以发展或改善现有的分形原理, 使分形理论不仅在数学计算领域, 而且在逻辑推理领域发挥更大的作用。

3.1.2 混沌的概念及其特征

1. 混沌的概念

混沌理论是非线性科学的核心部分, 但是与分形相同的是, 至今还没有对混沌的概念给出严格的定义。不同领域的科学家往往对其做出不同的定义。

1975 年李天岩(Tianyan—Li)和约克(Yorke)给出了混沌的一个数学定义, 这也是第一次赋予混沌这个词以严格的科学意义, 其定义如下[CGJY01, ZBXS99]:

设连续自映射 $f: I \rightarrow I \subset R$, I 是 R 中的一个闭区间, 如果存在不可数集合 $S \subset I$ 满足:

- (1) S 不包含周期点。
- (2) 任给 $X_1, X_2 \subset S$ ($X_1 \neq X_2$) 有

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} |f^t(X_1) - f^t(X_2)| > 0$$

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} |f^t(X_1) - f^t(X_2)| = 0$$

这里 $f^t(\bullet) = f(f(\bullet \bullet \bullet f(\bullet)))$, 表示 t 重函数关系。

- (3) 任给 $X_1 \subset S$ 及 f 的任意周期点 $P \subset I$ 有

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} |f^t(X_1) - f^t(P)| > 0$$

则称 f 在 S 上是混沌的。

上述定义体现了混沌系统的有界性、非周期性、初值敏感性。然而，混沌系统具有哪些基本特征呢？

2. 混沌的基本特征

在物质世界中的混沌现象处处可见，从宏观世界到微观世界概不例外。它把表象的无序性与内在的规律性巧妙的结合在一起，其基本特征有[LHYL94]：

(1) 内在与外在结合的随机性

不少文献[SXFD88, HDSD93]认为混沌行为是由其内在随机性产生的，虽然混沌运动在表现上非常不规则，而且在实测中只能对混沌轨道进行统计描述，所以它被看成是随机的，又因为这种随机性与外界扰动、噪声等引起的随机性不同，所以有人称它为“内在随机性”，但是把这种表述容易产生这样的错觉，即“混沌中的随机性是确定性系统本身产生的”，从而导致“确定论系统本身可以产生不确定行为”的错误观点。文献[ZBXS99]主张“内在”应指非线性方程本身，指由方程描述的结构、关系和操作。而混沌中的不确定性是源于初始条件的不确定，非线性方程本身只不过对其起到一种放大作用，从而使初始条件的微小的不确定，放大成人们可以观察到的宏观不确定。初始条件在一般情况下反映的是主体与客体系统间的关系，而不单纯是客体系统自己的性质，它不是内在的，而是人们观察能力有限造成的初始条件的不确定性产生的，因此是外在的。

体系处于混沌状态，一般说来，具有整体稳定性，而局部是非稳定的。而体系内的局部不稳定正是内随机性的特点，也是对初值敏感性的原因；而给定初值大小的误差则是外在的随机性。如果没有内在的非线性方程对初值敏感的内随机性，例如，普通的线性函数，则不可能产生混沌行为；反之，即使非线性方程具有对初值敏感的内随机性，但假设试验仪器的计算精度达到足够高，人们给出的初始值相当的精确，因此即便迭代 100 万次也能保证不产生混沌行为。

因此，本文认为混沌行为的随机性应该包含内随机性和外随机性这两个方面，混沌行为的产生是这两个方面随机性结合的结果。有关这一点我们允许存在不同的观点，允许从不同的角度来进行不同的解释。

(2) 相空间形态的分维性

混沌具有分维性质，是指系统运动轨迹在相空间的几何形态可以用分维来描述。系统的混沌运动在相空间无穷缠绕、折叠和扭曲，构成具有无穷层次的自相似结构，这种结构就是著名的奇怪吸引子。奇怪吸引子结构可以用分数维来进行刻划。例如：著名的伊依吸引子，它是从二维映射[HARS20]

$$\begin{cases} x_{n+1}=1+by_n-ax_n^2 \\ y_{n+1}=x_n \end{cases}$$

在迭代中产生的。

当取 $a=1.4$, $b=0.3$ 时, 随机抽取一个初始值(x_0, y_0), 便可以进行迭代。当迭代次数无限大时, 其运动轨道为一条宽度为零, 无限长, 无限次来回盘旋的一条曲线, 它具有无限嵌套、无穷层次和永无了结的内部结构, 这就是伊依奇怪吸引子, 它是动力系统的一条特殊轨迹, 其它所有的轨迹都趋近于它。可以计算出此时的伊依吸引子的分形维数 $D=1.26$ 。同样, 对于著名的洛伦兹奇怪吸引子[LREZ97], 如图 8.11, 当方程中的参数 $r=40$ 、 $\sigma=16$ 、 $b=4$ 时, 其吸引子的分形维数 $D=2.06$ 。

(3) 无序中的有序性

混沌现象是一种无周期性的有序态, 具有无限层次的自相似结构, 存在无标度区域。只要数值计算的精度或实验设备的分辨率足够高, 则可以从中发现小尺度混沌的有序运动花样, 所以具有标度律性质。无标度区可以应用分维进行描述, 有标度区则可以用精密仪器直接测量。

混沌中的“有序性”还表现在它具有一个普适量。当系统趋于混沌时, 所表现出来的特征具有普适意义。其特征不因具体系统的不同和系统运动方程的差异而变化, 这与费根鲍姆常数(4.669201...)有关。

3.1.3 分形与混沌的相关性

1. 从混沌到有序

我们知道, 混沌是一种非周期的动力学行为, 看似无序, 杂乱无章, 但却蕴藏着丰富的内涵, 如奇异吸引子, 分支、窗口等。因此可以说, 混沌中蕴含着有序, 而决不仅仅是一个无从控制的随机过程。Sierpinski 三角形(如图 3.2)是利用一些非常简单的规则, 做一些很简单的计算, 所绘出的一幅奇妙的三角形图案。这意味着, 有时即使缺乏计算机理(甚至只用随机的方法)也不影响三角形结果的产生。这一点正是混沌研究所必不可少的特性, 也即无序中蕴含着有序。

2. 从有序到相似

自然界的有序特征是自然界自组织动力学行为的反映。有序的事物就意味着有规律可寻。这里的“有序”是“广义有序”, 它不单指线性科学, 更重要的是非线性科学中的规律性。研究表明, 蕴涵在混沌内部的有序具有分数维的特性, 如燎燎升起的炊烟, 如螺旋般的上升。每次螺旋形成一个不自封的圈, 各个圈是相似的。混沌系统在相空间总是收敛于一定的吸引子, 而这些吸引子具有自相似的分形结构, 可以用分数维进行度量。对于通常意义上“有序”的概念, 可以认为是“相似”中的一种特例。

3. 从相似到分形

对混沌的进一步研究证实，混沌之所以具有分数维的性质，是因为混沌的动力学行为具有自相似的性质。因而可以用分形来研究混沌，使得混沌与分形成为研究非线性科学的强有力工具。

从混沌到有序、从有序到相似、从相似到分形，这就很好地概括了混沌与分形之间的相互关系。由于混沌现象具有分维性质，从而使得研究分形成为研究混沌的一条有效途径。

3.1.4 分形、混沌、逻辑的相关性

世界上没有完全相同的两片树叶，问题在于“为什么没有”呢？

通过对分形、混沌、逻辑相互之间的关系研究，可以用如下的表达式进行概括：

$$\text{相似分形结构} + \text{广义逻辑规则} = \text{混沌动力行为}$$

1. 相似分形结构是基元——物质基础

首先，我们认识到：无论对分形如何定义，“分形”所描述的一种自然系统或社会系统中已经存在的、或人工虚拟的、或统计数学的、具有自相似性质的“事物”，其本质是一种自相似“结构”，绝大多数情况下是静态的存在性结构，在复杂系统中，分形所描述的是一种“结构”，它是一种“状态参量”。

这些结构包括：初始结构（生成元）、分形迭代过程中的第 n 级结构、以及 n 趋于无穷时的极限分形结构。在整个系统的演化方式（迭代规则）确定的条件下，分形的生成元决定了迭代中的任意级结构和极限结构。此时，生成元可以认为是整个系统的“基元”，它是最终形成复杂系统的“物质基础”，没有生成元自然也就没有分形。当系统的演化方式对于不同迭代级别有所不同时，则第 $n-1$ 级的分形结构决定了第 n 级的结构。

2. 广义逻辑规则是动力——迭代方式

在分形结构的基础之上，如何演化到混沌行为呢？其演化动力是什么呢？这其中必然有演化的“规则”，这种规则在分形与混沌系统中就是“迭代方式”。

无论是经典康托集的生成，还是复杂朱丽亚集的变幻，其中最重要的就是“迭代方式”。三分康托集的生成是每次去掉中间的 $1/3$ 段，朱丽亚集的生成是进行函数的迭代，在每次迭代时都使用了相关的规则。对于 L 系统而言，迭代规则被定义为一组可替换的字符串。显然，对于相同的分形结构，如果迭代规则不同，则迭代结果往往不同，尤其是加入了随机规则之后，对迭代结果往往很难进行长期预测。

从人工智能的产生式和泛逻辑推理的角度来看，这里的“迭代方式”也是一种广义逻辑规则，它包括线性规则、非线性规则和随机规则。线性规则和非线性规则

都属于确定性规则。因此可以说，广义逻辑规则是促进复杂系统演化的动力。

3. 混沌动力行为是反应——作用效果

复杂系统的演化结果往往是多种多样。然而，研究发现，对于特定的系统结构，使用一定的广义逻辑规则，其演化可以产生特定的行为。分形结构就是这里的系统结构，迭代规则就是这里的广义逻辑规则，混沌动力行为就是复杂系统的一种特殊行为。“混沌”首先是描述系统状态的一种性质，表征系统该状态的“不可认知”性。而“混沌动力行为”和“混沌运动”则描述系统的一种复杂变幻，侧重于变幻“过程”的描述。但是在通常情况下并不严格区分“混沌”与“混沌运动”，而其具体含义在不同文献的描述中则有所不同。

分形与混沌的关系表明：如果把非线性动力系统看成是一个不稳定的发散过程，那么由 IFS 生成的吸引子正好是一个不稳定的收敛过程，因此可以认为：“如果把混沌广义地看成具有自相似的随机过程或结构，则分形也可以看成是一种空间混沌。反之，由于混沌运动具有在时间上的无规自相似性，它也可以看成是时间上的分形。”，也即：分形是空间上的混沌（一种状态下的特殊结构），混沌是时间上的分形（分形结构随时间进行周而复始、但又永不相交的折叠、扭曲演化）。以泛系理论来分析[WUXU04, FEXJ04]，分形的本质是一种“局、整”关系，混沌的本质是一种“形、影”关系，在“有限的时间”之内，二者具有规律上的统一性或相通性。

综合以上分析，从时空演化的角度可以得到如下关系：

$$\text{分形} + \text{时间} = \text{混沌} \quad \text{分形} = \text{混沌}|_{T \text{ 时刻}}$$

从动力来源的角度则可得到关系：

$$\text{相似分形结构} + \text{广义逻辑规则} = \text{混沌动力行为}$$

如图 3.3 所示。

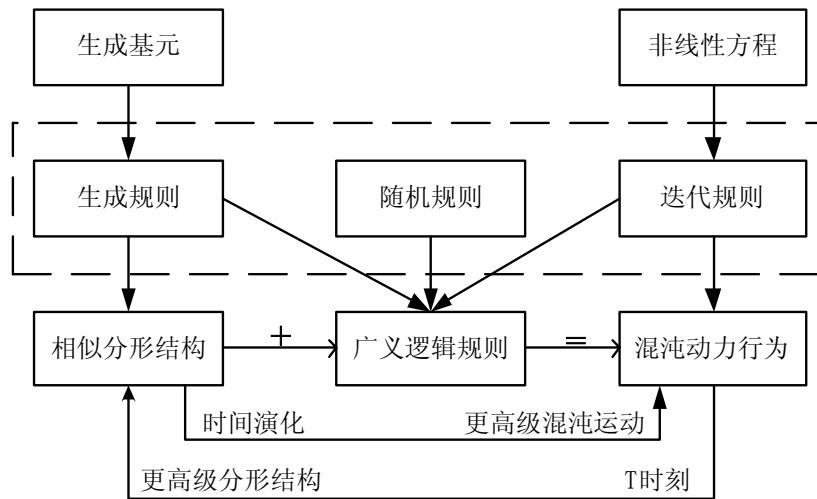


图 3.3 分形、逻辑、混沌三者间的关系

3.2 有关建立分形逻辑的探讨

尽管分形论在分子科学、物理学、化学、生命科学等领域有了一定的应用与发展，相关的文献有很多[KENN92, LOQW99, CSJZ98, DOLK91]，但其更多的却仍是一门计算数学，对许多复杂系统的推理过程和结果预测仍是少能为力，而此时的混沌学几乎仍限于在控制系统中的应用。如何才能使分形论与混沌学得到更快发展与广泛应用呢？21世纪的科学是复杂性科学，它们如何充分发挥其作用呢？对于复杂系统而言，对其中各要素、各过程的判断、推理与控制已经成为研究热点，而这归根结底是需要有正确有效的逻辑推理，这就势必要求逻辑学的发展。事实就是这样，在正需要深入发展经典逻辑的时候，一门新的学科——泛逻辑学产生了，它分析了经典逻辑与模糊逻辑的使用范围，并提出了所有逻辑学应该具备的四要素。这就为建立“分形逻辑”和“混沌逻辑”提供了理论构架和生成规则。因此可以说，分形逻辑与混沌逻辑的产生既是人类对自然规律认识深入的必然产物，也是深入认识的客观需要，是研究复杂系统的强有力的“工具逻辑”。

3.2.1 建立分形逻辑的必要性

1. 柔性推理需要真值分维化

在刚性逻辑中，命题真值只能是 0 或 1。模糊逻辑的出现则允许命题真值可以为区间 $[0,1]$ 上的任何有意义的值，这无疑大大地推动了逻辑学的发展。然而，由于模糊逻辑没有考虑多个命题相互间存在的广义相关性，其理论本身存在一定的缺陷，其应用则受到诸多条件的限制。

泛逻辑是一种柔性推理逻辑，其真值域的一般形式是多维超序空间，在柔性推理与柔性控制过程中，泛逻辑要求命题真值实现分维化。真值分维化包含两个方面的含义：一是真值的分数化，即可以是任意区间 $[a,b]$ 上的实数；二是真值可以不仅是单个数值，也可以是“分维向量”。

由于分形事物的分维性，如建立分形逻辑，则可以实现柔性推理的真值分维化。

2. 解决实际分形问题的需要

尽管分形在众多领域都有不同程度的应用，但分析表明：分形还主要扮演“计算数学”的角色，人们多用函数迭代的方法来展示分形事物的动力学行为。在许多典型的分形问题面前，仅仅由数学出生的分形却遇到了前所未有的困难。这里举两个例子来说明建立分形逻辑的必要性。

(1) 这是一个典型的分形问题[BHKY94]，称其为“分形人问题”，简化如下：

一个分形的人，

走过分形的一英里，

买了一只分形的猫，
抓了一只分形的鼠。
分形人分形的大脑皮层里，
构思着分形猫分形地吞下分形老鼠，
分形老鼠被分形猫分形的小肠壁分形地吸收……

【问题】 经过多少个分形的一分钟后，分形老鼠才会被吸收完？或者问：经过分形的一分钟后，分形老鼠是否被吸收完？

(2) 这是笔者提出的“毛毯合并”问题，主要用来说明分形逻辑的连接词运算：假设两块面料相似但又不完全相同的毛毯 T_1 和 T_2 ，面积分别为 A_1 和 A_2 。毛毯自然是粗糙度的，即不光滑。设按某种测量方法已经计算出其粗糙度分别为 D_1 和 D_2 。

【问题】 假设把两块毛毯的面料拆散后混合在一起，重新织出面积为 $A_1 + A_2$ 的新毛毯 T_3 ，试问新毛毯 T_3 的表面粗糙度 D_3 是多少？

由于问题自身的复杂性，仅仅利用数学来计算，并较为准确地回答上述两个问题是困难的。第(1)问题需要由“分形逻辑”来进行分形推理和分形预测；第(2)问题需要建立毛毯的合并规则，由于毛毯的粗糙度可由分维表征[CONS91]，这就势必要研究二者面料的相关性，以及二者分维对新毛毯分维的影响程度，而这正好符合泛逻辑学中广义相关性 h 和广义自相关性 k 的概念。因此，如果建立了基于泛逻辑学原理的分形逻辑，可以预言它将在此类问题的研究与应用方面发挥重要作用。

3. 研究混沌系统的需要

在对混沌的研究中，发现其无序中蕴含着有序，而这种有序具有无限循环而又永不重复的性质，具有“自相似性”。然而，研究“自相似性”的分形论作为一门新兴学科已经有了较大进展，因而研究混沌的一大内容就是研究分形，而研究分形却成为研究混沌的一条有效途径。

通过分形逻辑的研究与应用，可以揭示生命科学中“牵一发而动全身”的疾病的本质，可以揭示众多物理、化学、生物过程以及自然现象的内在动力，可以进一步建立“混沌逻辑”。分形逻辑是由泛逻辑通向混沌逻辑的桥梁（见 9.4 节）。混沌逻辑可以用于混沌控制、气象预报、地震预测等众多领域。

4. 基于复杂系统参数推理的需要

长期以来，在对复杂系统（如模糊控制系统）的推理与控制过程中，我们往往需要把许多参数的分布函数转化成隶属函数，只有在“明确的逻辑系统”（如模糊逻辑系统）中进行推理，然后进行参数转换，再加以控制调节。这体现了“选择性”思维，即已知有二值逻辑、模糊逻辑、多值逻辑、数理逻辑、量子逻辑等，根据复

杂系统的特征，从中选择一种或几种逻辑作为该系统的推理系统。

但是，研究表明：对于某些分布或数学模型而言，我们不能限定其“逻辑推理系统”，我们必须在其自身的定义域内完成推理与控制，这样简化了普通用户对于控制变换的理解与实现，也减小了因为逻辑系统自身的局限性给系统带来误差的可能，如图 3.4 所示。这就要求我们研究一种可以在任意区间上进行推理的逻辑系统，这种逻辑系统具有“自适应”功能，对于形式上看来是同一种的逻辑，它可以根据问题的不同（比如上述定义域的不同）而自动“伸缩变换”。这也是本文尝试在任意 $[a,b]$ 区间上建立逻辑系统的一大原因。

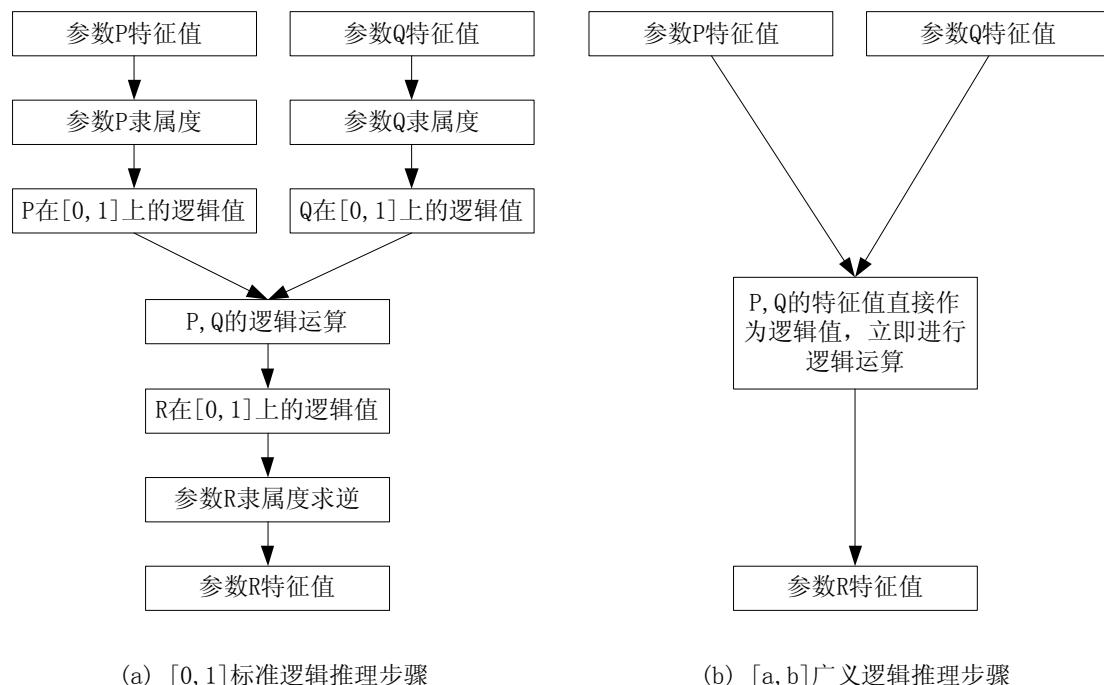


图 3.4 基于 $[a,b]$ 区间的参数推理与基于 $[0,1]$ 区间的逻辑推理比较图

3.2.2 建立分形逻辑的可能性

在引入广义相关性和广义自相关性概念的基础上，泛逻辑给出了可生成某具体逻辑的“逻辑生成器”，这就为分形逻辑的建立提供了可能。

对于一个具体逻辑，它应该具备四个要素：命题论域的真值柔性、连接词运算模型的关系柔性、修饰量词的程度柔性、推理模型的模式柔性。泛逻辑的“逻辑生成器”给出了“如何定义或生成这些要素”的生成规则，包括：生成基规则、生成元规则、拓序规则、换基规则。这里给出前三种规则，换基规则在 3.3.3 节中给出。

1. 生成基规则

每个命题连接词都有自己的生成基，它是在 $[0,1]$ 空间内，在命题的真值没有误

差，且命题之间的相关性是最大相斥时，该命题连接词的运算模型，称作基模型。同一个基模型有两种不同的表达：非与表达和非或表达。表达不同，要求代入的生成元完整簇不同：非与表达的基模型要求代入 N 性生成元完整簇和 T 性生成元完整簇；非或表达的基模型要求代入 N 性生成元完整簇和 S 性生成元完整簇。

泛逻辑运算基模型的统一表达式是：

$$L(x,y) = \Gamma^1[a+bx+cy]$$

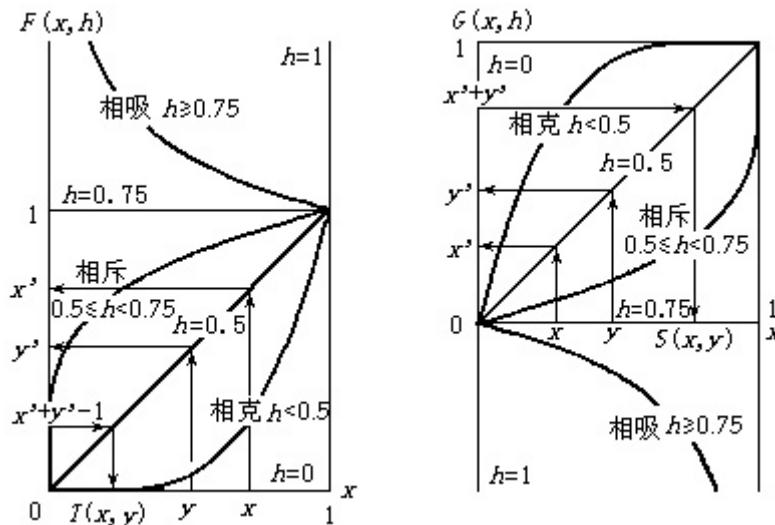
不同命题连接词的基模型对应不同系数，如表 3.1 所示。分别将这些系数代入统一表达式中即可得到泛逻辑运算的生成基。这一特性对设计和生产统一的泛逻辑运算门电路十分有利。

表 3.1：各种命题连接词基模型的统一表达式

系数	$N(x)$	$T(x,y)$	$S(x,y)$	$I(x,y)$	$Q(x,y)$	$A(x,y)$	$C^e(x,y)$
a	1	-1	0	1	1 1	0	-e
b	-1	1	1	-1	1 1	0.5	1
c	0	1	1	1	-1 -1	0.5	1

2. 生成元规则

将生成元完整簇作用到各种生成基上，就得到了线序空间[0,1]上的各种命题连接词的运算模型。生成元完整簇包括：考虑广义自相关系数 k 对命题真值影响的 N 性生成元完整簇、考虑广义相关系数 h 对命题之间关系影响的 T 性生成元完整簇和 S 性生成元完整簇。根据对二元运算零级生成元完整簇的不同确定方式，对基模型可以有不同的理解和表达，常见的有非与表达基模型和非或表达基模型，其对应的零级生成元如图 3.5 所示，并由此可以推导出零级、一级以及高级 T 性生成元完整



(a) 非与基模型的零级生成元 $F_0(x,h)$ (b) 非或基模型的零级生成元 $G_0(x,h)$

图 3.5 泛逻辑运算模型的零级生成元

簇、S 性生成元完整簇和 N 性生成元完整簇，确定各个连接词的运算模型。

3. 拓序规则

拓序规则规定由线序空间[0,1]上的各种命题连接词运算模型生成各种泛逻辑命题连接词运算模型的方法，包括如何生成正偏序空间、伪偏序空间、超序空间上的各种命题连接词运算模型。在许多情况下，命题的真值域是一个 n 维偏序空间，命题的真值域需要用 n 个彼此独立的分量来描述，即真值是一个 n 维矢量：

$$\mathbf{x} = \langle x_1, x_2, \dots, x_n \rangle, \quad \mathbf{y} = \langle y_1, y_2, \dots, y_n \rangle, \quad n > 1, \quad x_i, y_i \in [0, 1]$$

此时，对应的正偏序逻辑的拓序规则如下：

$$N(\mathbf{x}) = \langle N(x_1), N(x_2), \dots, N(x_n) \rangle$$

$$T(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \langle T(x_1, y_1), T(x_2, y_2), \dots, T(x_n, y_n) \rangle$$

$$S(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \langle S(x_1, y_1), S(x_2, y_2), \dots, S(x_n, y_n) \rangle$$

$$I(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \langle I(x_1, y_1), I(x_2, y_2), \dots, I(x_n, y_n) \rangle$$

$$Q(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \langle Q(x_1, y_1), Q(x_2, y_2), \dots, Q(x_n, y_n) \rangle$$

$$A(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \langle A(x_1, y_1), A(x_2, y_2), \dots, A(x_n, y_n) \rangle$$

$$C^e(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \langle C^e(x_1, y_1), C^e(x_2, y_2), \dots, C^e(x_n, y_n) \rangle$$

其中， $N(x)$ ， $T(x, y)$ ， $S(x, y)$ ， $I(x, y)$ ， $Q(x, y)$ ， $A(x, y)$ ， $C^e(x, y)$ 时线序逻辑学中的逻辑运算模型。

3.3 分形逻辑研究纲要

分形逻辑的研究可以分为三个步骤：

- (1) 近期目标：建立分形逻辑的初级模型；
- (2) 中期目标：分形逻辑的初步应用及其与其它逻辑的关系研究；
- (3) 长期目标：分形逻辑的发展完善与广泛应用研究。

要建立、发展、应用分形逻辑是一个艰苦长期的过程，本文仅针对第(1)步，试图在泛逻辑的基础上，建立一种分形逻辑的初级模型。本节的研究纲要也主要针对第(1)步而言。

3.3.1 分形逻辑的四大要素

依照泛逻辑原理，下面对分数逻辑的四要素：研究论域、命题连接词、量词、常用公式集与推理模式进行探讨。

1. 研究论域

分形逻辑的研究论域是所有具有分形特征的事物，该事物至少有一个特征可以用分形维数来描述。分形逻辑命题的真值域是多维超序空间：

$$W = \{\perp\} \cup [a, b]^n < \alpha >, n > 0.$$

显然，在分形逻辑中，由于分维的非整数性，W 也必定是基于连续值基的分维空间，且有必要考虑把命题的真值域拓展为 $[0, \infty]$ ，甚至 $[-\infty, +\infty]$ 。

2. 命题连接词

从分形论原理出发，把积和原理、加和原理、合并原理等分别与泛逻辑中的泛与、泛或、蕴涵等联系起来，我们可以得到分形逻辑的命题连接词，主要有：分形非、分形与、分形或、分形蕴涵、分形等价、分形平均、分形组合。引入系数 h 和 k 后，可以得到分形逻辑的各连接词运算模型，其统一形式如下：

$$Q = F(OP_{(h, k)}(F^{-1}(P_1), F^{-1}(P_2), \dots, F^{-1}(P_n)))$$

其中： P_i 为分形对象的分维向量，包括参考空间、分形对象的位置矢量、分维值大小等；每个分形对象对应一个分形图象，函数 $F^{-1}(P)$ 表示根据分维向量 P 构造出对应的分形图象， OP 表示对相关分形图象的逻辑操作，它相当于“命题连接词”，其范围包括但远远超过“与或非、蕴涵”等经典逻辑连接词， OP 操作不仅考虑分形图象的代数测度大小，还要考虑分形图象之间的几何位置关系，经过 OP 操作之后得到一个新的分形图象，函数 $F(x)$ 则表示对此新分形图象求分维，从而得到分形逻辑真值 Q 向量。其中： h 、 k 分别为泛逻辑中的广义相关系数和广义自相关系数， $F^{-1}(x)$ 与 $F(x)$ 表示两个相反的操作过程，而不是纯数学意义上的互逆运算。

以上是基于“空间算子”的运算模型。当函数 $F(x) = x$ 、 $F^{-1}(x) = x$ 、以及 OP 操作仅指泛逻辑中的 7 种连接词时，上式模型退化为通常的“代数算子”运算模型。

3. 量词

目前泛逻辑学提供的量词有：范围量词 ϕ （包括全称量词 \forall 、存在量词 \exists 、必然量词 \Box 、可能量词 \Diamond ）、阈元量词 δ 、位置量词 Φ 、过渡量词 \int 、假設量词 $\$$ 。此外，还可以根据分形逻辑的具体应用需要增加其它的量词。

4. 常用公式集和推理模式

根据命题连接词和量词的性质可以得到非常丰富的公式集，对分形逻辑而言，需要研究分形有哪些类别，各自特点如何，分形逻辑在各个复杂系统中的作用如何，如何进行“分形推理”。

除了语法规则的四要素之外，还要考虑分形逻辑的语义解释。比如，设命题的真值为对应分形事物的分维，命题之间的相关性大小表示分形事物间的相似程度等。

3.3.2 分形逻辑的定义与分类

1. 分形逻辑学的定义

【定义】(分形逻辑学) 分形逻辑学是利用逻辑学的方法，来研究分形事物中一般规律的科学，其主要理论基础是泛逻辑学和分形论原理。主要理解两个方面：

- (1) 把逻辑学原理应用在分形领域，并实现逻辑推理，则可称其分形逻辑；
- (2) 在以下的分类中，“分数维逻辑”和“分数基逻辑”可称为分形逻辑。

2. 分形逻辑学的分类

(1) 按逻辑学要素分类

命题分形逻辑：在逻辑推理中只考虑命题演算问题；

谓词分形逻辑：在逻辑推理中需要考虑谓词演算问题。

(2) 按真值域的基空间分类

分形逻辑真值的度量空间 $W=[a,b]^n$ ，通常情况下 n 为正整数。如果 n 不仅可以是正整数，而且可以是任意分数时，称为“**分数维逻辑**”，而对于 a,b 而言，如果 a,b 可以是任意实数时，称为“**分数基逻辑**”，分数基逻辑属于连续值基泛逻辑。

在特定情况下，当分形逻辑的真值只能在 n 个整数中取值时，称其为整数逻辑，也称为欧几里得逻辑。

分形逻辑的重要特征在于：①逻辑真值可以是考察区间中的任意实数，相对于整数逻辑而言，大多数情况下是一种真值可以是任意分数的分数逻辑；②维数 n 可以是任意分数，这需要打破传统的 n 表示向量的维数，而只能是整数的观念。

(3) 按真值域的有序性分类

当 $n=1$ ，即 $W=[a,b]$ 时是线序分形逻辑，如模糊逻辑和概率逻辑，可以认为是 $a=0, b=1$ 时的特例。当 $n \neq 1$ 时是 n 维偏序分形逻辑。

(4) 按推理模式分类

如果逻辑中只有演绎推理模式，则是演绎分形逻辑，即标准分形逻辑；如果包含了归纳推理，则是归纳分形逻辑；类似地还有类比分形逻辑，相似分形逻辑，迭代分形逻辑，仿射分形逻辑等，它们统称为非标准分形逻辑。

(5) 按语义解释分类

对不同逻辑学成分地语义解释不同，会形成不同的逻辑，如自相似分形逻辑，迭代分形逻辑、仿射分形逻辑等。

(6) 按逻辑真值的表达式分类

如果逻辑真值的表达式仅仅是 $[a,b]$ 中某个数值，称其为单值逻辑；如果真值的表达式是一个包含若干逻辑属性值的向量，称其为向量逻辑；如通过真值向量能够构造出某个考察对象，则可称其为面向对象的逻辑。

(7) 按研究与应用的对象分类

对于不同的研究或应用对象，可以有不同的逻辑。研究分形逻辑的主要目的在于应用其探究分形事物中的一般逻辑规律。

(8) 按连接词的运算模型分类

如果连接词的运算是直接把真值代入某确定代数算子进行计算，称其为“**第一类逻辑**”；如果不仅要考虑真值本身的数值大小，还要考虑命题所描述对象在空间上的几何位置关系，称其为“**第二类逻辑**”；如逻辑系统中的某个子系统可以反映整个系统的逻辑性质，称其为“**第三类逻辑**”，它是一种严格意义上的“**自相似分形逻辑**”。

本文主要研究的是命题分形逻辑，重点在于研究基于连续值基的分数逻辑，主要应用于复杂系统的相关性推理，以及分形领域中的其它逻辑运算。

3.3.3 分形逻辑的换基规则

1. 换基规则

分形逻辑作为泛逻辑中的一种具体逻辑，其基空间的表达式为： $W = [a, b]^n$ ， $n > 0$ ，空间维数 n 是连续可变的。由于在通常情况的基空间被定义为 $W = [0, 1]^n$ ，因此要实现在任意区间 $[a, b]$ 上的连续值基逻辑推理，需要研究基空间 $[0, 1]$ 与 $[a, b]$ 之间的换基规则。这里在泛逻辑给出的换基规则基础之上，给出了从 $[0, 1] \rightarrow [a, b]$ 和 $[a, b] \rightarrow [0, 1]$ 的双向变换规则，并给出相关的定义与使用原则。对于涉及无穷区间的换基规则，我们加入了“关注域”参数 $u \in R$ ，有关分析参见 9.3.2。

分形逻辑提供的基变换规则有：

单向有限规则 $[0, 1] \rightarrow [0, b]$:	$x' = bx$,	中元 $e' = b/2$;
任意有限规则 $[0, 1] \rightarrow [a, b]$:	$x' = (b-a)x + a$,	中元 $e' = (b+a)/2$;
双向有限规则 $[0, 1] \rightarrow [-b, b]$:	$x' = 2bx - b$,	中元 $e' = 0$;
正向无限规则 $[0, 1] \rightarrow [0, \infty]$:	$x' = ux/(1-x)$,	中元 $e' = u$;
负向无限规则 $[0, 1] \rightarrow (-\infty, 0)$:	$x' = u(x-1)/x$,	中元 $e' = -u$;
双向无限规则 $[0, 1] \rightarrow (-\infty, \infty)$:	$x' = u(x-0.5)/[x(1-x)]$,	中元 $e' = 0$ 。

上述所有的基变换都可以进行逆变换，相应规则如下，中元均为 0.5：

单向有限规则 $[0, b] \rightarrow [0, 1]$:	$x = x'/b$,
任意有限规则 $[a, b] \rightarrow [0, 1]$:	$x = (x'-a)/(b-a)$,
双向有限规则 $[-b, b] \rightarrow [0, 1]$:	$x = (x'+b)/2b$,
正向无限规则 $[0, \infty] \rightarrow [0, 1]$:	$x = x'/(u+x')$,
负向无限规则 $(-\infty, 0) \rightarrow [0, 1]$:	$x = u/(u-x')$,
双向无限规则 $(-\infty, \infty) \rightarrow [0, 1]$:	$x = [(x'/u-1) + \sqrt{(x'/u)^2 + 1}] / (2x'/u)$

所有以上变换都是基于标准区间 $[0, 1]$ 进行的，有时候，我们还需要在无穷区间与任意 $[a, b]$ 区间进行变换，通过 $[0, \infty] \rightarrow [0, 1] \rightarrow [a, b]$ 变换，我们可以得到 $[0, \infty] \rightarrow [a, b]$ 的直接表达式，同理可以得到其逆变换。于是有：

任意正向无限规则 $[a, b] \rightarrow [0, \infty]$: $x' = u(x-a)/(b-a)$, 中元 $e' = u$;
 任意负向无限规则 $[a, b] \rightarrow (-\infty, 0]$: $x' = u(b-x)/(a-x)$, 中元 $e' = -u$;
 任意双向无限规则 $[a, b] \rightarrow (-\infty, \infty)$: $x' = u(b-a)/(a-x)$, 中元 $e' = 0$ 。

相应的逆变换规则如下, 中元 $e = (b+a)/2$:

任意正向无限规则 $[0, \infty] \rightarrow [a, b]$: $x = ((b-a)x'/u)/(1+x'/u) + a$

任意负向无限规则 $(-\infty, 0] \rightarrow [a, b]$: $x = (b-a)/(1-x'/u) + a$

任意双向无限规则 $(-\infty, \infty) \rightarrow [a, b]$: $x = [a(x'/u + 1) - b]/(x'/u)$

此外, 有时可能还需要在两个有限区间之间进行变换, 其规则为:

双向有限规则 $[a, b] \rightarrow [c, d]$: $x' = [(d-c)/(b-a)](x-a) + c$, 中元 $e' = (c+d)/2$

【定义】 称换基规则 $[0, 1] \rightarrow [a, b]$ 为“**ab 换基规则**”(包括 a, b 为 $-\infty, \infty$), 相应的函数变换称为“**ab 基变换**”; 称换基规则 $[a, b] \rightarrow [0, 1]$ 为“**01 换基规则**”, 相应的函数变换称为“**01 基变换**”。

【定义】 设区间 $(a-b)=r \times (1-0)$, $r > 0$ 。如 $r > 1$ 则称 $[0, 1] \rightarrow [a, b]$ 的 ab 基变换为“**ab 扩展函数变换**”, 而称 $[a, b] \rightarrow [0, 1]$ 的 01 基变换为“**01 压缩函数变换**”; 如 $r < 1$ 则称 $[0, 1] \rightarrow [a, b]$ 的 ab 基变换为“**ab 压缩函数变换**”, 而称 $[a, b] \rightarrow [0, 1]$ 的 01 基变换为“**01 扩展函数变换**”; 在具体问题明确时, 可以简称上述各变换为函数的“**扩展变换**”或“**压缩变换**”, r 称为函数变换的“**扩展因子**”或“**压缩因子**”, r 可统称为“**换基系数**”。

2. 换基规则的使用原则

如果基空间不同, 逻辑真值的取值范围就会不同, 在一个应用中是否需要进行基变换, 这主要根据研究问题的性质来确定。通常有如下两种情况:

(1) 当需要进行逻辑推理的基空间转换时, 如把推理系统的基空间由 $[0, 1]$ 转化到 $[-1, 1]$, 此时需要用双向有限规则进行基变换。再如: 在无穷逻辑中, 其逻辑真值可以在 $(-\infty, \infty)$ 上任意取值, 则需要用双向无限规则进行基变换。

(2) 当在某确定基空间的逻辑系统进行推理时, 由于命题对应语义的参数的定义域不一定在逻辑系统的基空间之中, 此时需要进行基变换。例如要在 $[0, 1]$ 基空间中实现某系统中电压参数的模糊推理与模糊控制, 由于电压的实际参数值通常并不在 $[0, 1]$ 之间, 因此需要把“电压参数”转化为“逻辑命题”, 此时需要根据电压的分布函数形式来选择基变换规则。

3.3.4 分形逻辑中的相关系数定义

在现有的泛逻辑理论中, 逻辑推理的真值基空间还在 $[0, 1]$ 区间上来讨论, 其广义自相关系数 k 和广义相关系数 h 都定义在 $[0, 1]$ 区间之上。由于本文力图建立任意区间上的运算模型, 因此对 k 、 h 的区间进行了重新定义, 它们都定义在 $[-1, 1]$ 区

间之上。为了区别泛逻辑中的 h 、 k ，从本节之后进行了约定：分别用 $k'、h' \in [0,1]$ 表示原来泛逻辑中的广义自相关系数和广义相关系数，而用 $k、h \in [-1,1]$ 表示本文分形逻辑中的广义自相关系数和广义相关系数。

同样，在泛逻辑的组合运算中，其决策么元 e 定义在 $[0,1]$ 之上，本文也重新定义在 $[-1, 1]$ 区间之上，而用 e' 表示原有泛逻辑中的决策么元。

k 、 h 、 e 与 k' 、 h' 、 e' 之间存在如下换算关系：

$$h=2h'-1; k=2k'-1; e=2e'-1; h', k', e' \in [0,1]; h, k, e \in [-1,1].$$

有关 e 的物理意义将在组合运算中解释，这里给出 k 和 h 的物理意义。

1. k 的物理意义

对于单个命题的非运算存在：

- $k \rightarrow 1$: 表示逻辑上的最大可能否定，对应于最冒险估计；
- $k = 0.5$: 表示逻辑上的偏大否定，对应于中度冒险估计；
- $k = 0.0$: 表示逻辑上的适度否定，没有误差，对应于精确估计；
- $k = -0.5$: 表示逻辑上的偏小否定，对应于中度保险估计；
- $k \rightarrow -1$: 表示逻辑上的最小可能否定，对应于最保险的估计。

2. h 的物理意义

对于二元命题的逻辑运算存在：

- $h \rightarrow 1$: 表示二者间最大相吸，大集合完全包含小集合，是 Zadeh 算子对；
- $h = 0.5$: 表示二者独立相关，交集面积与二者面积成正比，是概率算子对；
- $h = 0.0$: 表示二者间最大相斥或最小相克，是有界算子对；
- $h = -0.5$: 表示二者间处于僵持状态，其中杀伤力和生存力相等。
- $h \rightarrow -1$ 时，表示二者间最大相克，双方是死敌，具有最大的杀伤性。

【定义】 称 $h > 0$ 时的算子对为相容算子对；称 $h < 0$ 时的算子对为相克算子对。

3.4 小结

本章对现有分形、混沌理论的基本概念与特征进行了归纳总结，重点阐述了分形、混沌、逻辑三者之间的相互关系，认为分形是混沌系统在某时刻的相空间结构，混沌则是分形结构在时间上的某种演变行为。在分形与混沌之间，广义逻辑规则起了演变推动力的作用。

在一定程度上，混沌比分形更为复杂。因此，建立一种分形逻辑不仅有利于分形理论自身的发展、而且可以在混沌等复杂系统的研究中起到“工具逻辑”的作用。本章据此探讨了建立分形逻辑的必要性与可能性，给出了分形逻辑的研究纲要，主要包括：分形逻辑的四大要素、定义与分类、换基规则、以及广义相关系数 h 和广义自相关系数 k 的重新定义。

第四章 复杂系统组成与广义相关性

泛逻辑的核心思想在于发现了命题之间存在着一种广义相关性，并引入广义相关系数 h 来表征这种关系。 h 的引入使得逻辑推理由刚性变为柔性，因此对于 h 的求解是泛逻辑、也是本文中分形逻辑研究的重要问题之一，但目前还未见到针对实际问题求解 h 值的可行方法。本章结合复杂系统的组成结构，定义了相关概念，分析了其中的广义相关性，给出了通过系统分析和已知算子求解 h 值的方法，实现了基于分形逻辑的复杂系统相关性推理模型中的关键一步。

4.1 复杂系统的组成结构

4.1.1 复杂系统的组成结构

自上世纪中叶以来，以一般系统论等为代表的系统科学作为一个学科群蓬勃发展起来，并在一些复杂问题的处理上取得了有目共睹的成就。系统论虽然强调整体性是系统的主要特点，但在具体问题的解决过程中，一般都着眼于对模型或系统的各种关系的分析，对于复杂系统而言，这往往需要分解成若干子系统来分别考虑，最后在加以合成。

同样，在复杂系统的推理中，也可以把其分解成若干功能相对独立的子系统，先在各个子系统中采用相应的广义相关系数进行推理，最后再考虑子系统的相互关系与组合推理。本章主要讨论复杂系统的集合关系，分析其中的命题构成，文中指标 i, j 均取自 $1, 2, 3, \dots, n$ ，是有限值。

设有一复杂系统集合 S_0 (图 4.1(a))， S_0 由 n 个子集 S_i 组成， S_i 又可以有其各自的子集，这样可以发展若干层，一直到功能相对独立时位置，此时最低层(有限层)的每个子集(子系统)不需要在分解，但其中包含了若干命题。按照这样的思想，可以把一个复杂系统集合转化为一个仅含有若干命题的集合。在图 4.1(b)中，把图各个子集中包含的命题都看成系统推理过程中的相应的暂时(中间)推论。在实际复杂的推理过程中，必有一个总体目标(目标函数或决策方案) P_0 ，如果用命题的观点来看，则图 4.1(a)中的 S_i 就对应着图 4.1(b)中的 P_j 或 T_j ，而 S_0 对应 P_0 。由此可以建立其推理系统，各下层的命题对其上层命题负责。

【定义】 由图 4.1 可知，在逻辑推理过程中，任何复杂系统中的命题构成包含四个部分：

(1) 必然有一个作为推理结束条件的总体目标(目标函数或决策方案)，称其为目标命题，用 P_0 表示；

- (2) 系统中存在推理的初始条件与命题，称其为**原始命题**，用 P_i 表示；
- (3) 在实际推理时总会产生一些暂时的、过渡的中间命题，统称为**暂时命题或中间命题**，用 T_i 表示；
- (4) 必然存在一个或多个推理结论，而无论此结论是否满足用户的需要，统称为**结论命题**，用 C_i 表示。

因此，复杂系统中存在的四类命题是：目标命题、原始命题、中间命题、结论命题。对于一个特定的复杂系统，其总体目标，即目标命题只有一个，但可以对系统进行分解，在每个子系统中可以有各自的子目标。在复杂系统中，原始命题一般有多个，产生的中间命题则往往有很多，所得到的结论命题也可能不止一个。

如果没有中间命题，结论命题可以直接由原始命题“一步”推理得到，则可视为特殊情况。

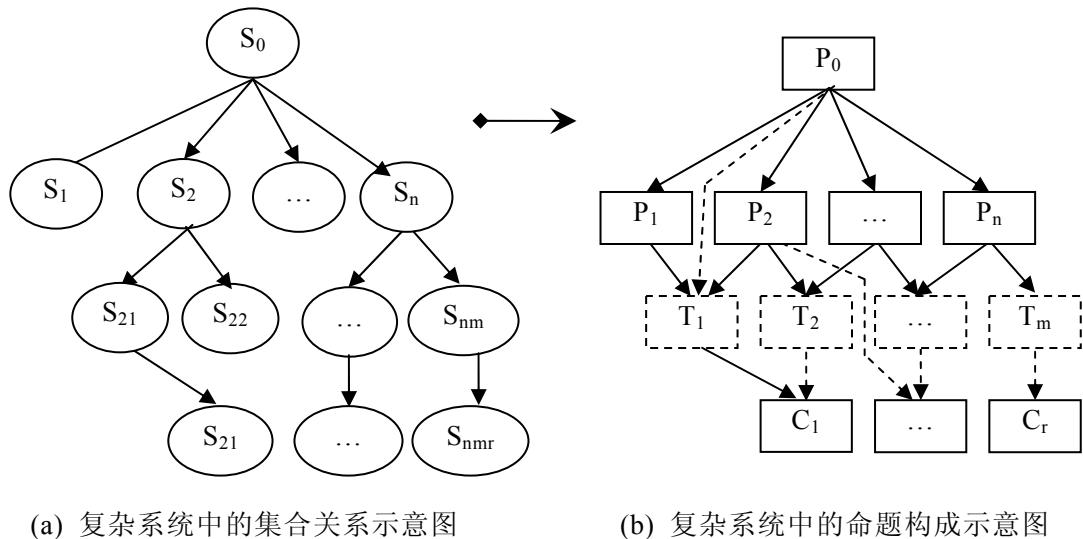


图 4.1 复杂系统中的集合关系与命题构成

4.1.2 全局相关性与局部相关性

按现有泛逻辑学中的定义： h' 是参与逻辑运算的两个命题之间的广义相关性，所以在推理过程中时时刻刻都离不开对当前参与推理的命题间的 h' 进行确定，对中间推论的引用也离不开 h' ，这样的思想是基于客观现实的，也是能够描述随机不确定性而进行柔性推理的根源所在。然而这就使得计算机在推理的各阶段都需要不断获取 h' ，那么，如何动态求取 h' 呢？仔细分析发现： h' 是定义在两个命题之间相关性的基础之上的，现在有一个问题：当系统中有且只有一个命题时，它和谁相关呢？笔者认为，在泛逻辑这一本质是柔性的逻辑中，必须考虑单个命题的广义相关性，这就势必要求寻找一个参照命题或参照空间。

【定义】(全空间) 全空间是这样的一个集合：是所有集合 S_i 及命题 P_i 、 T_i 、

C_i 的全集，用 S 表示，即 $S = \{S_i, P_i, T_i, C_i, i=0,1,2,\dots,n\}$ 。其性质有：

- (1) 在给定问题时，全空间是确定的；
- (2) 在推理过程中，全空间所包含的集合和命题在随着中间命题的增减而变化（推理过程中，新的命题可以加入，对不再适用的和不必要的中间命题可以删除）。
- (3) 在某一具体推理阶段或整个过程中，其总目标 P_0 是不变的。

【定义】(参照命题) 由性质(3)知：由于推理中总目标(目标函数或决策方案) P_0 的相对稳定性，所以定义其为复杂系统中的参照命题，直接用 P_0 表示。

【定义】(系统影响系数) 每个原始命题或中间命题都对目标命题有一定的影响程度，影响程度的大小称为“系统影响系数”。

实际问题中，通常先进行试验，或通过调查，并由专家给出各参数的重要程度，对于多参数的系统而言，各参数的系统影响系数之和往往不等于 1。因此在计算时通常需要以某种方式进行归一化计算，本文采用层次分析法来分析各因素对系统的影响程度大小，归一化之后可以得到各因素在系统中的影响权值，记为 h_s 。

说明：在无特别声明的情况下，文后的描述认为系统影响系数是已经经过归一化处理后的权值，因此，可以直接用 h_s 来表示。

【定义】(全局相关性) 某个原始命题或中间命题与参照命题(总目标)间的相生相克关系称为该命题的全局相关性，简称“全局相关性”。对具体问题时，由于总目标是确定的，此时全局相关性也称绝对相关性。

【定义】(全局相关系数) 某个命题与参照命题的相生相克程度的大小称为该命题的全局相关系数，简称“全局相关系数”。全局相关系数用 h_0 表示。这里“相生(相克)程度”的含义是指：某个命题使参照命题为真(假)的程度，它在数值上等于对系统影响系数归一化处理之后的权值 h_s 。当 h_0 从 1 逐渐变化到 0 的过程中，全局相关性由最大相生连续变化到最大相克。

【定义】(局部相关性) 基于某一系统的某两个命题(原始命题或中间命题)相互之间的相生相克关系称为此二命题之间的局部相关性，简称“局部相关性”。局部相关性即是现有泛逻辑系统中命题之间的广义相关性。

【定义】(局部相关系数) 基于某一系统的某两个命题(原始命题或中间命题)之间的局部相关性大小称为此二命题之间的局部相关系数，简称“局部相关系数”。局部相关系数即是现有泛逻辑系统中命题之间的广义相关系数，用 h 表示。

通过全局相关系数 h_0 来求局部相关系数 h ，主要分成两大步骤来完成：

- (1) 分别求取系统中单个命题(在推理前初始化系统时仅指原始命题，在推理过程中也包括中间命题)对参照命题的 h_0 ，也即求单个因素与决策目标之间的全局相关系数。
- (2) 在推理进程中，使每个命题都带着参数 h_0 而存在，在参与运算时转化为相应的 h 值，即使是单目运算也是如此。

4.1.3 相关性推理原理

1. 相关性推理原则

对于复杂系统而言，其中存在各种各样的相关性，尽管不少研究者已经意识到，并在其工作中以某种方式来考虑这些相互关系，但在泛逻辑产生之前，还没有一门逻辑系统正式提出“命题之间的广义相关性”这个概念，为了区别不同逻辑系统是否考虑命题间的相关性，也为了文后叙述的方便，这里给出应用相关性推理的以下原则：

(1) 【定义】(泛逻辑按相关性分类) 在所有各类逻辑中，如果在推理过程中的某一步或某几步要依赖于或要应用 h 或 k 的概念或值，则称这类逻辑为“**非平凡泛逻辑**”；反之，如其任何步骤都与 h 和 k 无关，则称其为“**平凡泛逻辑**”。平凡泛逻辑包括二值逻辑、多值逻辑、未考虑相关性的模糊逻辑、程度逻辑等。非平凡泛逻辑简称**非平凡逻辑**，平凡泛逻辑简称**平凡逻辑**。

在本文后面的叙述中，如未特别声明，均指非平凡泛逻辑。分形逻辑也是非平凡泛逻辑。

(2) 对于现有平凡泛逻辑，认为是在特定的 h 和 k 下的泛逻辑，虽然不同平凡泛逻辑的 h 和 k 不尽相同，但在推理过程中 h 和 k 的作用都消失。由于它们各自在相关领域内都已经能够进行推理并得到应用，所以无需再引入其它相关性的概念。

运用平凡逻辑系统进行推理的步骤分析：a)分析问题类型，根据不同类型选用不同的逻辑推理系统；b)运用选定的逻辑系统进行推理求解。

(3) 在非平凡泛逻辑系统的推理过程中，可以考虑选用 h 和 k 中的一个来对推理进程进行控制，也可以同时考虑两个参数对推理进程的影响。如果只考虑一个参数的变化，则需要给出另一个参数的缺省值或特定值。

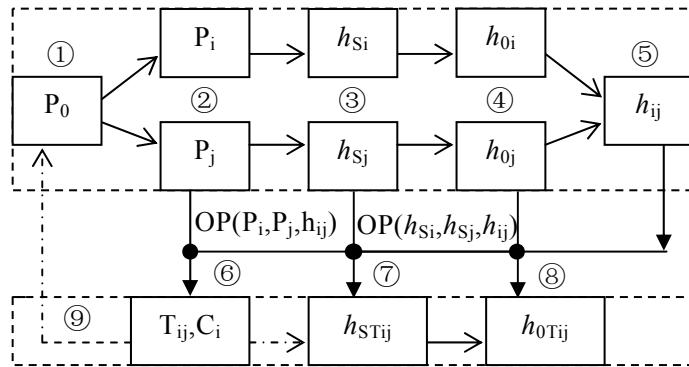
运用非平凡逻辑系统进行推理的步骤分析：a)分析问题中各命题之间的相关性及其自相关性，确定 h 和 k ；b)代入 h 和 k ，运用泛逻辑系统进行推理求解。

本章主要研究有关 h 的推理与求解，有关 k 的研究将在下一章讨论。

2. 相关性推理原理

图 4.2 给出了推理过程中求解广义相关系数 h 的原理，其中主要分成九个步骤：

- ① 实际复杂系统进行系统分析，确定全空间、参照命题 P_0 ；
- ② 分析系统参数，确定原始命题，求取原始命题的真值 P_i 、 P_j ；
- ③ 评定系统影响系数，由层次分析法求取其归一化权值 h_{Si} 、 h_{Sj} 值；
- ④ 由 h_{Si} 、 h_{Sj} 值求取原始命题对参照命题的全局相关系数 h_{0i} 、 h_{0j} 值，对于归一化的 h_S 而言， h_S 和 h_0 在数值上相等。
- ⑤ 求取参与逻辑运算的两命题之间的局部相关系数，也即广义相关系数 h_{ij} 值；

图 4.2 推理过程中求解广义相关系数 h 的原理图

- ⑥ 选择真值运算的逻辑算子 OP (连接词), 进行中间命题的真值求解, 得到 T_{ij} , 或者得到结论 C_i ;
- ⑦ 选择相关性运算的逻辑算子 OP (连接词), 以原始命题的系统影响系数 h_{Si} 、 h_{Sj} 为真值, 进行中间命题的系统影响系数求解, 得到 h_{STij} ;
- ⑧ 由系统影响系数求取中间命题的全局相关系数, 得到 h_{0Tij} , 也可以直接由全局相关系数 h_{0i} 、 h_{0j} 来求 h_{0Tij} ;
- ⑨ 把中间命题 T_{ij} 加入到命题集合, 参与下一步的运算, 此时可以把中间命题当作原始命题, 可以被其它运算引用; 如此时得到结论命题 C_i , 则反馈到命题集合, 与目标命题进行比较, 判断是否符合结束条件, 符合则结束推理, 否则将开始新一轮推理。

在图 4.2 中, 其根本目标在于求取二元命题之间的局部相关系数 h_{ij} 。下面将给出各步骤的具体求解方法。

4.2 由系统相关性求 h 的方法

目前, 对于实际系统而言, 尚未见到切实可行的“求取 h 值”的方法。本文从 h 的物理意义出发, 在相关性分析中引入了层次分析法, 提出了一种基于层次分析法的求解 h_s 值、进而求解 h_0 、 h_{ij} 的方法, 此方法思路清晰, 而且在推理过程的任何时刻可以求解任意两个命题之间的广义相关系数。

4.2.1 系统影响系数 h_s 求解

本文利用层次分析法来求系统影响系数, 关于层次分析法的详细内容请参阅相应书籍[JIQY96, CHLR20], 这里简介其基本思想, 以帮助对求解 h_s 值的理解。

层次分析法(Aalytic Hierarchy Process)简称 AHP。它把一个复杂问题按一定原则分而治之, 即分解为若干子问题, 对每一个子问题作同样的处理, 由此得到按支配关系形成的多层次结构, 对同一层的各元素进行仅仅两两比较, 并用矩阵运算确

定该元素对上一层支配元素的相对重要性，进而确定出每个子问题对总目标的相关性。AHP 的一般层次结构如图 4.3 所示：

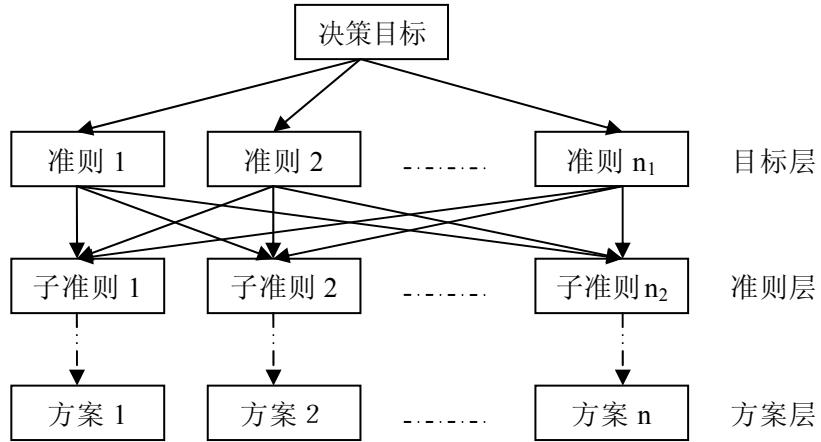


图 4.3 层次分析法的一般层次结构

利用层次分析法进行复杂系统的相关性分析，其主要步骤有：

- (1) 分析复杂系统结构，确定目标命题、原始命题，构造出如上的层次分析图；
- (2) 比例标定，给出两两因素间对于决策目标的重要性比较值，构造成对比较矩阵： $P=(P_{ij})n \times n$ 的分析构造；满足： $P_{ij} > 0$, $P_{ii}=1$, $P_{ij}=1/P_{ji}$; $i,j,k=1,2,\dots,n$ ，下同。在进行定性比较时，人们头脑里有五种明显的等级，用 1—9 尺度表示[JIQY96, LSLZ02]，如表 4.1 所示。

表 4.1 比较矩阵标度与 1—9 尺度的定义

尺度 A_{ij}	定 义
1	P_i 与 P_j 同等重要，对 P_0 影响相同
3	P_i 比 P_j 稍微重要，对 P_0 影响稍强
5	P_i 比 P_j 明显重要，对 P_0 影响较强
7	P_i 比 P_j 强烈重要，对 P_0 影响很强
9	P_i 比 P_j 极端重要，对 P_0 影响特强
2,4,6,8	相对重要性与影响程度介于其二之间
倒数	P_j 与 P_i 之比为上述相关比值的互反数

(3) 相对权值计算

$$\textcircled{1} P \text{ 元素每一列归一化得: } \bar{P}_{ij} = \frac{P_{ij}}{\sum_{k=1}^n P_{kj}}$$

② 将列元素归一化后的矩阵按行相加: $\bar{\beta}'_i = \sum_{j=1}^n \bar{P}_{ij}$

③ 将列向量归一化处理, 得: $\beta_i = \frac{\bar{\beta}'_i}{\sum_{j=1}^n \bar{\beta}'_j}$

(4) 一致性检验, 排序权向量作为决策依据还需要进行一致性检验, 方法是:

① 计算一致性指标 CI, 即 $CI = \frac{\lambda_{\max} - n}{n - 1}$

② 确定平均一致性指数, 在影响因素较多的情况下, 需要引入判断矩阵的平均随机一致性指标, 它是 500 次以上重复进行随机判断矩阵特征值的计算值的平均值, 记为 RI, Saaty 对多样本的统计计算得到了不同 n 时的 RI 值, 如表 4.2[JIQY96]。

表 4.2 随机一致性指标 RI 值

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
RI	0	0	0.58	0.90	1.12	1.24	1.32	1.41	1.45	1.49	1.51

③ 随机一致性比率 CR 为: $CR = CI/RI$ 。如果 $CR < 0.10$, 则认为判断矩阵具有满意的一致性, 否则需要重新调整判断矩阵, 使其 $CR < 0.10$ 。

根据系统影响系数的定义, 对于复杂系统中的某参数 i, 其归一化之后的系统影响系数为其对应指标的权向量, 即 $h_{si} = \beta_i$ 。它表示参数 i 对目标命题 P_0 的影响程度大小, $h_{si} \in [0,1]$ 。

4.2.2 广义相关系数 h 求解

由全局相关系数和系统影响的概念可知, 对于复杂系统中的某参数 i, 其全局相关系数在数值上等于归一化之后的系统影响系数: 即 $h_{0i} = h_{si}$ 。其物理意义是: 在综合考虑其它因素的条件下, 因素 i 与系统目标命题 P_0 的广义相关性。

依照泛逻辑中广义相关性的定义, 它等同于本文的局部相关性, 下面给出求解广义相关系数, 也即局部相关系数 h 的方法。

【定义】 在复杂的推理过程中, 两个命题的广义相关系数由以下公式求得:

$$\begin{aligned} h' &= 1 - |h_{0i} - h_{0j}| = 1 - |h_{si} - h_{sj}| \\ h &= h_{ij} = 2h' - 1 = 2(1 - |h_{0i} - h_{0j}|) - 1 = 1 - 2|h_{0i} - h_{0j}| = 1 - 2|h_{si} - h_{sj}| \end{aligned}$$

其中, $h_s \in [0,1]$; $h_0 \in [0,1]$; $h' \in [0,1]$; $h \in [-1,1]$ 。

基于以上公式的物理意义为：

当 $h_{0i}=h_{0j}$ 时，必然有 $h_{Si}=h_{Sj}$ ，表示 P_i 和 P_j 对全局目标 P_0 的影响程度和相生相克性大小相同；换句话说， P_i 和 P_j 在其总目标为 P_0 的复杂系统中所处的地位是相等的（平起平坐），此时二者最大相关，甚至可用其中一个来代替另一个，所以 $h_{ij}=1$ 。

例如在生态环境中： P_i ， P_j 分别代表两类生物种群， S_0 为整个生态环境， P_0 为 S_0 中所有生物存在的自然条件，在一段时间内 P_0 是相对稳定的。图 4.4 表示了 P_0 、 P_i 、 P_j 三者之间的关系。按照泛逻辑学原理有：

当 $|h_{0i}-h_{0j}|<0.5$ 时， P_i 和 P_j 在 S_0 中是相生（亲近共生）关系，此时 $h_{ij}>0$ ；

当 $|h_{0i}-h_{0j}|>0.5$ 时， P_i 和 P_j 在 S_0 中是相克（疏远竞争）关系，此时 $h_{ij}<0$ ；

当 $h_{0i}=h_{0j}>0.5$ 时，表示 P_i 和 P_j 在 S_0 中相对于 P_0 的相生程度相同；

当 $h_{0i}=h_{0j}<0.5$ 时，表示 P_i 和 P_j 在 S_0 中相对于 P_0 的相克程度相同。

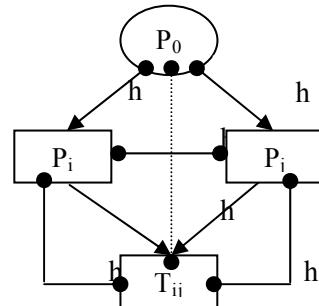


图 4.4 三个命题之间的相关性

4.2.3 推理过程中的 h 求解

在复杂系统的推理过程中，由二元命题推出中间命题时，需要确定此中间命题的 h_0 值，确定的方法有两种：

(1) 把中间命题加入到整个系统的命题集合中，命题的个数由 n 增加为 $n+1$ ，使用预设的条件重新利用层次分析法对 $n+1$ 个命题对应的因素进行分析，从而求得各个 h_S ， h_0 值。

(2) 由于不同连接词运算的含义与结果不同，因此中间命题对整个系统目标命题的影响程度也不同，因此即使是相同的两个命题 P_i 、 P_j ，分别进行与、或运算，则得到的两个中间命题 T_{ij} （图 4.4）的 h_0 值应该是不同的。

【定义】 把两个原始命题的 h_0 当成命题真值，选用与原始命题自身运算“同类”的连接词运算基模型，进行命题“全局相关系数 h_0 ”的推理与求解，从而得到中间命题的 h_0 值。

此定义的物理意义是：如果两个命题进行与运算，则中间命题所包含的信息将少于（最多等于）其中任何一个原始命题所包含的信息，因此其全局相关性也将进一步减弱，对参照命题的影响程度也将降低。其它运算的原理相同。

在不考虑误差系数 k 的情况下，如果我们选定求解标准广义相关系数 h' ，它属于 $[0,1]$ 区间，则可以用泛逻辑中的零级运算模型来求解推理过程中的 h_{0T} 值。表 4.3 给出了二元运算连接词的零级运算模型。

表 4.3 求解中间命题全局相关系数的运算模型

连 接 词		运 算 模 型
与	\wedge_h	$h_{0T} = [\Gamma_0(h_{0i}^m + h_{0j}^m - 1)]^{1/m}$
或	\vee_h	$h_{0T} = 1 - [\Gamma_0((1-h_{0i})^m + (1-h_{0j})^m - 1)]^{1/m}$
蕴涵	\rightarrow_h	$h_{0T} = \Gamma^1[(\Gamma_0(1-h_{0i}^m + h_{0j}^m))^{1/m}]$
等价	\leftrightarrow_h	$h_{0T} = \text{ite}\{(1+ h_{0i}^m - h_{0j}^m)^{1/m} m \leq 0; (1- h_{0i}^m - h_{0j}^m)^{1/m}\}$
平均	\oplus_h	$h_{0T} = 1 - [((1-h_{0i})^m + (1-h_{0j})^m) / 2]^{1/m}$
组合	\odot_h^e	$h_{0T} = \text{ite}\{\Gamma^{e'}[(\Gamma_0(h_{0i}^m + h_{0j}^m - e'^m))^{1/m}] h_{0i} + h_{0j} < 2e'; 1 - (\Gamma^{1-e'}[\Gamma_0((1-h_{0i})^m + (1-h_{0j})^m - (1-e')^m)]^{1/m}) h_{0i} + h_{0j} > 2e'; e'\}$
其中: $m = (1 - 2h_{ij}) / (1 - h_{ij}^2)$; $h_{ij} = 1 - 2 h_{0i} - h_{0j} $; $e' = (e + 1)/2$		

【范例】 设命题 P_1 、 P_2 , 其全局相关系数为 $h_{01}=0.70$ 、 $h_{02}=0.85$, 当它们的真值进行或运算后得到第三命题 P_3 , 则第三命题的全局相关系数 h_{03} 可以如下求得:

(1) 首先求的 P_1 、 P_2 之间的局部相关系数:

$$h = 1 - 2|h_{01} - h_{02}| = 1 - 2|0.70 - 0.85| = 0.70$$

由于 $h > 0$, 故 P_1 、 P_2 之间是相容的关系。

(2) 选择逻辑算子求解 h

由于真值是或运算, 故全局相关系数也选用或运算模型, 于是:

$$m = (1 - 2h) / (1 - h^2) = (1 - 2 \times 0.70) / (1 - 0.70^2) = -0.7843$$

$$\begin{aligned} h_{03} &= \Gamma^1[1 - ((1-h_{0i})^m + (1-h_{0j})^m - 1)^{1/m}] \\ &= \Gamma^1[1 - ((1-0.70)^{-0.7843} + (1-0.85)^{-0.7843} - 1)^{1/-0.7843}] \\ &= 0.8982 \end{aligned}$$

由此可见, 或运算得到的全局相关系数大于两个原始命题的全局相关系数。这表明第三命题 P_3 对系统目标命题的影响程度比 P_1 、 P_2 之一更大。

4.3 由已知算子求 h 的方法

对于泛逻辑运算而言, 求解 h 的值通常方法分为两种情况:

一种是在许多情况下, 尤其是实际问题, 由于各种不确定性的影响, 系统参数间的相关性在不同环境中会有所变化, 或者目前还没有比较成熟的模型来描述这种关系, 这时就需要从系统分析入手进行研究, 经过多次试验, 从而求得参数(命题)间的相关系数 h 值, 这就是本章前面部分的内容。

第二种则是对于已经成熟的领域, 人们已经研究找到了某些参数(命题)之间的关系, 得到了一些有意义的、或者应用表明是很合适的逻辑算子(数学模型)等, 此时就不需要再从系统分析着手研究, 而是依照 h 的物理意义对已知模型进行分析,

从而求得 h 值。本节的目的在于给出由已知算子求解 h 值的方法。

通过已知算子求取 h 值，在泛逻辑中给出了三种方法[HEWL01]：标准长度法、算子体积比法、函数拟合法，求得的 $h' \in [0,1]$ 。在此基础上，本文对 h' 进行了扩展，得到 $h \in [-1, 1]$ ，这里给出扩展之后的标准长度法和函数拟合法。

这里的讨论假设已知系统中某两个参数对应命题真值为 x, y ，它们之间的广义相关性反映在已知算子簇 $T(x, y, \lambda)$ 中，对于确定的 λ ， $T(x, y, \lambda)$ 在区间 $[a, b]$ 之上满足泛逻辑运算的单调性和交换律。其中， h 是参数 λ 的隐函数。如果求得了 h 与 λ 的关系，就可以代入 $T(x, y, \lambda)$ 中，从而得到显函数 $T(x, y, h)$ 。

4.3.1 标准长度法

如图 4.5 所示，标准长度法认为，在不考虑误差的情况下，广义相关系数 h 可以用 $\frac{x-a}{b-a} = \frac{y-a}{b-a}$ 主平面内，算子簇 $T(x, y, h)$ 的 $T(x, x, h)$ 曲线与 CBA 折线的交点与 C 点的距离来确定，即 CBA 折线是 h 标准尺度。因为，由 $T(x, y, h)$ 的单调性和交换律可知，它在 $\frac{x-a}{b-a} = \frac{y-a}{b-a}$ 主平面内变化最激烈，且最具代表性。

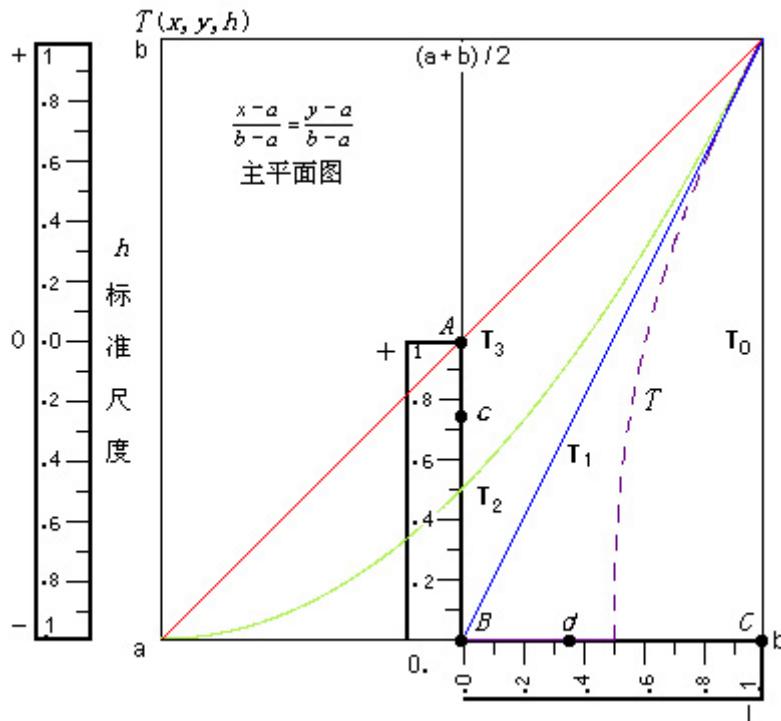


图 4.5 $T(x, y, h)$ 算子的主平面图和 h 标准尺度

由图 4.5 可以看出，广义相关系数 h 通过 $\frac{x-a}{b-a} = \frac{y-a}{b-a}$ 主平面内 $T(x, x, h)$ 曲线与

CBA 折线的交点与 *C* 点的距离来定义，可满足上述规定，且有可操作的客观标准和明确的物理意义：

当 $h \geq 0$ 时， x, y 之间相容相关，在 $x=y=(a+b)/2$ 的情况下，当 h 由 0 经过 0.5 变化到 1 时，点 $c=T((a+b)/2, (a+b)/2, h)$ 将从 a 经过 $a+(b-a)/4$ 变化到 $(a+b)/2$ ，如果假定 c 与 h 线性相关，就可得到 $h \geq 0$ 时确定 h 大小的标尺，即 $h \geq 0$ 时：

$$\begin{aligned} h &= 2(b-c)/(b-a) \\ &= 2 \times [(b-T((a+b)/2, (a+b)/2, h))/(b-a)] \end{aligned}$$

其物理意义是当 $h \geq 0$ ， x, y 之间相容相关时，两子集之间的交集大小与相容性程度有关，如果假定两个对半子集之间的交集的模糊测度 $c'=(b-c)/(b-a)$ 与相容性程度是线性相关，则 $h'=0.5+c'$ ，于是： $h=2h'-1=2c'=2(b-c)/(b-a)$ 。

当 $h < 0$ 时， x, y 之间相克相关，只有在 $x=y \geq d \in [(a+b)/2, b]$ 后，才有 $T(x, y, h) \geq a$ ，且 h 由 -1 变化到 0 时，点 d 由 b 变化到 $(a+b)/2$ ，只要假定 $b-d$ 的变化与 h 线性相关，就可以 $b-d$ 作为在 $h < 0$ 时确定 h 大小的标尺。即 $h < 0$ 时：

$$h=1-2(b-d)/(b-a)=1-2(b-d)/(b-a)$$

其中： $d=\max(x | T(x, x, h)=0)$

其物理意义是当 $h < 0$ ， x, y 之间相克相关时，两子集之间的交集大小会比 $h=0$ 时减少，且减少的量与相克程度有关，如果假定两个相等子集之间交集为空的上界的模糊测度 $d'=(b-d)/(b-a)$ 与相克程度线性相关，则 $h'=1-d'$ ，于是 $h=2h'-1=2(1-d')-1=1-2(b-d)/(b-a)$ 。

4.3.2 函数拟合法

函数拟合法主要根据 h 的边界条件和在特定点时的特定含义来拟合。设对函数 $T(x, y, \lambda)$ ，如拟合得到显函数 $T(x, y, h)$ ，则 $T(x, y, h)$ 必须满足以下条件：

$$h=1 \text{ 时}, T(x, y, h)=T_3$$

$$h=0.75 \text{ 时}, T(x, y, h)=T_2$$

$$h=0.5 \text{ 时}, T(x, y, h)=T_1;$$

$$h=0 \text{ 时}, T(x, y, h)=T_0,$$

函数拟合法的关键在于分析其边界条件，相对标准长度而言，此法相对简单。

【范例】 已知 Schweizer 算子簇的表达式为：

$$T(x, y)=(\max(0^m, x^m+y^m-1))^{1/m}$$

它可在 T_3 和 T_0 间随 m 连续地变化，且包含 T_2 和 T_1 。Schweizer 算子簇是刻画精确模糊测度之间与运算模型的零级 T 范数完整簇，试求此算子簇中包含的 x 与 y 之间的广义相关系数 h 值。

根据 h 的含义分析可知，需要满足如下的约束条件：

$h=1$ 时, $m \rightarrow -\infty$ $h=0.5$ 时, $m \rightarrow 0$

$h=0$ 时, $m=1$ $h=-1$ 时, $m \rightarrow \infty$

采用函数拟合法, 可以拟合得到一个简单的近似函数关系:

$$m = (1 - 2h) / (1 - h^2); \quad m \in \mathbb{R}, \quad h \in [-1, 1]$$

图 4.6 是 Schweizer 算子簇的变化图, 其中 h 是通过函数拟合法确定的。

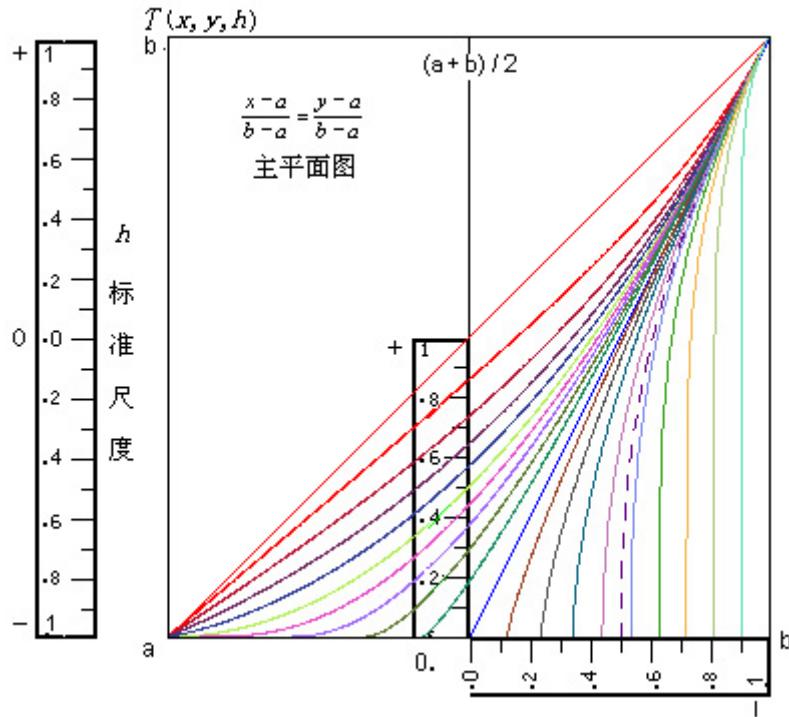


图 4.6 用函数拟合法定义的 Schweizer 算子簇变化图

4.4 小结

复杂系统中存在各种各样的广义相关性, 在泛逻辑推理过程中, 必须要知道广义相关系数 h 的值。本章主要针对“如何求解 h 值”这一问题, 分析了复杂系统的组成, 引入了目标命题等概念, 从而把求解推理过程中两命题之间的 h 值转化为求解各命题相对于目标命题的全局相关系数 h_0 , 其中引入了层次分析法来求系统影响系数 h_S 。对于已知算子的两命题而言, 其间的广义相关性系数可以利用标准长度法和函数拟合法来确定。

本章工作把泛逻辑理论与实际系统结合起来, 给出了广义相关系数的求解方法, 它可以应用到多参数系统的柔性控制与柔性推理中。本文在第九章的应用研究中将以自动焊机的柔性控制为例进行进一步阐释, 详见 9.1 节。

第五章 广义 N 范数与自相关性

广义自相关系数 k 描述了逻辑运算真值的误差大小，引入 k 可以修正由于各种不确定性因素引起的误差。探讨 k 的求解方法是泛逻辑学研究的重要问题之一。本章在三角范数的 N 范数基础上，定义并研究了任意 $[a,b]$ 区间上的广义 N 范数性质，给出了由复杂系统参量的分布函数求解广义自相关系数 k 值的方法。并对均匀分布、指数分布、正态分布函数的广义自相关性进行了研究。

三角范数理论中的 N 范数(N-norm)是泛逻辑学中非运算的数学模型[HELB98]，有关 N 范数的研究可参见文献[ESTD81, OVCH83, OVCH91, WEBE83, MIZU89, JENE20]，由于不同研究者的出发点不同，研究方法与所得结果不尽相同。泛逻辑学则在 N 范数的基本思想下，结合相关性推理的研究成果，把 N 范数定义为在区间 $[0,1]$ 之上满足若干性质的函数。进而，在分形逻辑中，为了研究在任意区间 $[a,b]$ 上实现连续值基的推理模型，对泛逻辑学的 N 范数定义进行了扩展，并得到了许多通用的性质。泛逻辑学对 N 范数及泛非运算的定义则是本文研究的特例。

5.1 广义 N 范数的定义与性质

5.1.1 广义 N 范数的定义

对于函数 $N(x)$ ，设其是 $[a,b] \rightarrow [a,b]$ 的一元运算，给出如下条件：

边界条件 N1: $N(a) = b, N(b) = a$ 。

单调性 N2: $N(x)$ 单调递减，当 $x, y \in [a, b]$ ，若 $x < y$ ，则 $N(x) \geq N(y)$ 。

严格单调性 N2': $N(x)$ 严格单调递减，若 $x, y \in [a, b]$ ， $x < y$ ，则 $N(x) > N(y)$ 。

连续性 N3: $N(x)$ 在 $x \in [a, b]$ 上连续。

逆等性 N4: 当 $x \in [a, b]$ ， $N(x) = N^{-1}(N(x))$ ， $N^{-1}(x)$ 是 $N(x)$ 的逆。

【定义】 对于函数 $N(x)$ 和上述条件有：

满足 N1、N2 的 $N(x)$ 称为 $[a,b]$ 上的弱 N 范数；

满足 N1、N2、N4 的 $N(x)$ 称为 $[a,b]$ 上的 N 范数；

满足 N1、N2' 的 $N(x)$ 称为 $[a,b]$ 上的严格单调弱 N 范数；

满足 N1、N2'、N4 的 $N(x)$ 称为 $[a,b]$ 上的严格单调 N 范数；

满足 N1、N2、N3 的 $N(x)$ 称为 $[a,b]$ 上的连续弱 N 范数；

满足 N1、N2、N3、N4 的 $N(x)$ 称为 $[a,b]$ 上的连续 N 范数。

【定义】 称定义在任意 $[a,b]$ 区间之上的 N 范数为“广义 N 范数”，而把定义在

[0,1]区间之上的 N 范数称为“标准 N 范数”。

在本文以后的论述过程中，除了特别声明之外，以上各 N 范数均指定义在区间 [a,b]之上，且把广义 N 范数简称为“N 范数”。当 a=0、b=1 时，以上各 N 范数的定义退化为泛逻辑学中的标准 N 范数定义。

例如: $1-x^2$, $(1-x)^2$, 以及 Sugeno 算子簇都是定义在 [0, 1] 上的严格单调弱 N 范数(簇)，也是连续弱 N 范数(簇)，它们都是标准弱 N 范数(簇)。

容易证明: $(b-x)^2/(b-a)+a$ 是定义在 [a, b] 区间上的广义 N 范数。

5.1.2 广义 N 范数的主要性质

【定理】(封闭性) 广义弱 N 范数满足 $N(x) \in [a, b]$ 。

证明: 由边界条件 N1 知, $N(a) = b$, $N(b) = a$, 由单调性 N2 知, $N(b) \leq N(x) \leq N(a)$, 所以 $N(x) \in [a, b]$, 弱 N 范数具有封闭性。 ■

【定理】(对合律) 广义 N 范数满足 $N(N(x)) = x$ 。

证明: 由逆等性 N4 知, $N(x) = N^{-1}(x)$, 所以 $N(N(x)) = N(N^{-1}(x)) = x$ 。 ■

【定理】(不动点) 在广义连续(弱)N 范数 $N(x)$ 中存在 $l \in (a, b)$, 使 $N(l) = l$ 。

证明: 由前面定理知 $N(x) \in [a, b]$, 再由单调性 N2 和连续性 N3 知, 当 $x \in (a, b)$ 时, $y = N(x)$ 曲线必然与主对角线 ($y=x$) 相交, 设交点 L 在 x 轴上的投影是 l, 必有 $N(l) = l$ 。所以在连续(弱)N 范数 $N(x)$ 中, 存在不动点 $l \in (a, b)$, 使 $N(l) = l$ 。 ■

例如 [0, 1] 上的标准 N 范数 $1-x^2$ 的不动点为 $l=(5^{1/2}-1)/2 \approx 0.6180$, 这就是著名的黄金分割点。

对于 [a, b] 上的广义 N 范数 $(b-x)^2/(b-a)+a$, 如取 $a=-2$, $b=3$, 则为 $(3-x)^2/5-2$, 其不动点 $l=(3-l)^2/5-2$, 于是可以求得 $l=(11-125^{1/2})/2=-0.0901$, 它在 [-2, 3] 之中。

【定理】(泛非性) 设 $l \in (a, b)$ 是广义连续(弱)N 范数 $N(x)$ 的不动点, 则当 $l \leq x$ 时, $N(x) \leq l$; 当 $x \leq l$ 时, $l \leq N(x)$ 。如果 $N(x)$ 是连续的严格单调(弱)N 范数, 则当 $x < l$ 时, $N(x) > l$; 当 $x > l$ 时, $N(x) < l$ 。

证明: 由上一定理知, $N(l) = l$, 再由单调性 N2 知, 当 $l \leq x$ 时, 必有 $N(x) \leq l$; 当 $x \leq l$ 时, 必有 $l \leq N(x)$ 。如果 $N(x)$ 是连续的严格单调(弱)N 范数, 则 $x < l$ 时必有 $N(x) > l$, 当 $x > l$ 时必有 $N(x) < l$ 。所以本定理成立。 ■

【定义】 如 $N(x)$ 和 $N_l(x)$ 都是 [a, b] 上的广义 N 范数, 则称 $N'(x) = N(N_l(N(x)))$ 为 $N_l(x)$ 关于 $N(x)$ 的一级对偶, 当 $N(x) = b+a-x$ 时, $N'(x) = b+a-N_l(b+a-x)$, 退化为 $N_l(x)$ 的零级对偶, 统一简称为对偶。任何 N 范数都有一级对偶和零级对偶。

【定理】(自对偶性) 在 [a, b] 上的广义 N 范数 $N_l(x)$ 的关于 $N(x)$ 的一级对偶 $N'(x)$ 也是 [a, b] 上的广义 N 范数, 且 $N'(x)$ 保持了 $N(x)$ 和 $N_l(x)$ 共有的主要性质。

证明：(1) 由于 $N(x)$ 和 $N_i(x)$ 在 $[a, b]$ 上是单调函数，所以 $N'(x) = N(N_i(N(x)))$ 一定存在，且有

$$N'(a) = N(N_i(N(a))) = N(N_i(b)) = N(a) = b$$

$$N'(b) = N(N_i(N(b))) = N(N_i(a)) = N(b) = a$$

由 $N(x)$ 和 $N_i(x)$ 单调减知， $(N_i(N(x)))$ 单调增， $N'_i(x) = N(N_i(N(x)))$ 单调减。

设 $y = N'(x) = N(N_i(N(x)))$ ，则 $N_i(N(x)) = N^{-1}(y)$ ， $N(x) = N_i^{-1}(N^{-1}(y))$ ， $x = N^{-1}(N_i^{-1}(N^{-1}(y)))$ ，由 $N(x)$ 和 $N_i(x)$ 的逆等性知， $x = N(N_i(N(y)))$ ，即 $N'(x)$ 有逆等性。

所以 $N'(x)$ 满足 N1、N2 和 N4，是 $[a, b]$ 上的广义 N 范数，即广义 N 范数的对偶也是广义 N 范数，广义 N 范数有自对偶性。

(2) 如果 $N(x)$ 和 $N_i(x)$ 满足 N2'，则由 $x < y$ 时， $N(x) > N(y)$ ， $N_i(N(x)) < N_i(N(y))$ 知， $N'_i(x) > N'_i(y)$ ，也满足 N2'；如果 $N(x)$ 和 $N_i(x)$ 满足 N3，则由 $N(x^-) = N(x^+)$ ， $N_i(N(x^-)) = N_i(N(x^+))$ 知， $N'_i(x^-) = N'_i(x^+)$ ，也满足 N3。

所以 $N'(x)$ 保持了 $N(x)$ 和 $N_i(x)$ 共有的主要性质。 ■

根据上述(1)、(2)，本定理成立。 ■

【推论】(偶等性) 任意广义 N 范数的自对偶等于自己 $N(x) = N(N(N(x)))$ 。

【定理】 设 $l \in (a, b)$ 是 N 范数 $N_i(x)$ 的不动点，则 $l' = N(l)$ 是 $N_i(x)$ 关于 $N(x)$ 的一级对偶 $N'_i(x)$ 的不动点。

证明：由一级对偶的定义知， $N'_i(x) = N(N_i(N(x)))$ ，由于 $N_i(k) = l$ ，当 $x = N(l)$ 时有

$$N'_i(N(l)) = N(N_i(N(N(l)))) = N(N_i(l)) = N(l)$$

所以 $l' = N(l)$ 是 $N'_i(x)$ 的不动点。 ■

5.2 N 性生成元与 N 范数的生成

5.2.1 N 性生成元定义与性质

【定义】 $x \in [a, b]$ ，如果 $\phi(x)$ 是连续的严格单调递增函数，且 $\phi(a) = a$ ， $\phi(b) = b$ ，则称 $\phi(x)$ 为“[a,b]上的广义 N 性生成元”，简称 N 性生成元。当 $[a, b]$ 区间为 $[0, 1]$ 时，则称 $\phi(x)$ 为“标准 N 性生成元”。

显然，N 性生成元的逆函数、复合函数和各种对偶也是 N 性生成元，且 $a+b-\phi(x)$ 和 $\phi(a+b-x)$ 都是弱 N 范数。

1. N 性生成元的物理意义

N 性生成元 $\phi(x^*)$ 的作用是修正误差对模糊测度值 $u(X) = x^*$ 的影响，得到精确的模糊测度值 x 。

$\phi(x) = x$ 是特殊的 N 性生成元，它表示模糊测度是精确的；

$\phi(x^*) \geq x^*$ 表示 $u(X)$ 是下近似， x^* 的值偏小，需要放大；

$\phi(x^*) \leq x^*$ 表示 $u(X)$ 是上近似， x^* 的值偏大，需要缩小。

2. N 性生成元的类型

【定义】 对于 N 性生成元 $\phi(x)$ 而言，如果 $\phi(x)$ 在 $[a, b]$ 区间没有拐点，也即其导数 $\phi'(x)$ 是连续严格单调函数，则称 $\phi(x)$ 为“常规 N 性生成元”；否则，称 $\phi(x)$ 为“奇异 N 性生成元”。

如图 5.1 所示：除了直线 $y=x$ 之外，常规 N 性生成元 $\phi(x)$ 都在直线 $y=x$ 的单侧，奇异 N 性生成元 $\phi(x)$ 可以在直线 $y=x$ 的单侧，也可以在其两侧。

如果 $\phi(x)$ 关于直线 $y=x$ 上的点 $((a+b)/2, (a+b)/2)$ 呈中心对称，则称 $\phi(x)$ 为“中心对称 N 性生成元”。中心对称 N 性生成元都是奇异 N 性生成元。

直线 $y=x$ 既是常规 N 性生成元的特例，也是中心对称 N 性生成元的特例。

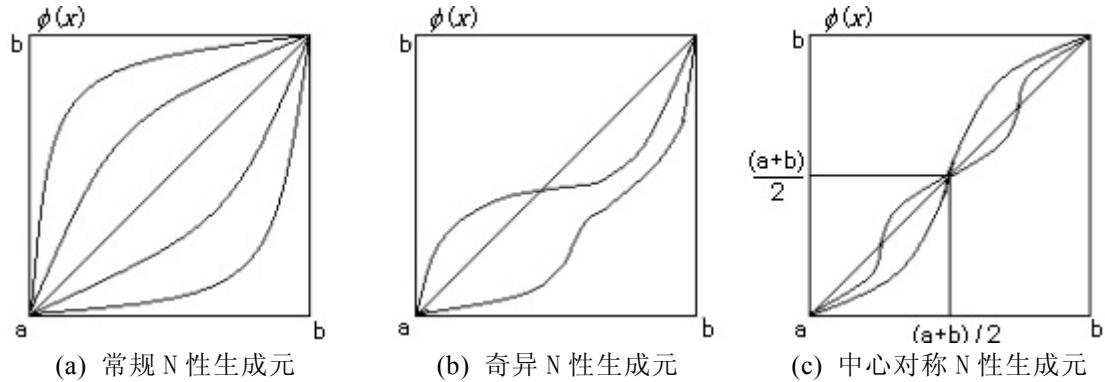


图 5.1 N 性生成元 $\phi(x)$ 的类型

【定理】(广义 N 性生成元生成定理) 如果 $F(x)$ 是 $[a, b]$ 上连续的严格单调函数，且 $F(x)$ 为有限值，则

$$\phi(x) = (b-a) \frac{F(a) - F(x)}{F(a) - F(b)} + a = \frac{bF(a) - aF(b) + aF(x) - bF(x)}{F(a) - F(b)}$$

是 $[a, b]$ 上的广义 N 性生成元。

证明：由 $F(x)$ 是 $[a, b]$ 上连续的严格单调函数， $F(a) - F(b) \neq 0$ 且为有限值可知

$$\phi(x) = (b-a) \frac{F(a) - F(x)}{F(a) - F(b)} + a = \frac{bF(a) - aF(b) + aF(x) - bF(x)}{F(a) - F(b)}$$

是 $[a, b]$ 上连续的严格单调函数，且 $\phi(a) = a$, $\phi(b) = b$ ，所以 $\phi(x)$ 是 $[a, b]$ 上的广义 N 性生成元。

本定理称为“广义 N 性生成元生成定理”，简称为 N 性生成元生成定理，当在 $[0, 1]$ 区间上时，称之为标准 N 性生成元生成定理。 ■

【定义】 称上述定理中的 $F(x)$ 为广义 N 性生成元 $\phi(x)$ 的“广义生成函数”，简称生成函数。当在 $[0, 1]$ 区间上时，称之为标准生成函数。

【定义】 对于由 $F(x)$ 生成的 $\phi(x)$ 而言，如果 $\phi(x)$ 是常规 N 性生成元，则称 $F(x)$ 为“常规生成函数”；如果 $\phi(x)$ 是奇异 N 性生成元，则称 $F(x)$ 为“奇异生成函数”；如果 $\phi(x)$ 是中心对称 N 性生成元，则称 $F(x)$ 为“中心对称生成函数”。

在本文中，如无特别声明： $\phi(x)$ 均指常规 N 性生成元， $F(x)$ 均指常规生成函数。

$F(x)$ 既可以是 $[a, b]$ 上连续的严格单调增函数，也可以是 $[a, b]$ 上连续的严格单调减函数。

当 $a=0, b=1$ 时有：

$$\phi(x) = (F(0) - F(x)) / (F(0) - F(1))$$

如果 $F(0) = 0$, 则 $\phi(x) = F(x) / F(1)$ ；

如果 $F(0) = 0, F(1) = 1$, 则 $\phi(x) = F(x)$ ；

如果 $F(1) = 0$, 则 $\phi(x) = 1 - f(x) / F(0)$ ；

如果 $F(0) = 1, F(1) = 0$, 则 $\phi(x) = 1 - F(x)$ 。

【推论】 如果 $F(x)$ 为 N 性生成元 $\phi(x)$ 的生成函数，则线性相关的生成函数 $cf(x) + d$ 生成同一个 N 性生成元。

证明：由 N 性生成元生成定理可知，当代入 $cf(x) + d$ 时，分子分母可以消去线性相关系数 c 和 d，从而得到与 $F(x)$ 生成的相同的 N 性生成元。 ■

【定理】 如果 $\phi_1(x), \phi_2(x)$ 是 $[a, b]$ 上的任意广义 N 性生成元，则 $\phi(x) = \phi_1(\phi_2(x))$ 也是 $[a, b]$ 上的广义 N 性生成元。

证明：由 ϕ_1, ϕ_2 在 $[a, b]$ 上是连续的严格单调增函数知 $\phi(x) = \phi_1(\phi_2(x))$ 在 $[a, b]$ 上是连续的严格单调增函数，且 $\phi(a) = \phi_1(\phi_2(a)) = \phi_1(a) = a, \phi(b) = \phi_1(\phi_2(b)) = \phi_1(b) = b$ ，所以 $\phi(x)$ 也是 $[a, b]$ 上的广义 N 性生成元。 ■

【定义】 对于 $[a, b]$ 上的广义 N 性生成元，其上下极限如下定义：

如果生成函数 $f(x)$ 不是有限值函数，利用

$$\phi(x) = (b-a) [(f(a) - f(x)) / (f(a) - f(b))] + a$$

$$\phi^{-1}(x) = f^{-1}(f(a) - (f(a) - f(b))(x-a) / (b-a))$$

可以规定 N 性生成元的上下极限及其逆，从而将 N 性生成元的概念推广到非连续，非严格单调的情况。因为

当 $f(b) \rightarrow \pm\infty$ 且 $f(a)$ 为有限值时， $\phi(x) \rightarrow \Phi_3, \phi^{-1}(x) \rightarrow \Phi_0$ ；

当 $f(a) \rightarrow \pm\infty$ 且 $f(b)$ 为有限值时， $\phi(x) \rightarrow \Phi_0, \phi^{-1}(x) \rightarrow \Phi_3$ 。

其中 $\Phi_3 = \Phi_0^{-1} = \text{ite}\{b | x=b; a\}, \Phi_0 = \Phi_3^{-1} = \text{ite}\{a | x=a; b\}$

5.2.2 N 范数生成定理

【定理】（广义 N 范数生成定理） 若 $\phi(x)$ 是 $[a, b]$ 上的 N 性生成元， $\phi^{-1}(x)$ 是

逆函数，则

$$N(x) = \phi^{-1}(b+a-\phi(x))$$

是 $[a, b]$ 上的连续严格单调 N 范数。

证明：由于 $\phi(x)$ 是 $[a, b]$ 上的 N 性生成元， $\phi(a)=a$, $\phi(b)=b$, 且是连续的严格单调增函数。所以 $b+a-\phi(x)$ 满足条件 N1, N2' 和 N3, 由逆运算的性质知 $y=N(x)=\phi^{-1}(b+a-\phi(x))$, 也满足条件 N1, N2' 和 N3, 又 $x=N^{-1}(y)=\phi^{-1}(b+a-\phi(y))$, 即 $N^{-1}(x)=\phi^{-1}(b+a-\phi(x))$, 满足条件 N4。

所以 $N(x)$ 是 $[a, b]$ 上的连续严格单调 N 范数。 ■

本定理称为“广义 N 范数生成定理”，简称为 N 范数生成定理，当在 $[0, 1]$ 区间上时，称之为标准 N 范数生成定理。 ■

【推论】（标准 N 范数生成定理） 若 $\phi(x)$ 是 $[0, 1]$ 上的 N 性生成元， $\phi^{-1}(x)$ 是逆函数，则

$$N(x) = \phi^{-1}(1-\phi(x))$$

是 $[0, 1]$ 上的连续严格单调 N 范数。

例如：

(1) 在任意 $[a, b]$ 区间上：

$$\phi(x) = \Phi_1 = x \text{ 时, } \phi^{-1}(x) = \Phi_1^{-1} = x, N(x) = \mathbf{N}_1 = b + a - x;$$

(2) 在标准 $[0, 1]$ 区间上：

$$\begin{aligned} \phi_1(x) &= x(1+\lambda)^{1/2}/(1+((1+\lambda)^{1/2}-1)x), \lambda > -1 \\ \phi_1^{-1}(x) &= x/((1+\lambda)^{1/2}-((1+\lambda)^{1/2}-1)x) \\ 1-\phi_1(x) &= 1-x(1+\lambda)^{1/2}/(1+((1+\lambda)^{1/2}-1)x) = (1-x)/(1+((1+\lambda)^{1/2}-1)x) \\ N_1(x) &= \phi_1^{-1}(1-\phi_1(x)) \\ &= ((1-x)/(1+((1+\lambda)^{1/2}-1)x))/((1+\lambda)^{1/2}-((1+\lambda)^{1/2}-1)(1-x)/(1+((1+\lambda)^{1/2}-1)x)) \\ &= (1-x)/((1+\lambda)^{1/2}(1+((1+\lambda)^{1/2}-1)x)-((1+\lambda)^{1/2}-1)(1-x)) \\ &= (1-x)/(1+(((1+\lambda)^{1/2})^2-1)x) = (1-x)/(1+\lambda x); \end{aligned}$$

它们在各自区间上都是连续的严格单调 N 范数。

【定理】（N 范数复合生成定理） 若 $N_1(x)$ 是 N 范数， $\phi(x)$ 是 N 性生成元，则 $N_2(x) = \phi^{-1}(N_1(\phi(x)))$ 是 N 范数。

证明：设 $N_1(x) = \phi_1^{-1}(b+a-\phi_1(x))$, 则

$\phi_2(x) = \phi_1(\phi(x))$ 是 N 性生成元，且

$\phi_2^{-1}(x) = \phi^{-1}(\phi_1^{-1}(x))$, 所以

$$\begin{aligned} N_2(x) &= \phi^{-1}(N_1(\phi(x))) = \phi^{-1}(\phi_1^{-1}(b+a-\phi_1(\phi(x)))) \\ &= \phi_2^{-1}(b+a-\phi_2(x)) \end{aligned}$$

是 N 范数。 ■

5.2.3 广义自相关系数的求解

【定理】(广义自相关系数求解定理) 定义在 $[a, b]$ 上的广义连续严格单调减 N 范数 $N(x) = \phi^{-1}(b+a-\phi(x))$ 的不动点为: $l = \phi^{-1}((b+a)/2)$, 对应的广义自相关系数为: $k = 2(\phi^{-1}((b+a)/2)-a)/(b-a)-1$ 。

证明: 设 $l \in (a, b)$ 是 N 范数 $N(x)$ 的不动点, 则 $N(l) = \phi^{-1}(b+a-\phi(l)) = l$, $b+a-\phi(l) = \phi(l)$, $2\phi(l) = b+a$, $\phi(l) = (b+a)/2$, $l = \phi^{-1}((b+a)/2)$ 是 $N(x)$ 的不动点。

所以 N 范数的不动点为: $l = \phi^{-1}((b+a)/2)$ 。

于是, 广义自相关系数为:

$$k = 2(l-a)/(b-a)-1 = 2(\phi^{-1}((b+a)/2)-a)/(b-a)-1.$$
 ■

【推论】 定义在 $[0, 1]$ 上的连续严格单调减 N 范数 $N(x) = \phi^{-1}(1-\phi(x))$ 的不动点为: $l = \phi^{-1}(0.5)$, 对应的广义自相关系数为: $k = 2\phi^{-1}(0.5)-1$ 。

例如: $l = \phi_1^{-1}(0.5) = 1/(2(1+\lambda)^{1/2} - ((1+\lambda)^{1/2}-1)) = 1/((1+\lambda)^{1/2}+1)$ 是 $N_1(x) = (1-x)/(1+\lambda x)$ 的不动点, 于是广义自相关系数, $k = 2/((1+\lambda)^{1/2}+1)-1$ 。

l 自身是 N 范数的不动点, 式 $l = \phi^{-1}((b+a)/2)$ 表达了它与 N 性生成元的关系, 如图 5.2 (左) 所示: 对于常规 N 性生成元簇而言, 不动点 l 能够准确描述其中每个具体算子的误差特性, 如图 5.2 (右) 所示。对于奇异 N 性生成元而言, l 是相关算子误差特性的一个折中标志值。

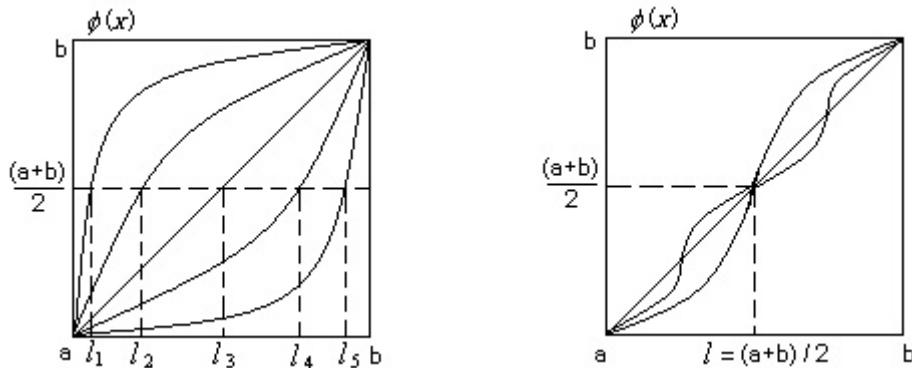


图 5.2 N 范数不动点 l 与 N 性生成元 $\phi(x)$ 的关系

5.2.4 直通 NLK 公式

结合图 2.5 的模型, 求解广义自相关系数的一般步骤是: “分布函数——>生成函数——>N 性生成元——>N 范数——>广义自相关系数”。在理论上这是一般性的方法, 对于任何分布函数都是适用的。

对于一些生成函数而言, 其中的每一步都可以求出相应的函数表达式, 但是还

有一些函数，由于其表达式较为复杂，在求解 N 性生成元，或求解 N 范数及 k 的过程中，需要用到繁琐的数学变换，根本不能直接写出每一步的表达式。本文在 5.3.3 节求解正态分布随机变量的 N 范数与 k 值就碰到了这个问题，正态分布函数的积分是超越积分，不能直接写出其表达式。

研究发现，如果知道分布函数，我们容易通过换基规则得到考察区间 $[a,b]$ 上的生成函数，由生成函数求解 N 范数和 k 值可以利用符号代换的方法进行，于是我们发现了可以避免超越积分，而“直接由生成函数求解 N 范数和 k 值”的方法，这就是“直通 NLK 公式”。

1. 直通 NLK 公式

【定理】（直通 NLK 公式） 若 $F(x)$ 可作为某 N 性生成元在 $[a, b]$ 上的广义生成函数，则其相应的

$$\text{广义 N 范数为: } N(x) = F^{-1}(F(a) + F(b) - F(x))$$

$$\text{不动点为: } l = F^{-1}((F(a) + F(b))/2)$$

$$\text{广义自相关系数为: } k = 2 \times [(F^{-1}((F(a) + F(b))/2) - a)/(b - a)] - 1$$

证明：记符号： $F_x = F(x)$ ， $F_a = F(a)$ ， $F_b = F(b)$ ，下同。

$F(x)$ 在 $[a, b]$ 上是连续严格单调函数，设其为广义 N 性生成元 $\phi(x)$ 的生成函数，则可生成：

$$y = \phi(x) = (b - a) \frac{F_a - F_x}{F_a - F_b} + a, \text{ 则:}$$

$$F_x = F_0 + (y - a) \frac{F_b - F_a}{b - a}$$

$$x = F^{-1} \left[F_a + (y - a) \frac{F_b - F_a}{b - a} \right], \text{ 即:}$$

$$\phi^{-1}(x) = F^{-1} \left[F_a + (x - a) \frac{F_b - F_a}{b - a} \right]$$

于是 N 范数：

$$\begin{aligned} N(x) &= \phi^{-1}(b + a - \phi(x)) \\ &= F^{-1} \left[F_a + ((b + a - \phi(x)) - a) \frac{F_b - F_a}{b - a} \right] \end{aligned}$$

$$= F^{-1} \left[F_a + \left(b - (b - a) \frac{F_x - F_a}{F_b - F_a} - a \right) \times \frac{F_b - F_a}{b - a} \right]$$

$$= F^{-1} \left[F_a + \left((b-a) \frac{F_b - F_x}{F_b - F_a} \right) \times \frac{F_b - F_a}{b-a} \right]$$

$$= F^{-1} [F_a + F_b - F_x]$$

因此 $N(x) = F^{-1}(F(a) + F(b) - F(x))$ 成立。

由 $F(x)$ 的连续严格单调性，有 $N(a) = b$; $N(b) = a$;

故 $N(x)$ 是 $[a, b]$ 上的连续严格单调减 N 范数。

其不动点：

$$\begin{aligned} l &= \phi^{-1}((b+a)/2) \\ &= F^{-1} \left[F_a + \left(\frac{b+a}{2} - a \right) \frac{F_b - F_a}{b-a} \right] \\ &= F^{-1} \left[F_a + \frac{b-a}{2} \times \frac{F_b - F_a}{b-a} \right] \\ &= F^{-1} \left[\frac{F_b + F_a}{2} \right] \end{aligned}$$

也即： $F(l) = \frac{F_b + F_a}{2}$ 。

广义自相关系数为：

$$k' = (l-a)/(b-a) = [F^{-1}((F(a) + F(b))/2) - a]/(b-a)$$

$$k = 2(l-a)/(b-a) - 1$$

$$= 2 \times [(F^{-1}((F(a) + F(b))/2) - a)/(b-a)] - 1$$

故本定理成立。 ■

该定理指出，不动点 l 的数学意义有两个方面：一是 l 表示 N 范数的函数值等于其变量值的点，也即 N 范数不动点；二是 l 表示在 $[a, b]$ 之间的使得 Fl 等于 Fa 与 Fb 的代数平均值所对应的生成函数 $F(x)$ 自变量的值。

【定义】 称上述定理中的公式 $N(x) = F^{-1}(F(a) + F(b) - F(x))$ 为由生成函数生成广义 N 范数的直通公式，鉴于其常用性与重要性，特称为“ N 公式”。当在 $[0, 1]$ 上时， $N(x) = F^{-1}(F(0) + F(1) - F(x))$ 。

称上述定理中的公式 $l = F^{-1}((F(a) + F(b))/2)$ 为广义不动点求解公式，简称为不动点求解公式，特称为“ l 公式”。

称上述定理中的公式 $k = 2 \times [(F^{-1}((F(a) + F(b))/2) - a)/(b-a)] - 1$ 为广义自相关系数求解公式，特称为“ k 公式”。

以上的 N 公式、 l 公式、 k 公式合称为“直通 NLK 公式”，简称“NLK 公式”。

【推论】 当在 $[0, 1]$ 上时, NLK 公式简化为:

$$N(x) = F^{-1}(F(0) + F(1) - F(x))$$

$$l = k' = F^{-1}((F(0) + F(1))/2)$$

$$k = 2 \times F^{-1}((F(0) + F(1))/2) - 1$$

进一步地, 如 $F(0) = 0$, $F(1) = 1$, 则得到:

$$N(x) = F^{-1}(1 - F(x))$$

$$l = k' = F^{-1}(0.5)$$

$$k = 2 \times F^{-1}(0.5) - 1$$

“直通 NLK 公式”的“直通”意义在于:

直通 NLK 公式给出了“由生成函数直接求 N 范数和广义自相关系数 k' ”的方法, 可以作为泛逻辑原理中求解 N 范数和 k 值的补充。在实际问题中, 往往容易且仅仅知道某些变量的分布函数, 除了理论研究之外, 在工程计算中却很少关心其 N 性生成元和 N 范数。只要该分布函数的定义域包含 $[a, b]$ 区间, 且在区间 $[a, b]$ 上满足“连续严格单调”这一条件, 或者可以变换到 $[a, b]$ 区间, 尽管可以由其生成 N 性生成元和 N 范数, 但此时不需要先求出其 N 性生成元和 N 范数, 而可以直接由 NLK 公式求出其广义自相关系数, 从而对该数理模型的精确度进行评价或推理。对于复杂分布函数而言, 直通 NLK 公式指出了一条求解广义自相关系数的捷径。这使得泛逻辑可以在描述存在由于各种不确定性引起误差的复杂系统中得到更为直接有效的应用。

2. 用 NLK 公式求 k 举例

【范例】 对于均匀分布随机变量 X , 在区间 (a, b) 上, 其分布函数 $F(x) = (x - a)/(b - a)$, 则可以直接求其 k 值:

$$\frac{l-a}{b-a} = \frac{1}{2} \bullet \left(\frac{0-a}{b-a} + \frac{1-a}{b-a} \right)$$

$$l-a = (1/2) \cdot (-a + 1 - a)$$

$$l = 1/2 = 0.5$$

$$k = 2 \times 0.5 - 1 = 0$$

这与文后 5.3.1 中的结果是一致的。

【范例】 对于泛非运算的指数模型, 定义在 $[0, 1]$ 上, $k' = l$ 。其分布函数也即生成函数 $F(x) = x^n$, n 为常数 (由于 $F(0) = 0$, $F(1) = 1$, 故 $\phi(x) = F(x)$), 则可直接求出其 k 值:

$$k'^n = \frac{1}{2} \bullet (0^n + 1^n) = \frac{1}{2}, \text{ 故 } k' = (1/2)^{1/n} = 2^{-1/n}, \text{ 所以 } k = 2 \times 2^{-1/n} - 1.$$

同样, 在 $[0, 1]$ 上的多项式模型, 其 N 性生成元 $\phi(x)$ 与分布函数 $F(x)$ 的表达式

相同 (因为 $F(0)=0, F(1)=1$), 也即其 N 性生成元完整簇 $\Phi_l(x, k)=x(1+\lambda)^{1/2}/(1+(1+\lambda)^{1/2}-1)x$, 于是由 NLK 公式可以直接得到:

$$\begin{aligned} \frac{k' \bullet (1+\lambda)^{\frac{1}{2}}}{1 + \left[(1+\lambda)^{\frac{1}{2}} - 1 \right] \bullet k'} &= \frac{1}{2} \bullet \left(\frac{0 \bullet (1+\lambda)^{\frac{1}{2}}}{1 + \left[(1+\lambda)^{\frac{1}{2}} - 1 \right] \bullet 0} + \frac{1 \bullet (1+\lambda)^{\frac{1}{2}}}{1 + \left[(1+\lambda)^{\frac{1}{2}} - 1 \right] \bullet 1} \right) = \frac{1}{2} \\ \Rightarrow k' \bullet (1+\lambda)^{\frac{1}{2}} &= \frac{1}{2} \bullet \left(1 + \left[(1+\lambda)^{\frac{1}{2}} - 1 \right] \bullet k' \right) \\ \Rightarrow k' &= \frac{1}{(1+\lambda)^{\frac{1}{2}} + 1} = \frac{(1+\lambda)^{\frac{1}{2}} - 1}{\lambda} \end{aligned}$$

于是: $k = \frac{(1+\lambda)^{\frac{1}{2}} - 1}{2\lambda} - 1$

这里的计算结果与泛逻辑中对指数模型和多项式模型研究所得的 k 值完全相同。

【范例】 已知某随机变量 X 具有概率密度

$$f(x) = \frac{m}{1+x^2}, \quad -\infty < x < \infty$$

试求此随机变量的广义自相关系数 k 。

求解: 本题关键在于求分布函数, 由概率密度的定义先求出 m 的值, 有

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{m}{1+x^2} dx &= 1 \\ \Rightarrow m \bullet arctg(x) \Big|_{-\infty}^{+\infty} &= 1 \\ \Rightarrow m &= \frac{1}{\pi} \end{aligned}$$

于是分布函数为

$$F(x) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\pi(1+t^2)} dt = \frac{1}{\pi} arctg(x) + \frac{1}{2}$$

由此可见, 如果采用一般方法, 求分布函数——>生成函数——>N 性生成元——>求 N 范数——>求 k , 其计算量较大。这里用 NLK 公式求解。如在 $[0,1]$ 上考虑, $k'=l$ 。容易证明 $F(x)$ 在其定义域(包含 $[0,1]$)内满足“连续严格单调”的条件, 因此它可以作为某 N 性生成元的生成函数。

由公式 $F(k') = \frac{1}{2} \bullet [F(0) + F(1)]$ 得

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\pi} \arctg(k') + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \bullet \left[\frac{1}{\pi} \arctg(0) + \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \arctg(1) + \frac{1}{2} \right] \\ \Rightarrow & \frac{1}{\pi} \arctg(k') + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \bullet \left[0 + \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \times \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \right] = \frac{5}{8} \\ \Rightarrow & \arctg(k') = \pi / 8 \\ \Rightarrow & k' = \tan(\pi / 8) = 0.4142 \\ \Rightarrow & k = 2 \times 0.4142 - 1 = -0.1716 \end{aligned}$$

由于 $k < 0$, 故可知此模型对于相应随机变量的逻辑值的描述偏小。

5.3 随机参量的自相关性

在复杂系统中, 许多参数都受不确定性因素的影响, 在进行数学描述时称其为**随机变量**, 在系统参数分析时则通常称之为**随机参量**, 本文对此不严格区分。

由于对于不同分布的随机变量 X 的 N 范数及其完整簇的表达不同, 严格地讲, 在理论上应该建立各自的数学与逻辑模型。但常用的 N 范数有两种模型: 即多项式模型和指数模型, 大多数的否命题求解问题都可以近似用这两种模型来描述 [HEWL01], 关键问题在于求解广义自相关系数 k 。因此如果依据本节的理论与公式求得了某种分布的误差系数 k , 在求否命题 $\sim P$ 的逻辑真值时, 除了严格依照各自的 N 范数完整簇 $N(x, k)$ 给出外, 在推理要求不高的情况下, 也可以直接利用通用的多项式模型或指数模型来求解。

在图 2.5 中的第③部分中, 作者提出了由分布函数求解广义自相关系数 k 值的一般步骤, 即: 分布函数——>生成函数——>N 性生成元——>N 范数——>广义自相关系数 k ——>非运算。本节主要对均匀分布、指数分布、正态分布随机变量的广义自相关性进行研究, 求解并分析了相应的 N 范数和广义自相关系数。

5.3.1 均匀分布

【定义】 设连续型随机变量 X 具有概率密度

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & a < x < b \\ 0, & \text{其它} \end{cases} \quad (5.1)$$

则称 X 在区间(a,b)上服从均匀分布, 记为 $X \sim U(a,b)$ 。

在区间(a,b)上服从均匀分布的随机变量 X, 具有下述意义的等可能性, 即它落在区间(a,b)中的任意等长度的子区间内的可能性是相同的, 也即落在(a,b)的子区间

的概率只依赖于子区间的长度而与其位置无关。

对式(2.1)进行积分, 可得 X 的分布函数为

$$F(x)=\begin{cases} 0, & x < a \\ \frac{x-a}{b-a}, & a \leq x < b \\ 1, & x \geq b \end{cases} \quad (5.2)$$

$f(x)$ 及 $F(x)$ 的图形分别如图 5.3(a)、图 5.3(b) 所示。

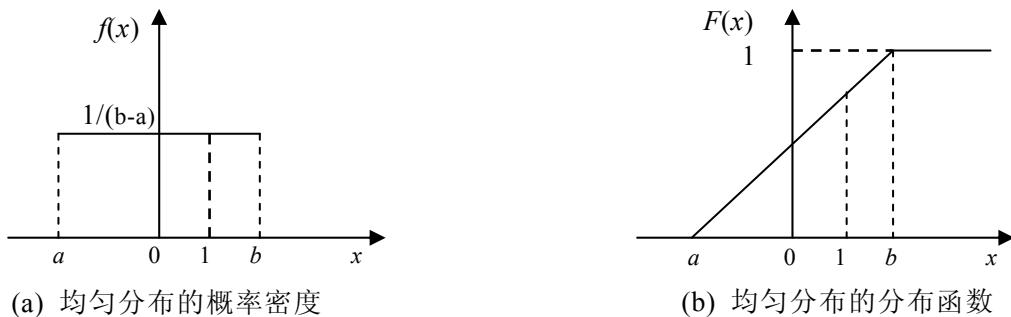


图 5.3 均匀分布随机变量的概率密度与分布函数

【定理】 在 $[a, b]$ 上的均匀分布随机变量 X 的分布函数 $F(x)$ 可以是 $[0, 1]$ 上的某标准 N 性生成元 $\phi(x)$ 的生成函数, 其中 $\phi(x) = x$ 。

证明: 由图 5.3(b) 可知: $F(x)$ 是 $[a, b]$ 上连续的严格单调递增函数, 且 $F(x)$ 为有限值。由 $F(x)$ 可以构造

$$\phi(x)=\frac{F(x)-F(0)}{F(1)-F(0)}=\frac{\frac{x-a}{b-a}-\frac{0-a}{b-a}}{\frac{1-a}{b-a}-\frac{0-a}{b-a}}=\frac{x-a+a}{1-a+a}=x$$

$\phi(x)$ 是 $[0, 1]$ 上连续的严格单调递增函数, 且 $\phi(0)=0$, $\phi(1)=1$, 所以 $\phi(x)$ 是 N 性生成元。从而 $F(x)$ 是 N 性生成元 $\phi(x)$ 的生成函数。 ■

【推论】 对于任意区间 (a, b) 上均匀分布的随机变量, 总可以在使用换基规则之后, 使其分布函数 $F(x')$ 成为标准 N 性生成元 $\phi(x')$ 的生成函数。

证明: 对于任意区间 (a, b) 上均匀分布的随机变量, 使用 $[a, b] \rightarrow [0, 1]$ 的换基规则有:

$$x'=(x-a)/(b-a), \text{ 即 } x=(b-a)x'+a, \text{ 当 } x=(b+a)/2 \text{ 时得中元 } x'=e'=1/2.$$

$$\text{此时在 } [0, 1] \text{ 区间上的 } F(x')=\frac{(b-a)x'+a-a}{b-a}=x'. \text{ 显然, } F(x') \text{ 是 } [0, 1] \text{ 上的单}$$

调递增函数, 由于 $F(x')$ 为有限值, 故可构造

$$\phi(x') = \frac{F(x') - F(0)}{F(1) - F(0)} = \frac{x' - 0}{1 - 0} = x'$$

易知 $\phi(x')$ 是 $[0, 1]$ 上连续的严格单调递增函数，且 $\phi(0) = 0$, $\phi(1) = 1$, 所以 $\phi(x')$ 是 N 性生成元。从而 $F(x')$ 是其的生成函数。 ■

下面给出均匀分布随机变量的广义自相关系数求解方法，有如下定理：

【定理】 均匀分布随机变量 X 对应的标准 N 范数为： $N(x) = 1 - x$ 。

证明：根据 N 范数生成定理：在 $[0, 1]$ 上，上述均匀分布随机变量的 $\phi(x) = x$ 是 N 性生成元，则有： $\phi^{-1}(x) = x$ ，故：

$$N(x) = \phi^{-1}(1 - \phi(x)) = 1 - \phi(x) = 1 - x.$$

$N(0) = 1$, $N(1) = 0$, 可证 $N(x)$ 为严格单调递减 N 范数。 ■

同理可以有如下定理：

【定理】 在 $[a, b]$ 上的均匀分布随机变量 X 对应的广义 N 范数为： $N(x) = b + a - x$ 。

【定理】 在 $[a, b]$ 上的均匀分布随机变量 X 的广义自相关系数，即误差系数 $k=0$ 。

证明：由前面定理可知，在 $[a, b]$ 上的均匀分布随机变量的 N 性生成元为： $\phi(x) = x$ ，它是标准 N 性生成元，其逆函数 $\phi^{-1}(x) = x$ 。于是有：N 范数 $N(x) = \phi^{-1}(1 - \phi(x))$ 的不动点即广义自相关系数：

$$k = 2\phi^{-1}(0.5) - 1 = 2 \times 0.5 - 1 = 0.$$

由于任意 $[a, b]$ 上的均匀分布，其广义自相关系数 k 均为恒定值，且为 0，这从理论上表明了均匀分布是一种在区间 $[a, b]$ 上不存在误差的数学模型。

【定义】 为了区别其它的 N 范数和误差系数，定义均匀分布随机变量 X 对应的 N 性生成元记为： $\phi_U(x) = x$; N 范数记为： $N_U(x) = b + a - x$; 对应的广义自相关系数记为： $k_U=0$; N 范数完整簇记为 $N_U(x, k)$; N 性生成元完整簇记为 $\Phi_U(x, k)$ 。

【定义】 在复杂系统的泛逻辑推理或控制过程中，随机变量 X 对应的命题 P 的逻辑真值由其 N 性生成元完整簇 $\Phi(x, k)$ 给出。对于确定的 k_0 值，则 P 的逻辑真值可以直接由其 N 性生成元 $\phi(x)$ 给出，此时 $\phi(x) = \Phi(x, k_0)$ 。

【定义】 在复杂系统的泛逻辑推理或控制过程中，随机变量 X 对应的命题 P 的否命题 $\sim P$ 的逻辑真值由其 N 范数完整簇 $N(x, k)$ 给出。对于确定的 k_0 值，则 $\sim P$ 的逻辑真值可以直接由其 N 范数 $N(x)$ 给出，此时 $N(x) = N(x, k_0)$ 。

【定理】 均匀分布随机变量 X 对应的标准 N 范数 $N_U(x, k)$ 为泛逻辑的多项式模型簇 $N_1(x, k)$ 的特例，也是指数模型簇 $N_2(x, k)$ 的特例，它等价于经典逻辑的非运算模型。

证明：当 $k=0$ 时 $k'=0.5$ ，代入各 N 范数簇可得：

对于均匀分布已知: $k'=0.5$, 标准 N 范数 $N_U(x, k)=1-x$

对于多项式模型簇, $k'=0.5$ 时, $\lambda=(1-2k')/k'^2=(1-2\times 0.5)/(0.5^2)=0$,

$$N_1(x, k)=(1-x)/(1+\lambda x)=1-x$$

对于指数模型簇有, $k'=0.5$ 时, $n=-1/\log_2 k'=-1/\log_2 0.5=1$

$$N_2(x, k)=(1-x^n)^{1/n}=1-x$$

因此有: $N_U(x, 0)=N_1(x, 0)=N_2(x, 0)=1-x$ 。

由于 $\phi_U(x, 0)=\phi_U(x)=x$, 且满足 $\phi_U(x, 0)+N_U(x, 0)=x+(1-x)=1$, 此时的 $N_U(x, k)$ 等价于经典逻辑的非运算模型。 ■

【定理】 在区间(a,b)上服从均匀分布的随机变量 X 对应的命题 Q 的逻辑真值 $Q(x)$ 等于随机变量 X 落在区间(a, x)内的概率 ($a < x \leq b$), 均为 $(x-a)/(b-a)$; 命题 Q 的非命题 $\sim Q(x)=(b-x)/(b-a)$ 。

证明: 一方面, 使用 $[a, b] \rightarrow [0, 1]$ 的换基规则, 可得 $\phi(x')=x'$, $x'=(x-a)/(b-a)$ 。再由定义有, 命题 Q 的逻辑真值 $Q(x)=\phi(x')=x'=(x-a)/(b-a)$ 。

另一方面, 随机变量 X 落在区间(a, x)内的概率 $P(x)=P\{a < x \leq b\}=(x-a)/(b-a)$ 。

因此 $Q(x)=P(x)$ 。

此外, $\sim Q(x)=N_U(x')=1-x'=1-(x-a)/(b-a)=(b-x)/(b-a)$ 。 ■

【范例】 在某复杂系统中, 由于温度的变化, 电阻 R 是一个随机变量, 均匀分布在 $1500 \Omega \sim 1700 \Omega$ 之间。在系统推理与控制过程中, R 作为一个主要的参量有其对应的命题 P, 试求当采样求得的实验值为 1550Ω 时的命题 Q 及其非命题 $\sim Q$ 的逻辑真值。

题解: 直接运用上述定理有, $a=1500$, $b=1700$, 则

$$Q(1550)=(1550-1500)/(1700-1500)=0.25,$$

$$\sim Q(1550)=(1700-1550)/(1700-1500)=0.75。$$

5.3.2 指数分布

【定义】 设连续型随机变量 X 具有概率密度

$$f(x)=\begin{cases} \frac{1}{\theta}e^{-x/\theta}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases} \quad (5.3)$$

其中 $\theta > 0$ 为有限常数, 则称 X 服从参数为 θ 的指数分布, 记为 $X \sim E(\theta)$ 。

对式(5.3)进行积分, 可得 X 的分布函数为

$$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-x/\theta}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases} \quad (5.4)$$

【定理】 指数分布随机变量 X 的分布函数 $F(x)$ 是标准 N 性生成元 $\phi(x)$ 的生成函数，其中 $\phi(x) = \frac{1 - e^{-x/\theta}}{1 - e^{-1/\theta}}$ ， θ 为有限常值。

证明：对于指数分布，易证 $F(x)$ 是 $[0, 1]$ 上连续的严格单调递增函数，且 $F(x)$ 为有限值，其中 $F(0) = 0$, $F(1) = 1 - e^{-1/\theta}$ 。由 N 性生成元生成定理可以构造

$$\phi(x) = \frac{F(x) - F(0)}{F(1) - F(0)} = \frac{(1 - e^{-x/\theta}) - 0}{(1 - e^{-1/\theta}) - 0} = \frac{1 - e^{-x/\theta}}{1 - e^{-1/\theta}}$$

θ 为有限常值，式中分母不为 0， $\phi(x)$ 是 $[0, 1]$ 上连续的严格单调递增函数，且 $\phi(0) = 0$, $\phi(1) = 1$ ，所以 $\phi(x)$ 是标准 N 性生成元。从而 $F(x)$ 是 $\phi(x)$ 的生成函数。 ■

【定义】 为了区别其它的 N 范数和误差系数，定义指数分布随机变量 X 对应的 N 性生成元记为： $\phi_E(x)$ ；N 范数记为： $N_E(x)$ ；对应的广义自相关系数记为： k_E ；N 范数完整簇记为 $N_E(x, k)$ ；N 性生成元完整簇记为 $\Phi_E(x, k)$ 。

下面的定理给出指数分布随机变量 X 的 N 范数与广义自相关系数。

【定理】 指数分布随机变量 X 对应的标准 N 范数为： $N_E(x) = -\theta \ln(1 + e^{-1/\theta} - e^{-x/\theta})$ 。

证明：由前面的定理，指数分布随机变量 X 的标准 N 性生成元 $\phi_E(x) = \frac{1 - e^{-x/\theta}}{1 - e^{-1/\theta}}$ ，

$$\begin{aligned} \text{令 } \phi_E(x) &= \frac{1 - e^{-x/\theta}}{1 - e^{-1/\theta}} = y, \quad 0 < \theta < \infty \text{ 为有限常数, } 1 - e^{-1/\theta} \neq 0, \text{ 则} \\ &\Rightarrow 1 - y(1 - e^{-1/\theta}) = e^{-x/\theta} \\ &\Rightarrow \ln[1 - y(1 - e^{-1/\theta})] = -x/\theta \\ &\Rightarrow x = -\theta \ln[1 - y(1 - e^{-1/\theta})] \\ &\therefore \phi_E^{-1}(x) = -\theta \ln[1 - x(1 - e^{-1/\theta})] \end{aligned}$$

根据标准 N 范数生成定理：

$$\begin{aligned} N_E(x) &= \phi_E^{-1}(1 - \phi_E(x)) \\ &= -\theta \ln[1 - (1 - \frac{1 - e^{-x/\theta}}{1 - e^{-1/\theta}})(1 - e^{-1/\theta})] \\ &= -\theta \ln(1 + e^{-1/\theta} - e^{-x/\theta}) \end{aligned}$$

$N_E(0) = 1$, $N_E(1) = 0$ ，可证 $N_E(x)$ 为严格单调递减 N 范数。 ■

【定理】 指数分布随机变量 X 对应的标准 N 范数的标准自相关系数 $k_E' = -\theta \ln[1/2(1 + e^{-1/\theta})]$ ，广义自相关系数 $k_E = -2\theta \ln[(1 + e^{-1/\theta})/2] - 1$ 。

证明：指数分布随机变量的标准 N 性生成元为： $\phi_E(x) = \frac{1-e^{-x/\theta}}{1-e^{-1/\theta}}$ ，由前面的证明得到： $\phi_E^{-1}(x) = -\theta \ln [1-x(1-e^{-1/\theta})]$ ，故标准 N 范数 $N_E(x) = \phi_E^{-1}(1-\phi_E(x))$ 的不动点：

$$l = \phi_E^{-1}(0.5) = -\theta \ln [1-0.5(1-e^{-1/\theta})] = -\theta \ln [(1+e^{-1/\theta})/2]$$

$$\text{标准自相关系数 } k_E' = l = -\theta \ln [1/2(1+e^{-1/\theta})]$$

$$\text{广义自相关系数 } k_E = 2l - 1 = -2\theta \ln [(1+e^{-1/\theta})/2] - 1。$$

由此可知， k_E 是与参数 θ 相关的量。在复杂系统中，由于不同随机变量服从分布的 θ 不同，使得 k_E 值也不同，故在泛逻辑运算过程中可以根据不同 k_E 值选用不同的连接词运算模型，从而对系统实现柔性推理，并达到柔性控制的目的。 ■

【定理】 当在 $[0, 1]$ 区间推理时，指数分布随机变量 X 对应命题 P 的否命题 $\sim P$ 的逻辑真值永远是偏小估计。

证明：要证明本题，也就是要证明指数分布随机变量 X 的广义自相关系数 k 永远 < 0 。由 $k_E = -2\theta \ln [(1+e^{-1/\theta})/2] - 1$ ，可以把 k_E 看成 θ 的函数，设

$$f(\theta) = -2\theta \ln [(1+e^{-1/\theta})/2] - 1, \quad \theta > 0,$$

则可以证明： $f'(\theta) > 0$ ，即 $f(\theta)$ 是单调递增函数，且有极限值 $f(\infty) = 0.0$ 。 k_E 随参数 θ 变化关系如图 5.4 所示，在 $\theta > 0$ 区间， $k_E = 0.0$ 为函数的渐近线。由于指

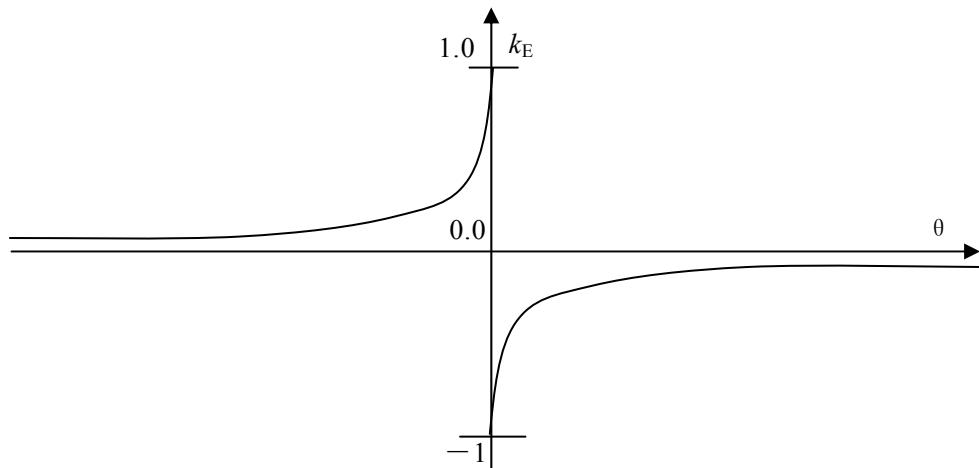


图 5.4 指数分布随机变量的广义自相关系数 k_E 与参数 θ 的关系

数分布中规定 $\theta > 0$ 才有意义，因此 k_E 永远小于 0.0，这使得这一模型在逻辑推理过程中，对参数对应命题 P 的否命题 $\sim P$ 的逻辑真值永远是偏小估。 ■

通过本定理的证明与对图 5.4 的分析，我们发现了指数分布这个数学模型自身存在的一个缺陷：当规定 $\theta > 0$ 时，从理论上就使得相关的逻辑运算值呈偏小估计。如果不是建立在概率统计的理论基础之上，而是仅从数学函数的关系出发来研究，

我们可以对 $\theta < 0$ 的部分进行补充, 此时 $k_E \in [-1, 1]$ 。对于整个区间 $(-\infty, +\infty)$ 上的 $f(\theta)$ 在 $\theta = 0$ 处不连续, 但满足下面的定理。

【定理】 指数分布随机变量在 $[0, 1]$ 上的广义自相关系数 $k_E(\theta) = -2\theta \ln[(1+e^{-1/\theta})/2] - 1$, 假设 $\theta \in (-\infty, +\infty)$ 均有意义, 则有关系式: $k_E(\theta) + k_E(-\theta) = 0$ 成立。

证明: 由 $k_E(\theta) = -2\theta \ln[(1+e^{-1/\theta})/2] - 1$ 可设函数

$y = f(x) = -2x \ln[(1+e^{-1/x})/2] - 1$, 题目即证: $f(x) + f(-x) = 0$, 直接证 $f(x)$ 为奇函数比较困难, 下面分两步来证明, 首先证明: $f(x) + f(-x) = C$ (常数), 再证其值为 0。

(1) 设 $I = f(x) + f(-x) = -2x \ln[(1+e^{-1/x})/2] - 1 + 2x \ln[(1+e^{1/x})/2] - 1$, 则两边求导得:

$$\begin{aligned} I' &= -2 \ln[(1+e^{-1/x})/2] - 2x \cdot [(1+e^{-1/x})/2]^{-1} \cdot (1/2) \cdot e^{-1/x} \cdot (-1) \cdot (-1/x^2) + 2 \ln[(1+e^{1/x})/2] + 2x \cdot [(1+e^{1/x})/2]^{-1} \cdot (1/2) \cdot e^{1/x} \cdot (+1) \cdot (-1/x^2) \\ &= -2 \ln(1+e^{-1/x}) + 2 \ln(1+e^{1/x}) - 2(1/x) \cdot (1+e^{-1/x})^{-1} \cdot e^{-1/x} - 2(1/x) \cdot (1+e^{1/x})^{-1} \cdot e^{1/x} \\ &= 2 \ln(e^{1/x}) - 2(1/x) \cdot [(1+e^{1/x})/(1+e^{-1/x})] \\ &= 2(1/x) - 2(1/x) \\ &= 0 \end{aligned}$$

所以 $I = f(x) + f(-x)$ 为常值。

(2) 设 $x=1$, 代入得:

$$\begin{aligned} I &= f(x) + f(-x) = -2 \ln[(1+e^{-1/1})/2] - 1 + 2 \ln[(1+e^{1/1})/2] - 1 \\ &= -2 \ln(1+e^{-1}) + 2 \ln(1+e^1) - 2 \quad [\text{注: 消去 } 2 \ln(1/2)] \\ &= 2 \ln[(1+e)/(1+e^{-1})] - 2 \\ &= 2 \ln e - 2 \\ &= 0 \end{aligned}$$

由(1)、(2)可知, 在 $\theta \in (-\infty, +\infty)$ 上, $k_E(\theta) + k_E(-\theta) = 0$ 成立。但必须知道在 $\theta = 0$ 处是 $k_E(\theta)$ 是极限值。 ■

利用上面同样证明方法, 还可以得到如下定理:

【定理】 指数分布随机变量在 $[0, 1]$ 上的不动点 $I(\theta) = -\theta \ln[(1+e^{-1/\theta})/2]$, 假设 $\theta \in (-\infty, +\infty)$ 均有意义, 则有关系式: $I(\theta) + I(-\theta) = 1$ 成立。

证明略。表 5.1 计算了确定 θ 值时的 I 值与 k_E 值, 计算可知, 当 $-10 < \theta < 10$ 时, I 值变化较快, 而 $\theta < -10$ 和 $\theta > 10$ 时, I 值变化很缓慢, 最后当 $\theta \rightarrow \pm\infty$ 时, $I \rightarrow 0.5$, 此时 $k_E = 0$ 。

表 5.1 指数分布随机变量的 k_E 值、 l 值与参数 θ 值的关系

$\theta (>0)$	0.00001	0.1000	0.5000	1.0000	4.0000	8.0000	10.0000	1000	100000
$k_E(\theta)$	-0.999986	-0.8614	-0.4338	-0.2402	-0.0624	-0.0312	-0.0250	-0.0002	-0.000002
$l(\theta)$	0.000007	0.0693	0.2831	0.3799	0.4688	0.4844	0.4875	0.4999	0.499999
$l(-\theta)$	0.999993	0.9307	0.7169	0.6201	0.5312	0.5156	0.5125	0.5001	0.500001

指数分布是 Γ 分布的一种特例，它是 x^2 分布、 t 分布、 F 分布的基础。指数分布具有无记忆性，常用来对各种“寿命”进行评估[SHXP01]。在可靠性推理与排队论中，指数分布有着重要而广泛的应用。

【范例】 某电子元件的使用寿命服从指数分布（以 10000 小时计），其概率密度为：

$$f(x) = \begin{cases} 1.28 \times e^{-(1.28 \times x)}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases} \quad (5.5)$$

试求使用此模型对此类元件寿命估计的误差系数 k 的值。

题解：求误差系数，也即广义自相关系数 k ，首先求出指数分布的参数 θ ，然后代入 k 与 θ 的关系式中，即可求得 k 值。

比较式(5.3)与(5.5)，由待定系数法有：

$$1.28 \times e^{-(1.28 \times x)} = \frac{1}{\theta} e^{-x/\theta}, \quad x > 0$$

故 $1.28 = 1/\theta$ ， $\theta = 0.78125$ 。

从而由 $k_E(\theta) = -2\theta \ln [1/2(1+e^{-1/\theta})] - 1$ 得

$$\begin{aligned} k_E &= -2 \times 0.78125 \times \ln [1/2(1+e^{-1/0.78125})] - 1 \\ &= 2 \times 0.34986 - 1 = -0.30028 \end{aligned}$$

由于 $k_E < 0$ ，所以此指数模型对于此类元件的寿命估计呈偏小趋势。

5.3.3 正态分布

前面对均匀分布和指数分布的随机变量的误差系数进行了求解与分析，然而在自然现象和社会现象等复杂系统中，有更多的随机变量服从或近似服从正态分布。

【定义】 设连续型随机变量 X 具有概率密度

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \quad -\infty < x < \infty \quad (5.6)$$

其中 μ, σ ($\sigma > 0$) 为常数, 则称 X 服从参数为 μ, σ 的正态分布, 记为 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ 。

对式(5.6)进行积分, 可得 X 的分布函数为

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}} dt \quad (5.7)$$

$f(x)$ 及 $F(x)$ 的图形分别如图 5.5(a)、图 5.5(b) 所示。

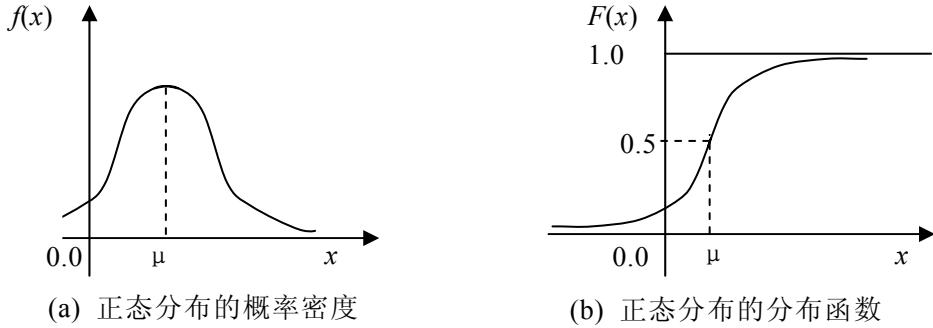


图 5.5 正态分布随机变量的概率密度与分布函数

【定义】 若 $X \sim N(0, 1)$, 即参数 $\mu = 0, \sigma = 1$, 则称为标准正态分布, 其分布函数记为 $\psi(x)$ 。标准正态分布函数关于 y 轴对称。

$$\psi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt \quad (5.8)$$

对于任何 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ 分布, 均可以使用变量代换化为标准正态分布:

$$Z = (X - \mu) / \sigma \sim N(0, 1)$$

【定义】 定义正态分布随机变量 X 对应的 N 性生成元记为: $\phi_N(x)$; N 范数记为: $N_N(x)$; 对应的广义自相关系数记为: k_N ; N 范数完整簇记为 $N_N(x, k)$; N 性生成元完整簇记为 $\Phi_N(x, k)$ 。为了计算的方便, 定义以下特定函数值的符号:

$F^{-1}(x)$ 为 $F(x)$ 的逆函数, $\psi^{-1}(x)$ 为 $\psi(x)$ 的逆函数;

$$F_x = F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}} dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^z e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \psi(z) = \psi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right), \text{ 其中 } Z = \frac{x-\mu}{\sigma}$$

$$F_0 = F(0) = \psi\left(\frac{0-\mu}{\sigma}\right) = \psi\left(-\frac{\mu}{\sigma}\right)$$

$$F_1 = F(1) = \psi\left(\frac{1-\mu}{\sigma}\right)$$

注: 对于正态分布的函数值, 其求解过程较为繁琐, 需要用到特殊的数学变换, 通常情况下都给出了标准正态分布的函数值表, $\psi(x)$ 值由概率论教材查表而得 [GSMT03, SHXP01]。对于确定的参数 μ 和 σ , 这里的 $F_0, F_1, F_x|_{x=a}$ 均是可求的值,

在以后的公式推导中，可视其为常数。

【定理】 正态分布随机变量 X 的分布函数 $F(x)$ 是标准 N 性生成元 $\phi_N(x)$ 的生成函数，其中 $\phi_N(x) = \frac{F_x - F_0}{F_1 - F_0}$ 。

证明：对于正态分布，满足 $F(x)$ 是 $[0, 1]$ 上连续的严格单调递增函数，且 $F(x)$ 为有限值，其中 $F(0) = F_0$, $F(1) = F_1$ 。由 N 性生成元生成定理可直接得到

$$\phi_N(x) = \frac{F(x) - F(0)}{F(1) - F(0)} = \frac{F_x - F_0}{F_1 - F_0}$$

式中分母不为 0 ($F_1 > F_0$)， $\phi_N(x)$ 是 $[0, 1]$ 上连续的严格单调递增函数，且 $\phi_N(0) = 0$, $\phi_N(1) = 1$ ，所以 $\phi_N(x)$ 是标准 N 性生成元。从而 $F(x)$ 是标准 N 性生成元 $\phi_N(x)$ 的生成函数。 ■

【定理】 正态分布随机变量 X 对应的标准 N 范数为： $N_N(x) = \mu + \sigma \cdot \psi^{-1}(F_0 + F_1 - F_x)$ 。

证明：设正态分布随机变量 X 的标准 N 性生成元 $\phi_N(x)$ 为

$$\begin{aligned} \phi_N(x) &= \frac{F_x - F_0}{F_1 - F_0} = y, \text{ 则} \\ &\Rightarrow F_x = F_0 + y(F_1 - F_0) \\ &\Rightarrow \psi[(x - \mu) / \sigma] = F_0 + y(F_1 - F_0) \\ &\Rightarrow x = \mu + \sigma \cdot \psi^{-1}[F_0 + y(F_1 - F_0)] \\ &\therefore \phi_N^{-1}(x) = \mu + \sigma \cdot \psi^{-1}[F_0 + x(F_1 - F_0)] \end{aligned}$$

根据标准 N 范数生成定理：

$$\begin{aligned} N_N(x) &= \phi_N^{-1}(1 - \phi_N(x)) \\ &= \mu + \sigma \cdot \psi^{-1}[F_0 + (1 - (F_x - F_0) / (F_1 - F_0))(F_1 - F_0)] \\ &= \mu + \sigma \cdot \psi^{-1}(F_0 + F_1 - F_x) \end{aligned}$$

可证 $N_N(x)$ 为严格单调递减函数，且有：

$$\text{设 } I = N_N(0) = \mu + \sigma \cdot \psi^{-1}(F_0 + F_1 - F_0) = \mu + \sigma \cdot \psi^{-1}(F_1)$$

$$\text{则 } \psi\left(\frac{I - \mu}{\sigma}\right) = \psi(F_1) = \psi\left(\frac{1 - \mu}{\sigma}\right)$$

$$\text{故 } N_N(0) = I = 1,$$

$$\text{同理可得 } N_N(1) = 0.$$

因此 $N_N(x)$ 为 $[0, 1]$ 上的严格单调递减 N 范数。 ■

【定理】 正态分布随机变量 X 的标准自相关系数

$$k_N' = \mu + \sigma \cdot \psi^{-1}[(1/2) \cdot (F_0 + F_1)]$$

证明：由前面已知的标准 N 性生成元与 N 范数，则对应标准自相关系数：

$$\begin{aligned}
k_N' &= \phi_N^{-1}(0.5) \\
&= \mu + \sigma \cdot \psi^{-1}[F_0 + x(F_1 - F_0)]|_{0.5} \\
&= \mu + \sigma \cdot \psi^{-1}[F_0 + 0.5(F_1 - F_0)] \\
&= \mu + \sigma \cdot \psi^{-1}[(1/2) \cdot (F_0 + F_1)]
\end{aligned}$$

由此可进一步得到：

$$\psi\left(\frac{k_N' - \mu}{\sigma}\right) = \frac{1}{2} \cdot \left[\psi\left(\frac{0 - \mu}{\sigma}\right) + \psi\left(\frac{1 - \mu}{\sigma}\right) \right],$$

$$\text{即有 } k_N' = \mu + \sigma \cdot \psi^{-1}[(1/2) \cdot (F_0 + F_1)]$$

由上式及 $\psi(x)$ 的单调递增性可知， $k_N' \in [0, 1]$ 。 ■

这里是依照一般方法求 k ，如果利用直通 NLK 公式，由于在 $[0, 1]$ 上 $k_N' = l$ ，因此可以立即得到 $F_{k_N'} = \frac{1}{2} \cdot (F_0 + F_1)$ ，二者的计算结果相同。

【范例】 试求标准正态分布随机变量 X 对应的广义自相关系数 k 。

题解：对于标准正态分布，参数 $\mu = 0, \sigma = 1$ ，分布函数 $F(x) = \psi(x)$ ，可以直接利用 NLK 公式计算，

(1) 设在 $[0, 1]$ 上考虑，则有

$$\psi(l) = \frac{1}{2} \cdot [\psi(0) + \psi(1)] \text{, 查表[SHXP01]得 } \psi(0) = 0.5000, \psi(1) = 0.8413, \text{ 故}$$

$$\psi(l) = 0.5 \times (0.5000 + 0.8413) = 0.67065$$

再查表知： $\psi(0.4400) = 0.6700, \psi(0.4500) = 0.6736$ ，在数量级为 0.01 以下可近似使用插值法，于是得：

$$l = 0.4400 + \frac{(0.67065 - 0.6700) \times (0.4500 - 0.4400)}{0.6736 - 0.6700} = 0.4418$$

$$k = 2 \times 0.4418 - 1 = -0.1164$$

由此可见，即使是标准正态分布，在 $[0, 1]$ 区间上的 $k = -0.1164 < 0$ ，所以这种数学模型对于随机变量的描述也存在误差。

(2) 设在 $[-\infty, \infty]$ 上考虑，则有

$$\psi(l) = \frac{1}{2} \cdot [\psi(-\infty) + \psi(\infty)] = \frac{1}{2}(0+1) = 0.5, \text{ 查表知 } \psi(0) = 0.5000, \text{ 故}$$

不动点 $l=0$ ，由双向无穷换基规则有

$$k' = \lim_{l \rightarrow 0} \frac{(l-1) + \sqrt{l^2 + 1}}{2 \times l} = \frac{1}{2} = 0.5$$

$$k = 2 \times 0.5 - 1 = 0.0$$

此计算表明，如果在正态分布的整个定义域上考察，其对应 N 范数的不动点在零点，其广义自相关系数也等于零，此时的数学模型对随机变量在整个定义域上的

对应逻辑值的描述是精确的。

【范例】 某控制系统中的电流表指示值(A)X 服从 $X \sim N(3, 4)$ 分布, 试在[0,1]上求: (1)试求系统中电流值参数的误差系数; (2)为了实现精确控制, 系统安装了多个电流表来测定同一个参数, 试求其中一个电流表在某时刻的读数小于 3.12A 的逻辑值, 以及另一电流表在同一时刻的读数不小于 3.12A 的逻辑值;(3)求读数小于 3.12A 和不小于 3.12A 的概率值, 并与其逻辑值比较。

题解: 在[0,1]上考虑, 有:

(1) 此正态分布中, 参数 $\mu = 3$, $\sigma = \sqrt{4} = 2$, 分布函数 $F(x) = \psi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$, 直接

利用 NLK 公式有

$$\begin{aligned} \psi\left(\frac{k'-3}{2}\right) &= \frac{1}{2} \bullet \left[\psi\left(\frac{0-3}{2}\right) + \psi\left(\frac{1-3}{2}\right) \right] \\ &= \frac{1}{2} \bullet [1 - \psi(1.5) + 1 - \psi(1.0)], \quad (\text{查表得 } \psi(1.5) = 0.9332, \psi(1.0) = 0.8413) \\ &= \frac{1}{2} \bullet (2 - 0.9332 - 0.8413) \\ &= 1 - 0.88725, \quad (\text{查表与插值求得 } \psi(1.21184) = 0.88725) \\ &= \psi(-1.21184) \end{aligned}$$

故 $\frac{k'-3}{2} = -1.21184$, 从而 $k' = 3 - 2 \times 1.21184 = 0.57632$ 。

$$k = 2 \times 0.57632 - 1 = 0.15264$$

由于误差系数 $k > 0$, 故可知此系统中电流表的显示值呈偏大估计。

(2) 使用换基规则 $(-\infty, \infty) \rightarrow [0, 1]$: $x' = [(x-1) + (x^2+1)^{1/2}] / (2x)$ 有:
 $x' = [(3.12-1) + (3.12^2+1)^{1/2}] / (2 \times 3.12) = 0.8648$

其 N 性生成元 $\phi(x) = \frac{F_x - F_0}{F_1 - F_0}$, 故

$$Q(3.12) = \phi(0.8648) = \frac{F_{0.8648} - F_0}{F_1 - F_0} = \frac{\psi_{-1.0676} - \psi_{-1.5}}{\psi_{-1.0} - \psi_{-1.5}} = \frac{0.1429 - 0.0668}{0.1587 - 0.0668} = 0.8281$$

由对应的 N 范数 $N(x) = \mu + \sigma \cdot \psi^{-1}(F_0 + F_1 - F_x)$ 有

$$\begin{aligned} \sim Q(3.12) &= N(0.8648) = 3 + 2 \cdot \psi^{-1}(\psi_{-1.5} + \psi_{-1.0} - \psi_{-1.0676}) \\ &= 3 + 2 \cdot \psi^{-1}(0.0668 + 0.1587 - 0.1429) \\ &= 0.2244 \end{aligned}$$

由此可见 $Q(3.12) + \sim Q(3.12) > 1$, 这与 $k > 0$ 呈偏大估计是一致的。

(3) 求概率值, 则有:

$$P(X < 3.12) = \psi\left(\frac{3.12 - 3}{2}\right) = \psi(0.06) = 0.5239$$

$$P(X \geq 3.12) = 1 - P(X < 3.12) = 1 - 0.5239 = 0.4761$$

分析：本文所研究的广义自相关系数 k , 也称误差系数, 是反映一个复杂系统、或一个数学模型、或一个推理公式集合自身存在的误差指标, k 的大小反映了这些系统(模型、集合)描述不确定性的准确程度, k 不是“测量值与理想值的差值”,而是描述这些差值大小的一个系数, 它广泛存在于自然系统和社会系统中。

这里的“逻辑值”与数学中的“概率值”是两个不同的概念, 前者是基于泛逻辑原理而新提出的概念, 主要用于复杂系统中对包含不确定性因素的参量进行柔性推理与精确控制; 后者则是熟知的概率论中的概念; 尽管二者有一定的联系, 但其求解思想与计算方法是截然不同的。本例的计算表明: $P(X < 3.12) + P(X \geq 3.12) = 1$, 其物理意义是: 随机变量 X 落在区间 $(-\infty, 3.12)$ 的概率是 0.5239, 则落在区间 $[3.12, \infty]$ 的概率必然是 $1 - 0.5239$, 其本质仍然是经典逻辑的推理, 即变量如不属于集合 $(-\infty, 3.12)$, 则必然属于集合 $[3.12, \infty]$ 。但是, 由 $Q(3.12) + \sim Q(3.12) \neq 1$ 可知, 基于泛逻辑的考虑了误差系数 k 的这种推理模式, 能更好的描述变量 X 的不确定性, 当且仅当 $k=0$ 时存在 $Q(x) + \sim Q(x) = 1$ 。

5.4 从实验数据求广义自相关系数

5.4.1 实验数据的正交分析与自相关系数

前面所研究的内容都建立在已知某个参量的概率密度或分布函数基础之上, 而在实际问题中, 往往先测量一系列数据, 并分析这些数据之间的关系, 从而找出该参量所服从的分布规律。这就使得“数据分析”显得特别重要, 尤其在工程实践中。本节重点讨论实验数据的正交分析法, 并给出求取 k 值的方法。

正交分析法最大的优点在于: 它可从许多条件中选择出最具有代表性的少数几项试验, 能获得可靠的实验结果。几个相关概念简介如下, 以便于理解。

正交表: 正交表是一些已经制作好的规格化的表, 是正交试验设计的基本工具, 包括水平数相等的和水平数不等的正交表。

正交分析分为“单因素方差分析”和“多因素方差分析”。多因素方差分析需考虑交互作用, 详见文献[SHXP01], 本文以单因素分析为例进行介绍。

1. 单因素方差分析的数学模型

设因素 A 有 s 个水平 A_1, A_2, \dots, A_s , 在水平 A_j 下进行 $n_j (n \geq 2)$ 次独立的试验, 得样本 $x_{1j}, x_{2j}, \dots, x_{nj}$, 它们来自正态总体 $N(\mu_j, \sigma^2)$, 其中 μ_j , σ 未知 ($j=1, 2, \dots, s$)。其数学模型为:

$$\left. \begin{array}{l} x_{ij} = \mu_j + \varepsilon_{ij} \quad (i=1,2,\dots,n_j; \quad j=1,2,\dots,s) \\ \varepsilon_{ij} \sim N(0, \sigma^2) \quad (\text{为随机误差}) \\ \text{各 } \varepsilon_{ij} \text{ 相互独立} \end{array} \right\} \quad (5.9)$$

单因素方差分析的目的是解决以下两个问题：

(1) 检验 s 个总体 $N(\mu_j, \sigma^2)$ 的均值是否相等，即检验假设

$$H_0: \mu_1 = \mu_2 = \dots = \mu_s, \quad H_1: \mu_1, \mu_2, \dots, \mu_s \text{ 不全相等。}$$

(2) 对未知参数 $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_s$ 及 σ^2 进行估计

$$\text{其总平均 } \bar{\mu} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^s n_j \mu_j, \quad n = \sum_{j=1}^s n_j, \quad \hat{\sigma}^2 = \frac{S_E}{n-s}$$

2. 试验设计与方差分析

单因素试验设计与方差分析如表 5.2 所示：

表 5.2 单因素试验设计与方差分析表

因子水平	A ₁	A ₂	...	A _s
测量数据	x_{11}	x_{12}	...	x_{1s}
	x_{21}	x_{22}	...	x_{2s}

	x_{n1s}	x_{n2s}	...	x_{n1s}
样本总和	$T_{..1}$	$T_{..2}$...	$T_{..s}$
样本均值	$\bar{x}_{..1}$	$\bar{x}_{..2}$...	$\bar{x}_{..s}$
总体均值	μ_1	μ_2	...	μ_s
A _j 样本均值	$\bar{x}_{..j} = \frac{1}{n} T_{..j}$			
样本总和	$T_{..j} = \sum_{i=1}^{n_j} x_{ij}, \quad T_{..} = \sum_{j=1}^s T_{..j}$			
数据总平均	$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^s T_{..j}$			
方差来源	平方和	自由度	均方	F 比
组间误差	$S_A = \sum_{j=1}^s \sum_{i=1}^{n_j} (X_{..j} - \bar{X}_{..})^2$	$s-1$	$\bar{S}_A = S_A / (s-1)$	$F = \bar{S}_A / \bar{S}_E$
组内误差	$S_E = \sum_{j=1}^s \sum_{i=1}^{n_j} (X_{ij} - \bar{X}_{..j})^2$	$n-s$	$\bar{S}_E = S_E / (n-s)$	
总变差	$S_T = \sum_{j=1}^s \sum_{i=1}^{n_j} (X_{ij} - \bar{X}_{..})^2$	$n-1$		
参数估计	$\hat{\mu} = \bar{x}, \quad \hat{\mu}_j = \bar{x}_{..j}, \quad \hat{\sigma}^2 = \frac{S_E}{n-s}$ 分别是 μ, μ_j, σ^2 的无偏估计，有关系： $S_E = S_T - S_A$			

3. 计算广义自相关系数 k 值

方差分析的相关理论可参阅文献[SHXP01]，这里不作介绍。本文的目的主要是要求出因素 A 的广义自相关系数，也即误差系数 k 值。

根据其数学模型可知，因素 A 受各种随机误差的影响，而随机误差服从 $\varepsilon_{ij} \sim N(0, \sigma^2)$ 分布，故因素 A 的第 j 个总体服从 $X_j \sim N(\mu_j, \sigma^2)$ 分布，整个试验的全体样本则服从 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ 分布，因此，求此类变量的误差系数 k 值就转化成求解正态分布参数的 k 值。这里的关键问题在于求出参数 μ 和 σ ，由于正交分析法给出了对参数 μ 和 σ 进行估计的计算公式，故对于此类问题可以进行误差系数的求解。下面以一个范例进行说明。

【范例】 为了测定某型号控制器的抗干扰稳定性，任意选用三个此型号的控制器，在随机干扰环境的条件下进行试验，对每个控制器测量五次电压值，精确到 0.001V，所有试验数据如表 5.3 所示，试求此类控制器中参数电压的误差系数 k 值。

表 5.3 试验数据表

电压值	控制器 1	控制器 2	控制器 3
1	1.604	1.152	1.673
2	1.216	1.664	2.112
3	1.408	1.792	1.344
4	1.088	2.112	1.152
5	1.894	1.536	2.176
样本总和 $T_{.j}$	7.210	8.256	8.457
样本均值 $X_{.j}$	1.442	1.651	1.691

题解：本题求 k 值的关键在于求参数 μ, σ^2 ，数据如表中所示。可以进行方差分析，求出 S_A, S_T, S_E 与 F 等参数值，这里与 μ, σ^2 相关的参数为 \bar{x} 和 $\hat{\sigma}^2$ ，因此只需要求出这两个参数即可。

题中 $n=15, s=3, S_E$ 的自由度为 $n-s=12$ 。

表中计算出了样本总和 $T_{.j}$ 与样本均值 $X_{.j}$ ，进一步求得：

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^s T_{.j} = \frac{1}{15} (7.210 + 8.256 + 8.457) = 1.5949,$$

$$S_E = \sum_{j=1}^s \sum_{i=1}^{n_j} (X_{ij} - \bar{X}_{.j})^2 = \sum_{j=1}^3 \sum_{i=1}^5 (X_{ij} - \bar{X}_{.j})^2 = 1.7266,$$

$$\text{故 } \hat{\mu} = \bar{x} = 1.5949, \hat{\sigma}^2 = \frac{S_E}{n-s} = \frac{1.7266}{15-3} = 0.1439, \hat{\sigma} = \sqrt{\hat{\sigma}^2} = 0.3793$$

从而得到分布函数 $U \sim N(1.5949, 0.1439)$ ，设在 $[0, 1]$ 上考虑，由 NLK 公式有：

$$\begin{aligned}\psi\left(\frac{k'-1.5949}{0.3793}\right) &= \frac{1}{2} \cdot \left[\psi\left(\frac{0-1.5949}{0.3793}\right) + \psi\left(\frac{1-1.5949}{0.3703}\right) \right] \\ &= \frac{1}{2} \cdot [\psi(-4.2045) + \psi(-1.5682)] \\ &= 0.0292\end{aligned}$$

故 $k' = 1.5949 + 0.3793 \times (-1.8929) = 0.8769$

$k = 2 \times 0.8769 - 1 = 0.7538$

即为此类控制器中参数电压的误差系数，也即广义自相关系数。

5.4.2 求 k 值的换基规则使用原则

当运用泛逻辑原理来研究复杂系统中的参数时，由于不同类型参量的分布函数与定义域不同，所以在进行逻辑推理与求 k 值之前，通常要使用换基规则进行基变换，研究表明，定义在任意区间 (a,b) 上（包括正负无穷）的函数 $F(x)$ ，都可以施行 01 基变换，使其定义域在 $[0,1]$ 区间之上。

进行基变换要求遵循以下原则：

- (1) 若函数 $F(x)$ 的定义域“包含 $[0,1]$ 区间”，且在 $[0,1]$ 上为连续严格单调函数，则既可以使用 01 换基规则得到 $F(x')$ ，也可以不使用换基规则。
- (2) 若函数 $F(x)$ 的定义域“部分包含或不包含 $[0,1]$ 区间”，但在其定义域内为连续严格单调函数，则需先使用“01 换基规则”得到 $F(x')$ 。
- (3) 对 $F(x)$ 既可以作 01 基变换，也可以作 $[0,1] \rightarrow [a,b]$ 的基扩展，即 ab 基变换，这可以在原始 $F(x)$ 函数表达式下方便地求解一些问题，然后对所得结果再进行变量代换。
- (4) 除了特别的研究之外，在实际应用中通常对所有分布函数都进行 01 基变换或 ab 基变换，以适应相应逻辑的研究论域。例如：对于非连续型（分段的、离散的）分布函数 $F(x)$ ，可以分别对各分段定义域进行基变换，然后再研究其逻辑性质。

【定义】 称分形逻辑基空间 $[0,1]$ 为“标准域”，称 $[a,b]^n$ 为“广义域”，对于某函数而言，称人们比较关心重视的区间 $[a,b]$ 为“关注域”。例如，对于正态分布函数，人们通常只关注 3σ 之内的区间，因为在 3σ 之外区间上的概率很小。

- (5) 对于某些函数而言，“关注域”不一定就是其“定义域”，这时应该根据关注域与标准域的关系来决定是否采用基变换。

“是否对函数 $F(x)$ 进行了基变换”，会导致所使用的生成函数的表达式不同，从而使得相应的 N 性生成元、N 范数、广义自相关系数 k 、以及相应命题的逻辑真值都会有所不同：

- (1) 如果 $F(x)$ 的定义域包含 $[0,1]$ 区间，没有进行基变换，则 $F(x)$ 既是分布函数，

也是生成函数，则其 N 性生成元为： $\phi(x) = [F(x) - F(0)] / [F(1) - F(0)]$ ；其 N 范数为： $N(x) = F^{-1}(F(0) + F(1) - F(x))$ ；其广义自相关系数为：

$k = F^{-1}\left(\frac{1}{2} \bullet [F(0) + F(1)]\right)$ ；此时对于参数对应命题 Q 的逻辑真值则有两种情况，

这主要根据关注域来决定，对关注域中的 x 进行考察：

如关注域内存在部分 $x \notin [0,1]$ ，则需要作变量代换 $x \rightarrow x'$ ，其 $Q(x) = \phi(x')$ ， $\sim Q(x) = N(x')$ ；其中 x' 由换基规则求得。

如关注域内所有 $x \in [0,1]$ ，则既可以作变量代换，也可以不作变量代换。代换方法同上，如不作代换，则可直接代入 X 值计算 $Q(x) = \phi(x)$ ， $\sim Q(x) = N(x)$ 。

(2) 无论 $F(x)$ 的定义域如何，如都进行了基变换（01 基变换或 ab 基变换）得到 $F(x')$ ，则称 $F(x)$ 为分布函数，称 $F(x')$ 为生成函数。此时参数对应命题 Q 的逻辑真值 $Q(x) = \phi(x')$ ， $\sim Q(x) = N(x')$ ；其中， x' 由换基规则求得。

【范例】 设对正态分布使用 01 基变换，求此时的广义自相关系数 k 值。

求解：正态分布的定义域为 $(-\infty, +\infty)$ ，需要做 $(-\infty, +\infty) \rightarrow [0,1]$ 的基变换，换基规则为： $x' = (x - 0.5) / [x(1-x)]$

当 $x \rightarrow -\infty$ 时， $x' \rightarrow 0$ ，故 $F(0') = F(-\infty) = 0$ ；

当 $x \rightarrow +\infty$ 时， $x' \rightarrow 1$ ，故 $F(1') = F(+\infty) = 1$ ；

$$\text{于是 } l' = F^{-1}\left(\frac{1}{2} \bullet [F(0') + F(1')]\right)$$

$$l' = F^{-1}\left(\frac{1}{2} \bullet (0+1)\right) = F^{-1}\left(\frac{1}{2}\right), \text{ 从而 } \frac{l' - \mu}{\sigma} = 0, \text{ 得 } l' = \mu, \text{ 故}$$

$$l = \frac{(l' - 1) + \sqrt{l'^2 + 1}}{2 \times l'} = \frac{(\mu - 1) + \sqrt{\mu^2 + 1}}{2 \times \mu}$$

由此可见，使用基变换之后的不动点只与参数 μ 有关。当 $\mu = 0$ 时可以求得标准正态分布的误差系数为：

$$k' = l_0 = \lim_{\mu \rightarrow 0} \frac{(\mu - 1) + \sqrt{\mu^2 + 1}}{2 \times \mu} = \frac{1}{2} = 0.5$$

$$k = 2 \times 0.5 - 1 = 0$$

由于 $k = 0$ ，故此情况下的标准正态分布是一种精确估计，这与直接在其定义域 $(-\infty, +\infty)$ 上求得的 k 值相同。

针对本节的研究，这里归纳了常用连续型随机变量的标准自相关系数，如表 5.4。

表 5.4 常用连续型随机变量的标准自相关系数

参量类型	统一模型	均匀分布	指数分布	正态分布
分布函数或生成函数	$F(x)$	$\begin{cases} 0, & x < a \\ \frac{x-a}{b-a}, & a \leq x < b \\ 1, & x \geq b \end{cases}$	$\begin{cases} 1-e^{-x/\theta}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}} dt$
关注域	$[a,b]$ 含 $[-\infty, \infty]$	$[a,b]$	$[0, +\infty]$	$[-\infty, +\infty]$
换基规则	$[a,b] \rightarrow [0,1]$	$[a,b] \rightarrow [0,1]$	$[0, +\infty] \rightarrow [0,1]$	$[-\infty, \infty] \rightarrow [0,1]$
N 性生成元 $\phi(x)$	$\frac{F_x - F_0}{F_1 - F_0}$	x	$\frac{1 - e^{-x/\theta}}{1 - e^{-1/\theta}}$	$\frac{F_x - F_0}{F_1 - F_0}$
N 范数 $N(x)$	$F^{-1}(F(0) + F(1) - F(x))$	$1-x$	$-\theta \ln(1 + e^{-1/\theta} - e^{-x/\theta})$	$\mu + \sigma \cdot \psi^{-1}(F_0 + F_1 - F_x)$
不换基误差系数 k'	$F^{-1}\left(\frac{1}{2} \bullet [F(0) + F(1)]\right)$	$0.5 \quad (k=0)$	$-\theta \ln[1/2(1 + e^{-1/\theta})]$	$\mu + \sigma \cdot \psi^{-1}[(1/2) \cdot (F_0 + F_1)]$
换基后误差系数 k'	有关于 $F(x')$	$0.5 \quad (k=0)$	$\frac{1}{1 + (\theta \ln 2)^{-1}}$	$\frac{(\mu - 1) + \sqrt{\mu^2 + 1}}{2 \times \mu}$
原命题逻辑真值	$Q(x)$	$\phi(x) = x$	$\phi(x)$	$\phi(x)$
非命题逻辑真值	$\sim Q(x)$	$N(x) = 1-x$	$N(x)$	$N(x)$
备注	a) “换基后误差系数 k' ”一栏是利用换基规则对 $F(x)$ 变换到 $[0, 1]$ 上的误差系统 k' , 其它栏是未换基而直接计算的结果。 b) 对于均匀分布而言, 换基与否并不影响其它函数的表达, k 值恒定 0; c) $Q(x)$ 由 $\phi(x)$ 求得, $\sim Q(x)$ 既可由自身的 $N(x)$ 来求, 也可以先求出误差系数 k , 然后直接用泛逻辑中的指数模型或多项式模型来求; d) 为简化公式, 表中列出 k' 值, 其中 $k = 2k' - 1$; $k' \in [0, 1]$, $k \in [-1, 1]$ 。			

5.4.3 求解广义自相关系数的步骤总结

从一个工程实际问题出发, 要求解某个系统中的某个参量的误差系数, 需要涉及的主要步骤是:

- (1) 进行问题分析, 设计试验方法, 得到测量数据;
- (2) 进行数据分析, 建立数学模型, 得到分布函数;
- (3) 进行论域分析, 确认是否进行函数的基变换, 得到生成函数;
- (4) 依照需要, 按一般方法求取 N 性生成元、N 范数、广义自相关系数 k , 命题逻辑值, 或者利用直通 NLK 公式求解其 N 范数和 k 值。
- (5) 反馈逻辑值到模型中, 完善函数表达与参数求解, 进行柔性推理与精确控制。

第六章 格分维理论与康托集的逻辑运算

分形维数是分形、混沌领域中的重要概念，但至今有关分形维数的定义与求解方法还远没有完善。笔者在研究分形逻辑的过程中，提出了一种新的维数理论——格分维理论，它可用于求解任意几何图象（图形）的分形维数。本章介绍了格分维理论的相关定义、求解方法，并在此基础上研究了康托集和任意几何图象的格分维与分形逻辑运算。

6.1 格分维理论的提出背景

维数的概念是十分重要的[QIJD94, BARR99]。Poincare 及 Lebesgue 对维数的定义提出过重要的思想，但真正对维数的研究直到 19 世纪后半叶才开始[CUTL93, ZAHL95, SIM002, CYNT03]。但总的来说，对维数的认识还只是直观上的描述：如点是 0 维的，线是 1 维的，平面是 2 维的，立体是 3 维的。空间的维数常常被理解为坐标数，即描述其中某个点所需的最少的参数个数。但是当 Peano 曲线将一个线性区间映射到一个正方形时，认为维数是描述空间所需的最少参数个数的理论便无法解释了。

关于维数的重要进展是 Hausdorff 于 1919 年引入的维数概念。它以 Hausdorff 测度为基础，在理论上给出了求解任何集合的维数的方法，目前得到了公认。但是，Hausdorff 维数的最大缺陷在于实际计算很困难，许多情况下根本不能计算出确切值，围绕“求解 Hausdorff 维数”这个问题，不少人提出了求解近似值的方法。由于 Hausdorff 测度比较难理解，不少人因此被挡在了分形领域之外，这也增加研究分形理论的难度。

有关本文“格分维理论”的提出背景，主要从命题推理的真值柔性、现有维数概念的不确定性、以及现有分维的局限性等方面来阐述。

6.1.1 命题真值的柔性化

在二值逻辑中，命题的真值只能是 0 和 1 之一。在多值逻辑中，允许命题的真值有多种取值。这些逻辑的命题真值取值都是整数。

由 Zadeh 提出的模糊逻辑引入了隶属度的概念，使得命题真值可以在 $[0,1]$ 区间上取值，这使得逻辑真值可以是“分数”，这一概念的提出得到了良好的应用。随着泛逻辑的发展，人们认识到 $[0,1]$ 区间还远不能满足逻辑推理的柔性化，在复杂系统推理中，命题真值往往对应描述某参数的特征值，这个特征值可能属于 $(-\infty, \infty)$ 上的任何一个实数值。如果利用模糊逻辑来推理，就需要首先求其隶属度函数，把

其参数值转换为[0,1]上的逻辑值，这要求人们了解更多的数学转换工具与方法。

但是，如果直接运用某参数的特征值来进行推理，这就将省去求隶属度、参数变化等步骤，这无疑将带来更多的方便。这就要求实现命题真值的柔性化，力求客观反映参数的特征值的实际大小，尽量减少函数的转换。在分形与混沌领域，分形维数 D 是反映各种分形事物和混沌吸引子的特征参量， D 可以是[0,1]之间的数，如三分康托集的 $D=0.6309$ ；但多数情况下， D 可能都大于 1，如科赫岛的 $D=1.2619$ ，血红蛋白的 $D=1.5000$ [LHYL94]。因此，在直接基于参数特征值推理的逻辑，对于特征值的求解就显得十分重要。就分形逻辑而言，实现命题真值柔性化的关键就在于给出求解分形维数的统一方法或基本原则。比如：如何求一个线段的分维。

6.1.2 线段的维数是多少

“线段是几维的？”，在论文工作过程中，作者提出这个问题。好象很简单：“一维？那么一个 3CM 长的线段与一个 5CM 长的线段都是一维的？”。作者也似乎有些茫然：“就是一维的，维数与长度不是一回事，它们分别描述了线段的不同特征，尽管在长度特征上不同，但维数特征可以是相同的，这没有什么奇怪的”。可是在晚上，当一位同学回到寝室时，我随便向他提出这个问题：“线段是几维的？”，他却毫不犹豫的回答：“二维”。我大吃一惊，不会是耳朵出了毛病？“是吗，二维的？”。

“对呀，就是二维，因为你要画一条线段就必须画在一个平面上，平面是二维的，所以线段也是二维的”，他给出了这样的推理。“喔，如此推理，在空间中的一条线段是三维的？线段也可画在一条数轴上，那它是一维的呢？”我立即反问。这位同学开始思索，一会后说道：“应该是一维的正确”。

这件事并没有如此完结，“二维”的回答让我不得不重新来认识这个问题。于是我作了一个口头的调查，分别就这个问题询问了熟悉的多位数学老师和同学，包括博士生、硕士生和本科生。其中一位毫不犹豫的回答“n 维”，原因跟最前面的理由差不多“放在不同的空间有不同的维数”，还有回答“二维”的，原因是“两端可以伸展，有两个自由度”，也有回答“零维”的。在数学老师中，有两个在犹豫一会之后回答“一维”，另外三个“说不清”。

为什么对这个问题还有各种不同的答案呢？现有的数学理论不清晰？或者数学教育出了问题？我左思右想，似乎得到了答案：问题在于“维数的概念”，不同的人对于“维数的定义”理解并不相同，自小就知道“点是零维的、直线是一维的、平面是二维的、立体是三维的”；近年来，分维的概念在数学界得到普及，并在材料相变、计算机图象处理等众多领域得到应用。在分形几何中，分维是一个十分重要的参数，目前已有各种分维的定义与求解方法，不同的分维在各自的领域得到了广泛的应用。整数维成为了分形维的特例，这是整个数学的一大进步。但是，就目前的分形理论与分形维数的求解方法而言，它们还没有彻底打破经典数学有关维数的

界限，比如：三分康托集的分维必须在[0,1]之间，科赫岛分维在[1,2]之间，黑白图象的分维在[1,2]之间，而彩色图象的分维在[2,3]之间。这可以看成是一种“分段式”的维数定义，是在“相邻整数维”之间插入分数维，其隐含的不易发觉的前提是“以相邻整数维为参考维数”。

本文对这个“隐含的却被广泛使用的参考维数”进行了研究，提出了“格维数”的概念，并在此基础上形成了一种新的维数理论——暂称“格维数理论”，或“格分维理论”。

6.1.3 现有分维求解方法

1. 相似维

对于熟悉的分形，例如 Cantor 集、Koch 曲线、Sierpinski 地毯等点集，其局部的图形与整体是相似的。只要将局部放大一定倍数总可以得到与整体一致的图形，称之为自相似集 F，对于自相似集 F 来说，定义相似维数为：

$$D(F) = \frac{\ln(N)}{\ln(1/r)}$$

其中，r 为相似比系数，N 为组成 F 的相似子集的个数。由此定义，如 F 是一个直线段，那么它可以看成是由比例系数 $r=1/n$ 的 n 个直线段构成的，于是 $D=\ln(n)/\ln(n)=1$ 。如 F 是个正方形，则它可以看成是由比例系数 $r=1/n$ 的 n^2 个与之相似的小正方形构成的，于是 $D=\ln(n^2)/\ln(n)=2$ 。当 F 是通常的几何体概念，且是连续集合时，此时与整数维的概念是一致的。但如 F 不是一个连续的集合，则可能会出现分数维的情况。

相似维对严格自相似的结构是好用的，但在实际分形体中，往往不具有严格自相似结构，因此在实际应用中很少使用。

2. 盒子维

设 F 是任意非空的有界子集， $N_\delta(F)$ 是直径最大为 δ ，可以覆盖 F 的集的最少个数，则 F 的下、上盒维数分别定义为：

$$\underline{Dim}_B F = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\ln N_\delta(F)}{-\ln \delta},$$

$$\overline{Dim}_B F = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\ln N_\delta(F)}{-\ln \delta}$$

下标 B 表示盒子(Box)。如果这两个值相等，则称这共同的值为 F 的盒维数，记为：

$$Dim_B F = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\ln N_\delta(F)}{-\ln \delta}$$

盒维数的等价定义还有闭球覆盖维、容量维等多种表达[XHPX88]，其核心思想是： $N_\delta(F)$ 表示集 F 中可以容纳的直径最大为 δ 的集的个数，然后取 $\delta \rightarrow 0$ 时的对数比值，即为 $D(F)$ 。

盒子维计算方便，是在实际问题中应用较为广泛的分维计算方法。

3. Hausdorff 维数

Hausdorff 维数是建立在 Hausdorff 测度的基础之上的[GRAS85, PERS01]。设 F 为 R^n 中的任何子集， s 为一非负数，对任何 $\delta > 0$ ，定义

$$H_\delta(F) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^n U_i \mid \{U_i\} \text{ 为 } F \text{ 的 } \delta - \text{ 覆盖} \right\}$$

$$H^s(F) = \lim_{\delta \rightarrow 0} H_\delta^s(F)$$

$H^s(F)$ 就称为 s 维 Hausdorff 测度。

对 Hausdorff 测度的研究表明：对任何给定的集 F 和 $\delta < 1$ ， $H_\delta^s(F)$ 对 s 是不增的，因此 $H^s(F)$ 对 s 也是不增的，且存在 s 的一个临界点，使得 $H^s(F)$ 从无穷“跳跃”到 0，这个临界值就称为 F 的 Hausdorff 维数，用 $\text{Dim}_H(F)$ 或 $D_H(F)$ 表示：

$$D_H(F) = \inf\{s: H^s(F) = 0\} = \sup\{s: H^s(F) = \infty\}$$

Hausdorff 维数满足一些数学上的性质[ZHZJ95]。如果从“尺度”变化的观点来简单描述 Hausdorff 维数，人们得到了如下的结论：

对于任何一个有确定维数的几何体，若用与它相同维数的“尺”去量度，则可得到一确定的数值 N ；若用低于它维数的“尺”去量它，结果为无穷大；若用高于它维数的“尺”去量它，结果为零。其数学表达式为

$$N(r) \sim r^{-D_H}$$

对上式两边取自然对数，再进行简单运算后，可得下式

$$D_H = \ln N(r) / \ln(1/r)$$

式中的 D_H 就称为 Hausdorff 维数，它可以是整数，也可以是分数，在某些文献中，称之为豪斯道夫—贝塞科维奇维数。

4. 分形图象的分维计算

分形理论在图象压缩与解压编码中得到了很好的应用[CHYY97, CHDM89]，其中的“图象”从整体而言，并非是“具有自相似结构的图象”。在图象压缩时，通常需要把整个图象划分成若干小块，然后求出各个小块的分形维数。在利用几何变化（旋转、伸缩、翻转、平移等）之后，如果某些小块的分形维数相等或相近，则可以归

为一组，在各组中，计算机只需要存储某个样本的象素值，对其它小块只需要存储几个坐标值，这就达到了压缩的目的。其解压的过程则刚好相反。

有关图象的分块与优化等技术问题已有不少文献研究，本文要说明的是“如何求一个小块的分形维数”，这可归纳为如下几个步骤：

- ① 选取一组测度 $L_i, i=1,2,\dots,m$ ；
- ② 利用各测度取量这个小块，得到一组盒子数 $N_i, i=1,2,\dots,m$ ；
- ③ 单位化测度 L_i ，以 $\ln(1/L_i)$ 为横坐标、 $\ln(N_i)$ 为纵坐标进行直线拟合，所得直线的斜率即为该小块图象的分形维数。

设某小块图象的宽为 W 个象素，高为 H 个象素，在以上三个步骤中，第①步目前的争论较大。根据前面盒子维以及 Hausdorff 维数的定义，要求得准确的分维值，测度 L_i 要趋近于零，这在实际图象中不能够使用。对于计算机图象而言，最小

单位是 1 个象素，因此 L_i 必须很小。根据经验， L_i 通常取 $1, 2, 4, \dots, \frac{1}{4} \max(W, H)$ ，

但也有人认为最小 L_i 应从 2 个象素开始，最大 L_i 可以超过宽与高的 $1/4$ ，一般取 $\min(W, H)$ 的 $1/2$ ，有时也可取到 $\min(W, H)$ 。

5. 其它分维计算方法

由于分形在不同领域应用的需要，分维的计算方法除了前面介绍的相似维、盒子维、Hausdorff 维数之外，还有填充维、信息维、熵维、拉普拉斯指数维、谱维数等[ARB001, CAOL97, ROCL93]。就度量方法而言主要有：集合覆盖法、盒子法、小岛法、分规法、序列法等。

6.1.4 现有维数的局限性

前面介绍了目前维数的几种常见定义，以及分维的求解方法，它们从不同角度出发，对维数给出了不同的定义与计算方法，对于分形理论的发展与应用无疑具有重要的意义。但是，它们也有以下局限性：

- (1) 是“分领域”式的考虑问题，没有形成连续统一的数学模型。尽管一些维数的定义存在等价的其它定义，但似乎很难用统一的公式或求解方法表示出来。
- (2) 是“分段”式的考虑问题，即总认为某个分形体的分维在某两个整数维之间。如三分康托集的 $D=0.6309$ ，应该属于 $[0,1]$ 之间，这种潜意识的定义在鉴定分形类别时有其积极的作用，但有时会由于这种“主观”式的分类引发错误。
- (3) 存在一些“维数盲点”，典型的有 “ $\ln(1)=0$ ”，它不能作为分维公式中的分母，如果作为分子，则导致维数为 0，许多情况下这是错误的。许多分形因此不能求解其分维。鉴于此，不少维数求解公式都给出了“如果存在”的条件限制。例如，在盒子维的定义中，只有在“如果上、下极限都存在，且相等”时，才能计算分维。

(4) 几乎所有的维数求解公式都建立在数学“集合论”的基础之上，不少公式需要求其极限，这在数学上的确具有完备性，但是在实际问题中严重缺乏可操作性，以致不少问题根本无法求出其维数具体值。

(5) 对于分形图象而言，主要“根据经验选择测度”，这存在较大的不一致性，致使不同研究者对同一问题的研究结果不同，不能相互比较，不能对其合理性进行评估。

(6) 存在“维数不确定性”。产生原因主要在于：实际存在的分形体不具有无限层次的自相似结构。把适用于无限层次分形体的公式用于实际的有限层次分形体，就有可能产生分维不确定性。其中，测度的取值范围不是任意的，必须先对分形体的结构特点进行细致分析，再选择测度和确定临界点。实际分形体只在一定层次范围内才呈现为分形或准分形。

研究表明：日常生活中对维数理解的不一致性，现有分形维数定义或求解的不一致性，关键在于没有考虑“参考空间”对维数的影响。大家都知道，一座房子通常认为是三维的，但是从高空俯视地球时，房子就是一个点，此时是零维的。因此，本文认为，维数概念的定义应该考虑参考空间的影响。

基于这样的思想，并结合现有维数定义的优点，本文提出了“基于参考格空间的维数新理论”，它在合理应用数学原理的同时，充分结合了计算机图象处理的能力，给出了一种“统一的几何图象（图形）维数求解方法”。应该说：现有的维数是思维层次的维数，本文的格维数是实体层次的维数。本文提出的格分维理论力求从定义上来消除以上的部分缺陷，它并不排斥现有的分维理论，下面介绍相关的概念。

6.2 格分维理论

6.2.1 单位格与格图象

1. “点”的概念

在理论数学上，“点没有大小、直线没有宽度、平面没有高度”，这已成为公知的理论，在这个理论之下，许多数学理论得到了快速发展，尤其是有关“数”的概念，由自然数发展到有理数，再到实数，在区间 $[0,1]$ 之间有无数个点。因此，一个3CM长的线段和一个5CM长的线段所包含的点的个数都是无穷多个，这可以利用点的同构映射来进行解释，在理论数学上具有重要意义。

但是，在一些实际问题中，有关涉及点的应用通常需要求极限，这很不方便，而且部分极限并不存在。鉴于人们考察具体问题时的“分辨率”的有限性，本文在此给出在实体层次中的点的概念，它在工程应用中具有较强的可操作性，其出发点在于把“理想化”的点进行“实体化”。

抛开纯粹数学上的“点”的概念，进入计算机领域。在计算机图象处理过程中，组成图象的基本单位也是“点”，每个点代表一个“象素”。尽管点本身没有“大小”的概念，但是象素“在屏幕上显示时是需要占据一定的空间”的。把一个 3CM 长和一个 5CM 长的线段画在显示屏上，二者所包含的象素（点）的个数是不同的。于是，我们不得不从计算机图象的角度来重新认识“点、直线、平面”的定义及其维数：

“点作为组成线段的基本单位，它的多少应该反映在线段的长度特征中”。

【定义】 “点”是组成线段的基本单位。根据研究问题的需要，“点”可以进行伸缩扩张变换，可以被理解为一个“小圆”，或者“小方格”。也可以是“单位线段”，如果把单位 CM 作为点，则 3CM 长的线段包含 3 个点。

【定义】 在计算机图象处理领域之中，“点”与“象素”是一一对应关系，一个象素在计算机屏幕上所占空间的大小就是点的大小。

2. 单位格

【定义】(单位格) 为了避免与经典数学中“点”的概念混淆，在本文中，统一把上述概念中的“点”理解为“小方格”，简称“单位格”或“格”(grid)。

“格”的特征有：

- (1) 格是有大小的。其“大小”包括长、宽、高等几何特征，用“ δ ”表示。
- (2) 格是组成与衡量线段的基本单位，其物理意义是：“线段的长度特征反映了所包含格数的多少”。
- (3) 格是否有量纲，与线段是否有量纲、以及量纲的含义相同。
- (4) 经典几何中的“点”是思维层面上的抽象概念，本文中的“格”是实体层面上的物理概念，当忽略实体几何特征与物理意义时，“格”就蜕变为“点”，因此，经典几何中的“点”可以看成是“格”的特例。

在实体意义下，线段也是有粗细宽度、体积高度特征的。只是，在长度这个特征上有一定的度量值，而在宽度、高度等特征上的度量为单位格，即等于 1。

【定义】(格图象) 设 G 是一个有界的几何图象，根据 G 的有界性，存在一个封闭的几何图形，把 G 包含在其中，用选定大小的单位格去覆盖此封闭几何图形，这相当于把几何图形划分成若干个大小为单位格的小方格，于是，某些小方格中包含有图象 G 的点，某些小方格中则并不包含图象 G 的点，我们把包含图象 G 的点的那些小方格涂成黑色，把不包含图象 G 的点的那些小方格涂成白色，由此得到一幅由所有黑白方格组成的几何图象，称此几何图象为原有几何图象 G 的格图象。在意义明确的情况下，格图象也用“ G ”表示。在程序设计中，通常在黑方格上标上数字“1”，在白方格上标上数字“0”。

如果 G 是一条直线上的点集，则单位格应理解为小区间；如果 G 是平面上的有

界点集，则单位格应理解为小矩形；如果 G 是 R^n 中的有界点集，则单位格则为 R^n 中的小立方体。例如，对于图 6.1(左)的几何图象（科赫岛），在一个封闭的矩形之内，用选定大小的单位格进行覆盖，则可以得到其对应的格图象，如图 6.1(右)所示。

在图 6.1 中，取矩形大小为 180*90 象素，取单位格大小为 15*15 象素，则格图象由 12*6 个黑白方格及数字 0、1 组成。

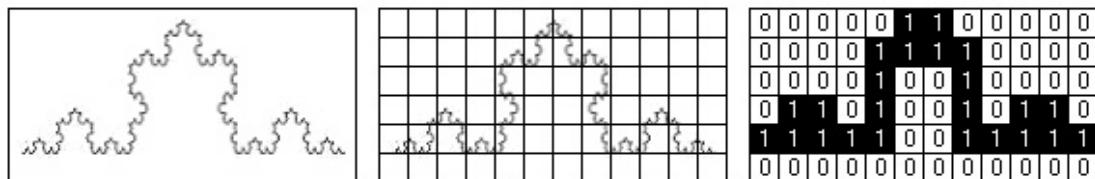


图 6.1 左：科赫岛；中：矩形分割成单位格；右：格图象

6.2.2 格空间、格测度、格分维

【定义】(格空间) 格图象所在的几何空间称为“格空间”。格空间通常是封闭的，但也可以是开放的。理论上的格空间可以是任意定义或选取的，对于同一格图象，从不同角度研究时，其所处的格空间可能不同。格空间用“S”(Space)表示。

比如，图 6.1(左)中的边界矩形，就是科赫岛的格空间。

格空间有其自身的维数 D ，格空间维数的物理意义是： D 代表格空间自身的相复杂度； D 可以是整数，也可以是分数； D 可以理解为格空间中相互独立的相的多少；当 D 是整数时， D 可以理解为相互正交的坐标轴个数。

在本文以后的讨论中，如无特别说明， D 均为整数，且大多指非负数。

【定义】(格坐标轴数) 对于维数为 D 的格空间，如果用坐标轴来描述，最少需要的坐标轴个数为 $n = \lceil D \rceil$ ，其中， $\lceil x \rceil$ 是高斯取整函数，表示不超过 x 的最大整数。

比如，对于 $D=1$ 的格空间而言， $n=1$ ，只需要一个坐标轴就可以描述；对于 $D=1.2619$ 的科赫岛而言，其对应格空间的坐标轴个数 $n=2$ 。

【定义】(格坐标集合) 对坐标轴分别记为 X_1, X_2, X_3, \dots (共 n 个)，把格空间向各个坐标轴上进行投影，在 X_1, X_2, \dots 各个方向上，用单位格对投影进行度量，于是得到一组“格数”值，记为 P_1, P_2, \dots ，共有 n 个，对这 n 个值进行“从大到小”排序，同时对坐标记号 X_1, X_2, X_3, \dots 进行前后调整，则得到一有序对数列，称之为“格坐标序列”，记为有序集合 P ， $P = \{(P_i, X_i) \mid P_i \text{ 为格空间在坐标 } X_i \text{ 方向上投影的格数}, P_i \geq P_{i+1}, i = 1, 2, \dots, n\}$ ， P 称为“格坐标集合”， P 中的元素个数称为 P 的势，显然， P 的势等于 n 。

【定理】 在势为 n 的格坐标集合 P 中，任意一个 $P_i \geq 1$ 。

证明：根据 P_i 的定义，它表示格空间在 X_i 方向上的投影所包含的单位格数目，因此 P_i 为非负数。那么 P_i 是否可能等于 0 呢？下面用反证法证明。

设某个 $P_i=0$ ，也即格空间在 X_i 方向上的投影一个单位格也不包含，除了坐标原点之外，在此方向上的投影不存在，否则至少有除原点之外另外一点，也就至少包含一个单位格。

如果在 X_i 方向上的投影不存在，那么用 $n-1$ 个坐标轴就可以描述此格空间，这与其格坐标轴数为 n 矛盾。

因此，任意一个 $P_i \geq 1$ 。 ■

【定义】(格体积) 格图象中所包含黑色单位格的个数称为“该格图象的格体积”，简称“格体积”。对于格空间而言，其格体积为 $\prod_{i=1}^D P_i$ ，格体积用“ V ”表示。

【定义】 设格空间 S_1 的格体积为 V_1 ，设格空间 S_2 的格体积为 V_2 。如果 $V_1 > V_2$ ，则称 $S_1 > S_2$ ；如果 $V_1 = V_2$ ，则称 $S_1 = S_2$ ；如果 $V_1 < V_2$ ，则称 $S_1 < S_2$ 。

【定义】 设格图象 G_1 的格体积为 V_1 ，设格图象 G_2 的格体积为 V_2 。如果 $V_1 > V_2$ ，则称 $G_1 > G_2$ ；如果 $V_1 = V_2$ ，则称 $G_1 = G_2$ ；如果 $V_1 < V_2$ ，则称 $G_1 < G_2$ 。

【定义】(格测度) 格测度是格空间的性质。设对格坐标集合为 P 的格空间求维数， P 的势为 n ，取最大的 P_i 、也即 P_1 ，则在 $[1, P_1]$ 之间有 P_1 个整数，设每个整数代表一种尺度，其大小代表该尺度包含单位格的个数；利用程序从 P_1 个尺度中选

择 m 个尺度组成尺度序列 L ，这会有 $C_{P_1}^m$ 个序列，在假设整个格空间中充满格图象的条件下，求出对应于各个尺度序列的分形维数。然后依照分形维数值进行选取尺度序列，应满足：

- (1) 由所选尺度序列求得的分形维数等于或十分接近于 n ；
- (2) 在满足(1)的条件下，取包含元素个数较多且各个元素较为分散的尺度序列作为格空间的尺度序列。

称由如上选取出来的尺度序列为格空间的“格测度序列”，简称“格测度”，记为有序集合 L ， $L = \{L_i \mid L_i \leq L_{i+1}, i=1, 2, \dots, m\}$ ，也称“格测度集 L ”。显然， L 中的元素为 $[1, P_1]$ 之间的正整数，且 $m \leq n$ 。

【定义】(格维数) 格维数是格图象的性质，其物理意义为“格图象填充格空间的程度，它不仅反映格图象在格空间中所占空间的代数测度大小，而且反映了格图象在格空间中的几何分布关系，因此，格维数是描述格图象复杂程度的一个重要参数”。

设格空间的维数为 D_0 ，格测度为 L ，则格图象的格维数 D 可如下求解：

- ① 利用格测度集 L 中的各个测度 L_i ，分别构造与格空间相似的子空间，子空

间的格体积为 $L_i^{D_0}$ ，于是可得到子空间序列。

② 用子空间序列中的各子空间分别去度量（覆盖）整个格图象，则可以得到对应于不同子空间的盒子数序列，也即格图象包含的子空间个数序列，记为有序集合 N ， $N=\{N_i, i=1,2,\dots,m\}$ 。

这里的“盒子数”含义与现有盒子维定义中的“盒子数”含义相同。

度量方法是：用子空间从参考格空间的坐标原点开始，依次向各个方向进行度量，如果子空间中包含格图象中的一个或多个黑方块，则盒子数加 1，否则，盒子数不加 1。

③ 对集 L 中的各个测度 L_i 值进行单位化，转化成分形测度： $L'_i=L_i/P_1$ ，并计算其倒数的对数值 $\ln(1/L'_i)$ 和对应格子数的对数值 $\ln(N_i)$ ；

④ 当 L 的势 $m>1$ 时，以 $\ln(1/L'_i)$ 为横坐标、 $\ln(N_i)$ 为纵坐标在二维坐标系中描点作图，并进行线性回归分析，所得直线的斜率即为格图象的格维数。当 $m=1$ 时，出现 $\ln(1)=0$ 的情况，此时不需线性回归，直接定义格分维等于 N_1 。

以上定义指出：格测度是格空间的性质，定义的出发点在于：假设整个格空间都充满图象，则格测度就是满足“由这组测度求得的格维数值等于所定义的格空间维数 D_0 ”的测度序列。格维数是格图象的性质，对于格空间而言，其格维数定义为“在假设整个格空间中充满格图象 G 的条件下”的 G 的格维数。

说明：如上求得的格维数，通常情况都是分数，故可直接称为格图象的“分形维数”、或“分维”、或“格分维”，如未特别声明，下文的“分维”并不仅指分数维，也包含整数维。

【定理】（格测度定理） 设整数维格空间的维数为 D_0 ，当其格坐标集合为 $P=\{(P_i, X_i) | P_i=P_{i+1}, i=1,2,\dots,n\}$ 时，如取数 P_1 的所有约数（含 1 和本身）组成的集合为格测度集合 L ，则由 L 求得的格空间的维数一定等于 D_0 。

证明：由于 D_0 为整数，故有 $n=D_0$ 。由于 n 个 P_i 相等，因此格空间在各个方向上是对称的。当用 $L_i^{D_0}$ 去覆盖格空间时，得到盒子数为： $(P_i/L_i)^n$ ，由于 L_i 是 P_i 的约数，因此 L_i 能整除 P_i ，设 L 的势为 m ，则 $P_i/L_i=L_{m-1}$ ，下面列表进行计算，相关数据见表 6.1。

由表 6.1 可知，对于每个 i 均有： $\ln(N_i)/\ln(1/L'_i)=n$ 。因此，当以 $\ln(1/L'_i)$ 为横坐标 x 、 $\ln(N_i)$ 为纵坐标 y 在二维坐标系中描点，并进行线性回归时，回归直线上任意一点的 y 值均是 x 值的 n 倍。由线性回归理论立即可以得出：线性相关性系数 $r=1$ ，即全相关，具有形式 $y=ax+b$ ，其直线斜率一定等于 n 。

表 6.1 计算格分维的数据表

序 列	1	2	...	$m-1$	m
测度 L_i	$L_1=1$	L_2	...	L_{m-1}	$L_m=P_1$
$L'_i=L_i/P_1$	L_1/P_1	L_2/P_1	...	L_{m-1}/P_1	L_m/P_1
L'_i 化简	$1/L_m$	$1/L_{m-1}$...	$1/L_2$	$1/L_1$
盒子数 N_i	$(P_1/L_1)^n$	$(P_1/L_2)^n$...	$(P_1/L_{m-1})^n$	$(P_1/L_m)^n$
N_i 化简	$(L_m)^n$	$(L_{m-1})^n$...	$(L_2)^n$	$(L_1)^n$
$\ln(N_i)$	$n \ln(L_m)$	$n \ln(L_{m-1})$...	$n \ln(L_2)$	$n \ln(L_1)$
$\ln(1/L'_i)$	$\ln(L_m)$	$\ln(L_{m-1})$...	$\ln(L_2)$	$\ln(L_1)$

实际上，由于 $\ln(L_1)=\ln 1=0$ ，因此，截距 $b=0$ ，故斜率 $a=n$ 。

由 D_0 为整数可知， $D_0=n$ ，因此格空间的维数也一定是 n ，也即 D_0 。 ■

此定理指出了一种求整数维对称空间格测度的方法，它很有用。称其为“整数维格测度定理”，简称“格测度定理”。例如：设格空间为 $8\times 8\times 8$ 的立方体，则 $D_0=8$ ，其格测度为 $\{1,2,4,8\}$ 序列。

6.2.3 参考格分维与本征格分维

1. 问题的提出

分析可知：格维数主要与两个因素相关：一是格图象自身的构成，一是格空间的大小。对于同一幅格图象，如果对其格空间 S 进行某种变换（如缩小、扩张、或维数变换）得到另外一个格空间 S' ，那么 S' 的格测度与 S 的格测度将有所不同，这使得度量同一格图象时得到的盒子数序列不同，最终导致线性回归后所得的格维数将有所不同。

在现有分形理论中，图象分维的含义是：“表征分形图象填充空间的程度大小”，但是却没有对这里的“空间”进行明确界定，因此这导致了不同的研究者对同一问题的研究可能使用不同的测度标准，从而使得分维不同，相互间的结果无法进行比较。在本文中，为了区别格空间大小对分维的影响，提出了“参考格空间、参考格测度、参考格维数”和“本征格空间、本征格测度、本征格维数”等概念。研究表明：现有图象分维是本文格分维在“参考格空间等于本征格空间”时的特例。因此，格分维是一种更为广泛的图象（不仅是分形图象，可以是任意的几何图象）维数特征值。

2. 参考格空间、参考格测度、参考格维数

【定义】(参考格空间) 在求所有格图象的维数时，必须把它纳入一个确定维数的格空间中来进行考查，称此格空间为“**参考格空间**”，或“**参考空间**”，也可直接称为“**参考格**”。

设参考格空间的维数为 D_0 ，则嵌入其中的格图象的格维数应该在 $[0, D_0]$ 之中， D_0 为实数。比如，把黑白二色的分形图象纳入 D_0 为 2 的参考格空间中进行研究，其格分维可以分布在 $[0, 2]$ 之间，这打破了传统的认为黑白图象的分维应该在 $[1, 2]$ 之间的观点。从理论上讲，也可以把黑白图象纳入 D_0 为 1 的参考格空间中进行研究，此时的格分维则分布在 $[0, 1]$ 之间，而不是 $[1, 2]$ 之间。

理论上的参考格空间可以是任意的几何空间，可以是无限空间或有限空间。但是在实际应用过程中，通常根据具体问题的需要进行选取。

【定义】(参考格图象) 假设整个参考格空间中充满图象，所有包含的单位格都是黑格，据此得到的格图象称为“**参考格图象**”。

【定义】(参考格坐标) 根据“**格坐标**”的定义，参考格空间的格坐标称为“**参考格坐标**”。

【定义】(参考格体积) 根据“**格体积**”的定义，参考格空间的格体积称为“**参考格体积**”。

【定义】(参考格测度) 根据“**格测度**”的定义，参考格空间的格测度称为“**参考格测度**”。

【定义】(参考格维数) 根据“**格维数**”的定义，参考格空间的格维数称为“**参考格维数**”，即 D_0 。

3. 本征格空间、本征格测度、本征格维数

【定义】(本征格空间) 由格图象的所有几何边界连接组成的几何空间成为“**本征格空间**”，由于格图象在各个方向的尺寸通常是有限的，因此，本征格空间通常是封闭的。

比如：三维魔方由 $3 \times 3 \times 3 = 27$ 个小方格组成，其格图象就是由此 27 个方格组成的几何体，其本征格空间是整个立方体所占的空间。如果去掉中心的 1 个小方格，其格图象变为由 26 个方格组成的几何体，而其本征格空间却不变。

【定义】(本征格图象) 假设整个本征格空间中充满图象，所有包含的单位格都是黑格，据此得到的格图象称为“**本征格图象**”。

【定义】(本征格坐标) 根据“**格坐标**”的定义，本征格空间的格坐标称为“**本征格坐标**”。

【定义】(本征格体积) 根据“**格体积**”的定义，本征格空间的格体积称为“**本征格体积**”。

由于本征格空间是格图象所有边界所组成的几何图象，因此本征格空间的格体积总不小于格图象的格体积。

【定义】(本征格测度) 根据“格测度”的定义，本征格空间的格测度称为“本征格测度”。

【定义】(本征格维数) 根据“格维数”的定义，本征格空间的格维数称为“本征格维数”。

6.2.4 格分维求解步骤

根据上面的介绍与分析，现总结格图象的格维数求解步骤，它适用于任意几何图象（图形）的格维数求解：

① 选定参考格空间，必须把格图象嵌入到一个确定维数 D_0 的参考格空间中进行考虑。

② 选取单位格，确定单位格的大小，把几何图象（图形）转化为对应的格图象，同时求取参考格图象。

③ 求取参考格空间的参考格测度集 L 。

④ 利用参考格测度集 L 中的各个测度 L_i ，分别构造与格空间相似的子空间，

子空间的格体积为 $L_i^{D_0}$ ，于是可得到子空间序列。

⑤ 用各子空间分别去度量（覆盖）整个格图象，得到对应于不同子空间的盒子数序列，也即格图象包含的子空间个数序列，记为集合 N ， $N = \{N_i, i=1,2,\dots,m\}$ 。

⑥ 对集 L 中的各个测度 L_i 值进行单位化，转化成分形测度： $L_i = L_i / P_1$ ，并计算其倒数的对数值 $\ln(1/L_i)$ 和对应盒子数的对数值 $\ln(N_i)$ ；

⑦ 以 $\ln(1/L_i)$ 为横坐标、 $\ln(N_i)$ 为纵坐标在二维坐标系中描点作图，并进行直线拟合，所得直线的斜率即为格图象的格维数 D 。

关于直线拟合方法，通常是线性回归分析和最小二乘法，除有特别指明之外，本文均指线性回归分析。

根据上面的步骤可知：对于一个给定集 F 的格图象，其格分维与两个因素密切相关：参考格空间 S 和单位格 δ ，二者共同决定了测度集 L 。于是格分维可以记为：

$$D_G(F) = f(S, \delta, F)$$

【定义】 称式 $D_G(F) = f(S, \delta, F)$ 为“格分维表达式”。

【定理】 当参考格空间选定为本征格空间时，则参考格维数便等于本征格维数。

证明：可由参考格维数与本征格维数的定义直接得证。由于此定理非常有用，故这里单独列出。 ■

6.2.5 线段的格分维

至此，我们可以回答“一个3CM长线段的维数是多少”这个问题了。依照上面格维数的求解步骤有：

① 选取参考格空间，设把线段纳入 $D_0=1$ ，长度为4CM的线段中来考虑。

② 选取单位格，取其边长为0.5CM，其它几何特征忽略。则一个3CM长的线段包含了并排的6个单位格，其对应的格图象为[1|1|1|1|1|1]。参考格空间则包含了8个单位格， $P_1=8$ ，参考格空间的格图象为[1|1|1|1|1|1|1|1]。

③ 直接由格测度定理，求得参考格测度序列为： $L=\{1,2,4,8\}$ 。

④ 构造子空间序列为： $S=\{1^1,2^1,4^1,8^1\}$ 。

⑤ 求取度量盒子数为： $N=\{6,3,2,1\}$ 。

⑥ 单位化测度，求取对数值 $\ln(1/L_i)$ 和对应盒子数的对数值 $\ln(N_i)$ 为：

$\ln(1/L_i)$	$\ln(1/(1/8))$	$\ln(1/(2/8))$	$\ln(1/(4/8))$	$\ln(1/(8/8))$
$\ln(N_i)$	$\ln(6)$	$\ln(3)$	$\ln(2)$	$\ln(1)$
$\ln(1/L_i)$	2.079442	1.386294	0.693147	0.000000
$\ln(N_i)$	1.791759	1.098612	0.693147	0.000000

⑦ 线性回归求直线斜率，也即格维数得：

$$\text{Line: } y = ax + b = 0.833985x + 0.028768, R^2 = 0.990191$$

因此，在此参考格空间中，此线段的格维数为： $D=0.833985$ 。

表6.2计算了3CM线段和6CM线段在不同参考格空间中的格分维，其中，单位格均取为边长为0.5CM的小方格，参考格空间都取 $D_0=1$ ，但其格空间大小不同，表中括号内为格体积。

表6.2 3CM线段在不同参考格空间中的格分维

参考格 线段 \ 空间	1CM (2)	3CM (6)	6CM (12)	12CM (24)	18CM (38)	30CM (60)
3CM线段(6)	1.0000	[1.0000]	0.7848	0.5645	0.4913	0.4116
6CM线段(12)	1.0000	1.0000	[1.0000]	0.8343	0.7143	0.6702
12CM线段(24)	1.0000	1.0000	1.0000	[1.0000]	0.8521	0.8197

在表6.2的方括号之内的数据[1.0000]，表示当选用的参考格空间恰好等于线段的本征格空间时所得的维数，刚好为1。

【定理】设选定的参考格空间 S 的格维数为 D_0 ，其格体积为 V_0 ，格测度集为 L ，嵌入其中的格图象 G 的格维数为 D ，格体积为 V 。如果 L 中的每个元素都是 V_0 和 V 的约数（含1和本身），则有

① 如 $V < V_0$ ，则 $D < D_0$ ；

② 如 $V=V_0$, 则 $D=D_0$;

③ 如 $V>V_0$, 则 $D=D_0$ 。

证明: 可由测度定理得证, 略。 ■

例如, 在三维参考空间中, 任意几何图像的格维数都不大于 3。在此定理中, 如果 L 中的某些元素不是 V_0 或 V 的约数, 则此定理不一定成立。但无论如何, 当格图象的参考格空间选定为本征格空间时, 所求得的维数与通常意义上的欧氏维或分维的定义是一致。事实上, 在日常生活中, 我们经常不知不觉地把本征格空间当成了参考格空间。

6.2.6 条件格分维、比例格分维

1. 条件格维数

【定义】(条件格维数) 设有两个格图象 A 、 B , 如选用 B 的本征格空间作为 A 的参考格空间, 则由此求得的 A 的参考格维数称为“格图象 A 相对于格图象 B 的条件格维数”, 也称“相对格维数”, 记为: $D(A|B)$ 。

条件格维数的物理意义是: 假定在某个格空间中, 当格图象 B 的格维数等于 1 的条件下, 利用此时的格测度来作为 A 的参考格测度, 所求得的 A 的格维数。往往在难以选取参考格空间时, 求取某格图象相对于另一格图象的条件格维数更具有实际意义。

【范例】 设有两个线段 A 和 B , A 长 3CM, B 长 5CM, 求相互间的条件格维数。

题解: 首先取单位格大小为 0.5CM, 分别作出 A 、 B 的格图象如下:

A 的格图象: $[1|1|1|1|1|1]$,

B 的格图象: $[1|1|1|1|1|1|1|1|1|1]$ 。

其中, A 包含 6 个单位格, B 包含 10 个单位格。

当 B 的格维数为 1 时的格测度也就是 B 的本征格测度, 容易求得格测度集: $L(B)=\{1,2,5,10\}$, 由 L 构造的子空间此时也是一维的, 用其去度量格图象 A 得到的盒子数序列为: $N(A)=\{6,3,2,1\}$ 。

最后单位化格测度序列, 对 $L(B)$ 和 $N(A)$ 中的各元素求对数之后进行线性回归, 于是得到 A 相对于 B 的条件格维数 $D(A|B)=0.732266$ 。

同理, A 的本征格测度集为 $L(A)=\{1,2,3,6\}$, 用其度量 B 所得的盒子数集为 $N(B)=\{10,5,4,2\}$ 。单位化 $L(A)$, 对 $L(A)$ 和 $N(B)$ 的对数值进行线性回归得到 B 相对于 A 的条件格维数 $D(B|A)=0.881296$ 。

由此例可见, 在通常情况下, $D(B|A) \neq D(A|B)$ 。

2. 比例格维数

前面所述的参考格维数，条件格维数都与参考格空间密切相关，而在实际生活的一些问题中，要选取合适的参考格空间并不容易。如果随便选取参考格空间，即便求出一个格维数值，其物理意义也不明显。针对这个问题，本文提出了“比例格维数”的概念，比例格维数能够反映几何图象的“代数测度大小”和“填充空间的能力”。

【定义】(比例格维数) 设有两个格图象 A、B，在选定的单位格之下，A 的格体积为 $V(A)$ ，B 的格体积为 $V(B)$ ，则定义 $D(A|B)=\frac{\ln(V(A))}{\ln(V(B))}$ 为“格图象 A 相对于格图象 B 的比例格维数”；反之， $D(B|A)=\frac{\ln(V(B))}{\ln(V(A))}$ 为“格图象 B 相对于格图象 A 的比例格维数”。

【定理】 对于比例格维数而言，有： $D(A|B) \times D(B|A) = 1$ 。

证明：由比例格维数的定义直接得证。 ■

对于 3CM 长的线段(A)和 5CM 长的线段(B)，取单位格为 0.5CM 时，格体积 $V(A)=6$ ， $V(B)=10$ ，则有 $D(A|B)=\ln(6)/\ln(10)=0.778151$ ， $D(B|A)=1.285097$ 。

数“1”是比例格维数 $D(A|B)$ 的一个分界线，其隐含条件是：“B 的格维数为 1”。其物理意义在于： $D(A|B)$ 表征了“格图象 A 填充格图象 B 的能力”，当 $V(A) < V(B)$ 时，表明 A 不能填满 B 所占有的空间，A 的维数应该小于 B 的维数，故 $D(A|B) < 1$ ；当 $V(A)=V(B)$ 时，表明 A 恰好能够填满 B 所占有的空间，A 的维数应该等于 B 的维数，故 $D(A|B)=1$ ；而当 $V(A) > V(B)$ 时，表明 A 填满 B 所占有的空间之后还有富余，A 的维数应该大于 B 的维数，故 $D(A|B) > 1$ 。

3. 比例格维数与条件格维数的异同点比较

比例格维数与条件格维数是两种不同的格维数，二者都与单位格的选取有关，二者都是“相对”的维数，都是“B 的格维数为 1”条件下的 A 的格维数。但条件格维数与参考格空间相关，而比例格维数不考虑参考格空间，而仅仅考虑二者的格体积大小。比例格维数求解比条件格维数求解简单得多。条件格维数在 $[0, D_0]$ 之间，比例格维数则没有限制。

6.2.7 维数与位置的相关性

在经典维数理论中，几何图形的维数与其所在空间的维数有关，至于该几何图形在空间中的哪个具体位子，这并不影响其维数。

但是，对于格图象而言，其在参考格空间中的几何位置是对格分维有影响的，以下面的例子为例进行说明。

【范例】 设有数轴上的三个线段，对应集合为 $A=[0,3]$ 、 $B=[4,7]$ 、 $C=[8,9]$ ∪

[10,12], 其中 C 由两段组成, 中间是间断的。设选用数轴为参考格空间 S, 取为[0,15], 再取单位格大小为 0.5, 试求三线段的格分维。

题解: 由于选取单位格大小为 0.5, 参考格空间 S 的维数 $D_0=1$, 长度为[0,15]区间, 所以其格体积 $V_0=30$, 于是得 $P_1=30$, 由测度定理得到测度集 $L=\{1,2,3,5,6,10,15,30\}$ 。S 格空间如图 6.2 所示。

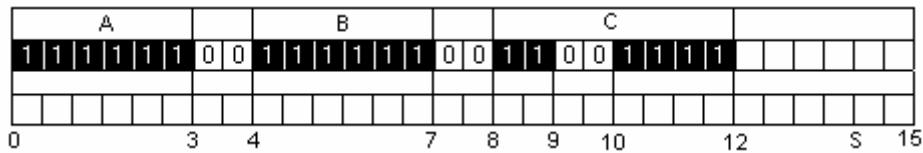


图 6.2 格维数与几何位置相关性的格图象

在单位格为 0.5 时, $V_A=V_B=V_C=6$, 使用相同的测度集 L 从原点开始依次对 A、B、C 三个线段进行度量, 则得到表 6.3 中的数据。

表 6.3 格维数与几何位置相关性的数据比较

L_i	1	2	3	5	6	10	15	30	D
A: N_i	6	3	2	2	1	1	1	1	0.5416
B: N_i	6	3	[3]	2	2	1	1	1	0.5628
C: N_i	6	3	3	2	[1]	[2]	1	1	0.5214

由计算数据可知, 三者的格分维虽然比较相近, 但还是有所不同。其原因在于:

(1) A 的格图象从参考格空间的坐标原点开始计算, 在用各 L_i 度量时, 此时的盒子数 N_i 一定是递减的, 即 $N_i \geq N_{i+1}$ 。

(2) B、C 的格图象没有从原点开始计算, 当 $L_i=3$ 时, 从原点开始依次向右度量, 以三个单位格长为尺度, 于是把参考格空间划分成如下一些集合:

[0, 1.5], ..., [3, 4.5], [4.5, 6], [6, 7.5], ..., [13.5, 15], 其中, 由于 $B=[4, 7]$, 因此 B 在[3, 4.5], [4.5, 6], [6, 7.5]三个区间中都占有图象, 此时的盒子数为 3, 也即表中方括号的[3]。这一点就与 A 不同。

(3) 在 C 中, 我们关注表中方括号中的盒子数[1]和[2]。当用 $L_i=6$ 度量时, 尽管 C 由两段合并组成, 但整个 $C = ([8, 9] \cup [10, 12]) \in [6, 12]$ 之间, 因此只有一个盒子。当用 $L_i=10$ 度量时, 此时就把 C 分在了[0, 10]和[10, 15]两个区间, 故盒子数为 2。因此, C 的间断有可能增加在某 L_i 时的盒子数, 从而影响其格维数。由 C 的 N_i 可知: 如果格图象不是从参考格空间的坐标原点开始向各个方向延伸, 则不一定满足 $N_i \geq N_{i+1}$ 递减关系式。

此例表明: 格分维不仅与集合的测度有关, 而且与集合在参考空间中的分布有关, 这为今后的空间逻辑运算提供了基础。

读到这里，我们再回头理解前面的“参考格空间”、“参考格测度序列”、“本征格空间”、“本征格维数”等系列概念，就会容易得多。需要说明的是：本文在介绍维数与几何位置的相关性之前，所举范例中的格分维，都是默认为格图象从参考格空间的坐标原点开始延伸的。本节主要在一维参考格空间下，以线段为例进行说明的，但不难理解，对于在任意维的参考格空间之下，相关定义和定理同样成立，所描述的格分维的性质依然存在，稍后就将探讨二维图象的格分维与逻辑运算。

6.2.8 维数变换定律

1. 维数变换定律

在前面的格分维求解步骤中，有两点需要我们注意：①.在求某测度 L_i 对应的盒子数 N_i 时，需要先构造格体积为 $L_i^{D_0}$ 的子空间，然后用子空间去覆盖格图象，从而求得 N_i 。②.在线性回归分析时，选择的横坐标点是 $\ln(1/L_i)$ 、纵坐标点是 $\ln(N_i)$ 。

现在我们来讨论如果构造的子空间格体积不是 $L_i^{D_0}$ 的情况，设格体积为其它数 R_i ，但无论如何可以表示成 $L_i^{D_1}$ 的形式，设格图象的体积为 V ，则：

$$N_{i0} = \frac{V}{L_i^{D_0}}, \quad \ln(N_{i0}) = \ln\left(\frac{V}{L_i^{D_0}}\right) = \ln(V) - D_0 \ln(L_i)$$

$$N_{i1} = \frac{V}{L_i^{D_1}}, \quad \ln(N_{i1}) = \ln\left(\frac{V}{L_i^{D_1}}\right) = \ln(V) - D_1 \ln(L_i)$$

上式表明：对于某个确定的 D_1 ， $\ln(N_i)$ 是 L_i 的函数。

设线性回归的直线分别为 $y = a_0x + b$ 和 $y = a_1x + b$ ，由于上式对于 L 中的任意一个 L_i 均成立，因此 $\ln(V)$ 只影响截距 b 的大小，而 $D_0(D_1)$ 则影响斜率 $a_0(a_1)$ 的大小。

再有，对 L_i ：

$$\begin{aligned} y_{i0} &= \frac{\ln(N_{i0})}{\ln(1/L_i)} = -\frac{\ln(L_i)}{\ln(1/L_i)} \bullet D_0 + \frac{\ln(V)}{\ln(1/L_i)} = D_0 + \frac{\ln(V)}{\ln(1/L_i)} \\ y_{i1} &= \frac{\ln(N_{i1})}{\ln(1/L_i)} = -\frac{\ln(L_i)}{\ln(1/L_i)} \bullet D_1 + \frac{\ln(V)}{\ln(1/L_i)} = D_1 + \frac{\ln(V)}{\ln(1/L_i)} \end{aligned}$$

于是对于变换的 D_1 而言， y_{i1} 与 D_1 是线性关系，这种线性关系对于 L 中的任意一个确定 L_i 值均成立，由此可以得到：

$$\frac{a_0}{a_1} = \frac{D_0}{D_1}$$

对于格体积为其它数 R_i 时，下面讨论如下两个方面。

(1) 关于 $L_i^{D_1}$ 的物理意义。由于 L_i 是测度集 L 中的元素，因此 L_i 反映的是参考空间的格测度。 $L_i^{D_1}$ 可解释为单位边长为 L_i ，维数为 D_1 的子空间。当 $D_1=D_0$ 时，子空间与参考空间在“几何形式上”是相似的，这与最初构造子空间的方法一致。当 $D_1 \neq D_0$ 时，由于维数不等，子空间与参考空间在“几何形式上”不相似，因此与传统分形的自相似概念不相符合。但是上面的计算表明，如果抛弃“子空间与参考空间严格相似”这个要求，整个计算过程仍然可以进行，而且可以求得一个斜率值 a_1 。我们不能忽视这个发现。

【定义】 对上述的 $L_i^{D_1}$ 而言，称其构造的子空间与参考空间是“广义相似”的。在格分维计算过程中，广义相似的子空间也可以用来度量（覆盖）参考空间。

(2) 关于 R 与 L_i 和 D_0 ，在上面的计算中，我们把 R 表示成 $L_i^{D_1}$ 形式，其出发点在于 L_i 不变，而维数变换。另外还可以设定 D_0 不变，测度改变，于是 R 可以改写成 $L_j^{D_0}$ ，由此构造的子空间维数为 D_0 ，边长为 L_j ，子空间与参考空间是严格相似的，于是可以根据前面的方法求出 N_j 等。

$$N_{j0} = \frac{V}{L_j^{D_0}}, \quad \ln(N_{j0}) = \ln\left(\frac{V}{L_j^{D_0}}\right) = \ln(V) - D_0 \ln(L_j)$$

设线性回归的直线为 $y=a_jx+b$ ，由于上式 L 中的任意一个 L_i ，均对应一个 L_j ，因此 $\ln(V)$ 只影响截距 b 的大小，而 L_j 则影响斜率 a_j 的大小。类似前面的计算，可以得到对于子空间格体积为任意 R 时的直线斜率 a_1 。

可以证明：使用(1)和(2)的两种方式所求得 a_1 是相等的。第(2)中方式的隐含变换在于测度的变换，第(1)种方式隐含的变换在于维数的变换。第(1)种方式巧妙地把“基于不同参考维数”的格图象分维的计算结合在一个理论系统之中，它体现了不同维数之间的转换关系。这种关系用如下定理表述为：

【定理】 设同一格图象 G 分别在参考维数为 D_{S0} 和 D_{S1} 的参考空间中的格分维为 D_{G0} 和 D_{G1} ，只要在确定单位格下的格体积相同，则有如下比例关系成立：

$$\frac{D_{G0}}{D_{G1}} = \frac{D_{S0}}{D_{S1}}$$

证明：由前面分析得证。 ■

对于这个定理，它体现了在格分维理论体系下存在一个普遍规律，它为计算几何图形（图象）在任意维，尤其是分数维参考空间的格维数提供了有效的方法，鉴于其普适性与有用性，本文暂且视其为“定律”。

【定义】 称上述定理为“格分维变换定理”，称其中的比例关系为“维数变换定律”，也称“维数比例定律”，简称“比例定律”。

2. 比例定律的意义

比例定律揭示这样一个事实：如果把某几何体 G 放在维数为 D_0 的某参考空间中来观察，其维数为 D_G ；则当把 G 放入维数更大的参考空间中来观察时，其维数 D_G 也将增大；而把 G 放入维数更小的参考空间中来观察时，其维数 D_G 也将减小。

例如，当线段的参考格空间取为本征格空间时，把线段放在数轴上来考察，它是一维的；放在平面上来考察，它是二维的；放在立体空间中考察则是三维的，这与日常经验中的维数概念是一致的。那么，假设把此线段放在科赫曲线上来考察，则其维数等于 1.2619。

对于线段问题，我们还可以换一种比喻来解释。假设在房间中有一个竹竿，如把整个房间投影到地板上的某条边上，则竹竿是一维的；如仅投影到地板上则是二维的；自然，不投影是三维的。此时，假设在某坐标系下，或者通过某种变换，或者加入其它的参数，比如时间，把房间变成是四维的，此时的竹竿也变成四维的。当房间变成 4.5 维数，竹竿也就变成 4.5 维。

比例定律在实际应用中有很大的用处，它不仅能够使得我们可以计算参考空间维数 D_0 是整数情况下的 G 的维数，而且可以利用它轻易求得 D_0 是分数情况下的 G 的维数。例如：在某确定格体积下，已知三分康托集在 1 维参考空间中的维数为 0.6309，则可以直接得到它在 2 维参考空间中的维数是 $0.6309 \times 2 = 1.2618$ ；如果参考空间 $D_0 = 2.5$ ，则此时 $D_G = 0.6309 \times 2.5 = 1.5773$ ；如果取 $D_0 = 0.5$ ，则 $D_G = 0.3655$ 。

利用现有的分形理论，线段是无法度量正方形的。但是，利用格分维理论，由于单位格是有大小之分的，因此它可以用来度量正方形。既可以依照格分维求解步骤来求，也可以利用比例定律来求。因此，格分维能够解释奇特的“皮亚罗曲线”（用一根曲线铺满整个正方形）。

在前面“格坐标轴数”的定义中，由于刚开始介绍格分维理论，我们定义“ $n = \text{ite}\{D|D \text{ 是整数; } [D]+1\}$ ”，那是为了便于理解格坐标的概念，能把格坐标与通常的整数维坐标联系起来。事实上，根据本文的思想，我们完全不必要求 n 为整数，而是直接采用“ $n=D$ ”即可，n 为任意实数。可以想象，n 为分数时，格图象在某

个或某几个坐标轴上的图象要么是间断的，要么是弯曲的，或者既有间断部分，也有弯曲部分。对于坐标轴而言，也可以允许有间断和弯曲。

【定义】 称上述的可以间断和弯曲的坐标轴为“广义格坐标轴”。

至此，我们介绍了格分维理论的基本概念，可以用表达式

$$D_G(F)=f(S, \delta, F)$$

来表示。其中，F 代表待求格分维的几何体，F 可以是相似分形体，也可以是任意普通的几何图形，F 也代表它们的格图象；S 代表参考格空间，S 中主要包括参考格空间自身的维数 D_0 、参考格空间的格体积大小 V_0 ，另外还有几何形状特性等； δ 代表单位格， δ 是有大小（边长）的。D 就是这里的格分维。

6.2.9 格分维与现有分维的比较

现有的分维定义主要有：相似维、容量维（盒子维）、Hausdorff 维、信息维、熵维、拉普拉斯指数组、谱维数等。就基本的分维定义而言主要是：相似维、容量维、Hausdorff 维。信息维、熵维的定义是基本分维定义的扩展和变形。关于拉普拉斯指数组、谱维数，它们主要利用已有的分维公式或求解思想，对时间序列的数据进行分析，反映数据在时间上的分布关系是否具有分形或混沌特性。

这里主要对相似维、容量维、Hausdorff 维、以及格分维进行比较。相对于“现有分维”（本文特指：相似维、容量维、Hausdorff 维），格分维有以下几方面的特点：

- (1) 它们都适用于有自相似特征的分形体：分形集合、分形图象等。此外，Hausdorff 维数适用于任意集合；格分维适用于任意几何图象。
- (2) 现有的分维都定义在“集合论”的基础之上，求分维的过程中涉及到求解公式的极限，在数学理论上具有重要意义，但许多情况下不能求出极限。格分维理论也包含了集合论的思想，但其定义的出发点在于“几何图象”，由此带来的格分维具有更强的可操作性，便于计算机计算。
- (3) 它们都考虑了测度 δ 对维数的影响。现有的几种分维都定义为：在 $\delta \rightarrow 0$ 时的 $\ln(N)/\ln(1/\delta)$ 的极限值；格分维对此完全放开，理论上的 δ 可以是任意值， δ 打破了必须在某范围内取值的思想，原因在于格分维不仅仅针对分形体而言，而是针对一般图形（图象）的维数，现有的几种分维都是格分维在 $\delta \rightarrow 0$ 时的特例。
- (4) 在现有的分形图象的测度选取时，都是凭经验来选取 L_i 的值，这使得不同研究人员对同一分形对象的研究结果有所不同，这不利于学科交流与共同发展。不少人试图阐述这一问题，但目前尚未见到有关选取原则或统一形式的确定测度 L_i 的方法。格分维理论在此方面首次给出了确定测度集 L 的统一方法， L 不再凭经验选取，而是依照步骤计算决定，消除了以往由此而产生的维数不确定性。

(5) 关于“维数盲点”，在线性回归时会碰到“ $\ln(1)=0$ ”的情况，在以往的计算中则无法计算。在格分维理论中，当测度集 L 中只有一个元素（即 1）时也会碰到这种情况，此时不能进行线性回归，格分维对此采用了直接定义的方法来求维数。

(6) 所有现有分维理论都没有考虑“参考空间”对维数的影响，目前还未见到有关研究报告。格分维理论引入了“参考格空间”的概念，包括参考格空间的维数与体积大小等，研究了它对维数的影响情况。从一定程度上讲，格分维是一种“广义相对维”。它更能够符合日常生活中我们观察事物时总会自然与不自然地选择一个“潜在”的参考目标，并以此来衡量那些“显在”的考察目标。格分维理论只不过把这个“潜在的参考目标”揪出来罢了。

(7) 从维数计算的复杂度分析：相似维最简单，但要求严格自相似。容量维（盒子维）其次。格分维要复杂一些，它引入参考空间之后带来了更多的步骤。Hausdorff 维仍然是最难计算的。

(8) 格分维是一种“连续式”的维数，由比例定律可知：对于同一几何体，其格分维随着参考空间的维数变化是连续变化的。而现有维数是“跳跃式”的维数，它们认为：若用与几何体相同维数的“尺”去量度，则可得到确定的维数；若用低于几何体维数的“尺”去量它，结果为无穷大；若用高于几何体维数的“尺”去量它，结果为零。在这里，二者并不矛盾，格分维的“连续”是相对于参考空间的维数 D_0 而言，而现有分维没有考虑参考空间，其“跳跃”是相对于测度 δ 而言。

综上所述，最根本的区别在于：相似维、容量维、Hausdorff 维等都是建立在“测度 δ ”的极限之上的维数；而格分维则是建立在“参考空间 S ”和“测度 δ ”两个参数之上的维数。根据求解过程容易证明：相似维和容量维均是格分维的特例。对于 Hausdorff 维而言，由于它是建立在集合基础之上的，而格分维是建立在图象基础之上的，二者是有一定区别的，前者更适合集合与代数领域的理论研究，后者更适合具体的图象处理应用。但单从“参考空间 S ”和“测度 δ ”的角度来讲，前者是后者在“参考格空间选为本征格空间”以及“单位格大小 $\delta \rightarrow 0$ ”时的特例；后者是前者的继承与扩展，它是一种更为广义的维数。

如果用 S 和 δ 为坐标构造一个平面，则格分维可以布满整个平面（有限的或无限的），而现有分维则是平面中的一个点。如果把 S 分解为维数 D_0 、格体积 V_0 ，则可以用 D_0 、 V_0 、 $\delta \in [0, \infty]$ 为坐标轴构造三维空间的第一象限，格分维可以在整个象限内取值，而现有分维则是其中的特定值。

6.3 康托集的格分维与分形逻辑运算

对康托集的研究一直是分形领域的经典而又热点的课题[KAR097, PERE02]。本节利用格维数理论来研究康托集的分维特性及逻辑运算。

6.3.1 自相似康托集的定义

1. 康托集的定义

康托尔构造了如图 6.3 的集合：选取一个欧氏长度为 L_0 的直线段。将该线段三等分，去掉中间一段，剩下两段。将剩下的两段分别再三等分，各去掉中间一段，剩下四段。将这样的操作继续下去，直至无穷，则得到一个离散的点集。点数趋于无穷多，而欧氏长度趋于零。经无限次操作，达到极限时所得到的离散点集称之为康托集。去掉中间三分之一的康托集称为三分康托集，当 A 趋于无穷时的极限，是一个不可数的无穷集。

为便于叙述，本文称“**M 分 N 康托集**”表示对单位长度进行 M 等分，去掉其中的 $M-N$ 段，保留 N 段，如此进行无限次操作得到的集合。三分二康托集即指通常的三分康托集。

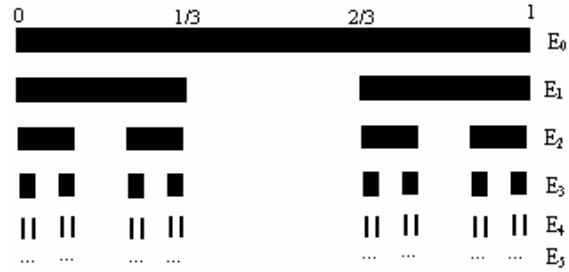


图 6.3 三分康托集

理论上的康托集是严格的自相似的，其自相似分维为： $D = \frac{\ln(N)}{\ln(1/r)}$ 。其中， r 为线段的测度，这里即为相似比， N 为用 r 量得的线段条数。

$$\text{例如：三分二康托集的 } D = \frac{\ln(2)}{\ln(1/(1/3))} = \frac{\ln 2}{\ln 3} = 0.6309.$$

6.3.2 康托集的格图象与格分维

1. 选取参考格空间

给定 N 个并排的方格，把区间 $[0,L]$ 上的经典康托集映射到这 N 个方格中，然后再对这 N 个方格进行取舍操作，选取这 N 个方格为此**康托集的参考格空间**。这里的“映射”是区间 $[0,L]$ 的延拓或收缩，即把区间 $[0,L]$ 进行 N 等分，但每个子区间定义为单位格，其大小为 1×1 ，因此参考格可以看成一个 $N \times 1$ 的图象。例如：对 $[0,1]$ 上的三分康托集，延拓到 $N=27$ 的并排方格中，则第 1—9 个方格相当于区间 $[0, 1/3]$ ，第 10—18 个方格相当于区间 $[1/3, 2/3]$ ，第 19—27 个方格相当于区间 $[2/3, 1]$ 。

这里的参考格空间的体积为 N ，其中单位格就是每个小方格。如果利用相似维来计算，此时相似比 $r=L/N$ 。

2. 格测度

根据格测度的计算方法可知：这里的测度集 L 具有两条重要的性质：

(1) 格测度中的各元素是 N 的因子，即能整除 N，最小的是 1，最大的是 N。

(2) 用格测度 L_i 求取康托集的分维时，对康托集的分级只需要 K_0 步， K_0 为满足公式 $(1/r)^K \geq N$ 的最小 K 值，其中 r 为相似比。可以证明，当 K 取更大时，基于参考格空间 N 的康托集的格维数不会发生变化。

【定义】(临界级数) 上述的 K_0 值，称为基于 N 格的相似比为 r 的康托集的“临界级数”。

3. 格图象

在体积为 N 的参考格空间中，对康托集进行等分取舍时，对去掉的方格涂上白色（表示无图案，程序中用 0 表示），对保留的方格涂上黑色（表示有图案，程序中用 1 表示），称进行临界级数 K_0 次操作之后得到的图象 G_{K_0} 为此康托集的格图象。根据格维数的计算方法，当 N 不是相似比的整数倍时，只要某方格中有部分区间需要保留，则该方格应涂上黑色。

本文采用递归算法，编写程序自动生成各类康托集的格图象，如取参考格 $N=27$ 时，其格图象为：**1 0 1 0 0 0 1 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 1 0 0 0 1 0 1**

4. 康托集的格分维计算

图 6.4(a) 表示了三分二康托集的格分维的变化情况，图 6.4(b) 表示了九分五康托集（相似比为 $1/9$ ，九等分后，去掉偶数段，保留奇数段）的格分维的变化情况。

由图 6.4(a) 可知：在原运算中，当 $N=81, 243, 729$ 时的格图象分维最低，为 0.6309，这与自相似分维相同。容易证明：当参考格体积 N 是相似比倒数 $(1/r)$ 的完全次方时，所求得的分维与自相似分维相同，当 N 不是其完全次方时，格分维大于自相似分维。

由图 6.4(a) 及(b) 可知：当 N 逐渐变大时，原运算格分维的总趋势是降低的，越来越靠近自相似分维，当 $N=10^7$ 时，三分二康托集的格图象分维 $D=0.6457$ ，九分

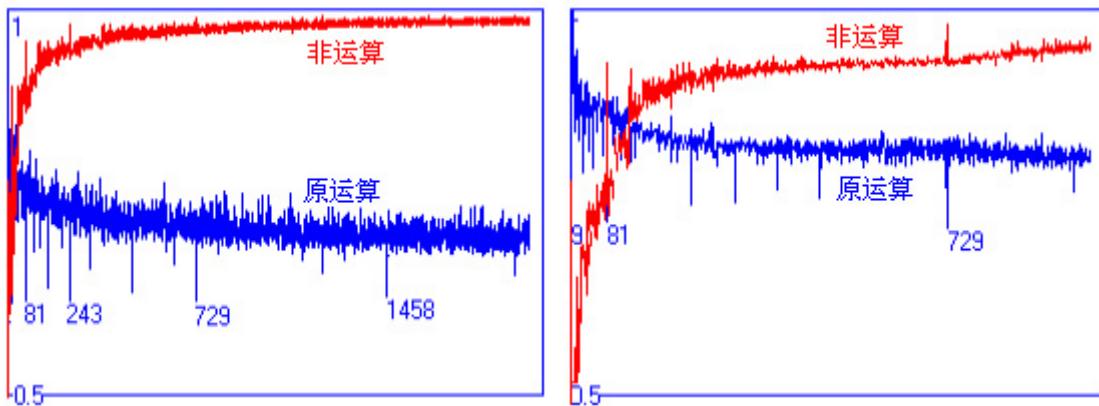


图 6.4(a) 三分二康托集从 1~2000 的格分维

图 6.4(b) 九分五康托集从 1~1000 的格分维

五康托集的格图象分维 $D=0.7465$, 当 N 趋于无穷大时, 格分维的极限就是自相似分维。

计算与分析表明: 经典的自相似分维是本文格分维的特例, 而格分维则可视为是经典自相似分维的扩展。

6.3.3 康托集的分形逻辑运算

根据分形逻辑的连接词运算统一形式 (见 3.3.1 节), 这里定义真值向量的具体语义包括这几个方面: 分形图形即指格图象, 分维向量包括参考格空间的体积 N 、康托集类型、分维值大小。例如: $N=27$ 时的三分康托集 S_c , 其分维为 0.6309, 可以表示为分维向量: $P[27, S_c, 0.6309]$ 。

【范例】 取参考格空间的 $N=25$, P 为三分二康托集, 用 S_p 表示; Q 为五分三康托集 (相似比为 $1/5$, 五等分后, 去掉第二、四段, 保留第一、三、五段), 用 S_q 表示; R 表示二者的原 (非、与、或) 运算结果, 其相关格图象如图 6.5 所示, 其中:

$$\text{原运算: } R(P)=F(P)=[25, S_p, 0.8199]; \quad R(Q)=F(Q)=[25, S_q, 0.6826]$$

$$\text{非运算: } R(\sim P)=NOT(P)=F(G-(F^{-1}(P)))=[25, S_p, 0.7449]$$

$$R(\sim Q)=NOT(Q)=F(G-(F^{-1}(Q)))=[25, S_q, 0.8614]$$

$$\text{与运算: } R(P \wedge Q)=AND(P, Q)=F((F^{-1}(P) \wedge_{OP} F^{-1}(Q)))=[25, \{S_p, S_q\}, 0.4306]$$

$$\text{或运算: } R(P \vee Q)=OR(P, Q)=F((F^{-1}(P) \vee_{OP} F^{-1}(Q)))=[25, \{S_p, S_q\}, 0.9147]$$

由计算结果可知: 二者的与运算比两原运算的结果都小, 而或运算比二者都大, 这体现了分维值与格图象位置的相关性。

【范例】 P 仍为三分康托集, Q 改为九分五康托集, 取参考格 $N=81$, N 是 3 的完全四次方, 也是 9 的完全平方, 此时:

$$\text{原运算: } R(P)=F(P)=[81, S_p, 0.6309]; \quad R(Q)=F(Q)=[81, S_q, 0.7325]$$

$$\text{非运算: } R(\sim P)=NOT(P)=F(G-(F^{-1}(P)))=[81, S_p, 0.9599]$$

$$R(\sim Q)=NOT(Q)=F(G-(F^{-1}(Q)))=[81, S_q, 0.9328]$$

$$\text{与运算: } R(P \wedge Q)=AND(P, Q)=F((F^{-1}(P) \wedge_{OP} F^{-1}(Q)))=[81, \{S_p, S_q\}, 0.6309]$$

$$\text{或运算: } R(P \vee Q)=OR(P, Q)=F((F^{-1}(P) \vee_{OP} F^{-1}(Q)))=[81, \{S_p, S_q\}, 0.7325]$$

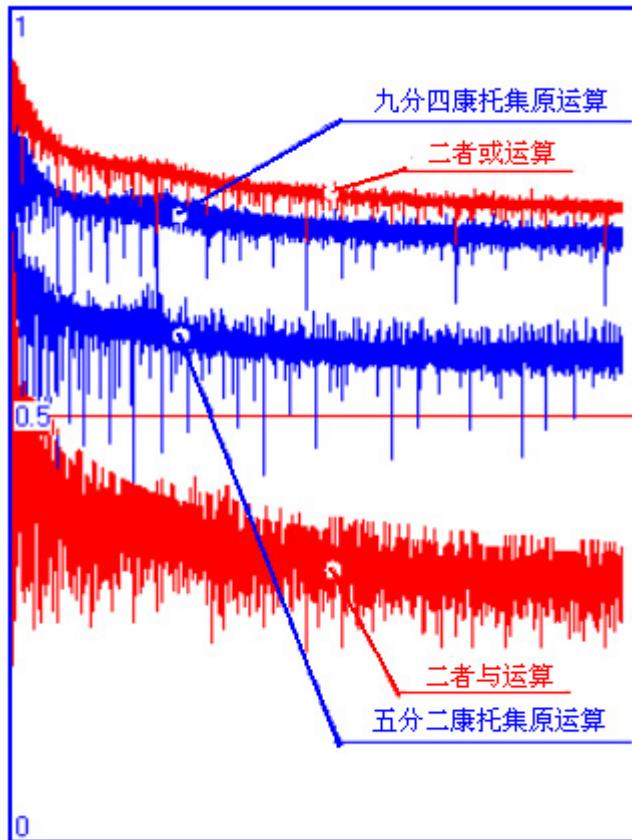
计算结果表明: 与运算的分维值正好是两个原运算分维值的最小值, 或运算的分维值则是两个原运算分维值的最大值。分析表明, 当一个相似比是另一个相似比的完全次方时, 且取舍关系保持一致时 (如都去掉偶数段, 保留奇数段), 则二者的与(或)运算分维值分别是原运算中的最小(大)值。由此可知, “最小最大”的逻辑公式是这里的特例。

图 6.4(a),(b) 分别反映了三分二、九分五康托集的原运算与非运算之间的关系,

对图 6.4 进行局部放大可知：原运算与非运算曲线的凹凸部分正好相反，如果原运算的分维值较大时，其非运算的分维值较小，反之亦反，这符合逻辑非运算的一般形式。当参考格 N 很大，其格分维越接近自相似分维时，其非运算的格分维则越接近于 1.0。在图 6.6 中，反映了五分二康托集与九分四康托集之间的与或运算，由图可见，二者的与运算曲线比两原运算曲线都低，或运算曲线比两原运算曲线都高，这与分形逻辑中的命题和连接词之间的广义相关性所引起的变化是一致的。

a	1 1 1 0 0 1 1 1 1 0 0 0 0 0 0 0 1 1 1 1 0 0 1 1 1
b	1 0 1 0 1 0 0 0 0 0 1 0 1 0 1 0 0 0 0 0 1 0 1 0 1
c	0 0 0 1 1 0 0 0 0 1 1 1 1 1 1 0 0 0 0 1 1 0 0 0
d	0 1 0 1 0 1 1 1 1 1 0 1 0 1 0 1 1 1 1 1 0 1 0 1 0
e	1 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 1
f	1 1 1 0 1 1 1 1 1 0 1 0 1 0 1 1 1 1 1 0 1 1 1

a, c: 三分二康托集的原格图象，补格图象
 b, d: 五分三康托集的原格图象，补格图象
 e, f: 两种托集的“与图象”，“或格图象”

图 6.5 $N=25$ 时康托集的逻辑运算图 6.6 N 从 1~3000 的康托集与或运算

6.3.4 进一步探讨的问题

前面分析得知：康托集的格分维可以看成是参考格体积 N 的函数，自相似分维是当 N 是相似比倒数($1/r$)的完全次方时的特例，当 N 不是其完全次方时，格分维大于自相似分维。从动力学的角度来分析，自相似分维可以看成是连续参考格区间上的“分维陷阱”。图象模拟初步表明：“这种分维陷阱可以看成是格空间中的一种混沌吸引子”，但目前还未从数学理论上来证实。

由于自相似分维只能适用于理想的严格自相似分形对象，在求包括豪斯道夫维在内的数学集合的测度时需要求其极限，而实际问题中往往并非严格的自相似，而且求极限仅是理论上的存在，实际中往往不可操作。然而，如果利用格图象来分析这些问题，可以对不同类型的集合构造格图象，一个典型的问题是多重分形，当不同区间的相似比不同时，无需繁琐的求其谱维数，而是可以在一个适当的参考格中来构造其格图象，然后直接用通用的算法求其分维。因此，格图象的研究目的之一在于统一各类测度的分维。

本节的康托集分维在 $[0,1]$ 中，参考空间的维数取为 1。我们可以推广到二维、多维几何图象。

6.3.5 几何图象的格分维与逻辑运算

类似于康托集的分形逻辑运算，对于任意几何图象，可以利用 3.3.1 节的统一形式来定义其分形逻辑运算。

略写 h 、 k ，则各连接词的运算为：

$$\text{原运算: } ORG(P) = P = F(F^{-1}(P))$$

$$\text{非运算: } NOT(P) = \sim P = F(\sim_{OP} F^{-1}(P))$$

$$\text{与运算: } AND(P,Q) = F((F^{-1}(P) \wedge_{OP} F^{-1}(Q)))$$

$$\text{或运算: } OR(P,Q) = F((F^{-1}(P) \vee_{OP} F^{-1}(Q)))$$

$$\text{蕴涵运算: } I(P,Q) = F((F^{-1}(P) \rightarrow_{OP} F^{-1}(Q)))$$

$$\text{等价运算: } E(P,Q) = F((F^{-1}(P) \leftrightarrow_{OP} F^{-1}(Q)))$$

$$\text{平均运算: } M(P,Q) = F((F^{-1}(P) \oplus_{OP} F^{-1}(Q)))$$

$$\text{组合运算: } C(P,Q) = F((F^{-1}(P) \odot_{OP} F^{-1}(Q)))$$

其中， P 的真值向量表示为 $P < S, V, \delta, D >$ ： S 表示 P 所在的参考空间， V 表示 P 在 S 中的位置矢量， δ 表示求 D 时选用的单位格测度， D 表示 P 在 S 中的属性值。 S, V, δ, D 既可以是单个数值，也可以是某个集合，其最终目的在于描述清楚所讨论的问题。

连接词的具体运算模型详见 7.3 节。如果把“任意几何图象”限定在“计算机图象”之内，则由于计算机图象的最小分辨率是一个象素，故真值向量中的 δ 通常

取一个象素。此时的与运算可简化为：对两个原图象进行扫描，如对应象素点的均为黑点，则“与图象”相应象素点的亦为黑点，否则为白点。其或与运算可简化为：对两个原图象进行扫描，如对应象素点中有一个为黑点，则“或图象”相应象素点亦为黑点，否则为白点。

下面以二维图象为例进行说明。其中，对于真值向量 $P<S, V, \delta, D>$ 而言，参考空间 S 为 256×192 的二维有界面， V 都从 S 的左上角，也即 $(0,0)$ 点开始， δ 均取一个象素。由于整个计算过程中 S, V, δ 相同，故书写真值向量时不再写出 S, V, δ ，而直接用格分维 D 表示。

【范例】 图 6.7 为图象压缩中常用的范例图象，(a)为原图象，(b)为补图象，其格分维计算为：

$$\text{原运算: } ORG(G)=D(G)=1.61905$$

$$\text{非运算: } NOT(G)=D(\sim_{op} G)=1.8247$$

在经典逻辑以及模糊逻辑中，非运算定义为： $N(x)=1-x$ ，因此原运算与非运算之和等于 1；在泛逻辑中，非运算要考虑 k 值的影响，其原运算与非运算之和不一定等于 1。同理，在二维图象的分形逻辑运算中，格分维反映的是几何图象的复杂程度大小，其原运算与非运算之和不一定等于 2，但是满足“如果原运算值越小，则其非运算值越大”这一逻辑规律（见例 2），这与本文的计算结果是一致的。

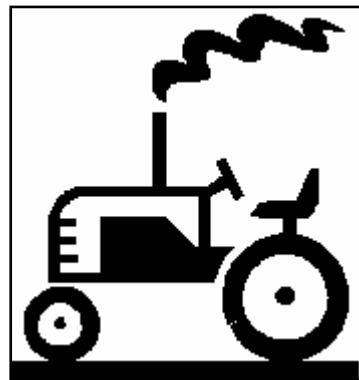


图 6.7(a) 原图像



图 6.7(b) 补图像

【范例】 为了直观地说明问题，所选图 6.8 为“上、下”两个汉字对应的二维图象。参考空间为二维平面，取高度(H)为 240 象素、宽度(W)为 200 象素的图象区域进行计算。(a)、(b)为原图象，(c)为与图象，(d)为或图象。设 G_1 代表“上”， G_2 代表“下”，其分形维数计算为：

$$\text{原运算: } ORG(G_1)=D(G_1)=1.5738; \quad ORG(G_2)=D(G_2)=1.5704$$

$$\text{非运算: } NOT(G_1)=D(\sim_{op} G_1)=1.8736; \quad NOT(G_2)=D(\sim_{op} G_2)=1.8743$$

$$\text{与运算: } AND(G_1, G_2)=D(G_1 \wedge_{op} G_2)=1.5543$$

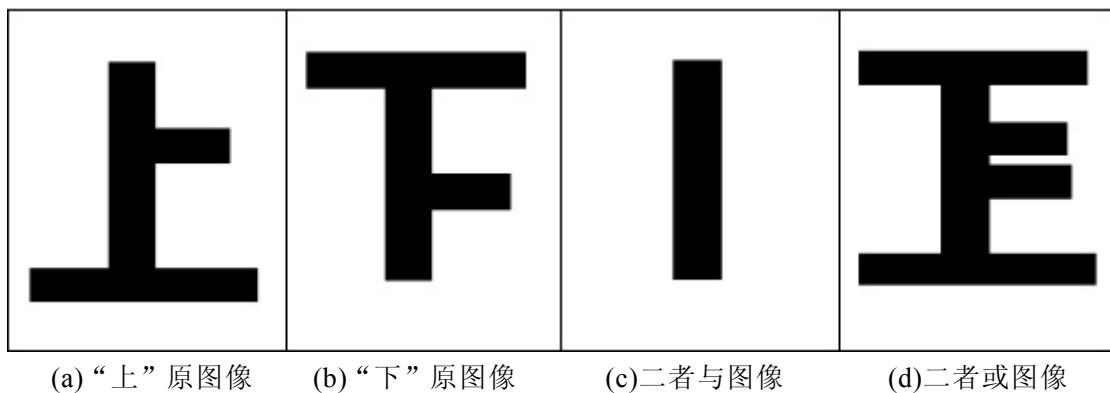


图 6.8 “上、下” 两个几何图像的与或运算模型

或运算: $OR(G_1, G_2) = D(G_1 \vee_{OP} G_2) = 1.6565$

在经典逻辑以及模糊逻辑中, 与运算定义为二者的最小值; 或运算定义为二者最大值。泛逻辑学指出: 这种“最小最大”运算模型仅是实际问题的特殊情况, 而在实际生活, 尤其复杂系统中, 参与逻辑运算的命题之间往往存在广义相关性, 各个命题并不一定是相互正交并独立无关的。在通常情况下, 其与(或)运算值并不等于二者中的最小(大)值。在此例中, 与运算值 1.5543 小于原运算值 1.5738 和 1.5704; 或运算值 1.6565 大于原运算值 1.5738 和 1.5704, 这体现了两个图象在几何位置上的相关性。

6.4 小结

本章工作主要涉及两个方面: 一是提出任意几何图形(图象)的格分维理论; 二是利用格分维理论研究了康托集和任意几何图象的分形逻辑运算。

(1) 分形理论已经在计算机图象处理中得到了良好的应用, 但是其应用中的“测度选择”仍然具有很强的经验性, 这致使所求得的分维具有较大的主观不确定性。本章工作在于提出了一种统一的基于“参考空间”与“单位格”的分形维数求解方法, 从定义出发, 力求在理论上消除分维的主观不确定性, 本文暂称其为“格分维理论”。它是一种广义的相对维。

(2) 本章提出的格分维理论, 以及利用格分维理论对康托集的研究, 对于相关研究者而言, 在理论上和应用上均有一定的指导意义, 至少是提供了一种新的思想方法。本文在叙述中力求平实易懂, 略去了一些较为复杂的数学公式, 并辅以范例加以分析。

(3) 目前, 格分维理论已经在数学理论和分形图象领域得到一定应用, 部分工作已经刊出和有待刊出。本文在第九章的应用研究中将利用格分维理论来研究汉字的分形特性与复杂特性, 详见 9.2 节。

第七章 广义 T/S 范数与连接词运算模型

广义 T/S 范数是分形逻辑的与/或连接词运算模型的数学基础。本章首先给出广义 T/S 范数的概念，研究了相关的性质，并在此基础上建立了分形逻辑的各连接词运算模型，给出了相关的运算模型变化图。

三角范数理论中的 N、T、S 范数（本文合称 NTS 范数）分别是泛逻辑学中非、与、或运算的数学模型，相关的研究可参见文献[HEWL01, NOPE88, IANC97, JENE20]，由于不同研究者的出发点不同，研究方法与所得结果不尽相同。泛逻辑学则在 NTS 范数的基本思想下，结合相关性推理的研究成果，把 NTS 范数定义为在区间 $[0,1]$ 之上满足若干性质的函数。进一步地，在分形逻辑中，为了研究在任意区间 $[a,b]$ 上实现连续值基的推理模型，对泛逻辑学的 NTS 范数定义进行了扩展与完善，并得到一些通用的性质。泛逻辑中的 NTS 范数及各运算模型是本文研究的特例。

7.1 广义 T/S 范数的一般原理

7.1.1 广义 T 范数的概念与性质

1. 广义 T 范数的定义

设 $T(x, y)$ 是 $[a, b]^2 \rightarrow [a, b]$ 的二元运算， $x, y, z \in [a, b]$ ，关于 $T(x, y)$ 有以下条件：

边界条件T1: $T(a, y) = a, T(b, y) = y;$

单调性T2: $T(x, y)$ 关于 x, y 单调增；

连续性T3: $T(x, y)$ 关于 x, y 连续；

结合律T4: $T(T(x, y), z) = T(x, T(y, z));$

交换律T5: $T(x, y) = T(y, x);$

幂小性T6: $x \in (a, b), T(x, x) < x.$

【定义】 满足条件T1, T2和T5的 $T(x, y)$ 称为 $[a, b]$ 上的广义弱T范数；

弱T范数如果满足条件T4，则称为 $[a, b]$ 上的广义T范数。

【定义】 T范数如果满足条件T3，则称为 $[a, b]$ 上的广义连续T范数。

【定义】 连续T范数如果满足条件T6，则称为 $[a, b]$ 上的广义阿基米德型T范数。

【定义】 阿基米德型T范数如在 (a, b) 上严格单调增，则称为 $[a, b]$ 上的广义严格T范数；否则有 $T(x, y) = a$ 的平台区，称为 $[a, b]$ 上的广义幂零T范数。

2. 广义 T 范数的性质

1) 封闭性 弱 T 范数 $T(x, y) \in [a, b]$ 。

证明: 由条件 T1 和 T2 知, $a \leq T(a, a) \leq T(x, y) \leq T(b, b) \leq b$, 也即 $T(x, y) \in [a, b]$. 故此定理成立。 ■

2) 上界性 弱 T 范数 $T(x, y) \leq \min(x, y)$ 。

证明: 由条件 T1 和 T2 知, $T(x, y) \leq T(x, b) \leq x$, 且 $T(x, y) \leq T(b, y) = y$, 也即 $T(x, y) \leq \min(x, y)$. 故此定理成立。 ■

3) 兼容性 弱 T 范数与二值逻辑的与运算兼容。

证明: 当 $[a, b]$ 为区间 $[0, 1]$ 时, $T(0, 0) = 0$, $T(0, 1) = 0$, $T(1, 0) = 0$, $T(1, 1) = 1$, 即二值逻辑的与运算模型是弱 T 范数在基空间为 $\{0, 1\}$ 时的特例。 ■

4) 与幂律 弱 T 范数 $T(x, x) \leq x$.

5) 零级补余律 弱 T 范数 $T(x, b+a-x) \leq (a+b)/2$.

6) 泛与性 在弱 T 范数中, 如果 $T(x, y) \geq c \in [a, b]$, 则 $x \geq c$ 且 $y \geq c$ 。

7) 幂等条件 弱 T 范数 $T(x, x) = x$, iff $T(x, y) = \min(x, y)$.

证明: 充分性: 如果 $T(x, y) = \min(x, y)$, 则 $T(x, x) = x$;

必要性: 如果弱 T 范数 $T(x, x) = x$, 则 $\min(x, y) = T(\min(x, y), \min(x, y)) \leq T(x, y)$:

又 $T(x, y) \in \min(x, y)$, 所以 $T(x, y) = \min(x, y)$ 。 ■

8) 一级补余律 如果 $N(x, l)$ 是 N 范数, 则弱 T 范数 $T(x, N(x, l)) \leq l$ 。

证明: 由于 $x \leq l$ 时, $N(x, l) \geq l$; $x \geq l$ 时, $N(x, l) \leq l$, 而 $T(x, y) \leq \min(x, y)$, 所以 $T(x, N(x, l)) \leq l$ 。 ■

9) 保序性 1 如果 $x \leq x'$, $y \leq y'$, 则弱 T 范数 $T(x, y) \leq T(x', y')$ 。

证明: 由条件 T2 知 $T(x, y) \leq T(x', y) \leq T(x', y')$, 故定理成立。 ■

10) 保序性 2 如果 $x \leq z$, $y \leq z$, 则弱 T 范数 $T(x, y) \leq z$ 。

上述弱 T 范数的性质全部适用于 T 范数。

11) 扩展性 T 范数可以推广到多元运算, $T(T(x, y), z) = T(x, T(y, z)) = T(x, y, z)$ 。

12) 极大性 $T(x, y) = \min(x, y)$ 是最大的 T 范数。

证明: 由于弱 T 范数 $T(x, y) \leq \min(x, y)$, 即 $T(x, y) = \min(x, y)$ 是最大的弱 T 范数, 而且 $\min(x, \min(y, z)) = \min(\min(x, y), z) = \min(x, y, z)$ 满足 T 范数的结合律 T4, 所以 $T(x, y) = \min(x, y)$ 是最大的 T 范数。 ■

13) 极小性 $T(x, y) = \text{ite}\{\min(x, y) | \max(x, y) = b; a\}$ 是最小的 T 范数。

证明: ① 由于 $T(a, y) = a$, $T(b, y) = y$, 满足 T 范数的边界条件 T1;

② $T(x, y)$ 关于 x, y 单调增, 满足 T 范数的单调性 T2;

③ $T(x, T(y, z)) = T(T(x, y), z) = T(x, y, z)$, 满足 T 范数的结合律 T4;

④ $T(x, y) = T(y, x)$, 满足 T 范数的交换律 T5。

所以 $T(x, y)$ 是 T 范数。

而任何 T 范数 $T(x, y)$ 都满足 $T(x, y) \geq a$, $T(b, y) = y$

$T(x, y) = \text{ite}\{\min(x, y) | \max(x, y) = b; a\}$

是其中的最小者, 所以此性质成立。 ■

7.1.2 广义 S 范数的概念与性质

1. 广义 S 范数的定义

设 $S(x, y)$ 是 $[a, b]^2 \rightarrow [a, b]$ 的二元运算, $x, y, z \in [a, b]$, 关于 $S(x, y)$ 有以下条件:

边界条件S1: $S(a, y) = y, S(b, y) = b$;

单调性S2: $S(x, y)$ 关于 x, y 单调增;

连续性S3: $S(x, y)$ 关于 x, y 连续;

结合律S4: $S(S(x, y), z) = S(x, S(y, z))$;

交换律S5: $S(x, y) = S(y, x)$;

幂大性S6: $x \in (a, b), S(x, x) > x$.

【定义】 满足条件S1、S2、S5的 $S(x, y)$ 称为 $[a, b]$ 上的广义弱S范数;

弱S范数如果满足条件S4, 则是 $[a, b]$ 上的广义S范数。

【定义】 S范数如果满足条件S3, 则称为 $[a, b]$ 上的广义连续S范数。

【定义】 连续S范数如果满足条件S6, 则称为 $[a, b]$ 上的广义阿基米德型S范数。

【定义】 阿基米德型S范数如在 (a, b) 上严格单调增, 则称为 $[a, b]$ 上的广义严格S范数; 否则有 $S(x, y) = b$ 的平台区, 称为广义幂零S范数。

2. 广义 S 范数的性质

1) 封闭性 弱 S 范数 $S(x, y) \in [a, b]$ 。

证明: 由条件 S1 和 S2 知, $a \leq S(a, a) \leq S(x, y) \leq S(b, b) \leq b$, 也即 $S(x, y) \in [a, b]$ 。故此定理成立。 ■

2) 下界性 弱 S 范数 $S(x, y) \geq \max(x, y)$ 。

证明: 由条件 S1 和 S2 知, $S(x, y) \geq S(x, a) = x$, 且 $S(x, y) \geq S(a, y) = y$, 也即 $S(x, y) \geq \max(x, y)$ 。故此定理成立。 ■

3) 兼容性 弱 S 范数与二值逻辑的或运算兼容。

证明: 当 $[a, b]$ 为区间 $[0, 1]$ 时, $S(0, 0) = 0, S(0, 1) = 1, S(1, 0) = 1, S(1, 1) = 1$, 即二值逻辑的或运算模型是弱 T 范数在基空间为 $\{0, 1\}$ 时的特例。 ■

4) 或幂律 弱 S 范数 $S(x, x) \geq x$ 。

- 5) 零级补余律 弱 S 范数 $S(x, b+a-x) \geq (a+b)/2$ 。
- 6) 泛或性 在弱 S 范数中, 如果 $S(x, y) \leq c \in [a, b]$, 则 $x \leq c$ 且 $y \leq c$ 。
- 7) 幂等条件 弱 S 范数 $S(x, x) = x$, iff $S(x, y) = \max(x, y)$ 。
- 证明: 充分性: 如果 $S(x, y) = \max(x, y)$, 则 $S(x, x) = x$;
- 必要性: 如弱 S 范数 $S(x, x) = x$, 则 $\max(x, y) = S(\max(x, y), \max(x, y)) \geq S(x, y)$;
- 又 $S(x, y) \geq \max(x, y)$, 所以 $S(x, y) = \max(x, y)$. ■
- 8) 一级补余律 如果 $N(x, l)$ 是 N 范数, 则弱 S 范数 $S(x, N(x, l)) \geq l$ 。
- 证明: 由于 $x \leq l$ 时, $N(x, l) \geq l$; $x \geq l$ 时, $N(x, l) \leq l$, 而 $S(x, y) \geq \max(x, y)$, 所以 $S(x, N(x, l)) \geq l$. ■
- 9) 保序性 1 如果 $x \leq x'$, $y \leq y'$, 则弱 S 范数 $S(x, y) \leq S(x', y')$ 。
- 证明: 由条件 S2 知 $S(x, y) \leq S(x', y) \leq S(x', y')$, 故定理成立。■
- 10) 保序性 2 如果 $x \geq z$, $y \geq z$, 则弱 S 范数 $S(x, y) \geq z$ 。
- 上述弱 S 范数的性质全部适用于 S 范数。
- 11) 扩展性 S 范数可以推广到多元运算, $S(S(x, y), z) = S(x, S(y, z)) = S(x, y, z)$ 。
- 12) 极小性 $S(x, y) = \max(x, y)$ 是最小的 S 范数。
- 证明: 由于弱 S 范数 $S(x, y) \geq \max(x, y)$, 即 $S(x, y) = \max(x, y)$ 是最小的弱 S 范数, 而且 $\max(x, \max(y, z)) = \max(\max(x, y), z) = \max(x, y, z)$ 满足 S 范数的结合律 T4, 所以 $S(x, y) = \max(x, y)$ 是最小的 S 范数。■
- 13) 极大性 $S(x, y) = \text{ite}\{\max(x, y) | \min(x, y) = a; b\}$ 是最大的 S 范数。
- 证明: ① 由于 $S(a, y) = a$, $S(b, y) = y$, 满足 S 范数的边界条件 S1;
- ② $S(x, y)$ 关于 x, y 单调增, 满足 S 范数的单调性 S2;
- ③ $S(x, S(y, z)) = S(S(x, y), z) = S(x, y, z)$, 满足 S 范数的结合律 S4;
- ④ $S(x, y) = S(y, x)$, 满足 S 范数的交换律 S5。
- 所以 $S(x, y)$ 是 S 范数。
- 而任何 S 范数 $S'(x, y)$ 都满足 $S'(x, y) \leq b$, $S'(a, y) = y$
 $S(x, y) = \text{ite}\{\max(x, y) | \min(x, y) = a; b\}$
- 是其中的最大者, 所以此性质成立。■

7.1.3 广义 T/S 性生成元的概念与类型

1. 广义 T/S 性生成元的概念

在特征空间 E 中, 对任意分明子集 X、Y ∈ E, 如果它们之间的广义相关性是最大相斥, $h=0$, 且模糊测度 $u(X)=x$, $u(Y)=y$ 是精确的测度, 也即没有误差, 此时 k

$=0$, 于是可以得到任意区间 $[a, b]$ 上的中心 T 范数和中心 S 范数:

$$T(x, y) = \max(a, x+y-b)$$

$$S(x, y) = \min(b, x+y-a)$$

当 k 偏离0时, 需要用定义在 $[a, b]$ 上的连续的严格单调一元函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 来双向修正它们对逻辑运算的影响:

$$f(T(x, y)) = \max(a, f(x) + f(y) - b)$$

$$T(x, y) = f^{-1}(\max(a, f(x) + f(y) - b))$$

$$g(S(x, y)) = \min(b, g(x) + g(y) - a)$$

$$S(x, y) = g^{-1}(\min(b, g(x) + g(y) - a))$$

【定义】(广义 T 性生成元) 如果 $f(x)$ 是定义在 $[a, b]$ 上的连续严格单调一元函数, $f(b) = b$, 且由 $f(x)$ 生成的以下二元运算

$$T(x, y) = f^{-1}(\max(a, f(x) + f(y) - b))$$

是 $[a, b]$ 上的广义阿基米德型 T 范数, 则称 $f(x)$ 为“广义 T 性生成元”。

【定义】对于广义 T 性生成元 $f(x)$,

如 $f(a) \rightarrow \pm\infty$, 则称为“广义严格 T 性生成元”;

如 $f(a)$ 为有限值, 称为“广义幂零 T 性生成元”。

例如:

$\phi(x) = x$ 生成有界算子: $T(x, y) = \max(a, x+y-b)$, 可以证明 $T(x, y)$ 是 $[a, b]$ 上的广义阿基米德型 T 范数, 且 $\phi(a) = a$, 因此 $\phi(x)$ 是 $[a, b]$ 上的广义幂零 T 性生成元。

再如:

$f(x) = 2 - 1/x$ 生成 Hamacher 算子 [FOKE94]: $T(x, y) = xy/(x+y-xy)$, 可证 $T(x, y)$ 是 $[0, 1]$ 上的标准阿基米德型 T 范数, 由于 $f(0) = -\infty$, 故 $f(x)$ 是 $[0, 1]$ 上的标准严格 T 性生成元。

【定义】(广义 S 性生成元) 如果 $g(x)$ 是定义在 $[a, b]$ 上的连续严格单调一元函数, $g(a) = a$, 如果由 $g(x)$ 生成的以下二元运算

$$S(x, y) = g^{-1}(\min(b, g(x) + g(y) - a))$$

是 $[a, b]$ 上的广义阿基米德型 S 范数, 则称 $g(x)$ 为“广义 S 性生成元”。

【定义】对于广义 S 性生成元 $g(x)$,

如 $g(b) \rightarrow \pm\infty$, 则称为“广义严格 S 性生成元”;

如 $g(b)$ 为有限值, 称为“广义幂零 S 性生成元”。

2. 广义 T/S 性生成元的类型

根据广义 T/S 性生成元的定义，存在多个 $f(x)$ 和 $g(x)$ 。根据目前的研究，可以分为两种基本类型：“自守增型”和“极限减型”，如图 7.1、图 7.2 所示。

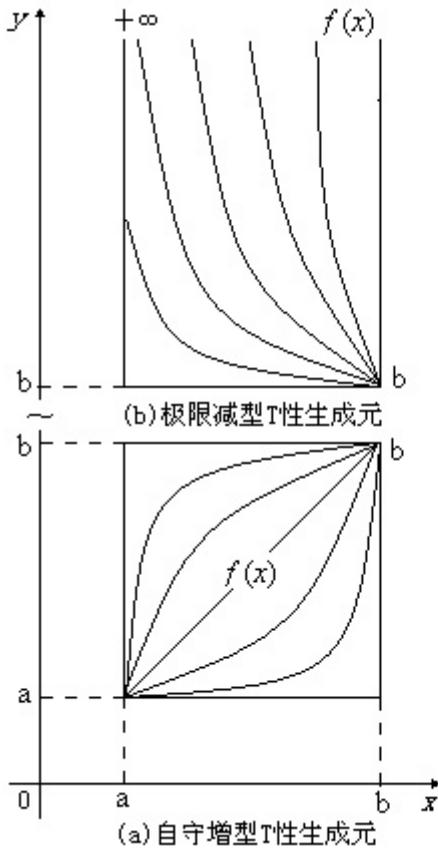


图 7.1 广义 T 性生成元的类型

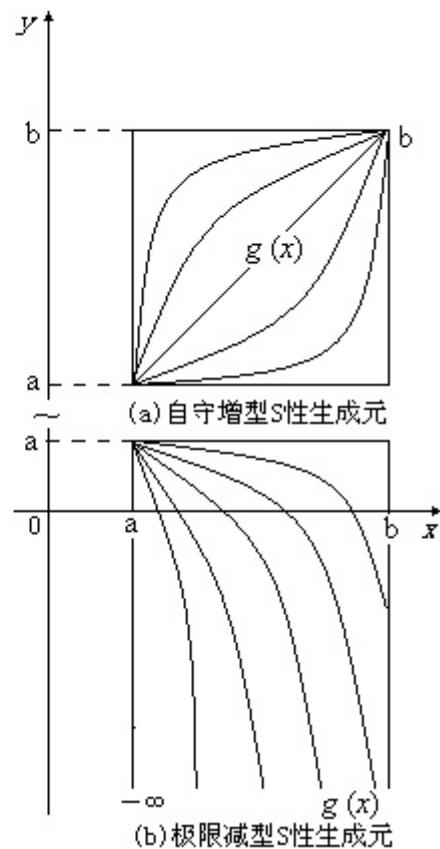


图 7.2 广义 S 性生成元的类型

(1) T 性生成元的类型

对于满足广义 T 性生成元定义的函数 $f(x)$ 而言：

① 自守增型是指：如果 $f(x)$ 是单调增函数，且满足 $f(a)=a, f(b)=b$ ，即在 $[a, b]$ 上是自守函数，则 $f(x)$ 一定可以生成广义阿基米德型 T 范数，因此 $f(x)$ 必是广义 T 性生成元。

② 极限减型是指：如果 $f(x)$ 是单调减函数，除满足 $f(b)=b$ 外，且当 x 从 $a+$ 趋于 a 时 $f(a)=+\infty$ ，即 $f(a)$ 是无限值，则 $f(x)$ 可以作为广义 T 性生成元生成广义阿基米德型 T 范数。

有关这两种类型的 T 性生成元如图 7.1 所示，其详细证明请参见稍后的“广义 T 范数生成定理”的证明。

(2) S 性生成元的类型

对于满足广义 S 性生成元定义的函数 $g(x)$ 而言：

① 自守增型是指：如果 $g(x)$ 是单调增函数，且满足 $g(a)=a$, $g(b)=b$ ，即在 $[a, b]$ 上是自守函数，则 $g(x)$ 一定可以生成广义阿基米德型 T 范数，因此 $g(x)$ 必是广义 T 性生成元。

② 极限减型是指：如果 $g(x)$ 是单调减函数，除满足 $g(a)=a$ 外，且当 x 从 $b-$ 趋于 b 时 $g(b)=-\infty$ ，即 $g(b)$ 是无限值，则 $g(x)$ 可以作为广义 S 性生成元生成广义阿基米德型 S 范数。

有关这两种类型的 S 性生成元如图 7.2 所示，其详细证明请参见稍后的“广义 S 范数生成定理”的证明。

7.1.4 广义 T/S 范数生成定理

1. 广义 T 范数生成定理

【定理】(广义 T 范数生成定理) 对于定义在 $[a, b]$ 上的连续的严格单调一元函数 $f(x)$ ，如 $f(b)=b$ ，且满足以下两个条件之一：

- ① 如 $f(x)$ 是增函数，且 $f(a)=a$ ；
- ② 如 $f(x)$ 是减函数，且当从 x 从 a_+ 趋于 a 时 $f(a) \rightarrow +\infty$ ；

则 $f(x)$ 可作为广义 T 性生成元，即由其生成的算子：

$$T(x, y) = f^{-1}(\max(a, f(x) + f(y) - b))$$

是广义阿基米德型 T 范数。

证明：分别对①、②两种情况加以证明。

① 设 $f(x)$ 是连续的严格单调增的一元函数， $f^{-1}(x)$ 存在，并有：

1) 由 $f(a)=a$, $f(b)=b$ 知 $a \leq f(y)$, $f(y) \leq b$ ，故

$$T(a, y) = f^{-1}(\max(a, f(a) + f(y) - b)) = f^{-1}(a) = f^{-1}(f(a)) = a$$

$$T(b, y) = f^{-1}(\max(a, f(b) + f(y) - b)) = f^{-1}(\max(a, f(y))) = f^{-1}(f(y)) = y$$

$T(x, y)$ 满足 T 范数的边界条件 T1。

2) 由 $f(x)$ 的单调性知， $T(x, y)$ 满足 T 范数的单调性 T2。

3) 由 $f(x)$ 的连续性知， $T(x, y)$ 满足 T 范数的连续性 T3。

4) 由单调增知 $a \geq a + f(x) - b$ ，由加法的结合律有

$$T(T(x, y), z) = f^{-1}(\max(a, \max(a, f(x) + f(y) - b) + f(z) - b))$$

$$= f^{-1}(\max(a, a + f(z) - b, f(x) + f(y) + f(z) - 2b))$$

$$= f^{-1}(\max(a, f(x) + f(y) + f(z) - 2b))$$

$$T(x, T(y, z)) = f^{-1}(\max(a, f(x) + \max(a, f(y) + f(z) - b) - b))$$

$$= f^{-1}(\max(a, a + f(x) - b, f(x) + f(y) + f(z) - 2b))$$

$$= f^{-1}(\max(a, f(x) + f(y) + f(z) - 2b))$$

因此 $T(T(x, y), z) = T(x, T(y, z))$ ，满足 T 范数的结合律 T4。

5) 由加法交换律知， $T(x, y) = T(y, x)$ ，满足 T 范数的交换律 T5。

6) 由 $f(x)$ 的严格单调增知, 当 $x \in (a, b)$ 时, $a < f(x) < b$, 所以

$$T(x, x) = f^{-1}(\max(a, f(x) + f(x) - b)) \leq f^{-1}(\max(a, f(x))) < f^{-1}(f(x)) = x$$

$T(x, y)$ 满足 T 范数的幂小性 T6。

所以 $T(x, y)$ 是广义阿基米德型 T 范数, 且当 $f(x) + f(y) - b < a$ 时有 $T(x, y) = a$, 故是广义幂零 T 范数。

② $f(x)$ 是连续的严格单调减的一元函数, $f^{-1}(x)$ 存在。由于 a 是 $[a, b]$ 区间的下限, $x \geq a$, 故 x 总是从 a_+ 趋于 a , 可以直接记 $f(a) \rightarrow +\infty$ 。

当 c 为有限数时, $f(a) + c = f(a) \rightarrow +\infty$, 这一点在证明中很有用。

与自守增型比较, 第 2)、3)、5) 条的证明相同, 下面证明第 1)、4)、6) 条。

1) 由 $f(a) \rightarrow +\infty$, $f(b) = b$ 知, $f(y) \geq b > a$, 且

$$\begin{aligned} T(a, y) &= f^{-1}(\max(a, f(a) + f(y) - b)) = f^{-1}(\max(f(a) + f(y) - b)) \\ &= f^{-1}(+\infty) = a \end{aligned}$$

$$T(b, y) = f^{-1}(\max(a, f(b) + f(y) - b)) = f^{-1}(\max(a, f(y))) = f^{-1}(f(y)) = y$$

$T(x, y)$ 满足 T 范数的边界条件 T1。

4) 由单调减知 $a < b \leq f(x) + f(y) - b$, 由加法的结合律有

$$\begin{aligned} T(T(x, y), z) &= f^{-1}(\max(a, \max(a, f(x) + f(y) - b) + f(z) - b)) \\ &= f^{-1}(\max(a, f(x) + f(y) + f(z) - 2b)) \\ &= f^{-1}(f(x) + f(y) + f(z) - 2b) \\ T(x, T(y, z)) &= f^{-1}(\max(a, f(x) + \max(a, f(y) + f(z) - b) - b)) \\ &= f^{-1}(\max(a, f(x) + f(y) + f(z) - 2b)) \\ &= f^{-1}(f(x) + f(y) + f(z) - 2b) \end{aligned}$$

因此 $T(T(x, y), z) = T(x, T(y, z))$, 满足 T 范数的结合律 T4。

6) 由于 $f(x)$ 严格单调减, 当 $x \in (a, b)$ 时, $f(x) > b > a$, 且 $f^{-1}(x)$ 也单调减, 故

$$T(x, x) = f^{-1}(\max(a, f(x) + f(x) - b)) = f^{-1}(f(x) + f(x) - b) < f^{-1}(f(x)) = x$$

$T(x, y)$ 满足 T 范数的幂小性 T6。

所以 $T(x, y)$ 是广义阿基米德型 T 范数, 且在 (a, b) 上严格单调, 故是广义严格 T 范数。

由①、②两种情况的证明可知本定理成立。①中的 $f(x)$ 是自守增型 T 性生成元, ②中的 $f(x)$ 是极限减型 T 性生成元, 它们均可以生成广义阿基米德型 T 范数, 并称本定理为“广义 T 范数生成定理”, 简称“T 范数生成定理”。 ■

2. 广义 S 范数生成定理

【定理】(广义 S 范数生成定理) 对于定义在 $[a, b]$ 上的连续的严格单调一元函数 $g(x)$, 如 $g(a) = a$, 且满足以下两个条件之一:

① $g(x)$ 是增函数, 且 $g(b) = b$;

② 如 $g(x)$ 是减函数, 且当从 x 从 b_- 趋于 b 时 $g(b) \rightarrow -\infty$;
则 $g(x)$ 可作为广义 S 性生成元, 即由其生成的算子:

$$S(x, y) = g^{-1}(\min(b, g(x) + g(y) - a))$$

是广义阿基米德型 S 范数。

证明: 分别对①、②两种情况加以证明。

① 设 $g(x)$ 是连续的严格单调增的一元函数, $g^{-1}(x)$ 存在, 并有:

1) 由 $g(a) = a$, $g(b) = b$ 知 $a \leq g(y)$, $g(y) \leq b$, 故

$$S(a, y) = g^{-1}(\min(b, g(a) + g(y) - a)) = g^{-1}(g(y)) = y$$

$$S(b, y) = g^{-1}(\min(b, g(b) + g(y) - a)) = g^{-1}(b) = g^{-1}(g(b)) = b$$

$S(x, y)$ 满足 S 范数的边界条件 S1。

2) 由 $g(x)$ 的单调性知, $S(x, y)$ 满足 S 范数的单调性 S2。

3) 由 $g(x)$ 的连续性知, $S(x, y)$ 满足 S 范数的连续性 S3。

4) 由单调增知 $b \leq b + g(x) - a$, 由加法的结合律知

$$\begin{aligned} S(S(x, y), z) &= g^{-1}(\min(b, \min(b, g(x) + g(y) - a) + g(z) - a)) \\ &= g^{-1}(\min(b, b + g(z) - a, g(x) + g(y) + g(z) - 2a)) \\ &= g^{-1}(\min(b, g(x) + g(y) + g(z) - 2a)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S(x, S(y, z)) &= g^{-1}(\min(b, g(x) + \min(b, g(y) + g(z) - a) - a)) \\ &= g^{-1}(\min(b, g(x) + b - a, g(x) + g(y) + g(z) - 2a)) \\ &= g^{-1}(\min(b, g(x) + g(y) + g(z) - 2a)) \end{aligned}$$

$$S(S(x, y), z) = S(x, S(y, z))$$

满足 S 范数的结合律 S4。

5) 由加法交换律知, $S(x, y) = S(y, x)$, 满足 S 范数的交换律 S5。

6) 由 $g(x)$ 的严格单调增知, 当 $x \in (a, b)$ 时, $b > g(x) > a$, 所以

$$S(x, x) = g^{-1}(\min(b, g(x) + g(x) - a)) \geq g^{-1}(\min(b, g(x))) > g^{-1}(g(x)) = x$$

$S(x, y)$ 满足 S 范数的幂小性 S6。

所以 $S(x, y)$ 是阿基米德型 S 范数, 且当 $g(x) + g(y) - a > b$ 时有 $S(x, y) = b$, 故是广义幂零 T 范数。

② $g(x)$ 是连续的严格单调减的一元函数, $g^{-1}(x)$ 存在。由于 b 是 $[a, b]$ 区间的上限, $x \leq a$, 故 x 总是从 b_- 趋于 b , 可以直接记 $f(b) \rightarrow -\infty$ 。

当 c 为有限数时, $g(b) + c = g(b) \rightarrow -\infty$, 这点在证明中很有用。

与自守增型比较, 第 2)、3)、5) 条的证明相同, 下面证明第 1)、4)、6) 条。

1) 由 $g(a) = a$, $g(b) \rightarrow -\infty$ 知 $g(y) \leq a < b$, 故

$$\begin{aligned} S(a, y) &= g^{-1}(\min(b, g(a) + g(y) - a)) = g^{-1}(\min(b, g(y))) = g^{-1}(g(y)) = y \\ S(b, y) &= g^{-1}(\min(b, g(b) + g(y) - a)) = g^{-1}(g(b) + g(y) - a) = g^{-1}(-\infty) \\ &= g^{-1}(g(b)) = b \end{aligned}$$

$S(x, y)$ 满足 S 范数的边界条件 S1。

4) 由单调减知 $g(x) + g(y) - a \leq a < b$, 由加法的结合律知

$$\begin{aligned} S(S(x, y), z) &= g^{-1}(\min(b, \min(b, g(x) + g(y) - a) + g(z) - a)) \\ &= g^{-1}(\min(b, g(x) + g(y) + g(z) - 2a)) \\ &= g^{-1}(g(x) + g(y) + g(z) - 2a) \\ S(x, S(y, z)) &= g^{-1}(\min(b, g(x) + \min(b, g(y) + g(z) - a) - a)) \\ &= g^{-1}(\min(b, g(x) + g(y) + g(z) - 2a)) \\ &= g^{-1}(g(x) + g(y) + g(z) - 2a) \end{aligned}$$

因此 $S(S(x, y), z) = S(x, S(y, z))$, 满足 S 范数的结合律 S4。

6) 由于 $g(x)$ 的严格单调减, 当 $x \in (a, b)$ 时, $b > a > g(x)$, 所以

$$S(x, x) = g^{-1}(\min(b, g(x) + g(x) - a)) = g^{-1}(g(x) + g(x) - a) > g^{-1}(g(x)) = x$$

$S(x, y)$ 满足 S 范数的幂小性 S6。

所以 $S(x, y)$ 是广义阿基米德型 S 范数, 且在 (a, b) 上严格单调, 故是广义严格 S 范数。

由①、②两种情况的证明可知本定理成立。①中的 $g(x)$ 是自守增型 S 性生成元, ②中的 $g(x)$ 是极限减型 S 性生成元, 它们均可以生成广义阿基米德型 S 范数, 并称本定理为“广义 S 范数生成定理”, 简称“S 范数生成定理”。 ■

7.2 广义 NTS 范数完整簇与连接词运算基模型

7.2.1 广义 N 范数完整簇

1. 广义 N 性生成元完整簇

由第五章可知: N 范数完整簇 $N(x, k)$ 由非运算模型的生成基 $N(x) = b + a - x$ 和 N 性生成元完整簇 $\Phi(x, k)$ 相互作用生成, 即

$$N(x, k) = \Phi^{-1}(b + a - \Phi(x, k), k)$$

如果模糊测度 $u(X)$ 有误差, 此时 N 范数的不动点 $l \neq (b + a)/2$, 此时 $k \neq 0$, 则泛非运算将偏离中心非运算, 当 p 和 $\sim_k p$ 都服从同一个误差分布时, 是一级不确定性问题, 可以在基模型 $N(x, (b + a)/2) = b + a - x$ 的基础上用特殊的广义自相关性修正函数完整簇 $\Phi(x, k)$ 来双向修正误差的影响。修正的基本思想是: 设 $u(X) = x^*$ 是有误差的模糊测度, 它对应的精确值是 x , $\Phi(x^*, k)$ 负责修正误差对 x^* 的影响, 使 $x = \Phi(x^*, k)$, $\Phi^{-1}(x, k)$ 的作用是恢复误差对 x 的影响, 使 $x^* = \Phi^{-1}(x, k)$ 。显然有 $\Phi(N(x^*, k), k) = b + a - \Phi(x^*, k)$, $N(x^*, k) = \Phi^{-1}(b + a - \Phi(x^*, k), k)$ 。

$\Phi(x^*, k)$ 与误差分布函数有关, 设 $\delta(x, k)$ 是模糊测度的误差分布函数, $x^* = x + \delta(x, k)$, 则有关系 $\Phi^{-1}(x, k) = x + \delta(x, k)$ 。对于不同的问题, 由于其误差分布函数的

不同，因而 $\Phi(x^*, k)$ 也有所不同。

【定义】 在分形逻辑中，称广义自相关性修正函数完整簇 $\Phi(x, k)$ 为一级分形逻辑运算的“广义 N 性生成元完整簇”。

2. 广义 N 范数完整簇

【定义】 由 $[a, b]$ 上广义 N 性生成元完整簇 $\Phi(x, k)$ 生成的广义 N 范数簇

$$N(x, k) = \Phi^{-1}(b + a - \Phi(x, k), k)$$

称为 “[a, b] 上的广义 N 范数完整簇”，简称为 N 簇 (N-cluster)。

广义 N 范数完整簇的物理意义在于：

(1) N 范数完整簇 $N(x, k)$ 由泛非运算模型的生成基 $N(x) = b + a - x$ 和 N 性生成元完整簇 $\Phi(x, k)$ 相互作用生成：

$$N(x, k) = \Phi^{-1}(b + a - \Phi(x, k), k)$$

(2) 泛非运算模型的生成基 $N(x) = b + a - x$ 是精确命题真值的非运算即中心非算子。

(3) N 性生成元完整簇 $\Phi(x, k)$ 的逻辑意义是修正模糊测度误差对命题真值的影响，它与模糊测度的误差分布函数簇 $\delta(x, k)$ 有关。

(4) $\delta(x, k)$ 簇有无限多种，故 $\Phi(x, k)$ 簇也有无限多种。但在一个逻辑推理系统中一般只需要使用同一种 $\Phi(x, k)$ 簇和 $N(x, k)$ 簇即可，常用的是幂模型和多项式模型，它们在 $[0, 1]$ 区间上的差异非常小，其表达式为：

幂模型在区间 $[0, 1]$ 上的表达式为 ($k' \in [0, 1]$)：

$$\Phi(x, k) = x^n, n = -1/\log_2 k'$$

$$N(x, k) = (1 - x^n)^{1/n}, k' = 2^{-1/n}$$

多项式模型在区间 $[0, 1]$ 上的表达式为：

$$\Phi(x, k) = x(1 + \lambda)^{1/2} / (1 + ((1 + \lambda)^{1/2} - 1)x), \lambda = (1 - 2k')/k'^2$$

$$N(x, k) = (1 - x) / (1 + \lambda x), k' = ((1 + \lambda)^{1/2} - 1) / \lambda$$

7.2.2 广义幂型 N 范数完整簇

【定理】 对于泛逻辑中的幂函数簇 $\Phi(x', k') = x'^n, n > 0, k' = 2^{-1/n}, k' \in [0, 1]$ ，对其进行从 $[0, 1]$ 到 $[a, b]$ 的基变换，则得到函数簇

$$\Phi(x, k) = (b - a)[(x - a)/(b - a)]^n + a$$

证明 $\Phi(x, k)$ 为任意区间 $[a, b]$ 上的幂型 N 性生成元完整簇，其中， $n = \ln 2 / [\ln 2 - \ln(k + 1)]$ ， $k \in [-1, 1]$ 。

证明：对于幂函数簇 $\Phi(x', k') = x'^n, n > 0, k' = 2^{-1/n}$ ，设

$y = x'^n$ ，由 $[0, 1]$ 到 $[a, b]$ 的基变换有： $x = (b - a)x' + a$ ，于是 $x' = (x - a)/(b - a)$ ，故

$$(y - a)/(b - a) = [(x - a)/(b - a)]^n$$

$$\Phi(x, k) = y = (b-a)[(x-a)/(b-a)]^n + a$$

再由求解 l 的定理可得不动点：

$$\Phi(l) = (b+a)/2 = (b-a)[(l-a)/(b-a)]^n + a$$

$$1/2 = [(l-a)/(b-a)]^n$$

$$l = (b-a)(2^{(-1/n)}) + a$$

$$\text{代入可得, } k = 2(l-a)/(b-a) - 1 = 2^{(-1/n)} - 1$$

$$\text{反之可得: } n = 1/[1 - \log_2(k+1)] = \ln 2 / [\ln 2 - \ln(k+1)]。$$

其中, $k \in [-1, 1]$, $n > 0$ 。当 $k = -1, 1$ 时, $\Phi(x, k)$ 取极限算子。 ■

【定义】 称上述定理中 $\Phi(x, k)$ 为任意区间 $[a, b]$ 上的“广义幂型 N 性生成元完整簇”；当 $n=1$, 即 $k=0$ 时称为“广义幂型零级 N 性生成元完整簇”； $k=0$ 时称为“广义幂型一级 N 性生成元完整簇”。当 $[a, b]$ 取 $[0, 1]$ 时, $\Phi(x, k) = x^n$ 是严格意义上的幂函数, 称其为“标准幂型 N 性生成元完整簇”。

【定理】 广义幂型 N 性生成元完整簇 $\Phi(x, k)$ 对应的 N 范数完整簇为 $N(x, k) = [(b-a)^n - (x-a)^n] + a$, 其中 $n = \ln 2 / [\ln 2 - \ln(k+1)]$, $k \in [-1, 1]$ 。

证明：对于广义幂函数簇 $\Phi(x, k)$, 已经证明是 $[a, b]$ 上的 N 性生成元完整簇。

$$\text{设 } y = \Phi(x, k) = (b-a)[(x-a)/(b-a)]^n + a$$

$$x = (b-a)[(y-a)/(b-a)]^{1/n} + a$$

$$\text{则可求得 } \Phi^{-1}(x, k) = (b-a)[(x-a)/(b-a)]^{1/n} + a$$

$$\text{则由 } N(x, k) = \Phi^{-1}(b+a-\Phi(x, k), k)$$

$$= (b-a)[((b+a-\Phi(x, k))-a)/(b-a)]^{1/n} + a$$

$$= (b-a)[((b+a-\Phi(x, k))-a)/(b-a)]^{1/n} + a$$

$$= (b-a)[((b-(b-a)[(x-a)/(b-a)]^n - a)/(b-a))]^{1/n} + a$$

$$= [(b-a)^n - (x-a)^n]^{1/n} + a$$

$$\text{由此直接求得了 } N(x, k) = [(b-a)^n - (x-a)^n] + a. ■$$

【定义】 称上述定理中 $N(x, k) = [(b-a)^n - (x-a)^n] + a$ 为任意区间 $[a, b]$ 上的“广义幂型 N 范数完整簇”；当 $n=1$, 即 $k=0$ 时称为“广义幂型零级 N 范数完整簇”； $k \neq 0$ 时称为“广义幂型一级 N 范数完整簇”。

7.2.3 广义 T/S 范数完整簇

【定义】 如果 T 性生成元 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 区间内是关于广义相关系数 $h \in [-1, 1]$ 的连续变化函数, 则记 $f(x)$ 为 $f(x, h)$, 并称其为“广义 T 性生成元完整簇”。

同理, 如果 S 性生成元 $g(x)$ 在 $[a, b]$ 区间内是关于广义相关系数 $h \in [-1, 1]$ 的连续变化函数, 则记 $g(x)$ 为 $g(x, h)$, 并称其为“广义 S 性生成元完整簇”。

对于 $[a, b]$ 上的广义 T/S 范数 $T(x, y)$ 和 $S(x, y)$ ，如果它们是关于广义相关系数 $h \in [-1, 1]$ 的连续变化函数，则分别记为 $T(x, y, h)$ 和 $S(x, y, h)$ ，并称其为“广义 T/S 范数完整簇”，简称“T/S 簇”。

当 $T(x, y, h)$ 或 $S(x, y, h)$ 不考虑误差系数 k 的影响时，称为“广义零级 T/S 范数完整簇”。当引入 k 时，记为 $T(x, y, h, k)$ 或 $S(x, y, h, k)$ ，如果系统中误差分布函数相同，则称其为“广义一级 T/S 范数完整簇”；否则称“广义多级 T/S 范数完整簇”。

【定理】 广义幂函数簇 $f(x) = (b-a)[(x-a)/(b-a)]^m + a$ 是 $[a, b]$ 上的广义零级 T 性生成元完整簇，其中 $m = (1-2h)/(1-h^2)$ ， $m \in R$ ， $h \in [-1, 1]$ 。

证明：(1) 广义幂函数簇 $f(x)$ 是 $[a, b]$ 上的连续严格单调函数，且

当 $m > 0$ 时： $f(x)$ 是增函数，且 $f(a) = a$, $f(b) = b$ ，故是自守增型 T 性生成元。

当 $m < 0$ 时： $f(x)$ 是减函数，且 $f(a) = +\infty$, $f(b) = b$ ，故是极限减型 T 性生成元。

(2) 由式 $m = (1-2h)/(1-h^2)$ 可知，当 h 从 $-1 \rightarrow 0 \rightarrow 1$ 时， m 从 $\infty \rightarrow 0 \rightarrow -\infty$ 。 m 是 h 的连续严格单调函数，故可记 $f(x)$ 为 $f(x, h) = (b-a)[(x-a)/(b-a)]^m + a$ ，它是关于广义相关系数 h 的连续变化函数，是 $[a, b]$ 上的广义 T 性生成元完整簇。由于它没有考虑广义自相关系数 k 的影响，故称“广义零级 T 性生成元完整簇”。 ■

【推论】 由幂函数簇 $f(x) = (b-a)[(x-a)/(b-a)]^m + a$ 代入 $T(x, y) = f^{-1}(\max(a, f(x) + f(y) - b))$ 生成的 T 范数簇是 $[a, b]$ 上的广义 T 范数完整簇。

证明：由上一定理直接得证。 ■

7.2.4 广义 NTS 性生成元的对偶性

由广义 T/S 范数生成定理的证明，可以得到如下定理：

【定理】(自守增型 T/S 性生成元的同一性) 在 $[a, b]$ 上连续严格单调的自守增型函数既可以作为广义 T 性生成元生成广义阿基米德型 T 范数，也可以作为广义 S 性生成元生成广义阿基米德型 S 范数。

证明：由 T/S 范数生成定理直接得证。 ■

例如：在 $[a, b]$ 上， $f(x) = (b-a)[(x-a)/(b-a)]^2 + a$ 是自守增型函数，它既是 T 性生成元，也是 S 性生成元。

除自守增型 T/S 性生成元具有同一性之外，所有类型的 T/S 性生成元相互之间也存在一定的关系，这里主要讨论它们之间的对偶性。

【定义】(半对偶) 在 $[a, b]$ 区间上，如果 $N(x)$ 是连续的严格单调（弱）N 范数， $g(x)$ 是连续的严格单调一元函数，则称 $f(x) = a + b - g(N(x))$ 为 $g(x)$ 关于 $N(x)$ 的“(弱) 半对偶”；如果其中 $N(x) = a + b - x$ ，则称 $f(x)$ 为 $g(x)$ 的“零级对偶”。

【定理】(广义 T/S 性生成元的对偶性) 如果 $f(x)$ 是 $[a, b]$ 上的广义 T (S) 性生成元，则：

$$g(x) = a + b - f(a + b - x)$$

是 $[a, b]$ 上的广义 S (T) 性生成元。

证明：设 $f(x)$ 是极限减型 T (S) 性生成元，则 $g(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续严格单调。

(1) 设 $f(x)$ 是极限减型 T 性生成元，则 $f(a) \rightarrow +\infty$, $f(b) = b$, 于是：

$$g(a) = a + b - f(a + b - a) = a + b - f(b) = a + b - b = a$$

$$g(b) = a + b - f(a + b - b) = a + b - f(a) = a + b - \infty = -\infty$$

故 $g(x)$ 是极限减型广义 S 性生成元。

(2) 设 $f(x)$ 是极限减型 S 性生成元，则 $f(a) \rightarrow a$, $f(b) = -\infty$, 于是：

$$g(a) = a + b - f(a + b - a) = a + b - f(b) = a + b - (-\infty) = +\infty$$

$$g(b) = a + b - f(a + b - b) = a + b - f(a) = a + b - a = b$$

因此 $g(x)$ 是极限减型广义 T 性生成元。

对于 $f(x)$ 是自守增型 T (S) 性生成元，由于 $f(a) = a$, $f(b) = b$ ，则可以类似证明：
 $g(a) = a$, $g(b) = b$ ，因此 $g(x)$ 是自守增型广义 S (T) 性生成元。 ■

此定理表明广义 T/S 性生成元之间可以相互变换，并给出了的变换规则。其中，当 $N(x) = a + b - x$ 时， $g(x) = a + b - f(a + b - x) = a + b - f(N(x))$ ，符合零级对偶的定义，于是我们可以得到如下推论：

【推论】 如果 $g(x)$ 是 S 性生成元， $N(x)$ 是连续的严格单调弱 N 范数，则 $g(x)$ 关于 $N(x)$ 的弱半对偶 $f(x)$ 是与 $g(x)$ 同类的 T 性生成元；反之，如果 $f(x)$ 是 T 性生成元，则 $f(x)$ 关于 $N(x)$ 的弱半对偶 $g(x)$ 是与 $f(x)$ 同类的 S 性生成元。

【推论】 如果 $g(x)$ 是 S 性生成元，则其零级对偶 $f(x)$ 是与 $g(x)$ 同类的 T 性生成元；反之，如果 $f(x)$ 是 T 性生成元，则其零级对偶 $g(x)$ 是与 $f(x)$ 同类的 S 性生成元。

例如：在 $[0, 1]$ 上，可以证明 $f(x) = 1/\tan[(\pi/4)x]$ 是极限减型 T 性生成元；而 $g(x) = 1 - 1/\tan[(\pi/4)(1-x)]$ 是极限减型 S 性生成元，其中 $N(x) = 1 - x$ 。

7.2.5 广义 NTS 范数之间的对偶性

【定义】(弱对偶) 如果 $N(x)$ 是连续的严格单调弱 N 范数， $f(x, y)$ 是 $[a, b]^2$ 上的任意单调二元函数，则称 $g(x, y) = N^{-1}(f(N(x), N(y)))$ 是 $f(x, y)$ 关于 $N(x)$ 的“弱对偶”。弱对偶关系是单向的，如果 $g(x, y) = N^{-1}(f(N(x), N(y)))$ ，则 $f(x, y) = N(g(N^{-1}(x), N^{-1}(y)))$ 。

【定义】(对偶) 如果 $N(x)$ 是连续的严格单调 N 范数， $f(x, y)$ 是 $[a, b]^2$ 上的任意单调二元函数，则称 $g(x, y) = N(f(N(x), N(y)))$ 是 $f(x, y)$ 关于 $N(x)$ 的“对偶”。对偶关系是双向的，如果 $g(x, y) = N(f(N(x), N(y)))$ ，则 $f(x, y) = N(g(N(x), N(y)))$ 。

【定理】(弱对偶定律) 如果 $f(x)$ 是 $[a, b]$ 上的 T 性生成元, $g(x)$ 是 S 性生成元, 它们之间存在弱半对偶关系 $g(x) = a + b - f(N(x))$, $N(x)$ 是连续的严格单调弱 N 范数, 则它们分别生成的 S 范数 $S(x, y)$ 和 T 范数 $T(x, y)$ 存在关于 $N(x)$ 的弱对偶关系 $S(x, y) = N^{-1}(T(N(x), N(y)))$ 。

证明: 由 $T(x, y) = f^{-1}(\max(a, f(x) + f(y) - b))$, $g(x) = a + b - f(N(x))$ 知

$$\begin{aligned} g^{-1}(x) &= N^{-1}(f^{-1}(a + b - g(x))) \\ S(x, y) &= g^{-1}(\min(b, g(x) + g(y) - a)) \\ &= g^{-1}(\min(b, a + b - f(N(x)) + a + b - f(N(y)) - a)) \\ &= N^{-1}(f^{-1}(a + b - \min(b, a + b - f(N(x)) + a + b - f(N(y)) - a))) \\ &= N^{-1}(f^{-1}(\max(a, f(N(x)) + f(N(y)) - b))) \\ &= N^{-1}(T(N(x), N(y))) \end{aligned}$$

所以本定理成立。 ■

【定理】 如果 $\phi(x)$ 是 $[a, b]$ 上的连续严格单调的自守函数, 用它作为 T 性生成元, 可生成 $T(x, y)$; 用它作为 S 性生成元, 可生成 $S(x, y)$, 则它们之间存在对偶关系:

$$S(x, y) = N(T(N(x), N(y))), \text{ 其中 } N(x) = \phi^{-1}(a + b - \phi(x)).$$

证明: 由于 $T(x, y) = \phi^{-1}(\max(a, \phi(x) + \phi(y) - b))$, $S(x, y) = \phi^{-1}(\min(b, \phi(x) + \phi(y) - a))$, $N(x) = \phi^{-1}(a + b - \phi(x))$ 是 N 范数, $S(x, y) = N(T(N(x), N(y)))$ 。

所以本定理成立。 ■

弱对偶定理揭示了 NTS 范数之间存在的三联体关系, 它指出: 我们可以根据确定的弱 N 范数和 T 范数来生成相应的弱对偶 S 范数。同理, 我们也可以得到由弱 N 范数和 S 范数来生成相应的弱对偶 T 范数。

根据泛逻辑的思想, 在分形逻辑中, 广义 N 范数是分形非运算的数学模型, 广义 T 范数是分形与运算的数学模型, 广义 S 范数是分形或运算的数学模型。由于 NTS 范数之间的弱对偶性, 我们可以仅用 N 范数和 T 范数来描述相应的 S 范数, 也即用“非运算”和“与运算”模型来描述相应的“或运算”模型, 称之为“NT 模型”; 如用 N 范数和 S 范数来描述相应的 T 范数, 也即用“非运算”和“或运算”模型来描述相应的“与运算”模型, 称之为“NS 模型”。

在同一逻辑系统中, “NT 模型”和“NS 模型”在表达形式上虽然不同, 但由于二者之间存在弱对偶关系, 所描述的运算模型的变化形式是一致的, 这从理论上和实际仿真中都得到了证实[HEWL01], 因此我们只需要研究其中一种模型即可。为承接与发展泛逻辑中对幂型 NT 模型的研究工作, 本文也选用幂型 NT 模型为分形逻辑的连接词运算模型。在本文中, 如未特别说明, 连接词的运算模型均指幂型 NT 模型。

7.2.6 分形逻辑的连接词运算基模型

1. NT 模型完整簇的基本集

根据前面对广义 NTS 范数理论的讨论，我们已经得到幂形式的零级 T 性生成元完整簇： $F_0(x, h) = (b-a)[(x-a)/(b-a)]^m + a$ ；一级 N 性生成元完整簇： $\Phi(x, k) = (b-a)[(x-a)/(b-a)]^n + a$ ；一级 N 范数完整簇： $N(x, k) = [(b-a)^n - (x-a)^n] + a$ 。

【定义】 把 $\Phi(x, k)$ 代入 $F_0(x, h)$ ，化简得到

$$F(x, h, k) = F_0(\Phi(x, k), h) = (b-a)[(x-a)/(b-a)]^{nm} + a$$

称 $F(x, h, k)$ 为“广义幂型一级 T 性生成元完整簇”，简称“一级 T 性生成元完整簇”。

【定义】 通过中心 T 范数 $T(x, y) = \max(a, x+y-b)$ 和广义幂型一级 T 性生成元完整 $F(x, h, k)$ 生成的 T 范数簇

$$T(x, y, h, k) = F^{-1}(\max(a, F(x, h, k) + F(y, h, k) - b), h, k)$$

称为“广义幂型一级 T 范数完整簇”，简称“一级 T 范数完整簇”。

【定义】 “NT 模型完整簇的基本集”是指：NT 模型中的基本的零级的和一级的 NT 性生成元完整簇、NT 范数完整簇的集合。通过这些基本的完整簇，可以直接代入非、与、或、蕴涵、等价、平均、组合或其它自定义的分形逻辑连接词运算基模型而得到相应的零级的和一级的具体运算模型。

在前面 NTS 范数理论的基础上，代入化简得到的 NT 模型完整簇的基本集包括如下的完整簇：

零级 N 性生成元完整簇： $\Phi(x) = x$ （簇 x^n 当 $k=0, n=1$ 时退化而成）

零级广义 N 范数完整簇： $N(x) = b+a-x$ （完整簇退化成中心 N 范数）

零级 T 性生成元完整簇： $F_0(x, h) = (b-a)[(x-a)/(b-a)]^m + a$

其逆函数簇为： $F_0^{-1}(x, h) = (b-a)[(x-a)/(b-a)]^{1/m} + a$

一级 N 性生成元完整簇： $\Phi(x, k) = (b-a)[(x-a)/(b-a)]^n + a$

一级广义 N 范数完整簇： $N(x, k) = [(b-a)^n - (x-a)^n]^{1/n} + a$

一级 T 性生成元完整簇： $F(x, h, k) = (b-a)[(x-a)/(b-a)]^{nm} + a$

其逆函数簇为： $F^{-1}(x, h, k) = (b-a)[(x-a)/(b-a)]^{1/nm} + a$

广义 T 范数生成定理为： $T(x, y) = f^{-1}(\max(a, f(x) + f(y) - b))$

其中： $n = \ln 2 / [\ln 2 - \ln(k+1)] = [1 - \log_2(k+1)]^{-1}$ ， $k = 2^{(1-1/n)} - 1$

$$m = (1-2h)/(1-h^2), \quad h = (1 - [(1+m)^2 - 3m]^{1/2})/m$$

$$k = 2(l-a)/(b-a) - 1, \quad l = (b-a)(2^{(1/n)}) + a$$

n : N 性生成元函数簇位置标志， m : T 性生成元函数簇位置标志

h : 广义相关系数， k : 广义自相关系数， l : N 范数不动点

参数域： $n \in R_+$ ， $m \in R$ ， $l \in [a, b]$ ， $k \in [-1, 1]$ ， $h \in [-1, 1]$ ，文后相同。

2. 分形逻辑的连接词运算基模型

分形逻辑的连接词运算目前有 7 种：非、与、或、蕴涵、等价、平均、组合。根据 NT 模型可以直接得到“非运算模型 $N(x, k)$ ”和“与运算模型 $T(x, y, h, k)$ ”，根据 NTS 范数的弱对偶性可以得到“或运算模型 $S(x, y, h, k)$ ”，然后根据泛逻辑中在 $[0, 1]$ 上的“蕴涵、等价、平均、组合”的定义与逻辑意义，结合本文工作对其进行了改善与扩展，得到了广义区间 $[a, b]$ 上的相应范数，分别记为“ $I(x, y)$ 、 $Q(x, y)$ 、 $M(x, y)$ 、 $C^e(x, y)$ ”引入 h 和 k 之后记为“ $I(x, y, h, k)$ 、 $Q(x, y, h, k)$ 、 $M(x, y, h, k)$ 、 $C^e(x, y, h, k)$ ”。类似一级 T 范数完整簇的定义，下面给出各连接词运算的基模型。

① 非运算基模型

$$N(x, k) = \Phi^{-1}(b + a - \Phi(x, k), k)$$

② 与运算模型

$$T(x, y, h, k) = F^{-1}(\max(a, F(x, h, k) + F(y, h, k) - b), h, k)$$

③ 或运算模型

$$\begin{aligned} S(x, y, h, k) &= N(T(N(x, k), N(y, k), h, k), k) \\ &= N(F^{-1}(\max(a, F(N(x, k), h, k) + F(N(y, k), h, k) - b), h, k), k) \end{aligned}$$

④ 蕴涵运算模型

$$\begin{aligned} I(x, y, h, k) &= \max(z \mid y \geq T(x, z, h, k)) \\ &= \min(b, F^{-1}(\max(a, b - F(x, h, k) + F(y, h, k)), h, k)) \end{aligned}$$

⑤ 等价运算模型

$$\begin{aligned} Q(x, y, h, k) &= T(I(x, y, h, k), I(x, y, h, k), h, k) \\ &= F_o^{-1}(b \pm |F(x, h, k) - F(y, h, k)|, h, k) \\ &\quad (h > 1.5 \text{ 为+}, \text{ 否则为-}) \end{aligned}$$

⑥ 平均运算模型

$$M(x, y, h, k) = N(F^{-1}(F(N(x, k), h, k)/2 + F(N(y, k), h, k)/2, h, k), k)$$

⑦ 组合运算模型

$$\begin{aligned} C^e(x, y, h, k) &= \text{ite}\{\min(e', F^{-1}(\max(a, F(x, h, k) + F(y, h, k) - F(e', h, k)), \\ &\quad h, k)) \mid x + y < 2e'; \quad N(\min(e'', [F^{-1}(\max(a, F(N(x, k), h, k) + \\ &\quad F(N(y, k), h, k) - F(N(e', k), h, k)), h, k)], k) \mid x + y > 2e'; \quad e')\} \\ &\quad (\text{其中: } e'' = N(e', k), \quad e' = (b - a)(e + 1)/2 + a, \quad e \in [-1, 1], \quad e' \in [0, 1]) \end{aligned}$$

e 是表示弃权的么元)

在以上各基模型的表达式中，除非运算是针对单命题之外，其它运算是针对二元命题。其中，蕴涵运算可以用于多步串行推理；与、或、平均、组合还可以定义多元运算模型。另外，当 $k=0$ 时，上述模型均可简化为相应的零级运算模型。

【定义】 以上定义在广义区间 $[a, b]$ 上的“非、与、或、蕴涵、等价、平均、组合”7 种连接词运算模型统称为“分形逻辑的连接词运算基模型”。

7.3 分形逻辑的连接词运算模型

7.3.1 分形非运算模型

1. 非命题连接词的定义

【定义】(分形非运算) 由 N 性生成元完整簇 $\Phi(x, k)$ 生成的 N 范数完整簇 $N(x, k)$ 实现的分形逻辑运算称为“分形非运算”，用与命题连接词 \sim_k 表示。

$$N(x, k) = \Phi^{-1}(b + a - \Phi(x, k), k) = [(b - a)^n - (x - a)^n]^{1/n} + a$$

2. 非运算的基本性质

由于非命题连接词是由 N 范数完整簇定义的，所以 N 范数和 N 范数完整簇的性质就是非命题连接词的性质，归纳起来有：

1) 封闭性 $N(x, k) \in [a, b]$

逻辑意义：命题 p 的泛非命题 $\sim_k p$ 仍是命题。

2) 对合律 $\sim_k \sim_k p = p$

逻辑意义：命题经过偶数次相同误差水平 k 的非运算后回到原命题。

3) 泛非性 如果 $k \Rightarrow p$, 则 $\sim_k p \Rightarrow k$; 如果 $p \Rightarrow k$, 则 $k \Rightarrow \sim_k p$

逻辑意义：不假命题的非命题一定不真；不真命题的非命题一定不假。

4) 对偶律 $\sim_{k2} \sim_{k1} \sim_{k2} p = \sim_k p, k = N(k1, k2), \sim \sim_k \sim p = \sim_{1-k} p$

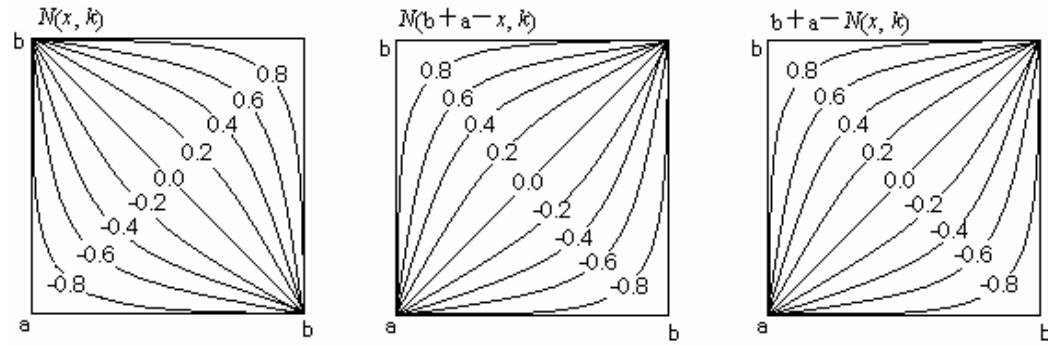
逻辑意义：运算模型簇 $N(x, k)$ 是以中心非算子 $N(x)$ 为中心的自对偶算子簇，它的零级对偶和一级对偶都在簇中。

5) 偶等性 $\sim_k \sim_k \sim_k p = \sim_k p$

逻辑意义：任何非运算的自对偶仍然是自己。

3. 非运算的物理意义

非运算模型的 N 范数完整簇的变化图如 7.3 所示。由图可知：当 $k=0.0$ 时， $N(x, k) = b + a - x$ ，这是中心非运算模型，是精确估计；当 $k < 0.0$ 时， $N(x, k) < b + a - x$ ，非运算呈偏小估计；当 $k > 0.0$ 时， $N(x, k) > b + a - x$ ，非运算呈偏大估计。

图 7.3 N 簇、N 余簇、N 补簇随 k 的变化图

【定义】 如果 $N(x, k)$ 是 N 簇, 则称 $N(b+a-x, k)$ 为“N 余簇”, 称 $b+a-N(x, k)$ 为“N 补簇”。

由于 $N(b+a-x, k) = b+a-N(x, -k)$, N 余簇 $N(b+a-x, k)$ 和 N 补簇 $b+a-N(x, k)$ 是对偶关系, 所以 N 补簇内的算子一定在 N 余簇内。

7.3.2 分形与运算模型

1. 与命题连接词的定义

【定义】(零级分形与运算) 由零级 T 性生成元完整簇 $F_o(x, h)$ 代入与运算基模型生成的零级 T 范数完整簇实现的分形逻辑运算称为“零级分形与运算”, 用与命题连接词 \wedge_h 表示。

$$\begin{aligned} T(x, y, h) &= F^{-1}(\max(a, F(x, h) + F(y, h) - b), h) \\ &= (b-a)[(\max(a, (b-a)[(x-a)/(b-a)]^m + a + (b-a)[(y-a)/(b-a)]^m + a \\ &\quad - b) - a)/(b-a)]^{l/m} + a \\ &= (b-a)[(\max(a, ((x-a)^m + (y-a)^m)/(b-a)^{m-1} + 2a - b) - a)/(b-a)]^{l/m} + a \end{aligned}$$

其中四个典型点算子为:

$$\begin{aligned} \text{最大与, 模糊与算子: } T(x, y, 1) &= (b-a)\min((x-a)/(b-a), (y-a)/(b-a)) + a \\ &= \min(x, y) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{中极与, 概率与算子: } T(x, y, 0.5) &= (b-a)[(x-a)/(b-a)] * [(y-a)/(b-a)] + a \\ &= [(x-a)*(y-a)]/(b-a) + a \end{aligned}$$

$$\text{中心与, 有界与算子: } T(x, y, 0) = \max(a, x+y-a-b)$$

$$\text{最小与, 突变与算子: } T(x, y, -1) = \text{ite}\{\min(x, y) | \max(x, y) = b; a\}$$

【定义】(一级分形与运算) 由一级 T 性生成元完整簇 $F(x, h, k)$ 代入与运算基

模型生成的一级 T 范数完整簇实现的分形逻辑运算称为“一级分形与运算”，用与命题连接词 $\wedge_{h,k}$ 表示。

用 $F(x, h, k)$ 代入与运算基模型，化简即得：

$$\begin{aligned} T(x, y, h, k) &= F^{-1}(\max(a, F(x, h, k) + F(y, h, k) - b), h, k) \\ &= (b-a)[(\max(a, ((x-a)^{nm} + (y-a)^{nm})/(b-a)^{nm-1} + 2a-b) - a)/(b-a)]^{1/nm} + a \end{aligned}$$

2. 与运算的性质

根据 T 范数的性质，可得泛与运算的性质如下：

1) $T(x, y, h, k)$ 满足 T 范数定义：

边界条件 T1 $T(a, y, h, k) = a, T(b, y, h, k) = y$

单调性 T2 $T(x, y, h, k)$ 关于 x, y 单调增

连续性 T3 $T(x, y, h, k)$ 关于 x, y 连续

结合律 T4 $T(T(x, y, h, k), z, h, k) = T(x, T(y, z, h, k), h, k)$

交换律 T5 $T(x, y, h, k) = T(y, x, h, k)$

2) 封闭性 $T(x, y, h, k) \in [a, b]$

3) 上界性 $T(x, y, h, k) \leq \min(x, y)$

4) 兼容性 与运算与二值逻辑兼容，当 $[a, b] = [0, 1]$ 时：

$T(0, 0, h, k) = 0, T(0, 1, h, k) = 0, T(1, 0, h, k) = 0, T(1, 1, h, k) = 1$

5) 与幂律 $T(x, x, h, k) \leq x, T(x, x, 1, k) = x$

6) 补余律 $T(x, b+a-x, h) \leq (a+b)/2; T(x, N(x, k), h, k) \leq l, l$ 为不动点

矛盾律 当 $h \leq 0$ ，即相克状态时， $T(x, N(x, k), h, k) = a$

7) 泛与性 如果 $T(x, y, h, k) \geq c \in [a, b]$ ，则 $x \geq c$ 且 $y \geq c$

8) 合并律 如果 $x \leq z, y \leq z$ ，则 $T(x, y, h, k) \leq z$

9) 相加律 如果 $x+x' \leq a+b$ ，则

$T(x+x', y, h, k) \geq \max(T(x, y, h, k), T(x', y, h, k))$

10) 相乘律 $T(xz, y, h, k) \leq \min(T(x, y, h, k), T(z, y, h, k))$

11) 指数律 $T(x^s, y, h, k) \leq T(x, y, h, k), s \geq 1$

3. 与运算的物理意义

分形与运算模型零级完整簇的变化如图 7.4 所示，一级完整簇的变化见图 7.11。从图中可以看出：

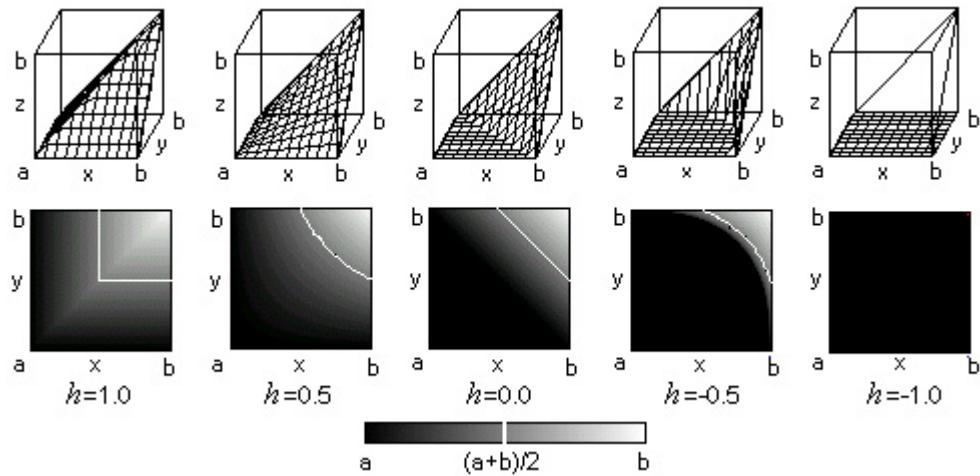


图 7.4 零级分形与运算模型图

1) 分形与运算的逻辑学意义是两个柔性命题同时为真的程度, 它具有一票否决性, 任一命题偏假, 则泛与运算偏假, 但反之不然。

2) 从三维图上可以看出, $T(x, y, h, k)$ 有四条不变的与特征线:

$$T(x, a, h, k) = a, T(a, y, h, k) = a, T(x, b, h, k) = x, T(b, y, h, k) = y$$

3) 从灰度图上可以看出(图中 $k=0$, 可以推广到 $k \in [-1, 1]$ 的任意情况), 与运算的偏真性是随 h 连续可调的, h 是与运算的偏真度: 当 $h=-1$ 时与的偏真性最小, 除 $T(b, y, -1, k) = y, T(x, b, -1, k) = x$ 外, 其他区域均为假, 即只有 $x=b, y \in [k, b]$ 或 $y=b, x \in [k, b]$ 时才偏真。随着 h 从 -1 到 1 不断增大, 与的偏真性不断提高, 偏真区域连续增大, 经过 $T(x, y, 0, k)、T(x, y, 0.5, k)$ 、到 $T(x, y, 1, k)$, 但与的偏真区域只能增大到 $x \in [l, b]$ 且 $y \in [l, b]$ 的所在区域。

7.3.3 分形或运算模型

1. 或命题连接词的定义

【定义】(零级分形或运算) 由零级 T 性生成元完整簇 $F_0(x, h)$ 代入或运算基模型生成的零级 T 范数完整簇实现的分形逻辑运算称为“零级分形或运算”, 用或命题连接词 \vee_h 表示。

$$\begin{aligned} S(x, y, h) &= N(F^{-1}(\max(a, F(N(x), h) + F(N(y), h) - b), h)) \\ &= b + a - \{(b-a)[(\max(a, (b-a)[(b+a-x-a)/(b-a)]^m + a + \\ &\quad (b-a)[((b+a-y-a)/(b-a)]^m + a - b) - a)/(b-a)]^{1/m} + a\} \\ &= b + a - \{(b-a)[(\max(a, ((b-x)^m + (b-y)^m)/(b-a)^{m-1} + 2a \\ &\quad - b) - a)/(b-a)]^{1/m} + a\} \end{aligned}$$

其中四个典型点的算子为:

最小或, 模糊或算子: $S(x, y, 1) = \max(x, y)$

中极或, 概率或算子: $S(x, y, 0.5) = x + y - [(x-a)(y-a)] / (b-a) - 2a$

中心或, 有界或算子: $S(x, y, 0) = \min(b, x+y-a)$

最大或, 突变或算子: $S(x, y, -1) = \text{ite}\{\max(x, y) | \min(x, y) = a; b\}$

【定义】(一级分形或运算) 由一级 T 性生成元完整簇 $F(x, h, k)$ 代入或运算基模型生成的一级 T 范数完整簇实现的分形逻辑运算称为“一级分形或运算”, 用与命题连接词 $\vee_{h,k}$ 表示。

$$S(x, y, h, k) = N(F^{-1}(\max(a, F(N(x, k), h, k) + F(N(y, k), h, k) - b), h, k), k)$$

2. 或运算的性质

根据 S 范数的性质, 可得或运算的性质如下:

1) $S(x, y, h, k)$ 满足 S 范数定义:

边界条件 S1 $S(a, y, h, k) = y, S(b, y, h, k) = 1$

单调性 S2 $S(x, y, h, k)$ 关于 x, y 单调增

连续性 S3 $S(x, y, h, k)$ 关于 x, y 连续

结合律 S4 $S(S(x, y, h, k), z, h, k) = S(x, S(y, z, h, k), h, k)$

交换律 S5 $S(x, y, h, k) = S(y, x, h, k)$

2) 封闭性 $S(x, y, h, k) \in [a, b]$

3) 上界性 $S(x, y, h, k) \geq \max(x, y)$

4) 兼容性 或运算与二值逻辑兼容, 当 $[a, b] = [0, 1]$ 时:

$$S(0, 0, h, k) = 0, S(0, 1, h, k) = 1, S(1, 0, h, k) = 1, S(1, 1, h, k) = 1$$

5) 或幂律 $S(x, x, h, k) \geq x, S(x, x, 1, k) = x$

6) 补余律 $S(x, b+a-x, h) \geq (a+b)/2; S(x, N(x, k), h, k) \geq l, l$ 为不动点

排中律 当 $h \leq 0$, 即相克状态时, $S(x, N(x, k), h, k) = b$

7) 泛或性 如果 $S(x, y, h, k) \leq c \in [a, b]$, 则 $x \leq c$ 且 $y \leq c$

8) 合并律 如果 $x \geq z, y \geq z$, 则 $S(x, y, h, k) \geq z$

9) 相加律 如果 $x+x' \leq a+b$, 则

$$S(x+x', y, h, k) \geq \max(S(x, y, h, k), S(x', y, h, k))$$

10) 相乘律 $S(xz, y, h, k) \leq \min(S(x, y, h, k), S(z, y, h, k))$

11) 指数律 $S(x^s, y, h, k) \leq S(x, y, h, k), s \geq 1$

12) 对偶律 $N(S(x, y, h, k), k) = T(N(x, k), N(y, k), h, k)$

$$N(T(x, y, h, k), k) = S(N(x, k), N(y, k), h, k)$$

13) 析取三段论 $T(N(x, k), S(x, y, h, k), h, k) \leq y$

14) 与或律 $T(x, y, h, k) \leq S(x, y, h, k)$

$$15) \text{ 分配律} \quad T(x, S(y, z, 1, k), 1, k) = S(T(x, y, 1, k), T(x, z, 1, k), 1, k)$$

$$S(x, T(y, z, 1, k), 1, k) = T(S(x, y, 1, k), S(x, z, 1, k), 1, k)$$

$$16) \text{ 扩展律} \quad x \leq S(x, T(x, y, h, k), h, k), \quad S(x, T(x, y, 1, k), 1, k) = x$$

$$17) \text{ 吸收律} \quad T(x, S(x, y, h, k), h, k) \leq x, \quad T(x, S(x, y, 1, k), 1, k) = x$$

3. 或运算的物理意义

分形或运算模型的零级完整簇变化如图 7.5 所示，一级完整簇的变化见图 7.11。从图中可以看出：

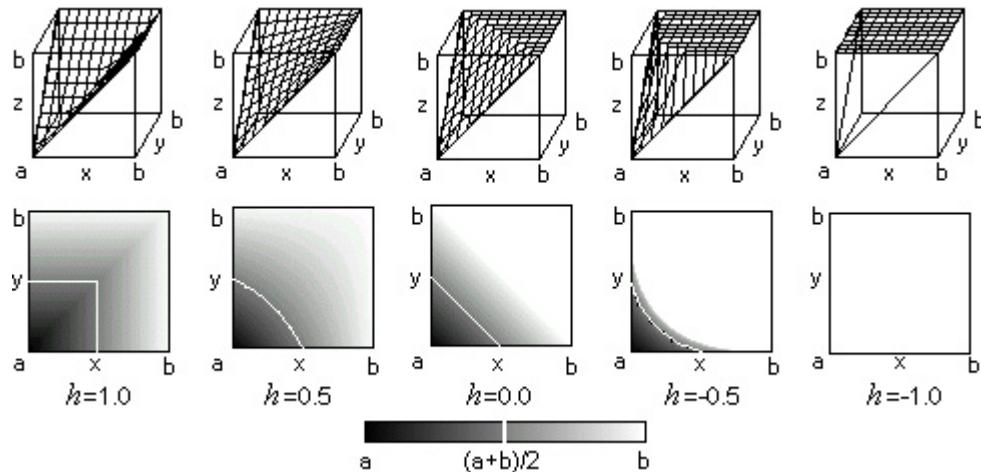


图 7.5 零级分形或运算模型图

1) 分形或运算的逻辑学意义是两个柔性命题分别为真的程度，它具有一票通过性，任一命题偏真，则或运算偏真，但反之不然。

2) 从三维图上可以看出， $S(x, y, h, k)$ 有四条不变的或特征线：

$$S(x, a, h, k) = x, S(a, y, h, k) = y, S(x, b, h, k) = b, S(b, y, h, k) = b$$

3) 从灰度图上可以看出，或运算的偏假性是随 h 连续可调的， h 是或运算的偏假度：当 $h = -1$ 时或的偏假性最小，除 $S(a, y, -1, k) = y, S(x, a, 1, k) = x$ 外，其他区域均为真，即只有 $x = a, y \in [0, k]$ 或 $y = a, x \in [0, k]$ 时才偏假。随着 h 从 -1 到 1 不断增大，与的偏假性不断提高，偏假区域连续增大，经过 $S(x, y, 0, k)$ 、 $S(x, y, 0.5, k)$ 、到 $S(x, y, 1, k)$ ，但或的偏假区域只能增大到 $x \in [a, l]$ 且 $y \in [a, l]$ 的所在区域。

7.3.4 分形蕴涵运算模型

蕴涵算子是逻辑推理中的重要算子，长期以来受到许多研究工作者的关注 [ABM095, BAK080, YAGE80, YAGE83, YAGE99, DOTV81, FODA91, FODB91, FODC91, FODA93, FODB93, WEBE83, ZH LI96]。泛逻辑对蕴涵算子做了深入探讨，比较分析了 I 蕴涵、S 蕴涵、T 蕴涵的相互

关系与各自特征[HEWL01, HELI98]，最后在 T 范数完整簇的基础上定义了泛逻辑的 T 蕴涵运算模型，本文亦采用 T 蕴涵作为定义的基础，建立广义区间上的分形蕴涵运算模型。

1. 蕴涵命题连接词的定义

【定义】(零级分形蕴涵运算) 由零级 T 性生成元完整簇 $F_\theta(x, h)$ 代入蕴涵运算基模型生成的零级 T 范数完整簇实现的分形逻辑运算称为“零级分形蕴涵运算”，用蕴涵命题连接词 \rightarrow_h 表示。

$$\begin{aligned} I(x, y, h) &= \min(b, F^{-1}(\max(a, b - F(x, h) + F(y, h)), h)) \\ &= \min(b, (b-a)[(\max(a, b - [(x-a)^m - (y-a)^m]/(b-a)^{m-1}) - a)/(b-a)]^{1/m} + a) \end{aligned}$$

其中四个典型点算子为：

最小蕴涵，模糊蕴涵算子： $I(x, y, 1) = \text{ite}\{b | x \leq y; y\}$

中极蕴涵，概率蕴涵算子： $I(x, y, 0.5) = \min(b, (b-a)[(y-a)/(x-a)] + a)$

中心蕴涵，有界蕴涵算子： $I(x, y, 0) = \min(b, b-x+y)$

最大蕴涵，突变蕴涵算子： $I(x, y, -1) = \text{ite}\{y | x=b; b\}$

其中 $I(x, y, 0.5)$ 是广义 Goguen 蕴涵，它是 I 蕴涵； $I(x, y, 0)$ 是广义 Lukasiewicz 蕴涵，它是 S 蕴涵，它们都是 T 蕴涵运算完整簇中的具体算子。

【定义】(一级分形蕴涵运算) 由一级 T 性生成元完整簇 $F(x, h, k)$ 代入蕴涵运算基模型生成的一级 T 范数完整簇实现的分形逻辑运算称为“一级分形蕴涵运算”，用与命题连接词 $\rightarrow_{h,k}$ 表示。

$$I(x, y, h, k) = \min(b, F^{-1}(\max(a, b - F(x, h, k) + F(y, h, k)), h, k))$$

2. 蕴涵运算的性质

根据 I 范数的性质，可得蕴涵运算的性质如下：

1) $I(x, y, h, k)$ 满足蕴涵公理：

边界条件 I1 $I(a, y, h, k) = b, I(b, y, h, k) = y, I(x, 1, h, k) = b$

单调性 I2 $I(x, y, h, k)$ 关于 y 单调递增，关于 x 单调递减

连续性 I3 $h, k \in (-1, 1)$ 时， $I(x, y, h, k)$ 关于 x, y 连续

保序性 I4 $I(x, y, h, k) = b$, iff $x \leq y$ (除 $h=-1$ 和 $k=1$ 外)

推演性 I5 $T(x, I(x, y, h, k), h, k) \leq y$ (假言推论)

2) 封闭性 $I(x, y, h, k) \in [a, b]$

3) 下界性 $I(x, y, h, k) \geq y$

4) 兼容性 蕴涵运算与二值逻辑兼容，当 $[a, b] = [0, 1]$ 时：

- $I(0, 0, h, k) = 1, I(0, 1, h, k) = 1, I(1, 0, h, k) = 0, I(1, 1, h, k) = 1$
- 5) 恒真律 $I(x, x, h, k) \geq b, I(y, I(x, y, h, k), h, k) = b$
- 6) 交换律 如果 $x \leq y$, 则 $I(x, y, h, k) = I(N(y, k), N(x, k), h, k)$
- 7) 假言三段论 $T(I(x, y, h, k), I(y, z, h, k), h, k) \leq I(x, z, h, k)$
- 8) 二难推论 $T(S(x, y, h, k), I(x, z, h, k), I(y, z, h, k), h, k) \leq z$
- 9) 拒取式 如果 $x \leq y$, 则 $T(N(y, k), I(x, y, h, k), h, k) \leq N(x, k)$
- 10) 分配律 $I(x, I(y, z, 1, k), 1, k) = I(I(x, y, 1, k), I(x, z, 1, k), 1, k)$
- 11) 换与性 $I(T(x, y, h, k), z, h, k) = I(x, I(y, z, h, k), h, k)$
- 12) 自反性 如果 $x \leq y$ 或 $x, y \in \{0, 1\}$, 则 $I(I(x, y, h, k), x, h, k) = x$

3. 蕴涵运算的物理意义

分形蕴涵运算模型的零级完整簇变化图如图 7.6 所示, 一级完整簇的变化图见图 7.11。从图中可以看出:

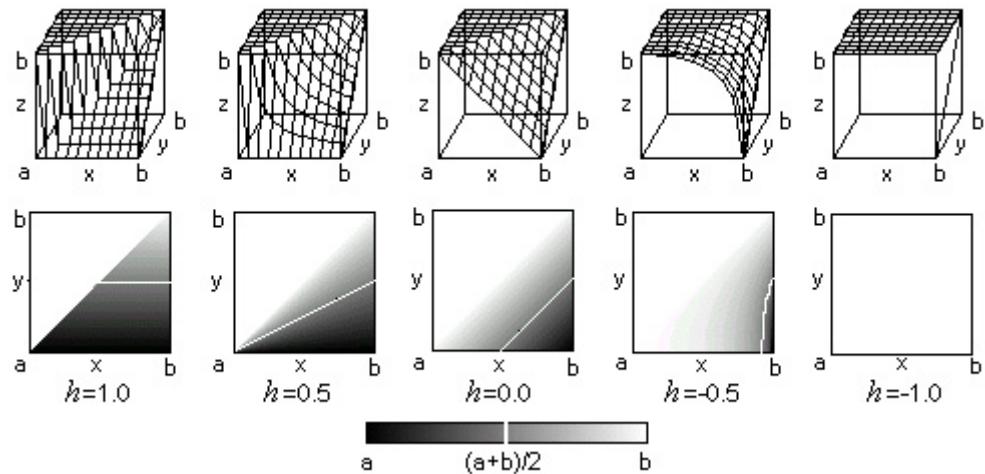


图 7.6 零级分形蕴涵运算模型图

1) 蕴涵运算的逻辑学意义是保序传递关系, 除 $h=0$ 和 $k=1$ 外, $I(x, y, h, k) = b$, iff $x \leq y$; 还可以看成是广义包含度, 只要在形式上满足 $x \leq y$, 就有 $I(x, y, h, k) = b$, 不管在特征空间 E 中是完全包含, 部分包含还是伪包含。根据这个性质, 我们仍可约定用 “ $x \Rightarrow y$ ” 表示永真泛蕴涵 $I(x, y, h, k) = b$ 或 $x \leq y$ 为真。

2) 从三维图上可以看出, 蕴涵运算有一个不变的蕴涵特征线面 $I(x, y, h, k) = b$ ($x \leq y$ 时) 和一个不变的蕴涵特征线 $I(1, y, h, k) = y$ 。

3) 蕴涵运算的偏假性是连续可调的, h 是蕴涵的偏假度, $h=-1$ 时蕴涵的偏假性最小, 除 $I(b, y, -1, k) = y$ 外, 其他区域为真, 是最大蕴涵; 随着 h 从 -1 到 1 连续增大, 蕴涵的偏假性不断提高, 偏假区域连续增大, $I(x, y, 0, 0)$ 是 S 蕴涵, $I(x, y, 0.5, 0)$ 是 I 蕴涵, $I(x, y, 1, k)$ 是最小蕴涵, 它表明蕴涵的偏假区只能增大到 y

$\langle x$ 且 $y \in [a, l]$ 的所在区域。

7.3.5 分形等价运算模型

逻辑学界一般都把等价运算和蕴涵运算 $I(x, y)$ 联系起来研究[NOPS88, NOVE89]，由于蕴涵运算存在 I 蕴涵、S 蕴涵、T 蕴涵等，因此等价运算也有 I 等价、S 等价、T 等价等定义，泛逻辑学对这些算子进行比较分析后认为，T 等价包含了 I 等价和 S 等价的合理部分，T 等价具有随参数连续变化的性质，便于柔性控制[HEWL01]，因此本文采用 T 等价为定义的基础，建立广义区间上的运算模型。

1. 等价命题连接词的定义

【定义】(零级分形等价运算) 由零级 T 性生成元完整簇 $F_\theta(x, h)$ 代入等价运算基模型生成的零级 T 范数完整簇实现的分形逻辑运算称为“零级分形等价运算”，用等价命题连接词 \leftrightarrow_h 表示。

$$Q(x, y, h) = F_\theta^{-1}(b \pm |F(x, h) - F(y, h)|, h) \quad (h > 1.5 \text{ 为 +, 否则为 -})$$

令 $fabs = \text{abs}(F(x, h) - F(y, h))$ ($\text{abs}(x)$ 为绝对值函数)

$$= \text{abs}((b-a)[(x-a)/(b-a)]^m + a - (b-a)[(y-a)/(b-a)]^m - a)$$

$$= \text{abs}((x-a)^m - (y-a)^m) / (b-a)^{m-1}$$

$$Q(x, y, h) = (b-a)[((b \pm fabs) - a)/(b-a)]^{1/m} + a$$

$$= (b-a)[((b \pm \text{abs}((x-a)^m - (y-a)^m) / (b-a)^{m-1})) - a]/(b-a)]^{1/m} + a$$

其中四个典型点的算子为：

最小等价，模糊等价算子： $Q(x, y, 1) = \text{ite}\{b|x=y; \min(x, y)\}$

中极等价，概率等价算子： $Q(x, y, 0.5) = \min((b-a)[(x-a)/(y-a)] + a, (b-a)[(y-a)/(x-a)] + a)$

中心等价，有界等价算子： $Q(x, y, 0) = b - |x-y|$

最大等价，突变等价算子： $Q(x, y, -1) = \text{ite}\{x|y=b; y|x=b; b\}$

其中 $Q(x, y, 0.5)$ 是 I 等价； $Q(x, y, 0)$ 是 S 等价，它们都是 T 等价运算完整簇中的具体算子。

【定义】(一级分形等价运算) 由一级 T 性生成元完整簇 $F(x, h, k)$ 代入等价运算基模型生成的一级 T 范数完整簇实现的分形逻辑运算称为“一级分形等价运算”，用与命题连接词 $\leftrightarrow_{h,k}$ 表示。

$$Q(x, y, h, k) = F_\theta^{-1}(b \pm |F(x, h, k) - F(y, h, k)|, h, k)$$

$(h > 1.5 \text{ 为 +, 否则为 -})$

2. 等价运算的性质

根据等价运算的定义, 可得等价运算的如下性质 (证明略)

1) $Q(x, y, h, k)$ 满足等价公理:

边界条件 Q1 $Q(a, y, h, k) = y, Q(x, 1, h, k) = x$

单调性 Q2 $Q(x, y, h, k)$ 关于 $|x-y|$ 单调递减

连续性 Q3 $h, k \in (-1, 1)$ 时, $Q(x, y, h, k)$ 关于 x, y 连续

交换律 Q4 $Q(x, y, h, k) = Q(y, x, h, k)$

保值性 Q5 $Q(x, y, h, k) = b$, iff $x=y$ (除 $h=-1$ 和 $k=1$ 外)

2) 封闭性 $Q(x, y, h, k) \in [a, b]$

3) 下界性 $Q(x, y, h, k) \geq \min(x, y)$

4) 兼容性 等价运算与二值逻辑兼容, 当 $[a, b] = [0, 1]$ 时:

$Q(0, 0, h, k) = 1, Q(0, 1, h, k) = 0, Q(1, 0, h, k) = 0, Q(1, 1, h, k) = 1$

5) 传递性 $T(Q(x, y, h, k), Q(y, z, h, k), h, k) \leq Q(x, z, h, k)$

6) 结合律 $Q(x, Q(y, z, 1, k), 1, k) = Q(Q(x, y, 1, k), z, 1, k)$

7) 非等律 $Q(N(x, k), N(y, k), 0, k) = Q(x, y, 0, k)$

8) 非入律 iff $x, y \in \{0, 1\}$ 时, $N(Q(x, y, h, k), k) = Q(x, N(y, k), h, k)$

9) 自反性 iff $x, y \in \{0, 1\}$ 时, $Q(Q(x, y, h, k), x, h, k), h, k) = y$

10) 与小性 $T(x, y, h, k) \leq Q(x, y, h, k)$

3. 等价运算的物理意义

分形等价运算模型的零级完整簇变化如图 7.7 所示, 一级完整簇的变化见图 7.11。从图中可以看出:

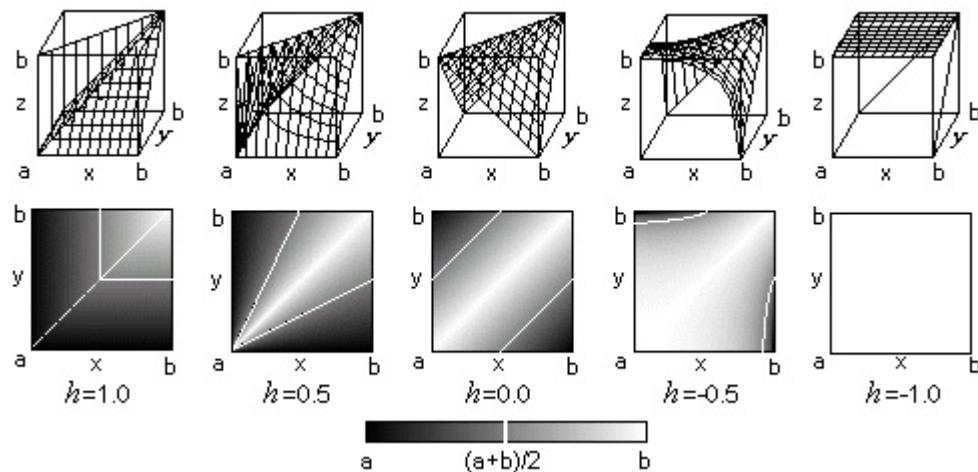


图 7.7 零级分形等价运算模型图

1) 等价运算的逻辑学意义是保值传递关系, 除 $h=-1$ 和 $k=1$ 外, $Q(x, y, h, k) = b$, iff $x=y$ 。根据这个性质, 可用 “ $x \Leftrightarrow y$ ” 表示永真等价 $Q(x, y, h, k) = b$ 或 $x=y$

为真(除 $h=-1$ 和 $k=1$ 外)。还可以把等价运算看成是相似度, $Q(x, y, h, k)$ 表示 x, y 之间的相似程度, 其大小与 $|x - y|$ 成反比。

2) $Q(x, y, h, k)$ 有三条不变的泛等价特征线:

$$Q(x, x, h, k) = b, \quad Q(b, y, h, k) = y, \quad Q(x, b, h, k) = x.$$

3) 等价运算的偏假性是连续可调的, h 是等价的偏假度, $h=-1$ 时等价的偏假性最小, 除 $Q(b, y, -1, k) = y, Q(x, b, -1, k) = x$ 外, 其他区域为真, 是最大等价; 随着 h 从 -1 到 1 连续增大, 等价的偏假性不断提高, 偏假区域连续增大, $Q(x, y, 0, 0)$ 是 S 等价, $Q(x, y, 0.5, 0)$ 是 I 等价, $Q(x, y, 1, k)$ 是最小等价, 它表明等价涵的偏假区只能增大到 $y \neq x$ 且 $x, y \in [a, l]$ 的所在区域。

7.3.6 分形平均运算模型

在经典逻辑中, 没有“平均”运算。泛逻辑学在对逻辑推理与决策应用等方面研究之后, 认为不仅是在决策理论中可以利用“平均”的思想[YAGE88], 在逻辑推理的许多情况下也会碰到类似的问题, 于是泛逻辑首次在逻辑运算中引入了“平均”运算[HEWL01], 并建立了平均运算模型。同样, 本文也在分形逻辑中建立了广义区间上的平均运算模型。

1. 平均命题连接词的定义

【定义】(零级分形平均运算) 由零级 T 性生成元完整簇 $F_0(x, h)$ 代入平均运算基模型生成的零级 T 范数完整簇实现的分形逻辑运算称为“零级分形平均运算”, 用平均命题连接词 Φ_h 表示。

零级时: $N(x) = b + a - x$

$$\begin{aligned} F(N(x), h) &= (b-a)[(N(x)-a)/(b-a)]^m + a \\ &= (b-a)[(b+a-x-a)/(b-a)]^m + a \\ &= (b-x)^m/(b-a)^{m-1} + a \\ F(N(y), h) &= (b-y)^m/(b-a)^{m-1} + a \\ M(x, y, h) &= N(F^{-1}(F(N(x), h)/2 + F(N(y), h)/2, h)) \\ &= N(F^{-1}([(b-x)^m/(b-a)^{m-1} + a + (b-y)^m/(b-a)^{m-1} + a]/2, h)) \\ &= N((b-a)[[(b-x)^m/(b-a)^{m-1} + a + (b-y)^m/(b-a)^{m-1} + a]/2 - \\ &\quad a]/(b-a)]^{1/m} + a, h) \\ &= N((b-a)[((b-x)^m + (b-y)^m)/2(b-a)^m]^{1/m} + a) \\ &= b + a - [(((b-x)^m + (b-y)^m)/2]^{1/m} + a) \\ &= b - [((b-x)^m + (b-y)^m)/2]^{1/m} \end{aligned}$$

由 $M(x, y, h)$ 表达式可见: 平均运算只与上区间值 b 有关, 而与下区间值 a 无关。仿真表明, 这样定义的平均运算对于任意实数 m 都是合理的。

其中四个典型点的算子为：

最大平均，模糊平均算子： $M(x, y, 1) = \max(x, y)$

中极平均，概率平均算子： $M(x, y, 0.5) = b - ((b-x)(b-y))^{1/2}$

中心平均，有界平均算子： $M(x, y, 0) = (x+y)/2$

最小平均，突变平均算子： $M(x, y, -1) = \min(x, y)$

其中 $M(x, y, 0)$ 是算术平均，常用的其它平均算子还有：

几何平均 $b+a-M(b+a-x, b+a-y, 0.5) = (xy)^{1/2}$

调和平均 $b+a-M(b+a-x, b+a-y, 0.732) = 2xy/(x+y)$

【定义】(一级分形平均运算) 由一级 T 性生成元完整簇 $F(x, h, k)$ 代入平均运算基模型生成的一级 T 范数完整簇实现的分形逻辑运算称为“一级分形平均运算”，用与命题连接词 $\Phi_{h,k}$ 表示。

$$M(x, y, h, k) = N(F^{-1}(F(N(x, k), h, k)/2 + F(N(y, k), h, k)/2, h, k), k)$$

2. 平均运算的性质

根据平均运算的定义，可得平均运算的如下性质：

1) $M(x, y, h, k)$ 满足平均公理：

边界条件 M1 $\min(x, y) \leq M(x, y, h, k) \leq \max(x, y)$

单调性 M2 $M(x, y, h, k)$ 关于 x, y 单调增

连续性 M3 $h, k \in (-1, 1)$ 时， $M(x, y, h, k)$ 关于 x, y 连续

交换律 M4 $M(x, y, h, k) = M(y, x, h, k)$

幂等性 M5 $M(x, x, h, k) = x$

2) 封闭性 $M(x, y, h, k) \in [a, b]$

3) 双界性 $\min(x, y) \leq M(x, y, h, k) \leq \max(x, y)$ ，即 M1。

4) 分配律 $M(x, M(y, z, h, k), h, k) = M(M(x, y, h, k), M(x, z, h, k), h, k)$

5) 从众性 如 $x, y \leq l$ ，则 $M(x, y, h, k) \leq l$ ；如 $x, y \geq l$ ，则 $M(x, y, h, k) \geq l$ ；

如 $M(x, y, h, k) \leq l$ ，则 $\min(x, y) \leq l$ ；如 $M(x, y, h, k) \geq l$ ，则 $\max(x, y) \geq l$ ， l 为 k 对应的不动点。

3. 平均运算的物理意义

分形平均运算模型的零级完整簇变化如图 7.8 所示，一级完整簇的变化见图 7.11。从图中可以看出：

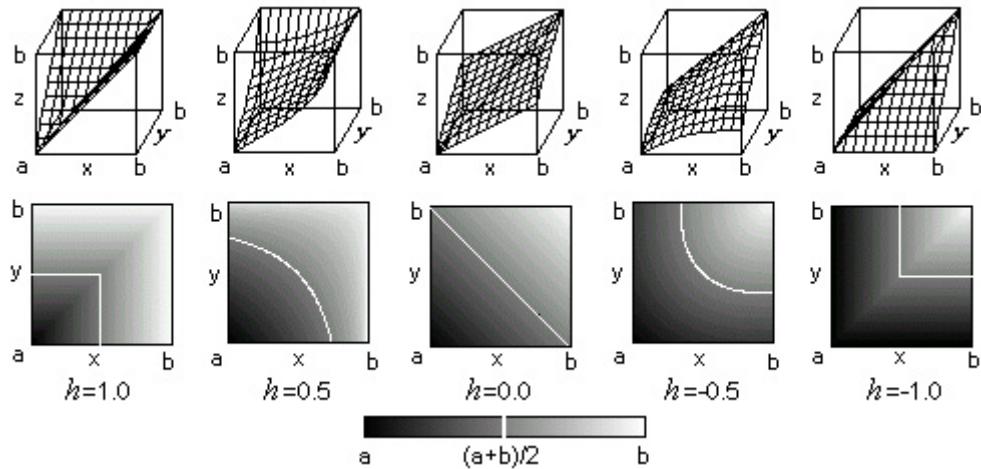


图 7.8 零级分形平均运算模型图

- 1) 平均运算 $M(x, y, h, k)$ 的逻辑学意义是折中，它只能在 $[x, y]$ 中取值。
- 2) $M(x, y, h, k)$ 有一条不变的平均特征线 $M(x, x, h, k) = x$ 。
- 3) 具有从众性。如果 x, y 偏假，则 $M(x, y, h, k)$ 偏假；如果 x, y 偏真，则 $M(x, y, h, k)$ 偏真；如果 $M(x, y, h, k)$ 偏假，则 $\min(x, y)$ 偏假；如果 $M(x, y, h, k)$ 偏真，则 $\max(x, y)$ 偏真。
- 4) 平均运算的偏真性是连续可调的， h 是平均的偏真度： $h = -1$ 时平均的偏真性最小， $M(x, x, h, k)$ 是最小平均，除 $x \in [l, b]$ 且 $y \in [l, b]$ 的所在区域外，其他区域均偏假。随着 h 从 -1 到 1 连续增大，平均运算的偏真性不断提高，偏真区连续增大，但它的偏真区只能增大到 $x \in [l, b]$ 或 $y \in [l, b]$ 的所在区域。

7.3.7 分形组合运算模型

与平均运算的情况类似，在二值逻辑中也不存在组合运算，但在五值以上的多值逻辑和模糊逻辑中，组合运算十分重要[YAGE88, YAGE93, YAGE94]。因为与运算不大于最小值，或运算不小于最大值，平均运算只在最小值和最大值之间变化，它们的变化范围都有局限性。在综合决策中需要有一种可在全局上取值的逻辑运算，泛逻辑学在对决策理论研究的基础上提出了基于“么元 e ”的“组合”运算模型。关于组合运算的提出缘由与么元 e 的深刻含义，请参见文献[HEWL01]，本节主要在泛逻辑中组合运算的基础上，建立任意广义区间 $[a, b]$ 上的组合推理运算模型。

1. 组合命题连接词的定义

【定义】(零级分形组合运算) 由零级 T 性生成元完整簇 $F_o(x, h)$ 代入组合运算基模型生成的零级 T 范数完整簇实现的分形逻辑运算称为“零级分形组合运算”，用组合命题连接词 \odot_h^e 表示。

零级基模型：

$$\begin{aligned} \mathcal{C}(x, y, h) = & \text{ite}\{\min(e', F^{-1}(\max(a, F(x, h) + F(y, h) - F(e', h)), h)) | x+y < 2e'; \\ & N(\min(e'', F^{-1}(\max(a, F(N(x), h) + F(N(y), h) - F(N(e'), h)), h))) | x \\ & +y > 2e'; e'\} \end{aligned}$$

(其中： $e'' = N(e')$ ， $e' = (b-a)(e+1)/2+a$ ， $e \in [-1, 1]$ 是么元)

零级时： $N(x) = b+a-x$

$e'' = N(e') = b+a-e'$ ， 其中： $e' \in [a, b]$ ， $e'' \in [a, b]$

分三段进行计算：

1) 当 $x+y < 2e'$ 时

$$\begin{aligned} \mathcal{C}(x, y, h) = & \min(e', F^{-1}(\max(a, F(x, h) + F(y, h) - F(e', h)), h)) \\ = & \min(e', F^{-1}(\max(a, (b-a)[(x-a)/(b-a)]^m + a + (b-a)[(y-a)/(b-a)]^m + a - ((b-a)[(e'-a)/(b-a)]^m + a)), h)) \\ = & \min(e', F^{-1}((b-a)[\max((a-a), (x-a)^m + (y-a)^m - (e'-a)^m)]/(b-a)^m] + a, h)) \\ = & \min(e', (b-a)[\max(0, ((b-a)[((x-a)^m + (y-a)^m - (e'-a)^m]/(b-a)^m)]^{1/m} + a)] \\ = & \min(e', (b-a)[\max(0, ((x-a)^m + (y-a)^m - (e'-a)^m)/(b-a)^m)]^{1/m} + a) \end{aligned}$$

2) 当 $x+y > 2e'$ 时

$$\begin{aligned} \mathcal{C}(x, y, h) = & N(\min(e'', F^{-1}(\max(a, F(N(x), h) + F(N(y), h) - F(N(e'), h)), h))) \\ = & N(\min(e'', F^{-1}(\max(a, (b-x)^m/(b-a)^{m-1} + a + (b-y)^m/(b-a)^{m-1} + a - ((b-e')^m/(b-a)^{m-1} + a)), h))) \\ = & N(\min(e'', F^{-1}((b-a)[\max((a-a), (b-x)^m + (b-y)^m - (b-e')^m)]/(b-a)^m] + a, h))) \\ = & N(\min(e'', (b-a)[\max(0, ((b-x)^m + (b-y)^m - (b-e')^m)/(b-a)^m)]^{1/m} + a)) \\ = & b+a-\min(e'', (b-a)[\max(0, ((b-x)^m + (b-y)^m - (b-e')^m)/(b-a)^m)]^{1/m} + a) \end{aligned}$$

3) 当 $x+y=2e'$ 时

$$\mathcal{C}(x, y, h) = e' = (b-a)(e+1)/2+a$$

其中四个典型点的算子为：

上限组合，模糊组合算子：

$$\mathcal{C}(x, y, 1) = \text{ite}\{\min(x, y) | x+y < 2e'; \max(x, y) | x+y > 2e'; e'\}$$

中极组合，概率组合算子：

$$\mathcal{C}(x, y, 0.5) = \text{ite}\{(x-a)(y-a)/(e'-a) + a | x+y < 2e';$$

$$(xb+yb-xy-e'b)/(b-e') \mid x+y>2e'; e' \}$$

中心组合，有界组合算子： $C^e(x, y, 0) = \Gamma_a^b [x+y-e']$

下限组合，突变组合算子： $C^e(x, y, -1) = \text{ite}\{a \mid x, y < e'; b \mid x, y > e'; e'\}$

【定义】(一级分形组合运算) 由一级 T 性生成元完整簇 $F(x, h, k)$ 代入组合运算基模型生成的一级 T 范数完整簇实现的分形逻辑运算称为“**一级分形组合运算**”，

用与命题连接词 $\odot_{h,k}^e$ 表示。

$$\begin{aligned} C^e(x, y, h, k) = & \text{ite}\{\min(e', F^{-1}(\max(a, F(x, h, k) + F(y, h, k) - F(e', h, k)), h, k)) \\ & \mid x+y < 2e'; N(\min(e'', F^{-1}(\max(a, F(N(x, k), h, k) + F(N(y, k), h, k) - F(N(e', k), h, k)), h, k)), k) \mid x+y > 2e'; e'\} \\ & (\text{其中： } e'' = N(e', k), e' = (b-a)(e+1)/2+a, e \in [-1, 1]) \end{aligned}$$

2. 组合运算的性质

根据组合运算的定义，可得组合运算的如下性质：

1) $C^e(x, y, h, k)$ 满足组合公理：

边界条件 C1 当 $x, y < e'$ 时， $C^e(x, y, h, k) \leq \min(x, y)$ ；当 $x, y > e'$ 时，
 $C^e(x, y, h, k) \geq \max(x, y)$ ；当 $x+y=2e'$ 时， $C^e(x, y, h, k) = e'$ ；否则： $\min(x, y) \leq C^e(x, y, h, k) \leq \max(x, y)$ 。

单调性 C2 $C^e(x, y, h, k)$ 关于 x, y 单调增

连续性 C3 $h, k \in (-1, 1)$ 时， $C^e(x, y, h, k)$ 关于 x, y 连续

交换律 C4 $C^e(x, y, h, k) = C^e(y, x, h, k)$

幺元律 C5 $C^e(x, y, h, k) = x$

2) 封闭性 $C^e(x, y, h, k) \in [a, b]$

3) 逆元律 $C^e(x, 2e'-x, h, k) = e'$

4) 弃权律 $C^e(e, e, h, k) = e$

5) 与或性 $T(x, y, h, k) \leq C^e(x, y, h, k) \leq S(x, y, h, k)$

3. 组合运算的物理意义

分形组合运算模型的零级完整簇变化如图 7.9 所示，其灰度图为 7.10，一级完整簇的变化见图 7.11。从图中可以看出：

1) 组合运算的逻辑学意义是综合决策，它可以在 $[a, b]$ 中取值，并有表示弃权的幺元 e, e 是组合运算的与、或性分界线。

2) $C^e(x, y, h, k)$ 有两条组合特征线： $C^e(x, e, h, k) = x$, $C^e(e, y, h, k) = y$ 。

3) e 的连续可调性： e 是组合运算的决策门限值， $e=-1$ 表示不设门限控制，

组合运算退化为或运算。随着 e 从 -1 到 1 连续增大，门限值不断提高，组合运算的或运算区域不断减小，与运算区域不断扩大。 $e=0$ 是正常门限值，与、或区域各半， $e=1$ 表示最高门限控制，组合运算退化为与运算。

4) 组合运算随 h 连续可调， h 是组合运算的宽容度， $h=-1$ 表示宽容度最小，如果 $x, y > e'$ ，则 $C^e(x, y, -1, k) = b$ ；如果 $x, y < e'$ ，则 $C^e(x, y, -1, k) = a$ 。随着 h 从 -1 到 1 连续增大，组合运算的宽容度连续增大。 $h=0$ 表示组合运算的宽容度适中。 $C^e(x, y, 0, 0) = \Gamma_a^b [x + y - e']$ 。 $h=1$ 表示组合运算的宽容度最大，如果 $x, y > e'$ ，则 $C^e(x, y, 1, k) = \max(x, y)$ ；如果 $x, y < e'$ ，则 $C^e(x, y, 1, k) = \min(x, y)$ 。

5) 平均运算 $M(x, y, h, k)$ 和组合运算 $C^e(x, y, h, k)$ 的根本差别是前者有幂等性，后者有么元；前者在 $[x, y]$ 中取值，后者在 $[-1, 1]$ 中取值。

组合运算模型一级完整超簇有 e, h, k 三个形参，它的变化图较为复杂，但变化很有规律，本文进行了仿真。当 $e = -1$ 时 $C^e(x, y, h, k) = S(x, y, h, k)$ ； $e = 1$ 时 $C^e(x, y, h, k) = T(x, y, h, k)$ ；读者可以参见与或运算模型的变化图。

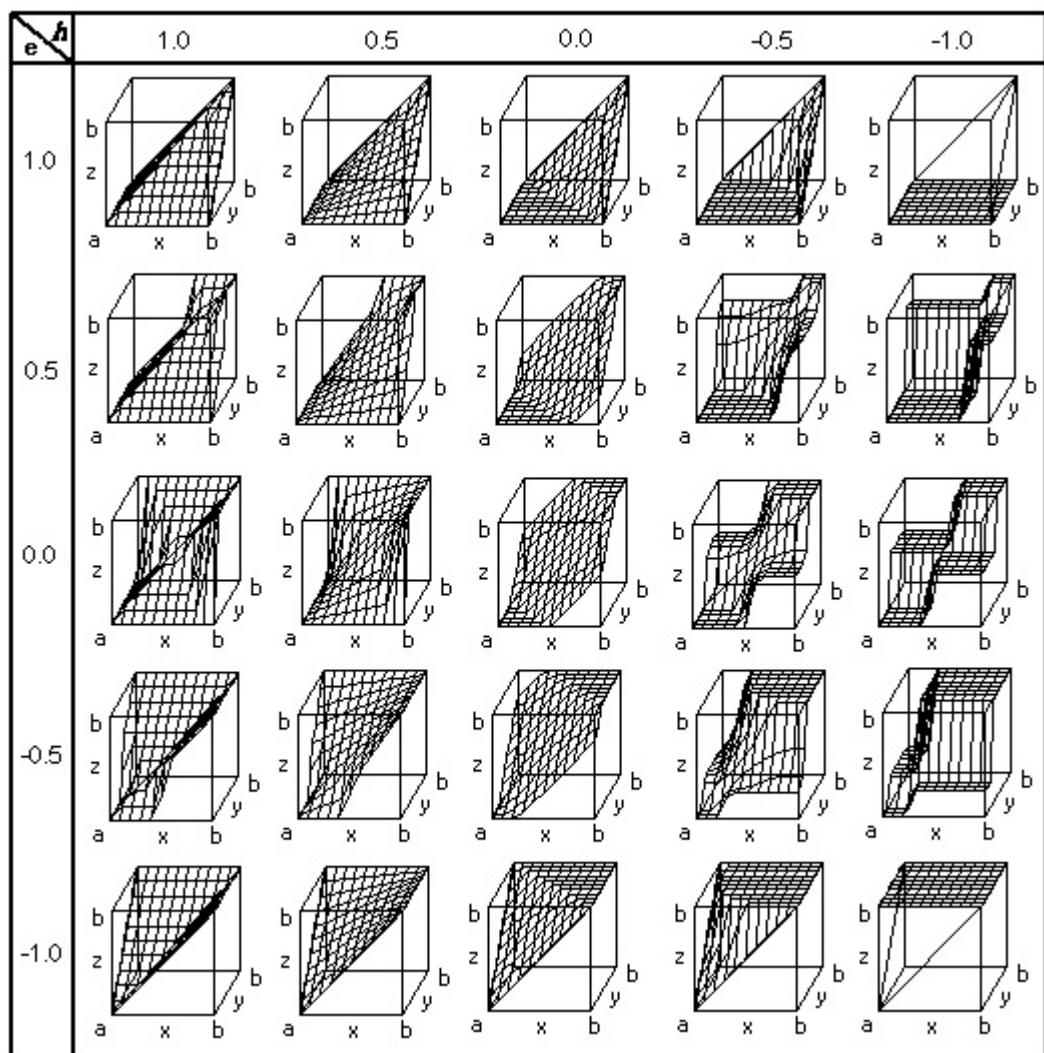


图 7.9 零级分形组合运算三维图

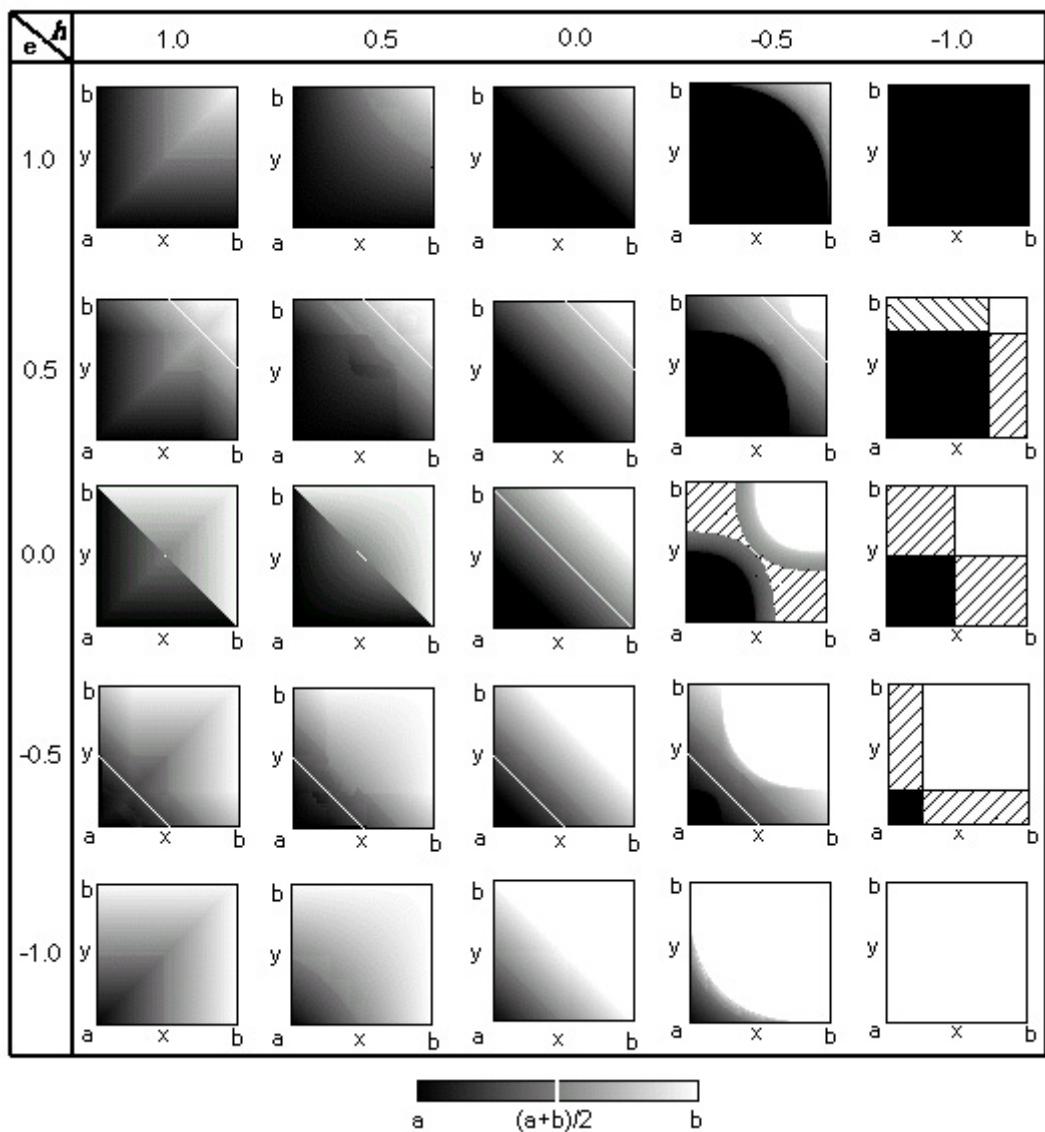
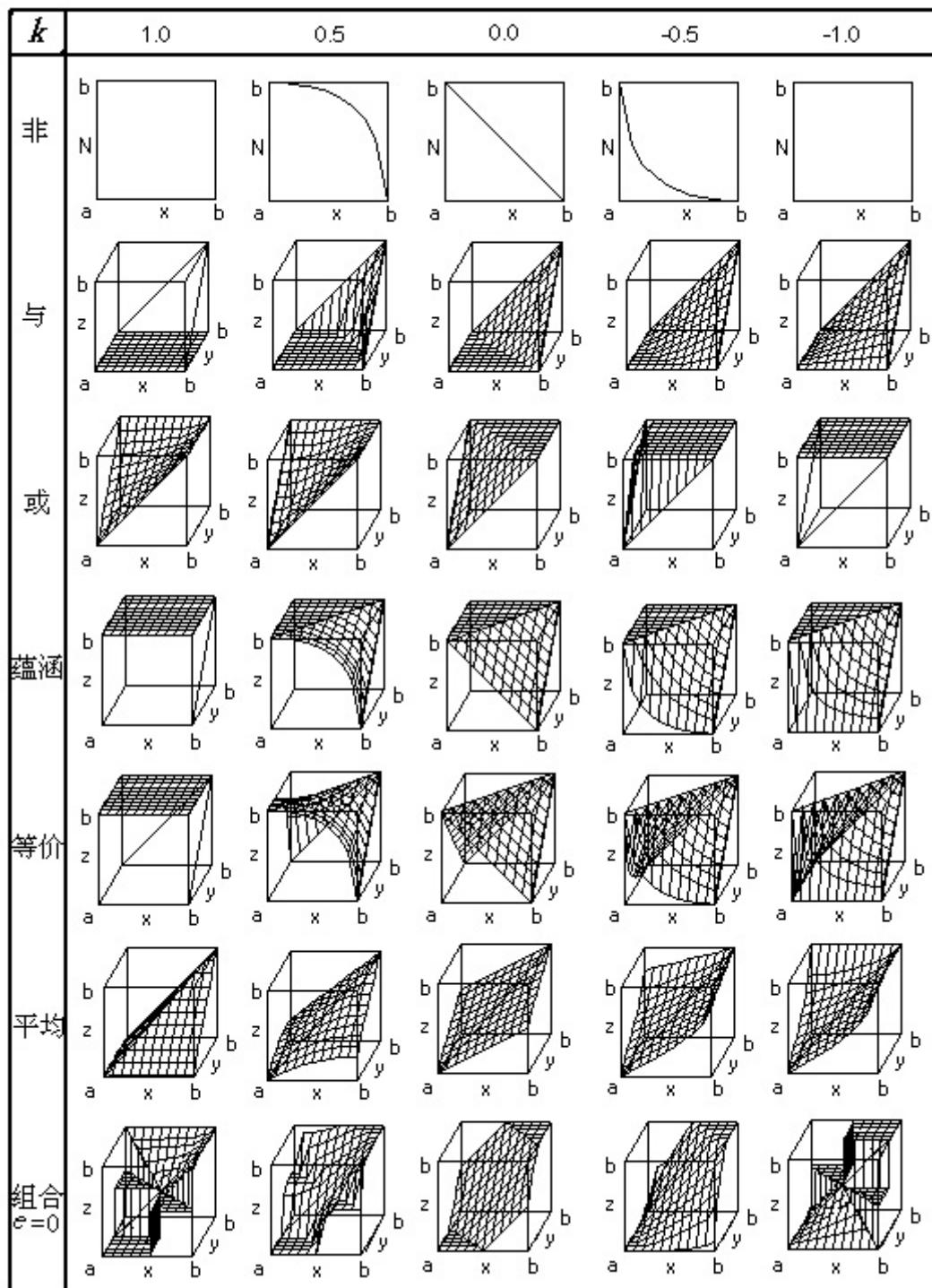


图 7.10 零级分形组合运算灰度图

图 7.11 各连接词一级运算模型的三维图($h=0$)

7.4 小结与说明

连接词的具体运算模型是任何逻辑实现推理的根本依据，连接词的刚性（柔性）决定了逻辑推理的刚性（柔性），泛逻辑创造性的引入参数 h 、 k 后，连接词的运算模型得到柔性化。基于本章的内容，这里说明如下：

(1) 泛逻辑中的 T/S 范数理论与连接词运算模型是本章工作的主要理论基础和参考模型，本章工作是现有泛逻辑理论的延续发展，并使其进一步完善。

(2) 现有泛逻辑主要研究的是标准区间 $[0,1]$ 上的各连接词运算模型，对于广义区间 $[a,b]$ 上的逻辑推理，泛逻辑给出了换基规则，但是还没有阐释在 $[a,b]$ 区间上推理的必要性，也没有研究广义区间 $[a,b]$ 上的 NTS 范数理论，因此没有给出广义区间上的连接词运算模型。

(3) 本文在分形领域引入逻辑推理的概念，发现具有逻辑意义的真值通常并不局限于标准 $[0,1]$ 区间，要转化到 $[0,1]$ 区间也并易事，因此决定研究广义 $[a,b]$ 上的连接词运算模型，这有助于复杂系统的参数推理。

(4) 本章工作不是现有泛逻辑相关内容的简单扩展，而是对真值域的进一步柔性化。本章的终极目标在于建立 $[a,b]$ 区间上的连接词运算模型，但本章没有直接对现有泛逻辑中 $[0,1]$ 区间上的连接词运算模型进行扩展，而是首先从广义 NTS 范数理论入手，从定义上进行扩展，然后自然而然推导出广义区间上的连接词运算模型。这一方面避免了“盲目寻找那些在特定的 $[0,1]$ 区间上消失的项”，另一方面给出了“通用的 $[a,b]$ 区间上的相关运算模型的定义与生成方法”。当 $[a,b]$ 区间退化为 $[0,1]$ 区间时，我们可以验证现有泛逻辑与数学中的相关理论与模型的合理性。

(5) 事实上，我们研究发现了现有 NTS 范数理论和运算模型中的部分不合理性或局限性，由于不同研究者的角度与目的不尽相同，本文对此不打算展开分析，而是直接给出了改进之后的相关定义和运算模型。

(6) 本章工作与先前已有的泛逻辑工作相比，其主要区别在于：

- 把 $[0, 1]$ 区间扩展到 $[a, b]$ 区间上，研究广义 TS 范数理论和连接词运算模型。
- 对 TS 性生成元的定义进行了修正，给出了 TS 性生成元的两种基本类型。
- 在现有 $[0, 1]$ 上的 T/S 范数理论中，算子 $T(x, y) = f^{-1}(\max(f(0), f(x) + f(y) - 1))$ ，算子 $S(x, y) = g^{-1}(\min(g(1), g(x) + g(y)))$ ，此定义不能把“自守增型”和“极限减型”两类 T/S 性生成元统一在同一个 T/S 范数簇中。本章修改为 $S(x, y) = g^{-1}(\min(b, g(x) + g(y) - a))$ ， $T(x, y) = f^{-1}(\max(a, f(x) + f(y) - b))$ ，实现了对两类生成元的统一表达。

• 由于在 $[a, b]$ 上研究，以及算子 $T(x, y)$ 和 $S(x, y)$ 的修改，相关定义、定理、及连接词的运算模型均发生了变化。但当 $[a, b]$ 退化为 $[0, 1]$ ，本文中的多数表达式与现有泛逻辑中的相同，另有部分由于对现有公式的修改完善而有所不同。

第八章 分形逻辑与分形混沌系统仿真

本章主要以仿真的手段来进一步探讨分形与混沌、逻辑之间的相关性。内容主要有：(1)探讨了广义 NT 性生成元的分形特性与初值敏感性，对分形逻辑的连接词运算模型仿真。(2)对格分维在康托集和几何图象中的逻辑运算进行图象仿真。(3)对典型的分形混沌系统进行图象仿真。

仿真是相关性推理模型中的步骤之一，主要是对已有理论的验证，或对相关思想的图象表达，其工作量较大。但由于其本身并不具有创新性，本章尽量从简介绍，对于算法设计没有展开，而是直接给出仿真系统或仿真图象。

8.1 分形逻辑的连接词运算仿真

分形逻辑的连接词运算模型建立在广义 NT 性生成元及其范数的基础之上，本节首先探讨广义 NT 性生成元自身的分形特性和初值敏感性，然后给出连接词运算模型的仿真系统。

8.1.1 广义 NT 性生成元的分形特性

在分形理论中，如果某系统中变量 X 与 Y 之间存在关系： $y=cx^D$ ，则 D 可以被认为是相关参数的分形维数，且存在关系 $(dy/y)/(dx/x)=D$ ，系统中因变量的相对变化值与自变量的相对变化值是线性关系，此时可以称此系统是自相似系统。

前面给出了广义幂型 NT 性生成元，即 $f(x)=(b-a)[(x-a)/(b-a)]^m+a$ ，对于 N 性生成元而言， $m>0$ ， $f(x)$ 是常规 N 性生成元；对于 T 性生成元而言， $m\in R$ ，包含自守增型和极限减型两种类型的生成元。下面来研究生成元 $f(x)$ 自身的分形特性。

对 $f(x)-a=(b-a)[(x-a)/(b-a)]^m$ 两边取对数得到：

$$\ln(f(x)-a)=\ln[(b-a)[(x-a)/(b-a)]^m]=\ln(b-a)+m\ln[(x-a)/(b-a)]$$

再两边微分得到：

$$d(\ln(f(x)-a))=d(\ln(b-a))+md(\ln[(x-a)/(b-a)])=md(\ln[(x-a)/(b-a)])$$

$$\text{于是: } \frac{1}{f(x)-a}d(f(x)-a)=m\frac{b-a}{x-a}d\left(\frac{x-a}{b-a}\right)=m\frac{1}{x-a}d(x-a)$$

设 $f'=f(x)-a$, $x'=x-a$, 则上式可写为：

$df'/f'=m(dx'/x')$, 于是：

$$(df'/f')/(dx'/x')=m$$

如果生成元 $f(x')$ 被认为是描述复杂系统中某参量的分布函数，则对于确定的 m

而言，由于系统中因变量的相对变化值(df'/f')与自变量的相对变化值(dx'/x')是线性关系，因此该系统是自相似系统，其自相似分维就是 m 。

因此，对于广义 NT 性生成元 $f(x) = (b-a)[(x-a)/(b-a)]^m + a$ ，当 $a=0$ 时， $f(x)$ 自身也具有分形特性，这种特性反映在 m 为确定值时的具体连接词运算模型中。当 $a \neq 0$ 时， $f(x)$ 自身不是自相似的。但无论如何， $f'(x')$ 却是自相似的，它在一定程度上也体现了 $f(x)$ 在分形方面的特性。

- 在这个意义上，本文的分形逻辑具有一定的分形特性。

8.1.2 广义 NT 性生成元的初值敏感性

这里，我们进一步讨论 NT 性生成元的初值敏感性，初值敏感性是混沌系统的主要特征之一，其数学定义是[ZEWQ93]：

【定义】 在系统 $\{X, f\}$ 中，如果存在 $N, \epsilon > 0$ ，使得对任意的 $x \in X$ 和任意的球 $B(x, \epsilon)$ ，都存在 $y \in B(x, \epsilon)$ 和整数 $n \geq 0$ ，使得

$$\rho(f^n(x), f^n(y)) > N$$

则称系统 $\{X, f\}$ 是对初始条件敏感的。

上述定义的物理意义是：对于集 X 中的距离小于 ϵ 的非常接近的两初始点 x 和 y ，在经过有限次(n)的 f 函数迭代之后，其结果 $f^n(x)$ 和 $f^n(y)$ 的距离可以大于任意给定的正数 N 。

对函数簇 $f(x) = (b-a)[(x-a)/(b-a)]^m + a$ ，讨论的系统为 $\{(a, b), f(x)\}$ ， $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上是连续严格单调函数，且 $f(b)=b$ 。

(1) 当 $m > 0$ ， $f(x)$ 是自守函数， $f(x) \in (a, b)$ 。对于另一点 $y \in (a, b)$ ，无论如何取值均有 $f(y) \in [a, b]$ ；迭代次数 n 无论多大， $f^n(x)$ 和 $f^n(y)$ 仍在 (a, b) 之中。因此系统 $\{(a, b), f(x)\}$ 对初始条件是不敏感的，这使得生成元 $f(x)$ 具有自封闭性，它是相关逻辑运算封闭性的必要条件。

(2) 当 $m < 0$ ， $f(x)$ 是极限函数， $f(a) = \infty$ ，且 $f(x) > b$ 。对于任意两初始点 $x, y \in (a, b)$ ，迭代 1 次之后的函数值均大于 b 。当 $x \rightarrow a$ 、且 $y \rightarrow b$ 时， $\rho(f^1(x), f^1(y))$ 可以大于任意大的整数 N ，因此此时的系统 $\{(a, b), f(x)\}$ 对初始值是敏感的，它不具有封闭性，在相关逻辑时必须使用限幅函数。

- (3) 当 $m=0$ 时， $f(x)$ 为常值 a ，系统 $\{(a, b), f(x)\}$ 对初始值不是敏感的。

参见图 7.1，当 $m > 0$ 时对应自守增型 T 性生成元，它对初值不是敏感的；当 $m < 0$ 时对应极限减型 T 性生成元，它对初值是敏感的。

- 在这个意义上，当 m 取适当值时，本文的分形逻辑具有一定的混沌特性。

但无论 NTS 性生成元对初值是否敏感，由其生成的 NTS 范数簇和相应的连接词运算模型肯定对初值不是敏感，这是由逻辑运算的封闭性决定的。

8.1.3 连接词运算仿真系统

分形逻辑的连接词运算仿真建立在广义 NTS 性生成元的基础之上，仿真一方面可以帮助我们验证相关理论与运算模型的正确性，发现其中不完善之处，进而改进理论；另一方面能够把这些理论与模型形象生动的展示出来，便于理解。

如图 8.1 所示连接词运算仿真系统，其主要功能有：

- (1) 所有连接词运算都在广义区间 $[a,b]$ 上进行，用户可以选定需要的换基规则。
- (2) 系统实现了对 7 种连接词（非、与、或、蕴涵、等价、平均、组合）的零级和一级运算模型的仿真。参见第七章中的各运算模型变化图，这里不再列出。
- (3) 参数 h 、 k 及么元 e 可在 $[-1, 1]$ 间连续变化，可以看到图形的有规律变化。
- (4) 坐标 XY 轴的角度可以在 $[0, 360]$ 度之间自由调整，可以选择用点或用线绘图的精度，不同部分可用不同的颜色，便于从各个视角来观察图的变化情况。
- (5) 仿真过程中的数据与图象可以输出保存，便于集中分析。

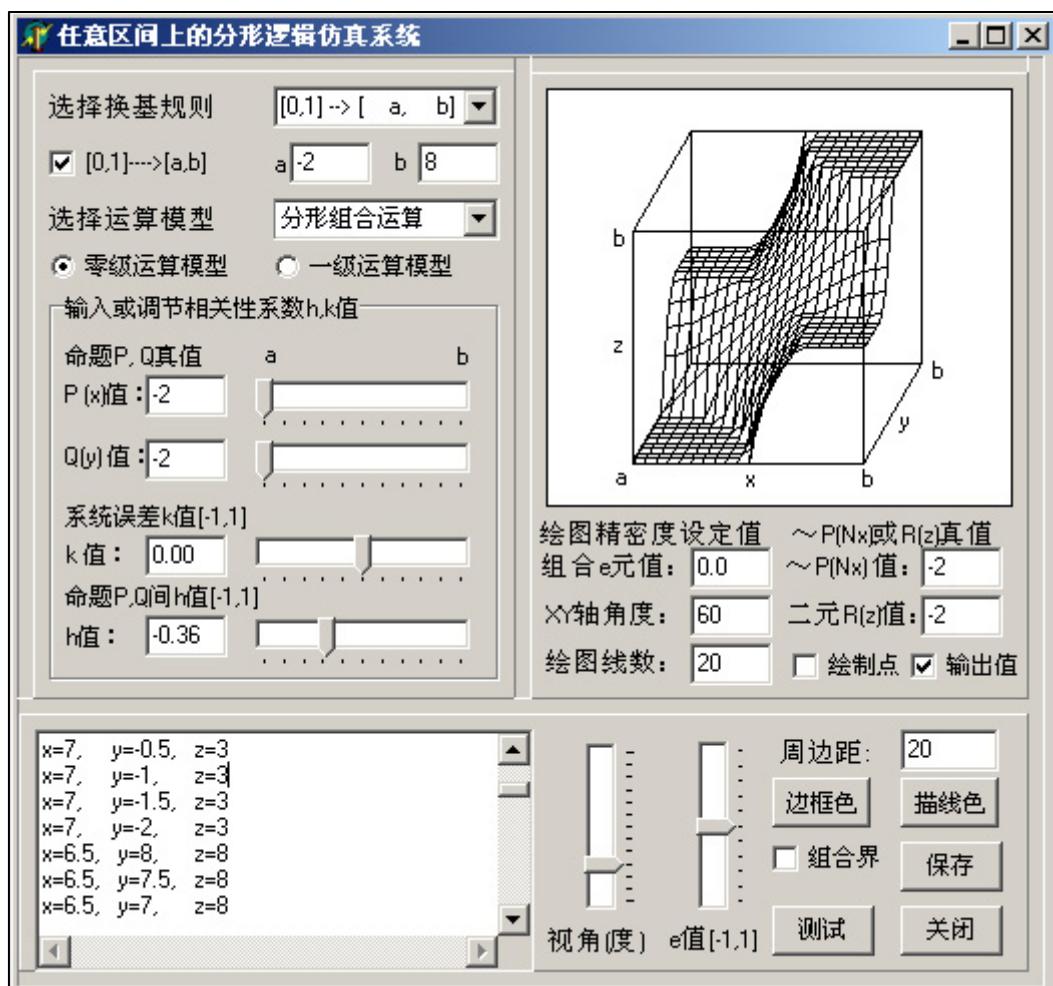


图 8.1 分形逻辑的连接词运算仿真系统

8.2 格分维理论的应用仿真

把格分维理论应用到康托集和任意几何图象的分形逻辑运算之中，可以从仿真图象和计算数据来验证其合理性，相关研究详见 6.3 节。

8.2.1 康托集的格分维与逻辑运算仿真

利用格分维理论来仿真康托集的逻辑运算，为对经典康托集的研究提供了一种新的思路。仿真图象如图 8.2 所示。

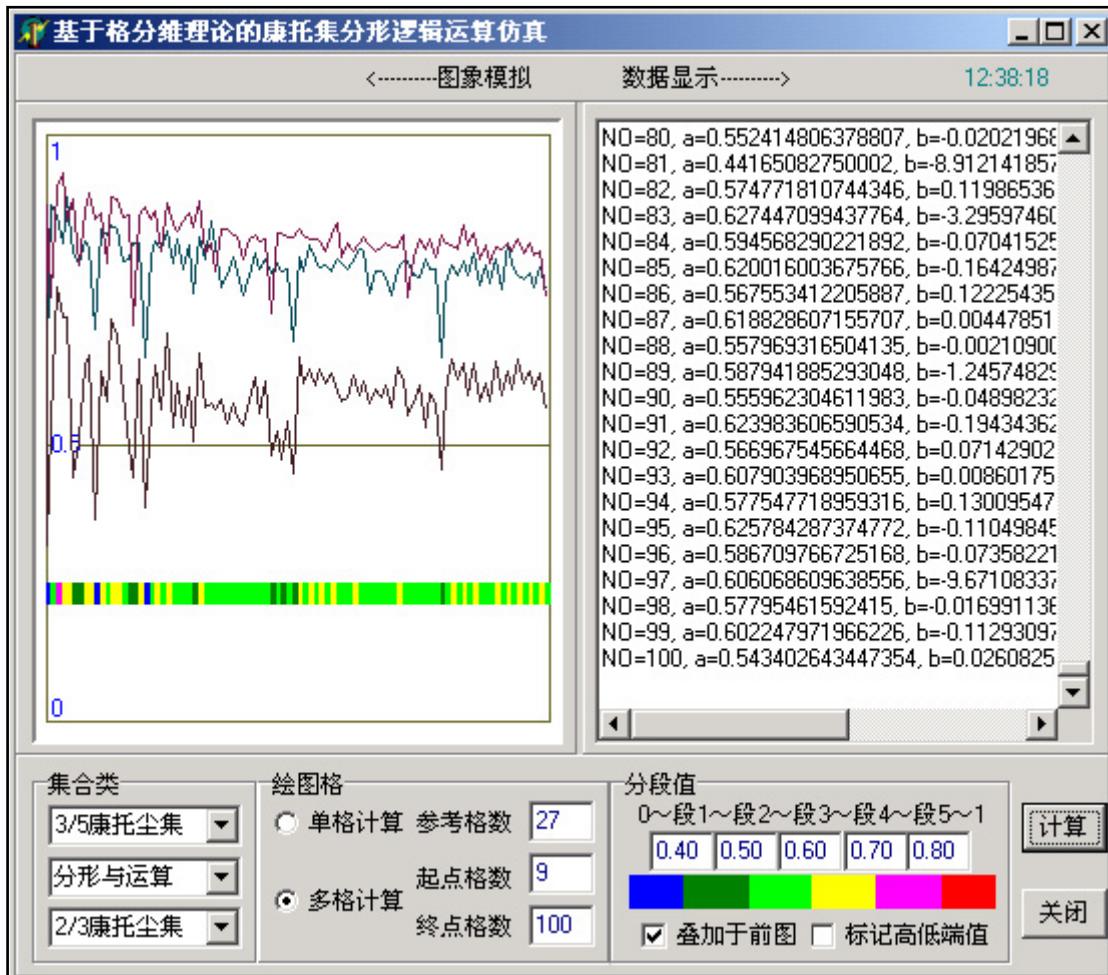


图 8.2 康托集的格分维与逻辑运算仿真系统

8.2.2 几何图象的格分维与逻辑运算仿真

针对几何图象的格分维与分形逻辑运算，开发了仿真系统，图 8.3 是其界面之一，主要功能有：

(1) 系统可以根据图象的大小自动选择参考空间，求取本征测度，并计算任意图象的分形维数；同时也支持用户自定义测度进行分维的计算。

- (2) 可以从磁盘上打开任意的图象文件，并计算其分形维数。可以打开两个图象，并对其进行“非与或”以及“平均、组合”等逻辑运算，并给出分析结果。
- (3) 系统提供测度的压缩与延拓变换，可以把 D_1 维图象的分维变换到 D_2 维，如把二维的分维值变换到 $[0,1]$ 之间等。在计算分形维数的同时，可以统计图象中的黑白点个数，求取图形对象的代数测度大小，并绘制测度与分维的关系图。
- (4) 所有中间图象与计算数据都可以根据用户设置输出保存，以便日后分析。



图 8.3 几何图象的格分维与逻辑运算仿真系统

8.3 典型分形与混沌系统的图象仿真

8.3.1 仿真方法与仿真系统设计

1. 常用的仿真方法

关于分形与混沌系统的计算机仿真方法，主要有字符串替换算法(L 系统)，迭代函数系统法(IFS)、规则迭代法，DLA (受限扩散凝聚) 模型法、拉普拉斯法等。其中，字符串替换算法、迭代函数系统法、及规则迭代法是最常用的方法。有关各方法的使用已有较多的文献[CHJZ98, DOLK91, ZEWQ93]。

2. 仿真系统设计

本文主要选用 DELPHI6.0 和 VC6.0 为开发环境[GEHY02, AMEJ02]。也有少数的程序在 VS.NET 和 VB 环境中开发[KOUR02]。

整个仿真系统的设计包括：数据库设计、系统界面设计、仿真功能设计、控制参数设计、图象保存与文档说明等。

通过对典型的分形混沌系统的仿真，可以进一步了解分形、混沌、与逻辑的相关性。本文开发的分形与混沌仿真系统，包括了该领域的经典仿真内容，其主界面如图 8.4 所示。

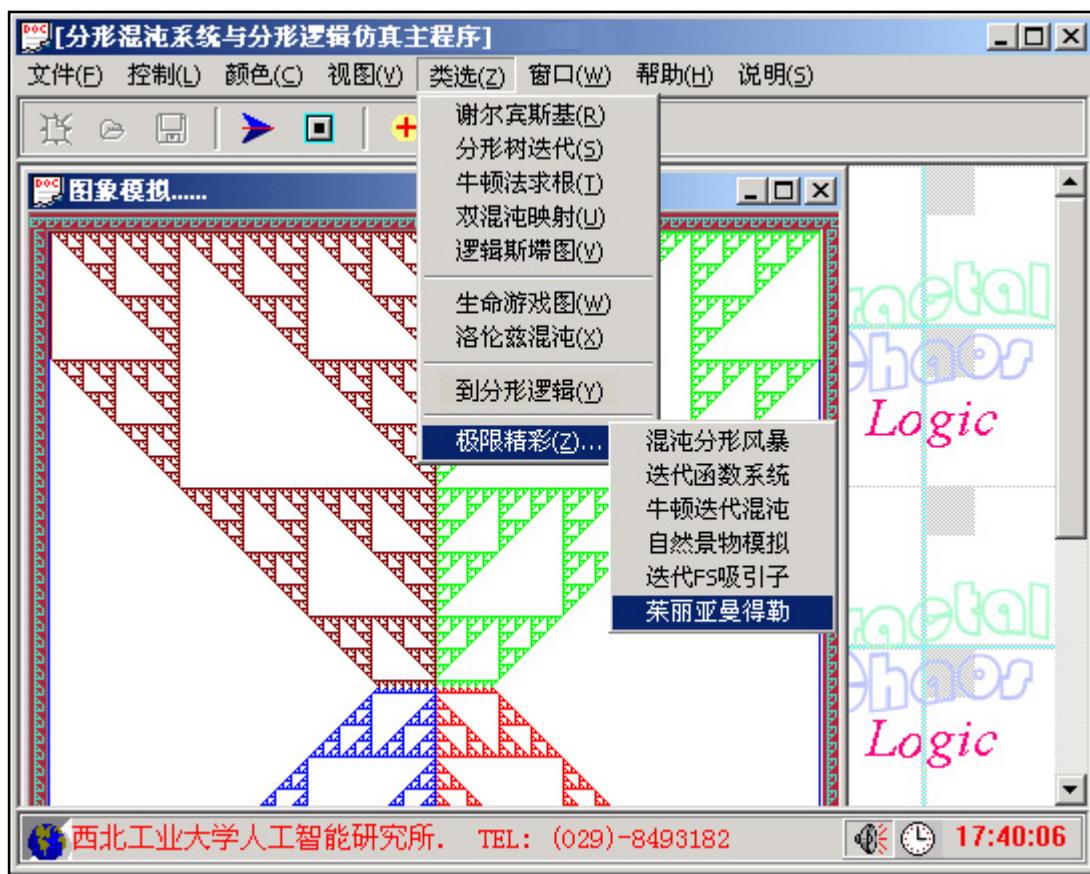


图 8.4 分形混沌系统与分形逻辑的仿真主界面

8.3.2 分叉方程仿真及其自相关性分析

1. Logistic 分叉方程的函数图象

考虑著名的逻辑斯谛克分叉方程：

$$x_{n+1} = \lambda x_n (1 - x_n), \text{ 其中: } 1 < \lambda < 4, 0 < x_0 < 1, n = 0, 1, 2, \dots$$

它是美国普林斯顿大学的生态学家 R.May 在研究昆虫群体繁殖规律时提出的一个数

学模型。设连续映射 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 由 $f(x) = \lambda x(1-x)$ 给出，现在来研究对 $f(x)$ 实施无穷次迭代之后的函数图象。

当 $1 < \lambda < 3$ 时， $f(x)$ 有一个不稳定的不动点 0 和一个稳定的不动点 $1 - 1/\lambda$ ，所以对所有 $(0, 1)$ 中的 x ， $f^n(x) \rightarrow 1 - 1/\lambda$ 。 $\lambda = \lambda_1 = 3$ 是一个临界值，这时 $1 - 1/\lambda$ 变成不稳定的不动点，在该点处分裂为 2 周期的稳定轨道，如图 8.5。同理可以计算得知： $\lambda = \lambda_2 = 1 + \sqrt{6}$ 是另一个临界值，从此点开始，周期为 2 的轨道不再稳定，而是被周期为 4 的轨道所代替。

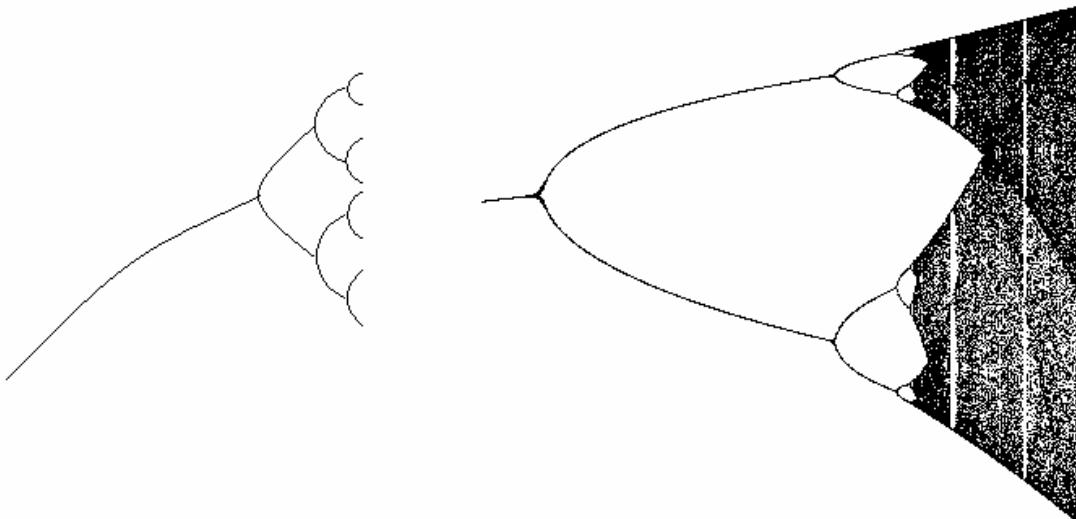


图 8.5 Logistic 方程的分叉轨道图

2. Logistic 分叉方程的广义自相关性

这里从分形逻辑的广义自相关性的角度来分析 Logistic 分叉方程。前面介绍到：0 和 $1 - 1/\lambda$ 是方程 $f(x)$ 的不动点，根据广义自相关性 k 的求解， k 对应的 l 值反映由 $f(x)$ 生成的 N 范数的不动点，我们来计算 l 值和 k 值。

设 $f(x) = \lambda x(1-x)$ ， $f(x)$ 在 $[0,1]$ 区间上不是单调函数，但分别在 $[0,1/2]$ 、 $[1/2,1]$ 区间上是单调函数，于是可以对这两段分别求 l 值。利用直通 NLK 公式得：

$$2f(l_1) = f(0) + f(1/2)$$

$$2\lambda l_1(1-l_1) = 0 + \lambda(1/2)(1-1/2) = \lambda/4$$

$$\text{解方程求得: } l_1 = \frac{2-\sqrt{2}}{4}$$

$$\text{于是广义自相关系数 } k_1 = \frac{2(l_1 - a)}{b - a} - 1 = \frac{2(l_1 - 0)}{1/2 - 0} - 1 = 1 - \sqrt{2}$$

其中区间 $[a, b] = [0, 1/2]$ 。

$$\text{同理, 在 } [1/2, 1] \text{ 区间上, 可求得 } l_2 = \frac{2+\sqrt{2}}{4}$$

$$k_2 = \frac{2(l_2 - a)}{b - a} - 1 = \frac{2(l_1 - 1/2)}{1 - 1/2} - 1 = \sqrt{2} - 1$$

再考察方程 $f(x) = \lambda x(t-x)$, $t \in \mathbb{R}$, 分别在 $[0, t/2]$ 和 $[t/2, t]$ 区间上是连续单调函数, 同样求得: $k_1 = 1 - \sqrt{2} < 0$, $k_2 = \sqrt{2} - 1 > 0$, 即 $k_1 = -k_2 \equiv C$ (常数)。

进一步地, 我们求另一个分叉方程 $f(x) = \lambda \sin(\pi x)$ 的广义自相关系数, 在 $[0, 1/2]$ 和 $[1/2, 1]$ 区间上的 $k_1 = -1/3 < 0$, $k_2 = 1/3 > 0$, 亦有 $k_1 = -k_2$, 也是常数。

通过对 $[0, 1]$ 上的多种类型的分叉方程 $f(x)$ 的分析, 得到了如下的结论:

(1) $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 区间上至少存在 n 个拐点, $n \geq 1$, n 个拐点把 $f(x)$ 分成 $n+1$ 个区间, 在每个区间中 $f(x)$ 是单调的, 故可以求得其广义自相关系数 k_1, k_2, \dots, k_{n+1} 。

(2) 在 $n+1$ 个广义自相关系数 k_1, k_2, \dots, k_{n+1} 中, 第奇数个 k 始终小于零, 而第偶数个 k 始终大于零。

由于 k 有正有负的缘故, $f(x)$ 在迭代过程中与原始值之间发生正负偏离, 从而导致了分叉的产生, 这是对分叉方程的一种新的解释。

8.3.3 生物细胞生长的分形模拟

细胞自动机是分形领域和人工生命领域的经典范例, 把细胞初始状态看成生成元, 把迭代规则看成广义逻辑规则, 我们可以仿真出各种不同的分形和混沌图象。

在一个方格网中, 每个细胞周围有 8 个相邻的细胞, 设参数 NL、ND 为临界生死细胞个数, 定义:

生存规则(R1): 如一个细胞周围有 NL 个细胞为生, 则该细胞为生;

不变规则(R2): 如一个细胞周围有 ND 个细胞为生, 则该细胞的生死状态不变;

死亡规则(R3): 在其它情况下 (如周围细胞数大于 NL、或小于 ND), 该细胞为死, 即该细胞若原先为生, 则转为死, 若原先为死, 则仍旧为死。

依此规则进行迭代, 使细胞生生死死, 则会得到一些规律性的结果。这些简单的规则反映了自然界中这样的生存规律: 对于一个生命, 若其周围的同类生命太少, 则会因为得不到帮助而死亡; 若太多, 则会因为得不到足够的生命资源而死亡。

例如: 取 NL=3, ND=2 时, 则经过 1 次到 4 次迭代之后的状态如图 8.6 所示:

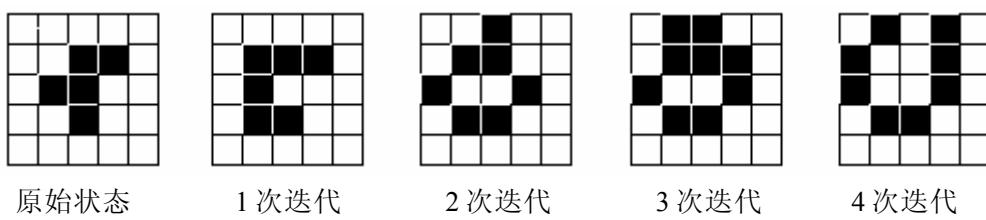
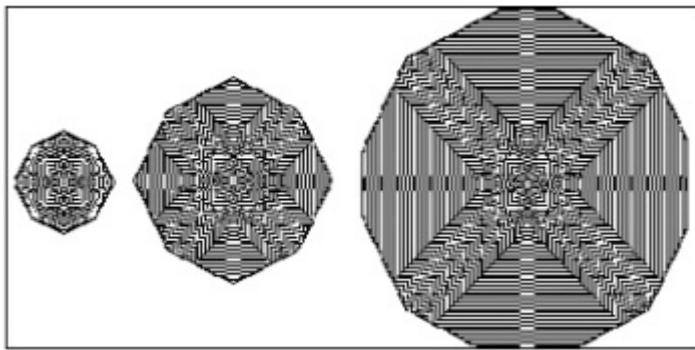


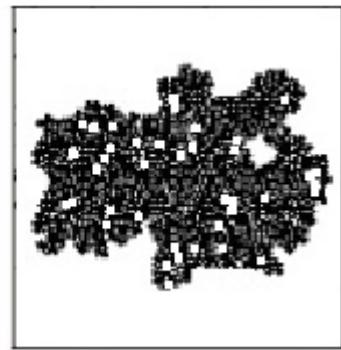
图 8.6 利用规则迭代模拟生物细胞的生长范例

初始细胞是否是随机的，以及迭代规则是否是可变的，都会影响迭代的结果。图 8.7 是在一定初始条件下，使用确定性规则得到的具有一定相似结构的分形图。图 8.8 是在迭代过程中加入随机规则之后的混沌图。



第 40 代 第 100 代 第 200 代

图 8.7 细胞分形图



第 400 代

图 8.8 随机混沌图

8.3.4 朱丽亚与曼得波罗特集仿真

朱丽亚(Zulia)与曼得波罗特(Mandelbrot)集是分形与混沌领域的最为经典范例。详细内容可参见[ZEWQ93, WAXY02]。它们既能在结构上具有典型的自相似性，又能在迭代过程中体现明显的混沌动力学行为。

Julia 集和 Mandelbrot 集均定义在对复函数 $f(z)=z^2+c$ 之上，其仿真方法主要是迭代函数系统，其中要用到逃逸时间算法。本文的仿真系统支持用户自定义复数的初始值、复数次方、局部缩放等。图 8.9(a)、(b)分别是 Julia 集和 Mandelbrot 集的仿真图象，其中选取 $f(z)=z^2+c$ ，初始复数 $c_0=-0.2+0.75i$ 。

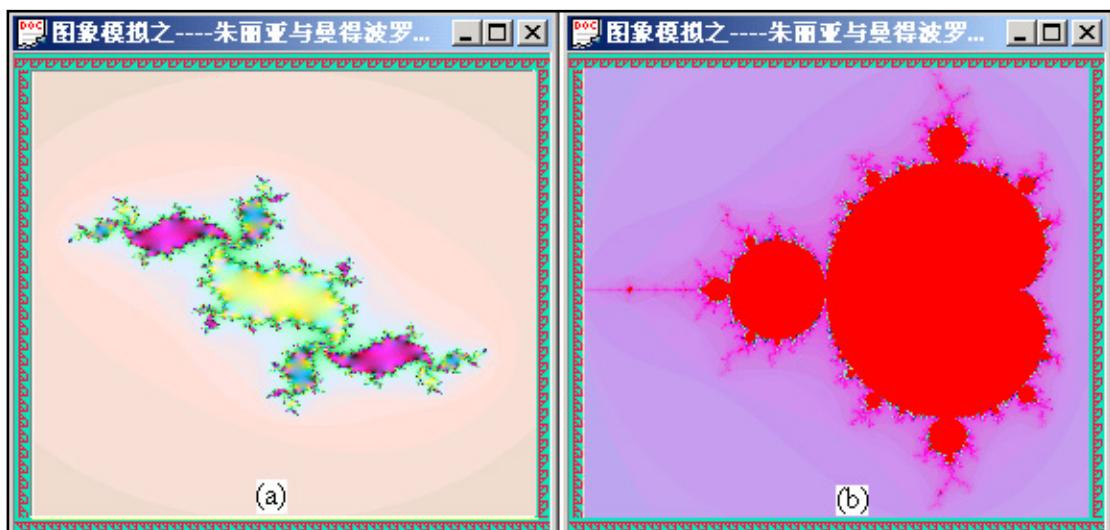


图 8.9 朱丽亚集和曼得波罗特集模拟

8.3.5 洛伦兹混沌吸引子的仿真

洛伦兹混沌吸引子已成为混沌理论的徽标。本文对洛伦兹混沌吸引子的仿真控制界面如图 8.10 所示，图 8.11 给出了吸引子在 YOZ 和 XOY 面上的投影图象，吸引子在 X0Z 面上的投影可参见图 1.3。

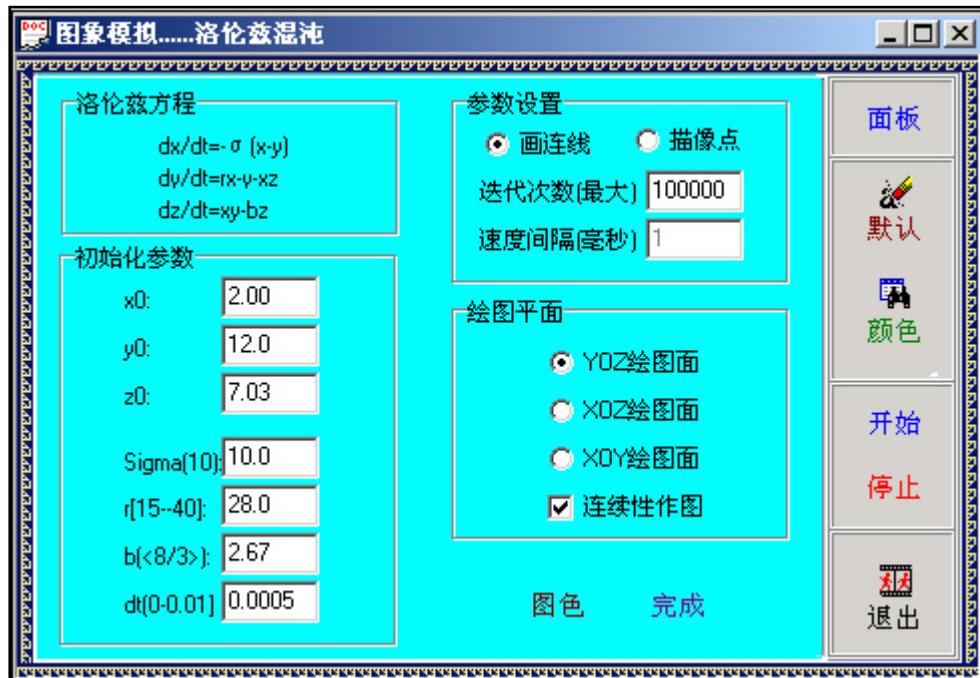


图 8.10 洛伦兹混沌吸引子的仿真控制界面

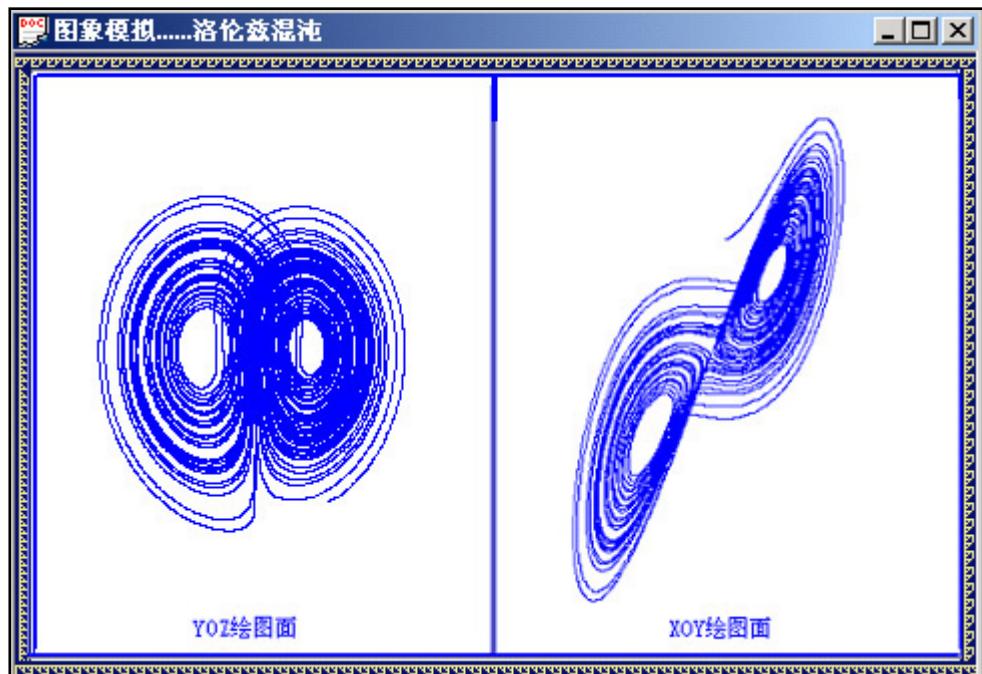


图 8.11 洛伦兹混沌吸引子的仿真图象

对于洛伦兹混沌的研究已经取得不少成果。从动力学的角度分析，洛伦兹方程在迭代过程中构成了一个混沌动力系统，各条线之间相互扭结、缠结、但永不相交和重复。从相结构的角度分析，洛伦兹混沌吸引子具有自相似结构，可以用分形维数来描述，对于具体的参数值，可以求出吸引子的分形维数[HARS20]。

8.4 小结与说明

(1) 仿真通常可以帮助人们验证理论的正确性，发现问题并改进理论。根据图 2.5 中的复杂系统相关性推理模型，本论文是一项系统性的研究工作，本章内容是其中的第⑦部分。写出本章内容的主要目的在于体现此模型的完整性，这有助于读者对模型的全面理解。

(2) 鉴于仿真是对已有理论的再现，并没有实质创新，因此本章主要介绍与仿真相关的一些工作，简要罗列仿真内容，而没有详细阐述各类仿真的参数设置与算法设计，而是简要给出了部分典型的仿真图象。

(3) 本章仿真的主要内容有：

对分形逻辑的连接词运算模型的仿真研究是研究广义 NTS 性生成元的定义与性质的重要手段。通过参数 h 、 k 的连续变化，可以看到运算图形的连续变化。

对康托集和几何图象的分形逻辑运算进行仿真，很好地体现了“参考格空间”和“单位格”对于分形维数的影响程度，有利于理解格分维理论的本质意义。

对典型分形和混沌系统的仿真，展示了由“简单规则”演绎的“复杂行为”，可以帮助我们进一步了解“分形、混沌、逻辑”三者之间的相关性。

(4) 从仿真效果来看，混沌吸引子是空间上的一种相似分形结构；反之，分形结构是时间上的一种混沌动力行为；其中，广义逻辑规则（确定的或随机的迭代规则）则是从分形到混沌的内在动力。

(5) 在仿真过程中，本章还探讨了广义 NT 性生成元的分形特性与初值敏感性，分析了分叉方程与广义自相关系数 k 的关系。把分形逻辑系统的 NT 性生成元同分形混沌系统的特征联系起来，这种思想还是第一次。它为研究分形、混沌、逻辑之间的相关性提供了一种新的思路，扩大了我们的研究视野。

第九章 相关性推理模型与分形逻辑的应用研究

相关性推理模型贯穿了本文的整个内容，前面各章依次对模型中的理论部分进行了系统地研究，本章重点研究其应用模式。针对本文的相关理论，在各章中已经给出了一些应用范例，主要有：

- (1) 在 4.3 节，应用函数拟合法求出了 Schweizer 算子簇的广义相关系数 h 。
 - (2) 在 5.3 节，应用广义 N 范数理论和 k 值求解方法研究了均匀分布、指数分布、正态分布的广义自相关性。
 - (3) 在 6.3 节，应用格分维理论研究了康托集和任意几何图象的分形逻辑运算。
- 本章的应用研究主要包括：
- (1) 研究自动焊机稳定性的柔性控制，它是一个应用 CSRCM 模型的典型范例。
 - (2) 把汉字看成复杂图象，利用格分维理论和分形逻辑运算来研究汉字的分形特性和复杂特性，给出了一种汉字分类的新方法，这是一个综合性的范例。
 - (3) 探讨了分形逻辑的其它应用，以及建立混沌逻辑的思路。

9.1 自动焊机的柔性控制

计算机技术在材料焊接领域的应用研究已经取得辉煌的成绩，我国在 1985 年研制成功华宇 1 型弧焊机器人，之后有多种型号的焊接机器人相继问世。本节尝试把分形逻辑的相关性推理原理，应用到焊接过程的稳定性控制中。

9.1.1 焊接参数稳定性与质量稳定性

在焊接过程中，焊接参数的稳定一致与焊接质量的稳定一致有着密切的联系。焊接参数通常包括焊接电压、焊接电流、焊接速度、焊枪姿势、电弧长短、焊缝位置等。焊接质量稳定性主要根据焊缝的尺寸大小、平整度要求、是否有气孔或气孔的多少等特征值来进行评价，这些特征值决定了焊缝力学性能的好坏。

在焊接过程，控制系统每隔一定时间进行参数的采样、计算、分析、调整，已达到稳定性要求。自动焊机对参数的稳定性控制通常从两个方面着手：①如果该自动焊接安装有配套的视觉摄像系统，则实时对焊缝进行监控，分析其几何形状，计算得到相应的特征参数，然后根据特征参数值决定如何调整某个参数。②某些功能独立的专用焊机，或没有视觉监控系统，或不能直接对焊缝的几何尺寸、平整度等进行采样分析，则通常是通过多次试验，把焊接参数进行某种运算而得到一个阈值，当实际参数的运算结果在阈值的某个范围内时，参数比较稳定，焊缝质量能够满足

要求，否则将进行相应调整。

图 9.1 是 MZ-1000 型埋弧自动焊机，它配有控制柜，可以预先存储控制程序。图 9.2 标示出了焊缝形状及其主要参数。参数 L_{fmax} 是熔池正面最大半径， S_{fmid} 是熔池正面后半部分面积。文献[LINC20]的研究表明：在焊道成形良好的部分， L_{fmax} 稳定在 7.40mm 左右，正负变化为 1.00mm； S_{fmid} 稳定在 37.50mm² 左右，正负变化为 7.50mm²。取 L_{fmax} 范围为[6.40, 8.40]mm， $x_{Lmin}=6.40\text{mm}$ ， $x_{Lmax}=8.40\text{mm}$ ；取 S_{fmid} 范围为[30.0, 54.0]mm²， $x_{Smin}=30.0\text{mm}^2$ ， $x_{Smax}=45.0\text{mm}^2$ 。设焊接过程中的实际参数值为 x_L 、 x_S ，则定义归一化参数：

$$\bar{x}_L = \frac{x_L - x_{Lmin}}{x_{Lmax} - x_{Lmin}}, \quad \bar{x}_S = \frac{x_S - x_{Smin}}{x_{Smax} - x_{Smin}}$$

综合考虑 L_{fmax} 和 S_{fmid} 两个指标，通常定义成形指标 γ 为： $\gamma = 0.5\bar{x}_L + 0.5\bar{x}_S$ 。显然，成形指标 γ 越小表示焊接速度越慢，需要加快；而 γ 越大表示焊接速度越快，需要减慢。文献[LOUY98]经过试验确定了如下七条规则：

- $R_1:$ IF $\gamma < 0.00$ THEN $\Delta V_W = +0.5\text{mm/s}$
- $R_2:$ IF $0.00 \leq \gamma < 0.20$ THEN $\Delta V_W = +0.33\text{mm/s}$
- $R_3:$ IF $0.20 \leq \gamma < 0.45$ THEN $\Delta V_W = +0.17\text{mm/s}$
- $R_4:$ IF $0.45 \leq \gamma < 0.55$ THEN $\Delta V_W = -0.00\text{mm/s}$
- $R_5:$ IF $0.55 \leq \gamma < 0.80$ THEN $\Delta V_W = -0.17\text{mm/s}$
- $R_6:$ IF $0.80 \leq \gamma < 1.00$ THEN $\Delta V_W = -0.33\text{mm/s}$
- $R_7:$ IF $\gamma \geq 1.00$ THEN $\Delta V_W = -0.50\text{mm/s}$

以上产生式规则表达了人们在实际焊接过程中调节焊接速度，保证焊道成形的行为。因此，通过调节焊接参数的稳定性，就可以达到焊接质量的稳定性。通常认为整个焊接系统的稳定性、焊接参数的稳定性、焊接质量的稳定性是一致的。



图 9.1 MZ-1000 型埋弧自动焊机

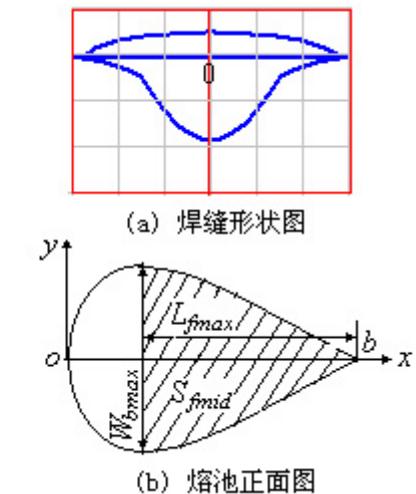


图 9.2 焊缝形状及成形参数

9.1.2 基于相关性推理的柔性控制原理

对于有视觉监控系统的焊接机器人而言，成形指标 γ 可以作为焊接过程的实时性控制指标。但普通焊机不能监控焊缝形状，难以计算 γ 值，因此通常采用第②种方法进行控制。首先需要对焊接参数进行多种组合的试验，然后通过专家鉴定或其它评判标准来确定一个“阈值” δ 。下面结合本文的相关性推理模型来阐述如何实现对焊接过程的柔性控制。

根据图 2.5 和图 4.2 的相关性推理模型，我们可以给出针对焊接过程的柔性控制流程图，如图 9.3 所示，下面依次对各个步骤进行阐释。

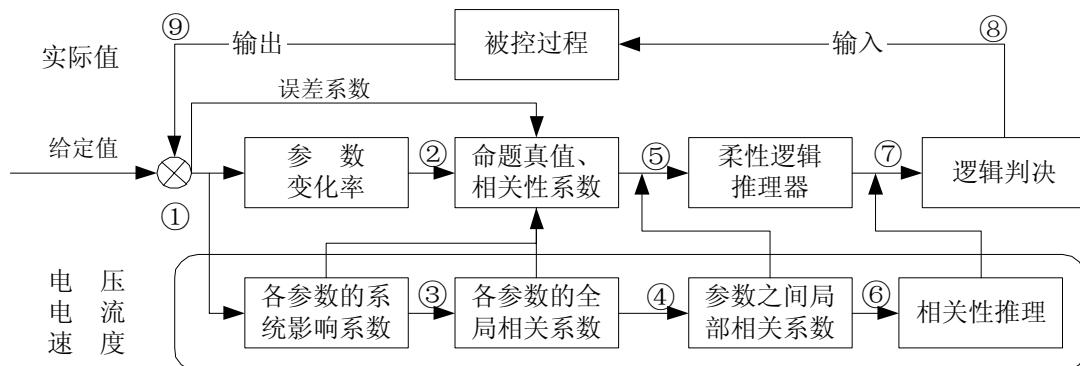


图 9.3 基于相关性推理的柔性控制流程图

① 在整个焊接过程中，焊接参数、焊缝形状、空间位置、环境温度等多种因素都对焊接稳定性有影响，但主要影响因素是“焊接电压、焊接电流、焊接速度”三个参数，本文针对这三个参数来建立柔性控制系统，系统的总目标是要求达到焊缝质量的稳定性，它与焊接过程各参数的稳定性是一致的。设总目标对应命题为 P_0 ， P_0 与阈值相关， P_0 的理想值是 1。设给定参数值分别为 U_0 伏、 I_0 安、 V_0 厘米/分钟（各参数的单位在本文中相同，文后不再声明）。

② 设实际值为 U 、 I 、 V ，参数对应的原始命题记为 P_U 、 P_I 、 P_V ，依据笔者在材料焊接方面的工作[CHZC99]，参数的变化率可定义为：

$$\Delta U = (U - U_0)/U_0, \quad \Delta I = (I - I_0)/I_0, \quad \Delta V = (V - V_0)/V_0$$

命题真值定义为：

$$P_U = 1/(1 + |\Delta U|), \quad P_I = 1/(1 + |\Delta I|), \quad P_V = 1/(1 + |\Delta V|)$$

其物理意义是：命题真值越大，则实际值越接近给定值，参数越稳定。这里的推理区间取为 $[0, 1]$ ，显然，当真值为 1 时，实际值等于给定值。

对于采样时间间隔较长的控制系统，由于各种不确定性因素导致误差产生，还需要对命题真值进行修正，这就要用到广义自相关性的概念。对于实时性很强的系统，由于采样间隔时间很短，参数变化率是主要因素，误差对真值的影响不大，可以不予考虑。

③ 在焊接过程中，电压、电流、速度对焊接质量稳定性的影响程度稍有不同，电压的影响最大，焊接速度其次，电流相对较小。记系统影响系数分别为 h_{SU} 、 h_{SI} 、 h_{SV} 、全局相关系数记为 h_{0U} 、 h_{0I} 、 h_{0V} ，它们根据 4.2 节的方法求解。

④ 各参数两两之间的局部相关系数，也即广义相关系数记为： h_{UI} 、 h_{UV} 、 h_{VI} ，利用公式 $h=1-2|h_0-h_0|$ 求解。

⑤ 柔性逻辑推理器对命题进行何种逻辑运算，需要根据总目标来决定。本文对原始命题进行如下逻辑运算：

$$T_{ij} = P_{ij} = T(P_i, P_j, h_{ij}, k_{ij})$$

$$T_{ij_k} = P_{ij_k} = T(P_{ij}, P_k, h_{ij_k}, k_{ij_k})$$

$$T_{ij_jk} = P_{ij_jk} = T(P_{ij}, P_{jk}, h_{ij_jk}, k_{ij_jk})$$

$$T_{ij_ik_jk} = P_{ij_ik_jk} = T(P_{ij_ik}, P_{jk}, h_{ij_ik_jk}, k_{ij_ik_jk})$$

$$C_1 = T_{ijk1} = T(P_{ij_k}, P_{ik_j}, P_{jk_i}, h_{ijk1}, k_{ijk1})$$

$$C_2 = T_{ijk2} = T(P_{ij_ik_jk}, P_{ij_jk_ik}, P_{jk_ik_ij}, h_{ijk2}, k_{ijk2})$$

(各式中 $i, j, k \in [U, I, V]$, $i \neq j \neq k$ 。其中 C_1 和 C_2 用到分形逻辑的三元与运算)

T_{ij} 和 T_{ij_jk} 都是中间命题，为区别算子 T ，分别用 P_{ij} 和 P_{ij_jk} 表示； C_1 和 C_2 是两个结论命题；算子 $T(x, y, h, k)$ 表示分形逻辑的与运算。以上运算的物理意义是：对三个参数的稳定性进行综合考虑，选择与运算是一种比较保守的方式，其逻辑运算值是递减的。结论命题 C_1 和 C_2 分别由不同的中间命题运算而得，二者通常是不同的，在进行最终评判前，对 C_1 和 C_2 进行平均运算得到总的结论命题：

$$C = C_{UIV} = C_1 \oplus_{h,k} C_2 = M(C_1, C_2, h_{12}, k_{12})$$

在实际焊接过程中，由于各种不确定性因素的影响， C 不可能达到 1，因此需要给定一个阈值 δ ，当 $C \geq \delta$ 时，焊接过程认为是稳定的，否则需要对参数进行调整。

⑥ 相关性推理这一步的主要目的在于求解中间命题的系统影响系数、全局相关系数，这是泛逻辑、也是分形逻辑区别于模糊逻辑和其它经典逻辑控制的关键之处。在 $T(x, y, h, k)$ 和 $M(C_1, C_2, h, k)$ 运算中， h, k 的连续可变性使得算子和命题真值柔性化，它反映了参数间在客观上存在的相关性，更能合理地对焊接参数进行调控。

求解中间命题全局相关性的运算模型请参见 4.2 节内容及表 4.3，这里给出本节用到的与运算和平均运算模型：

$$\text{全局相关性的与运算模型: } h_{0T} = [\Gamma_0(h_{0i}^m + h_{0j}^m - 1)]^{1/m}$$

$$\text{全局相关性的平均运算模型: } h_{0T} = 1 - [(1 - h_{0i})^m + (1 - h_{0j})^m / 2]^{1/m}$$

$$\text{式中: } m = (1 - 2h_{ij}) / (1 - h_{ij}^2); \quad h_{ij} = 1 - 2|h_{0i} - h_{0j}|.$$

⑦ 辩判决就是比较结论命题与目标命题， C 越接近 P_0 （理想值为 1），则系统越稳定。如给定阈值 δ ，则当 $C \geq \delta$ 时系统是稳定的，否则不稳定。

⑧ 阈值 δ 的取值由多次试验或专家评估来决定。在 L_{fmax} 和 S_{fmid} 所在范围内，综合考虑成形因子 γ 的分段调控，通常给出三个阈值：

当 $S \geq \delta_1$ 时为一级稳定，各参数无需调节；
当 $\delta_1 > S \geq \delta_2$ 时为二级稳定，个别参数进行微调；
当 $\delta_2 > S \geq \delta_3$ 时为三级稳定，部分参数适当调整，可以连续工作；
当 $S < \delta_3$ 时，系统处于不稳定状态，最好停机后重新设置程序，然后开机工作。
在多参数系统中，默认的规则是首先调节参数变化率的绝对值最大的那个参数，在当前值上进行正负修正，通常按照变化率的一定比例进行逐步修正。
⑨ 修正后的参数值作为输入再次作用到被控的焊接过程中，并实施焊接行为，并在一定时间后再次采样，输出新的参数值，如此周期性的工作。

9.1.3 柔性控制过程的模拟计算

根据上述原理，用 MZ-1000 自动焊机进行试验，选用 16MnR(A)为母材，模拟计算的相关数据如表 9.1 所示。下面仍依照图 9.3 的流程对各步进行阐释。

① 焊接参数的给定值参照文献[CHZC99]，依照 16MnR(A)的性能要求选取，取 $U_0=35$ 伏， $I_0=400$ 安， $V_0=50$ 厘米/分钟。目标命题 P_0 的理想值为 1，阈值为 $\delta_1=0.86$ 、阈值为 $\delta_2=0.74$ 、阈值为 $\delta_3=0.60$ 。

设某次采样得到的实际值 $U=33.6$ 伏， $I=406$ 安， $V=48.8$ 厘米/分钟。

② 参数变化率： $\Delta U=(33.6-35)/35=-0.0400$ ，同理： $\Delta I=0.0150$ ， $\Delta V=0.024$ 。

原始命题真值： $P_U=1/(1+|\Delta U|)=0.9615$ ，同理： $P_I=0.9852$ ， $P_V=0.9766$ 。

③ 根据 4.2.1，设求得的系统影响系数： $h_{SU}=0.3700$ 、 $h_{SI}=0.2900$ 、 $h_{SV}=0.3400$ ，相应的全局相关系数在数值上与之相等。

④ 原始命题间的广义相关系数： $h_{UI}=1-2|h_{0U}-h_{0I}|=1-2|0.3700-0.2900|=0.8400$ ，同理： $h_{UV}=0.9400$ ， $h_{IV}=0.9000$ 。

⑤ 这一步要结合第④步和第⑥步来完成多个逻辑运算，不考虑误差的影响，取各式中的 $k=0$ 。以求中间命题 T_{UI} 为例说明如下：

$$\begin{aligned} \text{先求得 } m &= (1-2h_{UI}) / (1-h_{UI}^2) = (1-2 \times 0.8400) / (1-0.8400^2) = -2.3098, \text{ 于是} \\ T_{UI} &= P_{UI} = T(P_U, P_I, h_{UI}, k_{UI}) = T(0.9615, 0.9852, 0.8400, 0.0000) \\ &= \max(0, 0.9615^{-2.3098} + 0.9852^{-2.3098} - 1)^{[1/(-2.3098)]} = 0.9485 \end{aligned}$$

⑥ 对于每个中间命题，都要求其相应的全局相关系数。例如，求 T_{UI} 的全局相关系数为：

$$\begin{aligned} h_{0UI} &= [\Gamma_0(h_{0U}^m + h_{0I}^m - 1)]^{1/m} \\ &= \max(0, 0.3700^{-2.3098} + 0.2900^{-2.3098} - 1)^{[1/(-2.3098)]} = 0.2424 \end{aligned}$$

结合第③～⑥步进行多次相关性运算和逻辑运算，求出各中间命题，最后求得结论命题 $C_1=0.8397$ 、 $C_2=0.8004$ ，再求得总的结论命题 $C_{UIV}=0.8351$ 。

⑦ 比较结论命题和阈值，得知 C_{UIV} 间于 δ_1 和 δ_2 之间，比较接近于 δ_1 ，焊接

过程是二级稳定的。由于参数变化率中 $|\Delta U|$ 最大，因此需要对焊接电压做出调整，调整大小结合 $|\Delta U|$ 和 $|C_{UIV} - P_0|$ 的大小依照一定比例确定。

⑧ 把参数调整信息作为被控过程的输入，对电压进行适当修正。

⑨ 再次采样，重复上述各个步骤，使得结论命题 C_{UIV} 达到控制阈值要求。

表 9.1 焊接过程的相关性推理与柔性控制模拟计算数据表

参 数	U	I	V	阈 值	δ_1	δ_2	δ_3
给定值	35.00	400.00	50.00	控制值	≥ 0.8600	≥ 0.7400	≥ 0.6000
实际值	33.60	406.00	48.80	稳定性	一级稳定	二级稳定	三极稳定
相关性推理							
原始命题 P_i				中间命题 T_{ij_jk}			
参 数	P_U	P_I	P_V	参 数	T_{UI_UV}	T_{UI_IV}	T_{UV_IV}
变化率	-0.0400	0.0150	-0.024	真 值	0.9014	0.9276	0.9157
真 值	0.9615	0.9852	0.9766	全局 h_0	0.2052	0.2354	0.2348
系数 h_S	0.3700	0.2900	0.3400	局部 h_{ij_jk}	0.8419	0.9587	0.8833
中间命题 T_{ij}				中间命题 $T_{ij_ik_jk}$			
参 数	T_{UI}	T_{UV}	T_{IV}	参 数	$T_{UI_UV_IV}$	$T_{UI_IV_UV}$	$T_{UV_IV_UI}$
真 值	0.9485	0.9444	0.9635	真 值	0.8780	0.8829	0.9089
全局 h_0	0.2424	0.3215	0.2631	全局 h_0	0.1860	0.1955	0.2325
局部 h_{ij}	0.8400	0.9400	0.9000	局部 h_{ijk2}	0.8842	0.8279	0.9847
中间命题 T_{ij_k}				结论命题 C_1, C_2, C_{UIV}			
参 数	T_{UI_V}	T_{UV_I}	T_{IV_U}	参 数	C_1	C_2	C_{UIV}
真 值	0.9282	0.9349	0.9283	真 值	0.8397	0.8004	0.8351
全局 h_0	0.1940	0.2746	0.2040	全局 h_0	0.1604	0.1704	0.1658
局部 h_{ijk1}	0.8049	0.9370	0.7862	局部 h_{12}	0.8925	0.9380	0.9800
逻辑判决							
由于 $\delta_1 > C_{UIV} = 0.8351 > \delta_2$ ，处于二级稳定； $ \Delta U $ 最大，依比例对电压微调							

9.1.4 本节小结

焊接技术是材料科学的一个重要方面，“焊接过程控制”历来是材料工作者的研究热点，日本在此方面取得了许多重要成果。在国内，目前哈尔滨工业大学的焊接技术相当先进。在焊接机器人的智能控制系统中，模糊逻辑、神经网络、遥感技术、光学测量技术等得到了广泛应用。

由于模糊逻辑是泛逻辑体系中，当 h, k 为某具体值时的特定逻辑，因此模糊逻辑能够应用的领域，泛逻辑和分形逻辑都可以应用，其主要区别在于：模糊逻辑运算的“最小最大”原则太刚性，而泛逻辑考虑了参数之间在客观上存在的广义相关性，因此能够更为合理有效地对系统进行柔性控制[HEWL01]。

泛逻辑是一门理论性较强的学科，但它也可以直接应用到现实问题中。本节详细阐述了相关性推理模型的应用方法，是一个“**教我们如何用 CSCRM 和泛逻辑**”的典型范例。重点要理解广义相关系数的求解与意义，对于同一连接词而言，如果 h 不同，则每次运算时所采用的具体算子不同。

鉴于笔者做过材料方面的工作，且有焊接专业人员的试验支持，我们正试图把本节的方法应用到自动焊机的控制过程中，初步试验的效果令人满意。但对于不同材料，或对同一材料的不同力学性能要求，各焊接参数，阈值范围、调速比例等都是不同的，这都需要做更多的试验，并进行统计分析才能最终决定。

9.2 GB18030 汉字的分形特性与复杂特性

国家标准 GB18030-2000《信息交换用汉字编码字符集基本集的扩充》是我国继 GB2312-1980 和 GB13000-1993 之后最重要的汉字编码标准[GBQD01, LINL01]，是未来我国计算机系统必须遵循的基础性标准之一。为了保证 GB18030 标准的顺利执行，国家标准局还制定了针对产品的《GB18030 标准符合性检测规范》，同时还开发了 GB18030 基本点阵字型库，简称 GB18030 汉字库。

本文对 GB18030 汉字的研究隶属于十五 863 信息领域专项，相关研究主要涉及两个方面：一是对标准字库的解读、压缩、封装，及其在嵌入式系统中的应用；二是利用分形逻辑的相关理论对汉字的在维数上的分形特性、在结构上的复杂特性进行研究，并结合分形逻辑运算来分析相关参数之间的关系。

分形维数与相关参数存在一定的逻辑关系[ZHWQ00]，汉字可以看成由各种笔划组成的复杂图形[MHYJ98]。本文研究 GB18030 汉字的分形特性，编写程序计算了 GB18030 宋体、楷体的 12、16、24、36、48 五种点阵字库中的各 27538 个汉字的分形维数与复杂性参数，并进行系统地分析。这主要包含三个内容：一是确认汉字是否具有分形特性，二是计算汉字分维与复杂性参数，三是分析各参数间的关系。

9.2.1 汉字的图象与格分维计算方法

有关 GB18030 汉字库的存储格式、解读程序详见文献[CHZC02]，这里主要从几何图象的角度来说明。

1. 汉字字模与字图象

GB18030 汉字编码标准的编码空间约为 160 万码位，目前已编码的字符约 2.6 万。国家标准的字符集是以汉字库的形式提供的。汉字库通常是二进制格式文件，每个汉字在库中有确定的位置和大小。以 16 点阵为例，每个汉字用 16×16 的点阵来存储，每个点用一个二进位 1 或 0 来表示。

【定义】(字图象) 汉字字模可以看成是一幅黑白二色的几何图象，存 1 的点表示有图案，存 0 的点仅代表背景色，称此图象为“字图象”。根据格分维理论，选取单位格大小为一个象素，则可以得到相应字号、字体汉字的格图象和本征格空间，此时汉字的格图象即为“字图象”。因此，每个汉字都惟一对应了一幅字图象，反之亦然。如图 9.4 表示“大”字的字图象。

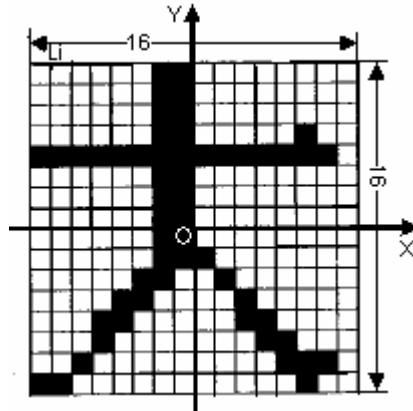


图 9.4 16 点阵汉字字图象

2. 字图象的格分维计算

根据格分维理论，其计算公式为 $D_G(F)=f(S, \delta, F)$ 。结合本节的研究，计算汉字的格分维步骤主要有：

- ① 选取单位格大小 δ 为一个象素，这是计算机图象的最小分辨单位。
- ② 选取参考格空间 S 即为本征格空间，设其维数 $D_0=2$ 。字图象即为对象集 F 。对于本文的字图象，笔者纳入 D_0 为 2 的参考空间中进行研究，其中汉字的分维可以分布在 $[0,2]$ 之间，这打破了传统的认为二维图象的分维应该在 $[1,2]$ 之间的观点。
- ③ 根据字体与字号（高度(H)与宽度(W)），利用程序求得参考格测度集 L ，得到尺度序列 L_i , $i=1,2,\dots,m$ 。
- ④ 利用 L_i 值，分别构造面积为 L_i^2 的方格，得到子空间序列。
- ⑤ 用子空间序列去覆盖整个字图象，则可以得到对应于不同 L_i 的盒子数(N_i)。
- ⑥ 对 L_i 值进行单位化，并计算 $\ln(1/L_i)$ 指和 $\ln(N_i)$ 值。
- ⑦ 以 $\ln(1/L_i)$ 为横坐标、 $\ln(N_i)$ 为纵坐标在二维坐标系中描点作图，并进行线性回归分析，所得直线的斜率即为字图象的分形维数 D 。

9.2.2 汉字的分形特性

研究汉字分形特性的重要内容之一是确认汉字是否具有分形特性。根据分形事物的标度不变性，所拟合 $\ln(N_i) \sim \ln(1/L_i)$ 直线的线性相关程度评估值 R^2 表示了汉字是否具有分形特性或具有分形特性的程度大小， R^2 越接近于 1，则汉字越具有分形特性。一般而言，在统计数学中[SHHF95]， R^2 值高于 0.95 即可认为具有显著的线性相关性， R^2 值在 0.90~0.95 之间亦可认为具有一定的线性相关性。

1. 汉字分形特性与相关性举例

这里依照汉字笔划的多少与繁简程度选取“轍”、“啊”、“戈”三个具有代表性的汉字来分析其分形特性。其中，“轍”是繁体字，其笔划较多；“啊”是字库中的第一个汉字，其笔划比轍要少，“戈”字最简单。图 9.5 是相应的 $\ln(N_i) \sim \ln(1/L_i)$

直线，其中列出了鞞、啊、戈三字的线性回归直线方程。由图可知：鞞、啊、戈三字的 R^2 值分别为 0.9964、0.9899、0.9834，故其具有显著的分形特性。

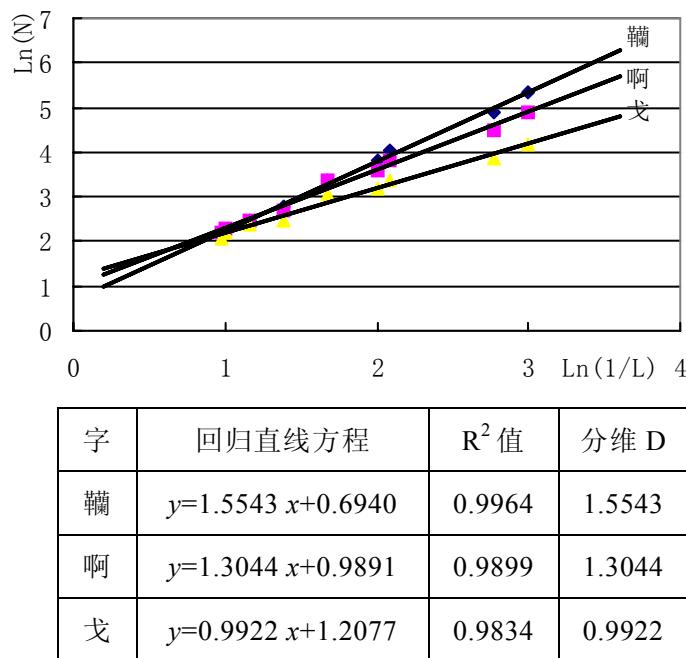


图 9.5 鞞、啊、戈三字的 $\ln(N_i) \sim \ln(1/L_i)$ 直线图

2. GB18030 汉字分形特性相关性分析

本文的计算量为 $2 \times 5 \times 27538$ 个汉字。程序计算时输出了其线性相关性程度 R^2 值。表 9.2 列出了对 GB18030 宋体、16 点阵字库中汉字的分形特性相关性程度 R^2 的分区间统计值。其中，作者对 R^2 值小于 0.90 的汉字作了详细分析，其中 8 个汉字是空格或空白字符图形，有 5 个是一级字库与二级字库之间的间隔字符，其余部分的字图象仅仅在点阵字模的“边界”上有少量为“1”的象素点，其线性相关性较弱。然而由表 9.2 可知：98.9469% 汉字的 R^2 值在 [0.95, 1.00] 中，因此可以说，GB18030 汉字具有显著分形特性，可以利用分形理论来研究汉字的一些性质。

3. GB18030 汉字的分维计算

(1) GB18030 汉字的分维分布

表 9.2 亦列出了 27538 个汉字的分维区间分布。96.6846% 的汉字分维在 [1.00, 1.50] 之间，也有部分汉字的分维小于 1.00，这符合在二维参考空间中计算汉字的分维，可以在 [0, 2] 区间中。

(2) 分维最大与最小的汉字实例

表 9.3 列出了分维最大与最小的各 12 个汉字。由表可见，在分维最大的汉字部

分，均为笔划较多的繁体字；而在分维最小的部分，均为汉字的偏旁部首，其笔划都很简单。因此，有必要研究汉字分维与其笔划数多少的关系。

表 9.2 GB18030 汉字的格分维 D_f 与相关度 R^2 与统计表

R^2 值区间	字数	百分比%	D_f 值区间	字数	百分比%
[0.00, 0.65)	2	0.0036	[0.10, 0.50)	5	0.0182
[0.65, 0.85)	26	0.0944	[0.50, 0.80)	82	0.2978
[0.85, 0.90)	26	0.0944	[0.80, 1.00)	773	2.8070
[0.90, 0.95)	236	0.8569	[1.00, 1.10)	2160	7.8437
[0.95, 0.96)	576	2.0915	[1.10, 1.20)	5789	21.0219
[0.96, 0.97)	3092	11.2281	[1.20, 1.30)	9205	33.4265
[0.97, 0.98)	11231	40.7836	[1.30, 1.40)	7566	27.4748
[0.98, 0.99)	11728	42.5884	[1.40, 1.50)	1905	6.9177
[0.99, 1.00]	621	2.2551	[1.50, 2.00]	53	0.1925
合 计	27538	100	合 计	27538	100
[0.95, 1.00]	27248	98.9469	[1.00, 1.50)	26625	96.6846

9.2.3 汉字分维与结构复杂性的关系

1. 汉字的点数与字图象的饱和度

【定义】(字点数) 在汉字点阵字模中，所有二进制为“1”的点的个数称为汉字的“字点数”或“总点数”，简称“点数”，用 N 表示。如图 9.4 中的“大”字，黑格表示 1，共有 55 个，故其点数为 55。点数在一定程度上反映了汉字的笔划多少。

【定义】(饱和度) 在黑白二色的字图象中，其代表点 1 的黑格数目与点阵的总格子数之比称为该字图象的“饱和度”，用 S 表示。图 9.4 中“大”字的字图象的饱和度为： $55/256=0.2148$ 。字图象的饱和度反映了汉字充满所考察空间的程度，与汉字的点数有直接关系，但又有所不同，“点数”是绝对概念，“饱和度”是相对概念， S 属于 $[0,1]$ 区间。表 9.3 列出了部分汉字的点数或字图象的饱和度。

2. 汉字的不规则度与对称度

当所考察的字库一定时，汉字的点数与其字图象的饱和度成正比例关系，当汉字不规则性相同时，其分维与饱和度也呈明显的正变化关系，如图 9.6(a)。

把汉字看成是若干个点的集合，“字点数”是该集合的代数测度，它反映了集合的大小性质，但并没有考虑集合之中各个元素（点）的位置分布关系。当几个汉字的饱和度相同时，其分维不一定相同，汉字的分维大小不仅与笔划多少有关，还

与其对称性或不规则性有关。

表 9.3 GB18030 汉字分维与饱和度和不规则度的关系实例表

序号	D _f 最大 12 字的点数与饱和度				D _f 最小 12 字的点数			S 一定 12 字的不规则度		
	字	分维	点数	饱和度	字	分维	点数	字	分维	不规则度
1	鞶	1.5543	136	0.5313	𠂇	0.1681	7	口	1.0323	0.0000
2	𢚨	1.5538	135	0.5273	𠂇	0.3795	13	汙	1.0552	0.0589
3	𢚧	1.5486	132	0.5156	𠂇	0.4659	14	亿	1.0682	0.0761
4	𢚩	1.5440	132	0.5156	𠂇	0.4679	14	贞	1.0943	0.0900
5	𢚪	1.5421	131	0.5117	—	0.4735	15	扑	1.0977	0.1227
6	醜	1.5418	131	0.5117	—	0.4984	16	贝	1.1033	0.1317
7	籠	1.5416	130	0.5078	𠂇	0.5142	16	𠂇	1.1297	0.1701
8	𦵈	1.5410	130	0.5078		0.5183	16	木	1.1386	0.1768
9	櫛	1.5394	130	0.5078	丿	0.5201	16	厅	1.1493	0.1983
10	蠅	1.5356	130	0.5078	丶	0.5247	17	壬	1.1561	0.2041
11	麌	1.5310	129	0.5039	𠂇	0.5321	17	节	1.1719	0.2453
12	麌	1.5303	128	0.5000	—	0.5368	18	犖	1.2200	0.3834

【定义】(不规则度) 设汉字字模为 H×W 点阵，其总点数为 N；以点(W/2, H/2)为原点，如图 9.4 所示构造坐标系，把字图象分成四个象限，则每个象限有一定数量的黑格，也即把 N 个点分布在四个象限中，设每个象限中的点分别为 N₁, N₂, N₃, N₄，把它们看成取自总体 N 的样本，此时定义汉字的不规则度为各个象限的点数与平均点数 N_p的偏差程度，先求出样本标准差[SHHF95]，再进行归一化处理，于是可表示为：

$$F = \frac{2}{N} \sqrt{\frac{1}{4-1} \sum_{i=1}^4 (N_i - N_p)^2}, \text{ 其中: } N_p = \frac{1}{4} \sum_{i=1}^4 N_i = \frac{N}{4}$$

式中 F 的值即为汉字的“不规则度”。

【定义】(对称度) 上述不规则度的定义描述了汉字点数在某些局部区域的集中程度，即非对称性，于是可以简单定义汉字的“对称度”为：E=f(F)=1-F。

由于汉字的复杂性，这里给出的求 E 和 F 的公式诚然不是很确切或者完美的，如果所考察的点阵较大，自然可以把字图象分成更多的区域（象限）来计算，比如对于 64 点阵的大字库，可以划分为 8 个区域，然后再求 F 和 E 值。然而，这里的

定义可以看成是对汉字复杂性的简化描述，在一定程度上综合反映了汉字绕横轴、纵轴、以及中心点的对称性。E 和 F 都属于[0,1]区间，汉字的不规则度增大，则其对称性减弱；反之亦然。

计算结果表明：对于某一确定的字体和字号、如果字点数一定，则其分维随着对称度的增加而减小，随着不规则度的增加而增大。表 9.3 列出点数为 48、饱和度为 0.1875 的部分汉字的分维与不规则度，图 9.6(b)反映了它们之间的关系。

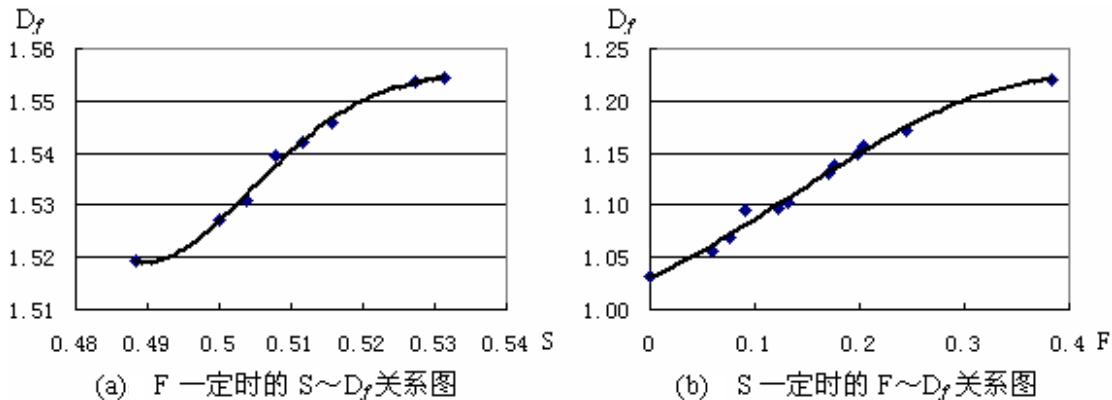


图 9.6 汉字分维与饱和度和不规则度的关系

3. 汉字分维与 S、F 关系的理论解释

前面的计算数据表明：汉字分维与饱和度呈正变化关系，与对称度呈反变化关系，这种关系可以直接在数学理论上得到解释。

设对于某种确定的字体和字号，在确定的参考格空间中，其测度序列 L_i 是确定的，设对应的盒子数序列为 N_i , $i=1,2,\dots,n$ ，汉字分维 D 为拟合的 $\ln(N_i) \sim \ln(1/L_i)$ 直线的斜率。 D 为 L_i 与 N_i 的函数：

$$D = g(L_i, N_i) = g(f(L_1, N_1), f(L_2, N_2), \dots, f(L_n, N_n))$$

(1) 首先假设字图象的饱和度，即总点数一定，来考察不规则度对分维的影响。

设初始状态的字点数在各个象限的分布比较均匀，用 L_i 序列进行测量得到的 N_i 序列为 N_1, N_2, \dots, N_n 。然后把落在某个象限（如第一象限）的全部像点“搬移”到另外的象限（如第二象限）中，以使点的分布趋于不规则化，由此得到第二状态。用同一 L_i 序列去测量第二状态，则得到第二个序列 N'_i 为： N'_1, N'_2, \dots, N'_n 。分析可知，当 L_i 比较小时， N_i 能够较为充分地反映字点数，第二象限的局部盒子数有明显增加，而第一象限的局部盒

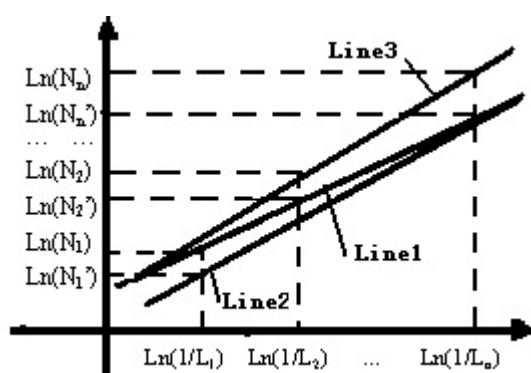


图 9.7 $\ln(N_i) \sim \ln(1/L_i)$ 直线变化图

子数则减少至 0，且增加的与减少的盒子数基本持平，此时 N'_i 基本等于或稍微大于 N_i ，对称性此时对 N_i 的影响很弱，特别地，当 L 取一个象素时，得到的 N'_i 肯定等于 N_i ；随着 L_i 的增大，多个像点将落入同一个盒子中，对于点数相对较多的第二象限而言，其局部的有效盒子数增加并不多，而此时第一象限的盒子数依然为 0，因此在第二象限增加的盒子数将不足以补充第一象限失去的盒子数，总的 N'_i 将减小，即 $N'_i < N_i$ ，至多二者也只能相等。如图 9.7 所示的 $\ln(N_i) \sim \ln(1/L_i)$ 拟合示意图，随着横坐标 $\ln(1/L_i)$ 增大，即 L_i 减小， $\ln(N'_i) \approx \ln(N_i)$ ($N'_i \approx N_i$)；反之，当 $\ln(1/L_i)$ 趋于原点，即 L_i 增大时 $N'_i < N_i$ ， $\ln(N'_i) < \ln(N_i)$ ，因此直线 Line2 的斜率大于直线 Line1 的斜率。也即 $D' > D$ 。

(2) 假设汉字的对称性一定，来考察饱和度对分维的影响。为了保持对称性的不变，需要对每个象限都增加一定个数的黑格，此时总点数有较大增加，当用小尺度测量时，得到的盒子数将有较大增加；而随着尺度的增大，盒子数的“增加速度”将逐渐减小，一种极限情况是，此时 L 取 $\text{Max}(H, W)$ 时，所得的盒子数都为 1（如为空白字符则为 0），将没有增加。如图 9.7 所示：此时 Line1 的右上端将向上提升，而左下端基本不变，由此成为 Line3，故其斜率将增大，即分维增大。与(1)的区别在于：(1)中是直线的右上端基本保持不变，而左下端下降致使其斜率增大。

9.2.4 汉字分维与复杂性分类的逻辑关系

1. 各区间的汉字比率

汉字的分维与汉字的笔划多少和分布不规则性有关，在一定程度上反映了汉字的复杂程度。根据对 GB18030 字库中 27538 个汉字的分维 D 、饱和度 S 、不规则度 F 的计算与统计分析，可以把这些参数值分成三个区间：

$$\text{简单区间(S): } D < 1.10, \quad S < 0.25, \quad F < 0.05$$

$$\text{中等区间(M): } 1.10 \leq D < 1.40, \quad 0.25 \leq S < 0.40, \quad 0.05 \leq F < 0.15$$

$$\text{复杂区间(C): } D \geq 1.40, \quad S \geq 0.40, \quad F \geq 0.15$$

【定义】 对于具体的汉字，如 $D < 1.10$ ，则称此汉字为“**简单型汉字**”；如 $1.10 \leq D < 1.40$ ，则称此汉字为“**中等复杂型汉字**”；如 $D \geq 1.40$ ，则称此汉字为“**复杂型汉字**”。分别用命题 X、P、Q 表示参数 D 、 S 、 F ，计算 X 相对于 P、Q 的比率值，如表 9.4 所示。例如：P 在简单区间中共有汉字 2730 个，其中 X 亦在简单区间的汉字有 2453 个，故表 9.4 中第一行第一列为 $2453/2730=0.8985$ 。同理可以计算出其它的比率值，计算结果见表 9.4。

表 9.4 X 相对于 P、Q 的分段比率

X(D)	i,j	S	M	C
P(S)	S	0.8985	0.1015	0.0000
	M	0.0099	0.9833	0.0068
	C	0.0000	0.1648	0.8352
Q(F)	S	0.0449	0.8350	0.1201
	M	0.0827	0.8402	0.0771
	C	0.3228	0.6645	0.0128
P,Q	S,S	0.8154	0.1846	0.0000
	S,M	0.8969	0.1031	0.0000
	S,C	0.9174	0.0826	0.0000
	M,S	0.0110	0.9808	0.0082
	M,S	0.0095	0.9835	0.0069
	M,C	0.0125	0.9845	0.0029
	C,S	0.0000	0.1376	0.8638
	C,M	0.0000	0.1687	0.8313
	C,C	0.0000	0.2813	0.7188

表 9.5 X(D)与 P、Q 间的联系度 r_{ij}

P,Q	S	M	C
S,S	0.4279	0.1347	0.0000
S,M	0.4856	0.0942	0.0000
S,C	0.6037	0.0075	0.0000
M,S	0.0057	0.9009	0.0045
M,S	0.0052	0.9048	0.0037
M,C	0.0078	0.8190	0.0015
C,S	0.0000	0.1376	0.4821
C,M	0.0000	0.1536	0.4478
C,C	0.0000	0.1954	0.3647

2. 参数间的分形逻辑关系

【定义】(联系度) 对于参数 D、S、F，对应命题 X、P、Q 之间存在一种分形逻辑关系，定义：

$$r_{ijk} = OP(T(X_i(P_j), X_i(Q_k), h_1, k_1), X_i(P_j, Q_k), h_2, k_2)$$

$i, j, k \in \{S, M, L\}$ ， $i \neq j \neq k$ ，称式中 r_{ijk} 为基于 OP 运算的命题 X_i 与命题 P_j, Q_k 之间的“联系度”。

上式中： $T(X_i(P_j), X_i(Q_k), h_1, k_1)$ 表示分形逻辑的与运算，其物理意义是：在 X 对应参数 D 为第 i 类的所有汉字中，同时满足 P 对应参数属于第 j 类，Q 对应参数属于第 k 类时的汉字比率。 $X_i(P_j, Q_k)$ 的物理意义也表示在 X_i 中的同时满足 P_i, Q_j 类的汉字比率，但前者是与运算的结果，后者则是直接统计出来的数据。

式中 OP 操作表示某种逻辑运算，它对 $T(X_i(P_j), X_i(Q_k), h_1, k_1)$ 和 $X_i(P_j, Q_k)$ 以一定方式“整合”。计算分析表明，分形逻辑的“与、或、平均、组合”运算在此都可以应用，最终所得分类结果是一致的，这里以平均运算为例进行说明。

鉴于比率在 [0,1] 之间，取 $[a,b]=[0,1]$ ；不考虑误差系数 k 的影响，即取 $k_1=0$ ，

$k_2=0$; 取广义相关系数 $h_1=0.5$ 表示概率与算子, $h_2=0$ 表示代数平均算子。分形与运算和平均运算的表达式见 7.3 节, 在此:

$$T(x, y, 0.5, 0) = (b-a)[(\max(a, ((x-a)^m + (y-a)^m)/(b-a)^{m-1} + 2a-b)-a)/(b-a)]^{1/m} + a \\ = xy$$

$$M(x, y, 0, 0) = b - [((b-x)^m + (b-y)^m)/2]^{1/m} = (x+y)/2$$

根据联系度的定义, 可以分别计算在简单区间 S、中等区间 M、复杂区间 C 上的 X、P、Q 间的联系度 r_{ijk} 。

$$\text{例如: } r_{SSM} = OP(T(X_S(P_S), X_S(Q_M), h_1, k_1), X_S(P_S, Q_M), h_2, k_2) \\ = M(S(0.8985, 0.0827, 0.75, 0), 0.8969), 0, 0 \\ = 0.4856$$

说明: 结合表 9.4, X_S 表示 X(D)对应的“S”列, P_S 表示 P(S)对应的“S”行, 其交叉点值为 0.8985; 同理 $X(D)$ 对应的“S”列与 $Q(F)$ 对应的“M”行的交叉点值为 0.0827; 同理 $X(D)$ 对应的“S”列与 P, Q 对应的“S, M”行的交叉点值为 0.8969。经过与运算和平均运算之后即得到 0.4856, 这就是表 9.5 中的“S”列与“S, M”行交叉点的值。同理可以计算出各个联系度, 数据如表 9.5 所示。

【定义】(类均度) 对于 X 对应的分维参数 D 而言, 其在第 i 类别中的联系度的代数平均值称为 X 在该类别中的“类均度”, 即:

$$\bar{r}_{xi} = \sum r_{ijk} / n$$

其中 $i, j, k \in \{S, M, C\}$, $n=9$, 分别计算得:

$$\bar{r}_{xs} = \sum r_{sij} / n = 0.1707 \\ \bar{r}_{xm} = \sum r_{mij} / n = 0.3795 \\ \bar{r}_{xc} = \sum r_{cij} / n = 0.1449$$

【定义】(类别度) 对于一个具体的汉字, 定义:

$$x_i = \bar{r}_{xi} \bullet r_{ijk}$$

其中 $i, j, k \in \{S, M, C\}$, 称 x_i 值为该汉字属于第 i 类别的“类别度”。

类别度相当于模糊逻辑中的隶属度, 但这里的类别度有其独特的计算方法。对于简单型汉字、中等复杂型汉字和复杂型汉字, 类别度的计算式分别为:

$$x_s = \bar{r}_{xs} \bullet r_{sjk}$$

$$x_m = \bar{r}_{xm} \bullet r_{mjk}$$

$$x_c = \bar{r}_{xc} \bullet r_{cjk}$$

【定义】(分类度) 对于任意汉字的复杂性程度，如果已知其在各类别中的类别度，定义：

$$\chi^* = S(x_S, x_M, x_C, h, k)$$

称 x^* 为汉字复杂程度的“分类度”。

式中 $S(x_S, x_M, x_C, h, k)$ 表示分形或运算，当取 $h=1, k=0$ 时， $S(x_S, x_M, x_C, 1, 0)$ 即为 Zadeh 或算子，此时 $x^* = \max(x_S, x_M, x_C)$ ，表示该汉字最有可能属于的那一类。如果 $x^* = x_S$ ，则该汉字的分维 D 落在简单区间；如果 $x^* = x_M$ ，则该汉字的分维 D 落在中等区间；如果 $x^* = x_C$ ，则该汉字的分维 D 落在复杂型区间。当以分形维数 D 来区分汉字的复杂程度时，该字就相应的属于简单型汉字、或中等复杂型汉字、或复杂型汉字。

【定义】(距类度) 对于任意汉字的复杂性程度，如果已知各分类度，定义：

$$\rho_i = |x^* - x_i|$$

称 ρ_i 为汉字复杂程度的“距类度”， $i \in \{S, M, C\}$ 。

在 $S(x_S, x_M, x_C, h, k)$ 中，假设 h 不取 1，此时或运算不是 Zadeh 或算子，则可以计算出各距类度，设最小者为 ρ_i ，则该汉字的分形维数属于第 i 区间。

于是，对于任一汉字的复杂性程度，可以不必计算其分形维数的大小，而是由 x^* 或 ρ_i 的取值来给出其定性分类或区间预测。

3. 应用范例

举例一：汉字“篮”，直接计算得其格分维 $D(X)=1.2527$ ，点数 $N=79$ ，饱和度 $S(P)=0.3086$ ，不规则度 $F(Q)=0.0432$ 。P 属于中等复杂型区间，而 Q 属于简单型区间，利用类别度计算公式得：

$$\chi_S = \bar{r}_{xs} \cdot r_{sms} = 0.1707 \times 0.0057 = 0.0010$$

$$\chi_M = \bar{r}_{xm} \cdot r_{mms} = 0.3795 \times 0.9009 = 0.3419$$

$$\chi_C = \bar{r}_{xc} \cdot r_{cms} = 0.1449 \times 0.0045 = 0.0007$$

于是 $x^* = x_M$ ，故可知“篮”字为中等复杂型汉字，其格分维 D 在中等区间中，即 $1.10 \leq D < 1.40$ ，而直接计算得 $D=1.2527$ ，确实在此区间之中。

举例二：汉字“礪”，直接计算得其格分维值 $D(X)=1.5543$ ，点数 $N=136$ ，饱和度 $S(P)=0.5313$ ，不规则度 $F(Q)=0.0294$ 。P 属于复杂型区间，而 Q 属于简单型区间，利用类别度计算公式计算得：

$$\chi_S = 0.0000, \chi_M = 0.0522, \chi_C = 0.0699$$

于是 $x^* = x_C$ ，故可知“礪”字为复杂型汉字，其格分维 $D \geq 1.40$ ，与直接计算值相符。

求分形维数需要掌握相关的理论与方法，计算步骤比较多。相对而言，求汉字的饱和度和不规则度则容易得多，在要求不高的情况下，通过求参数 S 和 F 来对汉字复杂性进行定性分类，预测 D 的所在范围则简便易行，也更有现实意义。

9.2.5 本节小结

本节系统地研究了汉字的分形特性，研究对象是 GB18030 的宋体、楷体两种字体、五种字号字库中的所有汉字，主要以宋体的 16 点阵字库为例进行数据分析与概念叙述。对于不同的字体和字号，由于字模自身和所选取尺度的差异，同一个字的格分维与相关参数有可能不同，但计算表明其相对差值均小于 3%。

利用格分维理论，结合分形逻辑运算，本节定义了描述汉字复杂性的相关参数，计算与分析的结论有：

- (1) GB18030 汉字具有显著的分形特性，其格分维分布在[0,2]区间中，但大多数汉字的分维在 1.00~1.50 之间。
- (2) 对于确定字体、字号的汉字，其格分维随着字点数，即饱和度的增加而增加；随着不规则度的增大亦增加；而随着对称度的增大而减小。
- (3) 通过分析汉字格分维与复杂性分类的逻辑关系，可以由饱和度与不规则度来预测其复杂性或进行定性分类。
- (4) 本节所述分类方法，可以推广到其它领域的类似研究。当求某个参数很麻烦时，我们可以通过计算与其相关的另外的参数值，然后通过类似的逻辑运算来进行定性分类，并预测待求参数值的所属范围。

汉字本身是一个复杂的图形，而且是在逐渐演化的图形，对汉字的研究是一个复杂的课题，本节的工作仅是汉字分形特性方面的探索性描述，许多工作还有待进一步研究，汉字自身还有更为广泛而深刻的内容，其分形维数必然还与诸多其它特征相关。随着汉语在世界范围内的普及，对汉语语音、汉字结构、语言文字的发展与演化、以及汉字信息处理等逐渐成为研究的热点，相信分形技术和逻辑推理在汉字研究中的应用也将日益广泛。

9.3 由分形逻辑研究其它逻辑

9.3.1 生成现有的典型逻辑

与现有的泛逻辑一样，分形逻辑可以生成二值基逻辑、四值基逻辑、八值基逻辑、三值逻辑、模糊逻辑等任意连续值基逻辑；还可以生成 Hamacher 算子对、Yager 算子对、Einstein 算子对等；分形逻辑可以用于分析程度逻辑，分析云逻辑、完善模糊逻辑等，分析方法与现有泛逻辑类似。这里仅举熟悉的二值基逻辑和 Hamacher 算子对为例进行说明。

1. 直接生成二值基命题逻辑

经典命题逻辑是二值逻辑，它是二值基命题逻辑的最简单形式，即线序型二值命题逻辑，在分形逻辑中取如下特定值即可得到经典二值逻辑：

取广义区间 $[a,b]$ 为标准区间 $[0, 1]$ ，进一步取为 $\{0,1\}$ 二值集合，此即为二值命题逻辑的基空间。 $x, y \in \{0, 1\}$ ； $h, k, e \in \{-1, 1\}$

取 $k=0, h=1$ ，即得到各连接词的运算模型：

$$N(x) = 1-x$$

$$T(x, y) = \min(x, y)$$

$$S(x, y) = \max(x, y)$$

$$I(x, y) = \text{ite}\{b | x \leq y; y\}$$

$$Q(x, y) = \text{ite}\{b | x = y; \min(x, y)\}$$

需要说明的是：平均运算和组合运算，由于在二值基命题逻辑中它们分别退化为与运算和或运算，因此有：

$$\text{当 } h = -1 \text{ 时, } M(x, y) = T(x, y) = \min(x, y)$$

$$\text{当 } h = 1 \text{ 时, } M(x, y) = S(x, y) = \max(x, y)$$

$$\text{当 } e = -1 \text{ 时, } C(x, y) = S(x, y) = \max(x, y)$$

$$\text{当 } e = 1 \text{ 时, } C(x, y) = T(x, y) = \min(x, y)$$

2. 生成 Hamacher 算子对

标准区间 $[0, 1]$ 上，当 $h=0.732, k=0$ 时，便得到 Hamacher 算子对：

$$\text{与运算: } T(x, y) = xy / (x+y-xy) = T(x, y, h, 0) = T(x, y, 0.732)$$

$$\text{其 T 性生成元 } f(x) = 1/x = F(x, h, 0) = F_0(x, 0.732)$$

$$\text{或运算: } S(x, y) = (x+y-2xy) / (1-xy) = S(x, y, h, 0) = S(x, y, 0.732)$$

$$\text{其 S 性生成元 } g(x) = 1 - 1/(1-x) = G(x, h, 0) = G_0(x, 0.732)$$

9.3.2 研究无穷区间上的逻辑

在现实生活中，许多参数的取值范围在正负无穷区间。如果要进行逻辑推理，通常需要对其进行参数变换。通过本文的分析，可以有如下推理方案。

1. 变换到标准区间进行推理

把本属于正负无穷区间的参数，通过函数变换到标准区间 $[0,1]$ 之中。在模糊逻辑中，这种变换归结为求解隶属度函数。在复杂系统中，由于某些参数是带有不确定性因素的随机变量，要寻找其合理的隶属度函数并非易事，因此采用换基规则来实现推理区间的变换相对容易。

2. 变换到广义区间进行推理

对于复杂系统中的参数而言，如果限定在标准区间上进行逻辑推理，就必须进行语义转换，正确界定参数代表的实际语义和逻辑真值代表的逻辑语义十分重要，这需要人们多转几个弯。如果直接在某个常用区间 $[a,b]$ 上进行推理，可以避免这种语义上的转换。本文的研究重点就是给出了广义区间 $[a,b]$ 上的推理模型，可利用的换基规则见 3.3.3 节。变换到 $[a,b]$ 区间上之后，就可以应用分形逻辑的各种连接词运算模型进行推理。

3. 引入关注域的概念

对于复杂系统中的参数而言，尽管许多参数的定义域属于正负无穷，但在实际应用中的分布却经常在某个区域。例如，许多随机变量服从正负无穷上的正态分布，但是有意义的范围却是“ $\mu \pm 3\sigma$ ”之间，参数落在此范围之外的概率很小，这就是“ 3σ 效应”。对于在无穷区间上进行推理的逻辑，通常是化“无穷为有限”，其中主要的一个概念就是“关注域”的概念。

如光速 c 是高速空间与低速空间的转变点，牛顿力学在低速空间中是正确的，但到了高速空间需要用爱因斯坦相对论来解释，相对论是一种“相对理论”，它需要寻求一个“参照系统”。**可以大胆假设，任何逻辑概念的正负真伪都存在一个潜在的“客观标准”。**对于混沌系统，当简单的方程迭代若干次后就可能转变到另一个相空间，从而出现混沌效应。材料从高温冷却到低温，其空间结构和组织性能都会发生转变，例如，45#钢加热到 845°C 以上是奥氏体组织，晶体结构是体心立方，呈正八面体结构；当冷却到 727°C 以下时，便由奥氏体转变成马氏体，晶体结构是面心立方，晶胞在 x,y,z 三个方向的长度不再相等。如果要考察奥氏体转变成马氏体的相变过程，其关注域应该是 $[727^\circ\text{C}, 845^\circ\text{C}]$ ，而无需考察更高或更低的温度区域。

无论某概念定义在无穷区间上，还是有限区间上，关注域的概念都是很重要的。只要确定了关注域 $[e_1, e_2]$ ，就可以用 $[a, b]$ 区间上的推理模式进行逻辑推理。

4. 引入关注域参数的换基规则

在 3.3.3 节中，我们已经给出了与无穷区间相关的换基规则。其中包含关注域参数 u ， u 反映了不同人员所考察的不同关注域。例如：正向无限规则为：

$$[0,1] \rightarrow [0, \infty]: x' = ux/(1-x), \text{ 中元 } e' = u;$$

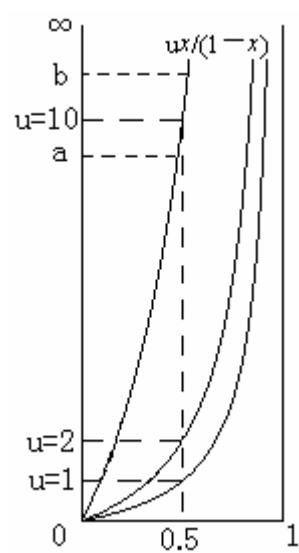


图 9.8 不同 u 的换基规则

此换基规则所对应的函数 $x' = f(x)$ 图象如图 9.8 所示： u 反映了换基变换的速率大小， u 越大，曲线 $x' = f(x)$ 越陡。中元 $e' = u = f(0.5)$ ，关注域 $[a, b]$ 的范围通常在 u 的附近取值。例如，农民的年平均收入在 800 元左右，白领的年平均收入在 100,000 左右，尽管收入可以是 $[0, \infty]$ 之间的任意数值，但农民和白领所关注的范围 $[a, b]$ 却大不相同，其分别在 $u=800$ 和 $u=100,000$ 附近。

在确定 u 的基础上，再考察指标（参数）在 u 附近的分布函数，就可以确定合适关注域 $[a, b]$ ，从而把无穷区间上的推理问题转化为有限区间推理问题。

9.3.3 不同参数域的逻辑推理

基于复杂系统参数的推理模型还有一种情况，那就是，原始命题 P 、 Q 及结论命题 R 的真值域各不相同。我们当然可以把这些参数都变换到标准区间或广义区间上进行逻辑推理。但是，根据本文给出的换基规则、以及广义 NTS 范数原理，我们可以直接建立不同参数域之间的推理模型。图 9.9 是基于 P 、 Q 、 R 在不同区间上的推理模型，当只有单步推理时， P 、 Q 、 R 可以选择各自的参数域及推理区间，当涉及多步串行推理时，中间命题的真值区间可以固定为 $[a_1, a_2]$ 、 $[b_1, b_2]$ 、 $[c_1, c_2]$ 中的一个，也可以给定其它便于推理的区间。

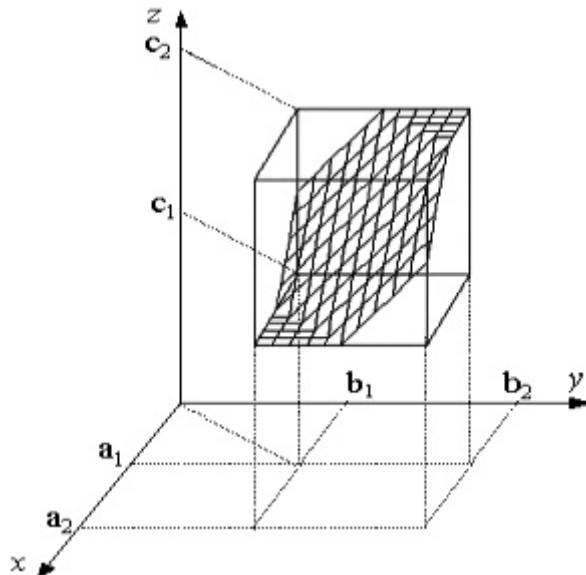


图 9.9 参数在不同区间上的推理模型示意图

9.3.4 研究自相似和分数维逻辑

在 3.3.2 节中，我们给出了若干类型的分形逻辑，本文主要研究的是任意连续值基上的分数逻辑，并探讨其在分形领域中的应用。在其它类型的分形逻辑中，自

相似逻辑和分数维逻辑是两种与分形理论密切相关的逻辑。

自相似逻辑，也即第三类分形逻辑，逻辑系统中的某个子系统可以反映整个系统的逻辑性质，即逻辑自身具有“自相似”结构。引入“迭代连接词”可能是实现此类逻辑的关键所在。

分数维逻辑是指基空间 $W=[a,b]^n$ (n 为任意分数) 的逻辑，它需要利用格分维理论中的维数变换定律，从一个新的思维角度来研究。

本文建立的广义区间 $[a,b]$ 上的连接词运算模型，以及格分维理论为研究自相似逻辑和分数维逻辑奠定了一定的基础，具体的工作还有待开展。

9.4 通向混沌逻辑

本文在第三章阐述了分形、混沌、逻辑三者之间的相关性，一个重要的观点是：相似分形结构+广义逻辑规则=混沌动力行为。在一定程度上来讲，无论是实物上的分形、还是统计上的分形，它们都可以看成是一种静态的结构，这种结构具有“通向混沌的性质”，但要真正由分形通向混沌，其中的规则（如迭代规则）起了动力的作用，没有规则的反复运用，也就没有动力学上的混沌行为。

通过前面的分析，可以构造出“混沌逻辑三步曲”，即“泛逻辑 \rightarrow 分形逻辑 \rightarrow 混沌逻辑 \rightarrow 复杂系统”。图 9.10 示意了混沌逻辑的建立与发展过程。

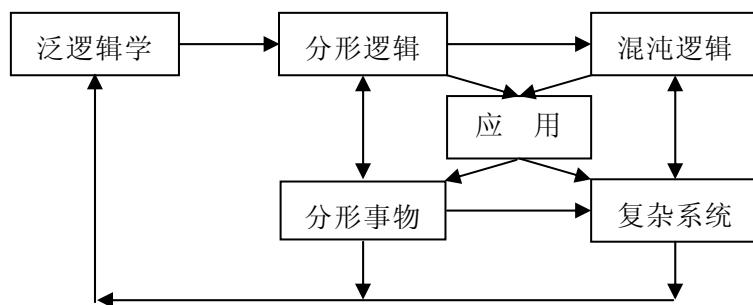


图 9.10 混沌逻辑的建立与发展过程示意图

1. 泛逻辑学——建立分形逻辑的基础

之所以说泛逻辑学是建立分形逻辑的基础，原因主要在于泛逻辑学提供了所有逻辑的形式化框架，并且给出了生成规则。此外，泛逻辑学中的广义相关系数和广义自相关系数可用于研究分形现象中的自相似和关联维，这是分形逻辑研究的主要内容之一。

2. 分形逻辑——通向混沌逻辑的桥梁

由图 9.10 可知：泛逻辑学是整个逻辑系统的原理与基础，而分形逻辑则在建立混沌逻辑的过程中起桥梁的作用。这是因为混沌现象比分形现象更为复杂，直接研究混沌现象或建立混沌逻辑难度更大。但由于混沌现象具有分维的特征，故目前常用研究分形来作铺垫。自然而然，要建立混沌逻辑，可以先建立分形逻辑，最终使混沌逻辑“自然而成”。

3. 复杂系统——完善混沌逻辑的应用

从认识论的角度讲，所有新学科出现之目的只有一个，那就是为了帮助人们更准确地理解自然现象、掌握自然规律。混沌逻辑也不例外，它都是一种协助人们探询复杂问题的“工具逻辑”。它也只有在复杂系统的不断应用中才能逐渐自我完善。这种完善包括混沌逻辑自身各要素的发展，尤其连接词的选用与规则的制定，除了建立通用的混沌逻辑推理规则集外，还有必要分类建立针对某些具体混沌现象或应用领域的特征规则集。

第十章 总结与路标

世间万物是如此之复杂，以至于没有完全相同的两条水流。分形是源远流长的水流，混沌是激涌澎湃的湍流，逻辑则使水流变为湍流。

这就是本文已做的和笔者将做的工作。

10.1 本文工作的总结

随着泛逻辑学的产生、发展与应用，逻辑学正在经历新的革命[HEHC03]。本文围绕“相关性推理”这个中心，提出了“基于分形逻辑的复杂系统相关性推理模型”，并对其各个部分进行了系统研究，其间提出并应用了一些新的理论和方法。本文工作属于人工智能基础理论，其创新性分析参见摘要和 1.4.3 节，这里总结如下：

(1) 提出了基于分形逻辑的复杂系统相关性推理模型 (CSCRM)，它主要包括系统分析、相关性分析、分形逻辑推理、仿真与应用四个大的方面。CSCRM 架起了泛逻辑理论与复杂系统柔性推理之间的实用性桥梁，这对泛逻辑的理论发展和应用研究都具有重要意义。

(2) 探讨了分形、混沌、逻辑三者之间的广义相关性，在一定程度上有关系式：“相似分形结构 + 广义逻辑规则 = 混沌动力行为”。探讨了建立分形逻辑的必要性和可能性，给出了分形逻辑的定义与分类，本文主要研究广义区间上的分数逻辑。

(3) 在分析复杂系统结构组成的基础上，引入了“目标命题”和“全局相关性”等重要概念，把求解“两命题之间的广义相关系数 h 的问题”转化为“求解各命题与目标命题之间的全局相关系数的问题”，从而给出了求解 h 值的方法。

(4) 研究了广义区间 $[a,b]$ 上的 N 范数的性质，给出了由分布函数求解广义自相关系数 k 值的一般步骤，推导出了重要的“直通 NLK 公式”。研究了均匀分布、指数分布、正态分布随机参量的广义自相关性，并得到一些有意义的结论。

(5) 提出了一种新的维数理论——“格分维理论”，它是适用于任意几何图形(图象)的一种广义维数理论。现有的分形维数是当参考空间取为本征空间、单位格大小趋于零时的格分维特例。研究了康托集和几何图象的格分维与逻辑运算。

(6) 研究了广义区间 $[a,b]$ 上的 NTS 范数理论，对现有 $[0,1]$ 区间上的相关理论进行了完善和发展，在此基础上给出了分形逻辑的连接词运算模型。

(7) 探讨了分形逻辑的广义 NT 性生成元的分形特性与初值敏感性，以及分叉方程的广义自相关性。对分形逻辑的连接词运算模型、格分维理论在康托集和几何图象中的应用、以及典型的分形与混沌系统进行了仿真工作。

(8) 典型的应用研究有：自动焊机的稳定性控制；GB18030 汉字的分形特性与复杂特性，给出了汉字复杂性分类的一种新方法。

综观全文，笔者对 CCRM 模型的各个部分进行了系统地研究：在相关系数 h 和 k 的求解、分维真值的求解、逻辑理论的发展等方面提出了新的思想或方法，并取得了重要的成果；对于混沌，主要在于探讨它与分形、逻辑之间的相关性，提出指导性思想，具体工作还有待下一步开展。

10.2 进一步研究路标

分形与混沌都是复杂系统，分形逻辑尝试利用相关性推理来揭示这些复杂系统中的逻辑规律，它不是一朝一夕能够完成的工作，它需要众多科研工作者投入更多的精力。作者根据研究过程中的体会，归纳出以下几个下一步研究的路标，希望相关研究人员都来探讨这些问题。

路标 1：在分形逻辑的连接词中增加“迭代连接词”。迭代法是实现对分形与混沌图象的计算机模拟的基本方法，把迭代系统引入到逻辑推理中具有理论上和实践上的重要意义。可以尝试建立严格意义上的“自相似分形逻辑”，并通过迭代连接词的动力学性质研究，可以使混沌逻辑的概念进一步清晰化。

路标 2：在逻辑推理中不仅考虑集合的代数测度大小，而且考虑其间的几何位置关系，把真值表达式扩展成真值向量，把连接词的运算发展成相关对象的逻辑图象的运算，这召唤着一种新的推理模式——“面向对象的逻辑推理”的产生。

路标 3：本文把 $[0,1]$ 区间上的 NTS 范数理论扩展到广义区间 $[a,b]$ 上，并不是简单的使用换基规则，而是从定义出发进行研究，这为建立“基于广义区间 $[a,b]$ 的逻辑推理系统”奠定了理论基础，下一步路标在于研究基于广义区间推理的应用。

路标 4：利用格分维理论中的维数变换定律，可以尝试建立基空间 $W = [a,b]^n$ ， n 为分数的另一类分形逻辑。当 n 为分数时，我们不能用向量的形式来表示真值，但初步工作表明：可以通过维数变换定律来转化真值的求解，这是一种全新的思维方式，与之相关的数学理论涉及到二项式 $(a,b)^n$ (n 为分数)的展开式及其应用。

总的来看，本文是一种探索性的人工智能基础理论工作，但不乏兼有应用研究，涉及较多的学科领域与专业知识。由于作者知识水平和研究视角有限，文中的错误在所难免；CCRM 模型和部分概念还需要在应用中逐步完善。文中个别地方可能引发争论，或持不同观点；海纳百川，有容乃大，笔者真诚欢迎大家批评指正。

至此，CCRM 已初步形成，由本文的研究内容与思想方法可以派生出若干新的研究课题，谨希望能起到抛砖引玉之效果，如果真如此，笔者甚感欣慰。

参 考 文 献

[A]

- [ABDI91] Abadi.M, Tuttle,M, "A semantics for a logic of authentication", Proceedings of the 10th Annual ACM Symposium on Principles of Distributed Computing, NewYork: ACM Press,1991, p201-216
- [ABMO95] A.A.Abdel-Hamid, N.N.Morsi, On the Relationship of Extended Necessity Measures to Implication Operators on the Unit Interval, Information sciences, 1995, Vol.82, p129-145
- [ALQU88] C.Alsina, J.J.Quesada, On the Associativity of $C(x,y)$ and $x-C(x,1-y)$, Int.Sym, on Multiple-valued Logic, 1988
- [ALTV83] C.Alsina, E.Trillas, L.Valverde, On Some Logical Connectives for Fuzzy Sets Theory, J.of Math.Anal.and appli., 1983, Vol.93, p15-26
- [AMEJ02] Ames P.Cohoon, Jack W.Davidson C++ Program Design, 3rd edition, Beijing: tsinghua University Press, 2002
- [ARB001] Ann Arbor, Lyapunov exponents and chaos investigation, MI: Bell & Howell Information and Learning company, 2001
- [ARIS95] Patterson, Richard, Aristotle's Modal Logic: Essence and Entailment in the Organon. Cambridge University Press, 1995
- [ATKI90] (美)Atkins,P.W 著, 李思一译, 从有序到混沌: 介绍热力学第二定律, 北京: 科学技术文献出版社, 1990

[B]

- [BAK080] W.Bandler, L.J.Kohout, Semantics of Implication Operators and Fuzzy Relational Products, Int.J.Man-machine Studies, 1980, Vol.12, p89-116
- [BANK03] John Banks, Valentina Dragan, Arthur Jones, Chaos, Cambridge: Cambridge University Press, 2003
- [BANL89] Burrows.M,Abadi,M, Needham,R. A logic of authentication. Technical Report 39, Digital Systems Research Center, 1989
- [BARR99] L.Barreira, Ya.Pesin and J.Schmeling, Dimension and product structure of hyperbolic measures, Ann of Math, 1999, 149(2), p755-783
- [BBDM88] R.Badii, G.Broggi, B.Derighetti, M.Ravain, S.Ciliberto, A.Politi and M.A.Rubio, Dimension increase in filtered signals, Phys.Rev.Lett, 1988, 60, p979
- [BHKY94] B.H.Kaye, A Random Walk Through Fractal Dimension, translated version, Shenyang, Northeastern University Press, 1994
- [BJOR95] Anders Torvill Bjorvand, Fractal Logic-A New Approach to Intelligent Systems Theory, Computer Science Project report, The University of Trondheim, 1995
- [BLWM82] Mandelbrot B B. Fractal Geometry of Nature, Freeman, San Francico. 1982
- [BOCC02] Stefano Boccaletti, et.al, Experimental chaos, Sponsoring organization, Office of Naval Research, Melville N.Y: American Institute of Physics, 2002
- [BRHM92] D.S.Broomhead, J.P.Huke and M.R.Muldoon, Linear filters and nonlinear systems, J.Roy.Stat.Soc.B, 1992, 54, p373

[C]

- [CAMP95] Susan Campbell, From chaos to confidence, New York: Simon & Schuster, 1995
- [CAOL97] Liangyue Cao, Practical method for determining the minimum embedding dimension of a scalar time series, Physica D, 1997, 110, p43-50
- [CGJY01] (美)Celso Grebogi, James A.Yorke 编, 杨立, 刘巨斌等译, 混沌: 对科学和社会的冲击--长沙湖南科学技术出版社, 2001
- [CHAR20] (英)Charles Handy 著, 徐华, 黄云译, 超越确定性: 组织变革的观念, 北京: 华夏出版社, 2000
- [CHDM89] C.Chen, J.S.Daponte, and M.D.Fox, Fractal feature analysis and classification in medical imaging, IEEE Transactions on Medical Imaging, 1989, Vol.8(2), p133--142
- [CHFS98] 陈奉苏, 混沌学及其应用, 北京: 中国电力出版社, 1998
- [CHHM03] Zhicheng Chen, Huacan He, Mingyi Mao, Correlation Reasoning of Complex System Based on Universal Logic, IEEE Proceedings of 2003 International Conference on Machine Learning and Cybernetics, Vol.3/5, Xi'an, 2003, 11, p1831-1835
- [CHJZ98] 陈宁, 朱伟勇, M-J 混沌分形图谱, 沈阳: 东北大学出版社, 1998
- [CHLR20] 陈理荣, 数学建模导论, 北京: 北京邮电大学出版社, 2000
- [CHYS93] 陈予恕, 非线性振动系统的分叉和混沌理论, 北京: 高等教育出版社, 1993
- [CHYY97] 陈衍仪, 图像压缩的分形理论和方法, 北京: 国防工业出版社, 1997
- [CHZC99] 陈志成, 杨志康、樊丁, 材料与焊接专家系统开发报告, 甘肃环球设计研究院, 甘肃工业大学, 中石化兰州石油机械研究所, 1999
- [CHZC02] 陈志成, 何华灿, 毛明毅, GB18030 字库的解读与压缩封装程序设计, 计算机工程与应用, Vol.38(18), 2002, p119-129
- [CONS91] Constantine A.G. Hall P, Characterising Surface Smoothness via Estimation of Effective Fractal Dimension, Tech.rept, CMA-SR20-91, Centre for mathematics and its applications, Australian National University, Canberra, ACT, Australia, 1991
- [CSJZ98] 陈守吉, 张立明, 分形与图象压缩, 上海: 上海科技教育出版社, 1998
- [CUTL93] Cutler, A review of the theory and estimation of fractal dimension, In Dimension estimation and models, Nonlinear Time Ser, Chaos I, World Sci Publishing, 1993, p1-107
- [CYNT03] Cynthia Lanius, Fractal Properties, Fractal Dimension, <http://math.rice.edu/~lanius/fractals/dim.html> 2003

[D]

- [DARW98] 戴汝为, SFI 的考察报告, 中科院自动化所复杂系统与智能科学实验室, 1998
- [DARW99] 戴汝为, 复杂性研究文集, 中科院自动化所复杂系统与智能科学实验室, 1999
- [DEVA03] Robert L.Devaney, Chaos in the Classroom, Boston University, <http://math.bu.edu/DYSYS/chaos-game/chaos-game.html>, 2003
- [DEWA92] R.L.Dewar, B.I.Henry, Nonlinear dynamics and chaos, Ingapore: World Scientific, 1992
- [DITT95] William Ditto, et.al, Experimental chaos conference, Sponsored by the Office of Naval Research, Singapore: World Scientific, 1995
- [DOLK91] 董连科, 分形理论及其应用, 沈阳: 辽宁科学技术出版社, 1991
- [DOTV81] X.Domingo, E.Trillas, L.Valverde, Pushing lukasiewicz-tarski Implication a Little Farther, Int.Sym.on Multiple-valued Logic,1981

[E]

- [ELKA94] C.Elkan, The Paradoxical Success of Fuzzy Logic, Special Volume on Expert System, 1994, Vol.8, p3-8
- [EOTT02] Edward Ott, Chaos in dynamical systems, Cambridge: Cambridge University Press, 2002
- [ESTD81] F.Esteva, E.Trillas and X.Domingo, Weak and Strong Negation Functions for Fuzzy Set Theory, Int.Sym.on Multiple-valued Logic, 1981
- [ESTD81] F.Esteva, E.Trillas, X.Domingo, Weak and Strong Negation Functions for Fuzzy Set Theory, Int.Sym.on Multiple-valued Logic, 1981

[F]

- [FEXJ04] Feng Xiangjun, Lao Zi and Pansystems Er-Di, 2004,1
- [FODA91] J.C.Fodor, A Remark on Constructing t-norms, Fuzzy Sets and Systems, 1991, Vol.41, p195-199
- [FODA93] J.C.Fodor, Fuzzy Connectives via Matrix logic, Fuzzy Sets and Systems, 1993,Vol.56, p67-77
- [FODB91] J.C.Fodor, On Fuzzy Implication Operators, Fuzzy Sets and Systems, 1991, Vol.42, p293-300
- [FODB93] J.C.Fodor, A New Look at Connectives, Fuzzy Sets and Systems, 1993, Vol.57, p141-148
- [FODC91] J.C.Fodor, Strict Preference Relations Based on Weak t-norm, Fuzzy Sets and Systems, 1991, Vol.43, p327-336
- [FOKE94] J.C.Fodor, T.Keresztfalvi, A Characterization of the Hamacher Family of t-norms, Fuzzy Sets and Systems, 1994, Vol.65, p51-65
- [FRAS86] A.M.Fraser and H.L.Swinney, Independent coordinates for strange attractors from mutual information, Phys.Rev.A, 1986, 33, p1134

[G]

- [GBQD01] 国家质量技术监督局, GB18030-2000, 信息交换用汉字编码字符集基本集的扩充, 2001
- [GEHY02] 耿宏运等, Delphi6.0 组件大全, 北京: 电子工业出版社, 2002
- [GRAS83] P.Grassberger, On the fractal dimension of the Henon attractor, Phys.Lett, 1983, 97A, p224-226
- [GRAS85] P.Grassberger, Generalizations of the Hausdorff Dimension of Fractal Measures, Phys.Lett, 1985, 107A, p101-105
- [GRAS86] P.Grassberger, Estimating the fractal dimensions and entropies of strange attractors, Chaos, Princeton University Press, 1986
- [GSMT03] 高等数学教学与命题研究组, 概率论与数理统计学习指导, 北京: 中国林业出版社, 2003
- [GUTZ90] Martin C.Gutzwiller, Chaos in classical and quantum mechanics, New York: Springer-Verlag, 1990
- [GUYA96] 顾雁, 量子混沌, 上海: 上海科技教育出版社, 1996

[H]

- [HACS96] Hacck. S, Deviant Logic and Fuzzy Logic, Beyond the Formalism, The University of Chicago Press, 1996
- [HARS20] 黄润生, 混沌及其应用, 武汉: 武汉大学出版社, 2000
- [HDSD93] 黄登仕等, 《非线性经济学的理论和方法》, 成都: 四川大学出版社, 1993
- [HEAW03] Huacan He, Lirong Ai, Hua Wang, Uncertainties and the Flexible Logics, IEEE Proceedings of 2003 International Conference on Machine Learning and Cybernetics, Vol.4/5, Xi'an, 2003, 11, p2573-2578
- [HEHC03] 何华灿, 论第二次逻辑学革命, 中国人工智能进展——中国人工智能学会第十界全国学术年会(特邀报告), 广州, 2003, 11, p32-41
- [HEHC82] 何华灿, 智能论(关于人脑和其他各种系统中信息处理规律的科学), 人工智能学报, 1982, No.3, p1-18
- [HEHC88] 何华灿, 人工智能导论, 西北工业大学出版社, 1988
- [HELB98] 何华灿, 刘永怀, 白振兴, 艾丽蓉, 王瑛, 一级泛非运算研究, 计算机学报, Vol.21(增刊), 1998, p24-28
- [HELH96] 何华灿, 刘永怀, 何大庆, 经验性思维中的泛逻辑, 中国科学(E辑), 1996, Vol.26, 72-78; (英文版, Vol.39, 1996, No.2, p225-234)
- [HELI98] 何华灿, 刘永怀等, 泛"蕴含"运算和泛"串行推理"运算研究, 软件学报, 1998, Vol.9(6), p469-473
- [HEWL01] 何华灿, 王华, 刘永怀等, 泛逻辑学原理, 北京, 科学出版社, 2001
- [HOFE94] S.Hofer, M.Pandit, Two-dimensional fractional brownian motion and its application in image analysis, In Proceedings Conference of Information and Management of Uncertainty in Knowledge-Based Systems, Paris, 1994
- [HOLD86] Arun V.Holden, Chaos, London: Manchester University Press, 1986
- [HOLT20] Holger Kantz, Thomas Schreiber, Nonlinear time series analysis, Beijing, Qinghua university press, 2000
- [HORT84] C.W.Horton, L.E.Reichl, Statistical physics and chaos in fusion plasmas, New York: Wiley, 1984
- [HUAN01] L.C.Huang, High Technology Age and Thinking Ways, Tianjin Science and Technology Publish House, 2001
- [HUGA20] 胡岗等编著, 混沌控制, 上海: 上海科技教育出版社, 2000
- [HULC01] 黄麟雏, 高科技时代与思维方式, 天津, 天津科学技术出版社, 2001, p86-194

[I]

- [IANC97] I.Iancu, T-norm with Threshold, Fuzzy Sets and System, 1997, Vol.85, p83-92
- [INGR92] R.L. Ingraham, A survey of nonlinear dynamics, Singapore: World Scientific, 1992

[J]

- [JENE20] S.Jenei, New Family of Triangular Norms via Contrapositive Symmetrization of Residuated Implications, Fuzzy Sets and Systems, 2000, Vol.110, p157-174
- [JHJG20] (美)Jack Hirshleifer, John G.Riley 著, 刘广灵, 李绍荣译, 不确定性与信息分析, 北京: 中国社会科学出版社, 2000
- [JIQY96] 姜启源, 数学模型(第二版), 北京: 清华大学出版社, 1996

[K]

- [KAR097] Karoly Simon, Boris Solomyak, Correlation dimension for self-similar Cantor sets with overlaps, 1997
- [KENN92] Kennel et al., Determining embedding dimension for phase-space reconstruction using a geometrical construction, Phys.Rev.A, 1992, Vol.45(3), p3403-3411
- [KIME99] H.S.Kim, R.Eykholz and J.D.Salas, Nonlinear dynamics, delay times, and embedding windows, Physica.D, 1999, Vol.127, p48-60
- [KJFA85] K.J.Falconer, The Geometry of Fractal Sets, London: Cambridge University Press, 1985
- [KOUR02] Kourosh Ardestani, Fabio Claudio, et al, Visual Basic.NET Threading Handbook, Beijing, Tsinghua University Press, 2002

[L]

- [LAST94] Andrzej Lasota, Michael C.Mackey, Chaos, fractals, and noise, New York: Springer-Verlag, 1994
- [LCJM99] 李长江, 麻士华等, 矿产勘查中的分形、混沌与 ANN, 北京: 地质出版社, 1999
- [LHQC90] 李后强, 程光锐, 分形与分维: 探索复杂性的新方法, 成都: 四川教育出版社, 1990
- [LHQW93] 李后强, 汪富泉, 分形理论及其在分子科学中的应用, 北京: 科学出版社, 1993
- [LHYL94] 林鸿溢, 李映雪, 分形论——奇异性探索, 北京: 北京理工大学出版社, 1994
- [LIDY20] 刘大有等著, 知识系统中不确定性和模糊性处理的数值方法, 长春: 吉林大学出版社, 2000
- [LIFA92] 李凡, 人工智能中的不确定性, 北京: 气象出版社, 1992
- [LIHD01] 刘怀德, 不确定性经济学研究, 上海: 上海财经大学出版社, 2001
- [LIHJ98] 刘华杰, 分形艺术, 长沙: 湖南科学技术出版社, 1998
- [LIHJ99] 刘华杰, 非常发现: 从洛伦兹的“蝴蝶效应”到混沌理论的全面发展, 长沙: 湖南少年儿童出版社, 1999
- [LILY95] 李拉亚, 通货膨胀与不确定性, 北京: 中国人民大学出版社, 1995
- [LINC20] 林尚杨, 陈本善, 李成桐, 焊接机器人及其应用, 北京: 机械工业出版社, 2000
- [LINL01] 林宁, 关于 GB18030 汉字编码标准集, 中国计算机报, 2001, Vol.7
- [LIWQ95] 刘文奇, 不确定性数学大纲, 昆明: 云南大学出版社, 1995
- [LJBF95] 李继彬, 冯贝叶, 稳定性、分支与混沌, 昆明: 云南科技出版社, 1995
- [LOQW99] 龙期威, 金属中的分形与复杂性, 上海: 上海科学技术出版社, 1999
- [LOUY98] 娄亚军, 基于熔池图像传感的脉冲 GTAW 动态过程智能控制, 哈尔滨工业大学博士学位论文, 1998
- [LREZ97] E.N.Lorenz (writer), Shida Liu (translator), The essential of chaos, Beijing, Weather Publishing House, 1997
- [LSLZ02] 柳世考, 刘兴堂, 张文, 利用相似度对仿真系统可信度进行定量评估, 系统仿真学报, 14(2), 2002, 2
- [LUND88] Stig Lundqvist, Norman H.March, and Mario P.Tosi, Order and chaos in nonlinear physical systems, New York: Plenum Press, 1988
- [LUTZ95] Lutzenberger, Preissl, Pulvermueller, Fractal dimension of electroencephalographic time series and underlying brain processes, Biol, Cybern, 1995, 73: p477-482

[M]

- [MARG90] P.Maragos, F.Sun, Measuring Fractal Dimension: Morphological Estimates and Iterative Optimization, Technical Report CICS-P-198, Center For Intelligent Control Systems, Cambridge: Massachusetts, 1990
- [MAS004] Steven Mason, FRACTAL LOGIC: the art of science, the science of art, <http://www.whatrain.com/fractallogic/>, 2004
- [MCCA93] Joseph L.McCauley, Chaos, dynamics, and fractals, Cambridge: Cambridge University Press, 1993
- [MDBB82] Mandelbrot B B. Fractal Geometry of Nature, Freeman, San Francico. 1982
- [MDBT99] Mandelbrot 著, 文志英, 苏虹译, 分形对象: 形、机遇和维数, 北京: 世界图书出版公司北京公司, 1999
- [MHYJ98] 毛慧芸, 金连文, 韦岗, 汉字的分形性及其计盒维数的统计分析, 电路与系统学报, Vol.3(1), 1998.3, p77-81
- [MIZU89] M.Mizumoto, Pictorial Representations of Fuzzy Connectives, Part I:Cases of T-norms, T-conorms and Averaging Operators, Part II: Cases of Compensatory Operators and Self-dual Operators, Fuzzy Sets and Systems, 1989, Vol.31, p217-242; Vol.32, p45-79
- [MRKL97] (美)Morris Kline 著, 李宏魁译, 数学: 确定性的丧失, 长沙: 湖南科学技术出版社, 1997
- [MXER02] (美)米歇尔·沃尔德罗普(Mitchell Waldrop), 复杂, <http://www.eshunet.com/>, 2002

[N]

- [NIC091] John S.Nicolis, Chaos and information processing, Singapore: World Scientific, 1991
- [NONL03] ON THE LOGIC OF CHAOS AND RT, http://www.nonlinearthinking.com/ch/chaos_logic.htm, 2003
- [NOPE88] V.Novak, W.Perdrycz, Fuzzy Sets and t-norms in the Light of Fuzzy Logic, Int.j. Man-machine Studies, Vol.29(1988), p113-127
- [NOPS88] A.D.Nola, W.Perdrycz, S.Sessa, Fuzzy Relation Equations with Equity and Difference Composition Operators, Fuzzy Sets and Systems, 1998, Vol.25, p205-215
- [NOVE89] A.D.Nola, A.G.S.Ventre, On Fuzzy Implication in DeMorgan Algebras, Fuzzy Sets and Systems, 1989, Vol.33, p155-164

[O]

- [OVCH83] S.V.Ovchinnikov, General Negations in Fuzzy Set Theory, J.of Math.Anal, Appli, 1983, Vol.92, p234-239
- [OVCH91] S.V.Ovchinnikov, Similarity Relations, Fuzzy Partitions and Fuzzy Orderings, Fuzzy Sets and Systems, 1991, Vol.40, p107-126

[P]

- [PENT84] A.Pentland, Fractal-Based Description of Natural Scenes, IEEE Trans, on Pattern Analysis and Machine Intelligence, 1984, Vol.6(6), p661-674
- [PERE02] Yuval Peres, How likely is Buffon's needle to fall near a planar Cantor set? Pacific Journal of Math, 2002, 204, p473-496
- [PERS01] Yuval Peres, Michal Rams, and Karoly Simon, Equivalence of Hausdorff measure and the

open set condition for self-conformal sets, Proc.Amer.Math.Soc. 2001, 129, p2689-2699

- [PLGJ98] 伊利亚·普利高津著, 湛敏译, 确定性的终结: 时间、混沌与新自然法则, 上海: 上海科技教育出版社, 1998

- [PLGJ99] (比)伊·普里戈金, 伊·斯唐热著, 李昆译, 从混沌到有序: 人与自然的新对话, 北京: 中国社会出版社, 1999

[Q]

- [QIJD94] 齐东旭, 分形及其计算机生成, 北京: 科学出版社, 1994

[R]

- [RCKL92] Ricki Lewis, Life, Wm.C.Brown Publishers, 1992, p338

- [ROCL93] M.T.Rosenstein, J.J.Collins, and C.J.D.Luca, A practical method for calculating largest Lyapunov exponents from small data sets, Physica.D, 1993, 65, p117

[S]

- [SARK92] Sarkar, Chaudhuri, An Efficient approach to Estimate Fractal Dimension of Textural images, Pattern Recognition, 1992, vol.25(9), p1035-1041

- [SHAT99] William Shatner, Step into chaos, New York: Harper Prism, 1999

- [SHEK99] 沈柯, 光学中的混沌, 长春: 东北师范大学出版社, 1999

- [SHHF95] 沈恒范, 概率论与数理统计教程, 北京, 高等教育出版社, 1995

- [SHXP01] 盛骤, 谢式干, 潘承毅, 概率论与数理统计, 北京: 高等教育出版社, 2001

- [SIMO02] Karoly Simon, On the dimension of self-similar sets, Fractals, 2002, 10, p59-65

- [SUBW99] 孙博文, 电脑分形艺术, 哈尔滨: 黑龙江美术出版社, 1999

- [SXFD88] 沈小峰等, 关于混沌的哲学问题, 哲学研究, 1988, No.2, p33

[T]

- [TAGH20] 汤光华, 证券投资的不确定性, 北京: 中国发展出版社, 2000

- [TAKE80] F.Takens, Detecting Strange Attractors in Turbulence, In: Dynamical Systems and Turbulence, eds. D.A.Rand and L.-S. Young, Lecture Notes in Mathematics, Springer-Verlag, New York, 1980, p366-381

[U]

[V]

- [VAND03] Fractals and the Fractal Dimension, <http://www.vanderbilt.edu/AnS/psychology/cogsci/chaos/workshop/Fractals.html>, 2003

[W]

- [WAGR01] 王光瑞等编著,混沌的控制、同步与利用,北京:国防工业出版社,2001
- [WANY01] 王颖,混沌状态的清晰思考,北京:中国青年出版社,2001
- [WAQY01] 王清印等著,预测与决策的不确定性数学模型,北京:冶金工业出版社,2001
- [WAXY02] 王兴元,广义 M-J 集的分形机理,大连:大连理工大学出版社,2002
- [WAXY03] 王兴元,复杂非线性系统中的混沌,北京:电子工业出版社,2003, 6
- [WAYJ01] 王拥军,需求工程中的不确定性研究,西安,西北工业大学博士学位论文,2001
- [WDSC95] 王东生,曹磊,混沌、分形及其应用,合肥:中国科学技术大学出版社,1995
- [WEBE83] S.Weber, A General Concept of Fuzzy Connectives: Negations and Implications Based on t-norms and t-conorms, Fuzzy Sets and Systems, 1983, Vol.11, p115-134
- [WEZY20] 文志英,分形几何的数学基础,上海:上海科技教育出版社,2000
- [WILL97] Garnett P.Williams, Chaos theory tamed, Washington D.C: Joseph Henry Press, 1997
- [WSYY96] 王寿云,于静元,戴汝为等,开放的复杂巨系统,浙江科学技术出版社,1996
- [WUXU04] Wu Xuemou, Pan-Pansystems, <http://www.aideas.com>, 2004

[X]

- [XHPX88] 谢和平,薛秀谦,分形应用中的数学基础与方法,北京:科学出版社,1998
- [XIZX20] 熊兆贤著,陶瓷材料的分形研究,北京:科学出版社,2000
- [XUYA94] 徐扬等编著,不确定性推理,成都:西南交通大学出版社,1994

[Y]

- [YAGE80] R.R.Yager, On the Measure of Fuzziness and Negation,Part II:Lattice, Information and Control, 1980, Vol.44, p236-260
- [YAGE83] R.R.Yager, On the Implication Operator in Fuzzy Logic,Information Sciences, 1983, Vol.31, p141-164
- [YAGE88] R.R.Yager, On Ordered Weighted Averaging Aggregation Operators in Multicriteria Decision Making, IEEE Transaction on Systems, Man, and Cybernetics, 1988, Vol.18, p183-190
- [YAGE93] R.R.Yager, MAM and MOM Bag Operators for Aggregation,Information Science, 1993, Vol.69, p259-273
- [YAGE94] R.R.Yager, Aggregative Operators and Fuzzy Systems Modeling, Fuzzy Sets and Systems, 1994, Vol.67, p129-145
- [YAGE99] R.R.Yager, On Global Requirements for Implication Operators in Fuzzy Modus Ponens, Fuzzy Sets and Systems, 1999, Vol.106, p3-10
- [YANG89] L.C.Yang, A Sufficient and Necessary Conditions for Functions to Be Zadeh Type Functions, Int.Sym.on Multiple-valued Logic, 1989, p248-254
- [YEST94] (英)伊恩·斯图尔特著,潘涛译,上帝掷骰子吗:混沌之数学,上海:上海远东出版社,1995
- [YUXF20] 于学馥,非确定性科学决策方法,北京:科学出版社,2000
- [YZQL01] 叶竹秋,林跃鑫,生命科学中的分形研究,自然杂志,2001, Vol.23(2), p87-90

[Z]

- [ZADE65] L.A.Zadeh, Fuzzy Sets, Information and Control, 1965, Vol.8, p338-357
- [ZADE79] L.A.Zadeh, A Theory of Approximate Reasoning, In: J.Hayes, D.Michie and L.I.Mikulich Ed., Machine Intelligence, 1979, Vol.9(Halstead Press, New York), p149-194
- [ZAHL95] Zahle M, The average fractal dimension and projections of measures and sets, Fractals, 1995, No.3, p747-754
- [ZAZI92] L.A.Zadeh, H.J.Zimmermann, On Computation of The Compositional Rule of Inference Under Triangular Norms, Fuzzy Sets and Systems, 1992, Vol.51, p267-275
- [ZBXS99] 张本祥, 孙博文, 混沌的本质特征与混沌概念的界定, 哈尔滨师专学报, 1999, No.1
- [ZEFG01] 曾凡桂著, 煤粉碎的分形机理, 北京: 煤炭工业出版社, 2001
- [ZEWQ93] 曾文曲, 王向阳等, 分形理论与分形的计算机模拟, 沈阳: 东北大学出版社, 1993
- [ZHAN83] 张长青, Fuzzy 集上的一类算子, 模糊数学, 1983, Vol.2(3)
- [ZHAN93] 张家龙, 数理逻辑发展史-从莱布尼兹到哥德尔, 社会科学文献出版社, 1993
- [ZHJZ95] 张济忠, 分形, 北京: 清华大学出版社, 1995
- [ZHJI96] 张文修, 梁怡, 不确定性推理原理, 西安交通大学出版社, 1996
- [ZHSR01] 周守仁, 复杂性研究与混沌控制及其哲学阐析, 成都: 四川教育出版社, 2001
- [ZHYQ87] 张颖清, 生物全息诊疗法, 济南, 山东大学出版社, 1987
- [ZHWQ00] 张维强, 王玉娟, 和塞销表面分形维数与传统参数模糊逻辑关系, 农业机械学报, 2000, Vol.36(6), p88-90

博士期间发表的文章与科研实践

1. 博士期间撰写的文章列表

已经刊出或录用的部分文章	
[01]	Zhicheng Chen, Huacan He, Mingyi Mao, Correlation Reasoning of Complex System Based on Universal Logic, IEEE Proceedings of 2003 International Conference on Machine Learning and Cybernetics, Xi'an, 2003,11, Vol3/5, p1831~1835.(被 EI 和 ISTP 收录).
[02]	Chen Zhicheng, He Huacan, Mao Mingyi, Approach to Fractal and Chaos Logics Based on Universal, Proceedings of 2003 Sino-Korea Symposium on Intelligent Systems (By NSFC & KOSEF), GuangZhou, 2003,11, p140~145.
[03]	Chen Zhicheng, Mao Mingyi, He Huacan, Study of fractal logic based on universal logic, International Symposium on Domain Theory 2004, Xi'an, 2004,05, p38~39.
[04]	陈志成, 何华灿, 毛明毅, 刘峰, 基于格图象的康托集分维与泛逻辑运算, 计算机科学, Vol31(No.4), 2004,04, p92~95.
[05]	陈志成, 何华灿, 毛明毅, GB18030 字库的解读与压缩封装程序设计, 计算机工程与应用, Vol38(No.18), 2002,09, p119~129.
[06]	陈志成, 何华灿, 毛明毅, 杜永文, 生物细胞生长的计算机分形模拟, 计算机工程与应用, Vol39(No.36), 2003,12, p24~27.
[07]	陈志成, 何华灿, 毛明毅, 基于泛逻辑的分形与混沌逻辑初探, 计算机科学, Vol31(No.6), 2004,06, p149~152.
[08]	陈志成, 何华灿, 陈榕, 刘艺平, 基于和欣操作系统的高压大功率变频器控制系统, 计算机工程与应用, Vol38(No.20), 2002,10, p33~36.
[09]	陈志成, 毛明毅, 何华灿, 陈榕, 林清洪, 面向构件基于和欣内核的进程/线程池原理与实现, 计算机应用研究, Vol21(No.1), 2005,01.
[10]	陈志成, 毛明毅, 杨瑞成, 杨志康, 何华灿, CF 钢的价电子结构与氢行为, 研究生科技殿堂——西北工业大学第八届研究生学术年会论文集, 西安, 2003,11, p348~354.(十佳优秀论文).
[11]	陈志成, 杨瑞成, 伍文宣, 余氏理论中的电子密度研究, 甘肃工业大学学报, Vol26(No.4), 2000,12, p23~27.
[12]	Mao Mingyi, Chen Zhicheng, He Huacan, The Deep Discussion of Data Mining Technique, International Symposium on Domain Theory 2004, Xi'an, 2004,5, p74~75.
[13]	Mao Mingyi, He Hua-can, Chen Zhi-cheng, Analysis of Kailar Logic Based on Universal Logic Principles, Proceedings of the International Conference on Electronic Commerce Engineering, International Academic Publishers, HangZhou, 2003,10, p582~585. (被 ISTP 收录)
[14]	Mao Mingyi, He Huacan, Chen Zhicheng, Embodiment of Universal Logic Principles in BAN Logic, Proceedings of 2003 Sino-Korea Symposium on Intelligent Systems (By NSFC & KOSEF), GuangZhou, 2003,11, p153~156.
[15]	毛明毅, 何华灿, 陈志成, 葛敬亚, 分形图像的泛逻辑运算模型, 中国人工智能进展——中国人工智能学会第十届全国学术年会, 广州, 2003,11, p167~171.

- [16] 杜永文, 何华灿, 陈志成, 和欣操作系统的灵活内核技术, 计算机工程与应用, 2004.
- [17] 毛明毅, 何华灿, 陈志成, 正态分布随机参量的广义自相关性, 计算机科学, Vol31(No.11), 2004,11.
- [18] 毛明毅, 何华灿, 陈志成, 命题对象的空间逻辑运算模型, 计算机科学, 2005,02.

投出仍在审稿的部分文章

- [01] 陈志成, 何华灿, 毛明毅, GB18030 汉字的分形特性与复杂特性, 中国科学 E, (2003,05 投).
- [02] 陈志成, 毛明毅, 何华灿, 陈榕, 刘俊成, 基于和欣工作例程与代理构件的线程运行机制及编程模型, 计算机学报, (2003,03 投).
- [03] 陈志成, 何华灿, 毛明毅, 任意区间上的广义 N 范数与生成元, 西北工业大学学报.

2. 博士期间参与的科研实践

直接参与的科研工作

- [01] 2002, 03—2004, 03, 国家自然科学基金(经验知识推理理论研究, 编号: 60273087)
- [02] 2002, 12—2004, 03, 北京市自然科学基金(不精确推理理论研究, 编号: 4032009)
- [03] 2001, 03—2003, 09, 教育部博士点基金基础理论支助项目(人工智能基础理论: 泛符号主义研究, 编号: 98069923)
- [04] 2003, 04—2004, 03, 教育部“十五”规划教材《人工智能》编写
- [05] 2000, 09—2004, 03, 国家“十五 863”信息领域基础软件重大专项(基于中间件技术的因特网嵌入式操作系统及跨系统中间件运行平台, 编号: 2001AA113400)
- [06] 2002, 09—2004, 03, 国家“十五 863”集成制造系统类重大专项课题(生产计划与实时优化调度系统, 编号: 2002AA412020)

描述: [01]、[02]、[03]项主要涉及人工智能基础理论与复杂不确定系统的泛逻辑推理, 与博士论文密切相关。[04]项负责撰写“基于生态平衡的仿智学”一章。[05]项负责汉字转换与虚拟机的设计与实现。[06]项涉及优化调度的建模工作。

撰写相关的发明专利

- [01] 陈榕, 林清洪, 陈志成, 吕龙川, 面向构件基于和欣内核的进程池/线程池管理方法。[投资发明专利 (2002, 12), 号: 02160136. 4]
- [02] 陈榕, 陈志成, 林清洪, 一种基于和欣工作例程/主导例程与代理构件的远程线程/进程运行机制。[投资发明专利 (2003, 01), 号: 03100828. 3]

描述: 负责[01]、[02]两项的系统设计与实现, 根据申请要求, 主笔撰写专利稿。

实践活动与考核情况

- [01] 教学实践: 辅导 4 位 2003 届本科毕业生进行毕业设计, 教学实践评为优秀
- [02] 社会实践: 参与北京科泰世纪公司的 863 项目设计与开发, 得到很好的锻炼
- [03] 专题报告: 多次参加校内外专题学术报告、科技展览会、国内外专家讲座
- [04] 中期考核: 中期阶段对德智体美劳进行了全面的个人总结, 考核成绩为优秀
- [05] 获奖学金: 学习成绩优良, 力求创新, 被评为校三好研究生, 获一等奖学金
- [06] 获论文奖: 在学校第八届研究生学术年会中, 所投文章评为“十佳优秀论文”

致 谢

回首是泪，在此之际，我谨向尊敬的导师何华灿教授致以崇高的敬意！

在本文的选题报告、研究工作及撰写过程中，我自始至终都得到了导师的热情关怀与悉心指导。他渊博的学科知识，敏锐的学术目光，严谨的治学态度，事必亲躬的求实精神，以及他和师娘吉玉琴教授那与人为善的思想品德、乐观豁达的处世作风，无不给我留下极其深刻的印象。此外，导师还在日常生活、社会实践中给予关心和支持。我不仅避免了许多弯路，得到了宝贵的知识财富，更重要的是明白了不少做人的道理，这必将使我终身受益。

在此感谢研究生院和计算机学院的各位领导与老师，尤其是来丽丽老师、李丽君老师、尹信琴老师、周兴社院长，以及学院办公大楼管理员王师傅，他们在招生或教学工作中给予了少的支持与帮助。

衷心感谢蒋立源教授、康继昌教授、李伟华教授、李孝安副教授、艾丽蓉副教授、金翊副教授、秦健和王华老师，他们对论文工作或修改提出了不少好的意见。

非常感谢毛明毅、李新、杜永文、鲁斌、张静、薛占熬、张剑、赵敏、王澜博士、张彦明硕士，与他们在课题研究和实践项目中均有不少技术上的讨论。

感谢学友王拥军、马盈仓、王征、韩家新、刘丽、罗敏霞、张小红、刘扬、薛笑容、于洪波、王兵博士，黄艳峰、严军勇、孙浩、张文峰、尹涛硕士的帮助。

感谢舍友刘峰、孙华锦、蒋小奎、卜广志、王雷、马清亮等博士，大家同处一室，在生活与学习中互帮互助，建立了深厚的友谊。

感谢北京科泰世纪公司的马琦、杨维康、陈榕、刘艺平、吴季风等领导，以及邓康、刘俊成、周华伟等同事。感谢中国自由软件协会主席洪峰先生。

特别感谢硕士时候的导师杨瑞成教授、本科班主任王伟兰高工、高中班主任胡道松老师，硕士时的崔雄华、王军民师兄，以及焊接专业王晓军老师，在我攻读博士期间，他们仍一如既往地关心我的生活与学习，经常来信来电问寒问暖。

感谢相关基金的资助单位，感谢有启发意义的参考文献。同时也把这份感激之情送给那些已经或即将对我的论文提出宝贵意见的老师和朋友。

业精于勤荒于嬉，行成于思毁于随。谨以此文献给我逝去的父亲母亲、叔伯姑舅。深深感谢我的爱妻毛明毅和亲朋好友，他们在各方面都坚持不懈地给我关怀与鼓励。感谢所有关心与我的人们，正是由于您们的喝彩，我的求学之路才如此延续，尽管生命之歌一天天消逝。

笔 者：陈 志 成
2004 年 3 月于西院

跋 记

——放飞分形混沌的逻辑思维

跋 言

睁开一双分形混沌的眼睛
那是一个分形混沌的世界
西部一片分形混沌的山区
走出一名分形混沌的学生
考入一所分形混沌的大学
住在一间分形混沌的房间
看了一本分形混沌的书籍
做了一次分形混沌的实验
选了一种分形混沌的逻辑
抓住一日分形混沌的时间
写了一篇分形混沌的论文
提出一点分形混沌的思想
净化一颗分形混沌的心灵
为了一张分形混沌的文凭
得了一例分形混沌的疾病
或许一天分形混沌的消失
期待一世分形混沌的活着
创造一件分形混沌的奇迹

释 意

眉毛是分形的，瞳孔是混沌的，眼睛是雪亮的
天空是分形的，湍流是混沌的，世界是多彩的
树木是分形的，气候是混沌的，山区是秀丽的
血液是分形的，家庭是混沌的，学生是勤奋的
教学是分形的，成绩是混沌的，大学是育人的
宿舍是分形的，厨房是混沌的，房间是宽容的
封面是分形的，封底是混沌的，书籍是进步的
断口是分形的，性能是混沌的，实验是客观的
方法是分形的，应用是混沌的，逻辑是柔性的
往复是分形的，消逝是混沌的，时间是宝贵的
起点是分形的，终点是混沌的，论文是探索的
相似是分形的，复杂是混沌的，思想是开放的
心扉是分形的，脾脏是混沌的，心灵是奉献的
印章是分形的，知识是混沌的，文凭是重要的
疼痛是分形的，根源是混沌的，疾病是无畏的
生死是分形的，缘由是混沌的，消失是自然的
坚持是分形的，多久是混沌的，活着是充实的
实事是分形的，成就是混沌的，奇迹是美丽的

跋 者：陈志成
2000—2004 于西京