第一章　函数与极限

1、 求下列函数的自然定义域：

（1） $y=\dfrac{1}{x}-\sqrt{1-x^2}$;　　　　　（2） $y=\sqrt{3-x}+\arctan\dfrac{1}{x}$;

2. 设

$$\varphi(x)=\begin{cases}|\sin x|, & |x|<\dfrac{\pi}{3},\\ 0, & |x|\ge\dfrac{\pi}{3},\end{cases}$$

求 $\varphi(\frac{\pi}{6}),\varphi(\frac{\pi}{4}),\varphi(-\frac{\pi}{4}),\varphi(-2)$, 并作出函数 $y=\varphi(x)$ 的图形.

3. 设 $f(x)$ 为定义在 $(-l,l)$ 内的奇函数，若 $f(x)$ 在 $(0,l)$ 内单调增加，证明 $f(x)$ 在 $(-l,0)$ 内也单调增加.

4. 设下面所考虑的函数都是定义在区间 $(-l,l)$ 上的. 证明：

（1）两个偶函数的和是偶函数，两个奇函数的和是奇函数；

（2）两个偶函数的乘积是偶函数，两个奇函数的乘积是偶函数，偶函数与奇函数的乘积是奇函数.

5. 求下列函数的反函数：

（1） $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}(ad-bc\ne 0)$;

（2） $y=2\sin 3x(-\dfrac{\pi}{6}\le x\le\dfrac{\pi}{6})$;

（3） $y=\dfrac{2^x}{2^x-1}$

6. 下列关于数列 $\{x_n\}$ 的极限是 a 的定义，哪些是对的，哪些是错的？如果是对的，是说明理由；如果是错的，试给出一个反例.

（1）对于任意给定的 $\varepsilon>0$，存在 $N\in N_+$，当 $n>N$ 时，不等式 $x_n-a<\varepsilon$ 成立；

（2）对于任意给定的 $\varepsilon>0$，存在 $N\in N_+$，当 $n>N$ 时，有无穷多项 x_n，使不等式 $|x_n-a|<\varepsilon$ 成立；

（3）对于任意给定的 $\varepsilon>0$，存在 $N\in N_+$，当 $n>N$ 时，不等式 $|x_n-a|<c\varepsilon$ 成立，其中 c 为某个正常数；

（4）对于任意给定的 $m\in N_+$，存在 $N\in N_+$，当 $n>N$ 时，不等式 $|x_n-a|<\dfrac{1}{m}$ 成立.

7. 根据数列极限的定义证明：

（1） $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^2}=0$;　　　　　（2） $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n+1}{2n+1}=\dfrac{3}{2}$;

（3） $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n^2+a^2}}{n}=1$;　　　　（4） $\lim\limits_{n\to\infty}0.\underbrace{999\cdots9}_{n个}=1$.

8. 设数列 $\{x_n\}$ 有界，又 $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=0$，证明： $\lim\limits_{n\to\infty}x_ny_n=0$.

9. 根据函数极限的定义证明：

（1）$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1+x^3}{2x^3}=\dfrac{1}{2}$;　　　　（2）$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sin x}{\sqrt{x}}=0$

10. 根据函数极限的定义证明：函数 $f(x)$ 当 $x\to x_0$ 时极限存在的充分必要条件是左极限、右极限各自存在并且相等.

11. 根据定义证明：

（1）$y=\dfrac{x^2-9}{x+3}$ 为当 $x\to 3$ 时的无穷小；　　（2）$y=x\sin\dfrac{1}{x}$ 为当 $x\to 0$ 时的无穷小.

12.计算下列极限

（1）$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{(x+h)^2-x^2}{h}$;　　　　（2）$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+2+3+\cdots+(n+1)}{n^2}$;

13.计算下列极限

（1）$\lim\limits_{x\to 0}x^2\sin\dfrac{1}{x}$;　　　　（2）$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\arctan x}{x}$.

14.设 $\{a_n\},\{b_n\},\{c_n\}$ 均为非负数列，且 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0,\lim\limits_{n\to\infty}b_n=1,\lim\limits_{n\to\infty}c_n=\infty$. 下列陈述中哪些是对的，哪些是错的？如果是对的，请说明理由；如果是错的，试给出一个返例.

$(1)a_n<b_n,n\in N_+$;　　　　$(2)b_n<c_n,n\in N_+$;

$(3)\lim\limits_{n\to\infty}a_nc_n$ 不存在;　　　　$(4)\lim\limits_{n\to\infty}b_nc_n$ 不存在.

15.下列陈述中哪些是对的，哪些是错的？如果是对的，请说明理由；如果是错的，试给出一个返例.

（1）如果 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 存在，但 $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)$ 不存在，那么 $\lim\limits_{x\to x_0}\left[f(x)+g(x)\right]$ 不存在；

（2）如果 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 和 $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)$ 都不存在，那么 $\lim\limits_{x\to x_0}\left[f(x)+g(x)\right]$ 不存在；

（3）如果 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 存在，但 $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)$ 不存在，那么 $\lim\limits_{x\to x_0}\left[f(x)\cdot g(x)\right]$ 不存在.

16.利用极限存在准则证明：

（1）$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{1+\dfrac{1}{n}}=1$;　　　　（2）$\lim\limits_{n\to\infty}n\left(\dfrac{1}{n^2+\pi}+\dfrac{1}{n^2+2\pi}+\cdots+\dfrac{1}{n^2+n\pi}\right)=1$;

（3）数列 $\sqrt{2},\sqrt{2+\sqrt{2}},\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}},\cdots$ 极限存在；

（4）$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+x}=1$;

17.利用等价无穷小的性质，求下列极限：

（1）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{sin(x^n)}{(sinx)^m}(n,m为正整数)$；　　（2）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{sin(x^n)}{(\sqrt[3]{1+x^2}-1)(\sqrt{1+\sin x}-1)}$.

18.证明无穷小的等价关系具有下列性质：

（1）$\alpha\sim\alpha$（自反性）；（2）若$\alpha\sim\beta$，则$\beta\sim\alpha$（对称性）；

（2）若$\alpha\sim\beta$，$\beta\sim\gamma$则$\alpha\sim\gamma$（对称性）.

19.讨论函数$f\left(x\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1-x^{2n}}{1+x^{2n}}x$的连续性，若有间断点，则判别其类型.

20.下列陈述中，哪些是对的，哪些是错的？如果是对的，请说明理由；如果是错的，试给出一个返例.

(1)如果函数$f\left(x\right)$在a连续，那么$\left|f\left(x\right)\right|$也在$a$连续；

(2)如果函数$\left|f\left(x\right)\right|$在$a$连续，那么$f\left(x\right)$也在$a$连续.

21.设

$$f\left(x\right)=\begin{cases}x, & x\in\mathbf{Q},\\ 0, & x\in\mathbf{R}\setminus\mathbf{Q},\end{cases}$$

证明：

（1）$f(x)$在$x=0$连续；

（2）$f(x)$在非零的x处都不连续.

22.求下列极限：

（1）$\lim\limits_{x\to 0}\sqrt{x^2-2x+5}$;　　（2）$\lim\limits_{\alpha\to\frac{\pi}{4}}(\sin 2\alpha)^3$;

（3）$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}}\ln(2\cos 2x)$;　　（4）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+1}-1}{x}$;

（5）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{5x-4}-\sqrt{x}}{x-1}$;　　（6）$\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\sin x-\sin a}{x-a}$;

（7）$\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x^2-x})$;　（8）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1-\frac{1}{2}x^2)^{\frac{2}{3}}-1}{x\ln(1+x)}$

23.求下列极限：

（1）$\lim\limits_{x\to\infty}e^{\frac{1}{x}}$；　　（2）$\lim\limits_{x\to 0}\ \ln\dfrac{\sin x}{x}$;

（3）$\lim\limits_{x\to\infty}(1+\dfrac{1}{x})^{\frac{x}{2}}$;　　（4）$\lim\limits_{x\to 0}(1+3\tan^2 x)^{\cot 2x}$;

（5）$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3+x}{6+x}\right)^{\frac{x-1}{2}}$;　　（6）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1+\sin x}}{x\sqrt{1+\sin^2 x}-x}$;

（7）$\lim\limits_{x\to e}\dfrac{\ln x-1}{x-e}$;　　（8）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{3x}-e^{2x}-e^{x}+1}{\sqrt[3]{(1-x)(1+x)}-1}$.

24．设 $f(x)$ 在 R 上连续，且 $f(x)\neq 0,\varphi(x)$，在 R 上有定义，且有间断点，则下列陈述中哪些是对的，哪些是错的？如果是对的，试说明理由；如果是是错的，试给出一个反例。

（1）$\varphi\left[f(x)\right]$ 必有间断点；　　（2）$\left[\varphi(x)\right]^2$ 必有间断点；

（3）$f\left[\varphi(x)\right]$ 未必有间断点；　　（4）$\dfrac{\varphi(x)}{f(x)}$ 必有间断点.

25.证明方程 $x=a\sin x+b$，其中 $a>0,b>0$，至少有一个正根，并且它不超过 $a+b$.

26. $f(x)$ 在 $\left[a,b\right]$ 上连续，$a<x_1<x_2<\cdots<x_n<b\ \ (n\geq 3)$，则在 (x_1,x_n) 内至少有一点 ξ，使 $f(\xi)=\dfrac{f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)}{n}$.

27.以下题目中给出了四个结论，从中选出一个正确的结论：

设 $f(x)=\dfrac{e^{\frac{1}{x}}-1}{e^{\frac{1}{x}}+1}$ 则 $x=0$ 是 $f(x)$ 的（　　）.

（A）可去间断点　　（B）跳跃间断点

（C）第二类间断点　　（D）连续点

28.设 $f(x)$ 的定义域是 $\left[0,1\right]$，求下列函数的定义域：

（1）$f(e^x)$;　　（2）$f(\ln x)$;

（3）$f(\arctan x)$;　　（4）$f(\cos x)$.

29.设

$$f(x)=\begin{cases}0, & x\leq 0,\\ x, & x>0,\end{cases}\qquad g(x)=\begin{cases}0, & x\leq 0,\\ -x^2, & x>0,\end{cases}$$

求 $f\left[f(x)\right],g\left[g(x)\right],f\left[g(x)\right],g\left[f(x)\right]$.

30.求下列极限：

（1）$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-x+1}{(x-1)^2}$;　　（2）$\lim\limits_{x\to\infty}x(\sqrt{x^2+1}-x)$;

（3）$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+3}{2x+1}\right)^{x+1}$；（4）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-\sin x}{x^3}$;

（5）$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{a^x+b^x+c^x}{3}\right)^{\frac{1}{x}}(a>0,b>0,c>0)$;（6）$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(\sin x)^{\tan x}$;

（7）$\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\ln x-\ln a}{x-a}(a>0)$;（8）$\lim\limits_{x\to 0}(\dfrac{x\tan x}{\sqrt{1-x^2}-1})$.

31.设函数 $f(x)$ 有定义，则下列 $f(x)$ 中为有界函数的是（　　）

（A）$2f(x)+f(1-x)=x^2$（B）$f(x)=\lim\limits_{n\to 0}\dfrac{1+x}{x^{2n}+1}$（C）$f(x)=x\cos x$（D）$\int_0^{x^3+1}f(t)dt=\ln x$

32.设 $x_n=\dfrac{1}{n}\cdot\left|1-2+3-4+\cdots+(-1)^{n+1}n\right|$，求 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$

33.求下列极限

（1）$\dfrac{(\frac{1+\cos x}{2})^x-1}{x\ln(1+x^2)}$;（2）$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-x^x}{1-x+\ln x}$;

（3）$\lim\limits_{x\to+\infty}(x+\sqrt{1+x^2})^{\frac{2}{x}}$;（4）$\lim\limits_{x\to+\infty}(\dfrac{\pi}{2}-\arctan x)^{\frac{1}{\ln x}}$

34．已知 $\lim\limits_{x\to 0}(\dfrac{f(x)-1}{\tan x}-\dfrac{e^x\sin x}{\tan^2 x})=2$，求 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$

35.设 $f(x)$ 在 $0<|x|<\delta$ 时有定义，其中 δ 为正常数，且 $\lim\limits_{x\to 0}\left[\cos x+\dfrac{f(x)}{x}\right]^{\frac{1}{x^2}}=e$，求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x^3}$

36.当 $x\to 0$ 时，$e^{x^3}-e^{\sin x}$ 与 x^m 是同阶无穷小量，试求常数 m

37.设 $x\to 0$ 时，$f(x)=\ln(x^2+\sqrt{1+x^2})$ 与 $g(x)=\sqrt[3]{1-ax^k}-1$ 是等价无穷小，试求常数 a 和 k 的值

38.设函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\ln\cos(x-1)}{1-\sin\frac{\pi}{2}x},若x\neq 1\\ 1, \qquad 若x=1\end{cases}$，问 $f(x)$ 在 x=1处是否连续？若不连续，修改 $f(x)$ 在 x=1处的定义，使之连续

39.求函数 $f(x)=\dfrac{1}{x^2}\arctan\dfrac{1}{x-\frac{1}{x}}$ 的间断点，并判别其类型

40.函数 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x(e^{nx}+1)}{1+x^2e^{nx}}$，讨论 $f(x)$ 的间断点情况及类别

41.证明方程 $\dfrac{x}{e}-\ln x-\sqrt{2}=0$ 在 $(0,+\infty)$ 内至少有 2 个实根

第二章 导数与微分

1. 设物体绕定轴旋转，在时间间隔 $[0,t]$ 上转过角度 θ，从而转角 θ 是 t 的函数：$\theta=\theta(t)$. 如果旋转是匀速的，那么称 $\omega=\dfrac{\theta}{t}$ 为该物体旋转的角速度。如果旋转是非匀速的，应该怎样确定该物体在时刻 t_0 的角速度？

2. 证明 $(\cos x)'=-\sin x$

3. 设 $f(x)$ 可导，$F(x)=f(x)(1+|\sin x|)$, 则 $f(0)=0$ 是 $F(x)$ 在 $x=0$ 处可导的（　　）

A.　充分必要条件　　　　　B.　充分条件但非必要条件
B.　必要条件但非充分条件　D.　既非充分又非必要条件

4. 设函数 $f(x)=\begin{cases}x^2, & x\le 1,\\ ax+b, & x>1.\end{cases}$ 为了使函数 $f(x)$ 在 $x=1$ 处连续，且可导，a、b 应取什么值？

5. 求下列函数的导数：

（1）$y=x^3+\dfrac{7}{x^4}-\dfrac{2}{x}+12;$　　（2）$y=5x^3-2^x+3e^x;$

（2）$y=2\tan x+\sec x-1;$　　（4）$y=\sin x\bullet\cos x;$

（5）$y=x^2\ln x;$　　（6）$y=3e^x\cos x;$

（7）$y=\dfrac{\ln x}{x};$　　（8）$y=\dfrac{e^x}{x^2}+\ln 3;$

（9）$y=x^2\ln x\cos x;$　　（10）$s=\dfrac{1+\sin t}{1+\cos t}.$

6. 求下列函数的导数：

（1）$y=\left(\arcsin\dfrac{\pi}{2}\right)^2;$　　（2）$y=\ln\tan\dfrac{x}{2};$

（3）$y=\sqrt{1+\ln^2 x};$　　（4）$y=e^{\arctan\sqrt{x}};$

（5）$y=\sin^n x\cos nx;$　　（6）$y=\arctan\dfrac{x+1}{x-1};$

（7） $y=\dfrac{\arcsin x}{\arccos x}$;　　（8） $y=\ln\ln\ln x$;

（9） $y=\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}$;　　（10） $s=\arcsin\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$.

7. 设函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 可导，且 $f^2(x)+g^2(x)\neq 0,$ 试求函数 $y=\sqrt{f^2(x)+g^2(x)}$ 的导数。

8. 设函数 $f(x)$ 满足下列条件：

（1） $f(x+y)=f(x)\bullet f(y),$ 对一切 $x,y\in R;$

（2） $f(x)=1+xg(x),$ 而 $\lim\limits_{x\to 0}g(x)=1.$

试证明 $f(x)$ 在 R 上处处可导，且 $f'(x)=f(x).$

9. 求下列函数的二阶导数：

（1） $y=2x^2+\ln x;$　（2） $y=e^{2x-1}$;（3） $y=x\cos x;$（4） $y=e^{-t}\sin t;$（5） $y=\sqrt{a^2-x^2}$;（6） $y=\ln\left(1-x^2\right);$（7） $y=\tan x;$（8） $y=\dfrac{1}{x^3+1}$;（9） $y=\left(1+x^2\right)\arctan x;$　（10） $y=\dfrac{e^x}{x}$;（11） $y=xe^{x^2}$;（12） $y=\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right).$

10. 设 $f''(x)$ 存在，求下列函数的二阶导数 $\dfrac{d^2y}{dx^2}$：

（1） $y=f\left(x^2\right);$　　（2） $y=\ln\left[f(x)\right].$

11. 求下列函数所指定的阶数的导数：

（1） $y=e^x\cos x,$ 求 $y^{(4)}$;　　（2） $y=x^2\sin 2x,$ 求 $y^{(50)}.$

12. 求曲线 $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$ 在点 $\left(\dfrac{\sqrt{2}}{4}a,\dfrac{\sqrt{2}}{4}a\right)$ 处的切线方程和法线方程.

13. 用对数求导法求下列函数的导数：

（1） $y=\left(\dfrac{x}{1+x}\right)^x$;　　（2） $y=\sqrt[5]{\dfrac{x-5}{\sqrt[5]{x^2+2}}}$;

（3） $y=\dfrac{\sqrt{x+2}\,(3-x)^4}{(x+1)^5}$;　　（4） $y=\sqrt{x\sin x\sqrt{1-e^x}}$.

14. 已知$\begin{cases} x=e^t\sin t, \\ y=e^t\cos t, \end{cases}$求当$t=\dfrac{\pi}{3}$时$\dfrac{dy}{dx}$的值.

15. 求下列参数方程所确定方程的三阶导数$\dfrac{d^3y}{dx^3}$:

（1）$\begin{cases} x=1-t^2, \\ y=t-t^3; \end{cases}$ （2）$\begin{cases} x=\ln\left(1+t^2\right), \\ y=t-\arctan t. \end{cases}$

16. 求下列函数的微分：

（1）$y=\dfrac{1}{x}+2\sqrt{x};$ （2）$y=x\sin 2x;$

（2）$y=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}};$ （4）$y=\ln^2\left(1-x\right);$

17. 求下列函数的导数：

（1）$y=\arcsin\left(\sin x\right)$;（2）$y=\arctan\dfrac{1+x}{1-x}$;（3）$y=\ln\tan\dfrac{x}{2}-\cos x\bullet\ln\tan x;$

（4）$y=\ln\left(e^x+\sqrt{1+e^{2x}}\right)$;（5）$y=x^{\frac{1}{x}}\left(x>0\right).$

18. 求下列函数的n阶导数：

（1）$y=\sqrt[m]{1+x};$ （2）$y=\dfrac{1-x}{1+x}.$

19. 设函数$y=y\left(x\right)$由方程$e^y+xy=e$所确定，求$y''\left(0\right)$.

20. 求下列由参数方程所确定的函数的一阶导数$\dfrac{dy}{dx}$及二阶导数$\dfrac{d^2y}{dx^2}$:

（1）$\begin{cases} x=a\cos^3\theta, \\ y=a\sin^3\theta; \end{cases}$ （2）$\begin{cases} x=\ln\sqrt{1+t^2}, \\ y=\arctan t. \end{cases}$

21. 求曲线$\begin{cases} x=2e^t, \\ y=e^{-t} \end{cases}$在$t=0$相应的点处的切线方程及法线方程。

22、设$f(x)$在$x=a$的某个领域内定义，则$f(x)$在$x=a$处可导的一个充分条件是（）

A. $\lim\limits_{h\to 0}h\left[f(a+\dfrac{1}{h})-f(a)\right]$存在 B. $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(a+2h)-f(a+h)}{h}$存在

C. $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(a+h)-f(a-h)}{2h}$存在 D. $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(a)-f(a-h)}{h}$ 存在

23、已知 $f^{'}(x_0)=-1$，则 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{f(x_0-2x)-f(x_0-x)}=$（ ）

A．1　B．-1　C．3　D．-3

24、设 $y=f(x)$ 是由方程 $\sin(xy)+\ln(y-x)=x$ 所确定的隐函数，求 $\lim\limits_{n\to\infty}n\left[f(\frac{1}{n})-1\right]$

25、设 $y=x+\ln x$，求 $\dfrac{d^2x}{dy^2}$

26、已知函数 $f(x)=\begin{cases}ax^2+b, x\geq 1\\ e^{\frac{1}{x}}, 0<x<1\end{cases}$，在 $x=1$ 处可导，求曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1,f(1))$ 处的切线方程法线方程。

第三章　微分中值定理与导数的应用

1．证明下列不等式：

（1）$\left|\arctan a-\arctan b\right|\leq\left|a-b\right|$;

（2）当 $x>1$ 时，$e^x>ex.$

2. 证明方程 $x^5+x-1=0$ 只有一个正根.

3. 证明：若函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内满足关系式 $f'(x)=f(x)$，且 $f(0)=1$，则 $f(x)=e^x$.

4. 用洛必达法则求下列极限：

（1）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}$;　　（2）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{-x}}{\sin x}$;

（3）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-x}{x-\sin x}$;　　（4）$\lim\limits_{x\to \pi}\dfrac{\sin 3x}{\tan 5x}$;

（5）$\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}\dfrac{\ln\sin x}{(\pi-2x)^2}$;　　（6）$\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x^m-a^m}{x^n-a^n}(a\neq 0)$;

（7）$\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\ln\tan 7x}{\ln\tan 2x}$;　　（8）$\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}\dfrac{\tan x}{\tan 3x}$;

（9）$\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\ln(1+\frac{1}{x})}{\operatorname{arccot} x}$;　　（10）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x^2)}{\sec x-\cos x}$;

（11）$\lim\limits_{x\to 0}x\cot 2x$;　　（12）$\lim\limits_{x\to 0}x^2e^{1/x^2}$;

（13）$\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{2}{x^2-1}-\frac{1}{x-1}\right)$;　　（14）$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{a}{x}\right)^x$;

（15）$\lim\limits_{x\to 0^+} x^{\sin x}$;　　（16）$\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{x}\right)^{\tan x}$.

5. 验证极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x+\sin x}{x}$ 存在，但不能用洛必达法则得出.

6. 求函数 $f(x)=\sqrt{x}$ 按 $(x-4)$ 的幂展开的带有拉格朗日余项的 3 阶泰勒公式.

7. 求函数 $f(x)=\ln x$ 按 $(x-2)$ 的幂展开的带有佩亚诺余项的 n 阶泰勒公式.

8. 求函数 $f(x)=\frac{1}{x}$ 按 $(x+1)$ 的幂展开的带有拉格朗日余项的 n 阶泰勒公式.

9. 求函数 $f(x)=\tan x$ 的带有佩亚诺余项的 3 麦克劳林公式.

10. 求函数 $f(x)=xe^x$ 的带有佩亚诺余项的 n 阶麦克劳林公式.

11. 利用泰勒公式求下列极限.

（1）$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt[3]{x^3+3x^2}-\sqrt[4]{x^4-2x^3}\right)$;　　（2）$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x-e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^2\left[x+ln(1-x)\right]}$;

（3）$\lim\limits_{x\to 0}\frac{1+\frac{1}{2}x^2-\sqrt{1+x^2}}{(\cos x-e^{x^2})\sin^2 x}$;　　（4）$\lim\limits_{x\to\infty}\left[x-x^2\ln(1+\frac{1}{x})\right]$.

12. 确定下列函数的单调区间：

（1）$y=2x^3-6x^2-18x-7$;　　（2）$y=2x+\frac{8}{x}(x>0)$;

（3）$y=\frac{10}{4x^3-9x^2+6x}$;　　（4）$y=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$;

（5）$y=(x-1)(x+1)^3$;　　（6）$y=\sqrt[3]{(2x-a)(a-x)^2}\,(a>0)$;

（7）$y=x^n e^{-x}(n>0,x\ge 0)$;　　（8）$y=x+\left|\sin 2x\right|$.

13. 证明下列不等式：

（1）当 $x>0$ 时，$1+\frac{1}{2}x>\sqrt{1+x}$;

（2）当 $x>0$ 时，$1+x\ln(x+\sqrt{1+x^2})>\sqrt{1+x^2}$;

（3）当 $0<x<\frac{\pi}{2}$ 时，$\sin x+\tan x>2x$;

（4）当 $0<x<\frac{\pi}{2}$ 时，$\tan x>x+\frac{1}{3}x^3$;

（5）当 $x>4$ 时，$2^x>x^2$.

14. 设 I 为任一无穷区间，函数 $f(x)$ 在区间 I 上连续，I 内可导. 试证明：如果 $f(x)$ 在 I 的任一有限的子区间上 $f'(x)\geq 0$（或 $f'(x)\leq 0$），且等号仅在有限多个点处成立，那么 $f(x)$ 在区间 I 上单调增加（或单调减少）.

15. 利用函数图形的凹凸性，证明下列不等式：

（1）$\frac{1}{2}(x^n+y^n)>(\frac{x+y}{2})^n \qquad (x>0,y>0,x\neq y,n>1);$

（2）$\frac{e^x+e^y}{2}>e^{\frac{x+y}{2}}(x\neq y);$

（3）$x\ln x+y\ln y>(x+y)\ln\frac{x+y}{2} \qquad (x>0,y>0,x\neq y).$

16. 试证明曲线 $y=\frac{x-1}{x^2+1}$ 有三个拐点位于同一直线上.

17. 试证明：如果函数 $y=ax^3+bx^2+cx+d$ 满足条件 $b^2-3ac<0$，那么这个函数没有极值.

18. 试问 a 为何值时，函数 $f(x)=a\sin x+\frac{1}{3}\sin 3x$ 在 $x=\frac{\pi}{3}$ 处取得极值？它是极大值还是极小值，并求此极值.

19. 设函数 $f(x)$ 在 x_0 处有 n 阶导数，且 $f'(x_0)=f''(x_0)=\cdots=f^{(n-1)}(x_0)=0,f^{(n)}(x_0)\neq 0$，证明：

（1）当 n 为奇数时，$f(x)$ 在 x_0 处不取得极值；

（2）当 n 为偶数时，$f(x)$ 在 x_0 处取得极值，且当 $f^{(n)}(x_0)<0$ 时，$f(x_0)$ 为极大值，当 $f^{(n)}(x_0)>0$ 时，$f(x_0)$ 为极小值.

20. 设常数 $k>0$，函数 $f(x)=\ln x-\frac{x}{e}+k$ 在 $(0,+\infty)$ 内零点的个数为________.

21. 以下题目中给出了四个结论，从中选出一个正确的结论：

（1）设 $f'\left(x_0\right)=f''\left(x_0\right)=0,f'''\left(x_0\right)>0,$ 则（　　）.

（A）$f'\left(x_0\right)$ 是 $f'\left(x\right)$ 的极大值

（B）$f\left(x_0\right)$ 是 $f\left(x\right)$ 极大值

（C）$f\left(x_0\right)$ 是 $f\left(x\right)$ 的极小值

（D）$\left(x_0,f\left(x_0\right)\right)$ 是曲线 $y=f\left(x\right)$ 的拐点

22. 列举一个函数 $f\left(x\right)$ 满足：$f\left(x\right)$ 在 $\left[a,b\right]$ 上连续, 在 $\left(a,b\right)$ 内除某一点外处处可导, 但

(a,b) 内不存在点 ξ，使 $f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a)$.

23. 设 $f(x)$，$g(x)$ 都是可导函数，且 $|f'(x)|<g'(x)$，证明：当 $x>a$ 时，$|f(x)-f(a)|<g(x)-g(a)$

24. 求下列极限：

（1）$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-x^x}{1-x+\ln x}$;　　（2）$\lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{1}{\ln(1+x)}-\dfrac{1}{x}\right]$;

（3）$\lim\limits_{x\to +\infty}(\dfrac{2}{\pi}\arctan x)^x$　　（4）$\lim\limits_{x\to\infty}\left[a_1^{\frac{1}{x}}+a_2^{\frac{1}{x}}+\cdots+a_n^{\frac{1}{x}}/n\right]^{nx}$ (其中 $a1,a2,\cdots,a_n>0$).

25. 证明下列不等式：

（1）当 $0<x_1<x_2<\dfrac{\pi}{2}$ 时，$\dfrac{\tan x_2}{t\an x_1}>\dfrac{x_2}{x_1}$；

（2）当 $x>0$ 时，$\ln(1+x)>\dfrac{\arctan x}{1+x}$；

（3）当 $e<a<b<e^2$ 时，$\ln^2 b-\ln^2 a>\dfrac{4}{e^2}(b-a)$.

26. 设 $f''(x_0)$ 存在，证明：

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)+f(x_0-h)-2f(x_0)}{h^2}=f''(x_0).$$

27、设函数 $f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上连续，在（0, 1）内可导，试证在（0, 1）内至少存在一点 δ，使（1+δ^2）$f'(\delta)=\dfrac{4}{\pi}[f(1)-f(0)]$

28、设函数 $f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上连续，在（0, 1）内可导，且 $\int_0^{\frac{2}{\pi}}e^{f(x)}\arctan x dx=\dfrac{1}{2}$，$f(1)=0$，证明：至少存在一点 $\delta\in(0,1)$，使（1+δ^2）（$\arctan\delta$）$f'(\delta)=-1$

29、设函数 $f(x)$ 在区间 $[-1,1]$ 上有三阶连续导数，且 $f(-1)=0$，$f'(0)=0$，证明：在 $(-1,1)$ 内至少存在一点 δ，使得 $f'''(\delta)=3$

30、设 $y=f(x)$ 在 $(-1,1)$ 内具有二阶连续导数，且 $f''(x)\neq 0$，试证：

（1）对 $(-1,1)$ 内的任一 $x\neq 0$，存在唯一的 $\theta(x)\in(0,1)$，使 $f(x)=f(0)+xf'(\theta(x)x)$ 成立；

（2）$\lim\limits_{x\to 0}\theta(x)=\dfrac{1}{2}$

31、设 $x\geq 0$，证明 $(1+x)\geq\dfrac{\arctan x}{1+x}$

第四章 不定积分

1. 求下列不定积分

（1）$\int x\sqrt{x};$　　　　（2）$\int x^2\sqrt[3]{x}dx;$

（3）$\int\dfrac{(1-x)^2}{\sqrt{x}}dx;$　　　　（4）$\int 3^x e^x dx;$

（5）$\int\sec x(\sec x-\tan x)dx;$　　　　（6）$\int\cos\theta(\tan\theta+\sec\theta)d\theta;$

2. 证明函数 $\arcsin(2x-1)$，$\arccos(1-2x)$ 和 $2\arctan\sqrt{\dfrac{x}{1-x}}$ 都是 $\dfrac{1}{\sqrt{x-x^2}}$ 的原函数.

3. 求下列不定积分（其中 a,b,ω,φ 均为常数）：

（1）$\int(\sin ax-e^{\frac{x}{b}})dx$；　　　　（2）$\int\dfrac{3x^3}{1-x^4}dx;$

（3）$\int\dfrac{\sin x+\cos x}{\sqrt[3]{\sin x-\cos x}}dx;$　　　　（4）$\int\tan^{10}x\cdot\sec^2 xdx;$

（5）$\int\sin 5x\sin 7xdx$　　　　（6）$\int\dfrac{dx}{x\sqrt{x^2-1}};$

（7）$\int\dfrac{x^3+1}{(x^2+1)^2}dx.$

4. 求下列不定积分：

(1). $\int\ln xdx.$

(2). $\int xe^{-x}dx.$

(3). $\int e^{\sqrt[3]{x}}dx.$

(4). $\int e^x\sin^2 xdx.$

(5). $\int e^{\sqrt{3x+9}}dx.$

5. 求下列不定积分：

(1). $\int \frac{dx}{(x^2+1)(x^2+x+1)}$.

(2). $\int \frac{(x\ \ +1)^2}{(x^2+1)^2} dx$.

(3). $\int \frac{dx}{3+\cos x}$.

(4). $\int \frac{dx}{2+\sin x}$.

(5). $\int \frac{dx}{2\sin x-\cos x+5}$.

(6). $\int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \frac{dx}{x}$.

(7). $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(x+1)^2(x-1)^4}}$.

6. 求下列不定积分（其中 a,b 为常数）：

（1） $\int \frac{dx}{\sqrt{1+e^x}}$;

（2） $\int \arctan\sqrt{x}dx$;

（3） $\int \frac{x^{11}}{x^8+3x^4+2} dx$;

（4） $\int \frac{\sqrt[3]{x}}{x(\sqrt{x}+\sqrt[3]{x})} dx$;

（5） $\int \ln^2(x+\sqrt{1+x^2})dx$;

（6） $\int \frac{dx}{(2+\cos x)\sin x}$;

（7） $\int \frac{\sin x\cos x}{\sin x+\cos x} dx$.

第五章 定积分

1. 证明定积分的性质：

（1） $\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$（ k 是常数）；

（2）$\int_a^b 1\cdot\ \ dx=\int_a^b\ dx=b-a$.

2. 设 $f\left(x\right)$ 及 $g(x)$ 在 $\left[a,b\right]$ 上连续，证明：

（1）若在 $\left[a,b\right]$ 上，$f\left(x\right)\ge 0$，且 $f\left(x\right)\ne 0$，则 $\int_a^b f\left(x\right)dx>0$；

（2）若在 $\left[a,b\right]$ 上，$f\left(x\right)\ge 0$，且 $\int_a^b f\left(x\right)dx=0$，则在 $\left[a,b\right]$ 上 $f\left(x\right)\equiv 0$；

（3）若在 $\left[a,b\right]$ 上，$f(x)\le g(x)$，且 $\int_a^b f\left(x\right)dx=\int_a^b g\left(x\right)dx$，则在 $\left[a,b\right]$ 上 $f(x)\equiv g(x)$.

3. 求下列极限：

（1）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x \cos t^2 dt}{x}$；（2）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(\int_0^x e^{t^2}dt)^2}{\int_0^x te^{2t^2}dt}$.

4. 设

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}\sin x, & 0\le x\le\pi,\\ 0, & x<0\text{或}x>\pi.\end{cases}$$

求 $\phi(x)=\int_0^x f(t)dt$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内的表达式.

5. 设 $f(x)$ 在 $\left[a,b\right]$ 连续，在 (a,b) 内可导且 $f'(x)\le 0$，

$$F(x)=\frac{1}{x-a}\int_a^x f(t)dt.$$

证明在 (a,b) 内有 $F'(x)\le 0$.

6. 设 $F(x)=\int_0^x \dfrac{\sin t}{t}dt$，求 $F'(0)$.

7. 设 $f(x)$ 在 $\left[0,+\infty\right)$ 内连续，且 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=1$. 证明函数

$$y=e^{-x}\int_0^x e^t f(t)dt$$

满足方程 $\dfrac{dy}{dx}+y=f(x)$，并求 $\lim\limits_{x\to\infty}y(x)$.

8. 计算下列定积分：

（1）$\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}}\sqrt{8-2y^2}dy$;（2）$\int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{1}\frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2}dx$;

（3）$\int_1^4\frac{dx}{1+\sqrt{x}}$;（4）$\int_0^{\sqrt{2}a}\frac{xdx}{\sqrt{3a^2-x^2}}(a>0)$;

（5）$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos x\cos 2xdx$;（6）$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\cos x-\cos^3 x}dx$.

9. 证明：$\int_x^1\frac{dt}{1+t^2}=\int_1^{\frac{1}{x}}\frac{dt}{1+t^2}\quad (x>0)$.

10. 若 $f(t)$ 是连续的奇函数，证明 $\int_0^x f(t)dt$ 是偶函数；若 $f(t)$ 是连续的偶函数，证明 $\int_0^x f(t)dt$ 是奇函数.

11. 判断下列各反常积分的收敛性，如果收敛，计算反常积分的值：

（1）$\int_1^{+\infty}\frac{dx}{\sqrt{x}}$;

（2）$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{x^2+2x+2}$;

（3）$\int_0^2\frac{dx}{(1-x)^2}$;

（4）$\int_1^2\frac{xdx}{\sqrt{x-1}}$;

（5）$\int_1^e\frac{dx}{x\sqrt{1-(\ln x)^2}}$;

14. 计算反常积分 $\int_0^1\ln xdx$.

15. 设 $x>0$，证明：

$$\int_0^x\frac{1}{1+t^2}dt+\int_0^{\frac{1}{x}}\frac{1}{1+t^2}dt=\frac{\pi}{2}.$$

16. 设 $p>0$，证明：

$$\frac{p}{p+1}<\int_0^1\frac{dx}{1+x^p}<1.$$

17. 设 $f(x)$、$g(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续，证明：

（1）$\left(\int_a^b f(x)g(x)dx\right)^2\le\int_a^b f^2(x)dx\cdot\int_a^b g^2(x)dx$（柯西-施瓦茨不等式）；

（2）$\left(\int_a^b\left[f(x)+g(x)\right]^2dx\right)^{\frac{1}{2}}\le\left(\int_a^b f^2(x)dx\right)^{\frac{1}{2}}+\left(\int_a^b g^2(x)dx\right)^{\frac{1}{2}}$（闵可夫斯基不等式）.

18. 计算下列积分：

（1）$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{x+\sin x}{1+\cos x}dx;$　　（2）$\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln(1+\tan x)dx;$

（3）$\int_0^a\frac{dx}{x+\sqrt{a^2-x^2}}(a>0);$　　（4）$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-\sin 2x};$

（5）$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{1+\cos^2 x};$　　（6）$\int_0^{\pi}x\sqrt{\cos^2 x-\cos^4 x}dx;$

（7）$\int_0^{\pi}x^2\left|\cos x\right|dx;$　　（8）$\int_0^{+\infty}\frac{dx}{e^{x+1}e^{3-x}};$

（9）$\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}}\frac{dx}{\sqrt{\left|x^2-x\right|}};$　　（10）$\int_0^x\max\left\{t^3,t^2,1\right\}dt.$

19. 设 $f(x)$ 在区间 $\left[a,b\right]$ 上连续，且 $f(x)>0$，

$$F(x)=\int_a^x f(t)dt+\int_b^x\frac{dt}{f(t)},x\in\left[a,b\right].$$

证明：

（1）$F'(x)\ge 2$；

（2）方程 $F(x)=0$ 在区间 (a,b) 内有且仅有一个根.

20. 求由下列各组曲线所围成的图形的面积:

（1）$y=\frac{1}{2}x^2$ 与 $x^2+y^2=8$（两部分都要计算）;

（2）$y=\frac{1}{x}$ 与直线 $y=x$ 及 $x=2;$

（3）$y=e^{-x}$ $y=e^x,$ 与直线 $x=1;$

（4）$y=\ln x,$ y 轴与直线 $y=\ln a,y=\ln b(b>a>0).$

21. 求抛物线 $y=2px$ 及其在点 $(\frac{p}{2},p)$ 处的法线所围成的图形的面积.

22. 已知抛物线 $y=px^2+qx(其中p<0,q>0)$ 在第一象限内与直线 $x+y=5$ 相切，且此抛物线与 x 轴所围成的图形的面积为 A. 问 p 和 q 为何值时， A 达到最大值, 并求出此最大值.

23. 求心形线 $\rho=a(1+\cos\theta)$ 的全长.

24.设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续，则 $d\left[\int f(x)dx\right]$ 等于（　　）

（A）$f(x)$　　（B）$f(x)dx$　　（C）$f(x)+c$　　（D）$f'(x)dx$

25.已知的一个原函数为 $\ln^2 x$ ，则 $\int xf'(x)dx$ =__________.

26.设 $F(x)$ 为 $f(x)$ 的原函数，且当 $x\geq 0$ 时，$f(x)F(x)=\dfrac{xe^x}{2(1+x)^2}$，已知 $F(0)=1$，$F(x)>0$，试求 $f(x)$.

计算下列不定积分

27.（1）$\int \dfrac{(1+2\ln x)}{x}dx;$　　（2）$\int \dfrac{\sqrt{1+2\arctan x}}{1+x^2}dx;$　　（3）$\int \dfrac{(\arcsin x)^2}{\sqrt{1-x^2}}dx;$

（4）$\int \dfrac{1}{\sqrt{x}}e^{\sqrt[3]{x}}dx;$　　（5）$\int x\sin(3x^2+2)dx;$　　（6）$\int \dfrac{1}{x^2}\cos\dfrac{1}{x}dx.$

28.（1）$\int \sin^2 xdx;$　　（2）$\int \sin^3 xdx;$　　（3）$\int \sin^4 xdx.$

29.（1）$\int \dfrac{\cos 2x}{\cos^2 x\sin^2 x}dx;$　　（2）$\int \dfrac{\tan x}{\sqrt{\cos x}}dx;$　　（3）$\int \dfrac{x^3}{\sqrt{1+x^2}}dx.$

30.（1）$\int \dfrac{dx}{x+\sqrt{1-x^2}};$　　（2）$\int \dfrac{x^3+1}{(x^2+1)^2}dx;$　　（3）$\int \dfrac{dx}{\sqrt{(x^2+1)^3}};$　　（4）$\int \dfrac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}.$

31.（1）$\int x^3e^{x^2}dx;$　　（2）$\int \dfrac{\ln x}{(1-x)^2}dx;$　　（3）$\int \dfrac{x+\ln(1-x)}{x^2}dx;$

（4）$\int \dfrac{\ln\sin x}{\sin^2 x}dx;$　　（5）$\int \dfrac{arc\tan e^x}{e^{2x}}dx;$　　（6）$\int x\sin^2 xdx.$

32. $\int \dfrac{x\cos^4\dfrac{x}{2}}{\sin^3 x}dx.$

33. $\int e^x\sin^2 xdx.$

34.（1）$\int \dfrac{dx}{x(x^2+1)};$　　（2）$\int \dfrac{dx}{(x^2+1)(x^2+x)};$　　（3）$\int \dfrac{x+1}{x^2-2x+5}dx;$

（4）$\int \dfrac{1}{(x^2+1)^2}dx.$

35.（1）$\int \dfrac{dx}{\sin 2x+2\sin x};$　　（2）$\int \dfrac{1}{\sin x+\cos x}dx;$　　（3）$\int \dfrac{dx}{2+\sin x};$

（4）$\int \frac{dx}{1+\sin x+\cos x}$.

36、$M=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{1-x^2}\cos^4 xdx, N=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(\sin^3 x+\cos^4 x)dx, P=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(x^2\sin^3 x-\cos^4 x)dx$, 则有（　）

（A）$N<P<M$　　　　（B）$M<P<N$

（C）$N<M<P$　　　　（D）$P<M<N$

37、设$I_1=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\tan x}{x}dx, I_2=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{x}{\tan x}dx$, 则（　　）

（A）$I_1>I_2>1$　　（B）$1>I_1>I_2$　　（C）$I_2>I_1>1$　　（D）$1>I_2>I_1$

38.（1）$\int_0^3\frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}}$;　　（2）$\int_0^1\sqrt{2x-x^2}dx$;　　（3）$\int_1^2\frac{x+2}{\sqrt{x^2+2x}}dx$;

（4）$\int_0^{\pi}\sqrt{1-\sin x}dx$;

39.（1）$\int_{-1}^2(|x|+x)e^{-|x|}dx$;　　（2）$\int_{-1}^1(x+\sqrt{1-x^2})^2dx$;　（3）$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(x^3+\sin^2 x)\cos^2 xdx$;

（4）$\int_0^2(1+\frac{x}{2})\sqrt{2x-x^2}dx$.

40.已知$f(2)=\frac{1}{2}, f'(2)=0$及$\int_0^2 f(x)dx=1$, 求$\int_0^1 x^2 f''(2x)dx$.

41．设函数$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$内满足$f(x)=f(x-\pi)+\sin x$，且$f(x)=x, x\in[0,\pi)$, 计算

$\int_{\pi}^{3\pi}f(x)dx$.

42．设$a_n=\frac{3}{2}\int_0^{\frac{n}{n+1}}x^{n-1}\sqrt{1+x^n}dx$, 则极限$\lim\limits_{x\to\infty}na_n$等于（　　）

（A）$(1+e)^{\frac{3}{2}}+1$　　（B）$(1+e^{-1})^{\frac{3}{2}}-1$　　（C）$(1+e^{-1})^{\frac{3}{2}}+1$　　（D）$(1+e)^{\frac{3}{2}}-1$

43.函数$y=\frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}$在区间$\left[\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right]$上的平均值为___________.

44.设函数$f(x)$连续，则下列函数中必为偶函数的是（　　）

（A）$\int_0^x f(t^2)dt$　　（B）$\int_0^x f^2(t)dt$　　（C）$\int_0^x t[f(t)-f(-t)]dt$　　（D）$\int_0^x t[f(t)+f(-t)]dt$

45. $\frac{d}{dx}\int_{x^2}^0 x\cos t^2dt$ =___________.

46.设$f(x)$连续，则$\frac{d}{dx}\int_0^x tf(x^2-t^2)dt$ =___________.

（A）$xf(x^2)$　　（B）$-xf(x^2)$　　（C）$2xf(x^2)$　　（D）$-2xf(x^2)$

47.设函数 $f(x)$ 在 $\left[0,+\infty\right)$ 上可导，$f(0)=0$，且反函数为 $g(x)$.若 $\int_0^{f(x)} g(t)dt = x^2e^x$, 求 $f(x)$.

48.设函数 $f(x)$ 连续，且 $\int_0^x tf(2x-t)dt = \frac{1}{2}\arctan x^2$, 已知 $f(1)=1$，求 $\int_1^2 f(x)dx$ 的值.

49．求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x\left[\int_0^{\mu^2}\arctan(1+t)dt\right]du}{x(1-\cos x)}$.

50.求 $\int_0^x \max\left\{t^3,t^2,1\right\}dt$.

51.设 $f(x)=\int_1^x \frac{\ln t}{1+t}dt$, 其中 $x>0$, 求 $f(x)+f(\frac{1}{x})$.

52.设函数 $f(x)$ 在 $\left[0,+\infty\right)$ 上连续，单调不减且 $f(0)\geq 0$，试证函数

$F(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x}\int_0^x t^n f(t)dt, & x>0\\ 0, & x=0\end{cases}$ 在 $\left[0,+\infty\right)$ 上连续且单调不减（其中 $n>0$）.

53.求函数 $I(x)=\int_e^x \frac{\ln t}{t^2-2t+1}dt$ 在区间 $\left[e,e^2\right]$ 上的最大值.

54.设 $f(x),g(x)$ 在区间 $\left[-a,a\right](a>0)$ 上连续，$g(x)$ 为偶函数，且 $f(x)$ 满足条件 $f(x)+f(-x)=A$（A 为常数）.

（1）证明 $\int_{-a}^a f(x)g(x)dx = A\int_0^a g(x)dx;$

（2）利用（1）的结论计算定积分 $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left|\sin x\right|\arctan e^x dx.$

55. 下列结论正确的是（　　）

（A）$\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x(x+1)}$ 与 $\int_0^1\frac{dx}{x(1+x)}$ 都收敛　　（B）$\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x(x+1)}$ 与 $\int_0^1\frac{dx}{x(1+x)}$ 都发散

（C）$\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x(x+1)}$ 发散，$\int_0^1\frac{dx}{x(1+x)}$ 收敛　　（D）$\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x(x+1)}$ 收敛，$\int_0^1\frac{dx}{x(1+x)}$ 发散

56.下列广义积发散的是（　　）

（A）$\int_{-1}^1\frac{dx}{\sin x}$　　（B）$\int_{-1}^1\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$　　（C）$\int_0^{+\infty}e^{-x^2}dx$　　（D）$\int_2^{+\infty}\frac{dx}{2\ln^2 x}$

57. $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x(x^2+1)}=$ ________.