

# 解答题

## 1.

先设棋盘尺寸为 $n \times n$ ，求出通解后，再带入国际象棋棋盘实际尺寸 $8 \times 8$ 计算结果。

约定起点单元格为棋盘左上角 $(1, 1)$ ，行为第一个维度，列为第二个维度。

### 动态规划

定义二维数组 $dp$ ，其中数组元素 $dp[i][j]$  ( $1 \leq i, j \leq n$ )表示车从起点 $(1, 1)$ 到达位置 $(i, j)$ 最短路径的数量。

$dp$ 的元素间存在递归关系： $dp[i][j] = dp[i-1][j] + dp[i][j-1]$ 。

因为车到达位置 $(i, j)$ 的最短路径数量等于其从上方移动到该位置和从左侧移动到该位置两种情况最短路径最大数量之和，所以这两种情况所对应的最短路径分别应为：

- $\max(dp[k][j]), 1 \leq k \leq i-1$
- $\max(dp[i][h]), 1 \leq h \leq j-1$

但由于二维数组每一行、每一列都存在递增关系，以上两项可以简化为 $dp[i-1][j]$ 和 $dp[i][j-1]$ ，即得到递推关系式。

初始化 $dp$ ， $(1, 1)$ 为0，车只需一步抵达所在行或列任意位置，因此第一行、第一列都初始化为1。

	1	2	3	...	n
1	0	1	1	...	1
2	1			...	
3	1			...	
...	...	...	...	...	...
n	1			...	

利用递推关系按照行优先填表，即顺序为 $(2, 2) \rightarrow (2, 3) \rightarrow \dots (2, n) \rightarrow (3, 2) \rightarrow \dots (n, n)$

对于国际象棋棋盘 $n = 8$ 的情况，填表结果如下：

	1	2	3	4	5	6	7	8
1	0	1	1	1	1	1	1	1
2	1	2	3	4	5	6	7	8
3	1	3	6	10	15	21	28	36
4	1	4	10	20	35	56	84	120
5	1	5	15	35	70	126	210	330
6	1	6	21	56	126	252	462	792
7	1	7	28	84	210	462	924	1716
8	1	8	36	120	330	792	1716	3432

$dp$ 表格 $(8, 8)$ 的值即为结果3432。

## 基本排列组合

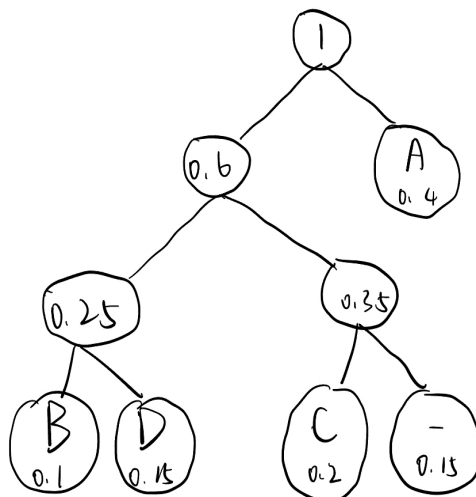
从 $(1, 1)$ 抵达 $(n, n)$ 最短路径需要向右 $n - 1$ 步、向下 $n - 1$ 步。因此，将问题看成：在 $2n - 2$ 个步中，选出 $n - 1$ 步使之成为向右的步，则剩下的 $n - 1$ 步成为向下的步。

因此通解为： $\binom{n-1}{2n-2}$

对于国际象棋棋盘 $n = 8$ 的情况，计算 $\binom{7}{14} = 3432$ 。

## 2.

1. 一种可能的哈夫曼编码如下面的哈夫曼树所示：



规定向左为0，向右为1，则哈夫曼编码为：

- A : 1
- B : 000
- C : 010
- D : 001
- - : 011

2. 用上面编码对ABACABAD编码对结果为：1000101010001001

3. 用上面编码对100010111001010 解码结果为：ABA-ADC